

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO



DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
CAMPUS LEÓN

TÉRMINO
COSMOLÓGICO VARIABLE EN EL TIEMPO

MARCO ANTONIO D'OLEIRE DÍAZ

MAESTRÍA EN FÍSICA

ASESOR: JOSÉ SOCORRO GARCIA-DÍAZ

FEBRERO 2014

AGRADECIMIENTOS

A mis Padres, Antonio y Elisa, por estar siempre ahí y darme la fortaleza necesaria en momentos de debilidad.

A mis Hermanos, por su agradable compañía y buenos consejos.

A Adela Rabell, por estos casi tres maravillosos años.

A mis Amigos, por estar siempre al pendiente de mi.

A CONACyT por el soporte económico para poder realizar este sueño.

Índice general

1	INTRODUCCIÓN	5
2	Antecedentes	9
3	Elementos de Relatividad General y Cosmología	17
3.1	Relatividad General	17
3.2	Cosmología y Ecuaciones de Einstein	18
4	Parámetro cosmológico	25
4.1	Densidad Lagrangiana para modelo con parámetro cosmológico variable en el tiempo	26
4.2	Λ como Constante Cosmológica (CC)	27
4.2.1	Universo vacío con constante cosmológica y curvatura cero	27
4.2.2	Universo vacío, con CC y curvatura	28
4.2.3	Universo con materia, CC y curvatura	28
4.3	Soluciones a la Hamilton-Jacobi: Formalismo Hamiltoniano	32
4.4	Término cosmológico dependiente del tiempo	33
4.4.1	Densidad del campo ϕ proporcional a ρ .	34
4.4.2	Rama positiva: $0 < \omega_\phi = \gamma < 1, \rightarrow \frac{1}{2}\phi'^2 = \frac{1-\omega_\phi}{1+\omega_\phi} V(\phi)$	34
4.4.3	Rama negativa: $-1 < \omega_\phi < 0, \rightarrow p_\phi = - \omega \rho_\phi; \rightarrow \frac{1}{2}\phi'^2 = \beta_\phi V(\phi), \beta_\phi = \frac{1- \omega_\phi }{1+ \omega_\phi }$	36
5	Análisis cuántico	39
5.1	Primera propuesta, soluciones a la ecuación (5.5)	41
5.1.1	Escenario tipo inflacionario ($\gamma = -1$).	41
5.1.2	Era con polvo ($\gamma = 0$), universo plano ($\kappa = 0$) y $q \neq 0$.	44
5.1.3	Fluido rígido ($\gamma = 1$) y universo plano ($\kappa = 0$) y $q \neq 0$.	45
5.2	Segundo enfoque, soluciones a la ecuación (5.6)	46
6	Conclusiones	51
A	Código REDUCE	53

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia de la Relatividad General (RG) se ha considerado y se ha desechado la idea introducida por Albert Einstein de una constante cosmológica (CC), introducida en principio para que fuera la responsable de actuar como una fuerza “antri-gravitatoria” que mantuviera al universo en un estado estático, ya que hasta antes de 1929 se consideraba que el universo se encontraba en ese estado, esto debido a que las observaciones realizadas en ese tiempo solo mostraban que las estrellas cercanas se movían, unas alejándose y otras acercándose a nosotros, esto no daba ningún motivo para pensar en un universo en expansión o contracción. Basado en esas observaciones A. Einstein se sintió motivado para afirmar que el universo era estático con densidad de energía positiva y presión despreciable. Como la teoría de la Relatividad General predecía un universo en expansión (o en contracción), lo cual iba en contra de la evidencia que daban las observaciones, Einstein se formuló la pregunta ¿Puede un universo “lleno” sólo de materia no relativista ser estático?, la respuesta es ¡no!, un universo lleno sólo de materia no relativista debe expandirse o contraerse. Algo andaba mal con la Relatividad General y debía corregirse, así, A. Einstein decidió introducir un término que después llamó **constante cosmológica** (Λ) como un factor para contrarrestar la expansión (o contracción) del universo en RG, de manera que la teoría concordaba con las observaciones hechas y se tenía un modelo de universo estático.

En 1929 E. Hubble descubrió (en base a sus observaciones) que el universo no es estático, más aún, Hubble afirmó que el universo está en expansión, Einstein al tener noticias de dichas observaciones se refirió a la constante cosmológica como *the greatest blunder of my life*, y la desechó por completo de su teoría (esto en 1931). Sin embargo, hay buenas razones para creer que este término tuvo una contribución apreciable al inicio del universo, y así, a partir de ese momento se empezaría a pensar en la CC como parte inherente del mismo, algunos autores la usaron para ajustar el tiempo de Hubble, otros le dieron un significado físico al asociarla con la energía de vacío [1], y recientemente se ha propuesto que la CC puede ser la responsable de la expansión acelerada (actual) del universo [2].

Las recientes observaciones han servido para afirmar que el universo se expande

de manera acelerada, y para revivir el tema de la constante cosmológica, dándole una importancia aún mayor. Existen muchas teorías que intentan describir al componente que pudiera ser el responsable de dicha aceleración del universo, se sabe que para que un componente pueda ser el responsable de ese efecto debe tener presión negativa y una densidad de energía positiva, así algunos de los candidatos que se han dado son:

- Campo Quintaescencia.
- Campo phantom.
- Campos Quintom.
- Constante cosmológica
- **Término cosmológico variable en el tiempo**, entre otros.

Respecto a la CC cabe hacer muchas preguntas ¿que representa físicamente?, ¿Realmente representa la energía del vacío o representa algo distinto?, ¿Que implicaciones se tienen si la CC es un término no constante en el tiempo?, ¿Cuál es el comportamiento de la CC (constante o variable en el tiempo) y que papel juega en el desarrollo del universo que conocemos y estudiamos hoy en día?, aún hay mucho por investigar en este tema. Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campo este término corresponde a la energía de vacío, pero el valor que se le ha dado es mucho mayor que el valor observado. Esta discrepancia es conocida como *problema de la constante cosmológica* [3]. En física de partículas la solución a este problema se basa en encontrar un mecanismo que haga a este término desaparecer, pero no hay forma de hacer $\Lambda = 0$ sin que el resultado sea una solución estática inestable (pensando sólo en RG), se tiene que considerar $\Lambda \neq 0$, si se considera $\Lambda > 0$ en un universo sin materia $T_{\mu\nu} = 0$, entonces se tiene una solución a las ecuaciones de Einstein como un universo de de Sitter. Si se toma a $\Lambda < 0$ entonces se tiene un universo que reollapse, independientemente de la curvatura espacial. Otra alternativa es simplemente que mientras el universo evoluciona, este término evoluciona también y decrece hasta llegar a su valor actual y en este orden de ideas tenemos un término cosmológico Λ pequeño ya que el universo es viejo[4].

La historia del término cosmológico variable en el tiempo empieza con P. Dirac, quien propuso que la constante G ya no fuera más una constante real, sino que **en cosmología se comportará como una entidad variable en el tiempo** $G(t)$. Después de el trabajo de Dirac hay muchos trabajos que sugieren que algunas *constantes*, que eran tratadas como verdaderas constantes ya no lo sean más en cosmología[5]. Aquí haremos el análisis de la constante cosmológica desde ese punto de vista.

S. Weinberg estableció muy convincentemente: "Queremos explicar por qué el término cosmológico efectivo es pequeño, no por qué siempre ha sido pequeño". Es decir buscamos un tratamiento dinámico de Λ .

En los últimos años ha surgido una serie importante de artículos relacionados con el término cosmológico dependiente del tiempo (Ozer and Taha, Vishwakarma, Berman,

etc.) [6, 5, 7, 8, 9, 10, 11]. La principal razón de dicho interés en este tema está relacionado con la posibilidad de darle un tratamiento dinámico al vacío, tal como es preciso en muchos escenarios inflacionarios. En este sentido han aparecido algunos modelos, la mayoría de ellos trabajan con teorías tenso-escalares de la gravedad[12].

El presente trabajo se desarrolla de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se da una serie de antecedentes de algunos artículos que se consideran importantes ya que se pueden hacer ciertas comparaciones entre esos trabajos y el que se presenta en esta tesis. Los trabajos que se han encontrado se desarrollan partiendo de modificaciones a las ecuaciones de Einstein, es decir, sin partir de una teoría covariante (la cual puede ser obtenida de principio variacional). Se podrá ver que estos trabajos llegan a resultados parecidos a los obtenidos en este trabajo, el cual parte de una teoría covariante.

El capítulo 3 da una breve introducción a los conceptos fundamentales de la teoría de la Relatividad General, destacando el significado físico de sus elementos fundamentales y asociándolos con la cosmología. Se obtienen también los resultados que se usarán a lo largo del trabajo para desarrollar de manera correcta el modelo que se estudiará.

En el capítulo 4 se comienza con el estudio formal de la teoría a partir de el Lagrangiano correspondiente a un modelo que incluye al parámetro cosmológico variable en el tiempo caracterizado con un campo escalar ϕ con energía cinética modulada por un parámetro ω y un potencial arbitrario $V(\phi)$, a partir de esta densidad se obtendrán las ecuaciones de Einstein usando el modelo de Friedmann-Robertson-Walker y se intentarán resolver de forma general cuando sea posible. El desarrollo se hará partiendo de Λ como una constante hasta llegar a considerarse como variable en el tiempo.

El capítulo 5 trata el análisis cuántico del problema, considerando 3 casos principales. 1) Se cuantizará el caso en el que $V(\phi) = 2\Lambda = cte$, y se hará cero la energía potencial del campo, así la función de onda tendrá solamente información del factor de escala y de la CC. 2) Se emplea la misma hipótesis que en el caso clásico, con lo cual la función de onda sólo dependerá del factor de escala. 3) Éste último enfoque será el tradicional, es decir, la densidad Hamiltoniana se eleva a carácter de operador y se aplica a una función de onda que dependerá de las dos variables del problema (A, ϕ) .

El capítulo 6 contiene las conclusiones y las perspectivas a futuro que se tienen para el presente trabajo.

En el apéndice se muestra el código computacional REDUCE que se usó para obtener los resultados de los elementos de Relatividad General.

Capítulo 2

Antecedentes

En este apartado haremos una breve recapitulación de artículos relacionados con el término cosmológico variable en el tiempo, veremos que todos ellos coinciden en que éste es uno de los candidatos más fuertes que se tienen para modelar la evolución de la energía oscura. Veremos también en este resumen que se hacen diferentes consideraciones para la forma que debe tener el término cosmológico de acuerdo a los diferentes modelos, algunos lo relacionan con el parámetro de Hubble mientras otros le dan una relación con la densidad de materia-energía.

Es necesario mencionar que éste resumen se hace con el objetivo de resaltar las principales diferencias entre los artículos mencionados y la presente tesis, así como también resaltar que aun teniendo estas diferencias se pueden obtener resultados similares, lo cual nos lleva a dejar algunas preguntas abiertas al final de este capítulo.

- **R. G. Vishwakarma**[6] menciona que una aproximación fenomenológica muy estudiada afirma que el valor de la constante cosmológica se ha relajado conforme el universo crece debido al acoplamiento de los grados de libertad dinámicos con los campos de materia del universo. Entonces se puede afirmar que el valor de la CC es pequeño por que el universo es viejo. Muchos anzasts se han propuesto, de especial interés para el autor es $\Lambda \propto A^{-2}$ propuesto por Chen y Wu, Vishwakarma modifica este anzast al introducir el parámetro de densidad Ω

$$\Lambda = n\Omega H^2 \quad (2.1)$$

con n un parámetro cosmológico dimensional por determinar. La ecuación anterior pone a Λ en el mismo contexto que la densidad de energía. Se trabaja el modelo FLRW, la ecuación de conservación de la energía a la que llega es

$$\dot{\rho} + 3(1 + \omega)\rho \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{\Lambda}}{8\pi G} = 0 \quad (2.2)$$

y la solución para la densidad, factor de escala (con curvatura $\kappa = 0$) y parámetro cosmológico son:

Densidad	$\rho = CA^{-9(1+\omega)/(n+3)}, \quad n \neq -3, \quad C = cte > 0$
Factor de escala	$S = \left[3(1+\gamma) \sqrt{\frac{2\pi G C}{n+3}} t \right]^{\frac{2}{3(n+3)/(1+\omega)}}$
Parámetro cosmológico	$\Lambda = \frac{4n(n+3)}{27(1+\gamma)} t^{-2}$

Los resultados de este trabajo ajustan de manera aceptable con las observaciones cuando $\kappa = 0$.

- Por su parte **Utpal Mukhopadhyay et al**[7] mencionan que el concepto de energía oscura y de expansión acelerada del universo aparentemente es inherente al término $\Lambda(t)$. Usan la métrica FLRW y Aquí como en el trabajo [6] se toma la dependencia del término cosmológico como $\Lambda = \alpha H^2$ con $0 < \alpha < 3$, obteniendo

Densidad (actual)	$\rho_0 = \frac{\Lambda_0}{8\pi G \alpha} (3 - \alpha)$
Presión (actual)	$p_0 = -\frac{\Lambda_0}{8\pi G \alpha} (1 - \alpha - 2q_0)$
Ecuación barotrópica de estado	$\gamma_0 = \frac{p_0}{\rho_0} = -\frac{1 - \alpha - 2q_0}{3 - \alpha}$
Parámetro de desaceleración	$q_0 = \frac{3 - \alpha}{2} \gamma_0 + \frac{\alpha - \alpha}{2}$

Bajo la condición de $\alpha = 1$ y sumando las ecuaciones de la presión y la densidad se tiene

$$p_0 + \rho_0 = \frac{\Lambda_0}{4\pi G} (1 + q_0) \quad (2.3)$$

Si se considera un campo escalar ϕ que se rige por la ecuación de Klein-Gordon, entonces por la aproximación de "slow-rolling" se tiene $p_0 + \rho_0 = \dot{\phi}^2 \approx 0$, lo cual se obtiene en este trabajo para $q = -1$. Para un universo en expansión se encuentra que $q > -1$. Ahora, teniendo en cuenta la dependencia del término cosmológico $\Lambda = \alpha H^2$, obtienen $q_0 = -1 - \frac{\Lambda_0}{2\alpha H_0^3}$, esto demuestra que para $\Lambda_0 = 0$ o para $\Lambda_0/H_0^3 = cte$, el universo ha evolucionado con una aceleración constante. De los resultados obtenidos se argumenta que el parámetro cosmológico Λ es el que determina la geometría del universo y además lo hizo durante la inflación.

- En otro trabajo **Mukhopadhyay, et al** [8] presentan tres tipos de modelos para Λ , $\Lambda \sim (\dot{a}/a)^2$, $\Lambda \sim \ddot{a}/a$ y $\Lambda \sim \rho$. También demuestra que es posible mostrar la equivalencia de estos tres modelos en términos de sus soluciones, obtenidas por la conexión de sus parámetros libres α , β y γ de estos modelos con Ω_m y Ω_Λ , los parámetros de densidad de materia y de energía de vacío del universo. De nuevo se trabaja con la métrica FLRW y al relacionar las ecs. de Friedmann, Raychaudhuri, la de conservación y la ecuación de estado se obtienen

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G}{3}(1+3\gamma)\rho = \frac{\Lambda}{3} \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left[3\left(\frac{1+\gamma}{1+3\gamma}\right) - 1\right] \frac{d\dot{a}}{a} + \frac{\kappa}{a^2} = \left(\frac{1+\gamma}{1+3\gamma}\right)\Lambda \quad (2.5)$$

De estas ecuaciones hace evidente que Λ depende de \ddot{a}/a , ρ y $(\dot{a}/a)^2$.

Si se usa $\Lambda = 3\alpha(\dot{a}/a)^2 = 3\alpha H^2$, con α cte y H el parámetro de Hubble, para un universo plano la ec. 2.5 se reduce a

$$2a\ddot{a} + (1+3\gamma-3\gamma\alpha-3\alpha)\dot{a}^2 = 0 \quad (2.6)$$

Dando las soluciones

Densidad	$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G(1-\alpha)(a+\gamma)^2} t^{-2}$
Factor de escala	$a(t) = C_1 t^{2/3(1-\alpha)(1+\gamma)}$
Parámetro cosmológico	$\Lambda(t) = \frac{4\alpha}{3(1-\alpha)^2(1+\gamma)^2} t^{-2}$
Parámetro de desaceleración	$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{3(1-\alpha)(1+\gamma)}{2} - 1$

con C_1 la cte. de integración, $0 < \alpha < 1$. De manera similar se puede establecer $\Lambda = \beta(\ddot{a}/a)$ y también $\Lambda = 8\pi G\omega\rho$ con β y ω parámetros libres, para $\kappa = 0$ se puede demostrar que el factor de escala sigue la misma ley de potencias que la ec. correspondiente de la tabla anterior.

El parámetro de desaceleración está dado en la forma

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{3(1-\alpha)(1+\gamma)}{2} - 1 \quad (2.7)$$

Para un universo en expansión α debe cumplir

$$\alpha > \frac{1+3\gamma}{3(1+\gamma)} \quad (2.8)$$

- Marcelo Samuel Berman**[9] por su parte inicia con el tensor E-M, que tiene una parte extra correspondiente al término cosmológico variable en el tiempo y el cual se interpreta como la contribución del vacío

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_\mu U_\nu - \Lambda(t) g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

Obtiene las siguientes ecs. de Einstein para una métrica FRW

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \Lambda) - \kappa R^{-2}, \quad (2.10)$$

$$\frac{d(\rho R^3)}{dt} + p \frac{dR^3}{dt} + R^3 \frac{d\Lambda}{dt} = 0 \quad (2.11)$$

Para darle solución se trabaja fluido perfecto, y así, el parámetro de desaceleración, el factor de escala y el parámetro de Hubble son,

Factor de escala	$R = (mDt)^{1/m}$
Parámetro de Hubble	$H = \frac{1}{mt}$
Parámetro de desaceleración	$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = m - 1 = cte$

En donde D es una constante, postulando a $\Lambda(t) = Bt^{-2}$ con $B = cte$, $\rho(t) = At^{-2}$ con $A = cte$, se pueden resolver las ecuaciones de Einstein proponiendo a $m^{-2} = \frac{8\pi G}{3}(A + B)$, $2B = (1 + 3\gamma)A$ y $\kappa = 0$.

El problema con los modelos de Λ -variable es la creación de partículas. Para la fase libre de presión ($\gamma = 0$), se tiene (en este modelo)

$$\rho R \propto t^{3/m-2} \quad (2.12)$$

y a fin de no tener creación, se impone

$$m = \frac{3}{2}, \quad \text{i.e.,} \quad q = \frac{1}{2} \quad (2.13)$$

Lo que lleva a la ley para el universo presente:

$$R = \left(\frac{3}{2}Dt\right)^{2/3} \quad (2.14)$$

La variación de Λ "explica" por qué Λ es, para el universo presente, despreciable, pero fue muy grande en eras tempranas.

- Lin Xu[?] parte de $\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda(t)}{8\pi G}g_{\mu\nu}$, como el tensor de energía-momento total. Para un espacio FRW

$$\dot{\rho}_\Lambda + \dot{\rho}_m + 3H(1 + \omega_m)\rho_m = 0 \quad (2.15)$$

con la densidad de energía de la CC variable en el tiempo $\rho_\Lambda = M_p^2 \Lambda(t)$ y su ecuación de estado es $\omega_\Lambda = -1$ y ω_m es la ecuación de estado de la materia ordinaria, para materia oscura $\omega_m = 0$. Se introduce el término de interacción entre la variable cosmológica y materia oscura, para obtener

$$\dot{\rho}_m + 3H(1 + \omega_m)\rho_m = Q \quad (2.16)$$

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3H(\omega_\Lambda + p_\Lambda)\rho_m = -Q \quad (2.17)$$

La ecuación de conservación de energía-momento total es

$$\dot{\rho}_{tot} + 3H(\rho_{tot} + p_{tot}) = 0 \quad (2.18)$$

Se sigue cumpliendo para CC variable en el tiempo $\rho_\Lambda + p_\Lambda = 0$. Se obtiene inmediatamente el término de interacción $Q = -\dot{\rho}_\Lambda$. La presión efectiva de CC variable-energía oscura

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3H(\rho_\Lambda + p_\Lambda^{eff}) = 0 \quad (2.19)$$

con $p_\Lambda^{eff} = p_\Lambda + \frac{Q}{3H}$ la presión efectiva de la energía oscura. Se puede definir la ecuación de estado efectiva de la energía oscura

$$\omega_\Lambda^{eff} = \frac{p_\Lambda^{eff}}{\rho_\Lambda} = -1 - \frac{1}{3} \frac{d \ln \rho_\Lambda}{d \ln a} \quad (2.20)$$

Se usan dos modelos para la interacción efectiva entre la CC y la energía oscura fría (CDM)

Modelo A: $\mu^2 = \dot{H} + 2H^2$

La CC puede escribirse como

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \left(L_0 + L_1 \frac{\dot{H} + 2H^2}{H_0 + 2H_0^2} \right) \quad (2.21)$$

La correspondiente densidad de energía del vacío es

$$\rho_\Lambda = M_p^2 \Lambda_0 [L_0 + M_0(\dot{H} + 2H^2)] \quad (2.22)$$

con $M_0 = (1 - L_0)/(H_0 + 2H_0^2)$. Usamos los parámetros de densidad adimensionales $\Omega_m(z) = \rho_m/(3M_p^2 H^2)$ y $\Omega_\Lambda(z) = \rho_\Lambda/(3M_p^2 H^2)$, para tener la ecuación de conservación

$$\dot{H} + \frac{3}{2}H^2(1 - \Omega_\Lambda) = 0 \quad (2.23)$$

con solución

$$E(z) = \left[1 - \frac{B'_0}{3 - 2A_0} \right] (1+z)^{3+A_0/(A_0-2)} + \frac{B'_0}{3 - 2A_0} \quad (2.24)$$

Modelo B: $\mu^2 = -\dot{H}$

En este caso la CC se puede escribir como

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \left(L_0 + L_1 \frac{\dot{H}}{H_0} \right) \quad (2.25)$$

escribiendo la densidad adimensional $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda_0}{3H^2} (L_0 + N_0 \dot{H})$, obtenemos

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\left(1 - \frac{B'_0}{3} \right) (1+z)^{\frac{6}{2-C_0}} + \frac{B'_0}{3} \right] \quad (2.26)$$

Cuando $C_0 = 0$, i.e., $L_0 = 1$ se recupera Λ CDM.

- Por su parte **Fomin, Nakaznoy y Vilchinskyi**[13] mencionan que, si la interacción gravitacional está descrita por el lagrangiano de la forma $\frac{1}{G}(R-2\Lambda)$, entonces existe una CC intrínseca. Para ésta forma de CC se tienen las ecs. de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R - \Lambda_0 g_{\alpha\beta} = \xi T_{\alpha\beta} - \xi R g_{\alpha\beta} \quad (2.27)$$

con $\xi = \frac{8\pi\gamma}{c^4}$, se asume un universo cerrado, homogéneo e isotrópico, y se usa el modelo FRW, teniendo las ecuaciones de Friedmann

$$\begin{cases} \dot{a}^2 + c^2 = \frac{1}{3}\xi c^2 a^2 (\epsilon + \epsilon\nu) \\ \ddot{a} = -\frac{1}{6}\xi c^2 a (\epsilon + 3p - 2\epsilon\nu) \end{cases} \quad (2.28)$$

Para el modelo que se maneja se tiene

$$\begin{cases} \dot{a}^2 + fc^2 = \frac{\xi c^2}{1-4k} a^2 \left(\epsilon \left(\frac{1}{3} - k \right) - pk + \frac{\lambda_0}{3} \right) \\ \ddot{a} = \frac{\xi c^2}{1-4k} a \left(\epsilon \left(\frac{1}{6} - k \right) + p \left(\frac{1}{2} - k \right) - \frac{\lambda_0}{3} \right) \\ p = \nu\epsilon \end{cases} \quad (2.29)$$

en donde ν_i es el que determina la ecuación de estado, para $\nu = 0$ se tiene presión cero, para radiación pura $\nu = \frac{1}{3}$ y para materia dura $\nu = 1$. Para las ecuaciones de Friedmann siguiendo el principio de cambio de densidad de energía

$$\epsilon a^\sigma = cte, \quad \sigma = \frac{3(1-4k)(\nu+1)}{1-3k(\nu+1)} \quad (2.30)$$

Para los diferentes valores se tiene entonces

$$\begin{cases} \nu = 0 \Rightarrow \epsilon a^{\frac{3(1-4k)}{1-3k}} = \epsilon_0 a_0^{\frac{3(1-4k)}{1-3k}} \\ \nu = \frac{1}{3} \Rightarrow \epsilon a^4 = \epsilon_0 a_0^4 \\ \nu = 1 \Rightarrow \epsilon a^{\frac{6(1-4k)}{1-6k}} = \epsilon_0 a_0^{\frac{6(1-4k)}{1-6k}} \end{cases} \quad (2.31)$$

En donde ϵ_0 y a_0 son los valores actuales. Se puede escribir Λ en función de a

$$\Lambda = \frac{3\Omega_0}{(1-4k)a_0^2} + \frac{3k}{1-4k} \left((1-3\nu_D)\Omega_{D0} \frac{a_0^{\sigma_D-2}}{a^{\sigma_D}} + \Omega_{B0} \frac{a_0^{\sigma_B-2}}{a^{\sigma_B}} \right) \quad (2.32)$$

con

$$\Omega_0 = \omega_{\Lambda 0} - k(4\omega_{D0}(1-3\nu_D) + \omega_{B0}) \quad (2.33)$$

Después hacen cálculos numéricos para dos valores de la ec.de estado de la energía oscura $\nu_D = 0$ y $\nu_D = 1$.

La presencia de Λ altera la evolución del factor de escala en épocas tempranas.

Hemos visto que estos diferentes trabajos dan buenos resultados al hacer el análisis del término cosmológico variable en el tiempo y compararlos con las observaciones disponibles. Sin embargo todos carecen de una teoría covariante que respalde de manera convincente el resultado o resultados obtenidos, todos ellos parten de la modificación de las ecuaciones de Einstein al añadirle el término de la constante cosmológica y resolver para el modelo particular que usan. Durante el desarrollo de esta tesis veremos que esto representa una de las principales diferencias entre este y esos trabajos, ya que aquí partimos del uso de una teoría covariante, entendiendo esto como una teoría que parte de funciones primarias (como el Lagrangiano), que se desarrolla y resuelve de la misma manera que en la mecánica clásica, además de que se hace también el estudio cuántico de este modelo.

Cabría dejar abierta la pregunta ¿Qué diferencias existen entre los modelos que no parten de una teoría covariante y aquellos que si lo hacen?, es decir ¿Qué implicaciones o que diferencias se observarían a grandes escalas?.

Capítulo 3

Elementos de Relatividad General y Cosmología

3.1. Relatividad General

La relatividad general (RG) es una teoría de campo gravitatorio y de los sistemas de referencia generales, fue publicada entre 1915 y 1916. La RG es una generalización hecha por A. Einstein a su teoría de la relatividad especial (RE), la cual da una nueva visión a la teoría Newtoniana al rechazar los conceptos de espacio y tiempo absolutos, esto tiene como consecuencia inmediata la imposibilidad de definir la velocidad absoluta de un cuerpo, solo tiene significado la velocidad relativa respecto a otro cuerpo. Sin embargo al tener definidos los sistemas de referencia inerciales (pensando en RE) puede notarse que la aceleración sigue siendo un concepto absoluto. En RG la aceleración pierde ese grado absoluto ya que en esta teoría no hay sistemas de referencia preferentes, es decir no hay sistemas de referencia inerciales (al menos a nivel global), todos los sistemas son equivalentes.

La generalización de RE a RG se hace al considerar al espacio plano (de Minkowsky) como la manera más simple del espacio curvo (de Riemann), esto es, se reemplaza el espacio de Minkowsky por un espacio de Riemann en el cual no hay sistemas de referencia preferenciales. En RG el campo gravitatorio es la consecuencia de tener un espacio curvo, entonces se puede decir que la RG es la *geometrización* del campo gravitacional[14].

Los principios fundamentales de la RG son:

Principio de covariancia generalizado: Las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia, es decir, los sistemas de referencia deben ser indistinguibles y desde el punto de vista físico, equivalentes.

Principio de equivalencia: “Las fuerzas gravitacional e inercial son completamen-

te equivalentes desde el punto de vista físico"[15]; i.e., son de una naturaleza idéntica y es imposible separarlas mediante experimentos físicos.

Principio de acoplamiento mínimo: Éste indica como hacer que una ley o formulación física sea invariante bajo una transformación, ya sea una transformación de coordenadas o una transformación de norma.

3.2. Cosmología y Ecuaciones de Einstein

Una de las principales aplicaciones (y de las más exitosas) de la RG es la *cosmología*, ésta encuentra su base teórica en la RG y describe la evolución del universo. La cosmología ha ido desarrollándose a lo largo de los siglos, surgiendo puramente observacional, primero creyendo que la tierra era el centro de todo, después (con Copernico) situando al sol en el centro del universo y finalmente sabiendo que *no hay centro del universo*. A partir de principios del siglo pasado empieza a desarrollarse teóricamente.

La base de la cosmología moderna es el *principio cosmológico* que exige un universo isotrópico y homogéneo, en donde cada uno de estos términos se definen como sigue[16]:

- No hay direcciones espaciales preferenciales, las galaxias están igualmente distribuidas en diferentes direcciones angulares a grandes escalas. Entonces se dice que el universo es *isotrópico*.
- No hay puntos preferenciales en el universo, las galaxias están igualmente distribuidas en el espacio a grandes escalas. Se dice que el universo es *homogéneo*.

Este principio no se cumple a pequeñas escalas, existen ciertas inhomogeneidades en la distribución y también ciertas direcciones preferenciales.

Basándose en la homogeneidad y la isotropía se puede foliar el espacio-tiempo en secciones espaciales, cada una de esas secciones puede identificarse con un tiempo cosmológico, asumiendo la isotropía, nos permite suponer que la dirección temporal es ortogonal a las secciones espaciales, si esto no fuera así, la proyección del vector temporal en las secciones espaciales daría una dirección preferencial en el espacio, lo que violaría el principio cosmológico[16]. El elemento de línea que considera todas estas suposiciones y con el que se trabajará es el que fue dado por *Friedmann-Robertson-Walker* (FRW)[1]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N^2(t)dt^2 + A^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \right] \quad (3.1)$$

donde, el parámetro $N(t)$ es llamado *Función de lapse*, que se interpreta como la separación temporal entre cada una de las hipersuperficies espaciales (recordar que

estas hipersuperficies no pueden intersectarse en ningún punto [17]), $A(t)$ es el *factor de escala del universo*[18], κ es una constante que determina la curvatura que tendrá el universo según tome los siguientes valores:

$$\kappa = \begin{cases} 0 & \text{Espacio plano (Minkowsky)} \\ -1 & \text{Espacio abierto (3-Hiperboloide)} \\ 1 & \text{Espacio cerrado (3-Esfera)} \end{cases}$$

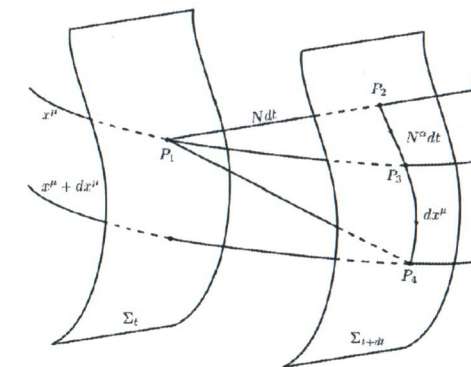


Figura 3.1: Representación gráfica de las funciones de lapse y shift n^i es un vector de campo unitario y normal a Σ_t .

Del elemento de línea (3.1) se pueden identificar los elementos de la matriz que se asocia a la métrica del modelo, en su forma covariante éste tensor métrico (usado para definir como se mide el espacio) tiene la forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^2}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Ésta ya constituye la métrica de un modelo cosmológico, a partir de la cual se obtienen los siguientes elementos, que permitirán calcular de manera particular las ecuaciones de campo a las cuales se aplicarán las suposiciones necesarias para resolver los problemas que se plantearán mas adelante. Cabe destacar que los elementos se obtuvieron con ayuda del programa computacional REDUCE, cuyo código se muestra en el apéndice A de este trabajo.

La forma contravariante de la métrica es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\kappa r^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A^2 r^2 \sin^2(\theta)} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Se empieza por obtener los símbolos de Christoffel que surgen de la generalización del movimiento inercial (en relatividad especial) que ocurre en un espacio de Minkowsky parametrizado por el tiempo propio, dicha generalización está dada por la ecuación de la geodésica, ésta es la ecuación que siguen las partículas cuando están en caída libre (o simplemente la distancia más corta entre dos puntos de un espacio curvo):

$$\frac{\partial^2 x^a}{\partial \tau^2} + \Gamma_{\beta\sigma}^a \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tau} = 0 \quad (3.4)$$

Donde $\Gamma_{\beta\sigma}^a$ son los símbolos de Christoffel, que en relación al tensor métrico se definen por[19]

$$\Gamma_{\beta\sigma}^a = \frac{1}{2} g^{\alpha\eta} [g_{\sigma\eta,\beta} + g_{\eta\beta,\sigma} - g_{\beta\sigma,\eta}], \quad (3.5)$$

Para la métrica usada en este trabajo los símbolos de Christoffel son (se muestran sólo aquellos que no se anulan):

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{N}}{N} & \Gamma_{11}^0 &= \frac{-\dot{A}A}{N^2(\kappa r^2 - 1)} \\ \Gamma_{22}^0 &= \frac{\dot{A}Ar^2}{N^2} & \Gamma_{33}^0 &= \frac{\dot{A} \sin^2 \theta Ar^2}{N^2} \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{A}}{A} & \Gamma_{11}^1 &= -\frac{\kappa r}{\kappa r^2 - 1} \\ \Gamma_{33}^1 &= \sin^2 \theta r(\kappa r^2 - 1) & \Gamma_{22}^1 &= r(\kappa r^2 - 1) \\ \Gamma_{33}^2 &= -\cos \theta \sin \theta & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{20}^2 &= \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{A}}{A} & \Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{A}}{A} \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Ahora se calcula el tensor de Riemann o también llamado tensor de Curvatura. En RG las propiedades espaciales están completamente determinadas por el tensor de Riemann, un espacio curvo no solo produce desviación en las trayectorias de las geodésicas (de un espacio plano), también introduce dependencia en la trayectoria que siga el desplazamiento paralelo (relacionado con los símbolos de Christoffel); más aún, causa que las derivadas covariantes no conmuten e impide la existencia de un sistema de coordenadas Lorentziano global. Este tensor tiene 256 componentes, de las cuales solo 20 son independientes debido a la simetría entre sus índices[20]. Los elementos del tensor de Riemann se calculan como[21]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\delta \partial x^\beta} \right) + g_{\epsilon\xi} (\Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon \Gamma_{\alpha\delta}^\xi - \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi) \quad (3.6)$$

Y la simetría que obedecen los índices de este tensor es la siguiente:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (3.7)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \quad (3.8)$$

Aquí se definen las identidades de Bianchi, que se obtienen al derivar la expresión (3.6), haciendo uso de la simetría de la métrica $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ y del hecho de que las derivadas parciales conmutan se llega a

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\gamma;\delta} + R_{\alpha\beta\delta\lambda;\gamma} = 0 \quad (3.9)$$

En el presente trabajo para la métrica FRW las componentes del tensor de Riemann son:

$$\begin{aligned} R_{1010} &= R_{0101} = \frac{A(-\ddot{A}N + \dot{A}\dot{N})}{N(\kappa r^2 - 1)} \\ R_{2020} &= R_{0202} = \frac{Ar^2(\ddot{A}N - \dot{A}\dot{N})}{N} \\ R_{3030} &= R_{0303} = \frac{\sin^2 \theta Ar^2(\ddot{A}N - \dot{A}\dot{N})}{N} \\ R_{2121} &= R_{1212} = \frac{A^2 r^2 (\dot{A}^2 + \kappa N^2)}{N^2(\kappa r^2 - 1)} \\ R_{3131} &= R_{1313} = \frac{\sin^2 \theta A^2 r^2 (\dot{A}^2 + \kappa N^2)}{N^2(\kappa r^2 - 1)} \\ R_{3232} &= R_{2323} = \frac{-\sin^2 \theta A^2 r^4 (\dot{A}^2 + \kappa N^2)}{N^2} \end{aligned}$$

Si el tensor de Riemann (3.6) es idénticamente cero entonces se tiene el caso de un espacio plano. Nótese que un tensor de Riemann cero implica que los símbolos de Christoffel también se anulan.

El tensor de Ricci se obtiene al hacer la contracción del índice contravariante con el segundo índice covariante del tensor de Riemann, este tensor es simétrico en sus índices, por lo cual solo tiene 10 componentes independientes.

$$R_{hi} = R_{hji}^j \quad (3.10)$$

También se puede calcular a partir de los símbolos de Christoffel:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \quad (3.11)$$

Las componentes de este tensor para el presente trabajo son:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{3}{AN}(\ddot{A}N - \dot{A}\dot{N}) \\
R_{11} &= \frac{\ddot{A}AN + 2\dot{A}^2N - \dot{A}\dot{N}A + 2\kappa N^3}{n^3(\kappa r^2 - 1)} \\
R_{22} &= \frac{r^2(-\ddot{A}AN - 2\dot{A}^2N + \dot{A}\dot{N}A - 2\kappa N^3)}{N^3} \\
R_{33} &= \sin^2\theta R_{22}
\end{aligned}$$

Todas las demás componentes son cero.

El escalar de curvatura surge de la contracción del tensor de Ricci

$$g^{\nu\rho}R_{\nu\rho} = R^{\nu}_{\nu} = R \quad (3.12)$$

Su expresión para este trabajo es:

$$R = \frac{6(-AN\ddot{A} - N\dot{A}^2 + \dot{A}\dot{N}A - \kappa N^3)}{A^2N^3}$$

El tensor de Einstein está definido en términos del tensor de Ricci y del escalar de curvatura, es simétrico en sus índices y tiene 10 componentes independientes. Este tensor da la información de la curvatura de la variedad Riemanniana (en geometría diferencial) y en RG aparece relacionado con el tensor energía-momento (que se verá más adelante), explicando la curvatura del espacio-tiempo.

Una de las deducciones de la forma que tiene este tensor puede ser la que se da a partir de la doble contracción de la ec. (3.9), teniendo

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R - g_{\alpha\beta}\Lambda \quad (3.13)$$

Además de esa deducción se llega a una de las relaciones más importantes de la RG

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad (3.14)$$

Las componentes que no se anulan son:

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{-3\dot{A}^2 + A^2\Lambda N^2 - 3\kappa N^2}{A^2} \\
G_{11} &= \frac{-2\ddot{A}AN - \dot{A}^2N + 2\dot{A}\dot{N}A + A^2\Lambda N^3 - \kappa N^3}{N^3(\kappa r^2 - 1)} \\
G_{22} &= \frac{r^2(2\ddot{A}AN + \dot{A}^2N - 2\dot{A}\dot{N}A - A^2\Lambda N^3 + \kappa N^3)}{N^3} \\
G_{33} &= G_{22} \sin^2\theta
\end{aligned}$$

Por otro lado, se sabe que la energía y el momento de una partícula están representados por un quadri-vector. Para un gas de partículas, o para campos (por ejemplo

electromagnéticos), se necesita un tensor de rango 2, tal que combine la densidad de energía, la densidad de momento (o flujo de energía) y flujo de momento o esfuerzo. El tensor *Energía-Momento* es simétrico y se define como

$T^{\mu\nu}$ Es el flujo de momento p^{μ} a través de una superficie de x^{ν} constante.

Debido al principio de equivalencia fuerte que exige conservación de energía y momento a nivel local, este tensor debe cumplir que:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad (3.15)$$

En una base ortonormal, T^{00} es la densidad de energía, T^{0i} es el flujo de energía (la energía que cruza una superficie por unidad de tiempo), y T^{ij} es la componente de esfuerzo. Este tensor es especialmente importante en RG porque es la fuente de la gravedad[22].

El tensor energía-momento para un fluido perfecto ¹ es:

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho)U_{\alpha}U_{\beta} - Pg_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

donde P es la presión del fluido, ρ es la densidad de energía y u_{μ} es la cuadrivelocidad que satisface la relación $u_{\mu}u^{\mu} = -1$ [20]. Las componentes de este tensor son:

$$T_{00} = -\rho g_{00} \quad (3.17)$$

$$T_{ii} = pg_{ii} \quad (3.18)$$

$$T_{i0} = T_{0i} = 0 \quad (3.19)$$

Esto es:

$$T(\rho)_{00} = \rho N^2 \quad (3.20)$$

$$T(\rho)_{11} = \frac{pA^2}{1 - \kappa r^2} \quad (3.21)$$

$$T(\rho)_{22} = pA^2 r^2 \quad (3.22)$$

$$T(\rho)_{33} = pA^2 r^2 \sin^2(\theta) \quad (3.23)$$

¹La forma más sencilla de describir la distribución de materia en el universo que satisface el principio cosmológico es el fluido perfecto, en el cual las galaxias son las partículas que conforman el fluido cósmico. Se asume que la escala de observación es suficientemente grande para que el elemento de volumen contenga un número suficiente de partículas, y el fluido visto como una distribución continua de materia, sea una buena aproximación para describir la dinámica del sistema [23]

y:

$$T(\rho)^{00} = \frac{\rho}{N^2} \quad (3.24)$$

$$T(\rho)^{11} = \frac{\rho(1 - \kappa r^2)}{A^2} \quad (3.25)$$

$$T(\rho)^{22} = \frac{\rho}{A^2 r^2} \quad (3.26)$$

$$T(\rho)^{33} = \frac{\rho}{A^2 r^2 \sin^2(\theta)} \quad (3.27)$$

Usando la geometría del modelo FRW, considerando un fluido perfecto, y tomando en cuenta la covarianza del tensor energía-momento, se obtiene la relación de la densidad de energía y el factor de escala,

$$\rho' + 3(1 + \gamma)\rho \frac{A'}{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = M_\gamma A^{-3(1+\gamma)} \quad (3.28)$$

$$\gamma = \begin{cases} 0 & \text{Polvo} \\ \frac{1}{3} & \text{Radiación} \\ 1 & \text{Materia dura} \\ -1 & \\ -1/3 & \\ -2/3 & \text{Inflación} \end{cases} \quad (3.29)$$

Se puede ver una relación entre dos tensores que se han definido y que son de rango 2, además que obedecen una relación muy particular la cual dice que las divergencias de cada uno de esos tensores son iguales a cero. Dichas relaciones son (3.14) y (3.15), de tal manera que se pueden relacionar:

$$G^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta} \quad (3.30)$$

La expresión anterior representa un conjunto de 16 ecuaciones que es conocido como **Ecuaciones de Einstein**, debido a la simetría de los tensores sólo se tienen 10 ecuaciones acopladas y de esas 10 sólo 6 son independientes. En la expresión anterior k es una constante que se determina al exigir que la RG y en específico las ecuaciones de Einstein predigan de manera correcta el comportamiento de los planetas en el sistema solar[24], esto es, en el límite Newtoniano, en donde ambas teorías deben coincidir en las predicciones.

Todos los elementos obtenidos en este capítulo para la métrica (3.1) se usan posteriormente para obtener la forma de las ecuaciones de Einstein, las cuales se usarán los diferentes casos que se estudiarán.

Capítulo 4

Parámetro cosmológico

En este capítulo se hará uso de los elementos obtenidos en capítulos previos, pero antes se introduce la correspondiente densidad Lagrangiana para un modelo que incluye al parámetro cosmológico variable en el tiempo, caracterizado con un campo escalar ϕ con una energía cinética modulada por un parámetro ω y un potencial arbitrario $V(\phi)$. A partir de esta densidad Lagrangiana se obtienen las ecuaciones de Einstein en forma genérica, posteriormente se aplica el modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que se resolverá de la forma más general cuando sea posible.

Se presentará una evolución del término cosmológico, considerando diversos ingredientes en la densidad lagrangiana de tal modo que se module al término cosmológico desde ser una constante Λ hasta ser dependiente del tiempo, en el siguiente esquema

1. Vacío, curvatura $\kappa = 0$,
2. Vacío, curvatura $\kappa \neq 0$,
3. fluido perfecto barotrópico, $\kappa \neq 0$,

en todos ellos, basta tomar en la densidad Lagrangiana $\omega = 0$, $V(\phi) = 2\Lambda$.

La última propuesta será considerar que el término cosmológico puede mimetizarse con un campo escalar, con ello se elige al parámetro $\omega = 1$ y el potencial escalar se deja arbitrario, con la esperanza de poder resolver completo el sistema de ecuaciones diferenciales que proceden de las ecuaciones de Einstein (4.8,4.9) y de Klein-Gordon (4.11), las cuales se expondrán más adelante.

Toda esta sección se basará en obtener soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein-Klein-Gordon, y en una sección posterior, se buscara obtener por medio de una densidad Hamiltoniana las mismas soluciones mediante un enfoque de la mecánica clásica, Hamilton-Jacobi.

4.1. Densidad Lagrangiana para modelo con parámetro cosmológico variable en el tiempo

La densidad Lagrangiana que se usará es la apropiada al considerar un parámetro cosmológico variable en el tiempo parametrizado con un campo escalar ϕ , el cual está incluido con un parámetro de la teoría ω , energía cinética y un potencial $V(\phi)$

$$\mathcal{L}[g, \phi] = \sqrt{-g} \left(R + 2\Lambda - \frac{\omega}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + V(\phi) \right) + \sqrt{-g} L_{matter} \quad (4.1)$$

A partir de la ecuación (4.1) al hacer las variaciones correspondientes se obtienen las ecuaciones de campo que determinan la dinámica del sistema, la variación respecto a la métrica dará las ecuaciones de Einstein y la variación respecto al campo escalar dará la ecuación de Klein-Gordon,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = G_{\alpha\beta} = -\frac{\omega}{2} \left(\nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right) + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} V(\phi) - 8\pi G T_{\alpha\beta}, \quad (4.2)$$

$$\omega \square \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (4.3)$$

De la ec. (4.2) se identifica que el tensor energía-momento está asociado al campo escalar, y su forma es:

$$T_{\alpha\beta}^{(\phi)} = \frac{\omega}{2} \left(\nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} V(\phi) \quad (4.4)$$

El tensor de fluido perfecto está dado por la ecuación (3.16). Ahora, haciendo uso de la métrica FRW (ecuación (3.1)) y considerando un fluido comóvil en la dirección del tiempo, las ecuaciones (4.2) y (4.3) quedan de la siguiente manera

$$\frac{3\dot{A}^2}{A^2} + \frac{3\kappa N^2}{A^2} - 8\pi G \rho N^2 - \frac{\omega}{4} \dot{\phi}^2 - \frac{N^2 V(\phi)}{2} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{2\ddot{A}A}{N^2} + \frac{\dot{A}^2}{N^2} - \frac{2\dot{A}\dot{N}A}{N^3} + \kappa + 8\pi G A^2 p + \frac{\omega A^2 \dot{\phi}^2}{4N^2} - \frac{1}{2} A^2 V(\phi) = 0, \quad (4.6)$$

$$\omega \left[-3 \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - \frac{\ddot{\phi}}{N^2} + \frac{\dot{\phi}}{N} \frac{\dot{N}}{N^2} \right] - \frac{dV}{N dt} = 0, \quad (4.7)$$

Que se pueden reescribir en el tiempo propio mediante la transformación $d\tau = N dt$, y quedan simplificadas de la siguiente manera ($\cdot \rightarrow \prime$)

$$\frac{3A'^2}{A^2} - \frac{\phi'^2 \omega}{4} - 8\pi G \rho - \frac{V}{2} + \frac{3\kappa}{A^2} = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{2A''}{A} + \frac{A'^2}{A^2} + \frac{\phi'^2 \omega}{4} - \frac{V}{2} + 8\pi G p + \frac{\kappa}{A^2} = 0, \quad (4.9)$$

$$\omega \left[3 \frac{A'}{A} \phi'^2 + \phi' \phi'' \right] = -V', \quad (4.10)$$

donde se usó la regla de la cadena para $\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \phi} = \frac{V'}{\phi'}$ en la última ecuación. La ecuación de Klein-Gordon (4.10) se puede reescribir como

$$\frac{d}{d\tau} \left[\text{Ln} \left(A^6 \frac{\phi'^2}{2} \right) \right] = -\frac{V'}{\frac{\phi'^2}{2}}, \quad (4.11)$$

Con todo lo anterior ya es posible construir de manera completa las ecuaciones de Einstein, y, por lo tanto, es posible empezar el estudio que es el objetivo de este trabajo.

Las ecuaciones de Einstein con materia y constante cosmológica se pueden caracterizar directamente tomando $\omega = 0$ y $V(\phi) = 2\Lambda$, con lo cual, éstas se simplifican, siendo:

$$\frac{3A'^2}{A^2} + \frac{3\kappa}{A^2} - 8\pi G \rho - \Lambda = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3} A^2 \rho + \frac{\Lambda}{3} A^2 - \kappa}} = d\tau, \quad (4.12)$$

$$\frac{2A''}{A} + \frac{A'^2}{A^2} + \frac{\kappa}{A^2} + 8\pi G \gamma \rho - \Lambda = 0. \quad (4.13)$$

4.2. Λ como Constante Cosmológica (CC)

En las siguientes subsecciones se estudiarán casos en que el término cosmológico es una constante, lo cual hace que el parámetro $\omega = 0$ y (como ya se dijo) el potencial escalar tenga el valor $V(\phi) = 2\Lambda$, bajo estas consideraciones se reproducirá al universo con las diferentes configuraciones mencionadas al principio de este capítulo.

4.2.1. Universo vacío con constante cosmológica y curvatura cero

Al considerar un universo vacío, sin curvatura ($\kappa = 0$) y sólo con constante cosmológica, la ecuación de Einstein (4.2) toma la forma:

$$\frac{3A'^2}{A^2} - \Lambda = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{A} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} d\tau \quad (4.14)$$

$$\frac{2A''}{A} + \frac{A'^2}{A^2} - \Lambda = 0, \quad (4.15)$$

La solución de (4.14) es:

$$A(\tau) = A_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Delta \tau} \quad (4.16)$$

donde A_0 es una constante. Claramente se ve que en este caso el factor de escala A depende directamente de la constante cosmológica positiva, y crece exponencialmente con el tiempo, todo esto concuerda con el modelo de De Sitter. Así mismo, ésta solución también satisface la ecuación de Einstein (4.15).

4.2.2. Universo vacío, con CC y curvatura

En esta sección se calcula el factor de escala que tendría un universo vacío, en el cual solo la geometría del espacio-tiempo y la CC contribuyan a la expansión o contracción de este modelo. Partiendo de las ecuaciones de Einstein, se tiene:

$$\frac{3A'^2}{A^2} + \frac{3\kappa}{A^2} - \Lambda = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{\sqrt{A^2 - \frac{3\kappa}{\Lambda}}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} d\tau \quad (4.17)$$

$$\frac{2A''}{A} + \frac{A'^2}{A^2} + \frac{\kappa}{A^2} - \Lambda = 0, \quad (4.18)$$

Al resolver la ecuación (4.17) obtenemos:

$$A(\tau) = A_0 \sqrt{\frac{3\kappa}{\Lambda}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Delta \tau\right) \quad (4.19)$$

Nótese que la curvatura solo puede ser la de un universo cerrado ($\kappa = 1$) (ya que curvatura cero fue la solución exponencial encontrada anteriormente). Si el valor de la curvatura es negativo, implica que la CC también debe ser negativa, esto por el factor que acompaña a la función cosh, pero esta haría que el argumento de este cosh fuese imaginario, lo cual llevaría a una transformación de la función cosh a la función cos, teniendo así un universo oscilatorio, y se sabe que eso no concuerda con las observaciones. De este modo, con $\kappa = 1$, el factor de escala da como resultado un universo en expansión infinita. Puede verificarse que aunque solo se resolvió la ecuación (4.17), la solución también satisface a la ecuación (4.18).

4.2.3. Universo con materia, CC y curvatura.

Ahora se analiza el caso de un universo con materia considerando un fluido perfecto barotrópico, con ecuación de estado $P = \gamma\rho$, donde el parámetro γ parametriza al universo en sus diversas etapas $-1, \frac{1}{3}, 0, 1 \rightarrow$ inflación, radiación, materia dura y polvo, respectivamente. También se incluye el término de curvatura y la CC, lo que hace que el parámetro $\omega = 0$. De manera particular se analizarán algunos casos en donde será necesario que la curvatura se haga cero, es decir, en esos casos se trabajará en el régimen

de universo plano.

Bajo estas condiciones las ecuaciones de Einstein toman la forma:

$$\frac{3A'^2}{A^2} + \frac{3\kappa}{A^2} - 8\pi G\rho - \Lambda = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3} A^2 \rho + \frac{\Lambda}{3} A^2 - \kappa}} = d\tau, \quad (4.20)$$

$$\frac{2A''}{A} + \frac{A'^2}{A^2} + \frac{\kappa}{A^2} + 8\pi G\gamma\rho - \Lambda = 0, \quad (4.21)$$

considerando la ecuación (3.28), la ecuación (4.20) queda como:

$$\frac{dA}{\sqrt{\frac{8\pi G M_\gamma}{3} A^{-(3\gamma+1)} + \frac{\Lambda}{3} A^2 - \kappa}} = d\tau, \quad (4.22)$$

Soluciones particulares

Ahora se asignarán valores específicos a γ para resolver con cada uno de ellos la ecuación (4.22).

1. Inflación $\gamma = -1$

Éste es el caso más fácil para resolver ya que con este valor de γ se simplifica en buena medida la ec. (4.22), que toma la siguiente forma:

$$\frac{dA}{\sqrt{\left(\frac{8\pi G M_{-1}}{3} + \frac{\Lambda}{3}\right) A^2 - \kappa}} = d\tau, \quad (4.23)$$

cuya solución cuando $8\pi G M_{-1} + \Lambda > 0$,

$$A(\tau) = \sqrt{\frac{3\kappa}{\Lambda + 8\pi G M_{-1}}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda + 8\pi G M_{-1}}{3}} \Delta \tau\right) \quad (4.24)$$

en este sentido, es claro que la única solución con sentido físico es la de $\kappa = 1$.

Si de la ecuación (4.23) consideramos $8\pi G M_{-1} - |\Lambda| < 0$, el factor de escala solo tendrá sentido para un universo abierto, $\kappa = -1$, pero la función cosh tendrá argumento imaginario y esto la convertirá en una función cos, que le dará un comportamiento oscilatorio.

2. Inflación $\gamma = -2/3$

Esta etapa sigue siendo inflacionaria, se espera que la solución del factor de escala sea una función creciente. La ecuación a resolver es:

$$\frac{dA}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}A^2 + \frac{8\pi G}{3}M_{-2/3}A - \kappa}} = d\tau, \quad (4.25)$$

La solución de esta ecuación es:

$$A(\tau) = \sqrt{\frac{3\kappa + 16\pi^2 G^2 M_{-2/3}^2}{\Lambda}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\Delta\tau\right) - \frac{4\pi G M_{-2/3}}{\Lambda} \quad (4.26)$$

Esta solución tiene sentido para cualquier valor de κ , sólo con la pequeña particularidad que para el caso κ negativa se satisfaga $-3|\kappa| + 16\pi^2 G^2 M_{-2/3}^2 > 0$.

3. Inflación $\gamma = -1/3$

Ahora la ecuación que se tiene que resolver es:

$$\frac{dA}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}A^2 + \frac{8\pi G}{3}M_{-1/3} - \kappa}} = d\tau. \quad (4.27)$$

La solución cuando $\frac{3\kappa - 8\pi G M_{-1/3}}{\Lambda} > 0$ es

$$A(\tau) = \sqrt{\frac{3\kappa - 8\pi G M_{-1/3}}{\Lambda}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\Delta\tau\right) \quad (4.28)$$

Podemos considerar el valor de $\kappa = 1$, sólo si $3\kappa - 8\pi G M_{-1/3} > 0$.

La solución cuando $\frac{-8\pi G M_{-1/3} - 3\kappa}{\Lambda} > 0$

$$A(\tau) = \sqrt{\frac{8\pi G M_{-1/3} - 3\kappa}{\Lambda}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\Delta\tau\right) \quad (4.29)$$

El comportamiento de esta solución corresponde también a un universo inflacionario que crece a una tasa extremadamente rápida, éste por ser el último caso de inflación debe crecer más lento que para $\gamma = -1$.

4. Radiación $\gamma = \frac{1}{3}$

Ahora la ecuación a resolver es

$$\frac{AdA}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}A^4 - \kappa A^2 + \frac{8\pi G}{3}M_{\frac{1}{3}}}} = d\tau, \quad (4.30)$$

$$A(\tau) = \left[\sqrt{\frac{8\pi G M_{1/3} - \frac{9\kappa^2}{4\Lambda}}{\Lambda}} \sinh\left(\sqrt{\frac{4\Lambda}{3}}\Delta\tau\right) + \frac{3\kappa}{2\Lambda} \right]^{1/2} \quad (4.31)$$

Es este caso κ puede tomar cualquiera de los 3 valores, no hay restricción para la curvatura en esta etapa de radiación. Cabe resaltar que cuando $\kappa = \pm 1$ se debe cumplir que $8\pi G M_{1/3} - \frac{9\kappa^2}{4\Lambda} > 0$ de lo contrario la solución no tendrá sentido físico.

5. Universo con materia, CC y curvatura $k = 0$.

De acuerdo a las mediciones más recientes hechas a través del WMAP, se ha dicho que el universo es plano, estas mediciones dan este resultado con solo un 0.5% de margen de error, por eso es más que importante, y necesario estudiar los modelos para un universo plano, dichos modelos deben ser coherentes con las observaciones. A continuación se encuentra la ecuación que se resuelve de manera general para cualquier valor del parámetro γ excepto $\gamma = -1$, el cual se tratará aparte.

La ecuación a resolver es

$$\frac{dA}{\sqrt{\frac{8\pi G M_\gamma}{3}A^{-(3\gamma+1)} + \frac{\Lambda}{3}A^2}} = d\tau, \quad (4.32)$$

que se puede re-escribir como

$$\frac{A^{\frac{1}{2}(3\gamma+1)}dA}{\sqrt{A^{3(\gamma+1)} + \frac{8\pi G M_\gamma}{\Lambda}}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}d\tau, \quad (4.33)$$

haciendo uso del cambio de variable, $u = A^{\frac{3(\gamma+1)}{2}}$ se puede llevar a la siguiente forma:

$$\frac{2}{3(\gamma+1)} \frac{du}{\sqrt{c} \sqrt{\left(\frac{u}{\sqrt{c}}\right)^2 + 1}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}d\tau, \quad c = \frac{8\pi G M_\gamma}{\Lambda}$$

teniendo como solución:

$$u = \sqrt{c} \sinh\left(\frac{3(\gamma+1)}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\Delta\tau\right),$$

que escrita en función del factor de escala es:

$$A(\tau) = \left[\sqrt{\frac{8\pi G M_\gamma}{\Lambda}} \sinh\left(\frac{3(\gamma+1)}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Delta\tau\right) \right]^{\frac{2}{3(\gamma+1)}} \quad (4.34)$$

6. Inflación $\gamma = -1$

$$\frac{dA}{\sqrt{\left(\frac{8\pi G M_\gamma}{3} + \frac{\Lambda}{3}\right)A^2}} = d\tau, \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{A} = \sqrt{\frac{8\pi G M_{-1} + \Lambda}{3}} d\tau \quad (4.35)$$

$$A(\tau) = A_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda + 8\pi G M_{-1}}{3}} \Delta\tau} \quad (4.36)$$

La era de inflación del universo plano, está gobernada por un comportamiento del factor de escala que lo hace evidentemente creciente exponencialmente, siendo este crecimiento función de la constante cosmológica y del contenido material.

4.3. Soluciones a la Hamilton-Jacobi: Formalismo Hamiltoniano

Al usar la métrica de FRW, el Lagrangiano nos queda como:

$$\mathcal{L} = \frac{6A\dot{A}^2}{N} - 6\kappa NA + \frac{\omega}{2N} A^3 \dot{\phi}^2 + NA^3 V(\phi) + 16N\pi G \rho A^3 \quad (4.37)$$

Haciendo uso de la definición de los momentos canónicos $\Pi_q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$, se tiene

$$\Pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}} = \frac{12A\dot{A}}{N}, \quad \dot{A} = \frac{N\Pi_A}{12A}, \quad (4.38)$$

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\omega A^3 \dot{\phi}}{N}, \quad \dot{\phi} = + \frac{N\Pi_\phi}{\omega A^3}, \quad (4.39)$$

al escribir el lagrangiano en su forma canónica,

$$\mathcal{L}_{\text{canónico}} = \Pi_A \dot{A} + \Pi_\phi \dot{\phi} - N\mathcal{H},$$

$$\mathcal{L} = \Pi_A \dot{A} + \Pi_\phi \dot{\phi} - \frac{N}{24A^3} \left[A^2 \Pi_A^2 + \frac{12}{\omega} \Pi_\phi^2 - 16\pi G A^6 \rho - 24A^6 V(\phi) + 144\kappa A^4 \right], \quad (4.40)$$

se obtiene directamente el correspondiente Hamiltoniano \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \frac{1}{24A^3} \left[A^2 \Pi_A^2 + \frac{12}{\omega} \Pi_\phi^2 - 384\pi G A^6 \rho - 24A^6 V(\phi) + 144\kappa A^4 \right]. \quad (4.41)$$

El formalismo de Hamilton-Jacobi emplea la transformación entre los momentos y la función superpotencial S de la siguiente manera, $\Pi_q = \frac{\partial S}{\partial q}$, dado que el Hamiltoniano

es una constricción de la teoría (es decir, se obtiene de la ecuación de Lagrange para el campo N , tal que $\mathcal{H} = 0$), al sustituir estas relaciones en (4.41), siendo el superpotencial $S(A, \phi) = S_1(A) + S_2(\phi)$, se llega a la siguiente ecuación

$$\frac{1}{24A^3} \left[A^2 \left(\frac{dS_1}{dA} \right)^2 + \frac{12}{\omega} \left(\frac{dS_2}{d\phi} \right)^2 - 384\pi G A^6 \rho - 24A^6 V(\phi) + 144\kappa A^4 \right] = 0. \quad (4.42)$$

si se considera el caso particular de que $V(\phi) = 2\Lambda = cte$, y $S_2 = 0$ (sin campo escalar)

$$\frac{dS_1}{dA} = 12A \sqrt{\frac{8\pi G}{3} A^2 \rho + \frac{\Lambda}{3} A^2 - \kappa},$$

al igualarlo a la relación (4.38) nos brinda la ecuación maestra:

$$\frac{dA}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3} A^2 \rho + \frac{\Lambda}{3} A^2 - \kappa}} = d\tau. \quad (4.43)$$

que no es otra cosa que la ecuación (4.20) obtenida desde las ecuaciones de Einstein, la cual nos sirvió para obtener las soluciones clásicas con constante cosmológica expuestas anteriormente. Con esto se muestra que ambos métodos son equivalentes.

4.4. Término cosmológico dependiente del tiempo

Las ecuaciones de movimiento a resolver son de las siguientes:

$$\frac{3A'^2}{A^2} + \frac{3\kappa}{A^2} - 8\pi G \rho - \frac{\omega}{4} \phi'^2 - \frac{V(\phi)}{2} = 0, \quad (4.44)$$

$$\frac{2A''}{A} + \frac{A'^2}{A^2} + \frac{\kappa}{A^2} + 8\pi G \rho + \frac{\omega}{4} \phi'^2 - \frac{1}{2} V(\phi) = 0, \quad (4.45)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\text{Ln} \left(A^6 \frac{\phi'^2}{2} \right) \right] = - \frac{V'}{\frac{\phi'^2}{2}}, \quad (4.46)$$

Para resolver este sistema se introducen dos hipótesis, las cuales parecen plausibles para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, una es elegir que la densidad de energía del campo escalar sea proporcional a la densidad de energía del fluido perfecto. La otra propuesta hipótesis va en el sentido que en la ecuación de Klein-Gordon (4.46), el lado derecho sea una constante negativa pequeña, lo cual permitirá encontrar la energía cinética del campo escalar en función del factor de escala empleando la parte izquierda de la ecuación de Klein-Gordon, que su vez se introduce en el modelo y se obtiene la forma del potencial $V(\phi(\tau))$, siempre y cuando se conozca la forma analítica del factor de escala, el cual se obtiene usando la primera hipótesis. Mas adelante se detalla este procedimiento.

4.4.1. Densidad del campo ϕ proporcional a ρ .

Se definen la densidad de energía y presión de campo escalar ϕ

$$16\pi G\rho_\phi = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi), \quad 16\pi Gp_\phi = \frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi)$$

con lo cual las ecuaciones (4.44,4.45,4.46) quedan re-escritas como sigue

$$\frac{3A'^2}{A^2} + \frac{3\kappa}{A^2} - 8\pi G(\rho + \rho_\phi) = 0, \quad (4.47)$$

$$\frac{2A''}{A} + \frac{A'^2}{A^2} + \frac{\kappa}{A^2} + 8\pi G(p + p_\phi) = 0, \quad (4.48)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\text{Ln} \left(A^6 \frac{\phi'^2}{2} \right) \right] = -\frac{V'}{\frac{\phi'^2}{2}}, \quad (4.49)$$

considerando un fluido barotrópico escalar, $\rho_\phi = \omega_\phi p_\phi$, donde ω_ϕ es una constante que juega el papel de la γ en la ecuación de estado del fluido barotrópico perfecto.

Bajo la propuesta de que $p_\phi = m_\phi \rho$, con m_ϕ constante, y en el mismo sentido las presiones, entonces se tiene un conjunto de ecuaciones más simples, es decir, las ecuaciones de movimiento a resolver son las mismas que en los apartados anteriores, solo hay que realizar la traslación de las constantes $8\pi G \rightarrow 8\pi G\alpha_\phi$ donde la constante $\alpha_\phi = 1 + m_\phi > 1$ y $\Lambda = 0$, dado que el potencial $V(\phi)$ caracterizará al término cosmológico[25, 26, 27].

$$\frac{3A'^2}{A^2} + \frac{3\kappa}{A^2} - 8\pi G(1 + m_\phi)\rho = 0, \quad (4.50)$$

$$\frac{2A''}{A} + \frac{A'^2}{A^2} + \frac{\kappa}{A^2} + 8\pi G(\gamma + m_\phi\omega_\phi)\rho = 0, \quad (4.51)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\text{Ln} \left(A^6 \frac{\phi'^2}{2} \right) \right] = -\frac{V'}{\frac{\phi'^2}{2}}, \quad (4.52)$$

En lo que sigue dividiremos el estudio con respecto al parámetro barotrópico, tanto en el campo escalar ω_ϕ , como en la parte de materia ordinaria γ . En cada caso se elige la igualdad en estos parámetros.

4.4.2. Rama positiva: $0 < \omega_\phi = \gamma < 1$, $\rightarrow \frac{1}{2}\phi'^2 = \frac{1-\omega_\phi}{1+\omega_\phi}V(\phi)$

Estudiaremos las etapas del universo para estos casos y visualizaremos como evoluciona el potencial $V = 2\Lambda(\tau)$ en las etapas de la materia ordinaria, así mismo, escribiremos la forma del potencial para las diversas etapas en función del campo escalar.

De este modo la ecuación (4.52) se lee

$$\frac{d}{d\tau} \left[\text{Ln} \left(\frac{1-\omega_\phi}{1+\omega_\phi} A^6 V^{\frac{2}{1+\omega_\phi}} \right) \right] = 0, \quad \Rightarrow \quad V(\tau) = c_\gamma A^{-3(1+\omega_\phi)}, \quad (4.53)$$

Así, la dependencia temporal es,

$$V(\tau) = c_\gamma \frac{1}{(a_\gamma \tau)^2}, \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = \ell_\gamma \text{Ln}(\tau),$$

donde la forma matemática de la constante c_γ y ℓ_γ proviene de usar la solución a las ecuaciones de movimiento para el factor de escala en cierta etapa de la evolución del universo caracterizado por esta rama, por ejemplo, polvo corresponde a $c_0 = a_0^2 \frac{2m_\phi}{3(1+m_\phi)}$, donde, a_0 es la constante que tomaremos de la solución reportada para el factor de escala.

Usando los resultados reportados en la referencia [27] para el factor de escala

$$A_\gamma(\tau) = \begin{cases} [a_\gamma \tau]^{\frac{2}{3(\gamma+1)}}, & a_\gamma = (\gamma+1) \sqrt{6\pi G\alpha_\phi M_\gamma}, & \gamma \neq -1 \\ e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi G\alpha_\phi M_{-1}\tau} & & \gamma = -1 \end{cases} \quad (4.54)$$

1. Polvo, $\omega_\phi = \gamma = 0$

El potencial escalar tiene la dependencia temporal

$$V(\tau) = \frac{2m_\phi}{3(1+m_\phi)} \frac{1}{\tau^2}$$

y la forma temporal del campo, usando la ecuación de la energía cinética,

$$\Delta\phi = \sqrt{\frac{4m_\phi}{3(1+m_\phi)}} \text{Ln}(\tau). \quad (4.55)$$

con lo cual podemos obtener la forma del potencial en función del campo escalar para la etapa de polvo,

$$V(\phi) = \frac{2m_\phi}{3(1+m_\phi)} e^{-\sqrt{3(1+\frac{1}{m_\phi})}\Delta\phi}. \quad (4.56)$$

éste comportamiento se da cuando el factor de escala tiene el siguiente comportamiento,

$$A(\tau) = [a_0 \tau]^{\frac{2}{3}}, \quad a_0 = \sqrt{6\pi G\alpha_\phi M_0}, \quad (4.57)$$

que surge cuando se modela una etapa de crecimiento rápido del factor de escala de nuestro universo usando sistemas dinámicos y pidiendo que uno de los puntos críticos sea un atractor, obteniendo que el correspondiente factor λ en la función exponencial $V(\phi \approx e^{\lambda\phi})$ debe ser menor a $-\sqrt{3}$ [28].

Este valor también ha sido encontrado con otras técnicas, usando soluciones cuánticas y cuánticas supersimétricas en el contexto de cosmología cuántica para el mismo modelo cosmológico FRW [29, 30]

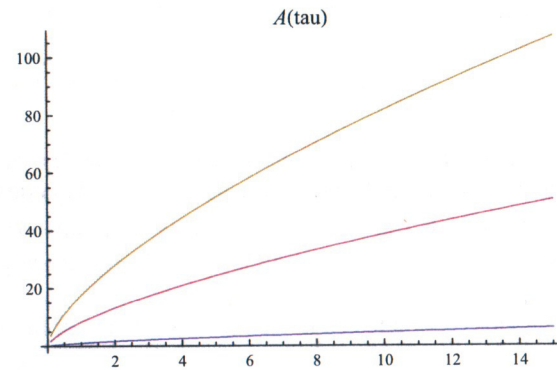


Figura 4.1: Gráfica de la ecuación (4.57), considerando diferentes valores en el parámetro α_ϕ . $\alpha_\phi = 1, 24$ y 74 de abajo hacia arriba, respectivamente.

Es común decir que cuando el potencial escalar tiene un comportamiento exponencial, como en este caso, el factor de escala del universo debe tener un crecimiento rápido en el tiempo. Este comportamiento está graficado en la figura (4.1) en unidades arbitrarias, en donde la gráfica inferior corresponde al valor $\alpha_\phi = 1$ y la gráfica superior corresponde $\alpha_\phi = 74$, aquí está incluido la densidad de energía del campo escalar, mostrando el rápido crecimiento del universo.

2. Radiación, $\omega_\phi = \gamma = \frac{1}{3}$

El potencial escalar tiene la dependencia temporal

$$V(\tau) = \frac{m_\phi}{4(1+m_\phi)} \frac{1}{\tau^2}$$

y la forma temporal del campo, usando la ecuación de la energía cinética,

$$\Delta\phi = \sqrt{\frac{m_\phi}{1+m_\phi}} \text{Ln}(\tau)$$

con lo cual podemos obtener la forma del potencial en función del campo escalar para la etapa de radiación,

$$V(\phi) = \frac{m_\phi}{4(1+m_\phi)} e^{-2\sqrt{1+\frac{1}{m_\phi}}\Delta\phi}$$

4.4.3. Rama negativa: $-1 < \omega_\phi < 0$, $\rightarrow p_\phi = -|\omega|\rho_\phi$; $\rightarrow \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \beta_\phi V(\phi)$, $\beta_\phi = \frac{1-|\omega_\phi|}{1+|\omega_\phi|}$

Siguiendo el mismo procedimiento que en la sección anterior se tienen las siguientes soluciones. En esta rama, la ecuación (4.52) se escribe como:

4.4. TÉRMINO COSMOLÓGICO DEPENDIENTE DEL TIEMPO

$$\frac{d}{d\tau} \left[\text{Ln} \left(A^6 \beta_\omega V^{\frac{1+\beta_\omega}{\beta_\omega}} \right) \right] = 0, \quad \Rightarrow \quad V(\tau) = c_\omega A^{-3(1-|\omega_\phi|)}, \quad (4.58)$$

donde la constante c_ω que aparece en la energía potencial proviene de usar la solución a las ecuaciones de movimiento para el factor de escala. Así, la dependencia temporal es,

$$V(\tau) = c_\omega \frac{1}{\tau^2}, \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = \ell_\omega \text{Ln}(\tau). \quad (4.59)$$

Por ejemplo, cuando elegimos el caso $\omega_\phi = -\frac{2}{3}$, esto es, $|\omega_\phi| = \frac{2}{3}$, tenemos las últimas ecuaciones escritas para este caso como

$$V(\tau) = \frac{10m_\phi}{1+m_\phi} \frac{1}{\tau^2}, \quad (4.60)$$

Entonces, el campo escalar es

$$\Delta\phi = 2\sqrt{\frac{m_\phi}{1+m_\phi}} \text{Ln}(\tau), \quad (4.61)$$

así, podemos escribir $V(\phi)$

$$V(\phi) = \frac{10m_\phi}{1+m_\phi} e^{-\sqrt{1+\frac{1}{m_\phi}}\Delta\phi}, \quad (4.62)$$

con la ley para el factor de escala

$$A_{-\frac{2}{3}}(\tau) = \left[a_{-\frac{2}{3}} \right]^2 \tau^2, \quad a_{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{6\pi G \alpha_\phi M_{-\frac{2}{3}}} \quad (4.63)$$

En esta última subsección hemos caracterizado al término cosmológico $\Lambda(\tau)$ via el potencial escalar, usando la solución de la ecuación de Klein-Gordon para la diversas etapas en el campo escalar, encontrando que dicho parámetro cosmológico tiene una dependencia temporal (o del campo escalar) de acuerdo a resultados que se obtienen para un campo de quintaesencia en el marco de modelar la energía oscura.

Capítulo 5

Análisis cuántico

En este capítulo se hará el correspondiente análisis cuántico para el problema que se ha tratado en el presente trabajo. Partiendo de la densidad Hamiltoniana obtenida en el capítulo anterior

$$\mathcal{H} = \frac{1}{24A^3} \left[A^2 \Pi_A^2 - \frac{12}{\omega} \Pi_\phi^2 - 384\pi G A^6 \rho - 24A^6 V(\phi) + 144\kappa A^4 \right]. \quad (5.1)$$

Se harán tres propuestas para atacar el problema desde el punto de vista cuántico y poder encontrar así las soluciones correspondientes

- 1.- La propuesta es la de cuantizar el caso en donde el potencial será $V(\phi) = 2\Lambda = \text{constante}$, y hacer cero la energía potencial del mismo campo, con lo cual se tendrá la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{24A} \left[\Pi_A^2 - c_\gamma A^{(-3\gamma+1)} - 48A^4 \Lambda + 144\kappa A^2 \right]. \quad (5.2)$$

en donde $c_\gamma = 384\pi G \mu_\gamma$, de este modo, la función de onda tendrá información sólo del factor de escala y de la constante cosmológica Λ .

Por completez de esta propuesta, dejaremos la energía cinética del campo escalar, la cual será una constante de movimiento cuando el potencial $V(\phi) = 2\Lambda$, siendo

$$\left[\Pi_A^2 - \frac{12C_\phi}{\omega A^2} - 384\pi G A^4 \rho - 48\Lambda A^4 + 144\kappa A^2 \right] = 0.$$

la ecuación a resolver, en donde C_ϕ es la constante correspondiente a la que surge de que el momento del campo escalar es una constante de movimiento. Al usar la representación de los momentos y aplicando la función de onda, se tiene

$$\left[\frac{1}{A^p} \frac{d}{dA} \left(A^p \frac{d}{dA} \right) + \frac{12C_\phi}{\omega A^2} + 384\pi G \mu_\gamma A^{-3\gamma+1} + 48\Lambda A^4 - 144\kappa A^2 \right] \psi(A) = 0.$$

siendo p el parámetro que representa la ambigüedad en el ordenamiento de factores, entre A y el operador Π_A . La transformación $\psi = A^{-\frac{p}{2}}\Psi$ permitirá eliminar la primer derivada que aparece en la ecuación anterior,

$$\left[\frac{d^2}{dA^2} - U_{efectivo}(A) \right] \Psi = 0$$

con

$$U_{efectivo} = -\frac{p}{2} \left(1 - \frac{p}{2} \right) \frac{1}{A^2} - \frac{12C_\phi}{\omega A^2} - 384\pi G\mu_\gamma A^{-3\gamma+1} - 48\Lambda A^4 + 144\kappa A^2.$$

Nótese que en la expresión anterior para la energía potencial efectiva se adicionó un término de *energía tipo centrífugo*, $-\frac{p}{2} \left(1 - \frac{p}{2} \right) \frac{1}{A^2}$.

- 2.- La segunda propuesta consistirá en usar la misma hipótesis que en el formalismo clásico, es decir, considerar que la energía de campo escalar sea proporcional a la energía del fluido perfecto, esto es, $\rho_\phi = 16\pi G m_\phi \rho$,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{24A} \left[\Pi_A^2 - 384\pi G A^4 (m_\phi + 1) \rho + 144\kappa A^2 \right] = \frac{1}{24A} \left[\Pi_A^2 - b_\gamma A^{(-3\gamma+1)} + 144\kappa A^2 \right], \quad (5.3)$$

con $b_\gamma = 384\pi G (m_\phi + 1) \mu_\gamma$, así, el problema a tratar se traducirá en resolver cuando la función de onda sólo sea dependiente del factor de escala A , es decir $\Upsilon(A)$. La contribución del término cosmológico vendrá dada por la aplicación de la constante m_ϕ .

- 3.- La tercer y última propuesta que se usará es la tradicional. Considerando que la densidad Hamiltoniana se eleva a carácter de operador aplicada a la función de onda Υ que dependerá de las dos variables del problema, (A, ϕ) , posteriormente, ya sea por separación de variables o aplicando el formalismo de fase constante, que es similar al formalismo Bohmiano¹, se obtendrán las correspondientes soluciones y se analizarán. En esta propuesta podría considerarse que se pierde algo de motivación de tener un término cosmológico, ya que no se tendrán argumentos físicos para que el potencial escalar sea el adecuado en un mundo cuántico.

Para tener una cuantización canónica de la densidad Hamiltoniana, se elevan a carácter de operador los elementos asociados a las variables $q^i = (A, \phi)$, y se toma la representación usual $\Pi_{q^i} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i}$, donde se elige $\hbar \equiv 1$. De esta forma, la densidad Hamiltoniana aplicada a la función de onda $\Upsilon(A, \phi)$ queda de la siguiente manera

$$\hat{\mathcal{H}}\Upsilon(A, \phi) = \left[-A^2 \frac{\partial^2}{\partial A^2} + \frac{12}{\omega} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - 384\pi G A^6 \rho - 24A^6 V(\phi) + 144\kappa A^4 \right] \Upsilon(A, \phi) = 0, \quad (5.4)$$

¹En este formalismo es posible describir partículas con momento y posición bien definidos en cualquier instante de tiempo, esto nos lleva a una interpretación en donde se olvida el carácter probabilístico de la mecánica cuántica y nos lleva a poder describir la evolución del sistema conociendo sólo las condiciones iniciales, es decir, nos regresa a una teoría determinista[31].

pero existe ambigüedad en la forma de operar la derivada y la función A^2 , de tal manera que se introduce el siguiente ordenamiento de factores

$$A^2 \frac{\partial^2}{\partial A^2} \Rightarrow A^{2+q} \frac{\partial}{\partial A} A^{-q} \frac{\partial}{\partial A} = A^2 \frac{\partial^2}{\partial A^2} - qA \frac{\partial}{\partial A}$$

con lo cual las ecuaciones diferenciales a resolver en el contexto de cosmología cuántica son:

$$\left[-\frac{d^2}{dA^2} + \frac{q}{A} \frac{d}{dA} - c_\gamma A^{(-3\gamma+1)} - 48\Lambda A^4 + 144\kappa A^2 \right] u_\gamma = 0, \quad (5.5)$$

$$\left[\frac{d^2}{dA^2} - U_{efectivo}(A) \right] \Psi = 0, \quad (5.6)$$

siendo el potencial efectivo

$$U_{efectivo} = -\left(C_p + \frac{12C_\phi}{\omega} \right) \frac{1}{A^2} - 384\pi G\mu_\gamma A^{-3\gamma+1} - 48\Lambda A^4 + 144\kappa A^2, \quad C_p = \frac{p}{2} \left(1 - \frac{p}{2} \right). \quad (5.7)$$

De acuerdo al intervalo del valor del parámetro p , la onstante C_p puede tomar los valores

$$C_p = \begin{cases} 0, & p = 0, \text{ o } 2. \\ > 0, & 0 < p < 2. \\ < 0, & p > 2, \text{ o } p < 2. \end{cases} \quad (5.8)$$

5.1. Primera propuesta, soluciones a la ecuación (5.5)

Para encontrar soluciones a la ecuación (5.5), se consideran algunos valores particulares del parámetro γ .

5.1.1. Escenario tipo inflacionario ($\gamma = -1$).

Para este estadio la ecuación (5.5) toma la siguiente forma

$$A u_{-1}'' - q u_{-1}' + 144A^3 (m^2 A^2 - \kappa) u_{-1} = 0, \quad (5.9)$$

en donde $m^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8}{3}\pi G\mu_{-1}$ puede tomar cualquiera de los valores siguientes

$$m^2 = \begin{cases} > 0 & \text{ambos positivos o } 8\pi G\mu_1 > |\Lambda|, \\ < 0 & \Lambda < 0, \quad |\Lambda| > 8\pi G\mu_1, \\ = 0 & \Lambda < 0, \quad |\Lambda| = 8\pi G\mu_1. \end{cases}$$

Los casos cuando $m^2 \neq 0$ se caracterizarán en un sólo proceso, el caso para $m^2 = 0$ se analiza por separado.

■ $m^2 \neq 0$

Para el caso cuando $m^2 > 0$, la ecuación diferencial es la misma ecuación (5.9)

$$Au''_{-1} - qu'_{-1} + 144A^3(m^2A^2 - \kappa)u_{-1} = 0, \quad (5.10)$$

y para el caso cuando $m^2 < 0$, se tiene la siguiente ecuación

$$Au''_{-1} - qu'_{-1} - 144A^3(m^2A^2 + \kappa)u_{-1} = 0, \quad (5.11)$$

Haciendo uso de la transformación $v = m^2A^2 - \text{sign}(m)\kappa$ podremos escribir las dos ecuaciones anteriores en una sola, si se considera que el factor $\text{sign}(m)$ es el signo que tendrá m^2 dependiendo si es > 0 o < 0 a cero, es decir, $+1$ cuando $m^2 > 0$ y -1 cuando $m^2 < 0$. Así las ecuaciones (5.10) y (5.11) se expresan en

$$Au''_{-1} - qu'_{-1} + \text{sign}(m) 144A^3(m^2A^2 - \text{sign}(m)\kappa)u_{-1} = 0. \quad (5.12)$$

Y con esto se tiene que:

$$A = \left(\frac{v + \text{sign}(m)\kappa}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{d}{dA} = 2m^2 \left(\frac{v + \text{sign}(m)\kappa}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dv},$$

$$\frac{d^2}{dA^2} = 4m^4 \left(\frac{v + \text{sign}(m)\kappa}{m^2} \right) \frac{d^2}{dv^2} + 2m^2 \frac{d}{dv}$$

re-escribiendo la ecuación (5.12) se tiene

$$\frac{d^2u_{-1}}{dv^2} + \frac{1}{2m^2} (1-q) \left(\frac{v + \text{sign}(m)\kappa}{m^2} \right)^{-1} \frac{du_{-1}}{dv} + \text{sign}(m) \frac{36}{m^4} vu_{-1} = 0, \quad (5.13)$$

La ecuación (5.13) para el caso $q = 1$, se simplifica a

$$\frac{d^2u_{-1}}{dv^2} + \text{sign}(m) \frac{36}{m^4} vu_{-1} = 0, \quad (5.14)$$

Aplicando de nuevo una transformación, ahora dada por $u_{-1} = v^{\frac{1}{2}}y(v)$, se puede re-expresar como

$$\frac{d^2y}{dv^2} + \frac{1}{v} \frac{dy}{dv} + \left(\frac{36 \text{sign}(m)}{m^4} v - \frac{1}{4} \frac{1}{v^2} \right) y = 0,$$

Aplicando el cambio de variable $z = \frac{4}{m^2} v^{\frac{3}{2}}$, se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left[\text{sign}(m) - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{z^2} \right] y = 0, \quad (5.15)$$

La cual es una ecuación diferencial tipo Bessel de orden $\nu = \frac{1}{3}$, es la Bessel ordinaria cuando $\text{sign}(m) = +1$, y la modificada cuando $\text{sign}(m) = -1$, con lo cual la solución a la ecuación vendrá siendo

$$y(z) = \begin{cases} a_0 J_{\frac{1}{3}}(z) + b_0 J_{-\frac{1}{3}}(z) & m^2 > 0 \\ a_1 I_{\frac{1}{3}}(z) + b_1 K_{\frac{1}{3}}(z) & m^2 < 0 \end{cases}$$

Entonces, la solución para estos casos en la etapa inflacionaria es:

$$u_{-1}(A) = (m^2A^2 - \text{sign}(m)\kappa)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} a_0 J_{\frac{1}{3}}(z) + b_0 J_{-\frac{1}{3}}(z) & m^2 > 0 \\ a_1 I_{\frac{1}{3}}(z) + b_1 K_{\frac{1}{3}}(z) & m^2 < 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

con $z = \frac{4}{m^2} (m^2A^2 - \text{sign}(m)\kappa)^{\frac{3}{2}}$.

■ $m^2 = 0$

En este caso la ecuación diferencial es

$$Au''_{-1} - qu'_{-1} - 144\kappa A^3 u_{-1} = 0, \quad (5.17)$$

que mediante el cambio de variable $x = 6\sqrt{\kappa}A^2$ se lleva a la ecuación tipo Bessel

$$\frac{d^2u_{-1}}{dx^2} + \frac{1-q}{2x} \frac{du_{-1}}{dx} - u_{-1} = 0, \quad (5.18)$$

La cual es comparable a [32]

$$x^2 y'' + a xy' + (bx^m + c)y = 0$$

con las siguientes relaciones $a = \frac{1-q}{2}$, $c = 0$, $\nu = \frac{1}{2} \sqrt{(1-a)^2 - 4c}$ es el orden, $b = -1$, que tiene por solución

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_{\nu}(\sqrt{bx})$$

donde Z_{ν} es la función de Bessel generica.

Para el caso tratado aquí, la solución es:

$$u_{-1}(A) = (6\sqrt{\kappa}A^2)^{\frac{1+q}{4}} Z_{\nu}(i6\sqrt{\kappa}A^2)$$

que cuando $\kappa = 1$ se tienen las funciones de Bessel modificadas K_{ν} , y cuando $\kappa = -1$, serán las funciones de Bessel ordinarias J_{ν} .

El caso de $\kappa = 0$ se resuelve aparte, para ese caso, la ecuación diferencial es

$$Au''_{-1} - qu'_{-1} = 0 \quad (5.19)$$

que haciendo el cambio $u'_{-1} = \eta$, se transforma a $A\eta' - q\eta = 0$ y que tiene como solución $\eta = \eta_0 A^q$ y regresando a la variable original, se integra, obteniendo

$$u_{-1}(A) = u_0 A^{1+q}.$$

donde los valores plausibles para el parámetro $q < -1$, de tal manera que se tendrá un comportamiento decayente de la función de onda de este modelo, lo cual indica que cuando la constante cosmológica $\Lambda = -8\pi G\mu_{-1}$ el universo deja de ser cuántico.

5.1.2. Era con polvo ($\gamma = 0$), universo plano ($\kappa = 0$) y $q \neq 0$.

En este caso la ecuación (5.5) se expresa como:

$$Au''_0 - qu'_0 + (c_0 A^2 + 48\Lambda A^5)u_0 = 0, \quad (5.20)$$

De nueva cuenta, introduciendo un cambio de variable $z = \beta A^3 \rightarrow A = \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}$, con $\beta = \frac{8}{3}\sqrt{3|\Lambda|}$, lo cual lleva a que $\Lambda < 0$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dA} &= 3\beta \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dz} \\ \frac{d^2}{dA^2} &= 9\beta^2 \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\frac{4}{3}} \frac{d^2}{dz^2} + 6\beta \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{d}{dz}, \end{aligned}$$

que mediante la sustitución correcta en la ecuación (5.20) se obtiene

$$z \frac{d^2 u_0}{dz^2} + \alpha \frac{du_0}{dz} + [\ell - b_0 z] u_0 = 0, \quad \text{con } \ell = \frac{384\pi G\mu_0}{9\beta}, \quad b_0 = \frac{48|\Lambda|}{9\beta^2}, \quad \alpha = \frac{2-q}{3}, \quad (5.21)$$

Lo cual, añadiendo una nueva transformación $u_0 = e^{-\frac{1}{2}z} w(z)$, lleva a

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dz} &= -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} w + e^{-\frac{1}{2}z} \frac{dw}{dz}, \\ z \frac{d^2 u_0}{dz^2} &= \frac{1}{4} z e^{-\frac{1}{2}z} w - z e^{-\frac{1}{2}z} \frac{dw}{dz} + z e^{-\frac{1}{2}z} \frac{d^2 w}{dz^2} \end{aligned}$$

la cual es una ecuación tipo hipergeométrica para $w(z)$

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (\alpha - z) \frac{dw}{dz} - n w = 0 \quad (5.22)$$

5.1. PRIMERA PROPUESTA, SOLUCIONES A LA ECUACIÓN (5.5) 45

con $n = \frac{q}{2} - \frac{16\pi G\mu_0}{\sqrt{3|\Lambda|}}$ que es la forma de la ecuación hipergeométrica degenerada ${}_1F_1(n, \alpha; z)$ con soluciones: [32]

$$w(z) = \begin{cases} {}_1F_1(n, \alpha; z) \\ z^{1-\alpha} {}_1F_1(n+1-\alpha, 2-\alpha; z) \end{cases} \quad (5.23)$$

Que en términos de la variable original A , se lee como:

$$u_0(A) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\beta A^3} {}_1F_1(n, \alpha; \beta A^3) \\ (\beta A^3)^{\frac{1+q}{3}} e^{-\frac{1}{2}\beta A^3} {}_1F_1(n+1-\alpha, 2-\alpha; \beta A^3) \end{cases} \quad (5.24)$$

en donde

$$n+1-\alpha = \frac{4+q}{6} - \frac{16\pi G\mu_0}{\sqrt{3|\Lambda|}}, \quad 2-\alpha = \frac{4+q}{6}.$$

5.1.3. Fluido rígido ($\gamma = 1$) y universo plano ($\kappa = 0$) y $q \neq 0$.

La ecuación (5.5) para este estadio se expresa de la forma:

$$Au''_1 - qu'_1 + 48(\Lambda A^5 + 8\pi G\mu_1 A^{-1})u_1 = 0, \quad (5.25)$$

Usando la transformación $x = \frac{4\sqrt{3\Lambda}}{3} A^3 \rightarrow A = \left(\frac{3x}{4\sqrt{3\Lambda}}\right)^{\frac{1}{3}}$, usando las respectivas derivadas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dA} &= 4\sqrt{3\Lambda} \left(\frac{3x}{4\sqrt{3\Lambda}}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dx}, \\ \frac{d^2}{dA^2} &= 48\Lambda \left(\frac{3x}{4\sqrt{3\Lambda}}\right)^{\frac{4}{3}} \frac{d^2}{dx^2} + 8\sqrt{3\Lambda} \left(\frac{3x}{4\sqrt{3\Lambda}}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{d}{dx}, \end{aligned}$$

finalmente, definiendo a $\alpha = 384\pi G\mu_1$, $\zeta = \frac{2-q}{3}$ y a $\beta = \frac{\sqrt{\alpha}}{3}$ se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{\zeta}{x} \frac{du_1}{dx} + \left[1 + \frac{\beta^2}{x^2}\right] u_1 = 0. \quad (5.26)$$

Al hacer la comparación de la ecuación anterior con la ecuación diferencial [33]

$$x^2 y'' + axy' + (bx^m + c)y = 0$$

cuya solución es

$$y(x) = x^{\frac{1-a}{2}} Z_\nu \left(\frac{2}{m} \sqrt{bx^m} \right), \quad \nu = \frac{1}{m} \sqrt{(1-a)^2 - 4c}.$$

en donde Z_ν es la ecuación diferencial de Bessel genérica de orden ν . Haciendo las comparaciones correspondientes, se puede ver que $x \rightarrow x$, $b=1$, $m=2$, $c = \beta^2$, así, la solución para (5.25) está dada por:

$$u = A^{\frac{1+q}{2}} Z_\nu \left(\frac{4\sqrt{3}\Lambda}{3} A^3 \right), \quad \nu = \frac{1}{3} \sqrt{(1+q)^2 - 1536\pi G\mu_1} \quad (5.27)$$

el orden ν puede ser real o imaginario, pero dados los valores que puede tomar el parámetro q , éste orden será imaginario.

En esta caso, las expresiones exactas de las soluciones dependerán del signo de la constante cosmológica y del parámetro ν .

- 1.- $\Lambda < 0$, la función Z_ν se convierte en las funciones de Bessel modificadas, ya sea I_μ o K_μ , dependiendo de las condiciones de frontera, esto será así para cualquier forma de orden real o imaginario.
- 2.- $\Lambda > 0$, las funciones Z_ν se transforman en la función de Bessel ordinaria, cualquiera de las dos, J_μ o Y_μ ; dependiendo de nueva cuenta de las condiciones de frontera, siendo así para cualquier forma del orden, real o imaginario.

5.2. Segundo enfoque, soluciones a la ecuación (5.6)

Ahora el enfoque que se le dará a la solución viene dado desde el potencial efectivo (5.7)

$$U_{\text{efectivo}} = -\left(C_p + \frac{12C_\phi}{\omega}\right) \frac{1}{A^2} - 384\pi G\mu_\gamma A^{-3\gamma+1} - 48\Lambda A^4 + 144\kappa A^2, \quad C_p = \frac{p}{2} \left(1 - \frac{p}{2}\right). \quad (5.28)$$

La ecuación de WDW (5.6) describe el movimiento de una partícula con energía cero en el campo de potencial efectivo U_{efectivo} , dado que toma la forma de la ecuación de Schrödinger unidimensional, vease la figura (5.1)

El espacio entre la energía total y la curva de potencial cerca del origen permitirá construir una región de radio A_0 , dicha región servirá como una *barrera* ficticia para estudiar el comportamiento de una onda que viaja de derecha a izquierda y debe atravesar esa región para hacer el límite $A_0 \rightarrow 0$.

Cerca del origen, este tipo de potencial va a infinito bajo la ley $U_{\text{efectivo}} \approx -\frac{(C_p + \frac{12C_\phi}{\omega})}{A^2}$. Es bien conocido que este caso es un estadio intermedio cuando hay un estado estacionario y cuando ocurre el colapso de una partícula en el origen de coordenadas[34]. Cerca del origen la solución a la ecuación (5.6) es de la forma $\Psi \rightarrow A^s$, que al sustituir la en la ecuación es

$$s^2 - s + \lambda = 0, \quad \text{con } \lambda = \left(C_p + \frac{12C_\phi}{\omega}\right)$$

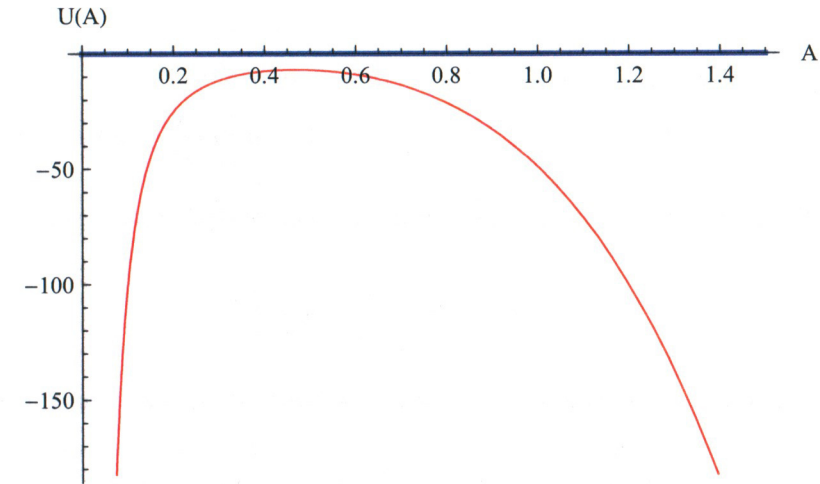


Figura 5.1: La línea azul representa la energía total igual a cero, la curva roja representa la energía potencial dado por la ecuación (5.28) considerando una etapa de inflación ($\gamma = -1$) y un universo plano ($\kappa = 0$)

cuyas raíces son

$$s_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}, \quad s_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}.$$

Considerando una vecindad de radio A_0 cerca del origen del universo se puede sustituir la función $-\frac{\lambda}{A^2}$ por $-\frac{\lambda}{A_0^2}$ en la frontera, con lo cual se puede determinar la función de onda alrededor de esa vecindad y posteriormente se hace el límite cuando $A_0 \rightarrow 0$ para poder determinar si la función de onda se colapsa en el origen.

Se analizan dos casos con la constante $\lambda > \frac{1}{4}$ y $\lambda < \frac{1}{4}$.

- $\lambda < \frac{1}{4}$.

Para este caso, ambas raíces son reales, con $s_1 > s_2 > 0$ y $s_1 - s_2 = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\lambda}$. Cuando $A > A_0$ (fuera de la vecindad) la función de onda es

$$\psi_I = a_1 A^{s_1} + a_2 A^{s_2}, \quad a_i \text{ constantes de integración.}$$

Para cuando $A < A_0$ (dentro de la vecindad), pero finita en el origen,

$$\psi_{II} = a_3 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{A_0} A\right),$$

En la frontera $A = A_0$, y por condiciones de continuidad de la función y su derivada, se tiene

$$\psi_I(A_0) = a_1 A_0^{s_1} + a_2 A_0^{s_2} = \psi_{II}(A_0) = a_3 \sin(\sqrt{\lambda}), \quad (5.29)$$

$$\psi'_I(A_0) = a_1 s_1 A_0^{s_1-1} + a_2 s_2 A_0^{s_2-1} = \psi'_{II}(A_0) = a_3 \frac{\sqrt{\lambda}}{A_0} \cos(\sqrt{\lambda}), \quad (5.30)$$

Dividiendo (5.30) entre (5.29) y haciendo un poco de álgebra, se llega a

$$\sqrt{\lambda} \cotan \sqrt{\lambda} = \frac{s_1 A_0^{s_1-s_2} + \frac{a_2}{a_1} s_2}{A_0^{s_1-s_2} + \frac{a_2}{a_1}} \quad (5.31)$$

la cual se resuelve para el cociente de las constantes $\frac{a_2}{a_1}$, que da como resultado

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{s_1 - q}{q - s_2} A_0^{s_1-s_2} = \text{constante} A^{\frac{1}{2} \sqrt{1-4\lambda}}, \quad q = \sqrt{\lambda} \cotan \sqrt{\lambda} \neq 0. \quad (5.32)$$

al tomar el límite $A_0 \rightarrow 0$, con $a_1 \neq 0$, podemos ver que es necesario que $a_2 = 0$, por lo cual la solución para la parte externa de la vecindad es da la forma $\psi_I = a_2 A^{s_1}$.

■ $\lambda > \frac{1}{4}$

Para este caso las raíces son complejas, $s_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{4\lambda - 1}$, y $s_2 = s_1^*$, con lo cual $s_1 - s_2 = i \sqrt{4\lambda - 1}$.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, se llega al cociente de las constantes de la forma

$$\frac{a_2}{a_1} = \text{cte.} A_0^{s_1-s_2} = \text{cte.} A_0^{i \sqrt{4\lambda-1}},$$

al tomar el límite a cero se puede ver que no está definido, entonces pasar hacia el límite $A_0 \rightarrow 0$ es imposible.

La solución real para este caso toma la forma

$$\psi = a \sqrt{A} \cos \left[\frac{1}{2} \sqrt{4\lambda - 1} \text{Ln} \left(\frac{A}{A_0} \right) + b \right], \quad (5.33)$$

con a y b constantes. Al graficar esta función (figura (5.2)), se puede ver el comportamiento con infinitos ceros cuando se acerca al límite $A_0 \rightarrow 0$, lo cual implica que la función de onda se colapsa en el origen del universo. Esto se concluye al suponer que la función de onda viene de fuera de la frontera del área de radio A_0 .

Esto último implicaría que la partícula se colapsa en el origen del universo, lo cual diría que éste análisis fortalece el concepto de *big bang* del universo.

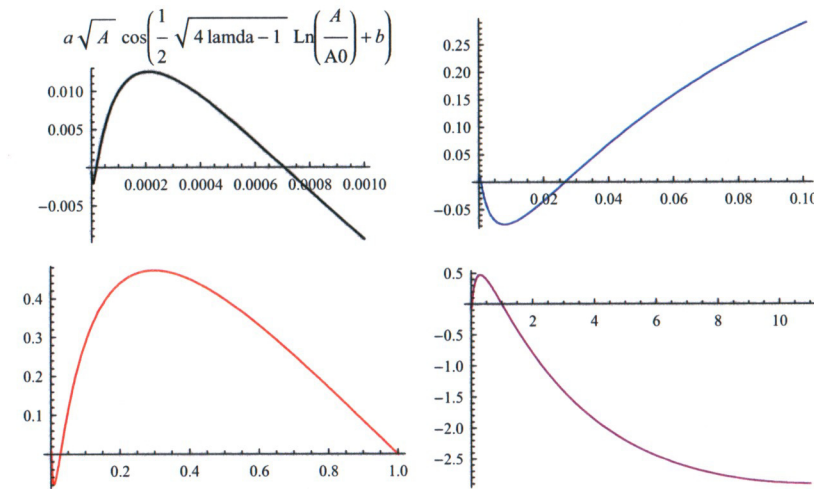


Figura 5.2: Esta función presenta múltiples ceros cuando el factor de escala tiende a cero, como se muestra en la secuencia siguiente. Los valores de las constantes fueron $a=1$, $A_0 = 1$, $b = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = 1$ dado que se pide que $\lambda > \frac{1}{4}$.

La ecuación de WDW (5.6) donde se puede ver el término cuarto en el factor de escala de la ecuación (5.28), $\kappa = 0$, tiene por solución las funciones Bessel ordinarias de orden imaginario[35]

$$\psi = \sqrt{A} Z_\nu \left(\frac{1}{3} \sqrt{\beta} A^3 \right), \quad \nu = \frac{i}{3} \sqrt{4\lambda - 1}, \quad \beta = 384\pi G \nu_{-1} + 48\Lambda.$$

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha visto como a partir de una propuesta alternativa, la cual implica un término cosmológico que puede ser variable en el tiempo, se obtienen resultados que son equivalentes (o si se prefiere, iguales) a los que se obtienen cuando la propuesta es que ese término cosmológico sea la Constante Cosmológica.

En el capítulo 4 se vio que es posible construir un Lagrangiano para una cosmología que contenga el término variable en el tiempo, y que a partir de ese Lagrangiano es posible obtener las ecuaciones de Einstein y la ecuación de Klein-Gordon, las cuales se resolvieron para diferentes escenarios, en los cuales se puede ver que las soluciones son concordantes con las observaciones y con otras teorías que predicen comportamientos similares. En el capítulo 4 se mostró que al trabajar con el lagrangiano, es decir, al hacer las variaciones correspondientes se obtienen las mismas ecuaciones de Einstein y Klein-Gordon que cuando se trabaja desde el método de Hamilton-Jacobi, esto quiere decir que las soluciones en ambos casos son las mismas y ambos métodos son equivalentes.

Al resolver el caso del término cosmológico variable en el tiempo se encontró la forma que toma el potencial de acuerdo al factor de escala, para eso se usaron dos hipótesis las cuales parecen ser correctas para desarrollar esa parte del trabajo. La primera definiendo la densidad del campo ϕ proporcional a ρ , en la cual se obtienen exactamente las mismas ecuaciones que en las secciones anteriores de este capítulo, y la segunda propuesta va en el sentido de obtener soluciones (cuando $\kappa = 0$) si $\omega_\phi = \gamma$, esto es, que las constantes de proporcionalidad de la ecuación barotrópica del campo y del fluido barotrópico del universo sean iguales, es decir, que evolucionen de igual manera, estas soluciones se dan, primero cuando $0 < \omega_\phi = \gamma < 1$, y la segunda cuando $-1 < \omega_\phi = \gamma < 0$.

En el capítulo 5 se han encontrado soluciones exactas al planteamiento cuántico del problema haciendo uso de tres propuestas con las cuales se ataca el problema, la primera de ellas fue cuando el potencial $V(\phi) = 2\Lambda$ y se tiene el caso inflacionario, además se consideraron valores diferentes de cero para el parámetro m que aparece en la ecuación (5.9), obteniendo soluciones en términos del factor de escala dadas con funciones tipo

Bessel ordinarias. El caso cuando $m = 0$ da soluciones tipo Bessel modificadas cuando $\kappa = 1$, Bessel ordinarias cuando $\kappa = -1$, para el caso cuando $\kappa = 0$ la solución obtenida indica que bajo cierto valor del término cosmológico el universo deja de tener un comportamiento cuántico. Más aún, se encontraron soluciones para valores de $\gamma \neq -1$. La segunda propuesta se da al buscar soluciones a la ecuación (5.6) haciendo uso de un potencial efectivo, analizando casos particulares de $\lambda > \frac{1}{4}$ y $\lambda < \frac{1}{4}$ encontrando así la forma que toma la función de onda, en el segundo caso se encuentra que la partícula colapsaría en el origen, lo cual da un refuerzo al concepto de Big Bang del universo.

En general se puede decir que este trabajo ha dado herramientas suficientes para poder decir que el método variacional con el método de Hamilton-Jacobi son equivalentes cuando se trata de problemas con término cosmológico variable en el tiempo y que se obtienen soluciones equivalentes entre aquellas teorías covariantes y aquellas que no consideran la covarianza. También se puede decir que al considerar el término cosmológico variable en el tiempo se está reforzando la teoría del big bang desde una perspectiva que no había sido abordada hasta ahora.

Además se puede decir que a escalas cosmológicas los métodos covariante y no covariante son equivalentes (al menos en este modelo y bajo las consideraciones hechas).

Las perspectivas que quedan es hacer un análisis buscando soluciones en las cuales $\kappa \neq 0$ en la parte clásica del trabajo y buscar una generalización de la equivalencia de las teorías covariantes y no covariantes para otros modelos que acepten la propuesta de un término cosmológico variable en el tiempo.

Apéndice A

Codigo REDUCE

```
*****;
% file lam-frw.red, 22.12.2011, jsoc;
% This file contain the metric FRW with perfect fluid as matter field;
% in the variable cosmological term theory, with signature (-, +, +, +)
*****;
on nat;
on nero;
%-----;
%   Introducimos la dimensionalidad del sistema   ;
%-----;
dimension:=4;
DIM:=dimension-1;
%-----;
%   Definicion de los tensores y operadores   ;
%-----;
operator a,x,presion,density,fi,f,n,h,q;
depend A,t;
depend f,t;
depend fi,t;
depend h,r;
depend q,r;
DEPEND N,t;
DEPEND presion,t;
DEPEND density,t;
%omega:=1;
%-----;
%   coordenadas del sistema   ;
%-----;
x(0):=t;
x(1):=r;
x(2):=theta;
x(3):=phi;
```

```
%-----;
%   Tensor Metrico Forma covariante   ;
%-----;

array gd(dim,dim), gu(dim,dim);
gd(0,0):=-N**2$
gd(1,1):=A**2/(1-kappa*r**2)$
gd(2,2):=A**2*r**2$
gd(3,3):=A**2*r**2*sin(theta)**2$

%-----;
%gd(0,0):=-n**2$ ;
%gd(1,1):=R**2$ ;
%gd(2,2):=S**2$ ;
%gd(3,3):=s**2*x(1)**2+R**2$ ;
%gd(2,3):=x(1)*S**2$ ;
%gd(3,2):=x(1)*S**2$ ;
%-----;

%-----;
%   Tensor metrico contravariante   ;
%-----;
matrix mgll(4,4),mghh(4,4);

% transformation of array to matrix to array;
*****;
for I:=0:dim do for j:=0:dim do
<< mgll(j+1,I+1):=mgll(I+1,j+1):= gd(I,j);
write mgll(j+1,i+1):=mgll(j+1,i+1)>>;

for all y let abs(y)=y;
mghh:=1/mgll;
gdet:=det(mgll);
%%%%% auxiliar step %%%%%%%%%%;
h:=-gdet;
q:=(1-kappa*r**2)*h;
%%%%%%%%% %%%%%%%%%%;
sgdet:=sqrt(q);

*****;
%   Tensor metrico contravariante   ;
*****;
for I:=1:4 do for j:=1:4 do
<<gu(I-1,j-1):=gu(j-1,I-1):=mghh(I,J);
write gu(I-1,j-1):=gu(j-1,I-1)>>;

*****;
%   cuadri-velocidad covariante   ;
```

```

*****;
array ud(dim),uu(dim);
ud(0):=-sqrt(-gd(0,0));ud(1):=0;ud(2):=0;ud(3):=0;

*****;
%   cuadri-velocidad contravariante   ;
*****;

for I:=0:dim do write uu(i):=gu(i,i)*ud(i);

%-----;
%   Calculo de los simbolos de Christoffer   ;
%-----;
array cs1(dim,dim,dim), cs2 (dim,dim,dim);
for I:=0:dim do for J:=I:dim do
  << for k:=0:dim do
    cs1(J,I,K):=cs1(I,J,K):=(DF(gd(I,K),x(J))+ DF(gd(J,K),x(I))
      -DF(gd(I,J),x(K)))/2;
    for K:=0:dim do write cs2(J,I,K):=cs2(I,J,K):= for L:=0:dim
      SUM gu(K,L)*cs1(I,J,L)>>;

%-----;
%   Calculo de tensor de Curvatura   ;
%-----;
array rie(dim,dim,dim,dim);
for i:=0:dim do for J:=i+1:dim do for k:=i:dim do
  for L:=k+1: dim do if k=i then j else dim do
    << write rie(j,i,l,k) := rie(i,j,k,l):= for q:=0:dim
      SUM gd(i,q)*( DF(cs2(k,j,q),x(l)) -DF(cs2(j,l,q),x(k))
      + for p:=0:dim SUM (cs2(p,l,q)*cs2(k,j,p)-cs2(p,k,q)*cs2(l,j,p)));
    rie(i,j,l,k):=-rie(i,j,k,l);
    rie(j,i,k,l):=-rie(i,j,k,l);
    if i NEQ k OR j>l
      THEN <<rie(k,l,i,j) :=rie(l,k,j,i):=rie(i,j,k,l);
        rie(l,k,i,j) := -rie(i,j,k,l);
        rie(k,l,j,i) := -rie(i,j,k,l)>>>>;

%-----;
%   Calculo del tensor de Ricci   ;
%-----;
array ricci(dim,dim);
for I:=0:dim do for j:=0:dim do
  write ricci(j,i):=ricci(i,j):= for p:=0:dim SUM for q:=0:dim
    SUM gu(p,q)*rie(q,i,p,j);

%-----;
%   Calculo del escalar de curvatura   ;
%-----;

```

```

rs:=FOR i:=0:dim SUM for j:=0:dim sum gu(i,j)*ricci(i,j);

%-----;
%   Calculo del tensor de Einstein   ;
%-----;

array einstein(dim,dim);
for i:=0:dim do for j:=0:dim do
  write einstein(i,j):=ricci(i,j)-rs*gd(i,j)/2 -gd(i,j)*lamda;
  %-----;
  %   tensor termino cosmologico en phi   ;
  %-----;
array exophi(dim,dim);
for i:=0:dim do for j:=0:dim do
  << write exophi(I,j):=-omega*(DF(fi,x(i))*DF(fi,x(j))
    - for k:=0:dim sum for l:=0:dim sum (1/2)*gd(i,j)*gu(k,l)*df(fi,x(k))*df(fi,x(l)) )
    + gd(i,j)*f>>;

%-----;
%   Construcccion de tensor de energia de campo escalar up;
%-----;
array afil(dim,dim),bfil(dim,dim),temufi(dim,dim);

for i:=0:dim do for j:=0:dim do
  << write afil(i,j):=(omega/2)*(
    for k:=0:dim sum for l:=0:dim sum gu(i,k)*gu(j,l)*df(fi,x(k))*df(fi,x(l)) )>>;

for i:=0:dim do for j:=0:dim do
  << write bfil(i,j):=(omega/2)*(1/2)*gu(i,j)*(for k:=0:dim sum for
    l:=0:dim sum gu(k,l)*df(fi,x(k))*df(fi,x(l)))>>;

for i:=0:dim do for j:=0:dim do
  << write temufi(i,j):= ( afil(i,j) - bfil(i,j)+ (1/2)*gu(i,j)*f )>>;

%-----;
%   Calcula el tensor de energia momento   ;
%   de un fluido perfecto   ;
%-----;
array temd(dim,dim);
array temu(dim,dim);

for I:=0:dim do for J:=0:dim do
  << write temd(i,j):= presion*gd(i,j)+((presion+density)*ud(i)*ud(j))>>;
for I:=0:dim do for J:=0:dim do
  << write temu(i,j):= presion*gu(i,j)+((presion+density)*uu(i)*uu(j))>>;

```

```

%-----;
%   Calcula la derivada de las ecuaciones del tensor ;
%   de energia-momento de campos de materia ;
%-----;
array dtemu(dim),dtemufi(dim),sumdte(dim);

FOR I:=0:DIM DO
  << WRITE dtemu(I):= FOR J:=0:DIM
    SUM ( df(temu(I,J),x(J)) + FOR L:=0:DIM
      SUM ( temu(J,L)*cs2(j,L,I) + cs2(J,L,J)*temu(I,L) ) )>>;

FOR K:=0:DIM DO
  << WRITE dtemufi(K):= FOR J:=0:DIM
    SUM ( df(temufi(K,J),x(J)) + FOR L:=0:DIM
      SUM ( temufi(J,L)*cs2(j,L,K) + cs2(J,L,J)*temufi(K,L) ) )>>;

% el signo - en exophi es por el codigo de reduce;

FOR I:=0:DIM DO
  write sumdte(i):=8*pi*gn*dtemu(i)- dtemufi(i);

%-----;
%   Calcula la ecuaciones de campo del sistema ;
%-----;
array fieldeq(dim,dim), field(dim,dim);
ka:=8*Pi*GN;
for all y let abs(y)=y;

FOR i:=0:DIM DO FOR j:=0:DIM DO
  WRITE fieldeq(i,j):=einstein(i,j)+ka*temd(i,j)-exophi(i,j);

for k:=0:dim do for j:=0:dim do
  WRITE field(k,j):= for i:=0:dim sum gu(k,i)*fieldeq(i,j);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% cosmological term %%%%%%%%%%;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% checado y esta bien con las constantes del paper%
%fi:=b*log(x(0)); %caso polvo, gama=0%
%f:=c*a**(-3); %caso polvo, gama=0%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%f:=c*a**(-4); %caso radiacion, gama=1/3%
%fi:=b*log(x(0)); %caso radiacion, gama=1/3%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
n:=1;
lamda:=0;
omega:=1;
kappa:=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%presion:=0; %caso polvo, gama=0%
%density:=m0*a**(-3); %caso polvo, gama=0%

```

```

%a:=(a0*x(0))**(2/3); %caso polvo, gama=0%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%presion:=(1/3)*density; %caso radiacion, gama=1/3%
%density:=m1*a**(-4); %caso radiacion, gama=1/3%
%a:=(a1*x(0))**(1/2); %caso radiacion, gama=1/3%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
presion:=- (2/3)*density; %caso inflacion, gama=-2/3%
density:=m1*a**(-1); %caso inflacion, gama=-2/3%
a:=(a1*x(0))**(2); %caso inflacion, gama=-2/3%
f:=c*a**(-1);
fi:=b*log(t);
%a:=a0*x(0);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%operator rr,pp;
%depend rr,fi;
%depend pp,fi;
%kappa:=0;
%lamda:=0;
%f:=fi;
%n:=1;
%gama:=1;
%density:=m1*a**(-6);
%presion:=gama*density;
%omega*df(fi,x(0))**2/2-fi:=pp;
%omega*df(fi,x(0))**2/2+fi:=rr;
%omegafi:=1;
%pp:=omegafi*rr;
%df(fi,x(0)):=sqrt(2*m/(3*(m+1)*t**2));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% gamma=-1; funciona el metodo
%a:=e**(sqrt(8*pi*gn*m1*(m+1)/3)*x(0));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% gamma=1; si funciona el metodo
%a:=(3*sqrt(8*pi*gn*m1*(m+1)/3)*x(0))**(1/3);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% gamma=1/3; no funciona el metodo
%df(fi,t):=2*sqrt(f);
%a:=(2*sqrt(8*pi*gn*m1*(m+1)/3)*x(0))**(1/2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% gamma=0; no funciona el metodo
%df(fi,t):=sqrt(2*f);
%a:=((3/2)*sqrt(8*pi*gn*m1*(m+1)/3)*x(0))**(2/3);
%fi:=sqrt(2)*c*x(0);
%a:=((c/b)*csch(-sqrt(3)*c*x(0)))**(1/3);
%n:=24*a**3;
%gama:=-1;
%density:=m;
%lamda:=0;
%kappa:=0;
%presion:=gama*density;

for k:=0:dim do for j:=0:dim do
  WRITE field(k,j):= for i:=0:dim sum gu(k,i)*fieldeq(i,j);

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%;
% ecuacion del campo phi, D'alambertiano, f:=fi ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%;
<< write dalamber:=FOR i:=0:DIM sum FOR j:=0:DIM sum
    omega*gu(i,j)*( df(fi,x(i),x(j))-for l:=0:dim sum cs2(i,j,l)*df(fi,x(l)) )
    >>;
<<write dala:=df(fi,x(0))*dalamber - df(f,x(0))>>;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%;
%el factor df(fi,x(0)) aparece en el calculo del campo fi;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%;
    %shut "f.dat";
fii:=(omega/2)*(for i:=0:dim sum for j:=0:dim sum gu(i,j)*DF(fi,x(i))*DF(fi,x(j)))-f;

lagrangian:=sgdet*(rs+2*lamda +fii + 16*pi*G*density);
SHOWTIME;
END;

```

Bibliografía

- [1] Barbara Ryden. *Introduction to cosmology*. Addison Wesley, 2003.
- [2] What is a cosmological constant? http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_accel.html, 2012.
- [3] S.E. Rugh and H. Zinkernagel. The quantum vacuum and the cosmological constant problem. *To appear in Studies in History and Philosophy of Modern Physics*.
- [4] Arbab Ibrahim. *Nonstandar cosmology with constant an variable gravitational and variable cosmological "constants" and bulk viscosity*. PhD thesis, University of Khartoum, Faculty of physics, Sudan, 1996.
- [5] R.G. Vishwakarma. A model to explain varying Λ , G and σ^2 simultaneously. *arXiv:0801.2973v1 [gr-qc]*, January 18 2008.
- [6] R.G. Vishwakarma. A study of angular size-redshift relation for models in which Λ decays as the energy density. *Class. Quantum Grav.* 17 (2000) 3833-3842, 2000.
- [7] Utpal Mukhopadhyay, Saibal R., A. A. Usmani, and Partha P. G. Time variable Λ and the accelerating universe. *arXiv:0811.0782v3 [gr-qc]* 9 Dec 2010, 2010.
- [8] Utpal Mukhopadhyay, Saibal R., and Xin-He Meng. Accelerating universe with a dynamic cosmological term. *Gravitation & Cosmology, Vol.13 (2007), No. 2 (50), pp. 142-150*, 2007.
- [9] Marcelo Samuel Berman. Cosmological models with a variable cosmological term. *Physical Review D, Vol. 43, number 4*.
- [10] Lixin Xu. Time variable cosmological constant from renormalization group equations. *arXiv:0906.111v3 [astro-ph.CO]*, 2009.
- [11] Lixin Xu, Jianbo Lu, and Wenbo Li. Time variable cosmological constants from the age of the universe. *arXiv:0905.4773v1 [astro-ph.CO]*, 2009.
- [12] M. Novello, J. Barcelos, and J. M. Salim. Model for a time-dependent cosmological constant. *IOP, Class. Quantum Grav.* 18(2001) 1261-1268, 2001.

- [13] P. I. Fomin, P. A. Nakaznoy, and S. I. Vilchinskyi. The closed universe model with variable Λ -term. *arXiv:gr-qc/0509042v1*, 2005.
- [14] A. Papapetrou. *Lectures on General Relativity*. D. Reidel Publishing Company, 1974.
- [15] Albert Einstein. *Relativity, the special and general theory*. University of Berlin, 1920.
- [16] Oyvind Gron and Sigbjorn Hervik. *Einstein's General Theory of Relativity*. University of Oslo, University of Cambridge.
- [17] Alejandro Corichi and Darío Nuñez. Introducción al formalismo ADM. *Revista Mexicana de Física* 37 No. 4, 1991.
- [18] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley and Sons, Inc., 1972.
- [19] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [20] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and company, 1970.
- [21] P.A.M. Dirac. *General Theory of Relativity*. Princeton University press, 1975.
- [22] Edmund Bertschinger. *Introduction to tensor calculus for General Relativity*. Springer, 2000.
- [23] Juan Manuel Sarmiento Tejeiro. *Principios de relatividad general*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, 2005.
- [24] Bernard F. Schutz. *A first course in General Relativity*. Cambridge University press, 1985.
- [25] V. Faraoni. *Am. J. Phys.* 67 732. 11 (1999).
- [26] J.C. Cota. *Konstanzer dissertationen, Induced Gravity and Cosmology*. Ed. Hartung-Corre Verlag, Konstanz, 1996.
- [27] S.R. Berbena, Aarón V.B. Arellano, and J. Socorro. The einstein-hamilton-jacobi equation: searching the classical solution for barotropic FRW. *Revista Mexicana de Física* S 53 (2) 115119, (2007).
- [28] Cesar Hernandez Aguayo. Dinámica general de campos escalares de quintaesencia: comparación con observaciones cosmológicas, 2012.
- [29] J. Socorro and Marco D'oleire. Inflation from supersymmetric quantum cosmology. *Phys. Rev. D.* 82(4) 044008, 2010.
- [30] J. Socorro, M. Sabido, W. Guzmán, and M. A. Granados. *Procesos no lineales en la ciencia y la sociedad*. Notabilis Scientia, 2013.

- [31] D. Bohm. *Phys. Rev.* 85, 166, 1952.
- [32] Gradshteyn and Ryzhik's. *Table of integrals, Series and products.* Academic Press, 2007.
- [33] E. Kamke. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen.* 1977.
- [34] L.D. Landau and E. M. Lifhsitz. *Quantum Mechanics Non-Relativistic theory.* Pergamon Press Ltd., 1965.
- [35] Valentin F. Zaitsev and Andrei D. Polyinin. *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations.* Chapman and Hall/CRC, 2005.



Universidad
de Guanajuato

León, Gto. a 19 de Noviembre de 2013.

Asunto: Solicitud de Sinodales.

Dr. Guillermo Mendoza Díaz
Director de la DCI

El que suscribe Dr. José Socorro García Díaz, solicita que se nombren a los posibles sinodales para el Lic. en Física, Marco Antonio D'oleire Díaz, alumno de la Maestría en Física de la División de Ciencias e Ingenierías. El trabajo de investigación que es parte de su tesis de Maestría, considero que tiene resultados que son relevantes dentro del tópico del parámetro cosmológico, tanto a nivel independiente, así como dependiente del tiempo, que debe presentar ante los sinodales.

Una propuesta para los sinodales titulares son los Doctores:
Alejandro Gil Villegas Montiel
Oscar Miguel Sabido Moreno
Juan Barranco Monarca

y como profesor suplente, un servidor.

Sin más por el momento, le envío un cordial saludo.

Atentamente,
"LA VERDAD OS HARA LIBRES"

Dr. José Socorro García Díaz
Profesor Titular B



Universidad
de Guanajuato

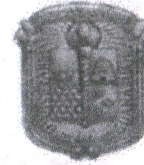
CAMPUS LEÓN
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FÍSICA

31 de enero del 2014

Dr. Teodoro Córdova Fraga
Coordinador de Posgrado
División de Ciencias e Ingenierías

Por medio de la presente le informo que después de leer el documento de tesis *Término cosmológico variable en el tiempo*, presentado por el estudiante Marco Antonio D'Oleire Díaz, para obtener el grado de Maestría en Física, se realizó la entrevista correspondiente con el estudiante y se atendieron las correcciones señaladas, por lo que autorizo la presentación del examen de grado una vez que se cumplan todos los requisitos administrativos requeridos.

Dr. Alejandro Gil-Villegas Montiel
Profesor Titular C
Departamento de Ingeniería Física



Universidad
de Guanajuato

Asunto: Revisión de Tesis de Maestría.

León, Gto., a 22 de enero del 2014.

Dr. Guillermo Mendoza Díaz
Director de la DCI-UG
Campus León.

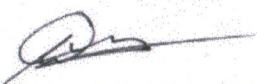
Por medio de la presente quiero responder a la solicitud de revisión del trabajo de tesis titulado "TÉRMINO COSMOLÓGICO VARIABLE EN EL TIEMPO", realizado por el físico Marco Antonio D'Oleire Díaz.

Después de leer el trabajo en el que se estudia la posibilidad de que la constante cosmológica varíe en el tiempo. Concluyo que es un resultado muy interesante que puede ser relevante en el problema de la energía oscura

Por lo mencionado anteriormente creo que el trabajo de tesis ha sido concluido, es original y esta listo para defensa pública.

Sin más por el momento

Atentamente


Dr. Oscar Miguel Sabido Moreno.

C.c.p. Archivo



León Guanajuato, a; 4 de Febrero de 2014

Dr. Guillermo Mendoza Díaz
Director de la División de Ciencias e Ingenierías
Campus León, Universidad de Guanajuato
PRESENTE

Estimado Dr. Mendoza:

Me permito informarle que he leído y revisado la tesis titulada "**Término Cosmológico variable en el tiempo**". Dicha tesis la realizó el **Lic. Marco Antonio D'Oliere Díaz**, como requisito para obtener el grado de Maestro en Física.

Los resultados presentados en la tesis son de interés para la comunidad científica y considero que el trabajo hecho por Marco Antonio es de la calidad suficiente para que sea defendida en un exámen profesional, razón por la cual extendiendo mi aval para que así se proceda.

Sin más que agregar, agradezco su atención y aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

Dr. Juan Barranco Monarca
Departamento de Física
DCI, Campus León

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. +52 (477) 788-5100 Fax: +52 (477) 788-5100 ext. 8410. <http://www.ihu.guato.mx>