

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
CAMPUS LEÓN
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS



**Estudio de la renormalización de la teoría
de norma $U(1)$ para materia oscura
tensorial**

Armando De La Cruz Rangel Pantoja
Tesis que presenta para obtener el grado de
MAESTRO EN FÍSICA

Asesor
Dr. Mauro Napsuciale Mendivil

Noviembre de 2023

Índice general

Resumen	iv
Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
1. Introducción	1
2. Modelo Estándar y materia oscura	4
2.1. Fundamentos	8
2.1.1. Mecánica cuántica	8
2.1.2. Relatividad especial	11
2.1.3. Grupo de Poincaré	13
2.1.4. Grupo homogéneo de Lorentz	30
2.1.5. Estados masivos y sus dinámicas	40
2.1.6. Campos clásicos y principio de norma	42
2.1.7. Teoría cuántica de campos	51
2.2. Modelo Estándar	63
2.3. Materia oscura	65
3. Materia oscura tensorial	68
3.1. Paridad y dinámica de los estados masivos	69
3.1.1. Simetrías discretas en el grupo de Poincaré	70
3.1.2. Irreps de paridad en el grupo homogéneo de Lorentz	74
3.1.3. Estados y dinámica de las representaciones $(\mathbf{j}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{j})$	80
3.2. El campo de la representación $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{1})$	86
3.2.1. Campo clásico	89
3.2.2. Campo cuántico	92
3.3. Materia oscura tensorial	94

4. Renormalización de la teoría de norma U(1) para TDM	96
4.1. Fundamentos de renormalización	97
4.2. Renormalización a un lazo	105
4.2.1. Interacción con el campo de norma B^μ	105
4.2.2. Términos físicos y contratérminos	106
4.2.3. Reglas de Feynman	107
4.2.4. Identidad de Ward-Takahashi	108
4.2.5. Autoenergía del campo de norma B^μ	109
4.2.6. Autoenergía de TDM	113
4.2.7. El propagador de TDM en la región UV	116
4.3. Renormalización a un lazo: caso no-masivo	118
4.3.1. Interacción con el campo de norma B^μ	120
4.3.2. Términos físicos y contratérminos	122
4.3.3. Reglas de Feynman	123
4.3.4. Identidad de Ward-Takahashi	124
4.3.5. Autoenergía del campo de norma B^μ	125
4.3.6. Autoenergía de TDM	128
4.3.7. Nuevos contratérminos	133
5. Conclusiones	136
A. Base covariante de la representación $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{1})$	138
A.1. Elementos de la base	138
A.2. Índices internos de Lorentz	139
A.3. Ortogonalización en D arbitraria	141
B. Método de reducción de Passarino-Veltman	147
Referencias	150

Índice de tablas

2.1. Separación del grupo de Lorentz \mathbb{L} en subconjuntos.	16
2.2. Separación del grupo de Poincaré \mathbb{P} en subconjuntos.	19
2.3. Organización esquemática de las irreps de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$	35
2.4. Partículas del Modelo Estándar. Tabla reproducida parcialmente de [54]. . .	64
A.1. Ortogonalidad de la base covariante en $D = 4$	141
A.2. No-ortogonalidad de la base covariante en D	142

Resumen

Materia oscura tensorial (TDM) es una propuesta que se ha explorado recientemente para describir a la materia oscura (DM) como un campo de espín $j = 1$ en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ del grupo homogéneo de Lorentz, en un esquema de materia oscura escondida. Bajo este esquema, TDM es un singlete del Modelo Estándar (SM) y las interacciones entre ambos sectores son del tipo singleteDM-singleteSM. Se ha demostrado que esta propuesta se encuentra dentro de las cotas experimentales actuales para valores específicos de su masa y de las constantes de acoplamiento. En este trabajo se estudia la renormalización de la interacción de norma $U(1)$ para TDM a un lazo, en el esquema de substracción mínima (MS). Se encuentra que la interacción es no-renormalizable debido, esencialmente, al comportamiento divergente del propagador de TDM en la región ultravioleta. La similitud entre la estructura de éste propagador y la del propagador de un campo vectorial masivo, y por analogía con la solución a la no-renormalizabilidad de éste último que surge de considerarlo inicialmente no-masivo y, posteriormente, dotarlo de masa a través del mecanismo de rompimiento espontáneo de la simetría, nos conduce al estudio de la renormalización de la interacción de norma $U(1)$ para TDM no-masiva y, eventualmente, a la búsqueda de algún mecanismo para dotarlo masa. En el caso no-masivo, el Lagrangiano libre de TDM tiene una simetría de norma, por lo cual es necesario agregar un término de fijación de norma a su Lagrangiano. El propagador tiene, ahora, un buen comportamiento en la región ultravioleta. Se obtienen los diagramas superficialmente divergentes, se calcula la autoenergía del campo de norma $U(1)$ y la autoenergía del campo de TDM, y se encuentra que el primero es renormalizable, mientras que el segundo se puede renormalizar sólo si se considera una constante de renormalización δ_ζ para su parámetro de norma.

Dedicatoria

A mis padres, la Sra. Leticia Pantoja Segoviano y el Sr. Angel Rangel Andrade.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a mis padres, la Sra. Leticia y el Sr. Angel, quienes con su amor, esfuerzo y responsabilidad lograron formar un matrimonio, una familia y un hogar; y a quienes nosotros, sus hijos, debemos todo. A mis hermanos, Abril y Miguel, con quienes he compartido toda la vida. A mi familia extensa, materna y paterna, que quiero tanto como a mi familia nuclear.

Agradezco a mi país, México, y a mi estado, Guanajuato, por la educación pública que ofrecen, de la cual he sido beneficiario y que espero algún día retribuirles y en ella contribuir. Al CONACYT, por la beca otorgada para el estudio de este programa.

Agradezco a la Universidad de Guanajuato y a la División de Ciencias e Ingenierías, a todo su personal docente, administrativo y de servicios. En especial agradezco al Dr. Mauro Napsuciale por los grandiosos cursos que imparte, que estimulan y avivan sobremanera el interés de los alumnos en la física; por haber aceptado ser mi asesor; y por su atención y apoyo continuo durante esta tesis. Agradezco también al Dr. Carlos Vaquera por su ayuda, sus observaciones y la disposición para atender siempre cualquier duda. A mis compañeros de generación: Edson, Alex, Noemí, Salvador y Ariadna, por el apoyo que nos brindamos durante el programa. A Yolanda por atender siempre de la mejor manera a nosotros los estudiantes.

Capítulo 1

Introducción

El Modelo Estándar de las Partículas Elementales (SM) es la teoría física que describe a la materia y a tres de sus interacciones: electromagnética, débil y fuerte, a nivel fundamental. Este modelo fue elaborado progresivamente durante la segunda mitad del siglo XX y su construcción teórica sustancial se completó en la década de 1970. En el año 2012, con la detección del bosón de Higgs en el LHC, culminó la verificación experimental de su contenido de partículas y de su funcionamiento. Durante todo este tiempo se han desarrollado múltiples experimentos para poner a prueba a este modelo bajo diferentes condiciones, que han resultado i) en la confirmación de sus predicciones con un nivel de exactitud y precisión asombroso, y ii) en la ausencia de evidencia experimental concluyente, de fenómenos en su dominio, que revele física más allá de él hasta energías del orden de 13 TeV. Por lo anterior, el Modelo Estándar es, sin lugar a dudas, la teoría física más completa, exacta y precisa que se ha desarrollado y verificado experimentalmente.

Sin embargo, a pesar del éxito sin precedentes que ha tenido el Modelo Estándar aún existen preguntas abiertas y fenómenos que no son entendidos o explicados por completo. Algunas de estas cuestiones son, por ejemplo: ¿Por qué existen tres generaciones de fermiones? ¿Cuál es el origen de la asimetría materia-antimateria (asimetría bariónica)? ¿Cuál es la naturaleza de los neutrinos?, etc. En particular, un conjunto de evidencias observacionales astrofísicas a escalas galáctica, intergaláctica y cosmológica parecen indicar la existencia de un elemento desconocido, quizá un nuevo tipo de materia, que tiene la característica peculiar de que interacciona principalmente a través de la gravedad mientras que su interacción electromagnética es nula o, al menos, de muy baja intensidad; por esto último, a este elemento desconocido se le ha llamado, en general, materia oscura (DM).

Existe una gran variedad de propuestas que intentan explicar a este conjunto de evidencias observacionales astrofísicas; desde las que enuncian que son causadas por algún tipo de partícula hasta las que expresan que podría tratarse de agujeros negros ó, incluso, aquellas que exploran la posibilidad de que sean esclarecidas con modificaciones a las teorías de gravedad. Entre esta diversidad de propuestas resulta particularmente llamativo

que aquellas que intentan describir a DM como una partícula asumen que el campo correspondiente pertenece a alguna de las representaciones del grupo homogéneo de Lorentz de las mismas que hace uso el SM, esto es, a las representaciones escalar $(0, 0)$, espinorial $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ ó vectorial $(1/2, 1/2)$, sin tratar de ir más lejos. En vista de esto, recientemente se ha explorado una alternativa, llamada materia oscura tensorial (TDM), que va más allá de este paradigma. Materia oscura tensorial es la propuesta que plantea la descripción de DM como un campo cuántico de espín $j = 1$ en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ del grupo homogéneo de Lorentz; ésta se desarrolla en un esquema de materia oscura escondida, bajo el cual TDM no tiene cargas del SM y las interacciones entre ambos sectores son del tipo $\text{singlet}_{\text{DM}}\text{-singlet}_{\text{SM}}$. En su estudio se ha encontrado que cumple con los requisitos y está dentro de las cotas actuales para ser considerado como candidato a DM.

Materia oscura tensorial es una teoría cuántica de campo y, como es bien sabido, las teorías cuánticas de campo poseen divergencias ultravioletas (UV); estas pueden ser sólo divergencias aparentes o pueden ser, por el contrario, divergencias auténticas (físicas). La renormalización es el proceso de reescritura de la teoría en términos de sus verdaderas cantidades físicas; como consecuencia de esta reescritura algunas de sus divergencias UV son absorbidas en las cantidades no-físicas (cantidades desnudas), lo que demuestra que éstas sólo eran divergencias aparentes, sin ningún significado físico. Cuando todas las divergencias UV de la teoría pueden ser evitadas con el proceso de renormalización, es decir cuando todas sus divergencias UV son sólo aparentes, se dice que la teoría es renormalizable; éstas son teorías consistentes a cualquier escala de energía. Las teorías en las que no todas las divergencias UV pueden ser evitadas son llamadas no-renormalizables y éstas poseen divergencias UV auténticas que se manifiestan a partir de una cierta escala de energía; sin embargo, debajo de esa escala de energía son perfectamente válidas y aceptables como teorías efectivas. El Lagrangiano de interacción de TDM entre los sectores DM y SM de menor dimensión tiene dimensión de masa igual a 4; éste hecho abre la posibilidad de que, detrás de esta teoría, exista una teoría fundamental de TDM válida a cualquier escala de energía. En este sentido, resulta interesante abordar el estudio de la renormalización de TDM con el fin de averiguar si es posible que exista una teoría fundamental de TDM válida a cualquier escala de energía o si se trata, por el contrario, sólo de un modelo con validez efectiva. El presente trabajo tiene el objetivo de estudiar esta cuestión en el caso de TDM acoplada mínimamente con un campo de norma $U(1)$, es decir, se estudia la renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para TDM, a un lazo.

La organización de este documento es la siguiente. En el segundo capítulo se hace una revisión de los fundamentos sobre los que está construido el SM poniendo énfasis en la deducción convencional de los estados cuánticos de partícula libre que surgen naturalmente del grupo de simetrías del espacio-tiempo; se describe el Modelo Estándar; y se comentan las evidencias que dan lugar a la hipótesis de materia oscura. En el tercer capítulo se expone el formalismo de primeros principios que corrige la deducción convencional de los estados cuánticos de partícula libre y con el que es posible deducir, además de los propios estados cuánticos, la dinámica propia a la que ellos obedecen; se utiliza este formalismo

para obtener la ecuación dinámica del campo en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ del grupo homogéneo de Lorentz; se revisan los aspectos clásicos y la cuantización canónica de este campo; y se describe la propuesta de materia oscura tensorial. En el cuarto capítulo se desarrolla la parte medular de esta tesis: el estudio de renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para TDM. Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Modelo Estándar y materia oscura

Desde siempre el ser humano ha tratado de encontrar una explicación lógica y racional de la esencia y el devenir de la naturaleza. Esta búsqueda se manifestó, sobre todo, en la antigua Grecia, donde los filósofos presocráticos reflexionaron sobre la composición última del mundo así como sobre su diversidad y los cambios que en él acontecen, entre muchos otros temas. De especial relevancia fue la idea de ‘átomo’, cuyo significado es ‘indivisible’, concebida por Demócrito (460 a.C. - 370 a.C.) y que supone la existencia de partículas pequeñísimas, eternas e indivisibles que componen a todo el mundo material. Si bien esta no fue más que una pura especulación filosófica, el término ‘átomo’ y la búsqueda de las partículas indivisibles que componen a todo el mundo físico siguen vigentes hasta nuestros días.

Con el paso del tiempo, la búsqueda del entendimiento lógico y racional del mundo físico se trasladó del ámbito filosófico al científico. Un avance sin precedentes tuvo lugar en el siglo XVII con las contribuciones de Isaac Newton: las tres leyes de la mecánica y la ley de la gravitación universal [1]. Otro avance de gran relevancia sucedió durante la segunda mitad del siglo XIX, cuando James C. Maxwell ajusta, compila y publica las leyes de la electricidad y el magnetismo [2]. Todos estos conjuntos de leyes tuvieron éxito en la descripción de una gran cantidad de fenómenos físicos en sus respectivos campos; sin embargo, aún existían resultados experimentales que no podían ser explicados por ellas.

Por un lado, las ecuaciones de Maxwell establecían que la luz era una onda electromagnética que se propaga a la velocidad $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, donde se hipotetizó que esta velocidad era respecto al marco de referencia del ‘éter’; no obstante, los resultados del experimento de Michelson y Morley [3], diseñado para determinar la velocidad de la Tierra respecto a éste marco de referencia, mostraban que la velocidad de la luz era la misma en todos los marcos de referencia y en todas las direcciones, independientemente del estado de movimiento del observador y de la fuente. A su vez, este resultado experimental no era congruente con las transformaciones galileanas de velocidades entre sistemas de referencia inerciales y más generalmente, las ecuaciones de Maxwell no eran covariantes bajo transformaciones gali-

leas de coordenadas entre sistemas de referencia inerciales, como sí lo eran las leyes de la mecánica de Newton. Por otro lado, se conocía un conjunto de experimentos, que consistían básicamente en la interacción de luz y materia, cuyos resultados no podían ser descritos con la interpretación ondulatoria de la luz que provenía de las ecuaciones de Maxwell; algunos de esos experimentos y resultados eran: las capacidades caloríficas de los sólidos a bajas temperaturas, los espectros atómicos de emisión [4, 5], el espectro de radiación térmica del cuerpo negro [6], el efecto fotoeléctrico [7], el efecto Compton [8], etc.

A principios del siglo XX surgen dos propuestas radicales que logran explicar ambos enigmas, cada una de las cuales da lugar a una revolución en el estudio de la física. En el año de 1905 Albert Einstein publica el artículo titulado ‘Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento’ [9], que postula los dos principios de la teoría especial de la relatividad (SR)

- Las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema de referencia inercial.
- La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores, independientemente del estado de movimiento del observador o de la fuente.

Estos dos principios dan origen a un nuevo entendimiento de los conceptos de espacio y tiempo, que antes eran concebidos como entes conceptuales independientes, integrados ahora en un nuevo y único ente, que es llamado espacio-tiempo, en el que ya no son independientes. Con esta teoría se logra entender y explicar el primero de los enigmas mencionados. Por su parte, en el año de 1900 Max Planck publica el artículo titulado ‘Sobre la ley de distribución de la energía en el espectro normal’ [10] en el que introduce el postulado pionero de la teoría que posteriormente se conoció como mecánica cuántica (QM) y que bien puede ser escrito como [11]

- Un sistema físico cuya única coordenada es una función sinusoidal del tiempo sólo puede tener energía E tal que

$$E = nh\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

donde ν es la frecuencia de oscilación y $h \approx 6.63 \times 10^{-34} \text{m}^2\text{kg/s}$ es una constante universal.

La constante universal h fue posteriormente nombrada constante de Planck. Este postulado engendra la idea de que la energía de algunos sistemas está contenida en pequeños paquetes discretos de naturaleza corpuscular. Con este postulado, aplicado a la energía transportada por el campo electromagnético, cuyos paquetes corpusculares de energía son llamados fotones, se logró explicar el espectro del cuerpo negro [10], el efecto fotoeléctrico [12] y el efecto Compton [8]; mientras que aplicado a la mecánica de los átomos y con algunas hipótesis adicionales se obtuvo el modelo atómico de Bohr [13], con el que se pudieron reproducir muchos de los espectros atómicos. El trabajo de los físicos enseguida se centró

en tratar de entender cuál era el origen fundamental de este postulado. En 1924, Louis de Broglie en su tesis doctoral titulada ‘Investigación sobre la teoría de los cuantos’ [14] propone, de manera análoga a la existencia de una naturaleza corpuscular de los fenómenos ondulatorios, la existencia de una naturaleza ondulatoria de las partículas; esta hipótesis fue confirmada de manera independiente en los experimentos de interferencia y difracción de haces electrónicos realizados por Davisson y Germer [15-17], y G.P. Thomson [18], respectivamente, ambos en 1927. En 1926, Erwin Schrödinger publica ‘Una teoría ondulatoria de la mecánica de los átomos y moléculas’ [19], artículo en el que introduce la ecuación que lleva su nombre y que junto con la interpretación probabilística de la función de onda, propuesta por Max Born [20] en ese mismo año, constituyen los fundamentos de lo que se llamó mecánica cuántica ondulatoria. Finalmente, en el año de 1930, Dirac en ‘Los principios de la mecánica cuántica’ [21] precisa la estructura general y formal de la mecánica cuántica, teoría que sintetiza todas estas hipótesis y principios. Con esta teoría se logra el entendimiento de las causas subyacentes de los fenómenos que revelaban la naturaleza corpuscular de la luz y la naturaleza ondulatoria de la materia.

La teoría especial de la relatividad y la mecánica cuántica fueron teorías desarrolladas de manera paralela que develaron nuevos aspectos de la realidad física en dominios separados: los efectos peculiares de la primera se manifiestan a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, mientras que los de la segunda a distancias de orden atómico e inferior. Naturalmente, surgieron intentos por desarrollar una teoría que abarcara ambos dominios de la realidad física integrando de manera congruente a ambas teorías, es decir, surgieron intentos por desarrollar una mecánica cuántica relativista. Incluso desde el año 1926 se propuso, de manera independiente por O. Klein [22], W. Gordon [23], y E. Schrödinger [24], una ecuación que integre a ambos marcos teóricos, que fue llamada ecuación de Klein-Gordon, sin embargo, esta ecuación padecía de problemas conceptuales: probabilidades y energías negativas. Con el objetivo específico de obtener una ecuación cuántica relativista que no tuviera probabilidades negativas, en 1928 Dirac propone en su artículo ‘La teoría cuántica del electrón’ [25] la ecuación que lleva su nombre y que resuelve este problema; además en su artículo de 1930 titulado ‘Una teoría de electrones y protones’ [26] plantea una propuesta de solución al problema de las energías negativas a través del principio de Pauli y la suposición de la existencia de un ‘mar de partículas’ de energía negativa que llenaban el vacío, que inicialmente pensó que deberían ser protones (de ahí el título de su artículo) pero finalmente se convenció de que deberían ser positrones, es decir, partículas semejantes al electrón pero con carga eléctrica opuesta; éstas, hasta entonces hipotéticas partículas, fueron detectadas por primera vez en el año de 1932 por C. D. Anderson [27]. A pesar de la acertada predicción de la existencia de los positrones y otros éxitos de la teoría de Dirac, aún persistían algunos problemas con ella, por ejemplo: la hipótesis del ‘mar de partículas’ que junto con el principio de exclusión de Pauli resuelve el problema de las energías negativas no funciona para partículas que obedecen la estadística de Bose-Einstein; para ese entonces ya se conocían estados con espín 0, que no obedecen la ecuación de Dirac; entre otros.

La solución a estos problemas nació del trabajo de Born, Heisenberg y Jordan, que en 1926 publicaron ‘Sobre la mecánica cuántica II’ [28], donde aplicaron los principios de la mecánica cuántica al formalismo canónico de sistemas con múltiples grados de libertad y, en particular, a los modos de oscilación del campo electromagnético; así lograron reproducir el espectro de radiación del cuerpo negro. Es de este modo que inicia el estudio de la cuantización de los campos. Esta teoría que integra, de manera consistente, los principios de QM y SR a la dinámica de los propios campos es conocida como teoría cuántica de campos (QFT). Se desarrolla con los trabajos de Jordan y Wigner [29, 30] en 1927 y 1928, y se formaliza con los trabajos de Heisenberg y Pauli [31, 32] en 1929 y 1930. En este contexto de QFT, las partículas son interpretadas como la mínima manifestación de un campo cuántico y de esta manera se evitan los problemas conceptuales de los que padece la mecánica cuántica relativista.

La dinámica de las partículas elementales, y en general subatómicas, se encuentra en la intersección de los dominios característicos de SR y QM, por lo tanto una teoría para su descripción debe ser tal que incorpore a ambas de manera consistente. Es así que QFT resulta un escenario natural para una teoría de las partículas elementales, donde estas últimas serán interpretadas como manifestaciones mínimas de diferentes tipos de campos. El estudio de las propiedades de las partículas, interpretadas ahora como las mínimas expresiones de campos, y de sus interacciones condujo al desarrollo de modelos que, posteriormente, fueron integrados en un modelo más extenso, conocido como el Modelo Estándar de las Partículas Elementales (SM). El SM es la teoría cuántica de campos que describe a las partículas fundamentales que componen la materia y a tres de las cuatro interacciones conocidas de la naturaleza, a saber: la nuclear fuerte, la nuclear débil y la electromagnética. Este modelo se construyó durante la segunda mitad del siglo XX [33-38] y es, hasta el día de hoy, la teoría física más completa, exacta y precisa que ha desarrollado la humanidad. En el sentido filosófico es, sin lugar a dudas, el supremo acercamiento al entendimiento de la composición última de todo lo que existe, de su diversidad y de los cambios que acontecen; es el supremo acercamiento al entendimiento que, desde siempre, la humanidad ha buscado.

Sin embargo, existen evidencias de fenómenos que no son entendidos o explicados por completo por este modelo. En particular, un conjunto de observaciones astrofísicas a escala galáctica, intergaláctica y cosmológica parecen revelar la existencia de un elemento desconocido, quizá un nuevo tipo de materia que interactúa principalmente a través de la gravedad y su interacción electromagnética es nula o, al menos, de muy baja intensidad por lo cual se le ha llamado materia oscura.

En este capítulo se hace una breve revisión del Modelo Estándar y del problema de la materia oscura. En la primera sección se desarrollan los fundamentos sobre los que está construido el Modelo Estándar; en la segunda sección se reseña brevemente el propio SM; y, finalmente, en la tercera sección se describen las evidencias que originan la hipótesis de materia oscura.

2.1. Fundamentos

La presente sección es una revisión de los conceptos y elementos fundamentales sobre los que está construido el Modelo Estándar de las Partículas Elementales. Estos elementos van desde los principios de la mecánica cuántica y la teoría especial de la relatividad, pasando por la teoría clásica de campos y el principio de norma, hasta la teoría cuántica de campos, el tratamiento perturbativo de las interacciones y las reglas de Feynman para el cálculo de amplitudes de procesos a través de los diagramas de Feynman. La exposición de esta sección está basada en las referencias [39-43].

2.1.1. Mecánica cuántica

La enunciación formal y general de la mecánica cuántica fue elaborada por Dirac en su libro ‘Los principios de la mecánica cuántica’ [21], en el año de 1930. Esta formulación se puede sintetizar en los siguientes seis postulados

1. Toda la información de un sistema físico está contenida en un vector de estado $|\psi(t)\rangle$ que depende paramétricamente del tiempo t y que pertenece a un espacio de Hilbert \mathcal{H} .
2. Los observables \mathcal{O} son representados por operadores hermíticos \mathcal{O} que actúan sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} .
3. La medición de un observable \mathcal{O} sólo puede dar como resultado alguno de los eigenvalores o_i de su correspondiente operador hermítico \mathcal{O} .
4. Antes de realizar la medición no es posible saber cuál eigenvalor resultará, sólo es posible conocer sus probabilidades, que están dadas por

$$\mathcal{P}(o_i, t) = |\langle o_i | \psi(t) \rangle|^2. \quad (2.2)$$

5. El estado del sistema, inmediatamente después de realizar una medición del observable \mathcal{O} , estará descrito por el eigenestado $|o_i\rangle$, correspondiente al eigenvalor o_i que haya resultado de la medición.
6. La evolución en el tiempo del estado $|\psi(t)\rangle$ es generada por el Hamiltoniano H del sistema de acuerdo con la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(p, q, t) |\psi(t)\rangle. \quad (2.3)$$

El vector de estado $|\psi(t)\rangle$ de un sistema físico se obtiene de resolver la ecuación (2.3) sujeta a una condición inicial $|\psi(t=0)\rangle$. Para especificar esta condición inicial se debe determinar el vector del estado inicial del sistema realizando mediciones sobre él, de la siguiente manera.

Primeramente se efectúa la medición de algún observable \mathcal{O}_1 en el sistema; sea $o_1^{i_1}$ el eigenvalor resultado de esta medición. Si $o_1^{i_1}$ es no-degenerado, entonces el estado inicial está completamente definido por el vector $|o_1^{i_1}\rangle$, salvo una fase. Por el contrario, si $o_1^{i_1}$ es degenerado, es necesario realizar la medición de algún otro observable \mathcal{O}_2 compatible con \mathcal{O}_1 , es decir que conmuten $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$, tal que el subespacio propio de \mathcal{O}_1 correspondiente al eigenvalor $o_1^{i_1}$ sea separado en más de un subespacio propio de \mathcal{O}_2 ; sea $o_2^{i_2}$ el eigenvalor de \mathcal{O}_2 resultado de esta medición. Si el subespacio propio común a \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 correspondiente a los eigenvalores $\{o_1^{i_1}, o_2^{i_2}\}$ es no-degenerado, entonces el estado inicial está completamente definido por el vector $|o_1^{i_1}, o_2^{i_2}\rangle$, salvo una fase. Si, por el contrario, este subespacio es degenerado, se debe repetir este proceso, tantas veces como sea necesario, hasta realizar mediciones de un conjunto de observables $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n\}$, todos compatibles entre sí, tal que el subespacio propio común a ellos, correspondiente a los eigenvalores $\{o_1^{i_1}, o_2^{i_2}, \dots, o_n^{i_n}\}$ resultado de las mediciones, sea no-degenerado, con lo que el estado inicial del sistema estará completamente definido por el vector $|o_1^{i_1}, o_2^{i_2}, \dots, o_n^{i_n}\rangle$, salvo una fase. La elección de los observables compatibles del conjunto es totalmente arbitraria, sin embargo, puesto que el operador Hamiltoniano H tiene un papel clave al ser el operador que, a través de la ecuación (2.3), dicta la dinámica del estado $|\psi(t)\rangle$, es conveniente incluirlo, en primer lugar, dentro de este conjunto.

Conjunto Completo de Observables que Conmutan (CSCO)

La descripción completa de todos los vectores de estado posibles de un sistema se obtiene de la determinación de una base para el espacio de Hilbert \mathcal{H} ; esto se logra con la selección de un conjunto de observables compatibles $\{H, \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n\}$ entre los que, por lo comentado anteriormente, se incluye primeramente al Hamiltoniano H , y sean tales que todos sus subespacios propios comunes, definidos por sus eigenvalores $\{E, o_1^{i_1}, \dots, o_n^{i_n}\}$ correspondientes, sean no-degenerados. Este conjunto de observables es llamado un conjunto completo de observables que conmutan (CSCO), del sistema. En virtud de la no-degeneración de todos los subespacios propios comunes y de que los eigenvectores de operadores hermíticos correspondientes a diferentes eigenvalores son ortogonales, los eigenvectores $|E, o_1^{i_1}, \dots, o_n^{i_n}\rangle$ forman una base ortogonal de \mathcal{H} , con lo cual el vector $|\psi(t)\rangle$ de un estado general del sistema puede ser descompuesto, en esta base, como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{E, o_1^{i_1}, \dots, o_n^{i_n}} |E, o_1^{i_1}, \dots, o_n^{i_n}\rangle \langle E, o_1^{i_1}, \dots, o_n^{i_n} | \psi(t) \rangle. \quad (2.4)$$

La medición de los observables del CSCO en un sistema es suficiente para determinar completamente su estado; en particular, su medición en el estado inicial del sistema es suficiente para obtener la condición inicial $|\psi(t=0)\rangle$.

Transformaciones de simetría

Las transformaciones de simetría son transformaciones del marco de referencia desde el que se describe a un sistema físico. La aplicación de una de estas transformaciones, implementada por un operador T en el espacio físico clásico, será implementada por un operador U_T asociado, en el espacio de Hilbert \mathcal{H} de estados cuánticos. La regla de composición entre dos transformaciones U_{T_1} y U_{T_2} (T_1 y T_2 , en el espacio físico clásico) es la aplicación sucesiva y ordenada $U_{T_1}U_{T_2}$ (T_1T_2) de ellas. En general existen dos tipos de transformaciones de simetría: las continuas y las discretas. Las transformaciones continuas están parametrizadas por parámetros continuos $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$, mientras que las discretas se obtienen de cambios discretos, no parametrizables continuamente. El Teorema de Wigner o Teorema de la Representación de Simetría [41, 44] establece que todas las transformaciones U_T pueden ser representadas como operadores lineales unitarios ó anti-lineales unitarios (anti-unitarios) en \mathcal{H} ; con esto se asegura la invarianza de la probabilidad (2.2)

$$\mathcal{P}'(o_i, t) = \left| \langle o_i | U_T^\dagger U_T | \psi(t) \rangle \right|^2 = |\langle o_i | \psi(t) \rangle|^2 = \mathcal{P}(o_i, t). \quad (2.5)$$

La transformación identidad $U_T = 1$ es lineal y unitaria y, como consecuencia, también lo son todas aquellas transformaciones continuas conectadas de manera continua con ella. En particular, una transformación U_T que está infinitesimalmente cerca de la identidad es

$$U_T(\epsilon) = 1 - i\epsilon G, \quad (2.6)$$

donde ϵ es un parámetro infinitesimal y G es un operador lineal y hermítico, lo que asegura la linealidad y unitariedad de U_T . Este operador G es conocido como generador de la transformación U_T y es, normalmente, un operador asociado a una cantidad observable. Una transformación finita $U_T(a)$ de parámetro finito a se obtiene a través del mapeo exponencial, esto es, como el límite $n \rightarrow \infty$ de la composición sucesiva de n transformaciones infinitesimales de parámetros $\epsilon = a/n$

$$U_T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - i \left(\frac{a}{n} \right) G \right]^n = \exp(-iaG), \quad (2.7)$$

y es, por construcción, lineal y unitaria. Las transformaciones continuas que no están conectadas de manera continua con la identidad así como las transformaciones discretas, pueden ser unitarias o anti-unitarias. El conjunto de todas las transformaciones de simetría U_T (T , en el espacio físico clásico) junto con su regla de composición forma un grupo, es decir, es un conjunto cerrado, asociativo, con elemento identidad y elementos inversos.

CSCO y simetrías

La inclusión del operador Hamiltoniano H en el CSCO obliga a que el resto de operadores a ser incluidos en éste conjunto deben conmutar con H (y, desde luego, conmutar

entre ellos). Por otro lado, el hecho de que un operador G conmute con H significa que la transformación generada por este operador es una simetría del sistema, como se puede comprobar de la relación $Ge^{-iHt} |g_i, \dots\rangle = g_i e^{-iHt} |g_i, \dots\rangle$. De lo anterior se infiere que los candidatos naturales a pertenecer al CSCO son los operadores hermíticos relacionados con el grupo de simetrías del sistema. Así, los candidatos naturales, después de H son

- Operadores de Casimir del grupo completo de simetrías. Los operadores de Casimir de un grupo son operadores construidos con los generadores del grupo y que tienen la característica de que conmutan con todos ellos.
- Generadores de algún subgrupo de Lie. El grupo completo de simetrías puede tener algún subgrupo de Lie conectado de manera continua con la identidad a través del mapeo exponencial. Todos los generadores de este subgrupo de Lie son candidatos al CSCO, sin embargo sólo pueden ser incluidos aquellos que conmutan entre sí, i.e. la subálgebra de Cartan.
- Operadores de simetrías discretas. Los operadores que implementan las simetrías discretas son candidatos al CSCO siempre que sean operadores hermíticos.

A partir de estos tres conjuntos de candidatos al CSCO se deben seleccionar aquellos operadores hermíticos que conmuten con H , tales que también conmuten todos entre sí. De esta manera el CSCO y, por lo tanto, los estados cuánticos están caracterizados completamente por el grupo de simetrías del sistema y quedan definidos por los eigenvalores del Hamiltoniano, de los operadores de Casimir, de los operadores de la subálgebra de Cartan y de los operadores hermíticos correspondientes a las simetrías discretas compatibles con todos los operadores anteriores.

La mecánica cuántica, algunas veces llamada mecánica cuántica moderna, logró explicar, partiendo sólo de los seis postulados anteriores, los fenómenos que habían sido parcialmente explicados por la teoría cuántica antigua. Por otro lado se desarrolló, paralelamente, la teoría especial de la relatividad, que se aborda en la siguiente subsección.

2.1.2. Relatividad especial

Para describir cualquier suceso físico es necesario especificar cuatro coordenadas: el tiempo t y la localización espacial $x^i \equiv (x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$ en que aconteció. Estas coordenadas se pueden combinar en un objeto de cuatro componentes (t, x^i) que es llamado un evento. El intervalo espacio-temporal entre dos eventos (t, x^i) y $(t+dt, x^i+dx^i)$ separados infinitesimalmente se define como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.8)$$

Si $ds^2 = 0$, los eventos están conectados por una señal de luz y se dice que la separación es tipo luz, mientras que si $ds^2 > 0$ ó $ds^2 < 0$ se dice que la separación es tipo tiempo

o tipo espacio, respectivamente. En virtud del segundo postulado de la teoría especial de la relatividad, escrito en la introducción a este capítulo, la separación tipo luz es un invariante: si $ds^2 = 0$ en un sistema de referencia inercial, entonces $ds'^2 = 0$ en cualquier otro sistema de referencia inercial, y usando este hecho se demuestra que, en general, el intervalo espacio-temporal ds^2 (2.8), y como consecuencia el tipo de separación, son invariantes [45, pág. 3]. En particular, cuando $ds^2 > 0$ es práctico definir el tiempo propio $d\tau$, como $d\tau = \sqrt{ds^2}/c$. Es posible redefinir las coordenadas de los eventos de manera que todas tengan las mismas dimensiones, como $x^\mu \equiv (x^0, x^i) \equiv (ct, x^i)$. Con esta definición e introduciendo el tensor métrico $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$ conocido como métrica de Minkowski, se puede reescribir el intervalo espacio-temporal como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.9)$$

en donde se ha asumido el convenio de suma sobre índices repetidos; en lo sucesivo se adopta $c = 1$, con lo que $x^0 = t$. El espacio de todos los eventos x^μ cuyo elemento invariante de longitud ds^2 es (2.9), ó equivalentemente, el espacio de todos los eventos x^μ dotado de la métrica $\eta_{\mu\nu}$, constituyen el espacio-tiempo de Minkowski. El tensor representado por la matriz inversa de $\eta_{\mu\nu}$ se denota $\eta^{\mu\nu}$, por definición cumple la propiedad $\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$ y tiene las misma componentes que $\eta_{\mu\nu}$, a saber $\eta^{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$. Con el uso de la métrica es posible definir coordenadas x_μ duales a x^μ como $x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -x^i)$ y, de manera recíproca, con la métrica inversa obtener las coordenadas a partir de sus duales, como $x^\mu = \eta^{\mu\nu}x_\nu = (x^0, x^i)$.

La trayectoria de una partícula sobre el espacio de Minkowski se puede describir como una curva continua y suave $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, parametrizada por un parámetro absoluto λ ; para partículas masivas éste parámetro puede ser el tiempo propio $\lambda = \tau = \int d\tau$. La cuadrivelocidad u^μ de una partícula se define como $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ y tiene componentes $u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$, donde $\gamma = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$. Por otro lado, el cuádrimomento p^μ de una partícula es $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ y está relacionado con la cuadrivelocidad a través de la ecuación

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.10)$$

de la que se obtienen las conocidas ecuaciones $E = m\gamma$ y $p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$. De estas ecuaciones se desprende la parametrización

$$\cosh \phi = \gamma = \frac{E}{m}, \quad \sinh \phi = \gamma|\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{p}|}{m}, \quad (2.11)$$

donde ϕ es la rapidity, definida como $\phi = \text{arc tanh } |\mathbf{v}|$. De manera análoga a la cuadrivelocidad, la cuádrilceleración a^μ de una partícula se define como $a^\mu = du^\mu/d\tau = d^2x^\mu/d\tau^2$.

Un elemento importante de la teoría especial de la relatividad son las transformaciones entre sistemas de referencia inerciales, que son implementadas como transformaciones de simetría T en las coordenadas x^μ del espacio-tiempo de Minkowski (al que en lo sucesivo

se le llamará, simplemente, espacio de Minkowski). El conjunto de estas transformaciones conforma el grupo de simetría del espacio de Minkowski, conocido como grupo de Poincaré ó grupo inhomogéneo de Lorentz, que se examina en la siguiente subsección.

2.1.3. Grupo de Poincaré

La invarianza del intervalo espacio-temporal ds^2 (2.9) en los sistemas de referencia inerciales implica que las transformaciones entre las coordenadas de estos sistemas son aquellas que lo dejan invariante. La transformación de coordenadas más general que cumple esta condición es una transformación de Poincaré, definida como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad x' = T(\Lambda, a)x \equiv \Lambda x + a. \quad (2.12)$$

Las transformaciones de la forma $T(\Lambda, 0)$, implementadas a través de la matriz Λ^{μ}_{ν} , son las transformaciones de Lorentz, también llamadas transformaciones homogéneas de Poincaré, que, como se muestra más adelante, consisten esencialmente de boosts y rotaciones, mientras que las transformaciones de la forma $T(\mathbb{1}, a)$, implementadas a través de a^{μ} , son traslaciones espacio-temporales. Tanto Λ^{μ}_{ν} como a^{μ} tienen componentes constantes y la propiedad definitoria de las primeras es

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (2.13)$$

con la que se asegura la invarianza de (2.9). Estas matrices Λ^{μ}_{ν} tienen propiedades relevantes que son consecuencia de (2.13) y que se muestran en el siguiente apartado.

Propiedades de las matrices Λ

La expresión (2.13) impone 10 restricciones sobre las 16 componentes de Λ^{μ}_{ν} , lo que indica que sólo 6 de sus componentes son independientes. De esta misma expresión se evidencian los valores de sus determinantes

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \det \Lambda = \pm 1. \quad (2.14)$$

Las matrices con $\det \Lambda = 1$ son llamadas propias, mientras que aquellas con $\det \Lambda = -1$ son llamadas impropias. Este resultado además garantiza que Λ^{-1} existe y, de (2.13), está dada por

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} = \eta_{\nu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\beta} \eta^{\beta\mu} \equiv \Lambda_{\nu}^{\mu}, \quad \Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta. \quad (2.15)$$

Tanto la matriz identidad $\mathbb{1}$, como el producto $\bar{\Lambda} \Lambda$ y la inversa Λ^{-1} de cualesquiera matrices que cumplen (2.13), también cumplen esta condición. Por otra parte, la componente 00 de (2.13) implica

$$1 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=0}^3 (\Lambda^i_0)^2 \quad \rightarrow \quad (\Lambda^0_0)^2 \geq 1, \quad (2.16)$$

lo que a su vez significa que

$$\Lambda^0_0 \geq +1 \qquad \qquad \qquad \text{ó} \qquad \qquad \qquad \Lambda^0_0 \leq -1. \qquad (2.17)$$

Las matrices con $\Lambda^0_0 \geq 1$ son llamadas ortócronas mientras que aquellas con $\Lambda^0_0 \leq -1$ son llamadas no-ortócronas. La matriz producto de dos matrices $\bar{\Lambda}$ y Λ se clasifica de acuerdo a la clasificación de estas. El determinante es

$$\det(\bar{\Lambda}\Lambda) = (\det\bar{\Lambda})(\det\Lambda), \qquad (2.18)$$

lo que muestra que el producto de dos matrices propias o dos matrices impropias es una matriz propia, mientras que el producto de una propia y una impropia (o viceversa) es impropia. La componente 00 del producto es

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 = \bar{\Lambda}^0_0\Lambda^0_0 + \sum_{i=0}^3 \bar{\Lambda}^0_i\Lambda^i_0, \qquad (2.19)$$

en tanto que la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada a los vectores de tres componentes $\bar{\Lambda}^0_i$ y Λ^i_0 y utilizando (2.16), establece que

$$\left| \sum_{i=0}^3 \bar{\Lambda}^0_i\Lambda^i_0 \right| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^3 (\bar{\Lambda}^0_i)^2} \sqrt{\sum_{i=0}^3 (\Lambda^i_0)^2} = \sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1} \sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1}, \qquad (2.20)$$

por lo tanto, si $\bar{\Lambda}^0_0 \geq 1$ y $\Lambda^0_0 \geq 1$ se cumple que

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0_0 \geq \bar{\Lambda}^0_0\Lambda^0_0 - \sqrt{(\bar{\Lambda}^0_0)^2 - 1} \sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1} \geq 1, \qquad (2.21)$$

es decir, el producto de dos matrices ortócronas también es una matriz ortócrona.

Algunos ejemplos significativos de matrices Λ son los siguientes. Cualquier matriz λ^μ_ν de la forma

$$\lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \qquad \text{con} \qquad \omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu}, \qquad \omega_{\mu\nu} \ll 1, \qquad (2.22)$$

cumple (2.13) a primer orden en $\omega_{\mu\nu}$, está infinitesimalmente cerca de la matriz identidad $\mathbb{1}$ y es, por lo tanto, propia y ortócrona. Las matrices definidas como $\mathcal{P}^\mu_\nu = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$, $\mathcal{T}^\mu_\nu = \text{Diag}(-1, 1, 1, 1)$ y $(\mathcal{PT})^\mu_\nu = \text{Diag}(-1, -1, -1, -1)$, también cumplen (2.13); \mathcal{P}^μ_ν es impropia y ortócrona, \mathcal{T}^μ_ν es impropia y no-ortócrona, y $(\mathcal{PT})^\mu_\nu$ es propia y no-ortócrona. Éstas representan inversiones espacial, temporal y espacio-temporal, respectivamente. Aquí concluye la revisión de las propiedades de las matrices Λ .

Como consecuencia de que las matrices Λ son un conjunto cerrado, las transformaciones de Poincaré también lo son: la aplicación sucesiva de dos de ellas, $T(\Lambda_1, a_1)$ y $T(\Lambda_2, a_2)$, es también una de transformación de éste tipo

$$\begin{aligned} x''^\mu &= (\Lambda_2)^\mu_\alpha x'^\alpha + a_2^\alpha \\ &= (\Lambda_2)^\mu_\alpha (\Lambda_1)^\alpha_\beta x^\beta + (\Lambda_2)^\mu_\alpha a_1^\alpha + a_2^\mu, \end{aligned} \qquad (2.23)$$

lo que confirma la cerradura del conjunto y muestra que la regla de composición es

$$T(\Lambda_2, a_2)T(\Lambda_1, a_1) = T(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2). \quad (2.24)$$

Asimismo, puesto que las matrices Λ tienen elemento identidad e inversos, el conjunto de transformaciones de Poincaré cumple los axiomas de grupo, como se verifica a continuación

1. Cerradura

$$T(\Lambda_2, a_2)T(\Lambda_1, a_1) = T(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2). \quad (2.25)$$

2. Asociatividad

$$T(\Lambda_3, a_3) [T(\Lambda_2, a_2)T(\Lambda_1, a_1)] = [T(\Lambda_3, a_3)T(\Lambda_2, a_2)] T(\Lambda_1, a_1). \quad (2.26)$$

3. Elemento identidad

$$T(\Lambda, a)T(\mathbb{1}, 0) = T(\mathbb{1}, 0)T(\Lambda, a) = T(\Lambda, a). \quad (2.27)$$

4. Elementos inversos

$$\begin{aligned} T(\Lambda, a)T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) &= T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)T(\Lambda, a) = T(\mathbb{1}, 0) \\ T^{-1}(\Lambda, a) &\equiv T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Este es el grupo de Poincaré \mathbb{P} . Este grupo cuenta, también, con estructura de variedad diferenciable y es, por lo tanto, un grupo de Lie; dado que sus elementos están definidos en términos de 10 parámetros independientes: los 6 parámetros independientes de las matrices Λ^μ_ν y los 4 parámetros de a^μ , es un grupo de Lie de dimensión 10. Del axioma (2.25) se tiene que cualquier transformación $T(\Lambda, a)$ puede separarse en una transformación de Lorentz $T(\Lambda, 0)$ seguida de una traslación espacio-temporal $T(\mathbb{1}, a)$

$$T(\Lambda, a) = T(\mathbb{1}, a)T(\Lambda, 0). \quad (2.29)$$

Tanto las traslaciones espacio-temporales $T(\mathbb{1}, a)$ como las transformaciones de Lorentz $T(\Lambda, 0)$ forman subgrupos; el primero, abreviado como \mathbb{T}^4 , es un subgrupo conmutativo

$$T(\mathbb{1}, a_2)T(\mathbb{1}, a_1) = T(\mathbb{1}, a_1 + a_2) = T(\mathbb{1}, a_1)T(\mathbb{1}, a_2), \quad (2.30)$$

e invariante

$$T(\Lambda, b)T(\mathbb{1}, a)T^{-1}(\Lambda, b) = T(\mathbb{1}, \Lambda a), \quad (2.31)$$

mientras que, de la propiedad (2.13), se reconoce que el segundo es el grupo $O(1, 3)$, también llamado grupo homogéneo de Lorentz, abreviado como HLG o simplemente \mathbb{L} , cuya estructura y acción sobre el espacio de Minkowski se expone en el siguiente apartado.

Grupo de Lorentz \mathbb{L}	Propio: $\det\Lambda = +1$	Impropio: $\det\Lambda = -1$
Ortócrono: $\Lambda^0_0 \geq 1$	Propio ortócrono $\equiv \mathbb{L}_{+\uparrow}$	Impropio ortócrono $\equiv \mathbb{L}_{-\uparrow}$
No-ortócrono: $\Lambda^0_0 \leq 1$	Propio no-ortócrono $\equiv \mathbb{L}_{+\downarrow}$	Impropio no-ortócrono $\equiv \mathbb{L}_{-\downarrow}$

 Tabla 2.1: Separación del grupo de Lorentz \mathbb{L} en subconjuntos.

Grupo homogéneo de Lorentz en el espacio de Minkowski

El grupo homogéneo de Lorentz \mathbb{L} está compuesto por todas las transformaciones homogéneas $T(\Lambda) \equiv T(\Lambda, 0)$ del grupo de Poincaré; \mathbb{L} cuenta, también, con estructura de variedad diferenciable y, dado que sus elementos están definidos en términos de los 6 parámetros independientes de las matrices Λ^μ_ν , es un grupo de Lie de dimensión 6. Su aplicación sobre las coordenadas del espacio de Minkowski es

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad x' = T(\Lambda)x = \Lambda x, \quad (2.32)$$

y su regla de composición, heredada de la de \mathbb{P} (2.24), es

$$T(\Lambda_2)T(\Lambda_1) = T(\Lambda_2\Lambda_1). \quad (2.33)$$

Debido a que los valores del determinante y la componente 00 de las matrices Λ^μ_ν , elementos de este grupo, están restringidos a los expresados en (2.14) y (2.17), respectivamente, es posible distinguir subconjuntos dentro de él de acuerdo a estos criterios

- $\det\Lambda$: en el subconjunto con $\det\Lambda = 1$ los axiomas de grupo se cumplen, éste es el grupo $\text{SO}(1, 3)$, también designado como subgrupo propio. El subconjunto con $\det\Lambda = -1$ no es cerrado y por lo tanto no forma un subgrupo; se le llama subconjunto impropio.
- Λ^0_0 : en el subconjunto con $\Lambda^0_0 \geq +1$ los axiomas de grupo se cumplen y a éste subgrupo se le designa como ortócrono. El subconjunto con $\Lambda^0_0 \leq -1$ no es cerrado y por lo tanto no forma un subgrupo; se le llama subconjunto no-ortócrono.

Con estos dos criterios independientes es posible separar a \mathbb{L} en cuatro subconjuntos, como se muestra en la tabla (2.1), de los cuales sólo el propio ortócrono es un subgrupo; a éste subgrupo se le llama el grupo de Lorentz propio ortócrono y se simboliza con $\mathbb{L}_{+\uparrow}$. A continuación se identifican los elementos que pertenecen a cada uno de los subconjuntos.

La transformación identidad $T(\mathbb{1})$ pertenece a $\mathbb{L}_{+\uparrow}$, mientras que cualquier transformación $T(\mathbb{1} + \omega)$ infinitesimalmente cerca de ella, implementada como $x'^\mu = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu)x^\nu$

(2.22) pertenece también a $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ y se puede reescribir en términos de los generadores $(J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$ como

$$x'^\mu = \left[\delta_\nu^\mu - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \right] x^\nu, \quad (2.34)$$

donde los generadores son

$$(J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(\eta^{\rho\mu}\delta_\nu^\sigma - \eta^{\sigma\mu}\delta_\nu^\rho), \quad (2.35)$$

y cumplen, evidentemente, $J^{\sigma\rho} = -J^{\rho\sigma}$. Las transformaciones $\Lambda^\mu{}_\nu$ de parámetros finitos $\theta_{\rho\sigma}$ se obtienen a través del mapeo exponencial

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\delta_\nu^\mu - \frac{i}{2} \frac{\theta_{\rho\sigma}}{n} (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \right]^n = \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \theta_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} \right) \right]^\mu{}_\nu, \quad (2.36)$$

por construcción están conectadas de manera continua a la transformación identidad y, por lo tanto, pertenecen también a $\mathbb{L}_{+\uparrow}$. Las componentes J^{ij} y J^{i0} de $J^{\rho\sigma}$ se pueden recopilar en los generadores \mathbf{J} y \mathbf{K} a través de las expresiones

$$J^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk}, \quad K^i = J^{i0}, \quad (2.37)$$

que explícitamente son

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

de donde se observa que

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}, \quad \mathbf{K}^\dagger = -\mathbf{K}. \quad (2.40)$$

El mapeo exponencial (2.36) en términos de \mathbf{J} y \mathbf{K} es

$$\Lambda^\mu{}_\nu = [\exp(-i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{K})]^\mu{}_\nu, \quad (2.41)$$

donde los parámetros $\boldsymbol{\theta}$ y $\boldsymbol{\phi}$ son

$$\theta^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \theta^{jk}, \quad \phi^i = \theta^{i0}. \quad (2.42)$$

De la evaluación del mapeo exponencial (2.41), las transformaciones de parámetros θ , generadas por \mathbf{J} , son rotaciones $R_x(\theta^1)$, $R_y(\theta^2)$ y $R_z(\theta^3)$ respecto a los ejes coordenados

$$[\exp(-i\theta^1 J^1)]^\mu{}_\nu = [R_x(\theta^1)]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta^1 & \sin \theta^1 \\ 0 & 0 & -\sin \theta^1 & \cos \theta^1 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

$$[\exp(-i\theta^2 J^2)]^\mu{}_\nu = [R_y(\theta^2)]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^2 & 0 & -\sin \theta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta^2 & 0 & \cos \theta^2 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$[\exp(-i\theta^3 J^3)]^\mu{}_\nu = [R_z(\theta^3)]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^3 & \sin \theta^3 & 0 \\ 0 & -\sin \theta^3 & \cos \theta^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

en tanto que las transformaciones de parámetros ϕ , generadas por \mathbf{K} , son boosts $B_x(\phi^1)$, $B_y(\phi^2)$ y $B_z(\phi^3)$ a lo largo de los ejes coordenados

$$[\exp(i\phi^1 K^1)]^\mu{}_\nu = [B_x(\phi^1)]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \phi^1 & \sinh \phi^1 & 0 & 0 \\ \sinh \phi^1 & \cosh \phi^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

$$[\exp(i\phi^2 K^2)]^\mu{}_\nu = [B_y(\phi^2)]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \phi^2 & 0 & \sinh \phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh \phi^2 & 0 & \cosh \phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

$$[\exp(i\phi^3 K^3)]^\mu{}_\nu = [B_z(\phi^3)]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \phi^3 & 0 & 0 & \sinh \phi^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh \phi^3 & 0 & 0 & \cosh \phi^3 \end{pmatrix}; \quad (2.48)$$

los parámetros ϕ y la rapidity ϕ están relacionados a través de $\phi = |\phi|$. Así, los generadores \mathbf{J} y \mathbf{K} producen rotaciones y boosts, respectivamente, y el subgrupo propio ortócrono $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ esta conformado de rotaciones, boosts y las composiciones entre ellos.

Las transformaciones en cualquiera de los subconjuntos impropios y/o no-ortócronos no están conectadas de manera continua con la transformación identidad y, de hecho, los cuatro subconjuntos de la tabla (2.1) no están conectados de manera continua entre sí, lo que significa que \mathbb{L} es un grupo no-conexo de cuatro componentes. Los ejemplos más básicos de transformaciones en los subconjuntos impropios y/o no-ortócronos son las inversiones: paridad $T(\mathcal{P})$, cuya matriz es $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$ y pertenece a $\mathbb{L}_{-\uparrow}$; inversión

Grupo de Poincaré \mathbb{P}	Propio: $\det\Lambda = +1$	Impropio: $\det\Lambda = -1$
Ortócrono: $\Lambda^0_0 \geq 1$	Propio ortócrono $\equiv \mathbb{P}_{+\uparrow}$	Impropio ortócrono $\equiv \mathbb{P}_{-\uparrow}$
No-ortócrono: $\Lambda^0_0 \leq 1$	Propio no-ortócrono $\equiv \mathbb{P}_{+\downarrow}$	Impropio no-ortócrono $\equiv \mathbb{P}_{-\downarrow}$

 Tabla 2.2: Separación del grupo de Poincaré \mathbb{P} en subconjuntos.

temporal $T(\mathcal{T})$, cuya matriz es $\mathcal{T}^\mu_\nu = \text{Diag}(-1, 1, 1, 1)$ y pertenece al $\mathbb{L}_{-\downarrow}$; y la composición de ambas, llamada inversión total $T(\mathcal{PT})$, cuya matriz es $(\mathcal{PT})^\mu_\nu = \text{Diag}(-1, -1, -1, -1)$ y pertenece a $\mathbb{L}_{+\downarrow}$. Todos los elementos de los subconjuntos $\mathbb{L}_{-\uparrow}$, $\mathbb{L}_{-\downarrow}$ y $\mathbb{L}_{+\downarrow}$ se pueden construir a partir de la acción de estas transformaciones discretas sobre los elementos de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 T(\Lambda_{-\uparrow}) &= T(\mathcal{P})T(\Lambda_{+\uparrow}) = T(\mathcal{P}\Lambda_{+\uparrow}), \\
 T(\Lambda_{-\downarrow}) &= T(\mathcal{T})T(\Lambda_{+\uparrow}) = T(\mathcal{T}\Lambda_{+\uparrow}), \\
 T(\Lambda_{+\downarrow}) &= T(\mathcal{PT})T(\Lambda_{+\uparrow}) = T(\mathcal{PT}\Lambda_{+\uparrow}).
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Debido a esto, se tiene que \mathbb{L} es

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_{+\uparrow} \cup \mathbb{L}_{-\uparrow} \cup \mathbb{L}_{-\downarrow} \cup \mathbb{L}_{+\downarrow}, \tag{2.50}$$

donde

$$\mathbb{L}_{-\uparrow} = T(\mathcal{P})\mathbb{L}_{+\uparrow}, \quad \mathbb{L}_{-\downarrow} = T(\mathcal{T})\mathbb{L}_{+\uparrow}, \quad \mathbb{L}_{+\downarrow} = T(\mathcal{PT})\mathbb{L}_{+\uparrow}. \tag{2.51}$$

Aquí concluye la revisión del grupo homogéneo de Lorentz \mathbb{L} como transformaciones en las coordenadas del espacio de Minkowski.

La separación de \mathbb{L} en los subconjuntos $\mathbb{L}_{+\uparrow}$, $\mathbb{L}_{-\uparrow}$, $\mathbb{L}_{-\downarrow}$ y $\mathbb{L}_{+\downarrow}$, y la propiedad $T(\Lambda, a) = T(\mathbf{1}, a)T(\Lambda, 0)$ (2.29) generan una separación análoga en el grupo de Poincaré \mathbb{P} , que se muestra en la tabla (2.2). Como consecuencia, se tiene que \mathbb{P} es

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{+\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\downarrow} \cup \mathbb{P}_{+\downarrow}, \tag{2.52}$$

donde

$$\mathbb{P}_{-\uparrow} = T(\mathcal{P}, 0)\mathbb{P}_{+\uparrow}, \quad \mathbb{P}_{-\downarrow} = T(\mathcal{T}, 0)\mathbb{P}_{+\uparrow}, \quad \mathbb{P}_{+\downarrow} = T(\mathcal{PT}, 0)\mathbb{P}_{+\uparrow}. \tag{2.53}$$

El grupo de Poincaré \mathbb{P} , como cualquier otro grupo, está definido de manera totalmente abstracta por su regla de composición (2.24) y el cumplimiento de los axiomas de grupo

(2.25)-(2.28). Su acción como un conjunto de transformaciones sobre un espacio vectorial específico es sólo una aplicación particular de él. En general, existe una diversidad de éstas aplicaciones que actúan sobre diferentes espacios vectoriales, de las cuales la aplicación sobre las coordenadas del espacio de Minkowski (2.12) es sólo una de ellas; a estas diferentes aplicaciones de la acción del grupo sobre diferentes espacios vectoriales se les llama representaciones del grupo, su definición se precisa en el siguiente apartado.

Representaciones de un grupo

Un grupo G es un conjunto de elementos $\{g_i\}$ con una operación binaria entre ellos $g_i \cdot g_j$ que cumple los axiomas de cerradura, asociatividad, existencia de identidad y existencia de inversos. Definido lo anterior, el grupo está completa y unívocamente establecido. Es posible mapear este conjunto de elementos abstractos, respetando su regla de operación binaria, hacia un espacio $L(V)$ de operadores lineales que actúan sobre un espacio vectorial V , que puede ser de dimensión finita o infinita. Si llamamos $D : G \rightarrow L(V)$ a este mapeo, entonces la regla de operación debe ser respetada en el sentido de que se debe cumplir que

$$D(g_i)D(g_j) = D(g_i \cdot g_j), \quad D(e) = 1, \quad (2.54)$$

es decir, el mapeo D debe ser un homomorfismo del grupo y debe ser, también, sobreyectivo. A cualquier mapeo que cumpla estas propiedades se le llama una representación D del grupo G . Si la representación mapea hacia un conjunto de operadores lineales que actúan sobre un espacio de dimensión finita ó infinita entonces se dice que la representación es de dimensión finita ó infinita, respectivamente. En general, pueden existir muchas representaciones diferentes de un mismo grupo, tanto de dimensión finita como de dimensión infinita. En particular, el mapeo $D(g) = 1$ para todo $g \in G$ es siempre una representación de cualquier grupo, y es llamada la representación trivial.

Si $D_1 : G \rightarrow L(V_1)$ y $D_2 : G \rightarrow L(V_2)$ son dos representaciones de un grupo G y existe un isomorfismo $S : V_1 \rightarrow V_2$, entonces las representaciones D_1 y D_2 están relacionadas como

$$D_2(g) = SD_1(g)S^{-1}, \quad \text{para todo } g \in G, \quad (2.55)$$

y se dice que son representaciones equivalentes; la relación (2.55) corresponde, en este caso, a un cambio de base en V . Por otra parte, si una representación U del grupo G mapea todos los elementos g_i hacia operadores unitarios $U(g_i)$, se dice que es una representación unitaria del grupo. En particular, respecto a las representaciones unitarias de grupos de Lie, existe un teorema que establece que los grupo de Lie no-compactos no tienen representaciones unitarias no triviales de dimensión finita, o dicho en sentido positivo, las representaciones unitarias no triviales de grupos de Lie no-compactos son necesariamente de dimensión infinita [39, pág. 16].

Hasta aquí se ha hablado del grupo de Poincaré (y sus subgrupos) limitándose a su acción sobre las coordenadas del espacio de Minkowski, es decir, limitándose a su acción

sobre el espacio físico clásico. La mecánica cuántica relativista, es decir la integración de la mecánica cuántica con la teoría especial de la relatividad, nace primeramente de establecer que el grupo de simetría del espacio de Hilbert \mathcal{H} de estados cuánticos es el mismo grupo de simetría del espacio de Minkowski, es decir, el grupo de Poincaré \mathbb{P} . A partir de esta sola premisa se demuestra que los estados cuánticos $|\psi\rangle$ más elementales que pueden describir a un sistema tienen ciertas propiedades físicas invariantes; su clasificación de acuerdo al valor de estas propiedades se conoce como la clasificación de Wigner [46]. A continuación se revisan los aspectos básicos de la representación del grupo de Poincaré \mathbb{P} que actúa sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} de estados cuánticos y se deduce la clasificación de Wigner.

Una transformación de Poincaré en el espacio de Minkowski, implementada por $T(\Lambda, a)$, genera una transformación en \mathcal{H} , que es implementada por el operador $U(\Lambda, a)$ asociado, donde éste último pertenece a una representación de \mathbb{P} que actúa sobre \mathcal{H} . Como se explicó en la subsección (2.1.1), el teorema de Wigner establece que ésta transformación $U(\Lambda, a)$ puede ser representada como un operador unitario ó anti-unitario, y en particular, las transformaciones $U(\Lambda, a)$ conectadas de manera continua con la identidad pueden representarse como unitarias; puesto que \mathbb{P} es un grupo de Lie no-compacto, éstas representaciones unitarias son de dimensión infinita. El grupo completo de simetría del espacio de Minkowski y, como consecuencia, de \mathcal{H} es $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{+\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\downarrow} \cup \mathbb{P}_{+\downarrow}$, donde $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ es el subconjunto que está conectado de manera continua con la identidad y, por lo tanto, sus elementos pueden representarse como operadores unitarios. A continuación se revisan los aspectos básicos de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$.

El subgrupo propio ortócrono $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ contiene a la identidad $U(\mathbb{1})$ y todos sus elementos están conectados de manera continua con ella. Una transformación $U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)$ infinitesimalmente cerca de la identidad, con parámetros infinitesimales ϵ^ρ de traslaciones espacio-temporales y $\omega_{\rho\sigma}$ de transformaciones de Lorentz, es

$$U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) = 1 - i\epsilon_\rho P^\rho - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma}, \quad (2.56)$$

donde los operadores P^ρ y $J^{\rho\sigma}$ son los generadores de las traslaciones espacio-temporales y los generadores de las transformaciones de Lorentz, respectivamente. A fin de que el operador $U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)$ sea unitario, los generadores deben ser hermíticos

$$(P^\rho)^\dagger = P^\rho, \quad (J^{\rho\sigma})^\dagger = J^{\rho\sigma}, \quad (2.57)$$

y dado que $\omega_{\rho\sigma}$ es antisimétrico, se puede tomar directamente a $J^{\rho\sigma}$ antisimétrico también $J^{\sigma\rho} = -J^{\rho\sigma}$, con lo que sólo hay seis generadores $J^{\rho\sigma}$ independientes. El generador de traslaciones temporales P^0 es el operador Hamiltoniano H y los generadores de traslaciones espaciales \mathbf{P} son los operadores de momento. Las componentes J^{ij} y J^{i0} de los generadores $J^{\rho\sigma}$ se pueden recopilar en los generadores \mathbf{J} y \mathbf{K} de la misma manera que en (2.37)

$$J^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} J^{jk}, \quad K^i = J^{i0}, \quad (2.58)$$

donde \mathbf{J} y \mathbf{K} son los generadores de rotaciones y boosts, respectivamente, siendo los primeros los operadores de momento angular. Aplicando la regla de composición análoga a (2.24) en la expresión $U(\Lambda, a)U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a)$, se obtienen las reglas de transformación de los generadores

$$U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_{\mu}^{\rho}\Lambda_{\nu}^{\sigma}(J^{\mu\nu} - a^{\mu}P^{\nu} + a^{\nu}P^{\mu}), \quad (2.59)$$

$$U(\Lambda, a)P^{\rho}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_{\mu}^{\rho}P^{\mu}, \quad (2.60)$$

y usando estas expresiones con la transformación $U(\Lambda, a) = U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)$ se deduce el álgebra de Lie del grupo de Poincaré

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0, \quad (2.61)$$

$$[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma}P^{\rho}), \quad (2.62)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}), \quad (2.63)$$

que separada en componentes espaciales y temporales, y escrita en términos de \mathbf{J} y \mathbf{K} es

$$[P^i, H] = 0, \quad [P^i, P^j] = 0, \quad [J^i, H] = 0, \quad (2.64)$$

$$[J^i, P^j] = i\varepsilon^{ijk}P^k, \quad [K^i, H] = iP^i, \quad [K^i, P^j] = i\delta^{ij}H, \quad (2.65)$$

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}J^k, \quad [J^i, K^j] = i\varepsilon^{ijk}K^k, \quad [K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk}J^k. \quad (2.66)$$

Una transformación finita $U(\Lambda, a)$ de parámetros a_{ρ} y $\theta_{\rho\sigma}$ se obtiene a través del mapeo exponencial como

$$U(\Lambda, a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - i \left(\frac{a_{\rho}}{n} \right) P^{\rho} - \frac{i}{2} \left(\frac{\theta_{\rho\sigma}}{n} \right) J^{\rho\sigma} \right]^n = \exp \left(-ia_{\rho}P^{\rho} - \frac{i}{2}\theta_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} \right), \quad (2.67)$$

en particular, las transformaciones de Lorentz son $U(\Lambda, 0) = \exp(-i/2)\theta_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}$ y las traslaciones espacio-temporales son $U(\mathbb{1}, a) = \exp(-ia_{\rho}P^{\rho})$.

Los subconjuntos impropios y/o no-ortócronos $\mathbb{P}_{-\uparrow}$, $\mathbb{P}_{-\downarrow}$ y $\mathbb{P}_{+\downarrow}$ están determinados por la acción de las transformaciones discretas $U(\mathcal{P}, 0)$, $U(\mathcal{T}, 0)$ y $U(\mathcal{PT}, 0)$ sobre $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ de manera análoga a las relaciones (2.53). Estas transformaciones discretas pueden ser implementadas como unitarias o anti-unitarias en \mathcal{H} . Desde luego, el grupo completo de simetría es $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{+\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\downarrow} \cup \mathbb{P}_{+\downarrow}$, sin embargo, el análisis convencional, que históricamente se ha hecho, de los estados de partícula cuántica relativista libre considera, como grupo de simetría, únicamente al subgrupo propio ortócrono $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ sin tomar en cuenta, en principio, a las simetrías discretas. En el análisis convencional, las simetrías discretas son consideradas hasta la etapa posterior en la que se han construido los campos. Por lo anterior, es necesario mencionar y remarcar la siguiente advertencia.

Advertencia. Las simetrías de una partícula libre son las simetrías del espacio-tiempo, en este caso del espacio de Minkowski. El grupo de simetrías del espacio de Hilbert \mathcal{H} de

estados cuánticos que representan a una partícula libre es, entonces, el grupo de Poincaré $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{+\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\downarrow} \cup \mathbb{P}_{+\downarrow}$. Sin embargo, el análisis convencional que históricamente se ha hecho de los estados de partícula cuántica relativista libre considera, como grupo de simetría, sólo a su subgrupo propio ortócrono $\mathbb{P}_{+\uparrow}$. El desarrollo posterior de esta sección se restringe a este subgrupo y reproduce los argumentos y resultados de este análisis convencional. No obstante, es importante enfatizar que, verdaderamente, el grupo completo de simetrías es \mathbb{P} , lo que incluye a las simetrías discretas y, debido a esto, el análisis apropiado de los estados de partícula cuántica relativista libre debe incluirlas también. El análisis de los estados de partícula cuántica relativista libre tomando en cuenta al grupo completo de simetrías \mathbb{P} se realiza en la referencia [42] y se reproduce en la sección (3.1), donde, además, se comparan las implicaciones que tiene este enfoque completo con las que se obtienen del análisis convencional, que se presenta en esta sección. Por lo pronto, el resto de esta sección se limita a $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ y, aquí, se sobreentiende que cualquier transformación $U(\Lambda, a)$ pertenece a este subgrupo.

La aplicación de una transformación de Poincaré $U(\Lambda, a)$ sobre un vector $|\psi\rangle$ de \mathcal{H} , da como resultado el vector $U(\Lambda, a)|\psi\rangle$, que, en general, es diferente a $|\psi\rangle$. No obstante, existen vectores en \mathcal{H} que tienen características que se mantienen invariantes ante cualquier transformación $U(\Lambda, a)$, es decir, tienen el mismo valor en cualquier sistema de referencia y son, por lo tanto, características propias del sistema físico descrito por éstos vectores. Puesto que los vectores de \mathcal{H} describen a partículas libres, éstas son características propias de ellas. Los subespacios de \mathcal{H} compuestos por todos los vectores tales que todas sus características invariantes, p. ej. p^2 y w^2 , tienen el mismo valor, denotados como $\mathcal{H}^{(p^2, w^2)}$, son cerrados bajo las transformaciones $U(\Lambda, a)$ y, por esto, son llamados subespacios invariantes; éstos constituyen los subespacios ‘más elementales’ de \mathcal{H} y la unión de todos ellos da como resultado el propio \mathcal{H} . Los vectores dentro de ellos representan estados de partículas elementales libres. La acción de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ restringida a cualquiera de estos subespacios invariantes elementales es una representación de él y es llamada una representación irreducible. En el siguiente apartado se precisan los conceptos de subespacio invariante y de representación irreducible.

Representaciones irreducibles de un grupo

Dada una representación D de un grupo G , que actúa sobre un espacio vectorial V , se define un subespacio invariante $W \subset V$ como aquel subespacio tal que si $w \in W$ entonces $D(g)w \in W$ para todo $g \in G$ y todo $w \in W$. En otras palabras, es un subespacio que es cerrado bajo la acción de la representación D del grupo G . Tanto el propio espacio vectorial V como el conjunto $\{0\}$, que incluye sólo al elemento neutro aditivo del espacio vectorial, son subespacios invariantes y son llamados subespacios invariantes triviales. Una representación irreducible de un grupo, abreviada habitualmente como irrep, se define como una representación que no tiene subespacios invariantes no-triviales, o dicho en sentido positivo, sus únicos subespacios invariantes son los triviales. Si la representación D no es

irreducible, entonces es posible descomponer a V como $V = W_1 \oplus W_2$ donde al menos uno de los dos subespacios es invariante. La acción de la representación $D|_{W_i}$ restringida al subespacio invariante es también una representación del grupo. Si además es posible descomponer a V como $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ donde cada W_i es un subespacio invariante que, a su vez, no tiene subespacios invariantes no triviales entonces se dice que la representación D es completamente reducible. La acción de la representación $D|_{W_i}$ sobre cada uno de estos subespacios invariantes es una representación irreducible del grupo. En el caso de un espacio de dimensión finita, la matriz de una representación completamente reducible se puede escribir, en la base apropiada, en forma diagonal a bloques donde cada bloque es una representación irreducible del grupo. Escrito en palabras simples, las representaciones irreducibles son las representaciones que actúan de manera cerrada en los subespacios invariantes ‘mas elementales’ del espacio V . Algunas veces se utiliza el término irrep para referirse tanto a la propia representación irreducible del grupo como al subespacio invariante sobre el que ésta actúa.

Las irreps del grupo de Poincaré propio ortócrono $\mathbb{P}_{+\uparrow}$, como todas las representaciones de él que actúan sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} , son unitarias. Éstas representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ se obtienen con ayuda de los operadores de Casimir. Los operadores de Casimir de un grupo son operadores construidos con los generadores del grupo y que tienen la característica de que conmutan con todos ellos. Para determinar los operadores de Casimir de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ es necesario, primero, introducir el operador de Pauli-Lubanski W^μ , que se define como

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma, \quad (2.68)$$

y es hermítico porque $J_{\nu\rho}$ y P_σ lo son; sus componentes son

$$W^\mu = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}, -\mathbf{J}H + \mathbf{K} \times \mathbf{P}). \quad (2.69)$$

Como consecuencia de su definición se tiene que $P_\mu W^\mu = 0$, y cumple el álgebra

$$[W^\mu, P^\nu] = 0, \quad [W^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\sigma\mu} W^\rho - \eta^{\rho\mu} W^\sigma), \quad [W_\mu, W_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^\rho P^\sigma. \quad (2.70)$$

Los operadores $P^2 = P_\mu P^\mu$ y $W^2 = W_\mu W^\mu$ son ambos hermíticos y además compatibles $[P^2, W^2] = 0$. Estos operadores conmutan con todos los generadores

$$[P^2, P^\rho] = 0, \quad [P^2, J^{\rho\sigma}] = 0, \quad [W^2, P^\rho] = 0, \quad [W^2, J^{\rho\sigma}] = 0, \quad (2.71)$$

por lo cual son precisamente los operadores de Casimir de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$. La utilidad de ellos radica en que, a causa de que conmutan con todos los generadores de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$, son invariantes bajo su acción

$$U(\Lambda, a)P^2U^{-1}(\Lambda, a) = P^2, \quad U(\Lambda, a)W^2U^{-1}(\Lambda, a) = W^2, \quad (2.72)$$

propiedad que permite encontrar los subespacios invariantes de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$, como se explica enseguida. Dado que P^2 y W^2 conmutan, éstos tienen eigenvectores comunes. Sea $|p^2, w^2, \alpha\rangle$ un tal eigenvector común, que tiene eigenvalor p^2 del operador P^2 , eigenvalor w^2 del operador W^2 y α denota cualesquiera otros eigenvalores, de operadores compatibles con ambos, que pudiera tener: $P^2 |p^2, w^2, \alpha\rangle = p^2 |p^2, w^2, \alpha\rangle$, $W^2 |p^2, w^2, \alpha\rangle = w^2 |p^2, w^2, \alpha\rangle$. A causa de (2.72), cualquier vector que sea resultado de haber transformado con $U(\Lambda, a)$ a uno de éstos eigenvectores es también eigenvector de ambos operadores con los mismos eigenvalores del eigenvector inicial

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)C^2U^{-1}(\Lambda, a)U(\Lambda, a) |p^2, w^2, \alpha\rangle &= C^2U(\Lambda, a) |p^2, w^2, \alpha\rangle \\ C^2U(\Lambda, a) |p^2, w^2, \alpha\rangle &= U(\Lambda, a)C^2 |p^2, w^2, \alpha\rangle \\ &= c^2U(\Lambda, a) |p^2, w^2, \alpha\rangle \end{aligned} \quad (2.73)$$

donde $C^2 = P^2, W^2$ ($c^2 = p^2, w^2$). De aquí se concluye que los subespacios de \mathcal{H} invariantes bajo $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ son precisamente los subespacios propios comunes a ambos operadores P^2 y W^2 , o sea $\mathcal{H}^{(p^2, w^2)} = \{|p^2, w^2, \alpha\rangle\}_\alpha$. A su vez, debido a que los eigenvectores de operadores hermíticos con diferentes eigenvalores son ortogonales, estos subespacios propios son ortogonales. Además, dado que no tienen subespacios invariantes no triviales, éstos son los subespacios invariantes elementales y las irreps de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ están completamente definidas por el par de eigenvalores (p^2, w^2) .

En resumen, las relaciones de conmutacion son

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (2.74)$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho), \quad (2.75)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}), \quad (2.76)$$

$$[W^\mu, P^\nu] = 0, \quad (2.77)$$

$$[W^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\sigma\mu}W^\rho - \eta^{\rho\mu}W^\sigma), \quad (2.78)$$

$$[W_\mu, W_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W^\rho P^\sigma, \quad (2.79)$$

$$[P^2, X] = 0, \quad (2.80)$$

$$[W^2, X] = 0, \quad (2.81)$$

donde X puede ser cualquiera de los operadores $X = P^\mu, J^{\mu\nu}, W^\mu$ o composición de ellos.

Las características invariantes de los vectores en las irreps de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ son los eigenvalores p^2 y w^2 de los operadores de Casimir P^2 y W^2 . Sus espectros y las propiedades físicas a las que ellos corresponden se pueden determinar de la siguiente manera. Un CSCO de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ es $\{P^\mu, P^2, W^2, S\}$, donde S es cualquier observable construido como una combinación lineal de las componentes de W^μ ; sus eigenvectores $|p^\mu, p^2, w^2, \sigma\rangle$ describen a estados con momento p^μ bien definido $P^\mu |p^\mu, p^2, w^2, \sigma\rangle = p^\mu |p^\mu, p^2, w^2, \sigma\rangle$, por ejemplo una partícula de momento p^μ . En consecuencia, el eigenvalor p^2 del operador P^2 sobre estos vectores es

el cuadrado de la masa del estado

$$P^2 |p^\mu, p^2, w^2, \sigma\rangle = p^\mu p_\mu |p^\mu, p^2, w^2, \sigma\rangle = m^2 |p^\mu, p^2, w^2, \sigma\rangle, \quad (2.82)$$

por ejemplo el cuadrado de la masa m de la partícula, donde se ha usado la relación $p^2 = m^2$. La determinación del espectro y la propiedad física a la que corresponden los eigenvalores w^2 resulta más sencilla en marcos de referencia particulares, y su valor es el mismo en cualquiera de ellos por la invarianza de W^2 . Si $m \neq 0$, es posible elegir el marco de referencia en el que un estado es $|p_r^\mu = (m, \mathbf{0}), m^2, w^2, \sigma\rangle$, es decir, el marco de referencia en reposo; este estado cumple $W^0 |p_r^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle = 0 |p_r^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle$ y $\mathbf{W} |p_r^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle = m \mathbf{J} |p_r^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle$, con lo cual

$$W^2 |p_r^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle = -m^2 \mathbf{J}^2 |p_r^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle, \quad (2.83)$$

y dado que \mathbf{J} son los generadores del álgebra de $SU(2)$ (2.66) y \mathbf{J}^2 su operador de Casimir, se tiene

$$W^2 |p_r^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle = -m^2 j(j+1) |p_r^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \quad (2.84)$$

lo que muestra que el eigenvalor w^2 es

$$\text{si } m \neq 0, \quad w^2 = -m^2 j(j+1), \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \quad (2.85)$$

esta propiedad física es, en el marco de referencia en reposo, el espín del estado, por ejemplo el espín de la partícula. Si $m = 0$, no existe marco de referencia en reposo, pero es posible elegir el marco en el que un estado es $|p_l^\mu = (p^0, 0, 0, p^0), m^2 = 0, w^2, \sigma\rangle$; este estado cumple $W_0 |p_l^\mu, m^2 = 0, w^2, \sigma\rangle = -W_3 |p_l^\mu, m^2 = 0, w^2, \sigma\rangle = p^0 J^3 |p_l^\mu, m^2 = 0, w^2, \sigma\rangle$, con lo cual

$$W^2 |p_l^\mu, m^2 = 0, w^2, \sigma\rangle = -[(W_1)^2 + (W_2)^2] |p_l^\mu, m^2 = 0, w^2, \sigma\rangle. \quad (2.86)$$

Si alguno de los eigenvalores w_1 ó w_2 es no-nulo entonces los espectros de los operadores W_1 y W_2 son continuos; puesto que no existe evidencia física de estos grados de libertad continuos, los estados físicos no masivos tienen $w_1 = 0$ y $w_2 = 0$, lo que muestra que el eigenvalor w^2 es trivial

$$\text{si } m = 0, \quad w^2 = 0, \quad (2.87)$$

que, de hecho, coincide con el límite $m \rightarrow 0$ del caso masivo (2.85). En este caso los vectores W^μ y P^μ son proporcionales

$$W^\mu = \lambda P^\mu, \quad (2.88)$$

siendo λ un escalar de Lorentz, que, de la componente temporal de esta ecuación se tiene que es

$$\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}}{P^0} |p_l^\mu, m^2 = 0, w^2, \sigma\rangle = \lambda |p_l^\mu, m^2 = 0, w^2, \sigma\rangle, \quad \lambda = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots \quad (2.89)$$

y es posible demostrar que toma los valores indicados [41, pág. 90]; este observable es la helicidad. En resumen, las características propias e invariantes de los estados cuánticos con $m \neq 0$ son la masa y el espín, mientras que la característica propia e invariante de los estados cuánticos con $m = 0$ es la helicidad.

Para caracterizar completamente a los vectores dentro de las irreps de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ es necesario determinar bases de ellas para el caso $m \neq 0$ y para el caso $m = 0$; esto se logra escogiendo CSCOs de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ apropiados para cada caso. Un CSCO para el espacio de estados masivos es $\{P^\mu, P^2, W^2, W^3\}$, donde W^3 es la componente $\mu = 3$ de W^μ ; sin embargo, en la literatura [47, pág. 280], [48] algunas veces se usa el CSCO $\{P^\mu, P^2, W^2, S^3\}$ donde S^3 es la componente $i = 3$ de los operadores de espín \mathbf{S} definidos como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{W} - \frac{W^0 \mathbf{P}}{m + P^0} \right). \quad (2.90)$$

Estos operadores \mathbf{S} cumplen el álgebra de $SU(2)$ incluso cuando $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ (a diferencia de los \mathbf{W} , que cumplen el álgebra de $SU(2)$ cuando $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, pero no cuando $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ [49, pág. 63]) y se reducen a \mathbf{J} cuando $\mathbf{p} = \mathbf{0}$

$$[S^i, S^j] = i\varepsilon^{ijk} S^k, \quad [J^i, S^i] = i\varepsilon^{ijk} S^k, \quad \mathbf{S}|_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} = \frac{1}{m} \mathbf{W}|_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} = \mathbf{J}, \quad (2.91)$$

en particular

$$S^2|_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} = J^2, \quad S^3|_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} = J^3. \quad (2.92)$$

Una elección alternativa de CSCO es $\{H, \mathbf{P}^2, P^2, W^2, J^3\}$ que, de hecho, coincide con el anterior en el subespacio de los estados en reposo

$$\{P^\mu, P^2, W^2, S^3\}|_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} = \{H, \mathbf{P}^2, P^2, W^2, J^3\}|_{\mathbf{p}^2=0} \quad (2.93)$$

como consecuencia de que $\mathbf{p}^2 = 0$ implica necesariamente $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ y de que se cumple (2.92). En lo subsecuente se utilizará el CSCO $\{P^\mu, P^2, W^2, S^3\}$ porque posee la ventaja de que sus eigenvectores tienen momento p^μ bien definido y eigenvalores de $SU(2)$. Los vectores de esta base son

$$|p^\mu, m^2, j, s^3\rangle \equiv |p^\mu, p^2 = m^2, w^2 = -m^2 j(j+1), s^3\rangle, \quad (2.94)$$

cuyos eigenvalores de W^2 y S^3 son, a causa de que se cumple $W^2 = -m^2 \mathbf{S}^2$ para todo p^μ , los de $SU(2)$

$$W^2 |p^\mu, m^2, j, s^3\rangle = -m^2 j(j+1) |p^\mu, m^2, j, s^3\rangle \quad j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad (2.95)$$

$$S^3 |p^\mu, m^2, j, s^3\rangle = s^3 |p^\mu, m^2, j, s^3\rangle \quad s^3 = -j, -j+1, \dots, j; \quad (2.96)$$

y satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\langle p'^\mu, m^2, j, s'^3 | p^\mu, m^2, j, s^3 \rangle = \delta_{s'^3 s^3} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (2.97)$$

Por su parte, un CSCO para el espacio de los estados no-masivos es $\{P^\mu, P^2, W^2, \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}/P^0\}$, con lo que los vectores de la base son

$$|p^\mu, m^2 = 0, \lambda\rangle \equiv |p^\mu, p^2 = 0, w^2 = 0, \lambda\rangle, \quad (2.98)$$

cuyo eigenvalor de helicidad $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}/P^0$ es

$$\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}}{P^0} |p^\mu, m^2 = 0, \lambda\rangle = \lambda |p^\mu, m^2 = 0, \lambda\rangle \quad \lambda = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots, \quad (2.99)$$

y satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\langle p'^\mu, m^2 = 0, \lambda' | p^\mu, m^2 = 0, \lambda \rangle = \delta_{\lambda' \lambda} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (2.100)$$

La acción de las transformaciones de Poincaré $U(\Lambda, a)$ sobre los vectores de \mathcal{H} está determinada por un grupo característico de la clase de partícula que describan (masiva o no-masiva), que es llamado el grupo pequeño. La propiedad $U(\Lambda, a) = U(\mathbb{1}, a)U(\Lambda, 0)$ permite analizar las traslaciones espacio-temporales y las transformaciones de Lorentz por separado. El efecto de las traslaciones espacio-temporales $U(\mathbb{1}, a)$ es $U(\mathbb{1}, a) |p^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle = e^{-ia_\mu p^\mu} |p^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle$, donde $\sigma = s^3, \lambda$. A su vez, por la propiedad (2.60), las transformaciones de Lorentz $U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0)$ producen vectores de momento bien definido

$$\begin{aligned} P^\mu U(\Lambda) |p^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle &= U(\Lambda) [U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda)] |p^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle \\ &= U(\Lambda) [\Lambda^\mu{}_\rho P^\rho] |p^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda) |p^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle \end{aligned} \quad (2.101)$$

por lo que el vector $U(\Lambda) |p^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle$ es una combinación lineal de todos aquellos con momento $\Lambda^\mu{}_\rho p^\rho$

$$U(\Lambda) |p^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma' \sigma}(\Lambda, p) |(\Lambda p)^\mu, m^2, w^2, \sigma'\rangle, \quad (2.102)$$

donde

$$C_{\sigma' \sigma}(\Lambda, p) = \langle (\Lambda p)^\mu, m^2, w^2, \sigma' | U(\Lambda) |p^\mu, m^2, w^2, \sigma\rangle. \quad (2.103)$$

La determinación de los coeficientes $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p)$ se realiza de la siguiente manera. Se expresa el momento p^μ genérico de cada clase de partícula (masiva o no-masiva) en términos de un momento estándar k^μ representativo de cada una, como

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu, \quad (2.104)$$

siendo la elección convencional

$$m \neq 0 : \quad k^\mu = (m, 0, 0, 0), \quad m = 0 : \quad k^\mu = (k^0, 0, 0, k^0). \quad (2.105)$$

La relación correspondiente a (2.104) en el espacio de Hilbert es

$$|p^\mu, p^2, w^2\rangle_\sigma = U(L(p)) |k^\mu, p^2, w^2, \sigma\rangle \quad (2.106)$$

donde el subíndice σ indica que, en general, el estado en el miembro izquierdo no es eigenvector del operador correspondiente a σ . Una transformación de Lorentz $U(\Lambda)$ arbitraria sobre estos estados es

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |p^\mu, p^2, w^2\rangle_\sigma &= U(\Lambda L(p)) |k^\mu, p^2, w^2, \sigma\rangle \\ &= U(L(\Lambda p)) U(L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)) |k^\mu, p^2, w^2, \sigma\rangle \\ &= U(L(\Lambda p)) W(\Lambda, p) |k^\mu, p^2, w^2, \sigma\rangle. \end{aligned} \quad (2.107)$$

El operador $W(\Lambda, p) \equiv U(L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p))$ implementa una transformación que cambia el momento como $k \rightarrow p \rightarrow \Lambda p \rightarrow k$, o sea, deja invariante a k^μ . El conjunto de todos los $W(\Lambda, p)$ forma el grupo pequeño asociado al momento estándar k^μ . Con esto, el vector resultante es

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |p^\mu, p^2, w^2\rangle_\sigma &= U(L(\Lambda p)) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |k^\mu, p^2, w^2, \sigma'\rangle \\ &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) |(\Lambda p)^\mu, p^2, w^2\rangle_{\sigma'} \end{aligned} \quad (2.108)$$

donde

$$D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) = \langle k^\mu, p^2, w^2, \sigma' | W(\Lambda, p) |k^\mu, p^2, w^2, \sigma\rangle, \quad (2.109)$$

por lo que, finalmente, el efecto de la transformación arbitraria $U(\Lambda)$ está determinado por el grupo pequeño a través de sus elementos de matriz $D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))$. El grupo pequeño para las partículas masivas es el grupo $SO(3)$ de rotaciones espaciales, cuya representación en \mathcal{H} es $SU(2)$, mientras que el grupo pequeño para las partículas no-masivas es el grupo $SO(2)$ ¹ de rotaciones en el plano xy , cuya representación en \mathcal{H} es $U(1)$. En suma, para los estados masivos se tiene

$$U(\Lambda, a) |p^\mu, m^2, j\rangle_{s^3} = e^{-ia \cdot \Lambda p} \sum_{s^3} D_{s^3 s^3}^{(j)}(W(\Lambda, p)) |(\Lambda p)^\mu, m^2, j\rangle_{s^3}, \quad (2.110)$$

¹El grupo pequeño de las partículas no masivas es, en realidad, el grupo $ISO(2)$; sin embargo, la parte inhomogénea no tiene relevancia física.

con

$$D_{s^3 s^3}^{(j)}(W(\Lambda, p)) = \langle k^\mu, m^2, j, s^3 | \exp(-i\mathbf{J}^{(j)} \cdot \boldsymbol{\theta}) | k^\mu, m^2, j, s^3 \rangle, \quad (2.111)$$

y para los estados no masivos

$$U(\Lambda, a) |p^\mu, m^2 = 0\rangle_\lambda = e^{-ia \cdot \Lambda p} \sum_\lambda D_{\lambda' \lambda}(W(\Lambda, p)) |(\Lambda p)^\mu, m^2 = 0\rangle_{\lambda'} \quad (2.112)$$

con

$$\begin{aligned} D_{\lambda' \lambda}(W(\Lambda, p)) &= \langle k^\mu, m^2 = 0, \lambda' | \exp(-i\theta J^3) | k^\mu, m^2 = 0, \lambda \rangle \\ &= \langle k^\mu, m^2 = 0, \lambda' | \exp(-i\theta \lambda) | k^\mu, m^2 = 0, \lambda \rangle \\ &= \exp(-i\theta \lambda) \delta_{\lambda' \lambda}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

La propiedad de separación de las transformaciones de Poincaré en traslaciones espacio-temporales y transformaciones de Lorentz $U(\Lambda, a) = U(\mathbb{1}, a)U(\Lambda, 0)$ induce una separación de los vectores en las irreps de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ como un producto de los vectores en las irreps del subgrupo de traslaciones espacio-temporales \mathbb{T}^4 y de los vectores en las irreps del subgrupo homogéneo de Lorentz propio ortócrono $\mathbb{L}_{+\uparrow}$. En el marco de referencia en reposo los estados masivos son $|k^\mu, m^2, j, s^3\rangle$ y se cumple que $\mathbf{S} = \mathbf{J}$, lo que implica que $s = j$ y $s^3 = j^3$, por lo que es posible escribir $|k^\mu, m^2, j, s^3\rangle = |k^\mu, m^2, j, j^3\rangle$, con lo cual la separación mencionada es

$$|k^\mu, m^2, j, j^3\rangle = |k^\mu, m^2\rangle |k^\mu, j, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}}, \quad (2.114)$$

donde los vectores $|k^\mu, m^2\rangle$ en las irreps del subgrupo de traslaciones espacio-temporales cumplen

$$P^\mu |k^\mu, m^2\rangle = k^\mu |k^\mu, m^2\rangle, \quad P^2 |k^\mu, m^2\rangle = m^2 |k^\mu, m^2\rangle, \quad (2.115)$$

y los vectores $|k^\mu, j, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}}$ en las irreps de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ cumplen

$$\mathbf{J}^2 |k^\mu, j, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}} = j(j+1) |k^\mu, j, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}}, \quad (2.116)$$

$$J^3 |k^\mu, j, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}} = j^3 |k^\mu, j, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}}. \quad (2.117)$$

Para conocer la estructura de los estados masivos en reposo, ésta separación nos conduce al análisis de las irreps de dimensión finita de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$, que se revisan en la siguiente subsección.

2.1.4. Grupo homogéneo de Lorentz

La representación del grupo homogéneo de Lorentz que actúa sobre el espacio de Minkowski se revisó en el segundo apartado de la subsección anterior. Este grupo tiene muchas otras representaciones, algunas de las cuales actúan sobre espacios construidos a partir del propio espacio de Minkowski y, por esto, son llamadas representaciones clásicas. Existen,

también, representaciones que actúan sobre espacios vectoriales complejos, de naturaleza fundamentalmente diferente a la de los construidos con el espacio de Minkowski; éstas representaciones son llamadas representaciones espinoriales. A continuación se construyen algunas de sus representaciones clásicas y, posteriormente, se obtienen sus representaciones irreducibles, entre las que se encuentran tanto irreps clásicas como irreps espinoriales.

Representaciones clásicas del HLG

Existen objetos construidos a partir de las coordenadas del espacio de Minkowski que heredan, de ellas, la propiedad de transformarse bajo \mathbb{L} . Dos objetos ejemplares son: el vector $dx^\mu(\tau)/d\tau$ tangente a una curva continua y suave $x^\mu = x^\mu(\tau)$, y el operador gradiente $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$. Como consecuencia de (2.32) se tiene

$$\frac{dx'^\mu(\tau)}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau}, \quad \partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu, \quad (2.118)$$

de hecho, estos objetos cambian de esta misma manera incluso cuando sobre las coordenadas x^μ se aplica una transformación no homogénea como (2.12). Los objetos que transforman con $\Lambda^\mu{}_\nu$ son llamados cuadvectores (cuadvectores contravariantes), mientras que aquellos que transforman con $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ son conocidos como cuadvectores duales (cuadvectores covariantes) porque están relacionados con los cuadvectores, a través de la métrica, de la misma manera que las coordenadas duales x_μ con las coordenadas x^μ , por ejemplo

$$\frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau} = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau}, \quad \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu, \quad (2.119)$$

son un cuadvector dual (covariante) y un cuadvector (contravariante), respectivamente. En lo sucesivo se les llamará simplemente vectores y vectores duales. Como consecuencia de que los vectores y vectores duales obedecen reglas de transformación opuestas, la contracción de un vector U^μ y un vector dual V_μ , o equivalentemente la contracción de dos vectores (vectores duales) con la métrica (métrica inversa), es invariante de Lorentz

$$\begin{aligned} U' \cdot V' &\equiv U'^\mu V'_\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha U^\alpha (\Lambda^{-1})^\beta{}_\mu V_\beta \\ &= (\Lambda^{-1})^\beta{}_\mu \Lambda^\mu{}_\alpha U^\alpha V_\beta = \delta^\beta{}_\alpha U^\alpha V_\beta = U^\alpha V_\alpha \equiv U \cdot V. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Partiendo de vectores y vectores duales es posible construir diferentes clases de objetos, que heredan sus propiedades de transformación de ellos; con esto se tiene la siguiente clasificación

- Escalar: es un objeto de $4^0 = 1$ componente, cuyo valor no cambia. Un ejemplo es la contracción $U \cdot V$ de un vector U^μ y un vector dual V_μ .
- Vector: es un objeto V^μ de $4^1 = 4$ componentes, que cambian como

$$V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu. \quad (2.121)$$

Un ejemplo es el vector tangente $dx^\mu(\tau)/d\tau$.

- Vector dual: es un objeto V_μ de $4^1 = 4$ componentes, que cambian como

$$V'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu V_\nu. \quad (2.122)$$

Un ejemplo es el operador gradiente ∂_μ .

- $(0, 2)$ -tensor: es un objeto $T^{\mu\nu}$ de $4^2 = 16$ componentes, que cambian como

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}. \quad (2.123)$$

Un ejemplo es el producto tensorial $U^\mu V^\nu$ de dos vectores U^μ y V^ν .

- (m, n) -tensor: es un objeto $T_{\nu_1 \dots \nu_m}{}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ de 4^{m+n} componentes que cambian como

$$T'_{\nu_1 \dots \nu_m}{}^{\mu_1 \dots \mu_n} = (\Lambda^{-1})^{\beta_1}{}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\beta_m}{}_{\nu_m} \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_n}{}_{\alpha_n} T_{\beta_1 \dots \beta_m}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}. \quad (2.124)$$

Un ejemplo es el producto tensorial $(V_1)_{\nu_1} \dots (V_m)_{\nu_m} (U_1)^{\mu_1} \dots (U_n)^{\mu_n}$ de m vectores duales y n vectores.

Esta clasificación se puede extender si se toma en cuenta la transformación de paridad. Bajo una transformación de paridad $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$ las componentes espaciales de los vectores cambian de signo pero la componente temporal no cambia. Existen, por otro lado, otro tipo de objetos, también de 4 componentes, que respetan la regla (2.121) cuando $\Lambda^\mu{}_\nu$ pertenece a $\mathbb{L}_{+\uparrow}$, pero su transformación ante paridad tiene el signo invertido, es decir, la componente que cambia de signo es la temporal, mientras que las componentes espaciales no cambian. Estos objetos son llamados vectores axiales o pseudovectores. Un ejemplo de un pseudovector es la contracción de tres vectores, V_1^α , V_2^β y V_3^γ , con el símbolo de Levi-Civita $\varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}$: $V_S^\mu = \varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} V_1^\alpha V_2^\beta V_3^\gamma$, que, dada la antisimetría de los índices α , β y γ en $\varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}$ sólo la parte antisimétrica del producto $V_1^\alpha V_2^\beta V_3^\gamma$ contribuye, y V_S^μ es $V_S^\mu = \varepsilon^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} V_1^{[\alpha} V_2^\beta V_3^{\gamma]}$ donde $V_1^{[\alpha} V_2^\beta V_3^{\gamma]} \equiv V_1^\alpha V_2^\beta V_3^\gamma - V_1^\beta V_2^\alpha V_3^\gamma + \dots$. La contracción de un pseudovector con un vector dual da lugar a un objeto de una sola componente que, a diferencia de un escalar, cambia de signo bajo paridad como consecuencia de la transformación opuesta del pseudovector. A este tipo de objetos se les denomina pseudoescalares.

Las representaciones clásicas de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ son las representaciones que actúan sobre los objetos listados anteriormente, construidos a partir de vectores y vectores duales. Puesto que los escalares son invariantes, la representación que actúa sobre ellos es la trivial. La representación que actúa sobre los vectores (2.121) es la misma que actúa sobre las coordenadas (2.36)

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \theta_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} \right) \right]^\mu{}_\nu, \quad (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(\eta^{\rho\mu} \delta_\nu^\sigma - \eta^{\sigma\mu} \delta_\nu^\rho). \quad (2.125)$$

Respecto a los $(0, 2)$ -tensores, una transformación infinitesimal sobre cualquier $T^{\mu\nu}$ de ellos es $T'^{\mu\nu} = (\delta_\alpha^\mu + \omega^\mu_\alpha)(\delta_\beta^\nu + \omega^\nu_\beta)T^{\alpha\beta}$ (2.123), que, a primer orden en $\omega_{\mu\nu}$, puede ser reexpresada en términos de los generadores $(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ como

$$T'^{\mu\nu} = \left[\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \right] T^{\alpha\beta}, \quad (2.126)$$

donde los generadores son

$$(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = (J^{\rho\sigma})^\mu_\alpha \delta_\beta^\nu + (J^{\rho\sigma})^\nu_\beta \delta_\alpha^\mu, \quad (2.127)$$

con lo cual, la representación que actúa sobre los $(0, 2)$ -tensores es

$$\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \theta_{\rho\sigma} \mathcal{J}^{\rho\sigma} \right) \right]^{\mu\nu}_{\alpha\beta}. \quad (2.128)$$

De igual manera, la representación sobre el espacio de $(0, n)$ -tensores esta generada por operadores $(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ definidos, también, en términos de los generadores vectoriales $(J^{\rho\sigma})^\mu_\nu$ y su aplicación es a través de una expresión análoga a (2.128). En este sentido, dentro de las representaciones clásicas, la representación vectorial es la fundamental porque con ella se pueden construir las demás.

El grupo $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ tiene como subgrupo al grupo de rotaciones $SO(3)$, y todos los objetos anteriores transforman conforme a $SO(3)$ bajo una rotación, por ejemplo quedan invariantes ante una rotación de 2π . Sin embargo, el grupo fundamental de rotaciones no es el grupo $SO(3)$ sino el grupo $SU(2)$, cuya transformación de 2π no es la identidad $\mathbb{1}$ sino su negativo $-\mathbb{1}$, y cuyo periodo es 4π . De lo anterior, se infiere que deben existir representaciones de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ cuyo subgrupo de rotaciones sea $SU(2)$ y sean, por lo tanto, sus representaciones fundamentales; éstas son, precisamente, unas de sus representaciones espinoriales. Para encontrarlas es necesario abordar el estudio de las irreps, que se revisa a continuación.

Representaciones irreducibles de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$

El álgebra de Lie de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ es (2.63)

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}), \quad (2.129)$$

que escrita en términos de los generadores de rotaciones \mathbf{J} y de boosts \mathbf{K} , se separa en las relaciones (2.66)

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k, \quad [J^i, K^j] = i\varepsilon^{ijk} K^k, \quad [K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk} J^k. \quad (2.130)$$

La primera de estas ecuaciones sólo involucra a los generadores \mathbf{J} y es, precisamente, el álgebra de Lie del grupo $SU(2)$, la segunda indica el carácter vectorial 3-dimensional de

\mathbf{K} y la tercera muestra que los \mathbf{K} no cierran un álgebra. Dado que las representaciones de dimensión finita de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ no pueden ser unitarias porque éste un grupo no-compacto a causa de los boosts, se tiene

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}, \quad \mathbf{K}^\dagger = -\mathbf{K}. \quad (2.131)$$

Para obtener los operadores de Casimir es necesario introducir, primeramente, los operadores \mathbf{A} y \mathbf{B} como

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}), \quad (2.132)$$

ambos hermíticos como consecuencia de (2.131). En términos de estos operadores, el álgebra de Lie de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ se separa en dos álgebras $SU(2)$ independientes

$$[A^i, A^j] = i\varepsilon^{ijk} A^k, \quad [A^i, B^j] = 0, \quad [B^i, B^j] = i\varepsilon^{ijk} B^k. \quad (2.133)$$

Los operadores \mathbf{A}^2 y \mathbf{B}^2 son ambos hermíticos, compatibles, y son los operadores de Casimir de sus respectivos grupos $SU(2)$: $[\mathbf{A}^2, A^i] = 0$, $[\mathbf{B}^2, B^i] = 0$, con lo que sus espectros son $a(a+1)$ con $a = 0, 1/2, 1, \dots$ y $b(b+1)$ con $b = 0, 1/2, 1, \dots$, respectivamente. Estos operadores son precisamente los operadores de Casimir de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$

$$[\mathbf{A}^2, J^i] = 0, \quad [\mathbf{A}^2, K^i] = 0, \quad [\mathbf{B}^2, J^i] = 0, \quad [\mathbf{B}^2, K^i] = 0, \quad (2.134)$$

y sus subespacios invariantes son los subespacios propios comunes a ambos, definidos por (a, b) ; puesto que éstos no tienen subespacios invariantes no triviales, las irreps están definidas por (a, b) . Los valores que pueden tomar a y b no están acotados superiormente, por lo tanto existe un número infinito numerable de irreps de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$. Una organización esquemática de ellas se muestra en la tabla (2.3). Una elección alternativa para los operadores de Casimir de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ es

$$C_+ = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2, \quad C_- = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2, \quad (2.135)$$

cuyos eigenvalores son

$$C_+ : a(a+1) + b(b+1), \quad C_- : a(a+1) - b(b+1). \quad (2.136)$$

Esta elección alternativa de los operadores de Casimir de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ es utilizada en la subsección (3.1.2) porque resulta apropiada para el análisis que ahí se realiza; mientras tanto, durante el resto de la presente subsección se trabaja con \mathbf{A}^2 y \mathbf{B}^2 .

En virtud de que el álgebra de Lie se ha separado en las álgebras $SU(2)_A$ y $SU(2)_B$, los operadores A^3 y B^3 son compatibles con \mathbf{A}^2 , \mathbf{B}^2 y compatibles entre sí; además, por ser generadores de $SU(2)$ sus espectros son $m_a = -a, -a+1, \dots, a$ y $m_b = -b, -b+1, \dots, b$, respectivamente. Con esto, los eigenvectores comunes a los operadores $\{\mathbf{A}^2, \mathbf{B}^2, A^3, B^3\}$

$$\begin{array}{cccc}
 & & (0, 0) & \\
 & & (\frac{1}{2}, 0) & (0, \frac{1}{2}) \\
 & (1, 0) & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (0, 1) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

 Tabla 2.3: Organización esquemática de las irreps de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$.

son $|a, b; m_a, m_b\rangle$ y forman una base ortogonal. Puesto que hay $2a + 1$ valores posibles de m_a y $2b + 1$ valores posibles de m_b , la dimensión de la irrep (a, b) es $(2a + 1)(2b + 1)$.

Los generadores de rotaciones \mathbf{J} y boosts \mathbf{K} , en términos de \mathbf{A} y \mathbf{B} son

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{K} = i(\mathbf{A} - \mathbf{B}). \quad (2.137)$$

Puesto que \mathbf{J} , \mathbf{A} y \mathbf{B} cumplen álgebras de $SU(2)$, la primer ecuación indica que \mathbf{J} es una suma de espines, por lo que el parámetro j del eigenvalor de \mathbf{J}^2 toma los valores $j = |a - b|, |a - b| + 1, \dots, a + b - 1, a + b$. Esto muestra que, en general, una irrep (a, b) de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ contiene varios sectores de espín j . Sin embargo, las irreps del tipo $(a, 0)$ ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$) y $(0, b)$ ($\mathbf{A} = \mathbf{0}$) llamadas irreps derechas e irreps izquierdas, cumplen

$$\text{derechas:} \quad (a, 0), \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{K} = i\mathbf{J}, \quad (2.138)$$

$$\text{izquierdas:} \quad (0, b), \quad \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{K} = -i\mathbf{J}, \quad (2.139)$$

por lo cual contienen un sólo sector de espín, $j = a$ ó $j = b$, y por esto suelen expresarse con el propio parámetro j : $(j, 0)$ y $(0, j)$. En ellas, los generadores de rotaciones son iguales $\mathbf{J}_{(j,0)} = \mathbf{J}_{(0,j)} \equiv \mathbf{J}^{(j)}$, pero los generadores de boosts difieren en un signo $\mathbf{K}_{(j,0)} = -\mathbf{K}_{(0,j)} = i\mathbf{J}^{(j)}$. En los siguientes apartados se examinan los aspectos básicos de las irreps que se muestran en la tabla (2.3): $(0, 0)$, $(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$, $(1/2, 1/2)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Por otro lado, las representaciones de la forma $(j, 0) \oplus (0, j)$ que son, evidentemente, representaciones reducibles de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ también tienen espín j bien definido; éstas son irreps del operador paridad y se revisan en la sección (3.1).

Irrep $(0,0)$

La base $\{|a, b; m_a, m_b\rangle\}$ de esta irrep es $\mathcal{B}_{(0,0)} = \{|0, 0; 0, 0\rangle\}$ y la descomposición de un vector en ella es $|\phi\rangle = |0, 0; 0, 0\rangle \langle 0, 0; 0, 0|\phi\rangle$. La dimensión de esta irrep es 1, lo que significa que ésta sólo contiene al elemento identidad y, por consiguiente, es la representación trivial. Dado que sus elementos no cambian, éstos son precisamente los escalares y esta irrep también es llamada escalar. Los estados de esta irrep tienen espín $j = 0$.

Irrep (1/2,0)

La base $\{|a, b; m_a, m_b\rangle\}$ es $\mathcal{B}_{(1/2,0)} = \{|1/2, 0; +1/2, 0\rangle, |1/2, 0; -1/2, 0\rangle\} \equiv \{|\uparrow\rangle_R, |\downarrow\rangle_R\}$ y la descomposición, en ésta base, de un vector de ésta irrep es $|\psi\rangle_R = |\uparrow\rangle_R \langle\uparrow|\psi\rangle_R + |\downarrow\rangle_R \langle\downarrow|\psi\rangle_R$. Dado que la base es ortogonal, se puede representar matricialmente como

$$|\uparrow\rangle_R \doteq \psi_R(\uparrow) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle_R \doteq \psi_R(\downarrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.140)$$

con lo que la representación matricial del vector $|\psi\rangle_R$ es

$$|\psi\rangle_R \doteq \psi_R = {}_R\langle\uparrow|\psi\rangle_R \psi_R(\uparrow) + {}_R\langle\downarrow|\psi\rangle_R \psi_R(\downarrow) = \begin{pmatrix} {}_R\langle\uparrow|\psi\rangle_R \\ {}_R\langle\downarrow|\psi\rangle_R \end{pmatrix}. \quad (2.141)$$

La representación matricial de los generadores $J^{\mu\nu}$ es

$$J_{(1/2,0)}^{\mu\nu} \doteq {}_R\langle e^a | J_{(1/2,0)}^{\mu\nu} | e_b \rangle_R = \frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu), \quad (2.142)$$

donde $\{|e_a\rangle_R\} \equiv \{|e_1\rangle_R, |e_2\rangle_R\} \equiv \{|\uparrow\rangle_R, |\downarrow\rangle_R\}$ y

$$\sigma^\mu \equiv (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbb{1}, -\boldsymbol{\sigma}); \quad (2.143)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ son las matrices de Pauli. Sus componentes \mathbf{J} y \mathbf{K} son

$$\mathbf{J}_{(1/2,0)} = \mathbf{J}^{(1/2)} \doteq \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad \mathbf{K}_{(1/2,0)} = i\mathbf{J}^{(1/2)} \doteq i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}. \quad (2.144)$$

Esta irrep también es llamada 1/2-espinorial derecha, sus vectores $|\psi\rangle_R$ son nombrados espinores de Weyl derechos y tienen espín $j = 1/2$.

Irrep (0,1/2)

La base $\{|a, b; m_a, m_b\rangle\}$ es $\mathcal{B}_{(0,1/2)} = \{|0, 1/2; 0, +1/2\rangle, |0, 1/2; 0, -1/2\rangle\} \equiv \{|\uparrow\rangle_L, |\downarrow\rangle_L\}$ y la descomposición, en ésta base, de un vector de ésta irrep es $|\psi\rangle_L = |\uparrow\rangle_L \langle\uparrow|\psi\rangle_L + |\downarrow\rangle_L \langle\downarrow|\psi\rangle_L$. Dado que la base es ortogonal, se puede representar matricialmente como

$$|\uparrow\rangle_L \doteq \psi_L(\uparrow) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle_L \doteq \psi_L(\downarrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.145)$$

con lo que la representación matricial del vector $|\psi\rangle_L$ es

$$|\psi\rangle_L \doteq \psi_L = {}_L\langle\uparrow|\psi\rangle_L \psi_L(\uparrow) + {}_L\langle\downarrow|\psi\rangle_L \psi_L(\downarrow) = \begin{pmatrix} {}_L\langle\uparrow|\psi\rangle_L \\ {}_L\langle\downarrow|\psi\rangle_L \end{pmatrix}. \quad (2.146)$$

La representación matricial de los generadores $J^{\mu\nu}$ es

$$J_{(0,1/2)}^{\mu\nu} \doteq {}_L\langle e^a | J_{(0,1/2)}^{\mu\nu} | e_b \rangle_L = \frac{i}{4} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu), \quad (2.147)$$

donde $\{|e_a\rangle_L\} \equiv \{|e_1\rangle_L, |e_2\rangle_L\} = \{|\uparrow\rangle_L, |\downarrow\rangle_L\}$ y con σ^μ y $\bar{\sigma}^\mu$ definidas en (2.143). Sus componentes \mathbf{J} y \mathbf{K} son

$$\mathbf{J}_{(0,1/2)} = \mathbf{J}^{(1/2)} \doteq \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad \mathbf{K}_{(0,1/2)} = -i\mathbf{J}^{(1/2)} \doteq -i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}. \quad (2.148)$$

Esta irrep también es llamada 1/2-espinorial izquierda, sus vectores $|\psi\rangle_L$ son nombrados espinores de Weyl izquierdos y tienen espín $j = 1/2$.

Irrep (1/2,1/2)

Esta representación puede ser construida de dos maneras: i) como $(1/2, 0) \otimes (0, 1/2)$ ó ii) como $(0, 1/2) \otimes (1/2, 0)$; el siguiente desarrollo aplica para cualquiera de ellas. La base $\{|a, b; m_a, m_b\rangle\}$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(1/2,1/2)} &= \{|1/2, 1/2; +1/2, +1/2\rangle, |1/2, 1/2; +1/2, -1/2\rangle, \\ &\quad |1/2, 1/2; -1/2, +1/2\rangle, |1/2, 1/2; -1/2, -1/2\rangle\} \\ &\equiv \{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}, \end{aligned} \quad (2.149)$$

y la descomposición, en ésta base, de un vector de ésta irrep es $|V\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \langle\uparrow\uparrow|V\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle \langle\uparrow\downarrow|V\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \langle\downarrow\uparrow|V\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle \langle\downarrow\downarrow|V\rangle$. Dado que la base es ortogonal, se puede representar matricialmente como

$$|\uparrow\uparrow\rangle \doteq V(\uparrow\uparrow) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\uparrow\downarrow\rangle \doteq V(\uparrow\downarrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.150)$$

$$|\downarrow\uparrow\rangle \doteq V(\downarrow\uparrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\downarrow\rangle \doteq V(\downarrow\downarrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.151)$$

con lo que la representación matricial del vector $|V\rangle$ es

$$\begin{aligned} |V\rangle \doteq V &= \langle\uparrow\uparrow|V\rangle V(\uparrow\uparrow) + \langle\uparrow\downarrow|V\rangle V(\uparrow\downarrow) \\ &\quad + \langle\downarrow\uparrow|V\rangle V(\downarrow\uparrow) + \langle\downarrow\downarrow|V\rangle V(\downarrow\downarrow) = \begin{pmatrix} \langle\uparrow\uparrow|V\rangle \\ \langle\uparrow\downarrow|V\rangle \\ \langle\downarrow\uparrow|V\rangle \\ \langle\downarrow\downarrow|V\rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.152)$$

La representación matricial de los generadores $J^{\mu\nu}$ es $J_{(1/2,1/2)}^{\mu\nu} \doteq \langle e^a | J_{(1/2,1/2)}^{\mu\nu} | e_b \rangle$, donde $\{|e_a\rangle\} \equiv \{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, |e_4\rangle\} \equiv \{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$. Si en lugar de utilizar la base

$\{|e_a\rangle\}$ se utiliza la base $\{|f_\sigma\rangle\} \equiv \{|f_0\rangle, |f_1\rangle, |f_2\rangle, |f_3\rangle\}$, relacionada con la primera a través de la matriz unitaria M por medio de la ecuación

$$|f_\sigma\rangle = M_\sigma^a |e_a\rangle, \quad \langle f^\rho| = \langle e^a| (M^\dagger)_a{}^\rho, \quad (2.153)$$

que explícitamente es

$$\begin{pmatrix} |f_0\rangle \\ |f_1\rangle \\ |f_2\rangle \\ |f_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |e_1\rangle \\ |e_2\rangle \\ |e_3\rangle \\ |e_4\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.154)$$

la representación matricial de los generadores $J^{\mu\nu}$ es la de los generadores vectoriales (2.125)

$$J_{(1/2,1/2)}^{\mu\nu} \doteq \langle f^\rho| J_{(1/2,1/2)}^{\mu\nu} |f_\sigma\rangle = i(\eta^{\mu\rho}\delta_\sigma^\nu - \eta^{\nu\rho}\delta_\sigma^\mu). \quad (2.155)$$

Esta irrep es precisamente la representación cuadvivectorial, y sus elementos $|V\rangle$ escritos en la base $|f_\sigma\rangle$ son los cuadvectores. Los vectores de esta irrep tienen dos sectores de espín, un singlete $j = 0$ y un triplete $j = 1$. El tratamiento completo de esta representación debe incluir tanto a la $(1/2, 0) \otimes (0, 1/2)$ como a la $(0, 1/2) \otimes (1/2, 0)$, los detalles de su construcción completa se muestran en la sección IV de [42].

Irrep (1,0)

La base $\{|a, b; m_a, m_b\rangle\}$ de esta irrep es $\mathcal{B}_{(1,0)} = \{|1, 0; +1, 0\rangle, |1, 0; 0, 0\rangle, |1, 0; -1, 0\rangle\} \equiv \{|+1\rangle_R, |0\rangle_R, |-1\rangle_R\}$ y la descomposición, en ésta base, de un vector de ésta irrep es $|\Psi\rangle_R = |+1\rangle_R \langle +1|\Psi\rangle_R + |0\rangle_R \langle 0|\Psi\rangle_R + |-1\rangle_R \langle -1|\Psi\rangle_R$. Dado que la base es ortogonal, se puede representar matricialmente como

$$|+1\rangle_R \doteq \Psi_R(+1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle_R \doteq \Psi_R(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-1\rangle_R \doteq \Psi_R(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.156)$$

con lo que la representación matricial del vector $|\Psi\rangle_R$ es

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_R &\doteq \Psi_R = {}_R\langle +1|\Psi\rangle_R \Psi_R(+1) + {}_R\langle 0|\Psi\rangle_R \Psi_R(0) + {}_R\langle -1|\Psi\rangle_R \Psi_R(-1) \\ &= \begin{pmatrix} {}_R\langle +1|\Psi\rangle_R \\ {}_R\langle 0|\Psi\rangle_R \\ {}_R\langle -1|\Psi\rangle_R \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.157)$$

La representación matricial de los generadores $J^{\mu\nu}$ es $J_{(1,0)}^{\mu\nu} \doteq \langle e^a| J^{\mu\nu} |e_b\rangle$, donde $\{|e_a\rangle_R\} \equiv \{|e_1\rangle_R, |e_2\rangle_R\} = \{|\uparrow\rangle_R, |\downarrow\rangle_R\}$. Sus componentes \mathbf{J} y \mathbf{K} son

$$\mathbf{J}_{(1,0)} = \mathbf{J}^{(1)}, \quad \mathbf{K}_{(1,0)} = i\mathbf{J}^{(1)}, \quad (2.158)$$

donde

$$J_1^{(1)} \doteq \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2^{(1)} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3^{(1)} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.159)$$

Esta irrep también es llamada 1-espinorial derecha, sus vectores $|\Psi\rangle_R$ son nombrados 1-espinores derechos y tienen espín $j = 1$.

Irrep (0,1)

La base $\{|a, b; m_a, m_b\rangle\}$ de esta irrep es $\mathcal{B}_{(0,1)} = \{|0, 1; 0, +1\rangle, |0, 1; 0, 0\rangle, |0, 1; 0, -1\rangle\} \equiv \{|+1\rangle_L, |0\rangle_L, |-1\rangle_L\}$ y la descomposición, en ésta base, de un vector de ésta irrep es $|\Psi\rangle_L = |+1\rangle_L \langle +1|\Psi\rangle_L + |0\rangle_L \langle 0|\Psi\rangle_L + |-1\rangle_L \langle -1|\Psi\rangle_L$. Dado que la base es ortogonal, se puede representar matricialmente como

$$|+1\rangle_L \doteq \Psi_L(+1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle_L \doteq \Psi_L(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-1\rangle_L \doteq \Psi_L(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.160)$$

con lo que la representación matricial del vector $|\Psi\rangle_L$ es

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_L &\doteq \Psi_L = {}_L\langle +1|\Psi\rangle_L \Psi_L(+1) + {}_L\langle 0|\Psi\rangle_L \Psi_L(0) + {}_L\langle -1|\Psi\rangle_L \Psi_L(-1) \\ &= \begin{pmatrix} {}_L\langle +1|\Psi\rangle_L \\ {}_L\langle 0|\Psi\rangle_L \\ {}_L\langle -1|\Psi\rangle_L \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.161)$$

La representación matricial de los generadores $J^{\mu\nu}$ es $J_{(0,1)}^{\mu\nu} \doteq \langle e^a | J_{(0,1)}^{\mu\nu} | e_b \rangle$, donde $\{|e_a\rangle_L\} \equiv \{|e_1\rangle_L, |e_2\rangle_L\} = \{|\uparrow\rangle_L, |\downarrow\rangle_L\}$. Sus componentes \mathbf{J} y \mathbf{K} son

$$\mathbf{J}_{(0,1)} = \mathbf{J}^{(1)}, \quad \mathbf{K}_{(0,1)} = -i\mathbf{J}^{(1)}, \quad (2.162)$$

donde los $\mathbf{J}^{(1)}$ están definidos en (2.159). Esta irrep también es llamada 1-espinorial izquierda, sus vectores $|\Psi\rangle_L$ son nombrados 1-espinores izquierdos y tienen espín $j = 1$.

Los vectores en las irreps de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ eran el componente que faltaba para la construcción de los vectores de estados masivos en reposo $|k^\mu, m^2, j, j^3\rangle$, en (2.114). En la siguiente subsección se continúa con la construcción de dichos estados y se exponen las ecuaciones dinámicas a que obedecen.

2.1.5. Estados masivos y sus dinámicas

En el marco de referencia en reposo la separación (2.114) de los estados masivos es $|k^\mu, m^2, j, j^3\rangle = |k^\mu, m^2\rangle |k^\mu, j, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}}$. El vector $|k^\mu, j, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}}$ es un vector de espín j y componente j^3 bien definidos, en cualquier representación de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$. Por ejemplo, para $j = 0$, en la irrep $(0, 0)$, es $|k^\mu, j = 0, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}} = |\phi(k^\mu)\rangle$; para $j = 1/2$, en la irrep $(1/2, 0)$ es $|k^\mu, j = 1/2, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}} = |\psi(k^\mu, j^3)\rangle_R$, en la irrep $(0, 1/2)$ es $|k^\mu, j = 1/2, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}} = |\psi(k^\mu, j^3)\rangle_L$, y en la representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ es $|k^\mu, j = 1/2, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}} = |\psi(k^\mu, j^3)\rangle$; y para $j = 1$, en la irrep $(1, 0)$ es $|k^\mu, j = 1, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}} = |\Psi(k^\mu, j^3)\rangle_R$, en la irrep $(0, 1)$ es $|k^\mu, j = 1, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}} = |\Psi(k^\mu, j^3)\rangle_L$, y en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ es $|k^\mu, j = 1, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}} = |\Psi(k^\mu, j^3)\rangle$. En lo sucesivo se utilizará $|k^\mu, j, j^3\rangle_{\mathbb{L}_{+\uparrow}} \equiv |\Phi(k^\mu, j, j^3)\rangle$ para expresar de manera genérica cualquiera de estas identificaciones. Los estados con momento $p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu$ arbitrario se obtienen al aplicar el operador de boost $U(L(p))$ sobre ellos

$$|p^\mu, m^2, j\rangle_{j^3} = U(L(p)) |k^\mu, m^2, j, j^3\rangle = |p^\mu, m^2\rangle |\Phi(p^\mu, j)\rangle_{j^3}, \quad (2.163)$$

donde $|\Phi(p^\mu, j)\rangle_{j^3} \equiv U(L(p)) |\Phi(k^\mu, j, j^3)\rangle$; proyectando a (2.163) en el espacio de configuraciones se obtiene su función de onda $\Phi(x^\mu, j) = e^{-ip \cdot x} \Phi_{j^3}(p^\mu, j)$.

Las ecuaciones de eigenvalores que definen a los estados masivos en reposo son

$$P^\mu |k^\mu, m^2, j, j^3\rangle = k^\mu |k^\mu, m^2, j, j^3\rangle, \quad (2.164)$$

$$P^2 |k^\mu, m^2, j, j^3\rangle = m^2 |k^\mu, m^2, j, j^3\rangle, \quad (2.165)$$

$$W^2 |k^\mu, m^2, j, j^3\rangle = -m^2 j(j+1) |k^\mu, m^2, j, j^3\rangle, \quad (2.166)$$

$$J^3 |k^\mu, m^2, j, j^3\rangle = j^3 |k^\mu, m^2, j, j^3\rangle. \quad (2.167)$$

La transcripción de estas ecuaciones para los estados boosteados $|p^\mu, m^2, j\rangle_{j^3}$ se obtiene al aplicar el operador de boost $U(L(p))$ en ellas como $U \mathcal{O} U^{-1} (U |k^\mu, \dots\rangle) = \mathcal{O} (U |k^\mu, \dots\rangle)$. Después de su aplicación, la ecuación (2.164) expresará que el estado boosteado tiene momento $p^\mu = L(p)^\mu{}_\nu k^\nu$, las ecuaciones (2.165) y (2.166) expresarán que se encuentra en la capa de masa $p^2 = m^2$ y tiene momento angular j y la ecuación (2.167) expresará que es eigenvector del operador $(L^{-1}(p))^\rho{}_\sigma (L^{-1}(p))^2 J^{\rho\sigma}$, es decir, del operador J^3 boosteado. Puesto que sólo las primeras tres serán ecuaciones covariantes de Lorentz, las únicas restricciones covariantes que impone el grupo de Poincaré propio ortócrono $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ sobre los estados masivos es que se encuentren en la capa de masa y tengan momento angular j definido. En particular, la dinámica propia de la función de onda $\Phi(x^\mu, j)$ de una partícula de espín j no está dictada por $\mathbb{P}_{+\uparrow}$, éste sólo exige que la dinámica debe ser congruente con la ecuación de Klein-Gordon, expresada en la ecuación $(P^2 - m^2) |p^\mu, \dots\rangle = 0$ al ser proyectada en el espacio de configuraciones.

Las ecuaciones dinámicas propias de las funciones de onda $\Phi(x^\mu, j)$ para partículas de diferentes espines j han sido encontradas históricamente de manera casual, tratando

de resolver problemas específicos en su tiempo, y no de manera sistemática ni partiendo de primeros principios. Recientemente, en la referencia [42] se ha demostrado que estas ecuaciones pueden ser obtenidas sistemáticamente a través de un formalismo de primeros principios que tiene a la simetría de paridad como el actor determinante de ellas. En la sección (3.1) se reproduce el argumento expuesto en dicha referencia. Por lo pronto, se presentan las ecuaciones para partículas masivas en las representaciones $(0, 0)$, $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ y $(1/2, 1/2)$ sin otra justificación teórica fundamental más que el hecho de que están construidas con operadores en la misma representación que la función de onda y que sus dinámicas cumplen, también, la ecuación de Klein-Gordon.

Klein-Gordon

Es la ecuación para una partícula de espín $j = 0$, descrita por el escalar $\phi(x)$ de la irrep $(0, 0)$

$$(\partial^2 + m^2) \phi(x) = 0, \quad (2.168)$$

donde $\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu$. Esta ecuación expresa únicamente la restricción de que la partícula descrita por la función escalar $\phi(x)$ debe estar en la capa de masa.

Dirac

Es la ecuación para una partícula de espín $j = 1/2$, descrita por el espinor $\psi(x)$ de la representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0. \quad (2.169)$$

Las matrices γ^μ se definen como

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.170)$$

y cumplen la propiedad

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (2.171)$$

Es debido a esta propiedad que la función espinorial $\psi(x)$ también cumple la ecuación de Klein-Gordon, como se puede comprobar al aplicar el operador $(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)$ por la izquierda a la ecuación (2.169).

Proca

Es la ecuación para una partícula de espín $j = 1$, descrita por el cuadvivector $A_\mu(x)$ de la irrep $(1/2, 1/2)$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + m^2 A^\nu(x) = 0, \quad (2.172)$$

donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. De esta misma ecuación se deduce que A^μ cumple

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (2.173)$$

propiedad que garantiza que A^μ cumple la ecuación de Klein-Gordon, como se comprueba de expresar la ecuación (2.172) únicamente en términos de A^μ .

La interpretación del escalar $\phi(x)$ de la ecuación de Klein-Gordon como una función de onda presenta problemas conceptuales ya que su densidad de probabilidad no es definida positiva y además tiene energías negativas. Tratando de resolver el primero de estos problemas, Dirac obtuvo la ecuación que lleva su nombre; el espinor $\psi(x)$ de ésta ecuación tiene densidad de probabilidad definida positiva pero sigue padeciendo de energías negativas. La propuesta de Dirac [26] para resolver éste problema fue hipotetizar la existencia de un mar de partículas llamadas positrones, similares al electrón pero de carga eléctrica opuesta, que llenaban los niveles energéticos negativos y por lo tanto, a través del principio de exclusión de Pauli, evitaban que los electrones descendieran a estos niveles emitiendo energía ilimitada en su descenso. El positrón se descubrió en el año de 1932 [27], lo que significó un gran logro para la teoría de Dirac; sin embargo, la hipótesis del mar de positrones era, aún, misteriosa. Con la intención de obtener una ecuación que no tuviera energías negativas, en 1936 Al. Proca, propone en [50] la ecuación que lleva su nombre.

A pesar de que algunas de estas ecuaciones evitaban algunos de los problemas conceptuales, la descripción de partículas cuánticas relativistas a través de una función de onda era aún enigmática; por ejemplo, parecía que, dentro de este marco, no existe descripción consistente de las partículas de espín $j = 0$, además de que parecía no haber forma de describir procesos en los que el número de partículas no se conserva. La solución a estas dificultades se encuentra en la reinterpretación de los objetos $\phi(x), \psi(x), \dots$, como campos-operadores cuánticos que se aplican sobre vectores que describen estados, ya no como funciones de onda. La teoría que estudia esta nueva interpretación, también llamada segunda cuantización, es la teoría cuántica de campos; para abordarla es necesario, antes, revisar los aspectos básicos de los campos clásicos, sus dinámicas y sus simetrías.

2.1.6. Campos clásicos y principio de norma

Un campo $\phi_a(x)$, $a = 1, \dots, N$ es una función que asigna un objeto de naturaleza específica (escalar, espinorial, vectorial, etc.) a cada punto del espacio-tiempo. La dinámica de los campos está determinada por el principio de mínima acción

$$\delta S = 0, \quad S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a), \quad (2.174)$$

que implica el cumplimiento de las ecuaciones de Euler-Lagrange, también llamadas ecuaciones de movimiento ó ecuaciones de campo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} = 0, \quad (2.175)$$

que serán N ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para los campos $\phi_a(x)$. La densidad Lagrangiana, o simplemente Lagrangiano $\mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$, es una función escalar formada por los campos y sus primeras derivadas parciales. Los Lagrangianos que difieren en un término frontera $\partial_\alpha f^\alpha(\phi_a)$ producen las mismas ecuaciones de movimiento y, por esto, se dice que son equivalentes.

En el formalismo Hamiltoniano la dinámica de los campos se determina a través de las ecuaciones de Hamilton, que establecen la evolución temporal de los campos ϕ_a y de sus momentos canónicos conjugados π_a . El momento canónico conjugado π_a de un campo ϕ_a es

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_a)}, \quad (2.176)$$

la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} es una función de los campos y sus momentos canónicos definida como

$$\mathcal{H}(\phi_a, \pi_a) = \pi_a \partial_0 \phi_a - \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a), \quad (2.177)$$

donde se asume el convenio de suma sobre los subíndices a , y el Hamiltoniano H es la integral de esta densidad \mathcal{H} sobre todo el espacio

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\phi_a, \pi_a). \quad (2.178)$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\partial_0 \phi_a = \frac{\delta H}{\delta \pi_a}, \quad \partial_0 \pi_a = - \frac{\delta H}{\delta \phi_a}, \quad (2.179)$$

donde $\delta/\delta \pi_a$ y $\delta/\delta \phi_a$ son derivadas funcionales respecto a π_a y ϕ_a , definidas como

$$\frac{\delta \phi_a(x)}{\delta \phi_b(y)} = \delta_b^a \delta^{(4)}(x - y), \quad \frac{\delta \pi_a(x)}{\delta \pi_b(y)} = \delta_b^a \delta^{(4)}(x - y). \quad (2.180)$$

Las ecuaciones de Hamilton (2.179) serán $2N$ ecuaciones diferenciales de primer orden para los campos y sus momentos canónicos conjugados. Estas ecuaciones se pueden reescribir en términos del bracket de Poisson de la siguiente manera

$$\partial_0 \phi_a = \{\phi_a, H\}_{PB}, \quad \partial_0 \pi_a = \{\pi_a, H\}_{PB}, \quad (2.181)$$

donde éste bracket, entre dos variables dinámicas $A(\phi_a, \pi_a, \partial_i \phi_a)$ y $B(\phi_a, \pi_a, \partial_i \phi_a)$ cualesquiera, se define como

$$\{A, B\}_{PB} = \int d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta \phi_a} \frac{\delta B}{\delta \pi_a} - \frac{\delta A}{\delta \pi_a} \frac{\delta B}{\delta \phi_a} \right). \quad (2.182)$$

En general, la evolución temporal de cualquier variable dinámica $F = \int d^3x \mathcal{F}(\phi_a, \pi_a, \partial_i \phi_a)$ puede ser escrita en términos de estos brackets como

$$\partial_0 F = \{F, H\}_{PB}. \quad (2.183)$$

En particular, el bracket de Poisson entre los campos $\phi_a(x)$ y sus momentos canónicos conjugados $\pi_a(x)$ a tiempos iguales cumple

$$\{\phi_a(t, \mathbf{x}), \pi_b(t, \mathbf{y})\}_{PB} = \delta_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.184)$$

$$\{\phi_a(t, \mathbf{x}), \phi_b(t, \mathbf{y})\}_{PB} = 0, \quad (2.185)$$

$$\{\pi_a(t, \mathbf{x}), \pi_b(t, \mathbf{y})\}_{PB} = 0, \quad (2.186)$$

El formalismo Hamiltoniano y los brackets de Poisson son especialmente útiles y esenciales en el proceso de cuantización de los campos dentro del esquema de cuantización canónica, que se revisa en la subsección (2.1.7). Mientras tanto, en el resto de esta subsección se utiliza la formulación Lagrangiana.

A continuación se muestran los Lagrangianos que dan lugar a las ecuaciones dinámicas para los campos escalar $\phi(x)$, espinorial $\psi(x)$ y vectorial $A^\mu(x)$ vistas en la subsección anterior, y sus soluciones correspondientes; adicionalmente se muestra el Lagrangiano de Maxwell para un campo vectorial sin masa, con el que se obtienen las ecuaciones de la electrodinámica clásica en su forma covariante. Cabe mencionar que el campo espinorial $\psi(x)$ sólo tiene aplicación en el contexto cuántico; su tratamiento como campo clásico sólo es ilustrativo.

Klein-Gordon

El Lagrangiano de Klein-Gordon para un campo escalar real $\phi(x)$ es

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2, \quad (2.187)$$

su ecuación de movimiento es la ecuación de Klein-Gordon (2.168), cuya solución es

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^* e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0 = E_{\mathbf{p}}}, \quad (2.188)$$

donde $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, y $a_{\mathbf{p}}$ son coeficientes. En el caso de un campo escalar complejo, el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (2.189)$$

produce ecuaciones de Klein-Gordon tanto para $\phi(x)$ como para su complejo conjugado $\phi^*(x)$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x) = 0, \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi^*(x) = 0, \quad (2.190)$$

cuyas soluciones son

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^* e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0 = E_{\mathbf{p}}}, \quad (2.191)$$

y su complejo conjugado, donde, de igual manera $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, y $a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}$ son coeficientes.

Dirac

El Lagrangiano de Dirac es

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (2.192)$$

que produce las ecuaciones

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)(i\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0, \quad (2.193)$$

cuyas soluciones son

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} (a_{\mathbf{p},s} u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p},s}^* v^s(p) e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad (2.194)$$

donde $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, y $a_{\mathbf{p},s}$, $b_{\mathbf{p},s}$ son coeficientes; los espinores $u^s(p)$ y $v^s(p)$ son

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad (2.195)$$

con

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = -i\sigma^2 \xi^{1*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^2 = -i\sigma^2 \xi^{2*} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.196)$$

Proca

El Lagrangiano de Proca es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu, \quad (2.197)$$

su ecuación de movimiento es la ecuación de Proca (2.172), cuya solución es

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=0}^3 (\epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p},\lambda} e^{-ip \cdot x} + \epsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p},\lambda}^* e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}, \quad (2.198)$$

donde $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, y $\epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$ son vectores que cumplen $p_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) = 0$.

Maxwell

El Lagrangiano de Maxwell es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.199)$$

que describe, también, a un campo vectorial real $A_\mu(x)$. Su ecuación de movimiento es

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.200)$$

que son las ecuaciones de la electrodinámica clásica en su forma covariante, en ausencia de fuentes (cargas y corrientes). Una propiedad característica de este Lagrangiano es su invarianza ante la transformación

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x), \quad (2.201)$$

que es llamada transformación de norma y constituye una simetría del Lagrangiano como consecuencia de la invarianza del propio tensor $F_{\mu\nu}$. Con la libertad que da esta simetría de norma, siempre es posible elegir el campo de manera que cumpla la condición $\partial_\mu A^\mu = 0$, elección conocida como norma de Lorenz. Con esto, la ecuación de movimiento (2.200) se reduce a $\partial^2 A_\mu(x) = 0$, que es, precisamente, la ecuación de Klein-Gordon para el campo $A_\mu(x)$ con $m = 0$. Su solución, en esta norma, es

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=0}^3 (\epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda} e^{-ip \cdot x} + \epsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) a_{\mathbf{p}, \lambda}^* e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0 = E_{\mathbf{p}}}, \quad (2.202)$$

donde $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2}$, y $\epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$ son vectores que cumplen $p_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) = 0$.

En la dinámica de los campos hay cantidades que se mantienen constantes en el tiempo; éstas cantidades son llamadas cargas conservadas. Existe una relación entre las simetrías continuas de una acción S y las cargas conservadas en su dinámica. Esta relación está enunciada en el teorema de Noether, que se expone a continuación.

Teorema de Noether

Una transformación infinitesimal arbitraria en los campos $\phi_a(x)$ de la acción (2.174) induce una variación δS en ésta última

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x) = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x), \quad S \rightarrow S' = S + \delta S. \quad (2.203)$$

Si $\delta S = 0$, la acción es invariante, la transformación de los campos es una simetría de ella y, en consecuencia, es una simetría de la dinámica. A nivel del Lagrangiano \mathcal{L} , para que la transformación $\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x)$ sea una simetría de la acción debe, a lo más, modificar a \mathcal{L} en un término frontera como $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ donde $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu(\phi)$. Por otro lado, la variación $\delta\mathcal{L}$ en términos de las variaciones $\delta\phi_a$ de los campos es

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta(\partial_\mu\phi_a), \quad (2.204)$$

expresión que puede ser reescrita como

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta\phi_a \right) + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \right) \right] \delta\phi_a. \quad (2.205)$$

El segundo término de esta expresión se anula por las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.175), por lo tanto se debe cumplir la ecuación de continuidad para la corriente j^μ

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} X_a(\phi) - F^\mu(\phi), \quad (2.206)$$

donde se ha renombrado $X_a(\phi) = \delta\phi_a$. La corriente j^μ es llamada corriente de Noether y su ecuación de continuidad da la lugar la carga conservada Q

$$Q = \int d^3x j^0, \quad (2.207)$$

llamada carga de Noether. Es así que cualquier simetría continua de la acción S tiene asociada una carga conservada Q . La transformación $\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x)$ puede ser tanto una transformación entre los campos ϕ_a independiente de las coordenadas del espacio-tiempo como una transformación de los campos que es consecuencia de la transformación en las coordenadas del espacio-tiempo. En el primer caso la simetría es propia de la teoría de campo y se conoce como simetría interna, en el segundo caso la simetría es propia del espacio-tiempo y se conoce como simetría externa.

Una de las simetrías externas es la simetría de traslaciones espacio-temporales $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ del espacio de Minkowski. Ante estas transformaciones, los campos $\phi_a(x)$ y el Lagrangiano \mathcal{L} cambian como

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x + \epsilon) = \phi_a(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi_a(x), \quad \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}, \quad (2.208)$$

por lo que $X_a = \epsilon^\mu \partial_\mu \phi_a$, $F^\mu = \epsilon^\mu \mathcal{L}$ y la corriente de Noether j^μ (2.206) es

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \epsilon^\nu \partial_\nu \phi_a - \epsilon^\mu \mathcal{L}, \quad (2.209)$$

que implica una corriente conservada $T^\mu{}_\nu$ para cada ϵ^ν independiente

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0, \quad T^\mu{}_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}. \quad (2.210)$$

Este tensor $T^\mu{}_\nu$ es el tensor de energía-momento; sus cargas conservadas son la energía E y el momento \mathbf{P} de los campos ϕ_a

$$E = \int d^3x T^0{}_0 = \int d^3x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_a)} \partial_0 \phi_a - \mathcal{L} \right), \quad (2.211)$$

$$\mathbf{P} = \int d^3x T^0{}_i = \int d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_a)} \nabla \phi_a; \quad (2.212)$$

de las definiciones del momento canónico π_a , de la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} y del Hamiltoniano H , se comprueba que la energía E y el Hamiltoniano H coinciden.

Una simetría interna es, por ejemplo, una transformación $U(1)$ global $e^{i\theta}$, también llamada transformación de fase global, aplicada sobre el campo escalar complejo ó el campo de Dirac, en sus respectivas acciones. En el caso del campo escalar complejo $\phi(x)$ esta transformación es

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\theta} \phi(x), \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi'^*(x) = e^{-i\theta} \phi^*(x), \quad (2.213)$$

bajo la cual, evidentemente, el Lagrangiano (2.189) es invariante $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ con lo que $F^\mu = 0$, y la corriente de Noether j^μ es

$$j^\mu = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi); \quad (2.214)$$

la carga conservada Q de esta corriente es

$$Q = \int d^3x j^0 = i \int d^3x (\phi \partial^0 \phi^* - \phi^* \partial^0 \phi). \quad (2.215)$$

En el caso del campo de Dirac $\psi(x)$ esta transformación es

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\theta} \bar{\psi}(x), \quad (2.216)$$

bajo la cual el Lagrangiano de Dirac (2.192) es invariante $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ con lo que $F^\mu = 0$, y la corriente de Noether j^μ es

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi; \quad (2.217)$$

la carga conservada Q de esta corriente es

$$Q = \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \int d^3x \psi^\dagger \psi. \quad (2.218)$$

Una transformación $U(1)$ local, o de fase local, es una en la que la fase θ depende de las coordenadas del espacio-tiempo $\theta = \theta(x)$, con lo cual el factor que implementa la transformación en los campos es $e^{i\theta(x)}$. A diferencia de la transformación de fase global, ésta no es una simetría de los Lagrangianos del campo escalar complejo (2.189) ni de Dirac (2.192) porque, en este caso, la derivada ∂_μ no conmuta con el factor $e^{i\theta(x)}$. Es posible, sin embargo, construir Lagrangianos que posean simetría local, a partir de los que tienen simetría global, a través de la introducción de un campo de norma. La relevancia física de este procedimiento radica en que da lugar, naturalmente, a términos de interacción entre el campo del Lagrangiano original y el campo de norma que, para grupos de simetría particulares, describen adecuadamente las interacciones fundamentales en la naturaleza. La prescripción para llevar a cabo esta promoción de simetría global a simetría local para la introducción de interacciones de norma es conocida como principio de norma y se revisa en el siguiente apartado.

Principio de norma

La obtención de un Lagrangiano con simetría local a partir de uno con simetría global se consigue reemplazando la derivada parcial ∂_μ por el operador derivada covariante D_μ que es, esencialmente, la suma de la derivada parcial y un campo de norma. Para el caso $U(1)$ este reemplazo es

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (2.219)$$

de manera que cuando el campo cambia con $e^{iq\theta(x)}$, el campo de norma A_μ cambia con la transformación de norma $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta$.

En el caso del campo escalar complejo $\phi(x)$, las transformaciones conjuntas son

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{iq\theta(x)}\phi, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-iq\theta(x)}\phi^*, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta, \quad (2.220)$$

con esto, se tiene que el factor $D_\mu\phi$ y su complejo conjugado $D_\mu^*\phi^*$ transforman de la misma manera que ϕ y ϕ^* , respectivamente

$$D'_\mu\phi' = e^{iq\theta(x)}D_\mu\phi, \quad D'^*_\mu\phi'^* = e^{-iq\theta(x)}D^*_\mu\phi^*. \quad (2.221)$$

El término cinético del Lagrangiano del campo complejo (2.189) será entonces reemplazado por

$$(\partial^\mu\phi)^*(\partial_\mu\phi) \rightarrow (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi), \quad (2.222)$$

que es un término invariante de fase local, como consecuencia de (2.221). Al desarrollar este término, se ve que está compuesto por el término cinético $(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi)$ del Lagrangiano libre y por otros que incluyen productos entre ϕ , $\partial_\mu\phi$ y A_μ , los cuales representan interacciones entre ellos. Este acoplamiento que surge a través de la derivada covariante es llamado acoplamiento mínimo. Así, el Lagrangiano del campo escalar complejo ϕ acoplado mínimamente al campo de norma A_μ es

$$\mathcal{L} = (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2.223)$$

donde se ha incluido al término cinético del campo A_μ . La teoría descrita por el Lagrangiano (2.223) se conoce como electrodinámica escalar.

En el caso del campo de Dirac $\psi(x)$, las transformaciones conjuntas son

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\theta(x)}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-iq\theta(x)}\bar{\psi}, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta, \quad (2.224)$$

con lo que el factor $D_\mu\psi(x)$ transforma como

$$D'_\mu\psi' = e^{iq\theta(x)}D_\mu\psi. \quad (2.225)$$

Así, el Lagrangiano de Dirac acoplado mínimamente al campo de norma A_μ es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}; \quad (2.226)$$

la teoría descrita por este Lagrangiano se conoce como electrodinámica espinorial.

En el caso $U(1)$, el principio de norma conecta tres conceptos que previamente estaban desconectados: la invarianza de fase de la función de onda $\phi(x)$ en mecánica cuántica (expresado aquí como un campo clásico); la invarianza de norma de la electrodinámica clásica; y la fuerza de Lorentz, que se obtiene implementando la sustitución (2.219) en términos del momento como $p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu$ sobre el Hamiltoniano de una partícula libre.

Este principio se puede aplicar en otros Lagrangianos y/o con otros grupos de simetría más allá del $U(1)$. La extensión a grupos de simetría no-abelianos como el $SU(2)$ y $SU(3)$ da lugar a teorías con interacciones de norma tipo Yang-Mills como se ilustra enseguida. El Lagrangiano de N campos fermiónicos f_j libres, todos de masa m es

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \bar{f}_j (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) f_j = \bar{f} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) f, \quad (2.227)$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, $\bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$. Puesto que este Lagrangiano posee simetría $SU(N)$ global, bajo la cual $f \rightarrow f' = e^{-i\theta^a T^a} f$ y $\bar{f} \rightarrow \bar{f}' = e^{i\theta^a T^a} \bar{f}$ donde T^a son los generadores del grupo, es posible promover ésta a una simetría local con la introducción de un campo de norma. La sustitución del principio de norma, en este caso, es

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \mathbb{1} \partial_\mu + ig A_\mu, \quad A_\mu = A_\mu^a T^a, \quad (2.228)$$

donde ahora A_μ es un vector que toma valores en el grupo $SU(N)$. Las transformaciones conjuntas son

$$f \rightarrow f' = U f, \quad \bar{f} \rightarrow \bar{f}' = U^{-1} \bar{f}, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}, \quad (2.229)$$

donde $U = U(x) = e^{-i\theta^a(x) T^a}$; con esto, el factor $D_\mu f$ transforma como

$$D'_\mu f' = U D_\mu f. \quad (2.230)$$

El Lagrangiano invariante de norma $SU(N)$ es

$$\mathcal{L} = \bar{f} [i\gamma^\mu D_\mu - \mathbb{1} m] f - \frac{1}{2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad (2.231)$$

donde el último es el término cinético del campo $A_\mu = A_\mu^a T^a$, cuyo tensor de esfuerzos es $F_{\mu\nu} = (-i/g)[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^a T^a$, y contiene interacciones de tercer y cuarto orden entre los campos A_μ^a .

Así, la promoción de una simetría global de un Lagrangiano hacia una simetría local se realizará a través del reemplazo de la derivada parcial por una derivada covariante que incluye un campo de norma y da lugar, por esto, a interacciones de acoplamiento mínimo entre los campos del Lagrangiano original y el campo de norma introducido en la

derivada covariante. Cabe señalar que un Lagrangiano puede tener, desde luego, términos de interacción que no son de acoplamiento mínimo, es decir, que no provienen de la derivada covariante; éstos son llamados acoplamientos no-mínimos. Sin embargo, las interacciones de acoplamiento mínimo con campos de norma han resultado ser acertadas para describir las interacciones de norma fundamentales del SM.

Habiendo revisado los aspectos básicos de la teoría clásica de campos y el principio de norma para introducir interacciones de norma entre ellos, se procede a la exposición de la teoría que impone los principios de la mecánica cuántica sobre los propios campos, esto es, la teoría cuántica de campos.

2.1.7. Teoría cuántica de campos

La teoría cuántica de campos (QFT) es la teoría que integra de manera congruente a la mecánica cuántica con la teoría especial de la relatividad. En este contexto las partículas son interpretadas como la mínima manifestación de un campo que las representa. En el esquema de cuantización canónica, la cuantización de los campos se realiza promoviendo los campos clásicos a campos-operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert de estados cuánticos e imponiendo relaciones de conmutación (para campos de espín entero, i.e. bosónicos) ó anticonmutación (para campos de espín semientero, i.e. fermiónicos) entre el campo y su momento canónico conjugado a tiempos iguales. Las relaciones de conmutación/anticonmutación que se imponen surgen de la promoción del bracket de Poisson entre los campos clásicos y sus momentos canónicos conjugados a tiempos iguales hacia el conmutador entre los campos-operadores y los momentos-operadores a través de la sustitución

$$\{ \quad , \quad \}_{PB} \rightarrow -i[\quad , \quad]. \quad (2.232)$$

Siempre que se trate de teorías de campo libre, los campos-operadores estarán formados como combinaciones lineales de operadores cuyo efecto es incrementar/disminuir las variables físicas de un estado; el incremento/disminución de estas variables físicas del estado corresponde exactamente al que resultaría de incrementar/disminuir el número de partículas del estado y, por esto, estos operadores son llamados operadores de creación/anihilación de partículas. Cuando existen restricciones en la dinámica del campo, la cuantización canónica se lleva a cabo de acuerdo al procedimiento desarrollado por Dirac en [51], en el que un nuevo tipo de bracket, conocido como el bracket de Dirac $\{ \quad , \quad \}_{DB}$, es el que se promueve hacia el conmutador $-i[\quad , \quad]$; los detalles de este procedimiento se encuentran en [51, 52]. En los siguientes apartados se muestran los elementos básicos de la cuantización canónica de los campos escalar real y escalar complejo, ambos considerados como campos libres, es decir, sin interacciones con otros campos ni autointeracciones. El campo de Dirac es un sistema con restricciones, por lo que el estudio de su cuantización debe realizarse siguiendo el método de Dirac [51]; los detalles de este procedimiento pueden consultarse en [52].

Campo escalar real

El campo-operador escalar real $\phi(x)$ de Klein-Gordon, correspondiente a (2.188), es

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}, \quad (2.233)$$

donde ahora $a_{\mathbf{p}}$ y sus hermíticos conjugados $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ son operadores de aniquilación y de creación de partículas de momento \mathbf{p} , respectivamente. El operador momento canónico conjugado $\pi(x)$ es

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi = -i \int \frac{d^3p \sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}. \quad (2.234)$$

Las relaciones de conmutación que se imponen son

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = 0, \quad [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = 0, \quad (2.235)$$

que implican las siguientes relaciones de conmutación entre los operadores $a_{\mathbf{p}}$ y $a_{\mathbf{p}}^\dagger$

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = 0, \quad [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0. \quad (2.236)$$

Los operadores Hamiltoniano H (2.211), momento \mathbf{P} (2.212) y número de partículas N son

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x : \pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \quad (2.237)$$

$$\mathbf{P} = \int d^3x : \pi \nabla \phi := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \quad (2.238)$$

$$N = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \quad (2.239)$$

estos conmutan entre sí

$$[H, P^i] = 0, \quad [H, N] = 0, \quad [P^i, P^j] = 0, \quad [P^i, N] = 0, \quad (2.240)$$

y forman un CSCO, cuyos eigenestados comunes, denotados por $|E, \mathbf{p}, n\rangle$, cumplen

$$H |E, \mathbf{p}, n\rangle = E |E, \mathbf{p}, n\rangle, \quad \mathbf{P} |E, \mathbf{p}, n\rangle = \mathbf{p} |E, \mathbf{p}, n\rangle, \quad N |E, \mathbf{p}, n\rangle = n |E, \mathbf{p}, n\rangle. \quad (2.241)$$

El estado vacío, indicado por $|0\rangle$, se define a través de la relación $a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0$ para todo \mathbf{p} , con lo que cumple $H |0\rangle = 0 |0\rangle$, $\mathbf{P} |0\rangle = 0 |0\rangle$ y $N |0\rangle = 0 |0\rangle$. Los estados definidos como $|\mathbf{p}\rangle \equiv (2E_{\mathbf{p}})^{1/2} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ tienen eigenvalores

$$H |\mathbf{p}\rangle = E_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle, \quad \mathbf{P} |\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle, \quad N |\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p}\rangle, \quad (2.242)$$

y representan, por lo tanto, a estados de una partícula $|\mathbf{p}\rangle = |E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}, 1\rangle$. Los estados de la forma

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \equiv \prod_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_n} (2E_{\mathbf{p}'})^{1/2} a_{\mathbf{p}'}^\dagger |0\rangle, \quad (2.243)$$

tiene eigenvalores

$$H |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = \left(\sum_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_n} E_{\mathbf{p}'} \right) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle, \quad (2.244)$$

$$P |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = \left(\sum_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_n} \mathbf{p}' \right) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle, \quad (2.245)$$

$$N |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = n |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle, \quad (2.246)$$

y representan, por lo tanto, a estados de n partículas $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = |\sum E_{\mathbf{p}_i}, \sum \mathbf{p}_i, n\rangle$.

Campo escalar complejo

Los campos-operadores complejos $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$ correspondientes a (2.191), son

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \quad (2.247)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}, \quad (2.248)$$

donde ahora $a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}$ y sus hermíticos conjugados $a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{p}}^\dagger$ son operadores de aniquilación y creación de partículas de momento \mathbf{p} , de las especies a y b , respectivamente. Los operadores momento canónico conjugado son

$$\pi_\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi^\dagger = i \int \frac{d^3p \sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} - b_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}, \quad (2.249)$$

$$\pi_{\phi^\dagger}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\dagger)} = \partial^0 \phi = -i \int \frac{d^3p \sqrt{E_{\mathbf{p}}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}. \quad (2.250)$$

Usando $\phi_1 \equiv \phi$, $\phi_2 \equiv \phi^\dagger$, $\pi_1 \equiv \pi_\phi$ y $\pi_2 \equiv \pi_{\phi^\dagger}$, las relaciones de conmutación que se imponen son

$$[\phi_i(t, \mathbf{x}), \pi_j(t, \mathbf{y})] = i \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi_i(t, \mathbf{x}), \phi_j(t, \mathbf{y})] = 0, \quad [\pi_i(t, \mathbf{x}), \pi_j(t, \mathbf{y})] = 0, \quad (2.251)$$

que implican las siguientes relaciones de conmutación entre los operadores $a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger$ y $b_{\mathbf{p}}^\dagger$

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (2.252)$$

mientras que cualquier otra relación de conmutación independiente de estas se anula. Los operadores Hamiltoniano H (2.211), momento \mathbf{P} (2.212), carga $U(1)$ Q (2.215), número de partículas N_a y número de partículas N_b son

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x : \pi_\phi \pi_{\phi^\dagger} + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^\dagger \phi := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \right), \quad (2.253)$$

$$\mathbf{P} = \int d^3x : \pi_\phi \nabla \phi + (\nabla \phi^\dagger) \pi_{\phi^\dagger} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \right), \quad (2.254)$$

$$Q = i \int d^3x : \phi^\dagger \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^\dagger := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \right), \quad (2.255)$$

$$N_a = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \quad N_b = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}, \quad (2.256)$$

éstos conmutan entre sí

$$[H, P^i] = 0, \quad [H, Q] = 0, \quad [H, N_a] = 0, \quad [H, N_b] = 0, \quad [P^i, P^j] = 0, \quad [P^i, Q] = 0, \quad (2.257)$$

$$[P^i, N_a] = 0, \quad [P^i, N_b] = 0, \quad [Q, N_a] = 0, \quad [Q, N_b] = 0, \quad [N_a, N_b] = 0, \quad (2.258)$$

y forman un CSCO, cuyos eigenestados comunes, denotados por $|E, \mathbf{p}, (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle$, cumplen

$$H |E, \mathbf{p}, (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle = E |E, \mathbf{p}, (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle, \quad (2.259)$$

$$\mathbf{P} |E, \mathbf{p}, (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle = \mathbf{p} |E, \mathbf{p}, (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle, \quad (2.260)$$

$$Q |E, \mathbf{p}, (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle = (n_a - n_b) |E, \mathbf{p}, (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle, \quad (2.261)$$

$$N_a |E, \mathbf{p}, (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle = n_a |E, \mathbf{p}, (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle, \quad (2.262)$$

$$N_b |E, \mathbf{p}, (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle = n_b |E, \mathbf{p}, (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle. \quad (2.263)$$

El estado vacío, indicado por $|0\rangle$, se define a través de las relaciones $a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0$ y $b_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0$ para todo \mathbf{p} , con lo que cumple $H |0\rangle = 0 |0\rangle$, $\mathbf{P} |0\rangle = 0 |0\rangle$, $Q |0\rangle = 0 |0\rangle$, $N_a |0\rangle = 0 |0\rangle$ y $N_b |0\rangle = 0 |0\rangle$. Los estados definidos como $|\mathbf{p}\rangle_a \equiv (2E_{\mathbf{p}})^{1/2} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ y $|\mathbf{p}\rangle_b \equiv (2E_{\mathbf{p}})^{1/2} b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ tienen eigenvalores

$$H |\mathbf{p}\rangle_a = E_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle_a, \quad H |\mathbf{p}\rangle_b = E_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle_b, \quad (2.264)$$

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}\rangle_a = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle_a, \quad \mathbf{P} |\mathbf{p}\rangle_b = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle_b, \quad (2.265)$$

$$Q |\mathbf{p}\rangle_a = +1 |\mathbf{p}\rangle_a, \quad Q |\mathbf{p}\rangle_b = -1 |\mathbf{p}\rangle_b, \quad (2.266)$$

$$N_a |\mathbf{p}\rangle_a = +1 |\mathbf{p}\rangle_a, \quad N_a |\mathbf{p}\rangle_b = 0 |\mathbf{p}\rangle_b, \quad (2.267)$$

$$N_b |\mathbf{p}\rangle_a = 0 |\mathbf{p}\rangle_a, \quad N_b |\mathbf{p}\rangle_b = +1 |\mathbf{p}\rangle_b, \quad (2.268)$$

y representan, por lo tanto, a estados de una partícula $|\mathbf{p}\rangle_a = |E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}, +1, 1, 0\rangle$ y $|\mathbf{p}\rangle_b = |E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}, -1, 0, 1\rangle$, que tienen la misma energía $E_{\mathbf{p}}$ y momento \mathbf{p} , pero eigenvalor de carga Q

opuesto; estos son las partículas y sus antipartículas correspondientes. Los estados de la forma

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle \equiv \prod_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_{n_a}} (2E_{\mathbf{p}'})^{1/2} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \prod_{\mathbf{q}'=\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_{n_b}} (2E_{\mathbf{q}'})^{1/2} b_{\mathbf{q}'}^\dagger |0\rangle \quad (2.269)$$

tiene eigenvalores

$$H |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle = \left(\sum_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_{n_a}} E_{\mathbf{p}'} + \sum_{\mathbf{q}'=\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_{n_b}} E_{\mathbf{q}'} \right) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle, \quad (2.270)$$

$$P |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle = \left(\sum_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_{n_a}} \mathbf{p}' + \sum_{\mathbf{q}'=\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_{n_b}} \mathbf{q}' \right) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle, \quad (2.271)$$

$$Q |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle = (n_a - n_b) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle, \quad (2.272)$$

$$N_a |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle = n_a |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle, \quad (2.273)$$

$$N_b |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle = n_b |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle, \quad (2.274)$$

y representan, por lo tanto, a estados de n_a partículas de la especie a y n_b partículas de la especie b $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_a}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\rangle = |\sum(E_{\mathbf{p}_i} + E_{\mathbf{q}_i}), \sum(\mathbf{p}_i + \mathbf{q}_i), (n_a - n_b), n_a, n_b\rangle$.

Los campos cuánticos libres son los ejemplos más sencillos de teorías cuánticas de campo. Sin embargo, el mundo físico está compuesto de diferentes tipos de campos/partículas y los fenómenos que se observan en él surgen, en su mayoría, de interacciones entre algunos de estos distintos tipos de campos/partículas. Para describir estos fenómenos a nivel cuántico es necesario desarrollar teorías cuánticas de campos con interacciones. En el siguiente apartado se expone brevemente la forma en la que se estudian las teorías cuánticas de campos interactuantes.

Campos interactuantes

Las ecuaciones dinámicas de los campos clásicos libres son ecuaciones diferenciales lineales. Debido a esto, es relativamente sencillo encontrar soluciones y es posible, gracias al principio de superposición, construir la solución general como una combinación lineal de todas ellas, p. ej. (2.188). Al realizar el proceso de cuantización canónica, el campo clásico es promovido hacia un campo-operador y su solución general es una combinación lineal de soluciones donde, ahora, los coeficientes pasan a ser operadores de creación y aniquilación de partículas. Las teorías de campos interactuantes, en cambio, son teorías de campo cuyas ecuaciones dinámicas son no-lineales ó, equivalentemente, cuyos Lagrangianos contienen términos que son productos de tres o más campos. El hecho de tener ecuaciones

no-lineales dificulta la búsqueda de soluciones y, más aún, el principio de superposición deja de ser válido. Por lo anterior, es prácticamente imposible encontrar una solución general y, como consecuencia, promoverla hacia un campo-operador cuántico escrito en términos de operadores de creación y aniquilación, y con éstos determinar el espectro de estados de la teoría cuántica. Existe, sin embargo, una forma de estudiar a las teorías cuánticas de campos interactuantes para el cálculo de amplitudes de procesos y obtener resultados sensibles cuando la intensidad de la interacción es pequeña; esta forma es utilizando el tratamiento de teoría de perturbaciones. A continuación se esbozan los pasos clave de este desarrollo que concluye, como bien es conocido, en el método de diagramas y reglas de Feynman para el cálculo de amplitudes de procesos.

El Lagrangiano que describe a una teoría con interacciones puede ser escrito como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$, donde \mathcal{L}_0 es un Lagrangiano libre y \mathcal{L}_{int} son términos que contienen el producto de tres o más campos ó derivadas de éstos, que son los que dan lugar a las interacciones. En términos del Hamiltoniano, esta separación es

$$H = H_0 + H_{int}; \quad (2.275)$$

que por ejemplo, para el caso en el que \mathcal{L}_{int} no depende de derivadas de los campos se tiene $H_{int} = - \int d^3x \mathcal{L}_{int}$. Un ejemplo ilustrativo es la teoría de un campo escalar real con término de interacción proporcional a ϕ^4 , cuyo Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (2.276)$$

y su Hamiltoniano de interacción es

$$H_{int} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (2.277)$$

El tratamiento perturbativo de las interacciones para el cálculo de amplitudes de procesos es posible siempre que la constante de acoplamiento λ contenida en H_{int} sea $\lambda \ll 1$, y se aborda de la siguiente manera. Primeramente se divide al proceso en tres etapas: en la etapa inicial se asume que las partículas están separadas por una distancia muy grande, por lo que las interacciones entre ellas son despreciables y el estado del sistema está descrito por un vector $|a_i\rangle$ de la teoría libre; en la etapa intermedia las partículas se han acercado y las interacciones entre ellas adquieren importancia, estas interacciones modifican el estado inicial; en la etapa final las partículas resultado de las interacciones se separan por una distancia muy grande por lo que las interacciones entre ellas vuelven a ser despreciables y el estado del sistema está descrito, ahora, por un vector $|a_f\rangle$ de la teoría libre. El efecto de las interacciones que suceden en la etapa intermedia se introduce a través de un operador unitario que es llamado la matriz S ; así, el estado final del sistema será $|a_f\rangle = S |a_i\rangle$. La amplitud de que, a partir de un estado inicial $|a_i\rangle$ se obtenga, después de la interacción, un estado final particular $|b\rangle$ es

$$\langle b|a_f\rangle = \langle b|S|a_i\rangle. \quad (2.278)$$

Incluso en teorías con interacciones existe una probabilidad no nula de que el estado final sea el mismo que el inicial $|a_f\rangle = |a_i\rangle$, lo que significa que las partículas no interactuaron. Para separar la amplitud propia de este tipo de procesos de la amplitud propia de los procesos en los que sí hubo interacciones es conveniente escribir a la matriz S como $S = 1 + iT$, donde T es la matriz relacionada con los procesos en los que $|a_f\rangle \neq |a_i\rangle$. La amplitud de un proceso es el elemento básico para calcular cantidades medibles en el experimento, p. ej. secciones eficaces $\sigma = \int d\sigma$ ó tasas de decaimiento $\Gamma = \int d\Gamma$. El procedimiento para calcular amplitudes se resume a continuación.

El cálculo de la amplitud $\langle b|S|a_i\rangle$ comienza con el uso de la fórmula de reducción LSZ [53]. Por simplicidad se expondrá el procedimiento para el caso de una teoría de un campo escalar real $\phi(x)$. En este caso el estado inicial está descrito por un vector $|\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m\rangle$ de la teoría libre; la amplitud de que, después de la interacción, se obtenga un estado final $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$ es $\langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n|S|\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m\rangle$. La fórmula de reducción LSZ, en este caso, establece

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \int d^4x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_{j=1}^m \int d^4y_j e^{-ik_j \cdot y_j} \langle \Omega|T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\phi(y_1) \cdots \phi(y_m)\}|\Omega\rangle \\ & \underset{\substack{p_i^0 \rightarrow E_{\mathbf{p}_i} \\ k_j^0 \rightarrow E_{\mathbf{k}_j}}}{\sim} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z}i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z}i}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n|S|\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m\rangle, \end{aligned} \quad (2.279)$$

donde $|\Omega\rangle$ es el estado vacío de la teoría interactuante y $T\{ \}$ es el operador de ordenamiento temporal, definido como

$$T\{\phi(y)\phi(x)\} = \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) + \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y), \quad (2.280)$$

donde $\theta(x^0)$ es la función escalón: $\theta(x^0) = 1$ si $x^0 > 0$ y $\theta(x^0) = 0$ si $x^0 < 0$. Esta fórmula muestra que la amplitud $\langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n|S|\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m\rangle$ es esencialmente el residuo de los polos de la transformada de Fourier de la función de correlación de $n + m$ puntos $\langle \Omega|T\{\phi(x_1) \cdots \phi(y_m)\}|\Omega\rangle$ cuando los momentos están en la capa de masa; el cálculo de la amplitud se resume, entonces, al cálculo de las funciones de correlación.

Para calcular las funciones de correlación $\langle \Omega|T\{\phi(x_1) \cdots \phi(y_m)\}|\Omega\rangle$ es necesario reexpresarlas en términos de campos libres y en términos del vacío de la teoría libre. Esta reexpresión conduce a la relación [40]

$$\langle \Omega|T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\}|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|T\{\phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \exp[-i \int d^4x \mathcal{H}_I]\} |0\rangle}{\langle 0|T\{\exp[-i \int d^4x \mathcal{H}_I]\} |0\rangle}, \quad (2.281)$$

donde $|0\rangle$ es el vacío de la teoría libre y $\phi_I(x)$ es el campo en la imagen de interacción, esto es, el campo que evoluciona en el tiempo con el Hamiltoniano libre H_0

$$\phi_I(t, \mathbf{x}) = e^{iH_0(t-t_0)}\phi_I(t_0, \mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)}, \quad (2.282)$$

y, por esto, su dinámica es la de un campo libre. Este campo $\phi_I(x)$ está relacionado con el campo $\phi(x)$ a través de

$$\phi(t, \mathbf{x}) = U^\dagger(t, t_0)\phi_I(t, \mathbf{x})U(t, t_0), \quad (2.283)$$

donde el operador $U(t, t_0)$ es

$$U(t, t_0) = T \left\{ \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right] \right\} \quad (2.284)$$

y $H_I(t)$ es el Hamiltoniano de interacción H_{int} en la imagen de interacción

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (2.285)$$

El miembro derecho de la expresión (2.281) puede ser calculado desarrollando la función exponencial en serie de potencias de $\int d^4x \mathcal{H}_I$ siempre que la constante de acoplamiento λ sea $\lambda \ll 1$, con lo que se obtendrán términos que son valores de expectación en el vacío de la teoría libre, del ordenamiento temporal de productos de campos libres $\phi_I(x)$. Estos valores de expectación en el vacío son calculados expresando a los campos $\phi_I(x)$ en términos de los operadores de creación y aniquilación de partículas $a_{\mathbf{p}}^\dagger$, $a_{\mathbf{p}}$ y utilizando sus relaciones de conmutación. De esta manera se puede realizar el cálculo de las funciones de correlación $\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \cdots \phi(y_m)\} | \Omega \rangle$ hasta el orden deseado en g . El cálculo de valores de expectación en el vacío de productos que incluyen más de dos campos se torna laborioso; sin embargo, es posible reducirlo sólo al cálculo de valores de expectación en el vacío de productos de únicamente dos campos como se explica a continuación.

El propagador de Feynman se define como el valor de expectación en el vacío de la teoría libre, del ordenamiento temporal del producto de los campos $\phi_I(x)$ y $\phi_I(y)$

$$\langle 0 | T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\} | 0 \rangle. \quad (2.286)$$

Por su parte, el ordenamiento temporal $T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\}$ puede ser reescrito como

$$T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\} =: \phi_I(x)\phi_I(y) : + D(x-y), \quad (2.287)$$

donde $:$ es el operador de ordenamiento normal de los campos, cuya acción sobre su argumento es colocar a todos los operadores de aniquilación a la derecha de los operadores de creación y donde $D(x-y)$ se define como

$$D(x-y) = \theta(x^0 - y^0)[\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)] + \theta(y^0 - x^0)[\phi_I^+(y), \phi_I^-(x)], \quad (2.288)$$

expresión en la que $\phi_I^+(x)$ denota el término del campo $\phi_I(x)$ que contiene al operador de aniquilación y $\phi_I^-(x)$ denota el término que contiene al operador de creación. Puesto que el valor de expectación en el vacío de cualquier ordenamiento normal es nulo, el valor de expectación en el vacío de (2.287), i.e. el propagador de Feynman, es entonces

$$\langle 0 | T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\} | 0 \rangle = D(x-y), \quad (2.289)$$

que puede ser expresado como

$$D(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (2.290)$$

y cuya transformada de Fourier es, evidentemente

$$\tilde{D}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.291)$$

Como se mencionó en el párrafo anterior, la importancia del propagador de Feynman radica en que cualquier otro valor de expectación en el vacío del ordenamiento temporal de un producto de más de dos campos se puede escribir sólo en términos de él; ésto es posible gracias al teorema de Wick.

El teorema de Wick es una relación entre el ordenamiento temporal y el ordenamiento normal de un producto de campos, que generaliza a la expresión (2.287) para productos de más de dos campos. Puede ser expresado de manera general como

$$T\{\phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_m)\} =: \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_m) + \text{todas las contracciones posibles } :, \quad (2.292)$$

donde la contracción es una operación entre pares de campos definida como

$$\text{Contracción}\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\} = D(x_1 - x_2). \quad (2.293)$$

En particular, para un producto de tres campos establece

$$\begin{aligned} T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\} = & : \phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3) : + D(x_1 - x_2)\phi_I(x_3) \\ & + D(x_1 - x_3)\phi_I(x_2) + D(x_2 - x_3)\phi_I(x_1), \end{aligned} \quad (2.294)$$

mientras que para un producto de cuatro campos es

$$\begin{aligned} T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4)\} = & \\ & : \phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4) : + D(x_1 - x_2) : \phi_I(x_3)\phi_I(x_4) : \\ & + D(x_1 - x_3) : \phi_I(x_2)\phi_I(x_4) : + D(x_1 - x_4) : \phi_I(x_2)\phi_I(x_3) : \\ & + D(x_2 - x_3) : \phi_I(x_1)\phi_I(x_4) : + D(x_2 - x_4) : \phi_I(x_1)\phi_I(x_3) : \\ & + D(x_3 - x_4) : \phi_I(x_1)\phi_I(x_2) : + D(x_1 - x_2)D(x_3 - x_4) \\ & + D(x_1 - x_3)D(x_2 - x_4) + D(x_1 - x_4)D(x_2 - x_3). \end{aligned} \quad (2.295)$$

Debido a que el valor de expectación en el vacío de cualquier ordenamiento normal es nulo y a que $\langle 0|\phi_I(x)|0\rangle = 0$, se tiene

$$\langle 0|T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\}|0\rangle = 0, \quad (2.296)$$

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4)\}|0\rangle = & D(x_1 - x_3)D(x_2 - x_4) \\ & + D(x_1 - x_4)D(x_2 - x_3). \end{aligned} \quad (2.297)$$

En general, el valor de expectación en el vacío del ordenamiento temporal del producto de un número impar de campos siempre es nulo y el de un número par de campos siempre puede escribirse como una suma de productos de propagadores de Feynman.

Así, el cálculo de funciones de correlación se reduce, esencialmente, al cociente (2.281) entre sumas de productos de propagadores de Feynman y, de hecho, existe un método diagramático para determinarlas directamente. El cálculo de la función de correlación de dos puntos $\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$ en la teoría $\mathcal{H}_{int} = (\lambda/4!) \phi^4$ resulta conveniente para describirlo. De acuerdo a (2.281) se tiene

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[-i \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(z) \right] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp \left[-i \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(z) \right] \} | 0 \rangle}. \quad (2.298)$$

El numerador del miembro derecho es

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) + \phi_I(x) \phi_I(y) \left[-i \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(z) \right] + \dots \right\} | 0 \rangle \\ & = D(x-y) + 3 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) D(x-y) \int d^4 z D(z-x) D(z-y) \\ & \quad + 12 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D(x-z) D(y-z) D(z-z) + \dots \end{aligned} \quad (2.299)$$

Dicho método permite obtener esta expresión a partir de diagramas, llamados diagramas de Feynman, que representan a cada uno de los términos y a partir de un conjunto de reglas, llamadas reglas de Feynman, que asignan a cada parte componente de los diagramas un factor determinado, de manera que al multiplicar todos los factores se obtiene su contribución a (2.299). Los diagramas están compuestos de líneas, que representan a propagadores de Feynman de los campos; vértices, que representan las interacciones de la teoría; y puntos externos. Las líneas siempre terminan en vértices o en puntos externos. Este método establece, primeramente, que

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[-i \int d^4 z \mathcal{H}_I \right] \right\} | 0 \rangle = \left(\begin{array}{c} \text{suma de todos los diagramas} \\ \text{posibles con dos puntos} \\ \text{externos.} \end{array} \right), \quad (2.300)$$

y las reglas de Feynman, para cada parte componente de los diagramas, en esta teoría son

1. Para cada línea

$$x \bullet \text{-----} \bullet y = D(x-y). \quad (2.301)$$

2. Para cada vértice

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet z \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = -i\lambda \int d^4 z. \quad (2.302)$$

3. Para cada punto externo

$$x \bullet \text{-----} = 1. \quad (2.303)$$

4. El resultado debe ser dividido entre el factor de simetría propio de cada diagrama.

Así, de acuerdo a la regla (2.300), los diagramas que contribuyen son

$$\langle 0|T \left\{ \phi_I(x)\phi_I(y) \exp \left[-i \int d^4z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(z) \right] \right\} |0\rangle =$$

$$x \bullet \text{-----} \bullet y + \left(x \bullet \text{-----} \bullet y \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) + \left(x \bullet \text{-----} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \text{-----} \bullet y \right) + \dots \quad (2.304)$$

expresión gráfica de la que, utilizando las reglas de Feynman listadas anteriormente, se recupera la expresión (2.299). Por su parte, el denominador del miembro derecho de (2.298) es

$$\langle 0|T \left\{ 1 - i \int d^4z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(z) + \dots \right\} |0\rangle. \quad (2.305)$$

Los diagramas que contribuyen a esta expresión están formados por líneas internas y vértices, pero no están conectados a ninguno de los puntos externos x e y ; éste tipo de diagramas son conocidos como diagramas vacío-vacío. Los diagramas vacío-vacío aparecen también en algunos términos del numerador multiplicando a diagramas que sí están conectados a los puntos externos (éstos últimos son llamados diagramas conexos). El efecto neto que tiene el denominador es, precisamente, cancelar las contribuciones de los diagramas vacío-vacío en el numerador, con lo que las únicas contribuciones efectivas a las funciones de correlación vienen de los diagramas conexos y, por lo tanto, el cálculo de la función de correlación de dos puntos y , en general, de cualquier función de correlación de n puntos se simplifica de la siguiente manera

$$\langle \Omega|T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} |\Omega\rangle = \left(\begin{array}{c} \text{suma de todos los diagramas} \\ \text{conexos posibles con } n \text{ puntos} \\ \text{externos.} \end{array} \right). \quad (2.306)$$

Teniendo la función de correlación es necesario, ahora, introducirla en la fórmula de reducción LSZ (2.279), calcular su transformada de Fourier y tomar el límite en el que los momentos están en la capa de masa para obtener, finalmente, la amplitud del proceso. Sin embargo, es posible identificar diagramas y reglas, llamadas diagramas y reglas de Feynman en el espacio de momentos, heredadas de sus correspondientes en el espacio de posiciones, con las que se puede obtener directamente la amplitud del proceso, sin necesidad de pasar por todos estos pasos. La exposición de ellas se muestra en el siguiente apartado.

Reglas de Feynman

El procedimiento para el cálculo de amplitudes delineado anteriormente produce siempre una expresión de la forma

$$\langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m k_j \right) i\mathcal{M}_{fi}, \quad (2.307)$$

donde $\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m)$ es la amplitud invariante. Las reglas de Feynman en el espacio de momentos permiten calcular directamente la amplitud invariante \mathcal{M}_{fi} a través de los diagramas de Feynman en el espacio de momentos. Estos diagramas están compuestos de líneas internas, que representan propagadores de Feynman en el espacio de momentos; vértices, que representan las interacciones de la teoría; y líneas externas, que representan a los estados iniciales y finales. Cada línea tiene asociado un momento. La prescripción para su cálculo es

$$i\mathcal{M}_{fi} = \left(\begin{array}{l} \text{suma de todos los diagramas} \\ \text{conexos y amputados, con} \\ \text{estados inicial y final dados.} \end{array} \right), \quad (2.308)$$

Las reglas para asociar factores determinados a cada parte componente de los diagramas depende de la teoría particular de que se trate. Para el caso de la teoría $\mathcal{H}_{int} = (\lambda/4!)\phi^4$, las reglas son

1. Para cada línea interna

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} = \tilde{D}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.309)$$

2. Para cada vértice

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = -i\lambda. \quad (2.310)$$

3. Para cada línea externa

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \bullet \end{array} = 1. \quad (2.311)$$

4. Imponer la conservación del momento en cada vértice.
5. Integrar sobre los momentos l que no quedan determinados: $\int d^4l/(2\pi)^4$.
6. El resultado debe ser dividido entre el factor de simetría propio de cada diagrama.

De hecho, las tres últimas de estas reglas son totalmente generales, es decir, se aplican en cualquier teoría. Los momentos indeterminados a los que se refiere la regla 5 surgen cuando hay diagramas con lazos, en éstos el momento interno del lazo no queda fijo por conservación de momento y se debe integrar sobre él. La determinación de las reglas para las líneas internas y vértices de cualquier teoría se puede realizar haciendo uso de la acción tomada como funcional de los campos ϕ_a [43]

$$\Gamma_0[\phi_a] = \int d^4x \mathcal{L}[\phi_a], \quad (2.312)$$

de la siguiente manera. El factor asociado a los vértices es $i\Gamma_{0a_1 \dots a_n}^n(p_1, \dots, p_n)$, definido a través de la relación

$$i\Gamma_{0a_1 \dots a_n}^n(p_1, \dots, p_n)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n) = i(2\pi)^{4n} \frac{\delta^n \Gamma_0[\phi_a]}{\delta \phi_{a_1}(p_1) \dots \delta \phi_{a_n}(p_n)}, \quad (2.313)$$

donde la acción de la derivada funcional $\delta/\delta\phi_a(p_1)$ se define como en (2.180)

$$\frac{\delta \phi_a(p_1)}{\delta \phi_b(p_2)} = \delta_b^a \delta^{(4)}(p_1 - p_2); \quad (2.314)$$

este factor está determinado, básicamente, por los términos de interacción del Lagrangiano, omitiendo los factores de los campos. El factor asociado a las líneas internas es $D_{a_1 a_2}(p_1)$, definido como

$$D_{a_1 a_2}(p_1) = i \left[\Gamma_0^2(p_1, p_2) \right]_{a_1 a_2}^{-1} \Big|_{p_2 = -p_1}; \quad (2.315)$$

que es el propagador de Feynman y está determinado, básicamente, por el inverso del operador cinético del campo en el espacio de momentos. Finalmente las reglas para las líneas externas (iniciales y finales) asocian un espinor, vector ó tensor de polarización, correspondiente al campo y a la polarización del estado inicial/final que dicha línea representa.

Estos son, en esencia, los conceptos y elementos básicos sobre los que está construido el Modelo Estándar de las Partículas Elementales. En la siguiente sección se describe, brevemente, la forma en que estos elementos se ensamblan para edificar a esta teoría.

2.2. Modelo Estándar

El Modelo Estándar de las Partículas Elementales es la teoría cuántica de campos que describe a las partículas fundamentales que componen la materia y a las partículas mediadoras de tres de las cuatro interacciones conocidas de la naturaleza, a saber: la nuclear fuerte, la nuclear débil y la electromagnética. Los ingredientes que constituyen a este modelo son los siguientes: un conjunto de partículas de materia, un conjunto de bosones de norma y el bosón de Higgs. Estos ingredientes son acoplados de acuerdo al principio de

Fermiones		I	II	III	Q	Bosones	
$(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$	Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	8 gluones W^\pm, Z γ
$(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$	Leptones	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$	0 -1	(0, 0)	Higgs

Tabla 2.4: Partículas del Modelo Estándar. Tabla reproducida parcialmente de [54].

norma y de tal modo que el mecanismo de rompimiento espontáneo de simetría dote de masa a algunos de ellos.

Las partículas de materia son fermiones de espín-1/2, en la representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ del HLG, que se clasifican en quarks y leptones; los quarks experimentan la interacción nuclear fuerte y los leptones son neutros ante esta fuerza, mientras que tanto los primeros como los segundos experimentan las interacciones electromagnética y débil (ésta última sólo a través de sus componentes de quiralidad izquierda). Al mismo tiempo, éstos se agrupan en tres generaciones de acuerdo a su escala de masas, donde cada generación contiene un doblete de quarks y un doblete de leptones, como se muestra en la tabla (2.4). Las partículas de las generaciones II y III decaen hacia partículas de la generación I, y es por esto que la materia cotidiana está compuesta sólo de partículas pertenecientes a esta familia. Las interacciones fuerte, débil y electromagnética entre las partículas son introducidas a través del principio de norma con un grupo de simetría

$$SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y. \quad (2.316)$$

El grupo $SU(3)_c$ describe la interacción fuerte y da lugar a 8 bosones de norma, correspondientes a los 8 generadores de éste grupo; éstos bosones son llamados gluones. El grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, donde el subíndice L significa que la interacción de norma $SU(2)$ sólo actúa en las componentes de quiralidad izquierda de los quarks y leptones, describe a la interacción electrodébil y da lugar a 4 bosones de norma, correspondientes a los 4 generadores de éste grupo; éstos bosones son los W^\pm , Z y el fotón γ . Todos los bosones de norma tienen espín-1 y están en la representación $(1/2, 1/2)$ del HLG. El campo de Higgs es un campo escalar de espín-0, en la representación $(0, 0)$ del HLG que, a través del rompimiento espontáneo de la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ hacia la simetría $U(1)_Q$ del campo electromagnético

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q \quad (2.317)$$

por medio del mecanismo de Higgs, dota de masa a los fermiones y a los bosones W^\pm y Z , y da lugar al bosón de Higgs como remanente. En la tabla (2.4) se muestra el contenido de bosones.

El Modelo Estándar es la teoría física más completa, exacta y precisa que se ha desarrollado y verificado experimentalmente. Su construcción teórica sustancial se completó en la década de 1970 [33-38]; ésta incluía partículas que ya habían sido descubiertas y

predecía la existencia de otras más que, posteriormente, fueron todas encontradas, siendo la última el bosón de Higgs en el año 2012 [55]. Desde que se completó su construcción hasta el día de hoy, no se ha encontrado evidencia experimental concluyente, de fenómenos en el dominio de este modelo, que revele física más allá de él, hasta energías del orden de 13 TeV. Sin embargo, a pesar del éxito sin precedentes que ha tenido esta teoría, aún persisten interrogantes abiertas y fenómenos que no son entendidos o explicados por completo. En particular, un conjunto de evidencias observacionales astrofísicas parecen revelar la existencia de un nuevo tipo de materia que interactúa principalmente a través de la gravedad y su interacción electromagnética es nula o, al menos, de muy baja intensidad por lo cual se le ha llamado materia oscura. La búsqueda de la descripción de la naturaleza de la materia oscura es uno de los tópicos de investigación de frontera más abordados en la actualidad. En la siguiente sección se presenta una descripción breve de las evidencias que motivan la hipótesis de la materia oscura.

2.3. Materia oscura

La hipótesis de materia oscura está sustentada en evidencias observacionales astrofísicas a escala galáctica, intergaláctica y cosmológica, que revelan lo que serían sus efectos gravitacionales. En las referencias [56, 57] se describen éstas evidencias, que a continuación se resumen.

Escala galáctica. Existe una discrepancia entre las curvas de rotación, i.e. la velocidad rotacional como función del radio, que predicen las teorías de gravedad (la teoría de Newton y la teoría de relatividad general) y la que se ha medido en observaciones astronómicas, en galaxias espirales. De acuerdo a las teorías de gravedad, la velocidad rotacional $v(r)$ como función del radio r está dada por $v(r) = \sqrt{GM(r)/r}$, donde $M(r)$ es la masa de la galaxia hasta un radio r , que se obtiene de mediciones de luminosidad suponiendo una relación masa/luminosidad constante, así, para radios en los que se alcanza $M(r) \simeq \text{constante}$, la velocidad decrece como $1/\sqrt{r}$; sin embargo, las observaciones astronómicas muestran que la velocidad se mantiene prácticamente constante con el radio. Esta discrepancia desaparece si se asume que existe un halo de materia no-luminosa cuya masa crece como $M(r) \propto r$ y, por lo tanto su densidad va como $\rho(r) \propto 1/r^2$. En la figura (2.1) se muestran las curvas de rotación para la galaxia NGC6503, obtenida de la referencia [58].

Escala intergaláctica. Existe una discrepancia entre la masa del cúmulo de galaxias Coma obtenida de su análisis dinámico y la obtenida de mediciones de luminosidad. De acuerdo al teorema del virial, la velocidad cuadrática media a lo largo de la línea de visión $\langle v_s^2 \rangle$ está dada por $\langle v_s^2 \rangle = 5GM/3R$, donde R y M son el radio y la masa del cúmulo, respectivamente. El cálculo de M a través de esta ecuación devuelve el valor $M \simeq 4.5 \times 10^{13} M_\odot$ que, dividido entre su luminosidad $L = 8.5 \times 10^{10} L_\odot$ da una relación masa/luminosidad $\gamma \sim 500$; éste valor es dos órdenes de magnitud superior a la relación masa/luminosidad del vecindario solar. La discrepancia entre estos análisis desaparece si se

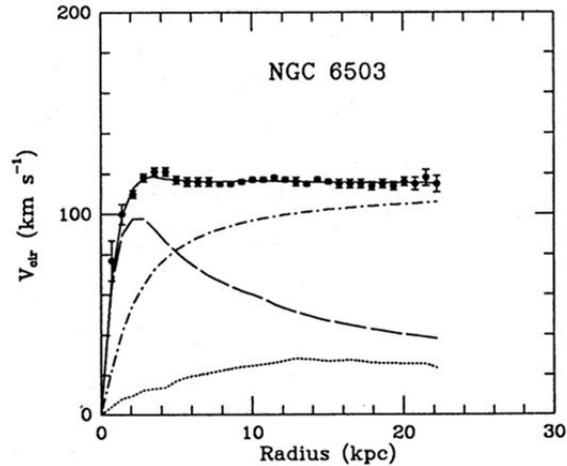


Figura 2.1: Curvas de rotación para la galaxia NGC6503. La línea con guiones representa a la materia luminosa, la línea con puntos al contenido de gas y la línea con guiones y puntos al halo de materia oscura. Al considerar las contribuciones de estos tres elementos la curva de rotación se ajusta a los valores medidos. Figura obtenida de la referencia [58]

asume que existe materia no-luminosa que compone la mayor parte de la masa del cúmulo Coma.

Escala intergaláctica. La teoría general de la relatividad establece que la distribución de materia determina la geometría del espacio-tiempo y, como consecuencia, la trayectoria de la luz. Esto implica que la luz emitida por una fuente y detectada por un observador aparecerá distorsionada, desde la perspectiva del observador, cuando un objeto lo suficientemente masivo pasa a través de la línea de visión observador-fuente; éste efecto se conoce como lente gravitacional. Si se supone que el halo de materia no-luminosa de nuestra galaxia está compuesto por objetos compactos masivos (MACHOs, acrónimo de Massive Compact Halo Objects) hechos de materia del Modelo Estándar como, por ejemplo, estrellas enanas blancas frías, enanas marrones ó agujeros negros, entonces debería haber muchos eventos de lente gravitacional de corta duración. Sin embargo, analizando la luz proveniente de estrellas fuera de nuestra galaxia se ha encontrado que éste número de eventos es muy bajo en comparación con lo que se esperaría si el halo de materia no-luminosa estuviera compuesto únicamente por MACHOs y, a lo más, éstos podrían dar cuenta sólo del 8 % del contenido de materia no-luminosa en el halo. Así, la conclusión es que la mayor parte de la materia en el halo de materia no-luminosa de nuestra galaxia debe estar distribuida de manera uniforme y no en objetos compactos.

Escala cosmológica. El modelo cosmológico ΛCDM es el modelo actualmente aceptado para describir la evolución del universo [57]. Este modelo está basado en la teoría general de la relatividad y en el principio cosmológico, que establece que el universo es homogéneo e

isotrópico a grandes escalas ($\gtrsim 100Mpc$). El principio cosmológico es introducido a través de la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker en las ecuaciones de Einstein y produce las ecuaciones de Friedman. En este modelo se considera que el universo está compuesto por los siguientes ingredientes: materia bariónica, radiación, neutrinos, materia oscura y energía oscura, ésta última en forma de una constante cosmológica. Las mediciones del fondo cósmico de radiación de microondas (CMB) realizadas por el satélite Planck [59] y sus antecesores así como la formación temprana de estructura en el universo pueden ser reproducidos y explicados si se considera que el universo está compuesto en un 26% aproximadamente por materia oscura.

Este conjunto de evidencias demuestran que la hipótesis de la materia oscura es ineludible y, para desentrañar su naturaleza, se han propuesto diferentes tipos de objetos como candidatos. Los candidatos deben, desde luego, cumplir con una serie de requisitos necesarios para ser considerados como tales; algunos de éstos requisitos son, por ejemplo: interactuar muy débilmente con la radiación electromagnética, ser estable a escalas cosmológicas de tiempo, reproducir la densidad obtenida de las mediciones del CMB, etc. Existe una propuesta reciente que plantea la descripción de DM como un campo en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ del HLG [60-64] y se ha encontrado que cumple con los requisitos para ser considerado como candidato [60-64]. Esta propuesta es llamada materia oscura tensorial y se aborda en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Materia oscura tensorial

Materia oscura es uno de los problemas más notables y enigmáticos de la física actual. Existe una gran variedad de candidatos, de muy diferentes naturalezas y propiedades, propuestos para su descripción fundamental ó efectiva: desde partículas como los axiones, cuya masa es del orden de $10^{-5}eV$, hasta agujeros negros primordiales, con masas de hasta $10^5 M_{\odot} \sim 10^{71}eV$ e, incluso, propuestas de modificación a las teorías de gravedad (MOND, MGR). En relación con esto, resulta particularmente llamativo que las propuestas de campos como candidatos a materia oscura pertenecen, por lo regular, a las mismas representaciones del grupo homogéneo de Lorentz presentes en el Modelo Estándar, esto es, a las representaciones escalar $(0, 0)$, espinorial $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ ó vectorial $(1/2, 1/2)$. En vista de lo anterior, resulta interesante explorar alternativas que vayan más allá de este paradigma. Materia oscura tensorial (TDM) es una propuesta que va en este sentido. TDM es la propuesta que plantea la descripción de DM como un campo cuántico en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ del HLG; ésta se desarrolla en un esquema de materia oscura escondida, bajo el cual TDM no tiene cargas del SM y las interacciones entre ambos sectores son del tipo $\text{singleteDM-singleteSM}$. En artículos recientes [60-64] se ha estudiado esta propuesta y se ha encontrado que cumple con los requisitos y está dentro de las cotas actuales para ser considerado como candidato a DM.

El presente capítulo es una revisión de la propuesta de materia oscura tensorial: desde su dinámica libre hasta el propio modelo de TDM y los resultados que se han obtenido. En la primer sección se reproduce el formalismo de primeros principios, de la referencia [42], para obtener la ecuación que dicta la dinámica libre para el campo de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ del HLG. En la segunda sección se describen los aspectos clásicos y cuánticos de éste campo, estudiados en las referencias [65, 66]. Finalmente, en la tercer sección se describe la propia propuesta de TDM, estudiada en [60-64], así como los resultados y las conclusiones a que se ha llegado.

3.1. Paridad y dinámica de los estados masivos

Como se mencionó en la subsección (2.1.7), la integración consistente de la mecánica cuántica y la teoría especial de la relatividad sólo es posible a través de la teoría cuántica de campos. No obstante, las ecuaciones que rigen la dinámica libre de los campos cuánticos son las mismas ecuaciones de la mecánica cuántica relativista, pero interpretadas para campos cuánticos, no ya para funciones de onda. Esta observación posibilita la búsqueda de ecuaciones de campo atendiendo sólo a los principios de la mecánica cuántica relativista, es decir, atendiendo sólo a los postulados de la mecánica cuántica y a la teoría especial de la relatividad, sin involucrar, en principio, lo concerniente a la teoría de campos. En la subsección (2.1.3) se revisaron las representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré propio ortócrono $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ que, como se mencionó, es convencionalmente aceptado como el grupo de simetrías de las partículas cuánticas relativistas libres, y en la subsección (2.1.5) se hizo énfasis en que las únicas restricciones que impone $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ sobre los estados masivos es que éstos se encuentren en la capa de masa $p^2 = m^2$ y que tengan momento angular j bien definido. La primera de éstas condiciones, en el espacio de configuraciones, significa que la dinámica de la función de onda $\Phi(x^\mu, j)$ de una partícula de espín j debe cumplir con la ecuación de Klein-Gordon, pero más allá de esto no hay nada en $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ que determine la dinámica propia de la función de onda $\Phi(x^\mu, j)$. En esa misma subsección se presentaron las ecuaciones dinámicas para las funciones de onda de partículas masivas de espines $j = 0$ en la representación $(0, 0)$, $j = 1/2$ en la representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ y $j = 1$ en la representación $(1/2, 1/2)$ sin otra justificación teórica fundamental más que el hecho de que estaban construidas con operadores en la misma representación que la función de onda y que sus dinámicas cumplen, también, la ecuación de Klein Gordon.

El grupo completo de simetrías del espacio de Minkowski es, sin embargo, el grupo de Poincaré $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{+\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\downarrow} \cup \mathbb{P}_{+\downarrow}$ que incluye a las simetrías discretas de paridad $T(\mathcal{P}, 0)$, inversión temporal $T(\mathcal{T}, 0)$ e inversión total $T(\mathcal{PT}, 0)$, no sólo su subgrupo propio ortócrono $\mathbb{P}_{+\uparrow}$. Como consecuencia, el grupo de simetrías del espacio de Hilbert \mathcal{H} de estados cuánticos es, también, el grupo de Poincaré \mathbb{P} completo; esta observación se enuncia enseguida como un lema.

Lema. Las simetrías de una partícula cuántica relativista libre son las simetrías del espacio-tiempo, en este caso del espacio de Minkowski. El grupo de simetrías del espacio de Hilbert \mathcal{H} de estados cuánticos que representan a una partícula libre es, entonces, el grupo de Poincaré $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{+\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\uparrow} \cup \mathbb{P}_{-\downarrow} \cup \mathbb{P}_{+\downarrow}$.

Un análisis y caracterización completos de los estados cuánticos de partícula libre debe incluir, por lo tanto, a las simetrías discretas $U(\mathcal{P}, 0)$, $U(\mathcal{T}, 0)$ y $U(\mathcal{PT}, 0)$. Esta observación es la premisa sustancial de la referencia [42], en la que, a partir de ella, se desarrolla un método general de primeros principios para deducir ecuaciones de onda propias de las funciones de onda $\Phi(x^\mu, j)$ de partículas masivas de espín j en cualquier representación del grupo homogéneo de Lorentz. En particular, para la representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ se

obtiene la ecuación de Dirac y para la representación $(1/2, 1/2)$ se obtiene la ecuación de Proca. Este formalismo revela, además, el origen de la simetría de norma en la simetría de paridad. El desarrollo que se presenta en esta sección reproduce los argumentos de las secciones II y III de dicha referencia. Primeramente se examina el papel de las simetrías discretas en el grupo de Poincaré, después se analizan las representaciones del grupo de Lorentz que son irreps de paridad y, finalmente, se construyen los estados masivos y se deducen las implicaciones dinámicas que naturalmente poseen.

3.1.1. Simetrías discretas en el grupo de Poincaré

Habiendo revisado el grupo de Poincaré propio ortócrono $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ en la subsección (2.1.3), la presente subsección se enfoca en el rol que juegan las simetrías discretas dentro de \mathbb{P} y sus implicaciones en los estados cuánticos del espacio de Hilbert \mathcal{H} . Las transformaciones discretas del grupo de Poincaré en el espacio de Minkowski son $T(\mathcal{P}, 0)$, $T(\mathcal{T}, 0)$ y $T(\mathcal{PT}, 0)$, implementadas por las matrices $\mathcal{P}^\mu{}_\nu$, $\mathcal{T}^\mu{}_\nu$ y $(\mathcal{PT})^\mu{}_\nu$, respectivamente, definidas como $\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$, $\mathcal{T}^\mu{}_\nu = \text{Diag}(-1, 1, 1, 1)$ y $(\mathcal{PT})^\mu{}_\nu = \text{Diag}(-1, -1, -1, -1)$. En este capítulo se utilizará el símbolo \mathcal{D} para representar genéricamente una transformación discreta, cualquiera de éstas, o sea $\mathcal{D} = \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}$. Las transformaciones discretas en el espacio de Hilbert \mathcal{H} son $U(\mathcal{P}, 0)$, $U(\mathcal{T}, 0)$ y $U(\mathcal{PT}, 0)$ que, por el teorema de Wigner [41, 44], pueden ser representadas como operadores lineales unitarios ó anti-lineales unitarios (anti-unitarios). Aplicando la regla de composición de \mathbb{P} (2.24) a $U(\mathcal{D}, 0)U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\mathcal{D}, 0)$ se obtienen las relaciones

$$U(\mathcal{D}, 0)(iJ^{\rho\sigma})U^{-1}(\mathcal{D}, 0) = i\mathcal{D}_\mu{}^\rho\mathcal{D}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

$$U(\mathcal{D}, 0)(iP^\rho)U^{-1}(\mathcal{D}, 0) = i\mathcal{D}_\mu{}^\rho P^\mu, \quad (3.2)$$

que son expresiones análogas a (2.59), pero ahora para las transformaciones discretas $U(\mathcal{D}, 0)$; aquí se han mantenido los factores i porque las transformaciones discretas pueden ser, en principio, antilineales. La componente temporal de (3.2), para cada una de las transformaciones discretas, es

$$U(\mathcal{P}, 0)(iH)U^{-1}(\mathcal{P}, 0) = iH, \quad (3.3)$$

$$U(\mathcal{T}, 0)(iH)U^{-1}(\mathcal{T}, 0) = -iH, \quad (3.4)$$

$$U(\mathcal{PT}, 0)(iH)U^{-1}(\mathcal{PT}, 0) = -iH. \quad (3.5)$$

Debido al signo menos en los miembros derechos de (3.4) y (3.5), la implementación de $U(\mathcal{T}, 0)$ y $U(\mathcal{PT}, 0)$ debe ser anti-lineal, ya que de otra manera el estado obtenido de su aplicación a un estado $|E\rangle$, que cumple $H|E\rangle = E|E\rangle$, tendría energía negativa $H(U(\mathcal{D}, 0)|E\rangle) = -E(U(\mathcal{D}, 0)|E\rangle)$, $\mathcal{D} = \mathcal{T}, \mathcal{PT}$; la implementación anti-lineal de ellas da lugar a degeneración del estado $|E\rangle$, en lugar energías negativas. Puesto que (3.3) no tiene

signo negativo en su miembro derecho, $U(\mathcal{P}, 0)$ no padece de este problema y la transformación de paridad puede ser implementada como lineal y unitaria

$$U^\dagger(\mathcal{P}, 0)U(\mathcal{P}, 0) = U(\mathcal{P}, 0)U^\dagger(\mathcal{P}, 0) = 1. \quad (3.6)$$

La unitariedad de $U(\mathcal{P}, 0)$ aunado al hecho de que su doble aplicación es la identidad $U^2(\mathcal{P}, 0) = 1$, revelan que éste es, también, un operador hermítico

$$U^\dagger(\mathcal{P}, 0) = U(\mathcal{P}, 0). \quad (3.7)$$

Con lo anterior, las expresiones (3.1) y (3.2), separadas en sus componentes espaciales y temporales son

$$U(\mathcal{P}, 0)HU^{-1}(\mathcal{P}, 0) = H, \quad U(\mathcal{P}, 0)\mathbf{P}U^{-1}(\mathcal{P}, 0) = -\mathbf{P}, \quad (3.8)$$

$$U(\mathcal{T}, 0)HU^{-1}(\mathcal{T}, 0) = H, \quad U(\mathcal{T}, 0)\mathbf{P}U^{-1}(\mathcal{T}, 0) = -\mathbf{P}, \quad (3.9)$$

$$U(\mathcal{PT}, 0)HU^{-1}(\mathcal{PT}, 0) = H, \quad U(\mathcal{PT}, 0)\mathbf{P}U^{-1}(\mathcal{PT}, 0) = \mathbf{P}, \quad (3.10)$$

$$U(\mathcal{P}, 0)\mathbf{J}U^{-1}(\mathcal{P}, 0) = \mathbf{J}, \quad U(\mathcal{P}, 0)\mathbf{K}U^{-1}(\mathcal{P}, 0) = -\mathbf{K}, \quad (3.11)$$

$$U(\mathcal{T}, 0)\mathbf{J}U^{-1}(\mathcal{T}, 0) = -\mathbf{J}, \quad U(\mathcal{T}, 0)\mathbf{K}U^{-1}(\mathcal{T}, 0) = \mathbf{K}, \quad (3.12)$$

$$U(\mathcal{PT}, 0)\mathbf{J}U^{-1}(\mathcal{PT}, 0) = -\mathbf{J}, \quad U(\mathcal{PT}, 0)\mathbf{K}U^{-1}(\mathcal{PT}, 0) = -\mathbf{K}. \quad (3.13)$$

Estas expresiones contienen toda la información de la acción de las transformaciones discretas sobre los generadores P^ρ y $J^{\rho\sigma}$; con esta información, se procede ahora a estudiar las implicaciones que tienen ellas en los estados cuánticos masivos.

Las irreps del grupo propio ortócrono de Poincaré $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ están definidas por los eigenvalores p^2 y w^2 de sus operadores de Casimir P^2 y W^2 . De la separación espacio-temporal de P^μ y W^μ (2.69) junto con las expresiones (3.8)-(3.13) se observa que P^2 y W^2 conmutan con todas las transformaciones discretas

$$U(\mathcal{D}, 0)P^2U^{-1}(\mathcal{D}, 0) = P^2, \quad U(\mathcal{D}, 0)W^2U^{-1}(\mathcal{D}, 0) = W^2, \quad (3.14)$$

por lo cual las irreps de \mathbb{P} , al igual que las de $\mathbb{P}_{+\uparrow}$, están definidas por los eigenvalores p^2 y w^2 , que para el caso masivo son $p^2 = m^2$ y $w^2 = -m^2j(j+1)$, esto es, la masa m y el espín j de los estados.

Como se vió en la subsección (2.1.3), dos CSCOs del grupo propio ortócrono $\mathbb{P}_{+\uparrow}$ para el espacio de estados masivos son los conjuntos $\{P^\mu, P^2, W^2, S^3\}$ y $\{H, \mathbf{P}^2, P^2, W^2, J^3\}$, que coinciden en el subespacio de estados en reposo(2.93), i.e. en el marco de referencia en reposo. En lo que respecta al grupo de Poincaré \mathbb{P} , puesto que se busca conocer específicamente las implicaciones de la simetría de paridad en los estados masivos, es conveniente elegir un CSCO que incluya al operador $U(\mathcal{P}, 0)$, que de ahora en adelante se renombra como

$$\Pi \equiv U(\mathcal{P}, 0). \quad (3.15)$$

Dado que Π no es compatible con las componentes espaciales \mathbf{P} del momento, véase (3.8), no es posible incluir también a éstas últimas. Dos CSCOs de \mathbb{P} para el espacio de estados masivos son los conjuntos $\{H, \mathbf{P}^2, P^2, W^2, S^3, \Pi\}$ y $\{H, \mathbf{P}^2, P^2, W^2, J^3, \Pi\}$, que coinciden en el subespacio de los estados en reposo

$$\{H, \mathbf{P}^2, P^2, W^2, S^3, \Pi\}|_{\mathbf{p}^2=0} = \{H, \mathbf{P}^2, P^2, W^2, J^3, \Pi\}|_{\mathbf{p}^2=0} \quad (3.16)$$

como consecuencia de que $\mathbf{p}^2 = 0$ implica necesariamente $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, y $\mathbf{S}|_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} = \mathbf{J}$ (2.92). En lo subsecuente se utilizará el CSCO $\{H, \mathbf{P}^2, P^2, W^2, J^3, \Pi\}$. Los vectores de esta base son

$$|E, \mathbf{p}^2, m^2, j, j^3, \pi\rangle \equiv |E, \mathbf{p}^2, p^2 = m^2, w^2 = -m^2 j(j+1), j^3, \pi\rangle, \quad (3.17)$$

en particular, los vectores con $\mathbf{p}^2 = 0$ tienen momento bien definido $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, por lo tanto

$$|E, \mathbf{p}^2 = 0, m^2, j, j^3, \pi\rangle = |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle, \quad k^\mu = (m, 0, 0, 0). \quad (3.18)$$

La transformación de Lorentz que lleva el momento k^μ al momento genérico p^μ es el boost $p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu$. La aplicación de este boost en el espacio de Hilbert es a través de $U(L(p)) \equiv U(L(p), 0)$ que, actuando sobre $|k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle$, produce estados de momento p^μ bien definido en virtud de que

$$\begin{aligned} P^\mu U(L(p)) |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle &= U(L(p)) [U^{-1}(L(p)) P^\mu U(L(p))] |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle \\ &= U(L(p)) [L(p)^\mu{}_\rho P^\rho] |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle \\ &= L(p)^\mu{}_\rho k^\rho U(L(p)) |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle \\ &= p^\mu U(L(p)) |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

por lo tanto es posible escribir

$$|p^\mu, m^2, j\rangle_{j^3, \pi} = U(L(p)) |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle, \quad (3.20)$$

donde los subíndices j^3, π indican que el vector en el miembro izquierdo no es eigenvector de los operadores J^3 y Π porque éstos no conmutan con los generadores \mathbf{K} de boost, véase (2.66 y 3.11). El efecto de las traslaciones espacio-temporales $U(\mathbb{1}, a)$ sobre estos estados es

$$U(\mathbb{1}, a) |p^\mu, m^2, j\rangle_{j^3, \pi} = e^{-ia_\mu p^\mu} |p^\mu, m^2, j\rangle_{j^3, \pi}, \quad (3.21)$$

mientras que el efecto de las transformaciones de Lorentz $U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0)$ es

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |p^\mu, m^2, j\rangle_{j^3, \pi} &= U(\Lambda L(p)) |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle \\ &= U(L(\Lambda p)) U(L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p)) |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle \\ &= U(L(\Lambda p)) W(\Lambda, p) |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde $W(\Lambda, p) \equiv U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))$ es un elemento del grupo pequeño de $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$, o sea, un elemento del grupo $SU(2)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |p^\mu, m^2, j\rangle_{j^3, \pi} &= U(L(\Lambda p)) \sum_{j'^3, \pi'} D_{j'^3 \pi', j^3 \pi}^{(j)}(W(\Lambda, p)) |k^\mu, m^2, j, j'^3, \pi'\rangle \\ &= \sum_{j'^3} D_{j'^3, j^3}^{(j)}(W(\Lambda, p)) |(\Lambda p)^\mu, m^2, j\rangle_{j'^3, \pi}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde los elementos de matriz $D_{j'^3 \pi', j^3 \pi}^{(j)}$ son

$$D_{j'^3 \pi', j^3 \pi}^{(j)} = \langle k^\mu, m^2, j, j'^3, \pi' | \exp(-i\mathbf{J}^{(j)} \cdot \theta) |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle = D_{j'^3, j^3}^{(j)} \delta_{\pi' \pi}, \quad (3.24)$$

que son diagonales en los valores de π porque los operadores Π y \mathbf{J} conmutan, (3.11).

La propiedad de separación de las transformaciones de Poincaré en traslaciones espacio-temporales y transformaciones de Lorentz $U(\Lambda, a) = U(\mathbb{1}, a)U(\Lambda, 0)$ induce una separación de los vectores en las irreps de \mathbb{P} como productos de vectores en las irreps del subgrupo de traslaciones espacio-temporales \mathbb{T}^4 y vectores en las irreps del subgrupo homogéneo de Lorentz \mathbb{L} . En el marco de referencia en reposo los estados masivos son $|k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle$ y esta separación es

$$|k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle = |k^\mu, m^2\rangle |k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}}, \quad (3.25)$$

donde los vectores $|k^\mu, m^2\rangle$ en las irreps del subgrupo de traslaciones espacio-temporales cumplen

$$P^\mu |k^\mu, m^2\rangle = k^\mu |k^\mu, m^2\rangle, \quad P^2 |k^\mu, m^2\rangle = m^2 |k^\mu, m^2\rangle, \quad (3.26)$$

y los vectores $|k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}}$ en las irreps de \mathbb{L} cumplen

$$\mathbf{J}^2 |k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}} = j(j+1) |k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}}, \quad (3.27)$$

$$J^3 |k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}} = j^3 |k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}}, \quad (3.28)$$

$$\Pi(k) |k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}} = \pi |k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}}. \quad (3.29)$$

Es decir, además de las ecuaciones de eigenvalores para \mathbf{J}^2 y J^3 (que aparecen también en el análisis convencional de los estados masivos, véase (2.116) y (2.117)), los vectores $|k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}}$ cumplen la ecuación de eigenvalores correspondiente para el operador de paridad $\Pi(k)$. Esta última ecuación es la restricción adicional que surge de considerar como grupo de simetría el grupo de Poincaré \mathbb{P} completo. La separación (3.25) nos conduce, ahora, a la revisión de las representaciones de \mathbb{L} que tienen paridad bien definida, específicamente a las representaciones de \mathbb{L} que son, al mismo tiempo, irreps de paridad Π .

3.1.2. Irreps de paridad en el grupo homogéneo de Lorentz

Las irreps del grupo de Lorentz propio ortócrono $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ se revisaron en la subsección (2.1.4). La presente subsección se enfoca en el estudio de las representaciones de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ que son, al mismo tiempo, irreps de paridad. Las irreps de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ están definidas por los parámetros (a, b) que determinan a los eigenvalores $a(a+1)$ y $b(b+1)$ de sus operadores de Casimir \mathbf{A}^2 y \mathbf{B}^2 , y tienen dimensión $(2a+1)(2b+1)$. De las definiciones (2.132) y de la acción del operador de paridad Π sobre los generadores \mathbf{J} y \mathbf{K} , mostrada en las expresiones (3.11), se tiene que la acción de Π sobre los operadores \mathbf{A} y \mathbf{B} es

$$\Pi\mathbf{A}\Pi^{-1}=\mathbf{B}, \quad \Pi\mathbf{B}\Pi^{-1}=\mathbf{A}, \quad (3.30)$$

por lo tanto, Π mapea la irrep (a, b) de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ a la irrep (b, a) . Debido a esto, las únicas irreps de $\mathbb{L}_{+\uparrow}$ que son también irreps de paridad son aquellas de la forma $(a, b = a)$. Sin embargo, si $b \neq a$, es posible construir irreps de paridad como la suma directa $(a, b) \oplus (b, a)$. Como se expuso en las ecuaciones (2.137), (2.138) y (2.139), las irreps (a, b) contienen sectores de espín con $j = |a - b|, |a - b| + 1, \dots, a + b - 1, a + b$ y, en particular, las irreps derechas $(a, 0)$ e izquierdas $(0, b)$ tienen espín j bien definido $j = a$ y $j = b$, respectivamente, con lo cual, las irreps de paridad de espín j bien definido son aquellas de la forma $(j, 0) \oplus (0, j)$, cuya dimensión es $2(2j + 1)$; durante el resto de esta sección se trabaja solamente con estas representaciones.

Tanto los vectores $|j, 0; j^3, 0\rangle$ de $(j, 0)$ como $|0, j; 0, j^3\rangle$ de $(0, j)$ son eigenvectores de \mathbf{J}^2 y \mathbf{J}^3 , o sea, cumplen las ecuaciones (3.27) y (3.28), separadamente. Para el cumplimiento de (3.29) es necesario construir, con ellos, eigenvectores de Π en $(j, 0) \oplus (0, j)$; esta tarea se realiza con ayuda de los operadores de Casimir $C_+ = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$ y $C_- = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$, introducidos en (2.135). El operador C_+ tiene el mismo eigenvalor $j(j+1)$ en las irreps $(j, 0)$ y $(0, j)$, mientras que los eigenvalores del operador C_- , en ellas, difieren en un signo: $j(j+1)$ para $(j, 0)$ y $-j(j+1)$ para $(0, j)$. Lo anterior permite distinguir a las irreps derechas e izquierdas por el signo de este eigenvalor. Para esto, es útil usar el operador de quiralidad χ , que se define como el C_- normalizado

$$\chi = \frac{\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2}{a(a+1) + b(b+1)}, \quad (3.31)$$

cuyos eigenvalores ξ en las representaciones $(j, 0)$ y $(0, j)$ son $\xi = 1$ y $\xi = -1$, respectivamente y, por su definición, cumple la propiedad

$$\Pi\chi\Pi^{-1} = -\chi \quad \rightarrow \quad \{\Pi, \chi\} = 0. \quad (3.32)$$

Con esto, es posible denotar a las representaciones $(j, 0)$ y $(0, j)$ en términos de j y ξ como (j, ξ)

$$(j, +1) \equiv (j, 0), \quad (j, -1) \equiv (0, j), \quad (3.33)$$

y sus respectivos vectores como

$$|+; j, j^3\rangle \equiv |j, 0; j^3, 0\rangle, \quad |-; j, j^3\rangle \equiv |0, j; 0, j^3\rangle, \quad (3.34)$$

donde la etiqueta \pm corresponde a los eigenvalores $\xi = \pm 1$ de χ . Debido a que Π y χ anticonmutan, la aplicación de Π en un eigenvector de χ invierte su eigenvalor ξ

$$\chi\Pi|\xi; j, j^3\rangle = -\Pi\chi|\xi; j, j^3\rangle = -\xi\Pi|\xi; j, j^3\rangle, \quad (3.35)$$

específicamente

$$\Pi|+; j, j^3\rangle = |-; j, j^3\rangle, \quad \Pi|-; j, j^3\rangle = |+; j, j^3\rangle. \quad (3.36)$$

De aquí es evidente que los eigenvectores de paridad son las combinaciones lineales $|+; j, j^3\rangle \pm |-; j, j^3\rangle$ y, puesto que estos ya cumplen las ecuaciones (3.27), (3.28) y (3.29), son precisamente los eigenvectores $|k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}}$

$$|k^\mu, j, j^3, +\rangle_{\mathbb{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+; j, j^3\rangle + |-; j, j^3\rangle), \quad (3.37)$$

$$|k^\mu, j, j^3, -\rangle_{\mathbb{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+; j, j^3\rangle - |-; j, j^3\rangle). \quad (3.38)$$

La base $\{|+; j, j^3\rangle, |-; j, j^3\rangle\}$ de la representación $(j, 0) \oplus (0, j)$ es llamada la base quirál. Los operadores que actúan de manera cerrada en las representaciones derechas e izquierdas son, en esta base, diagonales a bloques $\mathcal{O} = \text{Diag}(\mathcal{O}_R, \mathcal{O}_L)$, por ejemplo el operador de quiralidad χ , mientras que el operador de paridad Π , que intercambia las quiralidades (3.36), es antidiagonal a bloques

$$\chi = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2j+1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2j+1} \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2j+1} \\ \mathbb{1}_{2j+1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Una transformación de Lorentz propia ortócrona, en esta base, es

$$U(\Lambda, 0) = \begin{pmatrix} U_R(\Lambda, 0) & 0 \\ 0 & U_L(\Lambda, 0) \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

y los generadores son

$$\mathbf{J}_{(j,0) \oplus (0,j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{(j,0)} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{(0,j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{(j)} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{K}_{(j,0) \oplus (0,j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{(j,0)} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{(0,j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\mathbf{J}^{(j)} & 0 \\ 0 & -i\mathbf{J}^{(j)} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Los ejemplos no triviales más simples de las irreps de paridad $(j, 0) \oplus (0, j)$ son las representaciones $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ y $(1, 0) \oplus (0, 1)$. En los siguientes apartados se examinan sus aspectos básicos y se escriben explícitamente los vectores $|k^\mu, j, j^3, \pm\rangle_{\mathbb{L}}$ en cada una.

Representación $(1/2,0) \oplus (0,1/2)$

La base quiral $\{|+; 1/2, j^3\rangle, |-; 1/2, j^3\rangle\}$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(1/2,0) \oplus (0,1/2)} &= \left\{ \begin{pmatrix} |\uparrow\rangle_R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\downarrow\rangle_R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ |\uparrow\rangle_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ |\downarrow\rangle_L \end{pmatrix} \right\} \\ &\equiv \{|+; \uparrow\rangle, |+; \downarrow\rangle, |-; \uparrow\rangle, |-; \downarrow\rangle\}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

La descomposición, en ésta base, de un vector $|\psi\rangle$ de ésta representación es la siguiente $|\psi\rangle = |+; \uparrow\rangle \langle+; \uparrow|\psi\rangle + |+; \downarrow\rangle \langle+; \downarrow|\psi\rangle + |-; \uparrow\rangle \langle-; \uparrow|\psi\rangle + |-; \downarrow\rangle \langle-; \downarrow|\psi\rangle$. Dado que la base es ortogonal, se puede representar matricialmente como

$$|+; \uparrow\rangle \doteq \psi(+; \uparrow) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |+; \downarrow\rangle \doteq \psi(+; \downarrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

$$|-; \uparrow\rangle \doteq \psi(-; \uparrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-; \downarrow\rangle \doteq \psi(-; \downarrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

con lo que la representación matricial del vector $|\psi\rangle$ es

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \doteq \psi &= \langle+; \uparrow|\psi\rangle \psi(+; \uparrow) + \langle+; \downarrow|\psi\rangle \psi(+; \downarrow) \\ &+ \langle-; \uparrow|\psi\rangle \psi(-; \uparrow) + \langle-; \downarrow|\psi\rangle \psi(-; \downarrow) = \begin{pmatrix} \langle+; \uparrow|\psi\rangle \\ \langle+; \downarrow|\psi\rangle \\ \langle-; \uparrow|\psi\rangle \\ \langle-; \downarrow|\psi\rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

La representación matricial de los generadores $J^{\mu\nu}$ es

$$J^{\mu\nu}_{(1/2,0) \oplus (0,1/2)} = \begin{pmatrix} J^{\mu\nu}_{(1/2,0)} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & J^{\mu\nu}_{(0,1/2)} \end{pmatrix} \doteq \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

donde σ^μ y $\bar{\sigma}^\mu$ están definidos en (2.143). Sus componentes \mathbf{J} y \mathbf{K} son

$$\mathbf{J}_{(1/2,0) \oplus (0,1/2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{(1/2,0)} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{J}_{(0,1/2)} \end{pmatrix} \doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{K}_{(1/2,0) \oplus (0,1/2)} = \begin{pmatrix} i\mathbf{J}_{(1/2,0)} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -i\mathbf{J}_{(0,1/2)} \end{pmatrix} \doteq \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Los vectores $|\psi\rangle$ de esta representación son llamados espinores de Dirac y tienen espín $j = 1/2$.

Los eigenvectores de paridad $|k^\mu, j = 1/2, j^3, \pm\rangle_{\mathbb{L}}$ son

$$|k^\mu, 1/2, j^3, +\rangle_{\mathbb{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle; 1/2, j^3\rangle + |-\rangle; 1/2, j^3\rangle), \quad (3.50)$$

$$|k^\mu, 1/2, j^3, -\rangle_{\mathbb{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle; 1/2, j^3\rangle - |-\rangle; 1/2, j^3\rangle), \quad (3.51)$$

que reescribiendo $|k^\mu, 1/2, j^3, \pm\rangle_{\mathbb{L}} \equiv |j^3, \pm\rangle$ son

$$\begin{aligned} |\uparrow, +\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle; \uparrow\rangle + |-\rangle; \uparrow\rangle), \\ |\downarrow, +\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle; \downarrow\rangle + |-\rangle; \downarrow\rangle), \\ |\uparrow, -\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle; \uparrow\rangle - |-\rangle; \uparrow\rangle), \\ |\downarrow, -\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle; \downarrow\rangle - |-\rangle; \downarrow\rangle). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Desde luego, estos $|j^3, \pm\rangle$ forman, también, una base ortogonal de ésta representación, que es conocida como la base de Dirac; su representación matricial en la base quirral es

$$|\uparrow, +\rangle \doteq \psi(\uparrow, +) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow, +\rangle \doteq \psi(\downarrow, +) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

$$|\uparrow, -\rangle \doteq \psi(\uparrow, -) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow, -\rangle \doteq \psi(\downarrow, -) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Representación $(1,0) \oplus (0,1)$

La base quirral $\{|+\rangle; 1, j^3\rangle, |-\rangle; 1, j^3\rangle\}$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(1,0) \oplus (0,1)} &= \left\{ \begin{pmatrix} |+\rangle; 1, j^3\rangle_R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |0\rangle; 1, j^3\rangle_R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |-\rangle; 1, j^3\rangle_R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ |+\rangle; 1, j^3\rangle_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ |0\rangle; 1, j^3\rangle_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ |-\rangle; 1, j^3\rangle_L \end{pmatrix} \right\} \\ &\equiv \{|+\rangle; +1\rangle, |+\rangle; 0\rangle, |+\rangle; -1\rangle, |-\rangle; +1\rangle, |-\rangle; 0\rangle, |-\rangle; -1\rangle\}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

La descomposición, en ésta base, de un vector $|\Psi\rangle$ de ésta representación es de la siguiente manera $|\Psi\rangle = |+\rangle; +1\rangle \langle +; 1|\Psi\rangle + |+\rangle; 0\rangle \langle +; 0|\Psi\rangle + |+\rangle; -1\rangle \langle +; -1|\Psi\rangle + |-\rangle; +1\rangle \langle -; +1|\Psi\rangle + |-\rangle; 0\rangle \langle -; 0|\Psi\rangle + |-\rangle; -1\rangle \langle -; -1|\Psi\rangle$. Dado que la base es ortogonal, se puede representar

matricialmente como $|\pm; j^3\rangle \doteq \Psi(\pm; j^3)$, donde

$$\Psi(+; +1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(+; 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(+; -1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

$$\Psi(-; +1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(-; 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(-; -1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

con lo que la representación matricial del vector $|\Psi\rangle$ es

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle \doteq \Psi &= \langle +; +1|\Psi\rangle \Psi(+; +1) + \langle +; 0|\Psi\rangle \Psi(+; 0) + \langle +; -1|\Psi\rangle \Psi(+; -1) \\ &\quad + \langle -; +1|\Psi\rangle \Psi(-; +1) + \langle -; 0|\Psi\rangle \Psi(-; 0) + \langle -; -1|\Psi\rangle \Psi(-; -1) \\ &= \begin{pmatrix} \langle +; +1|\Psi\rangle \\ \langle +; 0|\Psi\rangle \\ \langle +; -1|\Psi\rangle \\ \langle -; +1|\Psi\rangle \\ \langle -; 0|\Psi\rangle \\ \langle -; -1|\Psi\rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

La representación matricial de los generadores $J^{\mu\nu}$ es

$$J^{\mu\nu}_{(1,0)\oplus(0,1)} = \begin{pmatrix} J^{\mu\nu}_{(1,0)} & 0 \\ 0 & J^{\mu\nu}_{(0,1)} \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Sus componentes \mathbf{J} y \mathbf{K} son

$$\mathbf{J}_{(1,0)\oplus(0,1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{(1,0)} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{(0,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{K}_{(1,0)\oplus(0,1)} = \begin{pmatrix} i\mathbf{J}_{(1,0)} & 0 \\ 0 & -i\mathbf{J}_{(0,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\mathbf{J}^{(1)} & 0 \\ 0 & -i\mathbf{J}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

donde los $\mathbf{J}^{(1)}$ están definidos en (2.159). Los vectores $|\Psi\rangle$ de esta representación son llamados espinores $(1, 0) \oplus (0, 1)$ y tienen espín $j = 1$.

Los eigenvectores de paridad $|k^\mu, j = 1, j^3, \pm\rangle_{\mathbb{L}}$ son

$$|k^\mu, 1, j^3, +\rangle_{\mathbb{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+; 1, j^3\rangle + |-; 1, j^3\rangle), \quad (3.62)$$

$$|k^\mu, 1, j^3, -\rangle_{\mathbb{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+; 1, j^3\rangle - |-; 1, j^3\rangle), \quad (3.63)$$

que reescribiendo $|k^\mu, 1, j^3, \pm\rangle_{\mathbb{L}} \equiv |j^3, \pm\rangle$ son

$$\begin{aligned} | +1, + \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+; +1\rangle + |-; +1\rangle), \\ | 0, + \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+; 0\rangle + |-; 0\rangle), \\ | -1, + \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+; -1\rangle + |-; -1\rangle), \\ | +1, - \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+; +1\rangle - |-; +1\rangle), \\ | 0, - \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+; 0\rangle - |-; 0\rangle), \\ | -1, - \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+; -1\rangle - |-; -1\rangle). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Estos $|j^3, \pm\rangle$ forman, también, una base ortogonal de ésta representación; su representación matricial $|j^3, \pm\rangle \doteq \Psi(j^3, \pm)$ en la base quiral es

$$\Psi(+1, +) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(0, +) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(-1, +) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

$$\Psi(+1, -) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(0, -) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(-1, -) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

Habiendo encontrado los eigenvectores $|k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}}$, se pueden construir ya los estados masivos en reposo $|k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle$, de (3.25). En la siguiente subsección se realiza la construcción de dichos estados y se deducen las implicaciones dinámicas que naturalmente poseen.

3.1.3. Estados y dinámica de las representaciones $(\mathbf{j}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{j})$

En el marco de referencia en reposo la separación (3.25) de los estados masivos es $|k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle = |k^\mu, m^2\rangle |k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}}$, donde el vector $|k^\mu, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}}$ pertenece a una irrep de paridad. Por ejemplo, en la irrep $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ es $|k^\mu, j = 1/2, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}} = |\psi(k^\mu, j^3, \pi)\rangle$, mientras que en la irrep $(1, 0) \oplus (0, 1)$ es $|k^\mu, j = 1, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}} = |\Psi(k^\mu, j^3, \pi)\rangle$. En lo sucesivo, para expresar de manera genérica cualquiera de estas identificaciones se usará $|k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle_{\mathbb{L}} \equiv |\Phi(k^\mu, j, j^3, \pi)\rangle$. Los estados con momento $p^\mu = L(p)^\mu_{\nu} k^\nu$ arbitrario se obtienen al aplicar el operador de boost $U(L(p)) \equiv U(L(p), 0)$ sobre ellos

$$|p^\mu, m^2, j\rangle_{j^3, \pi} = U(L(p)) |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle = |p^\mu, m^2\rangle |\Phi(p^\mu, j)\rangle_{j^3, \pi}, \quad (3.67)$$

donde $|\Phi(p^\mu, j)\rangle_{j^3, \pi} \equiv U(L(p)) |\Phi(k^\mu, j, j^3, \pi)\rangle$; proyectando a (3.67) en el espacio de configuraciones se obtiene su función de onda $\Phi(x^\mu, j) = e^{-ip \cdot x} \Phi_{j^3, \pi}(p^\mu, j)$.

Las ecuaciones de eigenvalores que definen a los estos estados masivos en reposo son las mismas que en (2.164)-(2.167) y, adicionalmente, la de paridad

$$\Pi(k) |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle = \pi |k^\mu, m^2, j, j^3, \pi\rangle. \quad (3.68)$$

La transcripción de las primeras para los estados boosteados $|p^\mu, m^2, j\rangle_{j^3, \pi}$ tienen el mismo significado que se mencionó en la subsección (2.1.5). Respecto a la ecuación de paridad, al aplicar un boost sobre ella se obtiene

$$[U(L(p))\Pi(k)U^{-1}(L(p)) - \pi] |p^\mu, m^2, j\rangle_{j^3, \pi} = 0, \quad (3.69)$$

que, en vista de que (3.11) implica que $\Pi(k)U(L(p))\Pi^{-1}(k) = U^{-1}(L(p))$, se puede reexpresar como

$$[U^2(L(p))\Pi(k) - \pi] |p^\mu, m^2, j\rangle_{j^3, \pi} = 0. \quad (3.70)$$

Esta ecuación puede ser escrita en forma matricial en las representaciones $(j, 0) \oplus (0, j)$ calculando explícitamente el operador de boost $U(L(p)) = \text{Diag}(U_R(L(p)), U_L(L(p)))$

$$\begin{aligned} U(L(p)) &= \begin{pmatrix} \exp(-i\mathbf{K}_{(j,0)} \cdot \boldsymbol{\phi}) & 0 \\ 0 & \exp(-i\mathbf{K}_{(0,j)} \cdot \boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{J}^{(j)} \cdot \mathbf{n}\boldsymbol{\phi}) & 0 \\ 0 & \exp(-\mathbf{J}^{(j)} \cdot \mathbf{n}\boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Las exponenciales pueden ser calculadas observando que el operador $h \equiv \mathbf{J}^{(j)} \cdot \mathbf{n}$ tiene los mismos eigenvalores del operador J^3 , es decir $-j, -j+1, \dots, j-1, j$ y dado que toda matriz cumple la ecuación característica de sus eigenvalores se tiene

$$(h+j)(h+j-1) \cdots (h-j+1)(h-j) = 0, \quad (3.72)$$

ecuación que permite escribir a h^{2j+1} como un polinomio de orden menor a $2j+1$, específicamente como un polinomio de orden $2j-1$, con lo que las exponenciales $\exp(\pm h)$ sólo

tendrán un número finito de términos independientes y serán, de hecho, un polinomio de orden $2j$ en h . En los siguientes apartados se realiza este procedimiento para obtener la condición (3.69) explícitamente para los casos $j = 1/2$ y $j = 1$.

Caso $j = 1/2$

La representación matricial de $\mathbf{J}^{(1/2)}$ es $\mathbf{J}^{(1/2)} \doteq \boldsymbol{\sigma}/2$. El operador $h = \mathbf{J}^{(1/2)} \cdot \mathbf{n}$ cumple

$$\left(h + \frac{1}{2}\right) \left(h - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{1}{4}, \quad (3.73)$$

con lo que

$$U_{R/L}(L(p)) = e^{\pm h\phi} = \cosh \frac{\phi}{2} \pm 2h \sinh \frac{\phi}{2} \doteq \frac{E + m \pm \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2m(E + m)}}, \quad (3.74)$$

donde se ha usado $\cosh \phi = E/m$. El operador de boost $U(L(p))$ es explícitamente

$$U(L(p)) \doteq N \begin{pmatrix} E + m + p_3 & p_1 - ip_2 & 0 & 0 \\ p_1 + ip_2 & E + m - p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E + m - p_3 & -p_1 + ip_2 \\ 0 & 0 & -p_1 - ip_2 & E + m + p_3 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

donde $N = 1/\sqrt{2m(E + m)}$. Los vectores $|\psi(p^\mu)\rangle_{j^3, \pi} = U(L(p)) |\psi(k^\mu, j^3, \pi)\rangle$, representados matricialmente por $\psi_{j^3, \pi}(p^\mu)$, se obtienen de aplicar (3.75) a los vectores en reposo en (3.53) y (3.54)

$$\psi_{\uparrow, +}(p^\mu) = \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E + m + p_3 \\ p_1 + ip_2 \\ E + m - p_3 \\ -p_1 - ip_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\downarrow, +}(p^\mu) = \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ E + m - p_3 \\ -p_1 + ip_2 \\ E + m + p_3 \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

$$\psi_{\uparrow, -}(p^\mu) = \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E + m + p_3 \\ p_1 + ip_2 \\ -E - m + p_3 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\downarrow, -}(p^\mu) = \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ E + m - p_3 \\ p_1 - ip_2 \\ -E - m - p_3 \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

La ecuación (3.69) es

$$(U(L(p))\Pi(k)U^{-1}(L(p)) - \pi) \psi_{j^3, \pi}(p^\mu) = 0; \quad (3.78)$$

del cálculo explícito se obtiene que

$$U(L(p))\Pi U^{-1}(L(p)) = \frac{\gamma^\mu p_\mu}{m}, \quad (3.79)$$

donde

$$\gamma^0 = \Pi(k), \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

con lo que (3.78) es

$$(\gamma^\mu p_\mu - \pi m \mathbb{1}) \psi_{j^3, \pi}(p^\mu) = 0, \quad (3.81)$$

que es precisamente la ecuación de Dirac en el espacio de momentos para las partículas ($\pi = +1$) y antipartículas ($\pi = -1$). La proyección de los estados $|p^\mu, m^2, 1/2\rangle_{j^3, \pi}$ sobre el espacio de configuraciones es la función de onda $\psi(x^\mu) = e^{-ip \cdot x} \psi_{j^3, \pi}(p^\mu)$ y esta cumple, como consecuencia, la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \mathbb{1}) \psi(x^\mu) = 0. \quad (3.82)$$

Este cálculo demuestra que la ecuación de Dirac no es otra cosa más que la expresión covariante de la ecuación de eigenvalores del operador de paridad $\Pi(k)$ en la representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$. El operador $\Pi(p)$, definido como

$$\Pi(p) = U(L(p)) \Pi(k) U^{-1}(L(p)), \quad (3.83)$$

cumple $\Pi^2(p) = \mathbb{1}$, que implica la relación

$$(\gamma^\mu p_\mu) = p^2 \mathbb{1}, \quad (3.84)$$

ya conocida de antemano, pero deducida aquí como consecuencia de las propiedades del operador de paridad.

Caso $j = 1$

La representación matricial de $\mathbf{J}^{(1)}$ es la definida en (2.159), que aquí se reescriben

$$J_{(1)}^1 \doteq \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{(1)}^2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{(1)}^3 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

El operador $h = \mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{n}$ cumple

$$(h + 1)(h - 0)(h - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad h^3 = h, \quad (3.86)$$

con lo que

$$U_{R/L}(L(p)) = e^{\pm h \phi} = 1 \pm h \sinh \phi + h^2 (\cosh \phi - 1) = 1 \pm \frac{\mathbf{J}^1 \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{(\mathbf{J}^1 \cdot \mathbf{p})^2}{m(E + m)}, \quad (3.87)$$

donde se ha usado $\cosh \phi = E/m$. El operador de boost $U(L(p))$ es explícitamente

$$U(L(p)) \doteq N \times \begin{pmatrix} m(E+m) + (E+m)\mathbf{J}^1 \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{J}^1 \cdot \mathbf{p})^2 & 0 \\ 0 & m(E+m) - (E+m)\mathbf{J}^1 \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{J}^1 \cdot \mathbf{p})^2 \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

donde $N = 1/(m(E+m))$. Los vectores $|\Psi(p^\mu)\rangle_{j^3, \pi} = U(L(p)) |\Psi(k^\mu, j^3, \pi)\rangle$, representados en matriz por $\Psi_{j^3, \pi}(p^\mu)$, se obtienen de aplicar (3.88) a los vectores en reposo (3.65)-(3.66)

$$\Psi_{+1,+}(p^\mu) = \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (E+m)(m+p_3) + p_3^2 + p_+p_- \\ (E+m+p_3)p_+ \\ p_+^2 \\ (E+m)(m-p_3) + p_3^2 + p_+p_- \\ -(E+m-p_3)p_+ \\ p_+^2 \end{pmatrix}, \quad (3.89)$$

$$\Psi_{0,+}(p^\mu) = \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (E+m+p_3)p_- \\ m(E+m) + 2p_+p_- \\ (E+m-p_3)p_+ \\ -(E+m-p_3)p_- \\ m(E+m) + 2p_+p_- \\ -(E+m+p_3)p_+ \end{pmatrix}, \quad (3.90)$$

$$\Psi_{-1,+}(p^\mu) = \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_-^2 \\ (E+m-p_3)p_- \\ (E+m)(m-p_3) + p_3^2 + p_+p_- \\ p_-^2 \\ -(E+m+p_3)p_- \\ (E+m)(m+p_3) + p_3^2 + p_+p_- \end{pmatrix}, \quad (3.91)$$

$$\Psi_{+1,-}(p^\mu) = \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (E+m)(m+p_3) + p_3^2 + p_+p_- \\ (E+m+p_3)p_+ \\ p_+^2 \\ -(E+m)(m-p_3) - p_3^2 - p_+p_- \\ (E+m-p_3)p_+ \\ -p_+^2 \end{pmatrix}, \quad (3.92)$$

$$\Psi_{0,-}(p^\mu) = \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (E+m+p_3)p_- \\ m(E+m)+2p_+p_- \\ (E+m-p_3)p_+ \\ (E+m-p_3)p_- \\ -m(E+m)-2p_+p_- \\ (E+m+p_3)p_+ \end{pmatrix}, \quad (3.93)$$

$$\Psi_{-1,-}(p^\mu) = \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_-^2 \\ (E+m-p_3)p_- \\ (E+m)(m-p_3)+p_3^2+p_+p_- \\ -p_-^2 \\ (E+m+p_3)p_- \\ -(E+m)(m+p_3)-p_3^2-p_+p_- \end{pmatrix}, \quad (3.94)$$

donde $p_\pm = p_1 \pm ip_2$. La ecuación (3.69) es

$$(U(L(p))\Pi(k)U^{-1}(L(p)) - \pi) \Psi_{j^3,\pi}(p^\mu) = 0; \quad (3.95)$$

del cálculo explícito se obtiene que

$$U(L(p))\Pi U^{-1}(L(p)) = \frac{S^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{m^2}, \quad (3.96)$$

donde $S^{\mu\nu}$ es un tensor formado por matrices 6×6 , que es simétrico $S^{\nu\mu} = S^{\mu\nu}$ y sin traza $S^\mu{}_\mu = 0$, por lo que sólo nueve de sus matrices componentes son independientes. Este tensor es, precisamente, uno de los operadores que forman la base covariante de operadores de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ inducida por paridad, que fue desarrollada en la referencia [67]. La base de este espacio de operadores es $\{\mathbb{1}, \chi, S_{\mu\nu}, \chi S_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\alpha\beta}\}$, cuyas definiciones y propiedades, establecidas en [67], se anexan en el apéndice A. El tensor $S_{\mu\nu}$ puede ser expresado en términos del operador unidad $\mathbb{1}$, paridad Π y los generadores de Lorentz $M_{\mu\nu}$ de esta representación, como

$$S_{\mu\nu} = \Pi(k) (\mathbb{1}\eta_{\mu\nu} - i(\eta_{0\mu}M_{0\nu} + \eta_{0\nu}M_{0\mu}) - \{M_{0\mu}, M_{0\nu}\}), \quad (3.97)$$

cuyas matrices componentes son

$$S^{00} = \Pi(k), \quad S^{0i} = -\Pi(k)\chi J^i, \quad S^{ij} = \Pi(k)(-\delta^{ij} + \{J^i, J^j\}), \quad (3.98)$$

que en forma matricial en bloques 3×3 son

$$S^{00} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{0i} = \begin{pmatrix} 0 & J^i \\ -J^i & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{ij} + \{J^i, J^j\} \\ -\delta^{ij} + \{J^i, J^j\} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Con esto, la ecuación (3.95) es

$$(S^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - \pi m^2 \mathbb{1}) \Psi_{j^3, \pi}(p^\mu) = 0; \quad (3.100)$$

la proyección de los estados $|p^\mu, m^2, j = 1\rangle_{j^3, \pi}$ sobre el espacio de configuraciones es la función de onda $\Psi(x^\mu) = e^{-ip \cdot x} \Psi_{j^3, \pi}(p^\mu)$ y esta cumple, como consecuencia, la ecuación

$$(S^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \mathbb{1}) \Psi(x^\mu) = 0. \quad (3.101)$$

Esta ecuación fue obtenida, anteriormente, por Weinberg en [68] siguiendo un camino diferente; sin embargo, se demostró que poseía soluciones taquiónicas $p^2 = -m^2$. La existencia de estas soluciones puede rastrearse en las propiedades algebraicas del tensor $S_{\mu\nu}$ [67], que implican (A.9)

$$(S(p))^2 = p^4 \mathbb{1}, \quad (3.102)$$

donde $S(p) \equiv S^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ y, debido a lo cual, al aplicar el operador $S(\partial) - m^2 \mathbb{1}$ por la izquierda a (3.101), se obtiene

$$(\partial^4 - m^4) \Psi(x^\mu) = 0. \quad (3.103)$$

Este problema se puede resolver tomando en consideración el hecho de que los números cuánticos π y p^2 son independientes y, por lo tanto, la condición de eigenvalores de paridad y la condición $p^2 = m^2$ deben ser impuestas de manera independiente. Esto puede realizarse definiendo proyectores de paridad independientes de la condición $p^2 = m^2$ y, posteriormente, proyectar sobre la capa de masa. Los proyectores de paridad en reposo son

$$\mathbb{P}_\pi(k) = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \pi \Pi(k)), \quad (3.104)$$

que al ser boosteados son $\mathbb{P}_\pi(p) = (1/2)(\mathbb{1} + \pi S(p)/m^2)$; éstos son proyectores siempre que estén restringidos a la capa de masa, pero dejan de serlo cuando se está fuera de ella. Para mantener la independencia de π y p^2 es necesario trabajar con los proyectores

$$\mathbb{P}_\pi(p) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \pi \frac{S(p)}{p^2} \right), \quad (3.105)$$

que cumplen las propiedades definitorias de un proyector incluso cuando se está fuera de la capa de masa

$$\mathbb{P}_\pm^2(p) = \mathbb{P}_\pm(p), \quad \mathbb{P}_\pm(p) \mathbb{P}_\mp(p) = 0, \quad \mathbb{P}_+(p) + \mathbb{P}_-(p) = \mathbb{1}. \quad (3.106)$$

La proyección independiente se obtiene de la proyección sobre paridad ($\pi = +1$) seguida de la proyección sobre la capa de masa $p^2 = m^2$

$$\frac{p^2}{m^2} \mathbb{P}_+(p) \Psi_{j^3, \pi}(p^\mu) = \Psi_{j^3, \pi}(p^\mu), \quad (3.107)$$

que puede ser reescrita como

$$(\Sigma_{\mu\nu} p^\mu p^\nu - m^2 \mathbb{1}) \Psi_{j^3, \pi}(p^\mu) = 0, \quad (3.108)$$

donde

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} \mathbb{1} + S_{\mu\nu}). \quad (3.109)$$

La ecuación correspondiente en el espacio de configuraciones para la función de onda $\Psi(x^\mu)$ es

$$(\Sigma_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu + m^2 \mathbb{1}) \Psi(x^\mu) = 0; \quad (3.110)$$

esta ecuación ya no tiene el problema de las soluciones taquiónicas, como se comprueba de aplicar el operador $(1/2)(\partial^2 - S(\partial)) + m^2 \mathbb{1}$ por la izquierda, con lo que se obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial^2 + m^2) \Psi(x^\mu) = 0. \quad (3.111)$$

La ecuación (3.110) es la expresión covariante de la proyección independiente sobre paridad y sobre la capa de masa, en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$, de la función de onda $\Psi(x^\mu)$ y es la que rige su dinámica propia.

Este formalismo muestra que la ecuación dinámica propia de la función de onda que describe a una partícula de espín j tiene su origen, esencialmente, en las propiedades covariantes del operador de paridad $\Pi(k)$ en cada representación, es decir, fundamentalmente en el hecho de que paridad es un buen número cuántico para los estados de partícula libre. Su aplicación puede realizarse, de manera análoga, en cualquier representación $(j, 0) \oplus (0, j)$ con $j > 1$ y, en general, en cualquier representación (a, b) . En la sección IV de [42] se aplica este formalismo en la representación $(1/2, 1/2)$, tratada como la suma directa de los productos tensoriales $(1/2, 0) \otimes (0, 1/2)$ y $(0, 1/2) \otimes (1/2, 0)$, y se muestra que ésta también tiene el problema de las soluciones taquiónicas que posee la $(1, 0) \oplus (0, 1)$; al resolverlo de manera análoga a como se ha expuesto aquí, es decir, considerando la independencia de los números cuánticos π y p^2 , se obtiene precisamente la ecuación de Proca. Además, se muestra que en el caso no-masivo emerge una simetría relacionada con la libertad en la elección de una de las componentes de paridad del campo y se encuentra que ésta es, precisamente, la simetría de norma del campo vectorial no-masivo.

Teniendo ya la ecuación (3.110), que rige la dinámica propia de la función de onda $\Psi(x^\mu)$ que describe a una partícula cuántica relativista masiva de espín $j = 1$ en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$, en la siguiente sección se revisan los grados de libertad que posee, su interpretación como ecuación de campo clásico y su cuantización canónica.

3.2. El campo de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$

El estudio de los aspectos clásicos y cuánticos del campo $\Psi(x)$ de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$, cuya dinámica está dada por la ecuación (3.110), se realizó en [65]. El desarrollo que se presenta en esta sección se basa en dicha referencia. Primeramente, es

conveniente trabajar en la base que diagonaliza a paridad Π , esta base se obtiene de la base quiral (3.99) a través de la transformación $\mathcal{O}_\Pi = F\mathcal{O}_\chi F^\dagger$, donde la matriz F en bloques 3×3 es

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (3.112)$$

con lo que las componentes del tensor $S^{\mu\nu}$ son

$$S^{00} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad S^{0i} = \begin{pmatrix} 0 & -J^i \\ J^i & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{ij} = \begin{pmatrix} -\delta^{ij} + \{J^i, J^j\} & 0 \\ 0 & \delta^{ij} - \{J^i, J^j\} \end{pmatrix}; \quad (3.113)$$

esta base es, de hecho, la base definida en (3.64).

En ésta base la separación de $\Psi(x)$ es $\Psi(x) = (\Psi_+(x), \Psi_-(x))^T$ y la ecuación (3.110) en bloques 3×3 es

$$\begin{pmatrix} \partial^2 + m^2 + (\mathbf{J} \cdot \nabla)^2 & -\mathbf{J} \cdot \nabla \partial_0 \\ \mathbf{J} \cdot \nabla \partial_0 & m^2 - (\mathbf{J} \cdot \nabla)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_+(x) \\ \Psi_-(x) \end{pmatrix} = 0, \quad (3.114)$$

es decir

$$[\partial^2 + m^2 + (\mathbf{J} \cdot \nabla)^2] \Psi_+(x) = +\mathbf{J} \cdot \nabla \partial_0 \Psi_-(x), \quad (3.115)$$

$$[m^2 - (\mathbf{J} \cdot \nabla)^2] \Psi_-(x) = -\mathbf{J} \cdot \nabla \partial_0 \Psi_+(x). \quad (3.116)$$

Puesto que la segunda ecuación no involucra derivadas temporales de $\Psi_-(x)$ ésta es una restricción de ella, y permite expresar a $\Psi_-(x)$ en términos de la derivada temporal de $\Psi_+(x)$

$$\Psi_-(x) = -\mathcal{O}^{-1} \mathbf{J} \cdot \nabla \partial_0 \Psi_+(x), \quad (3.117)$$

donde el operador $\mathcal{O}^{-1} = [m^2 - (\mathbf{J} \cdot \nabla)^2]^{-1}$ es no-singular porque $(\mathbf{J} \cdot \nabla)^2$ nunca es proporcional a $\mathbb{1}$. A causa de esta restricción, el campo sólo tiene $6 - 3 = 3$ grados de libertad complejos, recopilados en $\Psi_+(x)$. Aplicando el operador \mathcal{O} por la izquierda a la ecuación (3.115) y usando (3.116) se obtiene la ecuación dinámica para $\Psi_+(x)$

$$([\partial^2 + m^2 + (\mathbf{J} \cdot \nabla)^2] [m^2 - (\mathbf{J} \cdot \nabla)^2] + (\mathbf{J} \cdot \nabla)^2 \partial_0^2) \Psi_+(x) = 0, \quad (3.118)$$

que, haciendo uso de la propiedad $(\mathbf{J} \cdot \nabla)^3 = (\mathbf{J} \cdot \nabla) \nabla^2$, obtenida a partir de (3.86), se reduce a la ecuación de Klein-Gordon

$$m^2 [\partial^2 + m^2] \Psi_+(x) = 0. \quad (3.119)$$

Cualquier espinor de la forma $\Psi_+(x) = e^{-ip \cdot x} \Psi_+(p)$, con $p^2 = m^2$, cumple esta ecuación, por lo tanto, de la ecuación (3.117) se obtiene $\Psi_-(p) = -(\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}/E) \Psi_+(p)$ y la forma de la solución es, finalmente

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_+(x) \\ \Psi_-(x) \end{pmatrix} = N e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} \Psi_+(p) \\ -\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}}{E} \Psi_+(p) \end{pmatrix}, \quad (3.120)$$

donde N es un factor de normalización.

El espinor Ψ^c de carga $U(1)$ conjugada se obtiene de la transformación de Ψ a través de la ecuación

$$\Psi^c \equiv \mathcal{C}\Psi = \Gamma\Psi^*, \quad (3.121)$$

donde la matriz Γ está compuesta por el operador de inversión temporal U

$$\Gamma = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & -U \end{pmatrix}, \quad U = \exp(-i\pi J_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.122)$$

y cumple la propiedad $\Gamma(S^{\mu\nu})^*\Gamma^{-1}$, que es defintoria para Γ como operador de conjugación de carga, como se puede ver de acoplar mínimamente la ecuación (3.110) con un campo de norma $U(1)$. A diferencia de la teoría de Dirac, los operadores de conjugación de carga \mathcal{C} y paridad Π conmutan

$$[\mathcal{C}, \Pi] = 0, \quad (3.123)$$

lo que revela que, en este campo, no hay relación entre las componentes de paridad negativa y las antipartículas. Renombrando a los espinores en el espacio de momentos como $u(p) \equiv \Psi_+(p)$, su conjugado de carga correspondiente es

$$u^c(p) = \Gamma u^*(p), \quad (3.124)$$

que satisface, al igual que $u(p)$, la ecuación

$$(\Sigma_{\mu\nu}p^\mu p^\nu - m^2\mathbb{1}) u^c(p) = 0. \quad (3.125)$$

De la misma manera, los espinores adjuntos $\bar{u}(p)$ y $\bar{u}^c(p)$ cumplen sus correspondientes ecuaciones adjuntas

$$\bar{u}(p) (\Sigma_{\mu\nu}p^\mu p^\nu - m^2\mathbb{1}) = 0, \quad \bar{u}^c(p) (\Sigma_{\mu\nu}p^\mu p^\nu - m^2\mathbb{1}) = 0. \quad (3.126)$$

Al estar normalizados de acuerdo a la ecuación

$$\bar{u}_r(p)u_s(p) = \bar{u}_r^c(p)u_s^c(p) = \delta_{r,s} \quad (3.127)$$

cumplen la relación de completitud

$$\sum_r u_r(p)\bar{u}_r(p) = \sum_r u_r^c(p)\bar{u}_r^c(p) = \frac{S(p) + m^2}{2m^2}. \quad (3.128)$$

Después de esta breve exposición de las propiedades de los espinores solución de la ecuación del campo y sus grados de libertad, se revisan, a continuación, los elementos básicos de los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano de este campo clásico. El análisis clásico y los resultados que se obtienen son importantes para abordar la cuantización canónica del campo.

3.2.1. Campo clásico

El Lagrangiano de este campo es

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\Psi} \Sigma^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi - m^2 \bar{\Psi} \Psi, \quad (3.129)$$

donde $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \Pi$, que produce la ecuación dinámica para el campo $\Psi(x)$ y su adjunta

$$(\Sigma_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu + m^2 \mathbb{1}) \Psi(x) = 0, \quad \bar{\Psi}(x) (\Sigma_{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}^\mu \overleftarrow{\partial}^\nu + m^2 \mathbb{1}) = 0, \quad (3.130)$$

cuyas soluciones generales son

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_r (c_{\mathbf{p},r} u_r(p) e^{-ip \cdot x} + d_{\mathbf{p},r}^* u_r^c(p) e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}, \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \Pi, \quad (3.131)$$

donde $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, y $c_{\mathbf{p},r}$, $d_{\mathbf{p},r}$ son coeficientes.

El Lagrangiano (3.129) tiene, desde luego, simetría de Poincaré, dentro de la que se encuentra la simetría de traslaciones espacio-temporales $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$, que, a través del teorema de Noether, da lugar a la conservación del tensor de energía-momento $T^\mu{}_\nu$, definido en (2.210), que para este caso es

$$T^\mu{}_\nu = \partial_\nu \bar{\Psi} \Sigma^{\mu\alpha} \partial_\alpha \Psi + \partial_\alpha \bar{\Psi} \Sigma^{\alpha\mu} \partial_\nu \Psi - \delta_\nu^\mu \left(\partial_\alpha \bar{\Psi} \Sigma^{\alpha\beta} \partial_\beta \Psi - m^2 \bar{\Psi} \Psi \right), \quad (3.132)$$

cuyas cargas conservadas son la energía E (2.211)

$$E = \int d^3 x \left(\partial_0 \bar{\Psi} \Sigma^{00} \partial_0 \Psi - \partial_i \bar{\Psi} \Sigma^{ij} \partial_j \Psi + m^2 \bar{\Psi} \Psi \right) \quad (3.133)$$

y el momento \mathbf{P} (2.212)

$$\mathbf{P} = \int d^3 x \left(\nabla \bar{\Psi} \Sigma^{0\nu} \partial_\nu \Psi + \partial_\mu \bar{\Psi} \Sigma^{\mu 0} \nabla \Psi \right). \quad (3.134)$$

Este Lagrangiano tiene, también, simetría $U(1)$ global, que da lugar a la conservación de la corriente

$$j^\mu = i \left(\partial_\alpha \bar{\Psi} \Sigma^{\alpha\mu} \Psi - \bar{\Psi} \Sigma^{\mu\alpha} \partial_\alpha \Psi \right), \quad (3.135)$$

cuya carga conservada es

$$Q = i \int d^3 x \left(\partial_\alpha \bar{\Psi} \Sigma^{\alpha 0} \Psi - \bar{\Psi} \Sigma^{0\alpha} \partial_\alpha \Psi \right). \quad (3.136)$$

En el formalismo Hamiltoniano es conveniente separar el campo Ψ y su momento canónico conjugado Π_Ψ en espinores de tres componentes con el fin de poder identificar los

verdaderos grados de libertad del espacio fase y, posteriormente, realizar la cuantización de la manera apropiada

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \Pi_\Psi = \begin{pmatrix} \pi \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (3.137)$$

con lo que existen, en principio, 24 grados de libertad: 6 de los campos $\{\phi_a, \phi_a^\dagger\}$, 6 de sus momentos canónicos asociados $\{\pi_a, \pi_a^\dagger\}$, 6 de los campos $\{\xi_a, \xi_a^\dagger\}$ y 6 de sus momentos canónicos $\{\tau_a, \tau_a^\dagger\}$. Con esto, el Lagrangiano (3.129) se separa como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_0 \phi^\dagger \partial_0 \phi + \partial_i \phi^\dagger \partial^i \phi - \frac{1}{2} \partial_0 \phi^\dagger J^i \partial_i \xi - \frac{1}{2} \partial_0 \xi^\dagger J^i \partial_i \phi \\ & - \frac{1}{2} \partial_i \phi^\dagger J^i \partial_0 \xi - \frac{1}{2} \partial_i \xi^\dagger J^i \partial_0 \phi + \frac{1}{2} \partial_i \phi^\dagger \{J^i, J^j\} \partial_j \phi \\ & + \frac{1}{2} \partial_i \xi^\dagger \{J^i, J^j\} \partial_j \xi - m^2 (\phi^\dagger \phi - \xi^\dagger \xi). \end{aligned} \quad (3.138)$$

Los momentos canónicos π , τ y sus adjuntos π^\dagger , τ^\dagger son

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_a)} = \partial_0 \phi_a^\dagger - \frac{1}{2} (\partial_i \xi^\dagger J^i)_a, \quad \pi_a^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_a^\dagger)} = \partial_0 \phi_a - \frac{1}{2} (J^i \partial_i \xi^\dagger)_a, \quad (3.139)$$

$$\tau_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \xi_a)} = -\frac{1}{2} (\partial_i \phi^\dagger J^i)_a, \quad \tau_a^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \xi_a^\dagger)} = -\frac{1}{2} (J^i \partial_i \phi)_a. \quad (3.140)$$

Las ecuaciones (3.140) no contienen derivadas temporales de ξ ni de ξ^\dagger como consecuencia de que el Lagrangiano no tiene términos cuadráticos en $\partial_0 \xi$ ni en $\partial_0 \xi^\dagger$; estas ecuaciones son restricciones primarias de la dinámica y serán denotadas con ρ_a y ρ_a^\dagger

$$\rho_a = \tau_a + \frac{1}{2} (\partial_i \phi^\dagger J^i)_a = 0, \quad \rho_a^\dagger = \tau_a^\dagger + \frac{1}{2} (J^i \partial_i \phi)_a = 0. \quad (3.141)$$

La densidad Hamiltoniana \mathcal{H} (2.177) es

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \pi_a (\partial_0 \phi_a) + (\partial_0 \phi_a^\dagger) \pi_a^\dagger + \tau_a (\partial_0 \xi_a) + (\partial_0 \xi_a^\dagger) \tau_a^\dagger - \mathcal{L} \\ = & \pi_a \pi_a^\dagger + \frac{1}{2} \pi_a (J^i \partial_i \xi)_a + \frac{1}{2} (\partial_i \xi^\dagger J^i)_a \pi_a^\dagger \\ & + \frac{1}{4} (\partial_i \xi^\dagger J^i)_a (J^j \partial_j \xi)_a - (\partial_i \phi_a^\dagger) (\partial^i \phi_a) \\ & - \frac{1}{2} \partial_i \phi_a^\dagger \{J^i, J^j\}_{ab} \partial_j \phi_b - \frac{1}{2} \partial_i \xi_a^\dagger \{J^i, J^j\}_{ab} \partial_j \xi_b \\ & + m^2 (\phi_a^\dagger \phi_a - \xi_a^\dagger \xi_a). \end{aligned} \quad (3.142)$$

Puesto que se trata de una dinámica con restricciones, la evolución temporal es generada por el Hamiltoniano H^* en el que se introducen las restricciones a través de multiplicadores de Lagrange

$$H^* = \int d^3x \mathcal{H}^* = \int d^3x \left(\mathcal{H} + \lambda_a \rho_a + \lambda_a^\dagger \rho_a^\dagger \right), \quad (3.143)$$

con lo que las ecuaciones de Hamilton son

$$\partial_0 \phi_a = \frac{\delta H^*}{\delta \pi_a} = \pi_a^\dagger + \frac{1}{2}(J^i \partial_i \xi)_a, \quad (3.144)$$

$$\partial_0 \pi_a = -\frac{\delta H^*}{\delta \phi_a} = -\partial_i \partial^i \phi_a^\dagger - \partial_j \partial_i (\phi^\dagger J^i J^j)_a - m^2 \phi_a^\dagger + \frac{1}{2}(\partial_i \lambda^\dagger J^i)_a, \quad (3.145)$$

$$\partial_0 \xi_a = \frac{\delta H^*}{\delta \tau_a} = \lambda_a, \quad (3.146)$$

$$\partial_0 \tau_a = -\frac{\delta H^*}{\delta \xi_a} = \frac{1}{2} \partial_i (\pi J^i)_a - \frac{3}{4} (\partial_j \partial_i \xi^\dagger J^i J^j)_a + m^2 \xi_a^\dagger, \quad (3.147)$$

y las correspondientes para las variables adjuntas $\phi_a^\dagger, \pi_a^\dagger, \xi_a^\dagger, \tau_a^\dagger$, que resultan ser las ecuaciones adjuntas de las anteriores. Puesto que la dinámica debe obedecer las restricciones, se debe cumplir que

$$\partial_0 \rho_a = \{\rho_a, H^*\} = 0, \quad \partial_0 \rho_a^\dagger = \{\rho_a^\dagger, H^*\} = 0; \quad (3.148)$$

estas producen las restricciones secundarias

$$\kappa_a = \partial_i (\pi J^i)_a - \frac{1}{2} (\partial_j \partial_i \xi^\dagger J^i J^j)_a + m^2 \xi_a^\dagger = 0, \quad (3.149)$$

$$\kappa_a^\dagger = \partial_i (J^i \pi^\dagger)_a - \frac{1}{2} (\partial_j \partial_i J^i J^j \xi)_a + m^2 \xi_a = 0, \quad (3.150)$$

de las que, al exigir que la dinámica las obedezca, se obtiene

$$\lambda_a^\dagger - \partial_i (\phi^\dagger J^i)_a = 0, \quad \lambda_a - \partial_i (J^i \phi)_a = 0, \quad (3.151)$$

ecuaciones que determinan a los multiplicadores de Lagrange λ_a y λ_a^\dagger . De los 24 grados de libertad iniciales, al tomar en cuenta las 12 restricciones $\{f_a\} = \{\rho_a, \rho_a^\dagger, \kappa_a, \kappa_a^\dagger\}$, éstos se reducen, con lo que resultan finalmente $24 - 12 = 12$ grados de libertad. Estos 12 grados de libertad en el espacio fase corresponden a 6 grados de libertad, ó equivalentemente 3 grados de libertad complejos, del espacio de configuraciones y son los necesarios para describir a un campo de partículas y antipartículas de espín $j = 1$.

Como se mencionó en la subsección (2.1.7), la cuantización canónica de los campos con restricciones se realiza de acuerdo al procedimiento desarrollado por Dirac en [51], en el que el bracket de Dirac $\{ \quad, \quad \}_{DB}$, definido como

$$\{A, B\}_{DB} = \{A, B\}_{PB} - \int d^3 z d^3 z' \{A, f_a(t, z)\}_{PB} \Delta_{ab}^{-1}(z, z') \{f_b(t, z'), B\}_{PB}, \quad (3.152)$$

donde $\Delta_{ab}(z, z')$ es el bracket de Poisson entre las restricciones del sistema a tiempos iguales

$$\Delta_{ab}(z, z') = \{f_a(t, z), f_b(t, z')\}_{PB}, \quad (3.153)$$

es el que se promueve hacia el conmutador $-i[\ , \]$. Las expresiones que se obtienen para el bracket de Dirac de los campos y sus momentos canónicos clásicos son

$$\{\phi_a(t, \mathbf{x}), \pi_b(t, \mathbf{y})\}_{DB} = \left[1 - \frac{(\mathbf{J} \cdot \nabla)^2}{2m^2} \right]_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.154)$$

$$\{\phi_a(t, \mathbf{x}), \tau_b(t, \mathbf{y})\}_{DB} = 0, \quad (3.155)$$

$$\{\xi_a(t, \mathbf{x}), \pi_b(t, \mathbf{y})\}_{DB} = 0, \quad (3.156)$$

$$\{\xi_a(t, \mathbf{x}), \tau_b(t, \mathbf{y})\}_{DB} = \frac{(\mathbf{J} \cdot \nabla)_{ab}^2}{2m^2} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.157)$$

que pueden ser recopiladas en la expresión

$$\{\Psi_a(t, \mathbf{x}), (\Pi_\Psi)_b(t, \mathbf{y})\}_{DB} = \left[\Sigma^{00} - \frac{(\mathbf{J} \cdot \nabla)^2}{2m^2} S^{00} \right]_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.158)$$

Habiendo revisado los aspectos clásicos del campo y teniendo la expresión de los brackets de Dirac (3.158) que debe ser promovida hacia el conmutador, se muestran en la siguiente subsección los resultados del proceso de cuantización canónica del campo.

3.2.2. Campo cuántico

Las expansiones de los campos Ψ y $\bar{\Psi}$ en términos de operadores $c_{\mathbf{p},r}^\dagger$, $d_{\mathbf{p},r}^\dagger$ de creación de partículas y operadores $c_{\mathbf{p},r}$, $d_{\mathbf{p},r}$ de aniquilación de partículas son

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_r \left(c_{\mathbf{p},r} u_r(p) e^{-ip \cdot x} + d_{\mathbf{p},r}^\dagger u_r^c(p) e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}, \quad (3.159)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_r \left(c_{\mathbf{p},r}^\dagger \bar{u}_r(p) e^{ip \cdot x} + d_{\mathbf{p},r} \bar{u}_r^c(p) e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}, \quad (3.160)$$

donde $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Las relaciones de conmutación obtenidas a partir de (3.158) como la promoción de los brackets de Dirac hacia el conmutador $-i[\ , \]$ son

$$[\Psi_a(t, \mathbf{x}), (\Pi_\Psi)_b(t, \mathbf{y})] = i \left[\Sigma^{00} - \frac{(\mathbf{J} \cdot \nabla)^2}{2m^2} S^{00} \right]_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.161)$$

que al ser impuestas implican las siguientes relaciones de conmutación entre los operadores de creación y aniquilación de partículas

$$[c_{\mathbf{p},r}, c_{\mathbf{q},s}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [d_{\mathbf{p},r}, d_{\mathbf{q},s}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (3.162)$$

siendo nulas cualesquiera otras relaciones de conmutación entre operadores, independientes de éstas.

Con estas relaciones de conmutación es posible realizar el cálculo explícito de los operadores Hamiltoniano H (3.133), momento \mathbf{P} (3.134) y carga $U(1)$ Q (3.136) para expresarlos en términos de los operadores de creación y aniquilación de partículas. El resultado para el Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x : \partial_0 \bar{\Psi} \Sigma^{00} \partial_0 \Psi - \partial_i \bar{\Psi} \Sigma^{ij} \partial_j \Psi + m^2 \bar{\Psi} \Psi : \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_r E_{\mathbf{p}} \left(c_{\mathbf{p},r}^\dagger c_{\mathbf{p},r} + d_{\mathbf{p},r}^\dagger d_{\mathbf{p},r} \right), \end{aligned} \quad (3.163)$$

para el momento \mathbf{P} es

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int d^3x : \nabla \bar{\Psi} \Sigma^{0\nu} \partial_\nu \Psi + \partial_\mu \bar{\Psi} \Sigma^{\mu 0} \nabla \Psi : \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_r \mathbf{p} \left(c_{\mathbf{p},r}^\dagger c_{\mathbf{p},r} + d_{\mathbf{p},r}^\dagger d_{\mathbf{p},r} \right), \end{aligned} \quad (3.164)$$

y para la carga Q es

$$\begin{aligned} Q &= i \int d^3x : \partial_\alpha \bar{\Psi} \Sigma^{\alpha 0} \Psi - \bar{\Psi} \Sigma^{0\alpha} \partial_\alpha \Psi : \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_r \left(c_{\mathbf{p},r}^\dagger c_{\mathbf{p},r} - d_{\mathbf{p},r}^\dagger d_{\mathbf{p},r} \right), \end{aligned} \quad (3.165)$$

mientras que los operadores número de partículas N_c y N_d están definidos en su forma convencional

$$N_c = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_r c_{\mathbf{p},r}^\dagger c_{\mathbf{p},r}, \quad N_d = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_r d_{\mathbf{p},r}^\dagger d_{\mathbf{p},r}. \quad (3.166)$$

Los resultados para H , \mathbf{P} y Q en términos de los operadores de creación y aniquilación de partículas de las especies c y d , son congruentes con la interpretación de la energía, momento y carga obtenidas como la suma sobre un conjunto de partículas de las especies c y d .

El propagador de Feynman $D(x-y)$ es el valor de expectación en el vacío, del ordenamiento temporal del producto entre el campo $\Psi(x)$, en el punto x , con el campo adjunto $\bar{\Psi}(y)$, en el punto y

$$D(x-y)_{ab} = \langle 0 | T \{ \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y) \} | 0 \rangle. \quad (3.167)$$

El resultado de este cálculo se puede expresar como

$$D(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\Delta(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} + \frac{S^{00} - 1}{2m^2} \delta^{(4)}(x-y), \quad (3.168)$$

donde

$$\Delta(p) \equiv \frac{-p^2 + S(p) + 2m^2}{2m^2}. \quad (3.169)$$

El segundo término en el miembro derecho de (3.168) no es covariante; sin embargo, el propagador a utilizar para el cálculo de amplitudes se obtiene simplemente omitiendo este término no covariante [68], con lo cual el propagador es, finalmente,

$$D(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\Delta(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (3.170)$$

y su correspondiente en el espacio de momentos es, evidentemente,

$$\tilde{D}(p) = \frac{i\Delta(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{\Sigma(p) - m^2\mathbb{1} + i\epsilon\mathbb{1}}, \quad (3.171)$$

donde la última igualdad es simbólica, en la que $1/(\Sigma(p) - m^2\mathbb{1})$ representa la matriz inversa de $\Sigma(p) - m^2\mathbb{1}$ con $\Sigma(p) \equiv \Sigma_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$, y puede demostrarse de la siguiente manera

$$\frac{i}{\Sigma(p) - m^2\mathbb{1} + i\epsilon\mathbb{1}} \frac{R(p) - m^2\mathbb{1}}{R(p) - m^2\mathbb{1}} = \frac{i\Delta(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.172)$$

donde

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu}\mathbb{1} - S_{\mu\nu}), \quad (3.173)$$

y $R(p) \equiv R_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$, haciendo uso de que $R(p)\Sigma(p) = 0$.

Después de esta exposición de la dinámica libre del campo Ψ de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ del grupo homogéneo de Lorentz y sus aspectos clásicos y cuánticos, se aborda a continuación la reseña de la propuesta de materia oscura tensorial.

3.3. Materia oscura tensorial

La separación del Lagrangiano (3.129) en componentes de quiralidad es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}_R \partial^\mu \Psi_L + \partial_\mu \bar{\Psi}_L S^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi_L) - m^2 \bar{\Psi}_R \Psi_L + (L \leftrightarrow R), \quad (3.174)$$

donde se ha usado $\Psi = (\Psi_L, \Psi_R)^T$. El término cinético de este Lagrangiano acopla a las componentes de quiralidad izquierdas y derechas, lo que implica que no es invariante ante transformaciones independientes en ellas y, por lo tanto, éste Lagrangiano no puede tener interacciones de norma quirales. En el contexto del Modelo Estándar, esto significa que el campo Ψ no puede tener interacciones de norma $SU(2)_L$ y, este hecho, motiva su estudio como posible candidato a materia oscura; por otro lado, nada impide, en principio, que este campo Ψ pueda tener interacciones de norma fuertes $SU(3)_c$ o de hipercarga $U(1)_Y$.

Materia oscura tensorial (TDM) es la propuesta para describir a materia oscura con este campo Ψ . El adjetivo ‘tensorial’ se debe a que existe un mapeo [42, 69, 70] entre la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ del HLG y el espacio de tensores antisimétricos de segundo rango, bajo el cual las 6 componentes del espinor $\Psi = (\Psi^i, \Psi^{i+3})^T$ en una base particular son mapeadas hacia las 6 componentes independientes del tensor antisimétrico $\Psi_{\alpha\beta}$ a través de las relaciones

$$\Psi^{ij} = \varepsilon^{ijk} \Psi^k, \quad \Psi^{0i} = \Psi^{i+3}. \quad (3.175)$$

Este mapeo se reseña en la sección (A.2) del apéndice A y se utiliza en el capítulo 4 para hacer los cálculos que allí se presentan. La propuesta de TDM fue estudiada en [60-64] y está planteada bajo un esquema de materia oscura escondida. En este esquema se asume que DM no tiene cargas del SM ni viceversa y las interacciones entre ambos sectores son del tipo *singlete*DM-*singlete*SM. La adopción de este esquema está justificada por las siguientes proposiciones: si DM tuviera carga $SU(3)_c$ interactuaría fuertemente con la materia ordinaria, fenómeno que no se observa; si DM tuviera carga $U(1)_Y$ tendría carga electromagnética y ya no sería materia oscura. Por otro lado, se asume la existencia de un campo de norma $U(1)_D$ oscuro, bajo el cual DM está cargado y que permite distinguir entre sus partículas y antipartículas. Bajo este esquema, el Lagrangiano de interacción entre el sector-DM y el sector-SM tiene la forma

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_n \frac{g_n}{\Lambda^{n-4}} \mathcal{O}_{DM} \mathcal{O}_{SM}, \quad (3.176)$$

donde \mathcal{O}_{DM} y \mathcal{O}_{SM} son operadores *singletes* de los sectores DM y SM, respectivamente, y Λ es una escala de energía que compensa la dimensión de los operadores. El Lagrangiano de interacción de menor dimensión de masa, más general (sin considerar auto-interacciones) que se puede construir es

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\Psi}(g_s \mathbb{1} + ig_p \chi) \Psi \tilde{\Phi} \Phi + g_t \bar{\Psi} M_{\mu\nu} \Psi B^{\mu\nu}, \quad (3.177)$$

donde Φ es el doblete $SU(2)_L$ complejo de Higgs, $\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^*$ es su conjugado de carga y $B^{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos $U(1)_Y$, relacionado con el tensor de esfuerzos $F^{\mu\nu}$ del campo electromagnético y el tensor de esfuerzos $Z^{\mu\nu}$ del bosón Z a través del ángulo de Weinberg θ_W

$$B^{\mu\nu} = \cos \theta_W F^{\mu\nu} + \sin \theta_W Z^{\mu\nu}. \quad (3.178)$$

En las referencias [60-64] se ha puesto a prueba a TDM calculando una serie de observables que, al compararlos con las mediciones que se tienen de ellos, restringen los posibles valores de su masa m y de las constantes de acoplamiento g_s , g_p y g_t . Se encuentra que las predicciones están dentro de las cotas experimentales y observacionales actuales siempre que el valor de la masa de TDM esté en el intervalo [62.470, 62.505] GeV ($m \approx m_H/2$) y la constante de acoplamiento g_s en $[0.98, 1.01] \times 10^{-3}$.

Capítulo 4

Renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para TDM

En el cálculo de amplitudes de procesos con teoría de perturbaciones en teoría cuántica de campos suelen aparecer resultados divergentes que surgen de la región ultravioleta de los diagramas con lazos; éstas son conocidas como divergencias ultravioletas (UV). En algunas teorías estas divergencias pueden ser evitadas al reescribir la propia teoría en términos de sus verdaderas cantidades físicas, éste proceso es conocido como renormalización y las teorías con esta propiedad son conocidas como renormalizables. Dado que en las teorías renormalizables todas las divergencias UV pueden ser evitadas, éstas son teorías consistentes a cualquier escala de energía. En las teorías no-renormalizables, por otro lado, siempre aparecen divergencias UV que no pueden ser evitadas y se manifiestan a partir de una cierta escala de energía; no obstante, debajo de esa escala de energía las teorías no-renormalizables son perfectamente aceptables como teorías efectivas.

Materia oscura tensorial produce predicciones que se encuentran dentro de las cotas experimentales y observacionales actuales para los candidatos a materia oscura y, por lo tanto, es un candidato a DM. El Lagrangiano de interacción entre los sectores DM y SM de menor dimensión es (3.177), cuya dimensión de masa es 4; este hecho abre la posibilidad de que, detrás de esta teoría, exista una teoría fundamental de TDM que sea válida a cualquier escala de energía. El estudio de la renormalización de TDM va en ese sentido: saber si es posible que exista una teoría fundamental de TDM válida a cualquier escala de energía o si se trata, por el contrario, sólo de un modelo efectivo. En este capítulo se aborda esta cuestión estudiando la renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para TDM, a un lazo.

En la primer sección se exponen los fundamentos de renormalización y el procedimiento para realizarla, utilizando para ello el ejemplo de la teoría $\lambda\phi^4$. En la segunda sección se desarrolla el estudio de la renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para TDM. El análisis de los resultados obtenidos nos conduce al estudio de la renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para TDM no-masiva, que se desarrolla en la tercer sección.

4.1. Fundamentos de renormalización

El cálculo de amplitudes de procesos truncado a nivel de árbol, es decir considerando únicamente diagramas de Feynman que no contienen lazos, produce resultados finitos. Con estos resultados es posible calcular secciones eficaces $\sigma = \int d\sigma$ o tasas de decaimiento $\Gamma = \int d\Gamma$ que pueden, posteriormente, ser comparados con los valores que se miden en los experimentos. Sin embargo, el cálculo a nivel de árbol sólo es una aproximación a la amplitud total. La amplitud total de un proceso se obtiene de considerar a todos los diagramas conexos y amputados posibles, congruentes con los estados inicial y final de dicho proceso. Entre ellos se encuentran, desde luego, diagramas con lazos. Así, si se desea obtener una mejor aproximación para la amplitud se deben considerar diagramas que contienen lazos. Las contribuciones de estos diagramas son conocidas como correcciones radiativas. No obstante, el cálculo de algunas de estas contribuciones produce un resultado divergente, cuyo origen se encuentra en la región de integración $l \rightarrow \infty$ de la integral sobre el momento l del lazo y, por esto, son llamadas divergencias ultravioletas (UV). Estos resultados son, al menos en principio, desconcertantes porque no producen un valor que pueda ser comparado con lo que se mide en los experimentos.

La forma de evitar estos aparentes ‘defectos’ de teoría cuántica de campos es a través de la renormalización, que consiste, esencialmente, en una reescritura de la teoría en términos de las verdaderas cantidades físicas \mathcal{O}_f . El primer paso hacia la renormalización es la regularización. La regularización consiste en capturar las divergencias en un parámetro finito Λ (ó ϵ) que, al final, se hará tender hacia un valor específico en el que se recuperan las divergencias de la teoría. Existen diferentes esquemas de regularización, por ejemplo: regularización por corte superior, regularización dimensional, etc. La regularización por corte superior consiste en evaluar las integrales de los momentos l de los lazos no hasta una escala de energía infinita sino hasta una escala superior de energía finita Λ ; al final del cálculo la divergencia se recupera tomando $\Lambda \rightarrow \infty$. La regularización dimensional, por su parte, consiste en evaluar las amplitudes y, como consecuencia, las integrales de los lazos en dimensión D arbitraria; al final del cálculo se hace el reemplazo $D = 4 - 2\epsilon$ y la divergencia se recupera en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Habiendo elegido el esquema de regularización se procede con la renormalización. Un análisis de las consecuencias de las contribuciones divergentes regularizadas, en los diagramas, revela que algunas de estas pueden ser interpretadas como corrimientos ó reescalamientos en los campos, masas y constantes de acoplamiento de la teoría respecto a los valores que tienen originalmente en el Lagrangiano; éstos últimos son conocidos como valores desnudos o cantidades desnudas \mathcal{O}_b . Así, las cantidades físicas \mathcal{O}_f son igual a sus correspondientes cantidades desnudas \mathcal{O}_b más el corrimiento infinito regularizado $\delta\mathcal{O} = \delta\mathcal{O}(\Lambda)$ que depende del parámetro regulador Λ (ó ϵ en regularización dimensional), es decir: $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_b + \delta\mathcal{O}(\Lambda)$. Puesto que las cantidades desnudas \mathcal{O}_b no son ya cantidades físicas, sino parámetros no físicos que se pueden escoger a conveniencia, siempre pueden ser ajustadas de manera que absorban el corrimiento infinito regularizado $\delta\mathcal{O}(\Lambda)$ y de manera que la suma $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_b + \delta\mathcal{O}(\Lambda)$ de como resultado precisamente el valor \mathcal{O}_{exp} que

se mide en el experimento para dicha cantidad, es decir, se escogen como $\mathcal{O}_b = \mathcal{O}_{exp} - \delta\mathcal{O}(\Lambda)$, con lo que resultará $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_{exp}$. Esta manera de elegir a \mathcal{O}_b siempre anulará al infinito regularizado $\delta\mathcal{O}(\Lambda)$ de la cantidad física sin importar el valor que tenga, por lo tanto la cantidad física \mathcal{O}_f será siempre independiente del parámetro regulador Λ y será igual al valor que se mide en el experimento para dicha cantidad. En particular será anulado incluso en el límite divergente, i.e. cuando $\Lambda \rightarrow \infty$ (ó $\epsilon \rightarrow 0$ en regularización dimensional) que implica $\delta\mathcal{O}(\Lambda) \rightarrow \infty$. En síntesis, la renormalización es el proceso de reescritura de una teoría física en términos de las verdaderas cantidades físicas (también llamadas cantidades renormalizadas) de manera tal que todas las divergencias sean absorbidas en las cantidades desnudas (no físicas) correspondientes.

Por supuesto, no todas las teorías son renormalizables. Para conocer de antemano la viabilidad de la renormalizabilidad de una teoría existe un criterio sencillo que se reduce al análisis dimensional de las constantes de acoplamiento de la teoría. Para ilustrar su deducción se considera, como ejemplo, el caso de la teoría $(\lambda/n!)\phi^n$ en D dimensiones. El Lagrangiano de esta teoría es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{n!}\phi^n. \quad (4.1)$$

La contribución de un diagrama que tiene L lazos, a la amplitud de un proceso, será proporcional a la integral

$$\int \frac{d^D k_1 d^D k_2 \cdots d^D k_L}{(k_i^2 - m^2 + i\epsilon) \cdots (k_j^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (4.2)$$

La convergencia/divergencia de esta integral depende, esencialmente, de la comparación entre el número de potencias de momento en el numerador (relacionado con el número de lazos y en algunos casos con el número de vértices) contra el número de potencias de momento en el denominador (relacionado con el número de propagadores). En este sentido resulta útil definir el grado superficial de divergencia \mathcal{D} de un diagrama, de la siguiente manera

$$\mathcal{D} \equiv (\text{potencias de } k \text{ en el numerador}) - (\text{potencias de } k \text{ en el denominador}). \quad (4.3)$$

Si para un diagrama se tiene $\mathcal{D} > 0$, se espera que el diagrama tenga divergencia proporcional a $\Lambda^{\mathcal{D}}$, donde Λ es el regulador de corte superior; si se tiene $\mathcal{D} = 0$, se espera que tenga divergencia proporcional a $\ln \Lambda$; mientras que si se tiene $\mathcal{D} < 0$, se espera que no contenga divergencia. A pesar de que existen excepciones a este criterio es, de cualquier manera, un método conveniente en primera instancia. En la teoría $(\lambda/n!)\phi^n$ en D dimensiones, cada lazo contribuye con D potencias de k en el numerador y cada propagador contribuye con 2 potencias de k en el denominador, por lo que el valor de \mathcal{D} es

$$\mathcal{D} = DL - 2P, \quad (4.4)$$

donde $L =$ número de lazos y $P =$ número de propagadores. El número de lazos L se puede expresar en términos del número de propagadores P y el número de vértices V como

$$L = P - V + 1, \quad (4.5)$$

a su vez, puesto que el vértice esta conectado a n líneas que pueden ser líneas externas o propagadores que conectan a otro vértice, se tiene

$$nV = N + 2P, \quad (4.6)$$

donde $N =$ número de líneas externas. Con estas dos últimas expresiones es posible reescribir a \mathcal{D} en términos sólo de N y V , que resulta ser

$$\mathcal{D} = D + \left[n \left(\frac{d-2}{2} \right) - D \right] V - \left(\frac{D-2}{2} \right) N. \quad (4.7)$$

Para un proceso específico N es constante. El signo del factor que multiplica a V determina si \mathcal{D} es creciente, consante, ó decreciente con V . Si el factor es positivo entonces \mathcal{D} es creciente con V , lo que significa que el grado superficial de divergencia de los diagramas crece con el orden del diagrama y, por lo tanto, hay un número infinito de diagramas divergentes; en este caso la teoría es no-renormalizable porque se necesitaría un número infinito de parámetros en el Lagrangiano para absorber este número infinito de divergencias. Si el factor es nulo entonces \mathcal{D} es constante con V , lo que significa que el grado superficial de divergencia de los diagramas no depende del orden del diagrama; en este caso la teoría es renormalizable. Si el factor es negativo entonces \mathcal{D} es decreciente con V , lo que significa que el grado superficial de divergencia de los diagramas decrece con el orden del diagrama y, por lo tanto, sólo hay un número finito de diagramas divergentes; en este caso se dice que la teoría es super-renormalizable porque sólo se necesita un número finito de parámetros en el Lagrangiano para absorber estas divergencias. Este factor que multiplica a V coincide, de hecho, con el negativo de la dimensión de masa de la constante de acoplamiento λ en el Lagrangiano (4.1), como se puede comprobar al hacer el análisis dimensional de λ partiendo de que la acción $S = \int d^D x \mathcal{L}$ es adimensional y, asimismo, la expresión (4.7) puede ser deducida directamente de un análisis dimensional [40]. La conclusión de que la dimensión de masa de la constante de acoplamiento determina la pendiente del grado superficial de divergencia $\mathcal{D} = \mathcal{D}(V)$ como función de V y por lo tanto determina si la interacción es no-renormalizable, renormalizable ó super-renormalizable no es propia de la teoría $(\lambda/n!) \phi^n$ sino que, en realidad, es un resultado general que se cumple para cualquier teoría. Así pues, el criterio es finalmente

- Teoría no-renormalizable: la constante de acoplamiento tiene dimensión negativa de masa.
- Teoría renormalizable: la constante de acoplamiento es adimensional.

- Teoría super-renormalizable: la constante de acoplamiento tiene dimensión positiva de masa.

Con este criterio se pueden clasificar directamente como no-renormalizables a las teorías cuya constante de acoplamiento tiene dimensión negativa de masa sin profundizar mas en su estudio. En cambio, para demostrar la renormalización de una teoría no solo es necesario que su constante de acoplamiento sea adimensional o que tenga dimensión positiva de masa, sino que se debe realizar el procedimiento arriba descrito, es decir, reescribir la teoría en términos de las verdaderas cantidades físicas y mostrar que es posible absorber todas las divergencias en las cantidades desnudas. La manera de realizarlo se delinea a continuación.

El procedimiento sistemático para la renormalización de una teoría se conoce como teoría de perturbaciones renormalizadas y se describe enseguida; para fines ilustrativos se revisa el caso de la teoría $(\lambda/4!)\phi^4$ en $D = 4$. El Lagrangiano de esta teoría es (2.276) y la constante de acoplamiento λ es adimensional. El grado superficial de divergencia (4.7) es

$$\mathcal{D} = 4 - N, \quad (4.8)$$

lo que indica que sólo existen tres diagramas superficialmente divergentes: aquellos con $N = 0$, $N = 2$ y $N = 4$, que se muestran enseguida



Puesto que el primero sólo representa un corrimiento inobservable en la energía del vacío, los únicos diagramas significativos son el segundo y tercero. Las cantidades que aparecen en el Lagrangiano son las cantidades desnudas: el campo desnudo, que se denotará como ϕ_b ; la masa desnuda, que se denotará como m_b ; y la constante de acoplamiento desnuda, que se denotará como λ_b , es decir

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_b \partial^\mu \phi_b - \frac{m_b^2}{2} \phi_b^2 - \frac{\lambda_b}{4!} \phi_b^4. \quad (4.10)$$

El objetivo es reescribir este Lagrangiano en términos de las cantidades físicas ϕ , m y λ , de manera que se obtengan términos análogos a los que aparecen en (4.10) para ellas y, como consecuencia, se obtendrán términos residuales, llamados contratérminos, que contienen a las cantidades desnudas ϕ_b , m_b y λ_b ; éstos contratérminos serán utilizados, posteriormente, para absorber las divergencias de los diagramas. En primer lugar se escribe el campo desnudo ϕ_b en términos del campo físico ϕ ; la relación entre ambos es

$$\phi_b = Z^{1/2} \phi, \quad (4.11)$$

3. En cada diagrama considerar la contribución del contratérmino

$$\text{---} \otimes \text{---} = i(p^2 \delta_Z - \delta_m). \quad (4.19)$$

4. En cada diagrama considerar la contribución del contratérmino

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \otimes \\ \diagdown \end{array} = -i\delta_\lambda. \quad (4.20)$$

Además se deben considerar, también, las reglas 3, 4, 5 y 6 que se listaron en la subsección (2.1.7). A pesar de que las reglas (4.17) y (4.18) parecen iguales a las (2.309) y (2.310) de la subsección (2.1.7), las (4.17) y (4.18) están escritas en términos de las cantidades físicas mientras que (2.309) y (2.310) estaban en términos de las cantidades desnudas.

Para ilustrar este procedimiento de renormalización, a continuación se muestra su aplicación en la teoría $(\lambda/4!)\phi^4$ en $D = 4$ a un lazo, utilizando el esquema de regularización dimensional. Primeramente es conveniente reescribir la condición de renormalización (4.15) de la siguiente manera: sea $-iM^2(p^2)$ la suma de todos los diagramas conexos y amputados de dos líneas externas, tales que al cortar una de sus líneas internas, el diagrama no se separa en dos piezas; éste tipo de diagramas son llamados diagramas irreducibles de una partícula y son abreviados 1PI

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = -iM^2(p^2). \quad (4.21)$$

El diagrama con dos líneas externas, incluyendo las contribuciones a todos los órdenes, es la suma de todos los diagramas formados como la sucesión de diagramas 1PI, que puede ser escrita como una serie geométrica

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{---} &= \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} [-iM^2(p^2)] \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left\{ 1 + [-iM^2(p^2)] \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots \right\} \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left\{ \frac{1}{1 - [-iM^2(p^2)] \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}} \right\} \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2) + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Escrito de esta manera, la condición de renormalización (4.15) se traduce en las siguientes condiciones para la función $M^2(p^2)$

$$M^2(p^2)|_{p^2=m^2} = 0, \quad \left. \frac{d}{dp^2} M^2(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0; \quad (4.23)$$

la primera corresponde a exigir que el polo se encuentre en la masa física m^2 y la segunda corresponde a exigir que su residuo sea igual a 1. Ahora se procede al cálculo de $-iM^2(p^2)$. Las contribuciones a un lazo vienen del siguiente diagrama y el contratérmino correspondiente, cuyo resultado es

$$\begin{aligned} -iM^2(p^2) &= \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} \\ &= -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \\ &= -\frac{i\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{(m^2)^{1-D/2}} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m). \end{aligned} \quad (4.24)$$

El primer término contiene una divergencia en $D = 4$, como se puede comprobar al hacer el reemplazo $D = 4 - 2\epsilon$ y desarrollar en serie alrededor de $\epsilon = 0$

$$\frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{(m^2)^{1-D/2}} = \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left[-\frac{1}{\epsilon} + \gamma - 1 + \ln m^2 - \ln 4\pi + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right], \quad (4.25)$$

donde $\gamma \approx 0.5772$ es la constante de Euler–Mascheroni. Para que las condiciones de renormalización (4.23) se satisfagan, la elección de los contratérminos δ_Z y δ_m debe ser

$$\delta_Z = 0, \quad \delta_m = -\frac{\lambda}{2(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{(m^2)^{1-D/2}}. \quad (4.26)$$

Es de notar que, como consecuencia de esta elección, no solo se obtiene un resultado finito para $M^2(p^2)$ sino que, de hecho, se cumple $M^2(p^2) = 0$ para todo p^2 ; este es un resultado peculiar de la teoría $(\lambda/4!)\phi^4$ a nivel de un lazo que, en general, no se cumple en otras teorías. Ahora se aborda el cálculo del vértice $i\mathcal{M}(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$. Las contribuciones hasta nivel de un lazo son los siguientes cuatro diagramas y el contratérmino correspondiente, cuyo resultado es

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= \\ & \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} \\ &= -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda, \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde s , t y u son las variables de Mandelstam y

$$\begin{aligned} iV(p^2) &\equiv \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= -\frac{i}{2} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-D/2}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Esta integral contiene una divergencia en $D = 4$, como se puede comprobar al hacer el reemplazo $D = 4 - 2\epsilon$ y desarrollar en serie alrededor de $\epsilon = 0$

$$iV(p^2) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln [m^2 - x(1-x)p^2] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right). \quad (4.29)$$

Para satisfacer la condición de renormalización (4.16), la elección del contratérmino δ_λ debe ser

$$\begin{aligned} \delta_\lambda &= -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)] \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{[m^2 - x(1-x)4m^2]^{2-D/2}} + \frac{2}{[m^2]^{2-D/2}} \right) \\ &= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{3}{\epsilon} - 3\gamma + 3\ln 4\pi - \ln [m^2 - x(1-x)4m^2] - 2\ln m^2 \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Reemplazando este valor de δ_λ en (4.27) se comprueba que se obtiene un resultado finito

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)s}{m^2 - x(1-x)4m^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)t}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)u}{m^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

De esta manera se completa la renormalización de la teoría $(\lambda/4!)\phi^4$ en $D = 4$ a un lazo.

El esquema de renormalización que se ha expuesto es conocido como esquema de renormalización físico ó on-shell, porque los contratérminos son elegidos de manera que se cumplan las condiciones (4.15) y (4.16), que son las que definen a las cantidades físicas. Sin embargo, en algunos casos, para el cálculo de algunas cantidades sólo es necesario sustraer la parte divergente de los diagramas, sin necesidad de que se deban cumplir las condiciones de renormalización on-shell. Es debido a esta necesidad, que existe un esquema de renormalización alternativo conocido como esquema de substracción mínima (MS), en el que se realiza precisamente esto: los contratérminos son elegidos de manera que anulen sólomente los términos divergentes $\sim 1/\epsilon$ de los diagramas. Existe, también, otro esquema conocido como esquema de substracción mínima modificada ($\bar{M}S$) en el que se sustraen los términos divergentes $\sim 1/\epsilon$ y los términos constantes γ , $\ln 4\pi$ que aparecen al evaluar las integrales. En este trabajo se hace uso del esquema de substracción mínima MS .

Habiendo expuesto los fundamentos de renormalización y el procedimiento sistemático para realizarla, se continúa ahora con la exposición de la parte medular de esta tesis: el estudio de la renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para TDM, a un lazo.

4.2. Renormalización a un lazo

El Lagrangiano que describe la dinámica libre de TDM es (3.129), que aquí se reescribe para tener como referencia

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\Psi} \Sigma^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi - m^2 \bar{\Psi} \Psi. \quad (4.32)$$

El análisis dimensional de este Lagrangiano muestra que la dimensión de masa del campo Ψ es igual a 1. El esquema de regularización que se empleará será regularización dimensional y el esquema de renormalización que se abordará será el esquema de substracción mínima MS . La estructura de esta sección es la siguiente: en la primer subsección se introduce la interacción con el campo de norma $U(1)$ a través del principio de norma; en la segunda subsección se reescribe el Lagrangiano en términos de las cantidades físicas, con lo que se obtiene la separación entre términos físicos y contratérminos; en la tercer subsección se muestran las reglas de Feynman para ambos tipos de términos en el Lagrangiano; en la cuarta subsección se verifica el cumplimiento de la identidad de Ward-Takahashi, que es una identidad que relaciona a las funciones de correlación en una teoría de norma; en la quinta subsección se realiza el cálculo de la autoenergía del campo de norma $U(1)$; en la sexta subsección se realiza el cálculo de la autoenergía del campo Ψ ; y, finalmente, en la séptima subsección se hace un análisis en el que se identifica el origen primordial de los resultados que se obtienen para ambas autoenergías.

4.2.1. Interacción con el campo de norma B^μ

El acoplamiento del campo Ψ de TDM con un campo B^μ de norma $U(1)$ a través del principio de norma manifiesta la suposición de que el campo Ψ está cargado bajo B^μ : como consecuencia, esta carga permite distinguir a las partículas de Ψ de sus anti-partículas. Del principio de norma, la interacción es introducida insertando el acoplamiento mínimo por medio de la derivada covariante como

$$\partial^\mu \Psi \rightarrow D^\mu \Psi = \partial^\mu \Psi + ig B^\mu \Psi, \quad \partial^\mu \bar{\Psi} \rightarrow D^{\dagger\mu} \bar{\Psi} = \partial^\mu \bar{\Psi} - ig B^\mu \bar{\Psi}, \quad (4.33)$$

donde g es la carga. El Lagrangiano de esta teoría interactuante se obtiene al realizar el acoplamiento mínimo en (4.32) y sumar el término cinético y el término de fijación de norma, o gauge-fixing, de B^μ

$$\mathcal{L} = D^{\dagger\mu} \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} D^\nu \Psi - m^2 \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu B^\mu)^2, \quad (4.34)$$

donde $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ y el último es el término de fijación de norma, con parámetro de norma ξ . Desplegando los términos en la derivada covariante, este Lagrangiano es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= D^{\dagger\mu} \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} D^\nu \Psi - m^2 \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu B^\mu)^2 \\
 &= (\partial^\mu \bar{\Psi} - ig B^\mu \bar{\Psi}) \Sigma_{\mu\nu} (\partial^\nu \Psi + ig B^\nu \Psi) - m^2 \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu B^\mu)^2 \\
 &= \partial^\mu \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi - m^2 \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu B^\mu)^2 \\
 &\quad + ig [\partial^\mu \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \Psi - \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\mu \Psi] B^\nu + g^2 \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \Psi B^\mu B^\nu.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

El primer renglón en el último miembro de esta ecuación contiene los términos libres de los campos y el segundo renglón contiene a los términos de interacción: uno de orden g y otro de orden g^2 . El análisis dimensional de este Lagrangiano muestra que la constante de acoplamiento g es adimensional, por lo tanto esta teoría es candidata a ser renormalizable.

Los campos y parámetros en (4.35) son los campos y parámetros desnudos, que de ahora en adelante serán denotados con un subíndice b para distinguirlos de los campos y parámetros físicos ó renormalizados, que serán introducidos en la siguiente subsección. El Lagrangiano (4.35) es entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= D_b^{\dagger\mu} \bar{\Psi}_b \Sigma_{\mu\nu} D_b^\nu \Psi_b - m_b^2 \bar{\Psi}_b \Psi_b - \frac{1}{4} B_b^{\mu\nu} B_{b\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_b} (\partial_\mu B_b^\mu)^2 \\
 &= \partial^\mu \bar{\Psi}_b \Sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi_b - m_b^2 \bar{\Psi}_b \Psi_b - \frac{1}{4} B_b^{\mu\nu} B_{b\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_b} (\partial_\mu B_b^\mu)^2 \\
 &\quad + ig_b [\partial^\mu \bar{\Psi}_b \Sigma_{\mu\nu} \Psi_b - \bar{\Psi}_b \Sigma_{\mu\nu} \partial^\mu \Psi_b] B_b^\nu + g_b^2 \bar{\Psi}_b \Sigma_{\mu\nu} \Psi_b B_b^\mu B_b^\nu.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

En la siguiente subsección se introducen los campos y parámetros físicos y se realiza la separación de éste Lagrangiano en términos físicos y contratérminos.

4.2.2. Términos físicos y contratérminos

El Lagrangiano (4.36) debe ser reexpresado en términos de las cantidades físicas de manera que se obtengan términos análogos a los que aparecen en él, pero escritos en términos de ellas y, como consecuencia, se obtendrán los contratérminos. Primeramente se escriben los campos desnudos Ψ_b y B_b^μ en términos de los campos físicos Ψ y B^μ a través de las relaciones

$$\Psi_b = Z_2^{1/2} \Psi, \quad B_b^\mu = Z_3^{1/2} B^\mu, \tag{4.37}$$

con las que el Lagrangiano es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= Z_2 \partial^\mu \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi - Z_2 m_b^2 \bar{\Psi} \Psi - \frac{Z_3}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{Z_3}{2\xi_b} (\partial_\mu B^\mu)^2 \\
 &\quad + ig_b Z_2 Z_3^{1/2} [\partial^\mu \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \Psi - \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\mu \Psi] B^\nu + g_b^2 Z_2 Z_3 \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \Psi B^\mu B^\nu.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

La separación de este Lagrangiano en términos físicos y contratérminos es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \partial^\mu \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi - m^2 \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu B_\mu)^2 \\
 & + ig [\partial^\mu \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \Psi - \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\mu \Psi] B^\nu + g^2 \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \Psi B^\mu B^\nu \\
 & + \delta_{Z_2} [\partial^\mu \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi - m^2 \bar{\Psi} \Psi] - \delta_m \bar{\Psi} \Psi - \frac{\delta_{Z_3}}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
 & + ig\delta_g [\partial^\mu \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \Psi - \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\mu \Psi] B^\nu + g^2 \delta_3 \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \Psi B^\mu B^\nu,
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

que se logra introduciendo las constantes definidas como

$$\delta_{Z_2} = Z_2 - 1, \quad \delta_{Z_3} = Z_3 - 1, \quad \delta_m = Z_2(m_b^2 - m^2), \tag{4.40}$$

$$\delta_g = \frac{g_b}{g} Z_2 Z_3^{1/2} - 1, \quad \delta_3 = \frac{g_b^2}{g^2} Z_2 Z_3 - 1, \quad \frac{1}{\xi} = \frac{Z_3}{\xi_b}. \tag{4.41}$$

Los términos en los primeros dos renglones de (4.39) son análogos a (4.36), pero escritos sólo en función de las cantidades físicas, éstos son los términos físicos; los términos en los últimos dos renglones de (4.39) dependen de las cantidades desnudas a través de las constantes δ , éstos son los contratérminos. En la siguiente subsección se presentan las reglas de Feynman del Lagrangiano (4.39).

4.2.3. Reglas de Feynman

Las reglas de Feynman para los términos físicos del Lagrangiano (4.39) son

$$\begin{aligned}
 \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} &= \frac{i}{\Sigma(p) - m^2 + i\epsilon}, & \mu \xrightarrow{q} \nu &= \frac{-i \left(\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right)}{q^2 + i\epsilon}, \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= -ig \Sigma_{\mu\nu} (p' + p)^\nu, & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= 2ig^2 \Sigma_{\mu\nu},
 \end{aligned}$$

donde se debe recordar que la expresión para el propagador del campo Ψ es simbólica y representa

$$\tilde{D}(p) = \frac{i}{\Sigma(p) - m^2 + i\epsilon} = \frac{i\Delta(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad \Delta(p) = \frac{-p^2 + S(p) + 2m^2}{2m^2}, \tag{4.42}$$

como se mencionó en (3.171), además de que $\Sigma(p) \equiv \Sigma_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$ y $S(p) \equiv S_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$. Es de notar que la única regla que depende del parámetro de norma ξ del campo B^μ es la de su

propagador. Por su parte, las reglas de Feynman para los contratérminos son

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \text{---} \otimes \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= i\delta_{Z_2}(\Sigma(p) - m^2) - i\delta_m, & \begin{array}{c} \text{---} \otimes \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= -i\delta_{Z_3}(q^2\eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu), \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \otimes \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= -ig\delta_g\Sigma_{\mu\nu}(p' + p)^\nu, & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \otimes \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= 2ig^2\delta_3\Sigma_{\mu\nu}.
 \end{aligned}$$

A diferencia de las reglas para los términos físicos, en las reglas para los contratérminos no aparece el parámetro de norma ξ del campo B^μ . En la siguiente subsección se revisa el cumplimiento de la identidad de Ward-Takahashi para este conjunto de reglas de Feynman.

4.2.4. Identidad de Ward-Takahashi

La identidad de Ward-Takahashi es una identidad que relaciona a las funciones de correlación de n puntos con funciones de correlación de $n - 1$ puntos, en el espacio de momentos, de teorías de norma. Esta identidad es consecuencia de la invarianza de norma de la teoría y, para el caso de una teoría de norma $U(1)$, es enunciada de la siguiente manera. La amplitud $\mathcal{M}(k; p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ de un proceso que involucra a una partícula externa (inicial o final) del campo de norma con momento k , que en el contexto de QED sería un fotón y por simplicidad así será llamada de manera genérica, tiene la forma $\mathcal{M}(k; p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) = \epsilon_\mu(k)\mathcal{M}^\mu(k; p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$, donde $\epsilon_\mu(k)$ es el estado de polarización del fotón, p_1, \dots, p_n son los momentos del resto de partículas iniciales y q_1, \dots, q_n los momentos del resto de partículas finales. Sea $\mathcal{M}_0(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ la amplitud obtenida de remover al fotón externo de momento k , entonces la identidad de Ward-Takahashi establece que

$$\begin{aligned}
 k_\mu\mathcal{M}^\mu(k; p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) &= g \sum_i [\mathcal{M}_0(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_i - k, \dots, q_n) \\
 &\quad - \mathcal{M}_0(p_1, \dots, p_i + k, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)].
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Es posible mostrar [40] que el miembro derecho de esta ecuación no contribuye en el cálculo de los elementos de la matriz S , por lo que, cuando $\mathcal{M}(k; p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ es un elemento de la matriz S , la identidad de Ward-Takahashi (4.43) se reduce a

$$k_\mu\mathcal{M}^\mu(k; p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) = 0, \tag{4.44}$$

que, en esta forma, es llamada, simplemente, identidad de Ward.

En el caso de la teoría de norma $U(1)$ para TDM, la verificación de la identidad (4.43) a nivel de árbol es inmediata. Si se denota por $iV_\mu(p, q)$ el valor del vértice $\Psi\Psi B$ y por $iV_{\mu\nu}(p, q, k)$ el valor del vértice $\Psi\Psi BB$

$$iV_\mu(p, q) \equiv -ig\Sigma_{\mu\nu}(p + q)^\nu, \quad iV_{\mu\nu}(p, q, k) \equiv 2ig^2\Sigma_{\mu\nu}, \tag{4.45}$$

la identidad establece las siguientes dos igualdades

$$k^\mu V_\mu(p, q) = g[\tilde{D}^{-1}(q - k) - \tilde{D}^{-1}(p + k)], \quad (4.46)$$

$$k^\mu V_{\mu\nu}(p, q, k) = g[V_\nu(p, q - k) - V_\nu(p + k, q)]. \quad (4.47)$$

La verificación de la primera de ellas es

$$\begin{aligned} k^\mu V_\mu(p, q) &= g[\tilde{D}^{-1}(q - k) - \tilde{D}^{-1}(p + k)] \\ k^\mu [-g\Sigma_{\mu\nu}(p + q)^\nu] &= g[\Sigma(q - k) - m^2] - g[\Sigma(p + k) - m^2] \\ -g\Sigma_{\mu\nu}(q - p)^\mu (p + q)^\nu &= g[\Sigma(p) - m^2] - g[\Sigma(q) - m^2] \\ -g\Sigma_{\mu\nu}(q^\mu q^\nu - p^\mu p^\nu) &= g[\Sigma(p) - \Sigma(q)], \end{aligned} \quad (4.48)$$

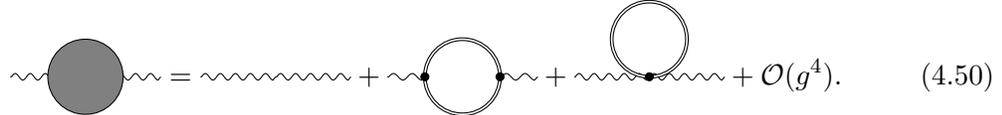
donde se ha usado $q = p + k$. La verificación de la segunda es

$$\begin{aligned} k^\mu V_{\mu\nu}(p, q, k) &= g[V_\nu(p, q - k) - V_\nu(p + k, q)] \\ k^\mu [2g^2\Sigma_{\mu\nu}] &= g[-g\Sigma_{\nu\mu}(q - k + p)^\mu] - g[-g\Sigma_{\nu\mu}(q + p + k)^\mu] \\ 2g^2\Sigma_{\mu\nu}(q - p)^\mu &= g[-g\Sigma_{\mu\nu}(2p)^\mu] - g[-g\Sigma_{\mu\nu}(2q)^\mu] \\ 2g^2\Sigma_{\mu\nu}(q - p)^\mu &= 2g^2\Sigma_{\mu\nu}(q - p)^\mu. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Por lo tanto, la identidad de Ward-Takahashi se cumple a nivel de árbol. En la siguiente subsección se comienza el cálculo de los diagramas para abordar la renormalización de esta teoría.

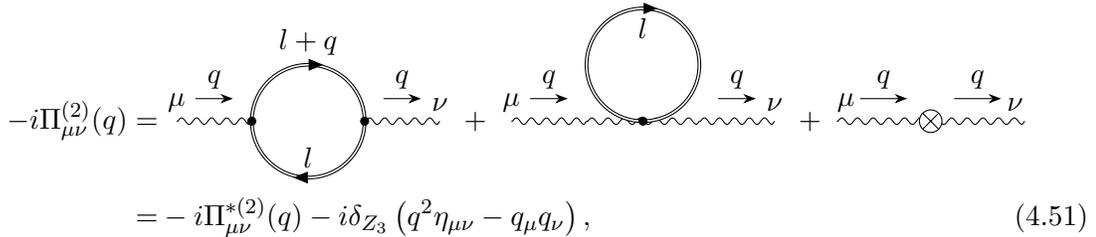
4.2.5. Autoenergía del campo de norma B^μ

La autoenergía de un campo es la suma de las contribuciones de orden superior al nivel de árbol que tiene su función de correlación de dos puntos (en el espacio de momentos); en otras palabras, es la suma de las correcciones, a todos los órdenes, a su propagador. Para esta teoría, la función de correlación de dos puntos del campo B^μ es



$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \mathcal{O}(g^4). \quad (4.50)$$

La autoenergía física a nivel de un lazo es de orden g^2 y se denotará como $-i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q)$; está compuesta por los diagramas segundo y tercero del miembro derecho de la ecuación anterior más el contratérmino correspondiente



$$\begin{aligned} -i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) &= \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} \\ &= -i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) - i\delta_{Z_3} (q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu), \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde $-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q)$ es la suma de las amplitudes de los diagramas de un lazo

$$-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2}. \quad (4.52)$$

La evaluación de la amplitud $-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q)$ a partir de estos diagramas, usando las reglas de Feynman, es

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) &= \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ [-ig\Sigma_{\mu\alpha}(2l+q)^\alpha] \frac{i}{\Sigma(l+q) - m^2 + i\epsilon} \right. \\ &\quad \times [-ig\Sigma_{\nu\beta}(2l+q)^\beta] \frac{i}{\Sigma(l) - m^2 + i\epsilon} \\ &\quad \left. + [2ig^2\Sigma_{\mu\nu}] \frac{i}{\Sigma(l) - m^2 + i\epsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Para regularizar dimensionalmente, se debe evaluar esta integral en dimensión D arbitraria y posteriormente hacer la sustitución $D = 4 - 2\epsilon$ para recuperar la divergencia en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. La medida de integración pasa a ser $d^D l / (2\pi)^D$ y la extensión de las definiciones de los operadores $S_{\mu\nu}$ y $\Sigma_{\mu\nu}$ a dimensión D se realiza de la siguiente manera. Como se comentó en la sección (3.3) y se reseña en la sección (A.2) del apéndice A, en $D = 4$ existe un mapeo [42, 69, 70] con el que es posible reescribir los espinores de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ como tensores antisimétricos de segundo rango. Así, por ejemplo, las 6 componentes del espinor $\Psi = (\Psi^i, \Psi^{i+3})^T$ de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ en una base particular, son mapeadas hacia las 6 componentes independientes del tensor antisimétrico $\Psi_{\alpha\beta}$ a través de las relaciones

$$\Psi^{ij} = \varepsilon^{ijk} \Psi^k, \quad \Psi^{0i} = \Psi^{i+3}, \quad (4.54)$$

es decir, cada índice espinorial es mapeado hacia un par de índices de Lorentz antisimétricos; a estos índices de Lorentz se les suele llamar índices internos de Lorentz para diferenciarlos de los índices de Lorentz que no están relacionados con la estructura interna de la representación. Bajo este mapeo, los operadores \mathcal{O} de $(1, 0) \oplus (0, 1)$ son reescritos como tensores $\mathcal{O}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ de cuarto rango, antisimétricos en los índices $\alpha\beta$ y en los $\gamma\delta$. De esta manera, los operadores $\mathbb{1}$ y $S_{\mu\nu}$ son reescritos como

$$\mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}), \quad (4.55)$$

$$(S_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\mu\nu}\mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \eta_{\mu\gamma}\mathbb{1}_{\alpha\beta\nu\delta} - \eta_{\mu\delta}\mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\nu} - \eta_{\nu\gamma}\mathbb{1}_{\alpha\beta\mu\delta} - \eta_{\nu\delta}\mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\mu}; \quad (4.56)$$

la reescritura del resto de operadores de la base de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ se muestra en la sección (A.2) del apéndice A. Con estos resultados, el operador $\Sigma_{\mu\nu}$ es reescrito como

$$\begin{aligned} (\Sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} + (S_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta}) \\ &= \eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\nu\delta} + \eta_{\mu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\nu} + \eta_{\nu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\mu\delta} + \eta_{\nu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\mu}). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Este mapeo permite, entonces, reescribir a los operadores $\mathbb{1}$ y $S_{\mu\nu}$ y, como consecuencia, a $\Sigma_{\mu\nu}$ en términos únicamente de la métrica $\eta_{\mu\nu}$. A partir de estas expresiones, la extensión de la definición de los tensores $\mathbb{1}$, $S_{\mu\nu}$ y $\Sigma_{\mu\nu}$ a dimensión D arbitraria es directa: simplemente se sustituye la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$ en $D = 4$ por la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, \dots, -1)$ en dimensión D . La integral en dimensión D es entonces

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \text{Tr} \left\{ [-ig\Sigma_{\mu\alpha}(2l+q)^\alpha] \frac{i}{\Sigma(l+q) - m^2 + i\epsilon} \right. \\ &\quad \times [-ig\Sigma_{\nu\beta}(2l+q)^\beta] \frac{i}{\Sigma(l) - m^2 + i\epsilon} \\ &\quad \left. + [2ig^2\Sigma_{\mu\nu}] \frac{i}{\Sigma(l) - m^2 + i\epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (4.58)$$

que, utilizando la expresión (4.42) para el propagador, es

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) &= g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \left[\frac{\text{Tr} \{ \Sigma_{\mu\alpha} \Delta(l+q) \Sigma_{\nu\beta} \Delta(l) \} (2l+q)^\alpha (2l+q)^\beta}{[(l+q)^2 - m^2 + i\epsilon][l^2 - m^2 + i\epsilon]} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\text{Tr} \{ \Sigma_{\mu\nu} \Delta(l) \}}{l^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

El cálculo de esta integral puede realizarse empleando las técnicas convencionales para computar integrales D dimensionales, por ejemplo: parámetros de Feynman, rotación de Wick, reducción de Passarino-Veltman, etc. Su cálculo puede realizarse, también, con ayuda del software computacional *Wolfram Mathematica* [71] haciendo uso del paquete *FeynCalc* [72-74] al expresar todos los operadores que contiene, en términos únicamente de la métrica $\eta_{\mu\nu}$ en dimensión D . El resultado que se obtiene, de esta segunda manera, es

$$-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) = -i\Pi^{*(2)}(q^2) (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu), \quad (4.60)$$

donde la función escalar $-i\Pi^{*(2)}(q^2)$ es

$$\begin{aligned} -i\Pi^{*(2)}(q^2) &= -\frac{i\pi^2 g^2}{16D(D-1)m^4 q^2} \\ &\times \left\{ 4m^2 [8D(D-1)(D-2)m^4 + 2(D+1)(D+2)m^2 q^2 - Dq^4] B_0(0, m^2, m^2) \right. \\ &\quad \left. - D(D-2) (4m^2 - q^2) [8(D-1)m^4 + 2(D-7)m^2 q^2 + q^4] B_0(q^2, m^2, m^2) \right\}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

y la función $B_0(q^2, m^2, m^2)$ es una de las integrales de Passarino-Veltman [75], definida, en general, como

$$i\pi^2 B_0(q_{10}^2, m_0^2, m_1^2) = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(l + q_0)^2 - m_0^2 + i\epsilon][(l + q_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon]}, \quad (4.62)$$

con $q_{10}^2 = (q_1 - q_0)^2$; en particular las integrales que aparecen en (4.61) son

$$i\pi^2 B_0(q^2, m^2, m^2) = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(l + \frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon][(l - \frac{q}{2})^2 - m^2 + i\epsilon]}, \quad (4.63)$$

$$i\pi^2 B_0(0, m^2, m^2) = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{[l^2 - m^2 + i\epsilon]^2}. \quad (4.64)$$

En el apéndice B se expone brevemente el método de reducción de Passarino-Veltman y sus integrales. La forma del resultado (4.60) garantiza el cumplimiento de la identidad de Ward (4.44), puesto que al contraer $-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q)$ con q^μ ó q^ν , se anula

$$-iq^\mu \Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) = -i\Pi^{*(2)}(q^2) (q^2 q^\mu \eta_{\mu\nu} - q^2 q_\nu) = 0, \quad (4.65)$$

lo que significa que la identidad de Ward se cumple también a nivel de un lazo.

En el esquema de substracción mínima *MS*, la renormalización se realiza sustrayendo con el contratérmino únicamente los términos divergentes de la amplitud. Para obtener el término divergente de (4.61) se debe realizar la sustitución $D = 4 - 2\epsilon$ y desarrollar en serie de potencias de ϵ alrededor de $\epsilon = 0$. Realizando este procedimiento con *FeynCalc* se obtiene que la parte divergente de $-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q^2)$, que se denota como $\text{Div}[-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q^2)]$, es

$$\text{Div}[-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q^2)] = -\frac{ig^2}{384\pi^2 m^4 \epsilon} (78m^4 - 12m^2 q^2 + q^4), \quad (4.66)$$

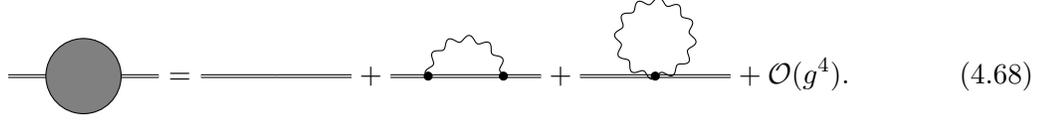
en el que la divergencia está expresada en el factor $1/\epsilon$. Con este resultado y de la expresión (4.51), la parte divergente de la autoenergía física $-i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q)$, denotada como $\text{Div}[-i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q)]$, es finalmente

$$\text{Div}[-i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q)] = -\left[\frac{ig^2}{384\pi^2 m^4 \epsilon} (78m^4 - 12m^2 q^2 + q^4) + i\delta_{Z_3} \right] (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu). \quad (4.67)$$

La constante δ_{Z_3} debe ser elegida de manera que anule los términos divergentes de esta expresión. Sin embargo, esto no es posible, debido a que hay términos divergentes proporcionales a q^2 y q^4 que, obviamente, no pueden ser anulados por una constante; lo más que se puede lograr es anular, con δ_{Z_3} , la divergencia del término proporcional a m^4 , pero seguirán existiendo los otros términos divergentes. Por lo anterior, la autoenergía del campo de norma B^μ , a un lazo, no es renormalizable. En la siguiente subsección se realiza el cálculo de la autoenergía del campo Ψ .

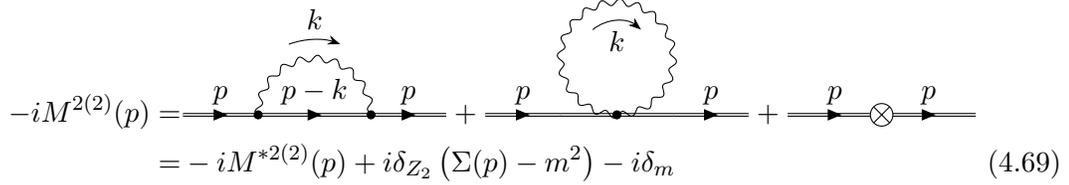
4.2.6. Autoenergía de TDM

La función de correlación de dos puntos del campo Ψ es



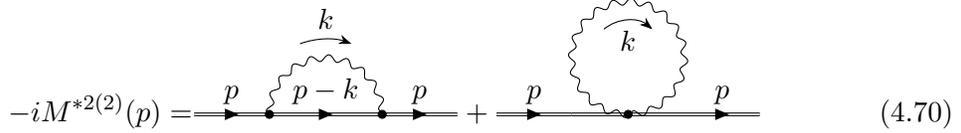
$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \mathcal{O}(g^4). \quad (4.68)$$

La autoenergía física a nivel de un lazo es de orden g^2 y se denotará como $-iM^{2(2)}(p)$; está compuesta por los diagramas segundo y tercero del miembro derecho de la ecuación anterior más el contratérmino correspondiente



$$\begin{aligned} -iM^{2(2)}(p) &= \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} \\ &= -iM^{*2(2)}(p) + i\delta_{Z_2}(\Sigma(p) - m^2) - i\delta_m \end{aligned} \quad (4.69)$$

donde $-iM^{*2(2)}(p)$ es la suma de las amplitudes de los diagramas de un lazo



$$-iM^{*2(2)}(p) = \text{Diagram} + \text{Diagram} \quad (4.70)$$

La evaluación de la amplitud $-iM^{*2(2)}(p)$ a partir de estos diagramas, usando las reglas de Feynman, es

$$\begin{aligned} -iM^{*2(2)}(p) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ [-ig\Sigma_{\mu\alpha}(2p-k)^\alpha] \frac{i}{\Sigma(p-k) - m^2 + i\epsilon} \right. \\ &\quad \times [-ig\Sigma_{\nu\beta}(2p-k)^\beta] i \frac{-\eta^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 + i\epsilon} \\ &\quad \left. + [2ig^2\Sigma_{\mu\nu}] i \frac{-\eta^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 + i\epsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Para regularizar dimensionalmente se debe evaluar esta integral en dimensión D ; la medida de integración pasa a ser $d^D l / (2\pi)^D$ y el tensor $\Sigma_{\mu\nu}$ está dado por la expresión (4.57) escrita en términos de la métrica D -dimensional $\eta_{\mu\nu}$. La integral en dimensión D es entonces

$$\begin{aligned} -iM^{*2(2)}(p) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ [-ig\Sigma_{\mu\alpha}(2p-k)^\alpha] \frac{i}{\Sigma(p-k) - m^2 + i\epsilon} \right. \\ &\quad \times [-ig\Sigma_{\nu\beta}(2p-k)^\beta] i \frac{-\eta^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 + i\epsilon} \\ &\quad \left. + [2ig^2\Sigma_{\mu\nu}] i \frac{-\eta^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 + i\epsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

que, utilizando la expresión (4.42) para el propagador, es

$$\begin{aligned}
 -iM^{*2(2)}(p) = & g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{\Sigma_{\mu\alpha} \Delta(p-k) \Sigma_{\nu\beta}}{[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon]} (2p-k)^\alpha (2p-k)^\beta \right. \\
 & \times \left. \frac{[-\eta^{\mu\nu} k^2 + (1-\xi)k^\mu k^\nu]}{[k^2 + i\epsilon]^2} - 2 \frac{\Sigma_{\mu\nu} [-\eta^{\mu\nu} k^2 + (1-\xi)k^\mu k^\nu]}{[k^2 + i\epsilon]^2} \right\}. \quad (4.73)
 \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, esta integral puede ser calculada en el software computacional *Wolfram Mathematica* [71] haciendo uso del paquete *FeynCalc* [72-74] al expresar todos los operadores que contiene, en términos únicamente de la métrica D -dimensional $\eta_{\mu\nu}$. Es importante notar que, dado que el cálculo en *FeynCalc* se realiza en índices internos de Lorentz expresando a los operadores $S_{\mu\nu}$ y $\Sigma_{\mu\nu}$ en términos únicamente de la métrica D -dimensional $\eta_{\mu\nu}$ a través de las relaciones (4.56) y (4.57), el resultado que se obtiene estará expresado, también, en índices internos de Lorentz, es decir, estará escrito en términos únicamente de la métrica D -dimensional $\eta_{\mu\nu}$. Para identificar la combinación lineal de los operadores de la base $\{\mathbb{1}, \chi, S_{\mu\nu}, \chi S_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\alpha\beta}\}$ a la que dicho resultado corresponde es necesario determinar sus componentes en esta base, o sea, determinar el coeficiente que debe acompañar a cada operador en la combinación lineal. Referente a esto, es útil recordar la manera general en que se lleva a cabo esta tarea en un espacio vectorial arbitrario. Respecto a una base ortogonal, la determinación de las componentes de un vector se realiza, básicamente, a través de la proyección del vector sobre cada elemento de la base. Respecto a una base no-ortogonal, una forma de determinar las componentes es realizando un cambio de base hacia una base ortogonal, encontrar las componentes en la base ortogonal y, finalmente, regresar a la base no-ortogonal; de hecho, la base ortogonal puede ser construida a partir de la propia base no-ortogonal por medio del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt [76]. La base de operadores $\{\mathbb{1}, \chi, S_{\mu\nu}, \chi S_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\alpha\beta}\}$ es ortogonal en $D = 4$, pero la base que se obtiene al extender los operadores a dimensión D arbitraria de la manera en que se ha explicado aquí resulta ser no-ortogonal para $D \neq 4$. Dado que en regularización dimensional, antes de tomar $D = 4 - 2\epsilon$ y $\epsilon \rightarrow 0$, se trabaja en $D \neq 4$, para encontrar la combinación lineal de los operadores de la base $\{\mathbb{1}, \chi, S_{\mu\nu}, \chi S_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\alpha\beta}\}$ a la que el resultado obtenido del cálculo en *FeynCalc* corresponde, es necesario encontrar una base ortogonal y determinar sus componentes respecto a esa base, para después regresar a la base no-ortogonal. La base ortogonal se construye a partir de la base $\{\mathbb{1}, \chi, S_{\mu\nu}, \chi S_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\alpha\beta}\}$ esencialmente a través del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, como se explica en la sección (A.3) del apéndice A. Después de realizar todo este procedimiento con el resultado que se obtiene de *FeynCalc*, se encuentra que la expresión para $-iM^{*2(2)}(p)$ en términos de los operadores de la base es

$$-iM^{*2(2)}(p) = -ia(p^2, m^2, \xi, D)p^2 \mathbb{1} - ib(p^2, m^2, \xi, D)S(p) \quad (4.74)$$

donde el coeficiente $a(p^2, m^2, \xi, D)$ es

$$\begin{aligned}
 a(p^2, m^2, \xi, D) &= \frac{\pi^2 g^2}{32(D-2)(D-1)Dm^2p^4} \\
 &\times \{ [4(D-2)D(\xi-1)(p^2-m^2) \\
 &\quad \times ((D-4)m^4 - 2p^2(2(D-2)m^2 + p^2))] B_0(0, 0, 0) \\
 &\quad - 2m^2 [m^4(D-4)D(D+4\xi-11) + m^2p^2(D(D(5D-4) + 16\xi-4) + 16) \\
 &\quad - p^4D(D+8\xi-20)] B_0(0, m^2, m^2) \\
 &\quad + (D-2)D [m^6(D-4)(D+8\xi-15) + m^4p^2(D(6D+8\xi+21) - 60) \\
 &\quad + m^2p^4(9D^2 - D + 16\xi - 28) - p^6(D+16\xi-28)] B_0(p^2, 0, m^2) \\
 &\quad - [4(D-2)D(\xi-1)(p^2-m^2)^2 \\
 &\quad \times ((D-4)m^4 - 2p^2(2(D-2)m^2 + p^2))] C_0(0, p^2, p^2, 0, 0, m^2) \}, \tag{4.75}
 \end{aligned}$$

y el coeficiente $b(p^2, m^2, \xi, D)$ es

$$\begin{aligned}
 b(p^2, m^2, \xi, D) &= -\frac{\pi^2 g^2}{32(D-2)(D-1)Dm^2p^4} \\
 &\times \{ [4(D-2)(\xi-1)(p^2-m^2) \\
 &\quad \times (Dm^4 + 2p^2(2(D-2)m^2 + p^2))] B_0(0, 0, 0) \\
 &\quad - 2m^2 [m^4(D+4\xi-11)D + m^2p^2((5D-28)D - 16\xi + 20) \\
 &\quad + p^4(3D+8\xi-24)] B_0(0, m^2, m^2) \\
 &\quad + (D-2) [m^6D(D+8\xi-15) + m^4p^2(6D^2 + 8(D-4)\xi - 47D + 64) \\
 &\quad + m^2p^4(9D^2 - 69D - 16\xi + 96) + p^6(3D+16\xi-32)] B_0(p^2, 0, m^2) \\
 &\quad - [4(D-2)(\xi-1)(p^2-m^2)^2 \\
 &\quad \times (Dm^4 + 2p^2(2(D-2)m^2 + p^2))] C_0(0, p^2, p^2, 0, 0, m^2) \}, \tag{4.76}
 \end{aligned}$$

en las que las funciones $B_0(0, 0, 0)$, $B_0(0, m^2, m^2)$, $B_0(p^2, 0, m^2)$ y $C_0(0, p^2, p^2, 0, 0, m^2)$ son las integrales de Passarino-Veltman, las primeras tres definidas en la expresión (4.62) y la última definida como

$$i\pi^2 C_0(0, p^2, p^2, 0, 0, m^2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k + \frac{p}{2})^2 + i\epsilon]^2 [(k - \frac{p}{2})^2 - m^2 + i\epsilon]}. \tag{4.77}$$

Para obtener el término divergente de (4.74) se debe realizar la sustitución $D = 4 - 2\epsilon$ y desarrollar en serie de potencias de ϵ alrededor de $\epsilon = 0$. Realizando este procedimiento con *FeynCalc* se obtiene que la parte divergente de $-iM^{*2(2)}(p)$, que se denota como

$\text{Div}[-iM^{*2(2)}(p)]$, es

$$\begin{aligned} \text{Div} \left[-iM^{*2(2)}(p) \right] = & -i \frac{g^2 (3m^4(2\xi + 1) + 15m^2p^2 + p^4(4 - 3\xi))}{192\pi^2m^2\epsilon} \mathbb{1} \\ & - i \frac{g^2 (12m^2 + p^2(7 - 6\xi))}{384\pi^2m^2\epsilon} S(p) \end{aligned} \quad (4.78)$$

en donde la divergencia está expresada en el factor $1/\epsilon$. Con este resultado y de la expresión (4.69), la parte divergente de la autoenergía física $-iM^{2(2)}(p)$, denotada como $\text{Div}[-iM^{2(2)}(p)]$, es finalmente

$$\begin{aligned} \text{Div} \left[-iM^{2(2)}(p) \right] = & -i \frac{g^2 (3m^4(2\xi + 1) + 15m^2p^2 + p^4(4 - 3\xi))}{192\pi^2m^2\epsilon} \mathbb{1} \\ & - i \frac{g^2 (12m^2 + p^2(7 - 6\xi))}{384\pi^2m^2\epsilon} S(p) \\ & + i\delta_{Z_2} (\Sigma(p) - m^2) - i\delta_m \\ = & -i \left[\frac{g^2 (3m^4(2\xi + 1) + 15m^2p^2 + p^4(4 - 3\xi))}{192\pi^2m^2\epsilon} \right. \\ & \left. - \frac{\delta_{Z_2}}{2} (p^2 - 2m^2) + \delta_m \right] \mathbb{1} \\ & - i \left[\frac{g^2 (12m^2 + p^2(7 - 6\xi))}{384\pi^2m^2\epsilon} - \frac{\delta_{Z_2}}{2} \right] S(p). \end{aligned} \quad (4.79)$$

Las constantes δ_{Z_2} y δ_m deben ser elegidas de manera que anulen los términos divergentes de esta expresión. Sin embargo, esto no es posible, debido a que hay términos divergentes proporcionales a $p^4\mathbb{1}$ y $p^2S(p)$ para los que no existen contratérminos que los puedan anular. Por lo anterior, la autoenergía del campo Ψ , a un lazo, no es renormalizable.

Tanto la autoenergía de B^μ como la autoenergía de Ψ son no-renormalizables; estos resultados muestran que la teoría de norma $U(1)$ para TDM es no-renormalizable. En la siguiente subsección se hace un análisis del origen primordial de esta conclusión y se propone un enfoque alternativo para estudiar la renormalización de esta teoría.

4.2.7. El propagador de TDM en la región UV

Las autoenergías de ambos campos son no-renormalizables. El origen de estos resultados puede rastrearse en la forma del propagador del campo Ψ (4.42) que, escrito explícitamente, es

$$\tilde{D}(p) = \frac{i}{\Sigma(p) - m^2 + i\epsilon} = i \frac{-p^2 + S(p) + 2m^2}{2m^2(p^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (4.80)$$

En la región UV se cumple que $p^2 \gg m^2$. En esta región, la contribución del tercer término que compone a $\tilde{D}(p)$ es de orden $1/p^2$, lo que significaría una contribución de -2 al grado superficial de divergencia de un diagrama por cada propagador de Ψ . Sin embargo, la contribución de los términos primero y segundo, en la región UV, es de orden $p^2/p^2 = 1$, por lo que su contribución y, como consecuencia, la contribución global del propagador de Ψ al grado superficial de divergencia de un diagrama es nula. La reescritura del propagador en términos de los proyectores de paridad $\mathbb{P}_+(p)$ y $\mathbb{P}_-(p)$ definidos en (3.105) es

$$\tilde{D}(p) = i \frac{\mathbb{P}_+(p) - \frac{p^2 - m^2}{m^2} \mathbb{P}_-(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (4.81)$$

donde los proyectores son

$$\mathbb{P}_\pi(p) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \pi \frac{S(p)}{p^2} \right). \quad (4.82)$$

Esta reescritura (4.81) revela que los términos divergentes en la región UV, i.e. los de orden $p^2/p^2 = 1$, están relacionados con las componentes de paridad negativa. Tomando en cuenta las observaciones anteriores, se deduce que el grado superficial de divergencia \mathcal{D} de un diagrama con N_Ψ líneas externas del campo Ψ , N_γ líneas externas del campo B^μ , V_3 vértices $\Psi\Psi B$ y V_4 vértices $\Psi\Psi BB$ esta dado por

$$\mathcal{D} = 4 - 2N_\Psi - N_\gamma + 2(V_3 + V_4), \quad (4.83)$$

a diferencia de la expresión $\mathcal{D} = 4 - N_\Psi - N_\gamma$, que sería la que se obtendría si la contribución global del propagador a \mathcal{D} fuera de -2 en lugar de ser nula. La expresión (4.83) para \mathcal{D} es creciente con el número total de vértices $V = V_3 + V_4$ del diagrama, lo que significa que, para un proceso específico ($N_\Psi = \text{cte}$, $N_\gamma = \text{cte}$), siempre hay diagramas superficialmente divergentes a partir de un determinado orden $\mathcal{O}(g^n)$ y, como consecuencia, un número infinito de ellos. En conclusión, el origen de la no-renormalizabilidad de la teoría de norma $U(1)$ para TDM está en la forma del propagador del campo Ψ .

En este momento es conveniente recordar el conocido caso de la no-renormalizabilidad del campo vectorial masivo y su solución en el contexto del Modelo Estándar. El Lagrangiano del campo vectorial masivo es el Lagrangiano de Proca (2.197), y su propagador es

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = \frac{-i \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2} \right)}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.84)$$

Este propagador presenta un problema similar al de TDM: en la región UV, la contribución del segundo término que lo compone es de orden $q^2/q^2 = 1$, por lo que la contribución global del propagador al grado superficial de divergencia de un diagrama es nula y, por lo tanto, una teoría que incluya campos vectoriales masivos es, al menos en principio, no-renormalizable. El Modelo Estándar contiene campos vectoriales masivos: los bosones vectoriales W^\pm y Z ; sin embargo, el problema del propagador, en este contexto, se evita de

la siguiente manera. Los bosones vectoriales, siendo bosones de norma, son considerados, inicialmente, no-masivos (una masa inicial no-nula violaría su simetría de norma) y su masa la adquieren, posteriormente, a través del rompimiento espontáneo de la simetría. Posterior al rompimiento espontáneo de la simetría, el propagador del campo vectorial resulta ser

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = \frac{-i \left(\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 - \xi m^2} \right)}{q^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (4.85)$$

donde ξ es su parámetro de norma y m es la masa que adquirió. Todos los términos que componen a este propagador son, en la región UV, de orden $1/q^2$, por lo cual ya no tiene el problema del propagador de Proca (4.84) y, con ello, se consigue un campo vectorial masivo con un propagador bien comportado en la región UV y de esta manera se evita el problema de la no-renormalizabilidad del campo vectorial masivo.

En la referencia [42] se muestra que la ecuación de Proca surge del formalismo de primeros principios en la representación $(1/2, 1/2)$, de la misma manera que la ecuación libre de TDM surge en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$. El propagador de Proca resulta ser

$$\tilde{D}_V(q) = i \frac{-\mathbb{P}_-(q) + \frac{q^2 - m^2}{m^2} \mathbb{P}_+(q)}{q^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (4.86)$$

donde $\mathbb{P}_+(q)$ y $\mathbb{P}_-(q)$ son los proyectores de paridad en la representación $(1/2, 1/2)$ que, en una base particular, tienen la forma

$$[\mathbb{P}_+(q)]^\alpha{}_\beta = \frac{q^\alpha q_\beta}{q^2}, \quad [\mathbb{P}_-(q)]^\alpha{}_\beta = \eta^\alpha{}_\beta - \frac{q^\alpha q_\beta}{q^2}, \quad (4.87)$$

con la cual el propagador (4.86) adquiere la forma convencional (4.84). Así, se revela que la estructura del propagador del campo vectorial masivo es, esencialmente, la misma que la del propagador de TDM, cada uno en su respectiva representación, como se comprueba al comparar las expresiones (4.86) y (4.81). En el contexto de renormalización, lo anterior indica que el problema de la no-renormalizabilidad de TDM es, en esencia, el mismo problema de no-renormalizabilidad del campo vectorial masivo, sólomente formulado en una representación diferente del HLG. La observación de esta similitud nos conduce a la búsqueda de una solución a la no-renormalizabilidad de TDM, análoga a la solución ya conocida para el campo vectorial masivo, a saber: considerar al campo de TDM inicialmente no-masivo y, posteriormente, buscar algún mecanismo para dotarlo de masa. En la siguiente sección se realiza el estudio de la renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para TDM no-masiva. La búsqueda del mecanismo para dotar de masa a TDM es una tarea que está más allá de los objetivos de este proyecto.

4.3. Renormalización a un lazo: caso no-masivo

El desarrollo que se expone enseguida, hasta antes de la primer subsección, está basado en la sección V de la referencia [42], que trata, precisamente, sobre el estudio del campo Ψ

de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ en el caso no-masivo. El Lagrangiano (4.32) y la ecuación dinámica (3.110) del campo Ψ tienen un límite $m \rightarrow 0$ suave, por lo que el Lagrangiano de la teoría no-masiva es obtenido simplemente tomando $m = 0$

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi. \quad (4.88)$$

Este Lagrangiano puede ser reescrito como

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi = -\bar{\Psi} \Sigma(\partial) \Psi + \partial^\mu (\bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi) \sim -\bar{\Psi} \Sigma(\partial) \Psi, \quad (4.89)$$

donde la equivalencia en la última relación es debido a que el segundo término del tercer miembro es un término de frontera, por lo que se puede tomar directamente $\mathcal{L} = -\bar{\Psi} \Sigma(\partial) \Psi$. Es posible reescribir este Lagrangiano en términos de los proyectores $\mathbb{P}_+(\partial)$ y $\mathbb{P}_-(\partial)$ usando las relaciones

$$p^2 \mathbb{P}_+(p) = \frac{1}{2} (p^2 + S(p)) = \Sigma(p), \quad p^2 \mathbb{P}_-(p) = \frac{1}{2} (p^2 - S(p)) = R(p), \quad (4.90)$$

donde se debe recordar que $R_{\mu\nu} = (1/2)(\eta_{\mu\nu} \mathbb{1} - S_{\mu\nu})$, con lo cual

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi} \partial^2 \mathbb{P}_+(\partial) \Psi, \quad (4.91)$$

y la ecuación dinámica es entonces

$$\partial^2 \mathbb{P}_+(\partial) \Psi = 0. \quad (4.92)$$

Tanto la ecuación de movimiento como el Lagrangiano involucran sólo a la componente de paridad positiva de Ψ , por lo tanto la componente de paridad negativa no está fija y la dinámica es invariante ante cambios en ella. Esta simetría se manifiesta en la libertad de norma para cambiar a Ψ como

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \Psi + \partial^2 \mathbb{P}_-(\partial) \Phi, \quad (4.93)$$

donde Φ es un espinor cualquiera de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$, en virtud de que $\mathbb{P}_+(\partial) \mathbb{P}_-(\partial) = 0$. Dado que el operador en el término cinético del Lagrangiano (4.91) es un proyector, este operador no puede ser invertido y, por consiguiente, el propagador del campo no está definido. Para obtener un operador cinético invertible y, en consecuencia, un propagador bien definido, es necesario agregar un término de fijación de norma al Lagrangiano. Agregando un término proporcional a $\partial^\mu \bar{\Psi} R_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi$ al Lagrangiano (4.88) se obtiene

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \bar{\Psi} \Sigma_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi + \frac{1}{\zeta} \partial^\mu \bar{\Psi} R_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi, \quad (4.94)$$

donde ζ es el parámetro de fijación de norma; que puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\bar{\Psi} \partial^2 \left[\mathbb{P}_+(\partial) + \frac{1}{\zeta} \mathbb{P}_-(\partial) \right] \Psi + \partial^\mu \left[\bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \partial^\nu \Psi \right] \\ &\sim -\bar{\Psi} \partial^2 \left[\mathbb{P}_+(\partial) + \frac{1}{\zeta} \mathbb{P}_-(\partial) \right] \Psi, \end{aligned} \quad (4.95)$$

con lo que la ecuación dinámica es ahora

$$\partial^2 \left[\mathbb{P}_+(\partial) + \frac{1}{\zeta} \mathbb{P}_-(\partial) \right] \Psi = 0. \quad (4.96)$$

Aplicando el operador $\mathbb{P}_-(\partial)$ por la izquierda en (4.96) se obtiene la restricción que fija la norma de Ψ

$$\frac{1}{\zeta} \partial^2 \mathbb{P}_-(\partial) \Psi = 0 \quad (4.97)$$

que, siempre que ζ sea finito, establece que la componente de paridad negativa de Ψ es nula. Con esto, el operador cinético ya es invertible y el propagador está dado por

$$\tilde{D}(p) = \frac{i}{p^2 \mathbb{P}_+(p) + \frac{1}{\zeta} p^2 \mathbb{P}_-(p)} = i \frac{\mathbb{P}_+(p) + \zeta \mathbb{P}_-(p)}{p^2 + i\epsilon} = i \frac{\mathbb{1} + (\zeta - 1) \mathbb{P}_-(p)}{p^2 + i\epsilon}. \quad (4.98)$$

Todos los términos que componen a este propagador son de orden $1/p^2$, debido a lo cual ya no tiene el problema del que padecía el propagador del caso masivo en la región UV y, con ello, se puede esperar que la teoría no-masiva sea renormalizable.

La estructura de esta sección es la siguiente: en la primer subsección se introduce la interacción con el campo de norma $U(1)$ a través del principio de norma y se muestran los diagramas superficialmente divergentes que posee; en la segunda subsección se reescribe el Lagrangiano en términos de las cantidades físicas, con lo que se obtiene la separación entre términos físicos y contratérminos; en la tercer subsección se muestran las reglas de Feynman para ambos tipos de términos en el Lagrangiano; en la cuarta subsección se verifica el cumplimiento de la identidad de Ward-Takahashi; en la quinta subsección se realiza el cálculo de la autoenergía del campo de norma $U(1)$; en la sexta subsección se realiza el cálculo de la autoenergía del campo Ψ ; y, finalmente, en vista del resultado obtenido en la sexta subsección, en la séptima subsección se explora una elección diferente de contratérminos

4.3.1. Interacción con el campo de norma B^μ

De la misma manera en que se hizo para el caso masivo, la interacción con un campo B^μ de norma $U(1)$ es introducida a través del principio de norma, es decir, insertando el acoplamiento mínimo por medio de la derivada covariante como

$$\partial^\mu \Psi \rightarrow D^\mu \Psi = \partial^\mu \Psi + ig B^\mu \Psi, \quad \partial^\mu \bar{\Psi} \rightarrow D^{\dagger\mu} \bar{\Psi} = \partial^\mu \bar{\Psi} - ig B^\mu \bar{\Psi}, \quad (4.99)$$

donde g es la carga. El Lagrangiano se obtiene al realizar el acoplamiento mínimo en (4.94) y sumar el término cinético y el término de fijación de norma de B^μ

$$\mathcal{L} = D^{\dagger\mu} \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) D^\nu \Psi - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu B^\mu)^2, \quad (4.100)$$

donde el último es el término de fijación de norma de B^μ , con parámetro de norma ξ . Desplegando los términos en la derivada covariante, este Lagrangiano es

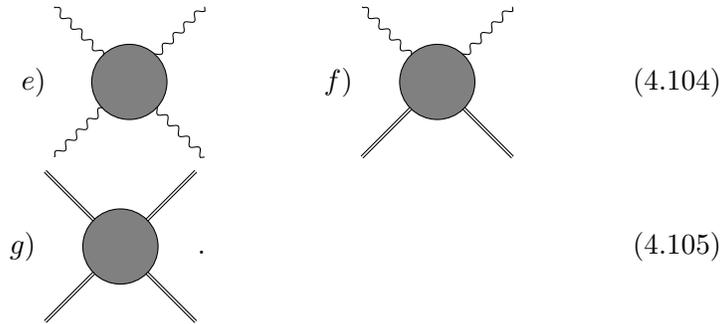
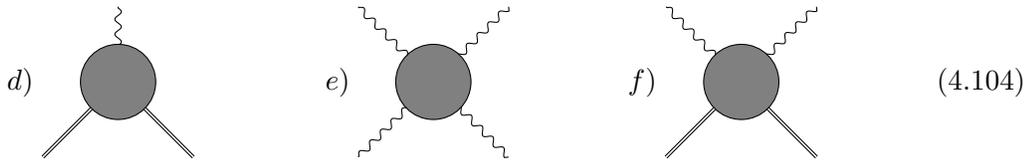
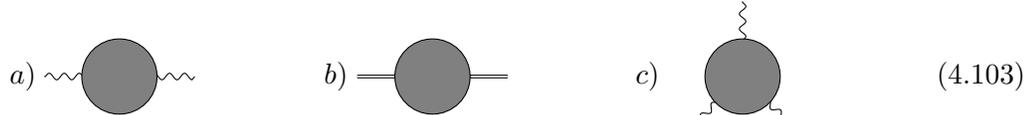
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= D^{\dagger\mu} \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) D^\nu \Psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu B^\mu)^2 \\
 &= (\partial^\mu \bar{\Psi} - ig B^\mu \bar{\Psi}) \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (\partial^\nu \Psi + ig B^\nu \Psi) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu B^\mu)^2 \\
 &= \partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \partial^\nu \Psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu B^\mu)^2 \\
 &\quad + ig \left[\partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \Psi - \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \partial^\mu \Psi \right] B^\nu \\
 &\quad + g^2 \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \Psi B^\mu B^\nu.
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

El primer renglón en el último miembro de esta ecuación contiene los términos libres de los campos, el segundo renglón contiene un término de interacción de orden g y el tercero contiene un término de interacción de orden g^2 , siendo la constante de acoplamiento g adimensional.

Puesto que la contribución global del propagador de Ψ al grado superficial de divergencia es, ahora, -2 , el grado superficial de divergencia de esta teoría es

$$\mathcal{D} = 4 - N_\Psi - N_\gamma, \tag{4.102}$$

por lo que sólo hay un número finito de diagramas superficialmente divergentes, a saber, aquellos con $N_\Psi + N_\gamma \leq 4$. Los diagramas superficialmente divergentes que son significativos son los siguientes



Los diagramas *a*) y *b*) son las autoenergías de los campos B^μ y Ψ , respectivamente; los diagramas *d*) y *f*) representan las correcciones a los vértices $\Psi\Psi B$ y $\Psi\Psi BB$, respectivamente; y los diagramas *c*), *e*) y *g*) son otros diagramas superficialmente divergentes que aparecen.

Los campos y parámetros en (4.101) son los campos y parámetros desnudos, que de ahora en adelante serán denotados con un subíndice b para distinguirlos de los campos y parámetros físicos ó renormalizados, que serán introducidos en la siguiente subsección. El Lagrangiano (4.101) es entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= D_b^{\dagger\mu} \bar{\Psi}_b \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta_b} R_{\mu\nu} \right) D_b^\nu \Psi_b - \frac{1}{4} B_b^{\mu\nu} B_{b\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_b} (\partial_\mu B_b^\mu)^2 \\
 &= (\partial^\mu \bar{\Psi}_b - ig_b B_b^\mu \bar{\Psi}_b) \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta_b} R_{\mu\nu} \right) (\partial^\nu \Psi_b + ig_b B_b^\nu \Psi_b) - \frac{1}{4} B_b^{\mu\nu} B_{b\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_b} (\partial_\mu B_b^\mu)^2 \\
 &= \partial^\mu \bar{\Psi}_b \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta_b} R_{\mu\nu} \right) \partial^\nu \Psi_b - \frac{1}{4} B_b^{\mu\nu} B_{b\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_b} (\partial_\mu B_b^\mu)^2 \\
 &\quad + ig_b \left[\partial^\mu \bar{\Psi}_b \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta_b} R_{\mu\nu} \right) \Psi_b - \bar{\Psi}_b \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta_b} R_{\mu\nu} \right) \partial^\mu \Psi_b \right] B_b^\nu \\
 &\quad + g_b^2 \bar{\Psi}_b \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta_b} R_{\mu\nu} \right) \Psi_b B_b^\mu B_b^\nu.
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

En la siguiente subsección se introducen los campos y parámetros físicos y se realiza la separación de éste Lagrangiano en términos físicos y contratérminos.

4.3.2. Términos físicos y contratérminos

El Lagrangiano (4.106) debe ser reexpresado en términos de las cantidades físicas de manera que se obtengan términos análogos a los que aparecen en él, pero escritos en términos de ellas y, como consecuencia, se obtendrán los contratérminos. Primeramente se escriben los campos desnudos Ψ_b y B_b^μ en términos de los campos físicos Ψ y B^μ a través de las relaciones

$$\Psi_b = Z_2^{1/2} \Psi, \quad B_b^\mu = Z_3^{1/2} B^\mu, \tag{4.107}$$

con las que el Lagrangiano es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= Z_2 \partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta_b} R_{\mu\nu} \right) \partial^\nu \Psi - \frac{Z_3}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{Z_3}{2\xi_b} (\partial_\mu B^\mu)^2 \\
 &\quad + ig_b Z_2 Z_3^{1/2} \left[\partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta_b} R_{\mu\nu} \right) \Psi - \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta_b} R_{\mu\nu} \right) \partial^\mu \Psi \right] B^\nu \\
 &\quad + g_b^2 Z_2 Z_3 \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta_b} R_{\mu\nu} \right) \Psi B^\mu B^\nu.
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

La separación de este Lagrangiano en términos físicos y contratérminos es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \partial^\nu \Psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu B_\mu)^2 \\
 & + ig \left[\partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \Psi - \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \partial^\mu \Psi \right] B^\nu \\
 & + g^2 \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \Psi B^\mu B^\nu \\
 & + \delta_{Z_2} \partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \partial^\nu \Psi - \frac{\delta_{Z_3}}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
 & + ig \delta_g \left[\partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \Psi - \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \partial^\mu \Psi \right] B^\nu \\
 & + g^2 \delta_3 \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \Psi B^\mu B^\nu,
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

que se logra introduciendo las constantes definidas como

$$\delta_{Z_2} = Z_2 - 1, \quad \delta_{Z_3} = Z_3 - 1, \quad \delta_g = \frac{g_b}{g} Z_2 Z_3^{1/2} - 1, \tag{4.110}$$

$$\delta_3 = \frac{g_b^2}{g^2} Z_2 Z_3 - 1, \quad \frac{1}{\xi} = \frac{Z_3}{\xi_b}, \quad \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\zeta_b}. \tag{4.111}$$

Los términos en los primeros tres renglones de (4.109) son análogos a (4.106), pero escritos sólo en función de las cantidades físicas, éstos son los términos físicos; los términos en los últimos tres renglones de (4.109) dependen de las cantidades desnudas a través de las constantes δ , éstos son los contratérminos. En la siguiente subsección se presentan las reglas de Feynman del Lagrangiano (4.109).

4.3.3. Reglas de Feynman

Las reglas de Feynman para los términos físicos del Lagrangiano (4.109) son

$$\begin{aligned}
 \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} &= i \frac{\mathbb{1} + (\zeta - 1) \mathbb{P}_-(p)}{p^2 + i\epsilon} & \mu \xrightarrow{q} \nu &= \frac{-i \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right)}{q^2 + i\epsilon} \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array} &= -ig \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (p' + p)^\nu & \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array} &= 2ig^2 \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right),
 \end{aligned}$$

donde se debe recordar que

$$\mathbb{P}_\pm = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} \pm \frac{S(p)}{p^2} \right), \tag{4.112}$$

además de que $S(p) \equiv S_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$. Es de notar que el parámetro de norma ξ del campo B^μ aparece sólo en la regla de su propagador, mientras que el parámetro ζ aparece tanto en la regla del propagador del campo Ψ como en las reglas de los vértices $\Psi\Psi B$ y $\Psi\Psi BB$. Por su parte, las reglas de Feynman para los contratérminos son

$$\begin{aligned}
 \text{---}\overset{p}{\circlearrowleft}\text{---} &= i\delta_{Z_2} \left(\Sigma(p) + \frac{1}{\zeta} R(p) \right) & \overset{\mu}{\text{---}}\overset{\nu}{\text{---}}\overset{\circlearrowleft} &= -i\delta_{Z_3}(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \\
 \text{---}\overset{p}{\circlearrowleft}\overset{\mu}{\text{---}}\text{---} &= -ig\delta_g \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (p' + p)^\nu & \overset{\mu}{\text{---}}\overset{\nu}{\text{---}}\overset{\circlearrowleft} &= 2ig^2\delta_3 \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right).
 \end{aligned}$$

A diferencia de las reglas para los términos físicos, en las reglas para los contratérminos no aparece el parámetro de norma ξ del campo B^μ pero, al igual que en aquellas, sí aparece el parámetro ζ , tanto en el contratérmino del propagador del campo Ψ como en los contratérminos de los vértices. En la siguiente subsección se revisa el cumplimiento de la identidad de Ward-Takahashi para este conjunto de reglas de Feynman.

4.3.4. Identidad de Ward-Takahashi

La verificación de la identidad de Ward-Takahashi (4.43), en el caso de la teoría de norma $U(1)$ para TDM no-masiva, a nivel de árbol es inmediata. Si se denota por $iV_\mu(p, q)$ el valor del vértice $\Psi\Psi B$ y por $iV_{\mu\nu}(p, q, k)$ el valor del vértice $\Psi\Psi BB$

$$iV_\mu(p, q) \equiv -ig \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (p + q)^\nu, \quad iV_{\mu\nu}(p, q, k) \equiv 2ig^2 \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right), \quad (4.113)$$

la identidad establece las siguientes dos igualdades

$$k^\mu V_\mu(p, q) = g[\tilde{D}^{-1}(q - k) - \tilde{D}^{-1}(p + k)], \quad (4.114)$$

$$k^\mu V_{\mu\nu}(p, q, k) = g[V_\nu(p, q - k) - V_\nu(p + k, q)]. \quad (4.115)$$

La verificación de la primera de ellas es

$$\begin{aligned}
 k^\mu V_\mu(p, q) &= g[\tilde{D}^{-1}(q - k) - \tilde{D}^{-1}(p + k)] \\
 k^\mu \left[-g \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (p + q)^\nu \right] &= g \left[\Sigma(q - k) + \frac{1}{\zeta} R(q - k) \right] \\
 &\quad - g \left[\Sigma(p + k) + \frac{1}{\zeta} R(p + k) \right] \\
 -g \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (q - p)^\mu (p + q)^\nu &= g \left[\Sigma(p) + \frac{1}{\zeta} R(p) \right] - g \left[\Sigma(q) + \frac{1}{\zeta} R(q) \right] \\
 -g \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (q^\mu q^\nu - p^\mu p^\nu) &= g \left[\Sigma(p) + \frac{1}{\zeta} R(p) \right] - g \left[\Sigma(q) + \frac{1}{\zeta} R(q) \right],
 \end{aligned} \quad (4.116)$$

donde se ha usado que $q = p + k$ y que

$$\tilde{D}^{-1}(p) = p^2 \mathbb{P}_+(p) + \frac{1}{\zeta} p^2 \mathbb{P}_-(p) = \Sigma(p) + \frac{1}{\zeta} R(p). \quad (4.117)$$

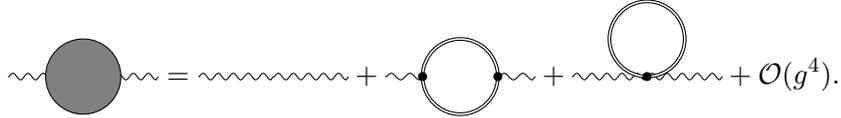
La verificación de la segunda es

$$\begin{aligned} k^\mu V_{\mu\nu}(p, q, k) &= g[V_\nu(p, q - k) - V_\nu(p + k, q)] \\ k^\mu \left[2g^2 \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \right] &= g \left[-g \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (q - k + p)^\mu \right] \\ &\quad - g \left[-g \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (q + p + k)^\mu \right] \\ 2g^2 \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (q - p)^\mu &= g \left[-g \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (2p)^\mu \right] \\ &\quad - g \left[-g \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (2q)^\mu \right] \\ 2g^2 \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (q - p)^\mu &= 2g^2 \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) (q - p)^\mu. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Por lo tanto, la identidad de Ward-Takahashi se cumple a nivel de árbol para todo valor del parámetro ζ que aparece en las reglas. En la siguiente subsección se comienza el cálculo de los diagramas para abordar la renormalización de esta teoría.

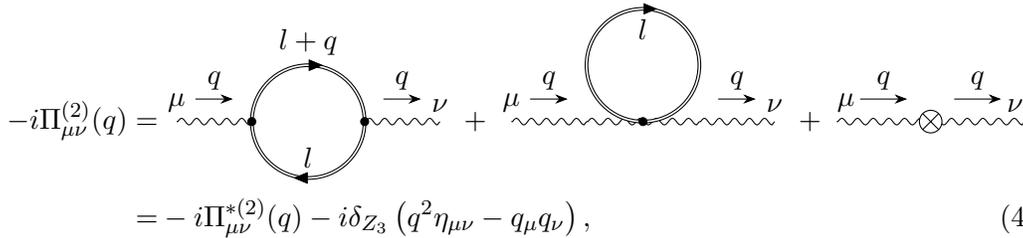
4.3.5. Autoenergía del campo de norma B^μ

Al igual que en el caso masivo, la función de correlación de dos puntos del campo B^μ es



$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \mathcal{O}(g^4). \quad (4.119)$$

La autoenergía física a nivel de un lazo es de orden g^2 y se denotará como $-i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q)$; está compuesta por los diagramas segundo y tercero del miembro derecho de la ecuación anterior más el contratérmino correspondiente



$$\begin{aligned} -i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q) &= \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} \\ &= -i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) - i\delta_{Z_3}(q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu), \end{aligned} \quad (4.120)$$

donde $-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q)$ es la suma de las amplitudes de los diagramas de un lazo

$$-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2}. \quad (4.121)$$

La evaluación de la amplitud $-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q)$ a partir de estos diagramas, usando las reglas de Feynman, es

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \left[-ig \left(\Sigma_{\mu\alpha} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\alpha} \right) (2l+q)^\alpha \right] i \frac{\mathbb{1} + (\zeta-1)\mathbb{P}_-(l+q)}{(l+q)^2 + i\epsilon} \right. \\ &\quad \times \left[-ig \left(\Sigma_{\nu\beta} + \frac{1}{\zeta} R_{\nu\beta} \right) (2l+q)^\beta \right] i \frac{\mathbb{1} + (\zeta-1)\mathbb{P}_-(l)}{l^2 + i\epsilon} \\ &\quad \left. + \left[2ig^2 \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \right] i \frac{\mathbb{1} + (\zeta-1)\mathbb{P}_-(l)}{l^2 + i\epsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

La regularización dimensional se realiza evaluando esta integral en dimensión D arbitraria y posteriormente se hace la sustitución $D = 4 - 2\epsilon$ para recuperar la divergencia en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. La medida de integración pasa a ser $d^Dl/(2\pi)^D$ y la extensión de las definiciones de los operadores $\Sigma_{\mu\nu}$ y $R_{\mu\nu}$ a dimensión D es a través del mapeo que se expuso en la subsección (4.2.5) y que se muestra en la sección (A.2) del apéndice A, con el que se obtiene

$$\begin{aligned} (\Sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} + (S_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta}) \\ &= \eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\nu\delta} + \eta_{\mu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\nu} + \eta_{\nu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\mu\delta} + \eta_{\nu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\mu}), \end{aligned} \quad (4.123)$$

$$\begin{aligned} (R_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} - (S_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta}) \\ &= \frac{1}{2} (\eta_{\mu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\nu\delta} + \eta_{\mu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\nu} + \eta_{\nu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\mu\delta} + \eta_{\nu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\mu}), \end{aligned} \quad (4.124)$$

y con las cuales, la extensión a dimensión D es directa: simplemente se sustituye la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$ en $D = 4$ por la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, \dots, -1)$ en dimensión D . La integral en dimensión D es entonces

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) &= \int \frac{d^Dl}{(2\pi)^D} \text{Tr} \left\{ \left[-ig \left(\Sigma_{\mu\alpha} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\alpha} \right) (2l+q)^\alpha \right] i \frac{\mathbb{1} + (\zeta-1)\mathbb{P}_-(l+q)}{(l+q)^2 + i\epsilon} \right. \\ &\quad \times \left[-ig \left(\Sigma_{\nu\beta} + \frac{1}{\zeta} R_{\nu\beta} \right) (2l+q)^\beta \right] i \frac{\mathbb{1} + (\zeta-1)\mathbb{P}_-(l)}{l^2 + i\epsilon} \\ &\quad \left. + \left[2ig^2 \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \right] i \frac{\mathbb{1} + (\zeta-1)\mathbb{P}_-(l)}{l^2 + i\epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (4.125)$$

que, reescribiendo al propagador como

$$\tilde{D}(p) = i \frac{\mathbb{1} + (\zeta - 1)\mathbb{P}_-(p)}{p^2 + i\epsilon} = i \frac{p^2 + (\zeta - 1)R(p)}{(p^2 + i\epsilon)^2}, \quad (4.126)$$

es

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) = g^2 \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} & \left[\frac{\text{Tr} \left\{ \left(\Sigma_{\mu\alpha} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\alpha} \right) [(l+q)^2 + (\zeta-1)R(l+q)] \right.}{[(l+q)^2 + i\epsilon]^2} \right. \\ & \times \frac{\left(\Sigma_{\nu\beta} + \frac{1}{\zeta} R_{\nu\beta} \right) [l^2 + (\zeta-1)R(l)]}{[l^2 + i\epsilon]^2} (2l+q)^\alpha (2l+q)^\beta \\ & \left. - 2 \frac{\text{Tr} \left\{ \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) [l^2 + (\zeta-1)R(l)] \right\}}{[l^2 + i\epsilon]^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Esta integral puede ser calculada en el software computacional *Wolfram Mathematica* [71] haciendo uso del paquete *FeynCalc* [72-74] al expresar todos los operadores que contiene, en términos únicamente de la métrica $\eta_{\mu\nu}$ en dimensión D . El resultado que se obtiene es

$$-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) = -i\Pi^{*(2)}(q^2) (q^2 \eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu), \quad (4.128)$$

donde la función escalar $-i\Pi^{*(2)}(q^2)$ es

$$\begin{aligned} -i\Pi^{*(2)}(q^2) = & -\frac{i\pi^2 g^2}{16(D-1)\zeta^2} \\ & \times \left\{ 2(D-2)(\zeta-1)^2 [D(\zeta-1) + 4] \text{B}_0(0, 0, 0) \right. \\ & + 2 [2D^2 (3\zeta^3 - 5\zeta^2 + 5\zeta - 1) - D (3\zeta^4 + 16\zeta^3 - 46\zeta^2 + 40\zeta - 9)] \\ & + 2 (3\zeta^2 + 10\zeta - 5) (\zeta-1)^2 \text{B}_0(q^2, 0, 0) \\ & - 2(D-2)(\zeta-1)^2 [D(\zeta-1) + \zeta^2 + 2\zeta + 5] q^2 \text{C}_0(0, q^2, q^2, 0, 0, 0) \\ & \left. + (D-2)(\zeta^2 - 1)^2 q^4 \text{D}_0(0, q^2, 0, q^2, q^2, q^2, 0, 0, 0, 0) \right\}, \end{aligned} \quad (4.129)$$

y las funciones $\text{B}_0(q^2, 0, 0)$, $\text{C}_0(0, q^2, q^2, 0, 0, 0)$ y $\text{D}_0(0, q^2, 0, q^2, q^2, q^2, 0, 0, 0, 0)$ son las integrales de Passarino-Veltman [75]; la primera definida en (4.62), la segunda definida en (4.77) y la tercera definida como

$$i\pi^2 \text{D}_0(0, q^2, 0, q^2, q^2, q^2, 0, 0, 0, 0) = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(l + \frac{q}{2})^2 + i\epsilon]^2 [(l - \frac{q}{2})^2 + i\epsilon]^2}. \quad (4.130)$$

Es importante mencionar que estas integrales, además de las divergencias ultravioletas, contienen divergencias infrarrojas, esto es, divergencias en el límite $q^2 \rightarrow 0$. Este tipo de

divergencias ocurren naturalmente en teorías no-masivas, como la que se está tratando, y la forma de anularlas es tomando en cuenta las contribuciones que vienen de la emisión de partículas de muy baja energía que son indetectables en los experimentos. En este trabajo no se aborda el estudio de dichas divergencias. La forma del resultado (4.128) garantiza el cumplimiento de la identidad de Ward (4.44), puesto que al contraer $-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q)$ con q^μ ó q^ν , se anula

$$-iq^\mu\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q) = -i\Pi^{*(2)}(q^2)(q^2q^\mu\eta_{\mu\nu} - q^2q_\nu) = 0, \quad (4.131)$$

lo que significa que la identidad de Ward se cumple también a nivel de un lazo.

Para obtener el término divergente de (4.129) se debe realizar la sustitución $D = 4 - 2\epsilon$ y desarrollar en serie de potencias de ϵ alrededor de $\epsilon = 0$. Realizando este procedimiento con *FeynCalc* se obtiene que la parte divergente de $-i\Pi^{*(2)}(q^2)$, que se denota como $\text{Div}[-i\Pi^{*(2)}(q^2)]$, es

$$\text{Div}[-i\Pi^{*(2)}(q^2)] = -\frac{ig^2}{64\pi^2\zeta^2\epsilon}(\zeta^4 - 8\zeta^3 + 6\zeta^2 - 8\zeta + 1), \quad (4.132)$$

en el que la divergencia está expresada en el factor $1/\epsilon$. Con este resultado y de la expresión (4.120), la parte divergente de la autoenergía física $-i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q)$, denotada como $\text{Div}[-i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q)]$, es finalmente

$$\text{Div}[-i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(q)] = -\left[\frac{ig^2}{64\pi^2\zeta^2\epsilon}(\zeta^4 - 8\zeta^3 + 6\zeta^2 - 8\zeta + 1) + i\delta_{Z_3}\right](q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu). \quad (4.133)$$

La constante δ_{Z_3} debe ser elegida de manera que anule los términos divergentes de esta expresión. Puesto que el coeficiente divergente del factor tensorial $q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu$, que se obtuvo en el cálculo, es constante respecto a q^2 , éste puede ser anulado por δ_{Z_3} haciendo la elección

$$\delta_{Z_3} = -\frac{g^2}{64\pi^2\zeta^2\epsilon}(\zeta^4 - 8\zeta^3 + 6\zeta^2 - 8\zeta + 1) \quad (4.134)$$

y, por lo tanto, la autoenergía del campo de norma B^μ , a un lazo, es renormalizable. En la siguiente subsección se continúa con el cálculo de la autoenergía del campo Ψ .

4.3.6. Autoenergía de TDM

La función de correlación de dos puntos del campo Ψ es

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \mathcal{O}(g^4). \quad (4.135)$$

La autoenergía física a nivel de un lazo es de orden g^2 y se denotará como $-iM^{2(2)}(p)$; está compuesta por los diagramas segundo y tercero del miembro derecho de la ecuación

anterior más el contratérmino correspondiente

$$\begin{aligned}
 -iM^{*2(2)}(p) &= \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} \\
 &= -iM^{*2(2)}(p) + i\delta_{Z_2} \left(\Sigma(p) + \frac{1}{\zeta} R(p) \right)
 \end{aligned} \tag{4.136}$$

donde $-iM^{*2(2)}(p)$ es la suma de las amplitudes de los diagramas de un lazo

$$-iM^{*2(2)}(p) = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} \tag{4.137}$$

La evaluación de la amplitud $-iM^{*2(2)}(p)$ a partir de estos diagramas, usando las reglas de Feynman, es

$$\begin{aligned}
 -iM^{*2(2)}(p) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \left[-ig \left(\Sigma_{\mu\alpha} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\alpha} \right) (2p-k)^\alpha \right] i \frac{\mathbb{1} + (\zeta-1)\mathbb{P}_-(p-k)}{(p-k)^2 + i\epsilon} \right. \\
 &\quad \times \left[-ig \left(\Sigma_{\nu\beta} + \frac{1}{\zeta} R_{\nu\beta} \right) (2p-k)^\beta \right] i \frac{-\eta^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \left. + \left[2ig^2 \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \right] i \frac{-\eta^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 + i\epsilon} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.138}$$

Para regularizar dimensionalmente se debe evaluar esta integral en dimensión D ; la medida de integración pasa a ser $d^D l / (2\pi)^D$ y los tensores $\Sigma_{\mu\nu}$ y $R_{\mu\nu}$ están dados por las expresiones (4.123) y (4.124) escritas en términos de la métrica D -dimensional $\eta_{\mu\nu}$. La integral en dimensión D es entonces

$$\begin{aligned}
 -iM^{*2(2)}(p) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \left[-ig \left(\Sigma_{\mu\alpha} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\alpha} \right) (2p-k)^\alpha \right] i \frac{\mathbb{1} + (\zeta-1)\mathbb{P}_-(p-k)}{(p-k)^2 + i\epsilon} \right. \\
 &\quad \times \left[-ig \left(\Sigma_{\nu\beta} + \frac{1}{\zeta} R_{\nu\beta} \right) (2p-k)^\beta \right] i \frac{-\eta^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \left. + \left[2ig^2 \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \right] i \frac{-\eta^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 + i\epsilon} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.139}$$

que, utilizando la expresión (4.126) para el propagador, es

$$\begin{aligned}
 -iM^{*2(2)}(p) = & g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{\left(\Sigma_{\mu\alpha} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\alpha}\right) [(p-k)^2 + (\zeta-1)R(p-k)]}{[(p-k)^2 + i\epsilon]^2} \right. \\
 & \times \frac{\left(\Sigma_{\nu\beta} + \frac{1}{\zeta} R_{\nu\beta}\right) [-\eta^{\mu\nu} k^2 + (1-\xi)k^\mu k^\nu]}{[k^2 + i\epsilon]^2} (2p-k)^\alpha (2p-k)^\beta \\
 & \left. - 2 \frac{\left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu}\right) [-\eta^{\mu\nu} k^2 + (1-\xi)k^\mu k^\nu]}{[k^2 + i\epsilon]^2} \right\}. \quad (4.140)
 \end{aligned}$$

Al igual que en los casos anteriores, esta integral puede ser calculada en el software computacional *Wolfram Mathematica* [71] haciendo uso del paquete *FeynCalc* [72-74] al expresar todos los operadores que contiene, en términos únicamente de la métrica D -dimensional $\eta_{\mu\nu}$. El resultado que se obtiene de este cálculo está expresado en índices internos de Lorentz y, para identificar la combinación lineal de los elementos de la base $\{\mathbb{1}, \chi, S_{\mu\nu}, \chi S_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\alpha\beta}\}$ a la que dicho resultado corresponde es necesario proyectar el resultado sobre cada uno de los elementos de la base ortogonal, desarrollada en la sección (A.3) del apéndice A, con el fin de identificar los coeficientes de la combinación lineal correspondiente y, posteriormente, regresar a la base no-ortogonal; es el mismo procedimiento que se realizó en el cálculo de la autoenergía de Ψ para el caso masivo. Después de realizar todo este procedimiento con el resultado que se obtiene de *FeynCalc*, se encuentra que la expresión para $-iM^{*2(2)}(p)$ en términos de los operadores de la base es

$$-iM^{*2(2)}(p) = -ia(p^2, \zeta, \xi, D)p^2 \mathbb{1} - ib(p^2, \zeta, \xi, D)S(p) \quad (4.141)$$

donde el coeficiente $a(p^2, \zeta, \xi, D)$ es

$$\begin{aligned}
 a(p^2, \zeta, \xi, D) = & \frac{\pi^2 g^2}{32(D-1)\zeta^2} \\
 & \times \left\{ [4(\zeta^2(-4\zeta y + 7\zeta + 8\xi - 9) + \zeta + 4\xi - 7) \right. \\
 & \quad - D(\zeta(\zeta(\zeta + 16\xi - 15) + 8\xi - 5) + 8\xi - 13)] B_0(0, 0, 0) \\
 & \quad + [9D^2(\zeta - 1)^2 + D(\zeta(\zeta(13\zeta - 31) - 8\xi + 111) + 8\xi - 29) \\
 & \quad + 4(-\zeta^3 + 4(\zeta - 1)(\zeta^2 + 1)\xi + 7\zeta^2 - 27\zeta + 5)] B_0(p^2, 0, 0) \\
 & \quad + p^2 [(D(\zeta(\zeta(\zeta + 16\xi - 15) + 3) + 16\xi - 21) \\
 & \quad + 4(\zeta(\zeta(8\zeta\xi - 11\zeta - 12\xi + 13) + 4\xi - 5) - 8\xi + 11))] C_0(0, p^2, p^2, 0, 0, 0) \\
 & \quad \left. + [4p^4(\zeta - 1)(\xi - 1)(D - 2(\zeta^2 + 1))] D_0(0, p^2, 0, p^2, p^2, p^2, 0, 0, 0, 0) \right\}, \quad (4.142)
 \end{aligned}$$

y el coeficiente $b(p^2, \zeta, \xi, D)$ es

$$\begin{aligned}
 b(p^2, \zeta, \xi, D) &= \frac{\pi^2 g^2 (\zeta - 1)}{32(D-1)\zeta^2} \\
 &\times \{ [-D(\zeta(3\zeta + 16y - 26) + 8\xi - 9) \\
 &\quad - 16(\zeta(\zeta - 1)(\xi - 2) - \xi + 1)] B_0(0, 0, 0) \\
 &\quad + [D(-9D(\zeta - 1) + \zeta(11\zeta + 62) - 33) \\
 &\quad + 8\xi(D + 2\zeta^2) - 16(4\zeta + \xi - 2)] B_0(p^2, 0, 0) \\
 &\quad + p^2 [D(3\zeta^2 + 16(\zeta + 1)\xi - 26\zeta - 17) \\
 &\quad - 16\zeta(\zeta(3 - 2\xi) + \xi) + 32(\zeta - \xi + 1)] C_0(0, p^2, p^2, 0, 0, 0) \\
 &\quad - [4p^4(\xi - 1)(D + 2\zeta^2 - 2)] D_0(0, p^2, 0, p^2, p^2, p^2, 0, 0, 0, 0) \},
 \end{aligned} \tag{4.143}$$

en las que las funciones $B_0(p^2, 0, 0)$, $C_0(0, p^2, p^2, 0, 0, 0)$ y $D_0(0, p^2, 0, p^2, p^2, p^2, 0, 0, 0, 0)$ son las integrales de Passarino-Veltman, definidas en (4.62), (4.77) y (4.130).

Para obtener el término divergente de (4.141) se debe realizar la sustitución $D = 4 - 2\epsilon$ y desarrollar en serie de potencias de ϵ alrededor de $\epsilon = 0$. Realizando este procedimiento con *FeynCalc* se obtiene que la parte divergente de $-iM^{*2(2)}(p)$, que se denota como $\text{Div}[-iM^{*2(2)}(p)]$, es

$$\begin{aligned}
 \text{Div} [-iM^{*2(2)}(p)] &= -i \frac{g^2(\zeta + 1)(3\zeta^2 - 2\zeta\xi + 3)}{64\pi^2\zeta^2\epsilon} p^2 \mathbb{1} \\
 &\quad - i \frac{g^2(\zeta - 1)(4\zeta^2 + \zeta(7 - 3\xi) + 4)}{96\pi^2\zeta^2\epsilon} S(p)
 \end{aligned} \tag{4.144}$$

en donde la divergencia está expresada en el factor $1/\epsilon$. Con este resultado y de la expresión (4.136), la parte divergente de la autoenergía física $-iM^{2(2)}(p)$, denotada como $\text{Div}[-iM^{2(2)}(p)]$, es finalmente

$$\begin{aligned}
 \text{Div} [-iM^{2(2)}(p)] &= -i \frac{g^2(\zeta + 1)(3\zeta^2 - 2\zeta\xi + 3)}{64\pi^2\zeta^2\epsilon} p^2 \mathbb{1} \\
 &\quad - i \frac{g^2(\zeta - 1)(4\zeta^2 + \zeta(7 - 3\xi) + 4)}{96\pi^2\zeta^2\epsilon} S(p) \\
 &\quad + i\delta_{Z_2} \left(\Sigma(p) + \frac{1}{\zeta} R(p) \right) \\
 &= -i \left[\frac{g^2(\zeta + 1)(3\zeta^2 - 2\zeta\xi + 3)}{64\pi^2\zeta^2\epsilon} - \frac{\delta_{Z_2}}{2} \left(1 + \frac{1}{\zeta} \right) \right] p^2 \mathbb{1} \\
 &\quad - i \left[\frac{g^2(\zeta - 1)(4\zeta^2 + \zeta(7 - 3\xi) + 4)}{96\pi^2\zeta^2\epsilon} - \frac{\delta_{Z_2}}{2} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) \right] S(p),
 \end{aligned} \tag{4.145}$$

que, simplificando, se reduce a

$$\begin{aligned} \text{Div} \left[-iM^{2(2)}(p) \right] = & -i \frac{\zeta + 1}{2\zeta} \left[\frac{g^2 (3\zeta^2 - 2\zeta\xi + 3)}{32\pi^2\zeta\epsilon} - \delta_{Z_2} \right] p^2 \mathbb{1} \\ & - i \frac{\zeta - 1}{2\zeta} \left[\frac{g^2 (4\zeta^2 + \zeta(7 - 3\xi) + 4)}{48\pi^2\zeta\epsilon} - \delta_{Z_2} \right] S(p). \end{aligned} \quad (4.146)$$

Dado que existe divergencia tanto en el término proporcional a $p^2 \mathbb{1}$ como en el término proporcional a $S(p)$ y puesto que sólo se dispone de la constante δ_{Z_2} para anular a ambas, la única manera en que la divergencia puede ser completamente removida de $-iM^{2(2)}(p)$ es en los siguientes casos:

- $\zeta = 1$. Con esta elección se tiene que $\Sigma_{\mu\nu} + (1/\zeta)R_{\mu\nu}|_{\zeta=1} = \eta_{\mu\nu}$, por lo que si se hace esta elección desde el principio, la autoenergía $-iM^{*2(2)}(p)$ sólo tendrá componente a lo largo de $p^2 \mathbb{1}$, como se puede comprobar de la expresión (4.143), y entonces su parte divergente puede ser anulada escogiendo a δ_{Z_2} como

$$\delta_{Z_2} = \left. \frac{g^2 (3\zeta^2 - 2\zeta\xi + 3)}{32\pi^2\zeta\epsilon} \right|_{\zeta=1} = \frac{g^2 (3 - \xi)}{16\pi^2\epsilon}. \quad (4.147)$$

- $\zeta = -1$. Con esta elección se tiene que $\Sigma_{\mu\nu} + (1/\zeta)R_{\mu\nu}|_{\zeta=-1} = S_{\mu\nu}$; si se hace esta elección desde el principio, la autoenergía $-iM^{*2(2)}(p)$ tendrá componentes tanto a lo largo de $p^2 \mathbb{1}$ como a lo largo de $S(p)$, como se puede ver de las expresiones (4.142) y (4.143), sin embargo sólo existirá divergencia en el término proporcional a $S(p)$, como se puede comprobar de la expresión (4.144), y entonces la parte divergente puede ser anulada escogiendo a δ_{Z_2} como

$$\delta_{Z_2} = \left. \frac{g^2 (4\zeta^2 + \zeta(7 - 3\xi) + 4)}{48\pi^2\zeta\epsilon} \right|_{\zeta=-1} = -\frac{g^2 (1 + 3\xi)}{48\pi^2\epsilon}. \quad (4.148)$$

- $\zeta \neq 1$ y $\zeta \neq -1$. Si no se cumple una de las dos condiciones anteriores, entonces la única forma en que ambas divergencias puedan ser anuladas simultáneamente de la expresión (4.146) es que se cumpla que

$$\frac{(3\zeta^2 - 2\zeta\xi + 3)}{32\pi^2\zeta\epsilon} = \frac{(4\zeta^2 + \zeta(7 - 3\xi) + 4)}{48\pi^2\zeta\epsilon}. \quad (4.149)$$

Esta ecuación involucra a los parámetros ζ y ξ , pero la dependencia en ξ se anula y la ecuación se reduce a

$$\zeta^2 - 14\zeta + 1 = 0, \quad (4.150)$$

cuyas soluciones son

$$\zeta = 7 + 4\sqrt{3}, \quad \zeta = 7 - 4\sqrt{3}. \quad (4.151)$$

La parte divergente puede entonces ser anulada escogiendo a δ_{Z_2} como

$$\delta_{Z_2} = \frac{-\zeta(\xi - 21)}{32\pi^2\epsilon}, \quad (4.152)$$

para cualquiera de los valores $\zeta = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

En conclusión, con la separación que hemos hecho entre términos físicos y contratérminos, la autoenergía del campo Ψ sólo puede ser renormalizada cuando el parámetro ζ toma alguno de los siguientes cuatro valores

$$\zeta = \pm 1, \quad \zeta = 7 \pm 4\sqrt{3}. \quad (4.153)$$

Es de notar que, a pesar de que el parámetro de norma ξ del campo B^μ está involucrado en el cálculo de la autoenergía $-iM^{*2(2)}(p)$ y específicamente en su parte divergente (4.144), las condiciones (4.153) bajo las cuales la autoenergía es renormalizable no dependen de éste parámetro sino sólo de ζ .

4.3.7. Nuevos contratérminos

En el análisis anterior se concluyó que la autoenergía $-iM^{2(2)}(p)$ del campo Ψ es renormalizable sólo para los cuatro valores específicos del parámetro ζ mostrados en (4.153). Este resultado es consecuencia del hecho de que la autoenergía $-iM^{2(2)}(p)$ tiene una divergencia proporcional a $p^2\mathbb{1}$ y otra divergencia proporcional a $S(p)$, siendo ambas independientes en general, y se dispone sólo de δ_{Z_2} para anular a ambas divergencias, como se puede ver en la expresión (4.146); en otras palabras, se trata de un sistema de dos ecuaciones, en general independientes, para una sola incógnita δ_{Z_2} por lo cual no es resoluble en general, sólo en casos particulares. Las condiciones (4.153) manifiestan el hecho de que las divergencias se pueden anular con δ_{Z_2} sólo cuando $\text{Div}[-iM^{2(2)}(p)]$ no tiene componente en $S(p)$, correspondiente a $\zeta = 1$; cuando no tiene componente en $p^2\mathbb{1}$, correspondiente a $\zeta = -1$; ó cuando tiene ambas componentes pero las divergencias de ambas componentes son iguales, correspondiente a $\zeta = 7 \pm 4\sqrt{3}$. Para anular las divergencias en ambas componentes de manera general es necesario un nuevo contratérmino para la autoenergía de Ψ que contenga una nueva δ independiente a δ_{Z_2} . El único parámetro que puede dar lugar a un nuevo contratérmino para la autoenergía de Ψ es el parámetro de norma ζ . La renormalización de parámetros de norma es un tema que ya ha sido abordado y estudiado en la literatura, tanto a nivel puramente teórico [77, pág. 660] como en su aplicación en cálculos computacionales [78, pág. 93]. La justificación de este procedimiento yace en el hecho de que puesto que los parámetros de norma son parámetros no-físicos y la matriz S

es independiente de ellos, su renormalización no tiene secuelas en la matriz S . Si se modifica la renormalización trivial de ζ que se había hecho en (4.111) y se redefine introduciendo una constante δ_ζ de la siguiente manera

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\zeta_b} \quad \rightarrow \quad \delta_\zeta = \frac{Z_2}{\zeta_b} - \frac{Z_2}{\zeta}, \quad (4.154)$$

la separación del Lagrangiano (4.108) es ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \partial^\nu \Psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu B_\mu)^2 \\ & + ig \left[\partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \Psi - \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \partial^\mu \Psi \right] B^\nu \\ & + g^2 \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \Psi B^\mu B^\nu \\ & + \delta_{Z_2} \partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \partial^\nu \Psi - \frac{\delta_{Z_3}}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & + ig \delta_g \left[\partial^\mu \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \Psi - \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \partial^\mu \Psi \right] B^\nu \\ & + g^2 \delta_3 \bar{\Psi} \left(\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{\zeta} R_{\mu\nu} \right) \Psi B^\mu B^\nu \\ & + \delta_\zeta \partial^\mu \bar{\Psi} R_{\mu\nu} \partial^\nu \Psi + ig \delta_\zeta \left[\partial^\mu \bar{\Psi} R_{\mu\nu} \Psi - \bar{\Psi} R_{\mu\nu} \partial^\mu \Psi \right] B^\nu + g^2 \delta_\zeta \bar{\Psi} R_{\mu\nu} \Psi B^\mu B^\nu, \end{aligned} \quad (4.155)$$

donde se han utilizado las mismas definiciones para δ_{Z_2} , δ_{Z_3} , δ_g y δ_3 que en (4.110) y (4.111). Como se puede apreciar aparecen los mismos términos físicos y contratérminos del Lagrangiano (4.109) pero, adicionalmente, aparecen los contratérminos de la última línea, que involucran a δ_ζ . Dado que los términos físicos son los mismos que en (4.109), la reglas de Feynman para ellos son las mismas que antes; en cambio, las reglas para los contratérminos son ahora

$$\begin{aligned} \text{---} \xrightarrow{p} \otimes \text{---} &= i \left[\delta_{Z_2} \Sigma(p) + \left(\frac{\delta_{Z_2}}{\zeta} + \delta_\zeta \right) R(p) \right], \\ \overset{\mu}{\text{~~~~~}} \otimes \overset{\nu}{\text{~~~~~}} &= -i \delta_{Z_3} (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu), \\ \begin{array}{c} \text{~~~~~} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \text{---} \nearrow \otimes \searrow \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= -ig \left[\delta_g \Sigma_{\mu\nu} + \left(\frac{\delta_g}{\zeta} + \delta_\zeta \right) R_{\mu\nu} \right] (p' + p)^\nu, \\ \begin{array}{c} \text{~~~~~} \mu \quad \nu \\ \text{~~~~~} \\ \text{---} \nearrow \otimes \searrow \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= 2ig^2 \left[\delta_3 \Sigma_{\mu\nu} + \left(\frac{\delta_3}{\zeta} + \delta_\zeta \right) R_{\mu\nu} \right]. \end{aligned}$$

Puesto que los términos físicos son los mismos, la identidad de Ward-Takahashi (4.114) y (4.115) se sigue cumpliendo; el resultado (4.128) para $-i\Pi_{\mu\nu}^{*(2)}(q)$ y su contratérmino no cambian, por lo cual la conclusión es la misma que en (4.134); y, el resultado (4.141) para $-iM^{*2(2)}(p)$ tampoco cambia pero su contratérmino sí, con lo cual la parte divergente $\text{Div}[-iM^{2(2)}(p)]$ es

$$\begin{aligned} \text{Div} \left[-iM^{2(2)}(p) \right] = & -i \left[\frac{g^2(\zeta + 1)(3\zeta^2 - 2\zeta\xi + 3)}{64\pi^2\zeta^2\epsilon} - \frac{\delta_{Z_2}}{2} \left(1 + \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{\delta_\zeta}{2} \right] p^2 \mathbb{1} \\ & - i \left[\frac{g^2(\zeta - 1)(4\zeta^2 + \zeta(7 - 3\xi) + 4)}{96\pi^2\zeta^2\epsilon} - \frac{\delta_{Z_2}}{2} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{\delta_\zeta}{2} \right] S(p), \end{aligned} \quad (4.156)$$

expresión que se reduce a (4.145) cuando se toma $\delta_\zeta = 0$. Con esto, ya es posible escoger a las constantes δ_{Z_2} y δ_ζ de manera que se anulen las divergencias en ambos términos para cualesquiera valores de ξ y ζ ; la elección que efectúa esta anulación es

$$\delta_{Z_2} = \frac{g^2(17\zeta^3 - 3\zeta^2(4\xi - 5) + 3\zeta + 1)}{192\pi^2\zeta^2\epsilon}, \quad \delta_\zeta = \frac{g^2(\zeta^4 - 14\zeta^3 + 14\zeta - 1)}{192\pi^2\zeta^3\epsilon}; \quad (4.157)$$

con estas elecciones la autoenergía del campo Ψ es renormalizable.

En resumen, el resultado (4.146) mostró que la constante δ_{Z_2} no es suficiente para renormalizar de manera general la autoenergía de Ψ a un lazo y reveló la necesidad de introducir una constante δ independiente a δ_{Z_2} para lograrlo. Puesto que el único parámetro que puede dar lugar a un contratérmino para la autoenergía de Ψ con una δ independiente a δ_{Z_2} es el parámetro de norma ζ , es necesario renormalizar a ζ . La introducción de δ_ζ definida en la relación (4.154) y el resultado (4.156) junto con la elección (4.157) de las constantes δ_{Z_2} y δ_ζ muestran que la introducción de δ_ζ es, además de necesaria, suficiente para renormalizar de manera general la autoenergía de Ψ a un lazo. Lo anterior indica que, para la renormalización general (i.e. para cualesquiera valores de los parámetros de norma ζ y ξ) y consistente de este modelo es necesario tomar en cuenta la renormalización del parámetro de norma ζ del campo Ψ .

Capítulo 5

Conclusiones

Materia oscura tensorial es la propuesta para describir a DM como un campo cuántico en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ del HLG; su dinámica libre es deducida a través de un formalismo de primeros principios que tiene como elemento determinante a la simetría de paridad. Esta propuesta asume un Lagrangiano con interacciones entre los sectores de DM y SM del tipo $\text{singleteDM-singleteSM}$, cuya dimensión de masa es 4; este hecho abre la posibilidad de que, detrás de esta teoría, exista una teoría fundamental de TDM que sea válida a cualquier escala de energía. Para indagar la factibilidad de este supuesto, y así determinar si TDM puede dar lugar a una teoría fundamental o si se trata, por el contrario, sólo de un modelo efectivo, es necesario abordar el estudio de su renormalización. El presente trabajo, orientado en este sentido, tuvo el objetivo de estudiar la renormalización de TDM cuando ésta tiene una interacción de norma $U(1)$, a un lazo en el esquema MS .

Primeramente se realizó el cálculo de la autoenergía del campo B^μ y, al extraer la parte divergente del resultado, se encontró que ésta tiene términos proporcionales a q^2 y q^4 , que no pueden ser anulados por el contratérmino correspondiente. Enseguida se realizó el cálculo de la autoenergía del campo Ψ y, al extraer la parte divergente del resultado se encontró que ésta tiene términos proporcionales a $p^4 \mathbb{1}$ y $p^2 S(p)$, que tampoco pueden ser anulados por los contratérminos correspondientes. El origen primordial de estos resultados fue rastreado en la forma del propagador de TDM, que contiene términos de orden cero en el momento y por lo tanto producen divergencias en la región UV. Estos términos hacen que la contribución global del propagador al grado superficial de divergencia \mathcal{D} sea nula, por lo cual no contribuye a disminuirlo y, como consecuencia de ello, se encontró que \mathcal{D} es creciente con el número de vértices, lo que demuestra que la teoría es no-renormalizable.

Habiendo mostrado la no-renormalizabilidad de la teoría, se buscaron alternativas para abordar el problema con otro enfoque. Así, del reconocimiento de la similitud de la estructura del propagador de TDM con la del propagador del campo vectorial masivo se identificó que el problema de no-renormalizabilidad de TDM es, en esencia, el mismo problema que tiene el campo vectorial masivo, sólo que formulado en una representación diferente del

HLG. Teniendo esta identificación, se planteó una aproximación diferente al estudio de la renormalización de TDM que surgió por analogía con la manera en que se renormaliza el campo vectorial masivo. Esta aproximación alternativa consiste en considerar al campo de TDM inicialmente sin masa y, posteriormente, dotarlo de masa a través de algún mecanismo. Este enfoque nos condujo, entonces, al estudio de la renormalización de TDM no-masiva, dejando para un eventual trabajo posterior la búsqueda de algún mecanismo para darle masa.

En el caso no-masivo el Lagrangiano libre de TDM tiene una simetría de norma, relacionada con la libertad en la elección de las componentes de paridad negativa del campo, por lo que para obtener su propagador es necesario agregar un término de fijación de norma; el propagador obtenido es de orden $1/p^2$ en todos los términos, por lo cual ya no tiene el problema del que padecía el propagador del caso masivo. Este Lagrangiano se acopló mínimamente con el campo de norma $U(1)$ y se obtuvieron los diagramas superficialmente divergentes. Se realizó el cálculo de la autoenergía del campo B^μ y se extrajo su parte divergente; se encontró que, en este caso, la divergencia sí puede ser anulada por el contratérmino correspondiente. Se procedió entonces, al cálculo de la autoenergía de TDM y se extrajo su parte divergente; se encontró que ésta tiene tanto una divergencia proporcional a $p^2\mathbb{1}$ como una divergencia proporcional a $S(p)$, siendo ambas independientes en general. Dado que sólo se dispone de la constante δ_{Z_2} para anular ambas divergencias, ésta anulación sólo es posible en los siguientes casos particulares: cuando $\zeta = 1$, que corresponde al caso en que la autoenergía sólo tiene divergencia proporcional a $p^2\mathbb{1}$; cuando $\zeta = -1$, que corresponde al caso en que la autoenergía sólo tiene divergencia proporcional a $S(p)$; ó cuando $\zeta = 7 \pm 4\sqrt{3}$, que corresponde al caso en que la autoenergía tiene divergencia tanto en $p^2\mathbb{1}$ como en $S(p)$, pero ambas son iguales. En vista de que para anular a ambas divergencias de manera general, es decir para cualquier valor de ζ , es necesario una constante δ independiente a δ_{Z_2} en el contratérmino de la autoenergía y puesto que el único parámetro que puede producirla es ζ , se introdujo la constante de renormalización δ_ζ . Con la introducción de esta constante fue posible anular ambas divergencias de manera general y, con ello, renormalizar la autoenergía de TDM.

Estos resultados muestran que la autoenergía del campo B^μ y del campo de TDM, en la teoría de norma $U(1)$ para TDM no-masiva, son renormalizables a un lazo, lo que indica que el enfoque alternativo para abordar la renormalización de TDM parece, al menos hasta esta etapa, una alternativa viable. Desde luego, es necesario aún continuar con el estudio de la renormalización del resto de diagramas superficialmente divergentes, que incluye a los vértices $\Psi\Psi B$, $\Psi\Psi BB$, etc. En caso de que se encontrara que la teoría es renormalizable sería necesario, posteriormente, buscar un mecanismo para dotar de masa al campo de TDM.

Apéndice A

Base covariante de la representación $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

En este apéndice se presenta la base covariante de operadores de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ del HLG inducida por paridad; la reescritura de los elementos de esta base en índices internos de Lorentz; y, finalmente, su ortogonalización en $D \neq 4$.

A.1. Elementos de la base

La base covariante de operadores de la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ inducida por paridad, fue desarrollada en [67]. La base de los operadores de esta representación es la base del espacio $[(1, 0) \oplus (0, 1)] \otimes [(1, 0) \oplus (0, 1)]$ y la naturaleza de los objetos que la componen puede identificarse de la descomposición de este producto como

$$[(1, 0) \oplus (0, 1)]^2 = (0, 0)_2 \oplus (1, 1)_2 \oplus (1, 0) \oplus (0, 1) \oplus (2, 0) \oplus (0, 2). \quad (\text{A.1})$$

Los elementos que componen esta base son, entonces, los siguientes.

- Dos operadores en la representación $(0, 0)$. Estos operadores son la unidad $\mathbb{1}$ y quiralidad χ .
- Dos operadores en la representación $(1, 1)$. Estos operadores son el tensor $S_{\mu\nu}$ simétrico y sin traza ($S^\mu{}_\mu = 0$) y el que se obtiene de multiplicarlo por quiralidad $\chi S_{\mu\nu}$.
- Un operador en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$. Este operador es el tensor $M_{\mu\nu}$ cuyas componentes son los generadores de Lorentz de esta representación.
- Un operador en la representación $(2, 0) \oplus (0, 2)$. Este operador es un tensor $C_{\mu\nu\alpha\beta}$, con las simetrías

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = -C_{\nu\mu\alpha\beta} = -C_{\mu\nu\beta\alpha}, \quad C_{\mu\nu\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\mu\nu}; \quad (\text{A.2})$$

cualquiera de sus trazas es nula y además satisface la identidad de Bianchi

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} + C_{\mu\alpha\beta\nu} + C_{\mu\beta\nu\alpha} = 0. \quad (\text{A.3})$$

La base es entonces

$$\{\mathbb{1}, \chi, S_{\mu\nu}, \chi S_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\alpha\beta}\}. \quad (\text{A.4})$$

El operador unidad $\mathbb{1}$ es la matriz unidad 6×6 . En la base quiral, el operador de quiralidad χ y las componentes del tensor $M_{\mu\nu}$, en bloques 3×3 , son

$$\chi = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad M_{ij} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} J_k^{(1)} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & J_k^{(1)} \end{pmatrix}, \quad M_{0i} = \begin{pmatrix} iJ_i^{(1)} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -iJ_i^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

donde las componentes $J_k^{(1)}$ están definidas en (2.159). El operador $S_{\mu\nu}$ es

$$S_{\mu\nu} = \Pi(\mathbb{1}\eta_{\mu\nu} - i(\eta_{0\mu}M_{0\nu} + \eta_{0\nu}M_{0\mu}) - \{M_{0\mu}, M_{0\nu}\}), \quad (\text{A.6})$$

el operador $\chi S_{\mu\nu}$ es $\chi \cdot S_{\mu\nu}$ y el operador $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ es

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = 4\{M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}\} + 2\{M_{\mu\alpha}, M_{\nu\beta}\} - 2\{M_{\mu\beta}, M_{\nu\alpha}\} - 8(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta})\mathbb{1}. \quad (\text{A.7})$$

La estructura algebraica de Lie y de Jordan para esta base de operadores se puede encontrar en la referencia [67]. De particular importancia es la relación de anticonmutación entre el tensor $S_{\mu\nu}$ y $S_{\alpha\beta}$, que es

$$\{S_{\mu\nu}, S_{\alpha\beta}\} = \frac{4}{3} \left(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{6} (C_{\mu\alpha\nu\beta} - C_{\mu\beta\nu\alpha}), \quad (\text{A.8})$$

e implica la relación

$$(S(p))^2 = p^4 \mathbb{1}, \quad (\text{A.9})$$

donde $S(p) \equiv S^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$.

A.2. Índices internos de Lorentz

El mapeo entre la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ del HLG y el espacio de los tensores antisimétricos de segundo rango se desarrolla a detalle en la referencia [42]. La realización de este mapeo es manifiesta en la base $\{|v_i; \pm\rangle\}$, definida a partir de la base (3.55) de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} |v_1, +\rangle \\ |v_2, +\rangle \\ |v_3, +\rangle \\ |v_1, -\rangle \\ |v_2, -\rangle \\ |v_3, -\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_E & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & M_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |+\rangle \\ |+\rangle \\ |+\rangle \\ |-\rangle \\ |-\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

donde las matrices en el miembro derecho están escritas en bloques 3×3 y M_E es

$$M_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Las componentes de los espinores $\Psi = (\Psi^i, \Psi^{i+3})^T$ en esta base están relacionadas con las componentes Ψ^{ij} y Ψ^{0i} de un tensor antisimétrico de segundo rango $\Psi^{\alpha\beta}$ de la siguiente manera

$$\Psi^{ij} = \varepsilon^{ijk} \Psi^k, \quad \Psi^{0i} = \Psi^{i+3}. \quad (\text{A.12})$$

Este mapeo hace corresponder a cada índice espinorial un par de índices antisimétricos de Lorentz, que son llamados índices internos de Lorentz para diferenciarlos de los índices de Lorentz que no están relacionados con la estructura interna de la representación. De esta manera, los operadores \mathcal{O}_{ab} son mapeados hacia tensores de cuarto rango $\mathcal{O}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ antisimétricos en los índices $\alpha\beta$ y $\gamma\delta$. Así, los operadores de la base son

$$\mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}), \quad (\text{A.13})$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (\text{A.14})$$

$$(S_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \eta_{\mu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\nu\delta} - \eta_{\mu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\nu} - \eta_{\nu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\mu\delta} - \eta_{\nu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\mu}, \quad (\text{A.15})$$

$$(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta} = -i (\eta_{\mu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\nu\delta} + \eta_{\mu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\nu} - \eta_{\nu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\mu\delta} - \eta_{\nu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\mu}), \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} (C_{\mu\nu\rho\sigma})_{\alpha\beta\gamma\delta} = & 32 \mathbb{1}_{\alpha\gamma\mu\nu} \mathbb{1}_{\delta\beta\rho\sigma} - 32 \mathbb{1}_{\alpha\gamma\rho\sigma} \mathbb{1}_{\beta\delta\mu\nu} + 6 \eta_{\alpha\gamma} X_{\beta\delta\rho\sigma\mu\nu} + 6 \eta_{\beta\delta} X_{\alpha\gamma\rho\sigma\mu\nu} \\ & + 8 \mathbb{1}_{\alpha\beta\delta\gamma} \mathbb{1}_{\rho\sigma\mu\nu} + 16 \mathbb{1}_{\alpha\beta\rho\sigma} \mathbb{1}_{\delta\gamma\mu\nu} + 16 \mathbb{1}_{\alpha\beta\mu\nu} \mathbb{1}_{\delta\gamma\rho\sigma} - 16 \mathbb{1}_{\alpha\delta\rho\sigma} \mathbb{1}_{\beta\gamma\mu\nu} \\ & - 16 \mathbb{1}_{\alpha\delta\mu\nu} \mathbb{1}_{\beta\gamma\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde

$$X_{\alpha\gamma\rho\sigma\mu\nu} = 2\eta_{\alpha\rho} \mathbb{1}_{\mu\nu\gamma\sigma} - 2\eta_{\alpha\sigma} \mathbb{1}_{\mu\nu\gamma\rho} - 2\eta_{\alpha\mu} \mathbb{1}_{\nu\gamma\rho\sigma} + 2\eta_{\alpha\nu} \mathbb{1}_{\mu\gamma\rho\sigma}. \quad (\text{A.18})$$

Con esto, los operadores $\Sigma_{\mu\nu} = (1/2)(\eta_{\mu\nu} \mathbb{1} + S_{\mu\nu})$ y $R_{\mu\nu} = (1/2)(\eta_{\mu\nu} \mathbb{1} - S_{\mu\nu})$ son

$$\begin{aligned} (\Sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta} = & \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} + (S_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta}) \\ = & \eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\nu\delta} + \eta_{\mu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\nu} + \eta_{\nu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\mu\delta} + \eta_{\nu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\mu}), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} (R_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta} = & \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\delta} - (S_{\mu\nu})_{\alpha\beta\gamma\delta}) \\ = & \frac{1}{2} (\eta_{\mu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\nu\delta} + \eta_{\mu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\nu} + \eta_{\nu\gamma} \mathbb{1}_{\alpha\beta\mu\delta} + \eta_{\nu\delta} \mathbb{1}_{\alpha\beta\gamma\mu}), \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Tr	$\mathbb{1}$	χ	$S_{\alpha\beta}$	$\chi S_{\alpha\beta}$	$M_{\alpha\beta}$	$C_{\alpha\beta\gamma\delta}$
$\overline{\mathbb{1}}$	$N_{\overline{\mathbb{1}}.\mathbb{1}}$	0	0	0	0	0
$\overline{\chi}$	0	$N_{\overline{\chi}.\chi}$	0	0	0	0
$\overline{S}_{\mu\nu}$	0	0	$N_{\overline{S}.S}$	0	0	0
$\overline{\chi S}_{\mu\nu}$	0	0	0	$N_{\overline{\chi S}.\chi S}$	0	0
$\overline{M}_{\mu\nu}$	0	0	0	0	$N_{\overline{M}.M}$	0
$\overline{C}_{\mu\nu\rho\sigma}$	0	0	0	0	0	$N_{\overline{C}.C}$

 Tabla A.1: Ortogonalidad de la base covariante en $D = 4$.

A.3. Ortogonalización en D arbitraria

El producto interior entre dos operadores A y B se define como

$$A \cdot B \equiv \text{Tr}[\overline{A}B], \quad (\text{A.21})$$

donde $\overline{A} \equiv \Pi A \Pi$ (donde debe recordarse que $\Pi = S^{00}$). Los operadores adjuntos de los elementos de la base $\{\mathbb{1}, \chi, \chi S_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\alpha\beta}\}$ son

$$\overline{\mathbb{1}} = \mathbb{1}, \quad \overline{\chi} = -\chi, \quad \overline{S}_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}, \quad (\text{A.22})$$

$$\overline{\chi S}_{\mu\nu} = \chi S_{\mu\nu}, \quad \overline{M}_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}, \quad \overline{C}_{\mu\nu\alpha\beta} = C_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{A.23})$$

Con este producto interior la base es ortogonal, como se muestra en la tabla (A.1), en donde las constantes N diagonales son

$$N_{\overline{\mathbb{1}}.\mathbb{1}} = \text{Tr}[\overline{\mathbb{1}}\mathbb{1}] = 6, \quad (\text{A.24})$$

$$N_{\overline{\chi}.\chi} = \text{Tr}[\overline{\chi}\chi] = -6, \quad (\text{A.25})$$

$$(N_{\overline{S}.S})_{\mu\nu\alpha\beta} = \text{Tr}[\overline{S}_{\mu\nu}S_{\alpha\beta}] = 4\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + 4\eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu} - 2\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.26})$$

$$(N_{\overline{\chi S}.\chi S})_{\mu\nu\alpha\beta} = \text{Tr}[\overline{\chi S}_{\mu\nu}\chi S_{\alpha\beta}] = 4\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + 4\eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu} - 2\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.27})$$

$$(N_{\overline{M}.M})_{\mu\nu\alpha\beta} = \text{Tr}[\overline{M}_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}] = 8\eta_{0\beta}\eta_{0[\mu}\eta_{\nu]\alpha} - 8\eta_{0\alpha}\eta_{0[\mu}\eta_{\nu]\beta} + 4\eta_{\alpha[\mu}\eta_{\nu]\beta}, \quad (\text{A.28})$$

$$(N_{\overline{C}.C})_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta\gamma\delta} = \text{Tr}[\overline{C}_{\mu\nu\rho\sigma}C_{\alpha\beta\gamma\delta}] = (\dots), \quad (\text{A.29})$$

mientras que las no-diagonales son todas nulas.

La extensión de la base $\{\mathbb{1}, \chi, \chi S_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\alpha\beta}\}$ a dimensión D arbitraria se realiza a través de las expresiones (A.13)-(A.17), sustituyendo la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$ en $D = 4$ por la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, \dots, -1)$ en dimensión D . La base en dimensión D obtenida de esta manera resulta ser en general no-ortogonal, como se muestra en la tabla (A.2) donde, además de las constantes diagonales, aparecen constantes no-diagonales no-nulas. Las constantes N diagonales son

Tr	$\mathbb{1}$	χ	$S_{\alpha\beta}$	$\chi S_{\alpha\beta}$	$M_{\alpha\beta}$	$C_{\alpha\beta\gamma\delta}$
$\bar{\mathbb{1}}$	$N_{\bar{\mathbb{1}}.\mathbb{1}}$	0	$N_{\bar{\mathbb{1}}.S}$	0	0	$N_{\bar{\mathbb{1}}.C}$
$\bar{\chi}$	0	$N_{\bar{\chi}.\chi}$	0	$N_{\bar{\chi}.\chi S}$	0	0
$\bar{S}_{\mu\nu}$	$N_{\bar{\mathbb{1}}.S}^*$	0	$N_{\bar{S}.S}$	0	0	$N_{\bar{S}.C}$
$\bar{\chi} S_{\mu\nu}$	0	$N_{\bar{\chi}.\chi S}^*$	0	$N_{\bar{\chi} S.\chi S}$	0	0
$\bar{M}_{\mu\nu}$	0	0	0	0	$N_{\bar{M}.M}$	0
$\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma}$	$N_{\bar{\mathbb{1}}.C}^*$	0	$N_{\bar{S}.C}^*$	0	0	$N_{\bar{C}.C}$

 Tabla A.2: No-ortogonalidad de la base covariante en D .

$$N_{\bar{\mathbb{1}}.\mathbb{1}} = \text{Tr}[\bar{\mathbb{1}}\mathbb{1}] = \frac{1}{2}D(D-1), \quad (\text{A.30})$$

$$N_{\bar{\chi}.\chi} = \text{Tr}[\bar{\chi}\chi] = -\frac{1}{4}D(D-1)(D-2)(D-3), \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} (N_{\bar{S}.S})_{\mu\nu\alpha\beta} &= \text{Tr}[\bar{S}_{\mu\nu}S_{\alpha\beta}] = 2(D-2)(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu}) \\ &\quad + \frac{1}{2}[D(D-9) + 16]\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} (N_{\bar{\chi} S.\chi S})_{\mu\nu\alpha\beta} &= \text{Tr}[\bar{\chi} S_{\mu\nu}\chi S_{\alpha\beta}] = \frac{1}{4}(D-2)(D-3) \{8\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + 8\eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu} \\ &\quad - [D(D-9) + 24]\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\}, \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} (N_{\bar{M}.M})_{\mu\nu\alpha\beta} &= \text{Tr}[\bar{M}_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}] = 2(D-2) \{2\eta_{0\beta}\eta_{0[\mu}\eta_{\nu]\alpha} - 2\eta_{0\alpha}\eta_{0[\mu}\eta_{\nu]\beta} \\ &\quad + \eta_{\alpha[\mu}\eta_{\nu]\beta}\} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$(N_{\bar{C}.C})_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta\gamma\delta} = \text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma}C_{\alpha\beta\gamma\delta}] = (\dots), \quad (\text{A.35})$$

que se reducen a las expresiones (A.24)-(A.29) para $D = 4$; las constantes N no-diagonales son

$$(N_{\bar{\mathbb{1}}.S})_{\alpha\beta} = \text{Tr}[\bar{\mathbb{1}}S_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}(D-1)(D-4)\eta_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.36})$$

$$(N_{\bar{\mathbb{1}}.C})_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{Tr}[\bar{\mathbb{1}}C_{\alpha\beta\gamma\delta}] = 4(D-3)(D-4)(\eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma} - \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}) \quad (\text{A.37})$$

$$(N_{\bar{\chi}.\chi S})_{\alpha\beta} = \text{Tr}[\bar{\chi}\chi S_{\alpha\beta}] = -\frac{1}{4}(D-1)(D-2)(D-3)(D-4)\eta_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} (N_{\bar{S}.C})_{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta} &= \text{Tr}[\bar{S}_{\mu\nu}C_{\alpha\beta\gamma\delta}] = 4(D-4) \{ (D-7)\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha[\delta}\eta_{\gamma]\beta} + 3\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\{\mu}\eta_{\nu\}\delta} \\ &\quad + 3\eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\{\mu}\eta_{\nu\}\gamma} + 3\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta[\gamma}\eta_{\delta]\nu} + 3\eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta[\gamma}\eta_{\delta]\mu} \}, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

de donde es evidente que para $D = 4$ todas estas constantes no-diagonales son nulas, recuperando así la ortogonalidad de la base en $D = 4$.

La ortogonalización de la base para cualquier valor de D puede realizarse a través del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt [76]. Este proceso establece que la base ortogonal, denotada por $\{\mathbb{1}^\perp, \chi^\perp, S_{\mu\nu}^\perp, (\chi S_{\mu\nu})^\perp, M_{\mu\nu}^\perp, C_{\mu\nu\alpha\beta}^\perp\}$, está dada en términos de la

no-ortogonal $\{\mathbb{1}, \chi, S_{\mu\nu}, \chi S_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\alpha\beta}\}$, por las relaciones

$$\mathbb{1}^\perp = \mathbb{1}, \quad (\text{A.40})$$

$$\chi^\perp = \chi - \frac{\text{Tr}[\overline{\chi}\mathbb{1}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{\mathbb{1}^\perp\mathbb{1}^\perp}]} \mathbb{1}^\perp, \quad (\text{A.41})$$

$$S_{\mu\nu}^\perp = S_{\mu\nu} - \frac{\text{Tr}[\overline{S}_{\mu\nu}\mathbb{1}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{\mathbb{1}^\perp\mathbb{1}^\perp}]} \mathbb{1}^\perp - \frac{\text{Tr}[\overline{S}_{\mu\nu}\chi^\perp]}{\text{Tr}[\overline{\chi^\perp\chi^\perp}]} \chi^\perp, \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} (\chi S_{\mu\nu})^\perp &= \chi S_{\mu\nu} - \frac{\text{Tr}[\overline{\chi S}_{\mu\nu}\mathbb{1}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{\mathbb{1}^\perp\mathbb{1}^\perp}]} \mathbb{1}^\perp - \frac{\text{Tr}[\overline{\chi S}_{\mu\nu}\chi^\perp]}{\text{Tr}[\overline{\chi^\perp\chi^\perp}]} \chi^\perp \\ &\quad - \frac{\text{Tr}[\overline{\chi S}_{\mu\nu}S_{\alpha\beta}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{S_{\alpha\beta}^\perp S_{\alpha\beta}^\perp}]} (S^{\alpha\beta})^\perp, \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}^\perp &= M_{\mu\nu} - \frac{\text{Tr}[\overline{M}_{\mu\nu}\mathbb{1}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{\mathbb{1}^\perp\mathbb{1}^\perp}]} \mathbb{1}^\perp - \frac{\text{Tr}[\overline{M}_{\mu\nu}\chi^\perp]}{\text{Tr}[\overline{\chi^\perp\chi^\perp}]} \chi^\perp \\ &\quad - \frac{\text{Tr}[\overline{M}_{\mu\nu}S_{\alpha\beta}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{S_{\alpha\beta}^\perp S_{\alpha\beta}^\perp}]} (S^{\alpha\beta})^\perp - \frac{\text{Tr}[\overline{M}_{\mu\nu}(\chi S_{\alpha\beta})^\perp]}{\text{Tr}[(\chi S_{\alpha\beta})^\perp (\chi S_{\alpha\beta})^\perp]} (\chi S^{\alpha\beta})^\perp, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\sigma}^\perp &= C_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{\text{Tr}[\overline{C}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathbb{1}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{\mathbb{1}^\perp\mathbb{1}^\perp}]} \mathbb{1}^\perp - \frac{\text{Tr}[\overline{C}_{\mu\nu\rho\sigma}\chi^\perp]}{\text{Tr}[\overline{\chi^\perp\chi^\perp}]} \chi^\perp \\ &\quad - \frac{\text{Tr}[\overline{C}_{\mu\nu\rho\sigma}S_{\alpha\beta}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{S_{\alpha\beta}^\perp S_{\alpha\beta}^\perp}]} (S^{\alpha\beta})^\perp - \frac{\text{Tr}[\overline{C}_{\mu\nu\rho\sigma}(\chi S_{\alpha\beta})^\perp]}{\text{Tr}[(\chi S_{\alpha\beta})^\perp (\chi S_{\alpha\beta})^\perp]} (\chi S^{\alpha\beta})^\perp \\ &\quad - \frac{\text{Tr}[\overline{C}_{\mu\nu\rho\sigma}M_{\alpha\beta}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{M_{\alpha\beta}^\perp M_{\alpha\beta}^\perp}]} (M^{\alpha\beta})^\perp, \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

donde en los índices repetidos en los denominadores no hay suma, sino que toman los valores correspondientes de los índices del numerador sobre los que sí hay suma, por ejemplo

$$\frac{\text{Tr}[\overline{\chi S}_{\mu\nu}S_{\alpha\beta}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{S_{\alpha\beta}^\perp S_{\alpha\beta}^\perp}]} (S^{\alpha\beta})^\perp \equiv \frac{\text{Tr}[\overline{\chi S}_{\mu\nu}S_{00}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{S_{00}^\perp S_{00}^\perp}]} (S^{00})^\perp + \frac{\text{Tr}[\overline{\chi S}_{\mu\nu}S_{01}^\perp]}{\text{Tr}[\overline{S_{01}^\perp S_{01}^\perp}]} (S^{01})^\perp + \dots, \quad (\text{A.46})$$

por lo cual los denominadores no son covariantes y pareciera que la base ortogonal construida de esta manera es necesariamente no-covariante, sin embargo, como se muestra enseguida, resulta que la mayoría de los términos no-covariantes se anulan y el único que no se anula puede determinarse de una forma alternativa que sí es covariante. Para realizar las siguientes simplificaciones se toma en consideración la tabla (A.2). Utilizando el hecho de que $\mathbb{1}^\perp = \mathbb{1}$ y de que $\text{Tr}[\overline{\chi}\mathbb{1}] = 0$ se tiene

$$\chi^\perp = \chi - \frac{\text{Tr}[\overline{\chi}\mathbb{1}]}{\text{Tr}[\overline{\mathbb{1}\mathbb{1}]} } \mathbb{1} = \chi, \quad (\text{A.47})$$

mientras que, usando $\text{Tr}[\bar{S}_{\mu\nu}\chi] = 0$, el tensor $S_{\mu\nu}^\perp$ se reduce a

$$S_{\mu\nu}^\perp = S_{\mu\nu} - \frac{\text{Tr}[\bar{S}_{\mu\nu}\mathbb{1}]}{\text{Tr}[\mathbb{1}\mathbb{1}]} \mathbb{1} - \frac{\text{Tr}[\bar{S}_{\mu\nu}\chi]}{\text{Tr}[\bar{\chi}\chi]} \chi = S_{\mu\nu} - \frac{D-4}{D} \eta_{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (\text{A.48})$$

De esta expresión se tiene $\text{Tr}[\bar{\chi} S_{\mu\nu} S_{\alpha\beta}^\perp] = \text{Tr}[\bar{\chi} S_{\mu\nu} S_{\alpha\beta}] - ((D-4)/D) \eta_{\alpha\beta} \text{Tr}[\bar{\chi} S_{\mu\nu} \mathbb{1}]$, y puesto que $\text{Tr}[\bar{\chi} S_{\mu\nu} S_{\alpha\beta}] = 0$ y $\text{Tr}[\bar{\chi} S_{\mu\nu} \mathbb{1}] = 0$ se concluye que $\text{Tr}[\bar{\chi} S_{\mu\nu} S_{\alpha\beta}^\perp] = 0$, con lo cual el tensor $(\chi S_{\mu\nu})^\perp$ es

$$\begin{aligned} (\chi S_{\mu\nu})^\perp &= \chi S_{\mu\nu} - \frac{\text{Tr}[\bar{\chi} S_{\mu\nu} \mathbb{1}]}{\text{Tr}[\mathbb{1}\mathbb{1}]} \mathbb{1} - \frac{\text{Tr}[\bar{\chi} S_{\mu\nu} \chi]}{\text{Tr}[\bar{\chi}\chi]} \chi - \frac{\text{Tr}[\bar{\chi} S_{\mu\nu} S_{\alpha\beta}^\perp]}{\text{Tr}[S_{\alpha\beta}^\perp S_{\alpha\beta}^\perp]} (S^{\alpha\beta})^\perp \\ &= \chi S_{\mu\nu} - \frac{\text{Tr}[\bar{\chi} S_{\mu\nu} \chi]}{\text{Tr}[\bar{\chi}\chi]} \chi = \chi S_{\mu\nu} - \frac{D-4}{D} \eta_{\mu\nu} \chi = \chi S_{\mu\nu}^\perp. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

De la tabla (A.2) se puede ver que el producto interior de $M_{\mu\nu}$ con cualquier otro elemento de la base es nulo y, puesto que ni $S_{\alpha\beta}^\perp$ ni $(\chi S_{\alpha\beta})^\perp$ involucran a $M_{\mu\nu}$, se obtiene

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}^\perp &= M_{\mu\nu} - \frac{\text{Tr}[\bar{M}_{\mu\nu} \mathbb{1}]}{\text{Tr}[\mathbb{1}\mathbb{1}]} \mathbb{1} - \frac{\text{Tr}[\bar{M}_{\mu\nu} \chi]}{\text{Tr}[\bar{\chi}\chi]} \chi - \frac{\text{Tr}[\bar{M}_{\mu\nu} S_{\alpha\beta}^\perp]}{\text{Tr}[S_{\alpha\beta}^\perp S_{\alpha\beta}^\perp]} (S^{\alpha\beta})^\perp \\ &\quad - \frac{\text{Tr}[\bar{M}_{\mu\nu} (\chi S_{\alpha\beta})^\perp]}{\text{Tr}[(\chi S_{\alpha\beta})^\perp (\chi S_{\alpha\beta})^\perp]} (\chi S^{\alpha\beta})^\perp = M_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma}\chi] = 0$, $\text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma} (\chi S_{\alpha\beta})^\perp] = \text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma} \chi S_{\alpha\beta}] - ((D-4)/D) \eta_{\alpha\beta} \text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma}\chi] = 0$ y $\text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma} M_{\alpha\beta}] = 0$, el tensor $C_{\mu\nu\rho\sigma}^\perp$ es

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\sigma}^\perp &= C_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{\text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbb{1}]}{\text{Tr}[\mathbb{1}\mathbb{1}]} \mathbb{1} - \frac{\text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma} \chi]}{\text{Tr}[\bar{\chi}\chi]} \chi \\ &\quad - \frac{\text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma} S_{\alpha\beta}^\perp]}{\text{Tr}[S_{\alpha\beta}^\perp S_{\alpha\beta}^\perp]} (S^{\alpha\beta})^\perp - \frac{\text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma} (\chi S_{\alpha\beta})^\perp]}{\text{Tr}[(\chi S_{\alpha\beta})^\perp (\chi S_{\alpha\beta})^\perp]} (\chi S^{\alpha\beta})^\perp \\ &\quad - \frac{\text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma} M_{\alpha\beta}]}{\text{Tr}[(\bar{M}_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta})]} M^{\alpha\beta} \\ &= C_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{\text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbb{1}]}{\text{Tr}[\mathbb{1}\mathbb{1}]} \mathbb{1} - \frac{\text{Tr}[\bar{C}_{\mu\nu\rho\sigma} S_{\alpha\beta}^\perp]}{\text{Tr}[S_{\alpha\beta}^\perp S_{\alpha\beta}^\perp]} (S^{\alpha\beta})^\perp. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Hasta antes de este resultado todos los términos no-covariantes que habían aparecido en la ortogonalización de los otros elementos de la base se habían anulado; el tercer término en el miembro derecho de esta última expresión es el único término no-covariante que no se anula. La no-covarianza viene del denominador del tercer término (porque, como se explicó

anteriormente, no hay suma sobre los índices repetidos en el denominador), pero es posible determinar de una manera alternativa y covariante al tensor $C_{\mu\nu\rho\sigma}^\perp$ si se asume que tiene la forma

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}^\perp = C_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{\text{Tr}[\overline{C}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathbb{1}]}{\text{Tr}[\overline{\mathbb{1}\mathbb{1}}]}\mathbb{1} - t_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta}(S^{\alpha\beta})^\perp, \quad (\text{A.52})$$

y se busca el valor del tensor $t_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta}$ exigiendo que $C_{\mu\nu\rho\sigma}^\perp$ sea ortogonal a todos los demás elementos de la base que ya se han construido. La expresión (A.52), por su forma, ya es ortogonal a los elementos $\mathbb{1}$, χ , $(\chi S_{\mu\nu})^\perp$ y $M_{\mu\nu}$. La ortogonalidad con el elemento $S_{\mu\nu}^\perp$ exige que el tensor $t_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta}$ cumpla la siguiente ecuación

$$\text{Tr}[\overline{S_{\gamma\delta}^\perp} C_{\mu\nu\rho\sigma}^\perp] = \text{Tr}[\overline{S_{\gamma\delta}^\perp} C_{\mu\nu\rho\sigma}] - t_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} \text{Tr}[\overline{S_{\gamma\delta}^\perp} (S^{\alpha\beta})^\perp] = 0, \quad (\text{A.53})$$

es decir, se debe cumplir que

$$t_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} \text{Tr}[\overline{S_{\gamma\delta}^\perp} (S^{\alpha\beta})^\perp] = \text{Tr}[\overline{S_{\gamma\delta}^\perp} C_{\mu\nu\rho\sigma}]; \quad (\text{A.54})$$

una solución a esta ecuación es la siguiente

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} &= \frac{1}{4(D-2)} \text{Tr}[\overline{S_{\alpha\beta}^\perp} C_{\mu\nu\rho\sigma}] \\ &= \frac{3(D-4)}{D(D-2)} \left\{ D(\eta_{\alpha\rho}\eta_{\beta[\nu}\eta_{\mu]}\sigma + \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta[\rho}\eta_{\sigma]}\mu \right. \\ &\quad \left. + \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta[\sigma}\eta_{\rho]}\nu + \eta_{\alpha\sigma}\eta_{\beta[\mu}\eta_{\nu]}\rho) + 4\eta_{\alpha\beta}\eta_{\nu[\sigma}\eta_{\rho]}\mu \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

como se comprueba al sustituir en el miembro izquierdo de (A.54)

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} \text{Tr}[\overline{S_{\gamma\delta}^\perp} (S^{\alpha\beta})^\perp] &= \frac{1}{4(D-2)} \text{Tr}[\overline{S_{\alpha\beta}^\perp} C_{\mu\nu\rho\sigma}] \text{Tr}[\overline{S_{\gamma\delta}^\perp} (S^{\alpha\beta})^\perp] \\ &= \frac{1}{2D} \text{Tr}[\overline{S_{\alpha\beta}^\perp} C_{\mu\nu\rho\sigma}] (D\eta_\delta^\alpha \eta_\gamma^\beta + D\eta_\gamma^\alpha \eta_\delta^\beta - 2\eta^{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta}) \\ &= \text{Tr}[\overline{S_{\gamma\delta}^\perp} C_{\mu\nu\rho\sigma}], \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

donde se ha usado que

$$\text{Tr}[\overline{S_{\gamma\delta}^\perp} (S^{\alpha\beta})^\perp] = 2 \frac{D-2}{D} (D\eta_\delta^\alpha \eta_\gamma^\beta + D\eta_\gamma^\alpha \eta_\delta^\beta - 2\eta_\beta^\alpha \eta_\delta^\gamma) \quad (\text{A.57})$$

así como $S_{\delta\gamma}^\perp = S_{\gamma\delta}^\perp$ y $S_{\alpha\beta}^\perp \eta^{\alpha\beta} = 0$. Con esto, la base ortogonal está compuesta finalmente por los operadores $\{\mathbb{1}, \chi, S_{\mu\nu}^\perp, \chi S_{\mu\nu}^\perp, M_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho\sigma}^\perp\}$, donde

$$S_{\mu\nu}^\perp = S_{\mu\nu} - \frac{\text{Tr}[\overline{S_{\mu\nu}}\mathbb{1}]}{\text{Tr}[\overline{\mathbb{1}\mathbb{1}}]}\mathbb{1}, \quad (\text{A.58})$$

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}^\perp = C_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{\text{Tr}[\overline{C}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathbb{1}]}{\text{Tr}[\overline{\mathbb{1}\mathbb{1}}]}\mathbb{1} - t_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta}(S^{\alpha\beta})^\perp, \quad (\text{A.59})$$

que explícitamente son

$$S_{\mu\nu}^{\perp} = S_{\mu\nu} - \frac{D-4}{D} \eta_{\mu\nu} \mathbb{1}, \quad (\text{A.60})$$

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\sigma}^{\perp} = & C_{\mu\nu\rho\sigma} - 8 \frac{(D-4)(D-3)}{D(D-1)} \eta_{\mu[\sigma} \eta_{\rho]\nu} \mathbb{1} \\ & - \frac{3(D-4)}{D(D-2)} \{ D(\eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta[\nu} \eta_{\mu]\sigma} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta[\rho} \eta_{\sigma]\mu} + \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta[\sigma} \eta_{\rho]\nu} + \eta_{\alpha\sigma} \eta_{\beta[\mu} \eta_{\nu]\rho}) \\ & + 4\eta_{\alpha\beta} \eta_{\nu[\sigma} \eta_{\rho]\mu} \} (S^{\alpha\beta})^{\perp} \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

y que, evidentemente, se reduce a la base original en $D = 4$. A partir de las expresiones (A.58) y (A.59), y usando la tabla (A.1) se comprueba directamente que esta base es ortogonal.

La base ortogonal en D arbitraria es útil en el contexto de regularización dimensional para determinar los coeficientes de la combinación lineal en la que un operador se descompone. Por ejemplo, el operador espinorial escalar de Lorentz $V(p)$, dependiente sólo del momento p^{μ} , más general que se puede definir es

$$V(p) = a(p^2) \mathbb{1} + b(p^2) \chi + c(p^2) S^{\perp}(p) + d(p^2) \chi S^{\perp}(p), \quad (\text{A.62})$$

donde $S^{\perp}(p) \equiv S_{\alpha\beta}^{\perp} p^{\alpha} p^{\beta}$ y los términos proporcionales a $M_{\alpha\beta}$ y $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\perp}$ se anulan al estar contraídos con los momentos $p^{\alpha} p^{\beta}$ o con la métrica $\eta^{\alpha\beta}$ por las simetrías que poseen. Debido a la ortogonalidad de la base, los coeficientes se pueden obtener de proyectar a $V(p)$ sobre cada elemento de ella, así se obtiene que

$$a(p^2) = \frac{\text{Tr}[\mathbb{1}V(p)]}{\text{Tr}[\mathbb{1}\mathbb{1}]}, \quad b(p^2) = \frac{\text{Tr}[\bar{\chi}V(p)]}{\text{Tr}[\bar{\chi}\chi]}, \quad (\text{A.63})$$

$$c(p^2) = \frac{\text{Tr}[S^{\perp}(p)V(p)]}{\text{Tr}[S^{\perp}(p)S^{\perp}(p)]}, \quad d(p^2) = \frac{\text{Tr}[\chi S^{\perp}(p)V(p)]}{\text{Tr}[\chi S^{\perp}(p)\chi S^{\perp}(p)]}. \quad (\text{A.64})$$

Una vez determinados los coeficientes se puede reescribir el operador $S^{\perp}(p)$ en términos de $S(p)$ y $p^2 \mathbb{1}$ a partir de la relación

$$S^{\perp}(p) = S(p) - \frac{D-4}{D} p^2 \mathbb{1} \quad (\text{A.65})$$

para expresar a $V(p)$ en términos de la base no-ortogonal. Este procedimiento fue el que se utilizó para, a partir del resultado que devuelve *FeynCalc* para la autoenergía $-iM^{*2(2)}(p)$ del campo Ψ escrito en índices internos de Lorentz y en el cual es difícil reconocer la combinación lineal de operadores a la que corresponde, calcular los coeficientes y así determinar la combinación lineal de operadores de la base a la que dicho resultado corresponde, expresada en las ecuaciones (4.74) y (4.141).

Apéndice B

Método de reducción de Passarino-Veltman

El método de reducción de Passarino-Veltman [75] es un método para reducir el cálculo de integrales tensoriales, que aparecen en diagramas con lazos, al cálculo sólo de integrales escalares. Para ilustrarlo en el caso más sencillo, considérese la integral con una potencia de momento en el numerador

$$B^\mu(q) = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l^\mu}{[l^2 - m^2 + i\epsilon][(l+q)^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (\text{B.1})$$

que, por covarianza de Lorentz debe ser igual a $B^\mu(q) = B_{11}(q^2)q^\mu$. Para calcular $B_{11}(q^2)$ se contrae la integral con q^μ , con lo que se obtiene

$$\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l \cdot q}{[l^2 - m^2 + i\epsilon][(l+q)^2 - m^2 + i\epsilon]} = B_{11}(q^2)q^2; \quad (\text{B.2})$$

haciendo uso de la relación

$$l \cdot q = \frac{1}{2} \{ [(l+q)^2 - m^2] - [l^2 - m^2] - q^2 \} \quad (\text{B.3})$$

la integral es

$$\begin{aligned} B_{11}(q^2)q^2 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{[(l+q)^2 - m^2] - [l^2 - m^2] - q^2}{[l^2 - m^2 + i\epsilon][(l+q)^2 - m^2 + i\epsilon]} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{1}{[l^2 - m^2 + i\epsilon]} - \frac{1}{[(l+q)^2 - m^2 + i\epsilon]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q^2}{[l^2 - m^2 + i\epsilon][(l+q)^2 - m^2 + i\epsilon]} \right\}, \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

al cambiar la variable l de integración en el segundo término del miembro derecho como $l \rightarrow l - q$ ($d^D l \rightarrow d^D(l - q) = d^D l$) se cancelan los dos primeros términos del miembro derecho, con lo cual

$$B_{11}(q^2)q^2 = -\frac{q^2}{2}B_0(q^2, m^2), \quad \Rightarrow \quad B_{11}(q^2) = -\frac{1}{2}B_0(q^2, m^2), \quad (\text{B.5})$$

donde

$$B_0(q^2, m^2) = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{[l^2 - m^2 + i\epsilon][(l+q)^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (\text{B.6})$$

Por lo que, finalmente, la integral tensorial $B^\mu(q)$ es

$$B^\mu(q) = -\frac{1}{2}B_0(q^2, m^2)q^\mu, \quad (\text{B.7})$$

determinada sólo por la integral escalar $B_0(q^2, m^2)$.

Este procedimiento se puede realizar de manera análoga para una integral con cualquier número de potencias de momento en el numerador. Por ejemplo, la siguiente integral con dos potencias de momento en el numerador

$$B^{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l^\mu l^\nu}{[l^2 + i\epsilon][(l+q)^2 + i\epsilon]} \quad (\text{B.8})$$

por covarianza de Lorentz debe ser igual a $B^{\mu\nu}(q) = B_{21}(q^2)q^\mu q^\nu + B_{22}(q^2)\eta^{\mu\nu}$. Al contraerla con q_μ y utilizar la relación (B.3) con $m^2 = 0$, se obtiene

$$q_\mu B^{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{(q \cdot l)l^\nu}{[l^2 + i\epsilon][(l+q)^2 + i\epsilon]} \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l^\nu \{(l+q)^2 - l^2 - q^2\}}{[l^2 + i\epsilon][(l+q)^2 + i\epsilon]}, \quad (\text{B.10})$$

que es igual a

$$q_\mu B^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{l^\nu}{l^2 + i\epsilon} - \frac{l^\nu}{(l+q)^2 + i\epsilon} - \frac{q^2 l^\nu}{[l^2 + i\epsilon][(l+q)^2 - m^2 + i\epsilon]} \right\}, \quad (\text{B.11})$$

haciendo el reemplazo $l \rightarrow l - q$ en el segundo término del miembro derecho, la integral se reduce a

$$q_\mu B^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{q^\nu}{l^2 + i\epsilon} - \frac{q^2 l^\nu}{[l^2 + i\epsilon][(l+q)^2 + i\epsilon]} \right\}; \quad (\text{B.12})$$

la primer integral es nula, como se comprueba al hacer el reemplazo $l \rightarrow cl$

$$\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{l^2 + i\epsilon} = c^{D-2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{l^2 + i\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{l^2 + i\epsilon} = 0, \quad (\text{B.13})$$

siempre que $D \neq 2$. Con esto, se tiene

$$q_\mu B^{\mu\nu}(q) = \frac{q^2}{2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l^\nu}{[l^2 + i\epsilon][(l+q)^2 + i\epsilon]} = \frac{q^2}{2} B_0(q^2, 0). \quad (\text{B.14})$$

Por otro lado, si $B^{\mu\nu}(q)$ se contrae con $\eta_{\mu\nu}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} B^{\mu\nu}(q) &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l^2}{[l^2 + i\epsilon][(l+q)^2 + i\epsilon]} = \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l+q)^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{l^2 + i\epsilon} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

En resumen, las relaciones que se tienen para $B^{\mu\nu}(q) = B_{21}(q^2)q^\mu q^\nu + B_{22}(q^2)\eta^{\mu\nu}$ son

$$q_\mu B^{\mu\nu}(q) = (q^2 B_{21}(q^2) + B_{22}(q^2)) q^\nu = -\frac{q^2}{4} B_0(q^2, 0) q^\nu \quad (\text{B.16})$$

$$\eta_{\mu\nu} B^{\mu\nu}(q) = q^2 B_{21}(q^2) + D B_{22}(q^2) = 0, \quad (\text{B.17})$$

resolviendo este sistema de ecuaciones para $B_{21}(q^2)$ y $B_{22}(q^2)$ se obtiene

$$B_{21}(q^2) = -\frac{D}{4(D-1)} B_0(q^2, 0), \quad B_{22}(q^2) = \frac{q^2}{4(D-1)} B_0(q^2, 0). \quad (\text{B.18})$$

Por lo que, finalmente, la integral tensorial $B^{\mu\nu}(q)$ es

$$\begin{aligned} B^{\mu\nu}(q) &= -\frac{D}{4(D-1)} B_0(q^2, 0) q^\mu q^\nu + \frac{q^2}{4(D-1)} B_0(q^2, 0) \eta^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4(D-1)} (-D q^\mu q^\nu + q^2 \eta^{\mu\nu}) B_0(q^2, 0), \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

determinada sólo por la integral escalar $B_0(q^2, 0)$.

Referencias

- [1] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687).
- [2] J. C. Maxwell, «VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field», *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 459-512 (1865).
- [3] A. A. Michelson y E. W. Morley, «On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether», *American Journal of Science* **s3-34**, 333-345 (1887).
- [4] J. J. Balmer, «Notiz über die Spectrallinien des Wasserstoffs», *Annalen der Physik* **261**, 80-87 (1885).
- [5] J. R. R. Ph.D., «XXXIV. On the structure of the line-spectra of the chemical elements», *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **29**, 331-337 (1890).
- [6] L. R. F.R.S., «LIII. Remarks upon the law of complete radiation», *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **49**, 539-540 (1900).
- [7] R. A. Millikan, «A Direct Determination of "h."», *Phys. Rev.* **4**, 73-75 (1914).
- [8] A. H. Compton, «A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements», *Phys. Rev.* **21**, 483-502 (1923).
- [9] A. Einstein, «Zur Elektrodynamik bewegter Körper», *Annalen der Physik* **322**, 891-921 (1905).
- [10] M. Planck, «Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum», *Annalen der Physik* **309**, 553-563 (1901).
- [11] R. Eisberg, R. Resnick y L. Araiza, *Física cuántica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas*, Area física (Limusa, 1978).
- [12] A. Einstein, «Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt», *Annalen der Physik* **322**, 132-148 (1905).
- [13] N. Bohr, «On the Constitution of Atoms and Molecules», *Phil. Mag. Ser. 6* **26**, 1-24 (1913).

- [14] De Broglie, Louis, «Recherches sur la théorie des Quanta», Ann. Phys. **10**, 22-128 (1925).
- [15] C. Davisson y L. H. Germer, «Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel», Phys. Rev. **30**, 705-740 (1927).
- [16] C. J. Davisson y L. H. Germer, «Reflection of Electrons by a Crystal of Nickel», Proceedings of the National Academy of Sciences **14**, 317-322 (1928).
- [17] C. Davisson y L. H. Germer, «The Scattering of Electrons by a Single Crystal of Nickel», Nature **119**, 558-560 (1927).
- [18] G. P. THOMSON, «The Diffraction of Cathode Rays by Thin Films of Platinum», Nature **120**, 802-802 (1927).
- [19] E. Schrödinger, «An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules», Phys. Rev. **28**, 1049-1070 (1926).
- [20] M. Born, «Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge», Zeitschrift für Physik **37**, 863-867 (1926).
- [21] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, 4.^a ed. (Oxford, 1930).
- [22] O. Klein, «Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie», Zeitschrift für Physik **37**, 895-906 (1926).
- [23] W. Gordon, «Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie», Zeitschrift für Physik **40**, 117-133 (1926).
- [24] E. Schrödinger, «Quantisierung als Eigenwertproblem», Annalen der Physik **386**, 109-139 (1926).
- [25] P. A. M. Dirac y R. H. Fowler, «The quantum theory of the electron», Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character **117**, 610-624 (1928).
- [26] P. A. M. Dirac, «A Theory of Electrons and Protons», Proc. Roy. Soc. Lond. A **126**, 360-365 (1930).
- [27] C. D. Anderson, «The Positive Electron», Phys. Rev. **43**, 491-494 (1933).
- [28] M. Born, W. Heisenberg y P. Jordan, «On quantum mechanics II», Z. Phys **35**, 557-615 (1926).
- [29] P. Jordan, «On the Quantum mechanics of the gas degeneracy», Z. Phys. **44**, 473-480 (1927).
- [30] P. Jordan y E. P. Wigner, «About the Pauli exclusion principle», Z. Phys. **47**, 631-651 (1928).
- [31] W. Heisenberg y W. Pauli, «On Quantum Field Theory. (In German)», Z. Phys. **56**, 1-61 (1929).

- [32] W. Heisenberg y W. Pauli, «On Quantum Field Theory. 2. (In German)», *Z. Phys.* **59**, 168-190 (1930).
- [33] S. L. Glashow, «Partial-symmetries of weak interactions», *Nuclear Physics* **22**, 579-588 (1961).
- [34] S. Weinberg, «A Model of Leptons», *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264-1266 (1967).
- [35] A. Salam, «Weak and Electromagnetic Interactions», *Conf. Proc. C* **680519**, 367-377 (1968).
- [36] M. Gell-Mann, «A Schematic Model of Baryons and Mesons», *Phys. Lett.* **8**, 214-215 (1964).
- [37] G. Zweig, «An SU_3 model for strong interaction symmetry and its breaking; Version 2», 10.17181/CERN-TH-412 (1964).
- [38] H. Fritzsch, M. Gell-Mann y H. Leutwyler, «Advantages of the Color Octet Gluon Picture», *Phys. Lett. B* **47**, 365-368 (1973).
- [39] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, EBSCO ebook academic collection (Oxford University Press, 2005).
- [40] M. Peskin y D. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, Frontiers in Physics (Avalon Publishing, 1995).
- [41] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations* (Cambridge University Press, 2005).
- [42] M. Napsuciale, «Space-time origin of gauge symmetry», *Physica Scripta* **98**, 095305 (2023).
- [43] C. A. Vaquera, *QFT Lecture Notes*, ago. de 2022.
- [44] E. Wigner y H. Massey, *Group Theory: And Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (Elsevier Science, 2013).
- [45] T. Padmanabhan, *Gravitation: Foundations and Frontiers* (Cambridge University Press, 2010).
- [46] E. Wigner, «On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group», *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* **6**, 9-64 (1989).
- [47] N. Bogolubov, A. Logunov, A. Oksak e I. Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory*, Mathematical Physics and Applied Mathematics (Springer Netherlands, 1989).
- [48] P. Caban, J. Rembieliński y M. Włodarczyk, «A spin observable for a Dirac particle», *Annals of Physics* **330**, 263-272 (2013).
- [49] L. Ryder, *Quantum Field Theory*, Quantum Field Theory (Cambridge University Press, 1996).

- [50] A. Proca, «Sur la theorie ondulatoire des electrons positifs et negatifs», *J. Phys. Radium* **7**, 347-353 (1936).
- [51] P. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science. Monographs series (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964).
- [52] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory* (World Scientific, 2008).
- [53] H. Lehmann, K. Symanzik y W. Zimmermann, «Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien», *Nuovo Cimento* **1**, 205-25 (1955).
- [54] J. I. Illana y A. J. Cano, *Quantum field theory and the structure of the Standard Model*, 2022.
- [55] G. Aad et al., «Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC», *Physics Letters B* **716**, 1-29 (2012).
- [56] Y. Gouttenoire, *Beyond the Standard Model Cocktail*, Springer Theses (Springer, Cham, 2022).
- [57] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Cambridge University Press, 2017).
- [58] K. G. Begeman, A. H. Broeils y R. H. Sanders, «Extended rotation curves of spiral galaxies: Dark haloes and modified dynamics», *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **249**, 523 (1991).
- [59] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. Banday, R. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak et al., «Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters», *Astronomy & Astrophysics* **641**, A6 (2020).
- [60] M. Napsuciale, S. Rodriguez y H. Hernandez-Arellano, «Kinetic mixing, custodial symmetry, Z , Z' interactions and Z' production in hadron colliders», (2021).
- [61] M. Napsuciale, S. Rodríguez y H. Hernández-Arellano, «Kinetic mixing, custodial symmetry, and a lower bound on the mass of a dark gauge boson», *PTEP* **2022**, 093E01 (2022).
- [62] H. Hernandez-Arellano, M. Napsuciale y S. Rodriguez, «Cosmic-ray antiproton excess from annihilating tensor dark matter», (2021).
- [63] H. Hernández-Arellano, M. Napsuciale y S. Rodríguez, «Spin-one dark matter and gamma ray signals from the galactic center», *Journal of High Energy Physics* **2020**, 106 (2020).
- [64] H. Hernández-Arellano, M. Napsuciale y S. Rodríguez, «Spin portal to dark matter», *Phys. Rev. D* **98**, 015001 (2018).
- [65] M. Napsuciale, S. Rodríguez, R. Ferro-Hernández y S. Gómez-Ávila, «Spin one matter fields», *Phys. Rev. D* **93**, 076003 (2016).

- [66] R. Ferro-Hernández y M. Napsuciale, «Canonical quantization of spin 1 matter fields. Preliminary results», *J. Phys. Conf. Ser.* **651**, ed. por D. Delepine, M. Napsuciale y H. S. Ibarguen, 012008 (2015).
- [67] S. Avila y M. Napsuciale, «Covariant basis induced by parity for the $(j,0)$ $(0,j)$ representation», *Physical Review D* **88**, 96012- (2013).
- [68] S. Weinberg, «Feynman Rules for Any Spin», *Phys. Rev.* **133**, B1318-B1332 (1964).
- [69] N. Jeevanjee, *An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists* (Springer International Publishing, 2015).
- [70] M. Napsuciale y S. Gómez-Ávila, *Parity-based formalism for high spin matter fields*, 2013.
- [71] W. R. Inc., *Mathematica, Version 12.0*, Champaign, IL, 2019.
- [72] R. Mertig, M. Böhm y A. Denner, «Feyn Calc - Computer-algebraic calculation of Feynman amplitudes», *Computer Physics Communications* **64**, 345-359 (1991).
- [73] V. Shtabovenko, R. Mertig y F. Orellana, «New developments in FeynCalc 9.0», *Computer Physics Communications* **207**, 432-444 (2016).
- [74] V. Shtabovenko, R. Mertig y F. Orellana, «FeynCalc 9.3: New features and improvements», *Computer Physics Communications* **256**, 107478 (2020).
- [75] G. Passarino y M. Veltman, «One-loop corrections for $e+e-$ annihilation into $+ -$ in the Weinberg model», *Nuclear Physics B* **160**, 151-207 (1979).
- [76] K. Hoffman y R. Kunze, *Linear Algebra* (Pearson India Education Services, 2015).
- [77] M. Böhm, A. Denner y H. Joos, *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction* (Vieweg+Teubner Verlag, 2001).
- [78] G. Bélanger, F. Boudjema, J. Fujimoto, T. Ishikawa, T. Kaneko, K. Kato e Y. Shimizu, «Automatic calculations in high energy physics and GRACE at one-loop», *Physics Reports* **430**, 117-209 (2006).



Asunto: Revisión de Tesis de maestría.

León, Gto., a 7 de noviembre del 2023.

Dr. David Delepine
Director de la DCI-UG
Campus León.

Por medio de la presente quiero responder a la solicitud de revisión del trabajo de tesis titulado: **“Estudio de la renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para materia oscura tensorial”**, realizado por Armando de la Cruz Rangel Pantoja.

Después de leer el trabajo en cual el objetivo central es el estudio de la renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para partículas de spin 1, esto con el objetivo de usarlas como propuesta de materia oscura. Considero que el trabajo es interesante, novedoso y de relevancia en área.

Por lo mencionado anteriormente creo que el trabajo de tesis es acorde para obtener el grado de maestro en física y está listo para defensa pública.

Sin más por el momento

Atentamente

Dr. Oscar Miguel Sabido Moreno.

C.c.p. Archivo

DIVISION DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. (477) 788-5100
Fax: (477) 788-5100 ext. 8410, <http://www.fisica.ugto.mx>



León, Guanajuato, 7 de noviembre de 2023

Dr. David Delepine
Director de la División de Ciencias e Ingenierías
Campus León, Universidad de Guanajuato
PRESENTE

Estimado Dr. Delepine:

Por este medio, me permito informarle que he leído la tesis titulada “**Estudio de la renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para materia oscura tensorial**” que realizó el L. F. **Armando de la Cruz Rangel Pantoja** como requisito para obtener el grado de Maestro en Física.

Considero que el trabajo de maestría realizado por Armando es muy completo y que aporta conocimiento de relevancia para el futuro de la viabilidad de la materia oscura tensorial como un candidato viable a formar parte del contenido del universo. Considero que su trabajo reúne los requisitos necesarios de calidad e interés académico para que sea defendida en un examen de grado, razón por la cual extiendo mi aval para que así se proceda.

Sin más que agregar, agradezco su atención y aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”

Dr. Juan Barranco Monarca
División de Ciencias e Ingenierías UG

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



León, Guanajuato, 21 de septiembre de 2023

Dr. David Delepine
Director
División de Ciencias e Ingenierías
PRESENTE

Por medio de la presente me permito informar que he leído la tesis titulada **“Estudio de la renormalización de la teoría de norma $U(1)$ para materia oscura tensorial”**, que para obtener el grado de Maestría en Física ha sido elaborada por el **Lic. Armando de la Cruz Rangel Pantoja**. En mi opinión, la tesis cumple con los requisitos de calidad correspondientes al grado académico al que se aspira. Las correcciones sugeridas por mi parte han sido atendidas, por lo cual recomiendo se proceda a la defensa de la tesis.

Atentamente

Una firma manuscrita en tinta azul que parece decir "CAV".

Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo
Investigador por México Conahcyt
Departamento de Física
DCI, Campus León
vaquera@fisica.ugto.mx

División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre
C.P. 37520, León, Gto., México

www.dci.ugto.mx