

# EL NÚMERO UNO, UNA RETROSPECTIVA CONCEPTUAL

Alejandro Garciadiego Dantan\*

## RESUMEN

El objetivo de este ensayo es mostrar cómo es que el concepto de número 'uno' ha cambiado, desde que se definió de manera formal en *Los Elementos* de Euclides hasta hace relativamente unos cuantos años. Algunos de estos cambios son de naturaleza matemática, otros filosófica y otros histórica. Esta retrospectiva del concepto de número 'uno' implica que la historia de las matemáticas es mucho más compleja y rica que la que nuestra intuición nos sugiere, cuando nos limitamos a una matemática única, lineal y continua.

## ABSTRACT

The objective of this essay is to show how the concept of number 'one' has changed, from its initial formal definition in Euclid's *The Elements* until very recently. Some of these changes are mathematical, others are philosophical, and others are historical in character. This retrospective of the concept of number 'one' implies that the history of mathematics is much more complex and rich than that which is suggested by our intuition when we limit ourselves to a unique, lineal and continuous mathematics.

**Palabras clave:** Aristóteles, Stevin, Kant, Mill, Frege, Cantor, Dedekind, Russell, Número uno, fundamentos, matemáticas.

**Key words:** Aristotle, Stevin, Kant, Mill Frege, Cantor, Dedekind, Russell, Numer one, foundations, mathematics.

## INTRODUCCIÓN

¿Quién, cómo, cuándo, y por qué inventó el número "uno"? Una respuesta natural sería afirmar que el origen de dicho concepto se encuentra perdido entre los muchos elementos que conforman la historia no escrita de la humanidad. Tal vez sería como pretender responder a las interrogantes, por ejemplo, de quién inventó la rueda o descubrió el fuego. La intuición

histórica sugiere que aún las tribus más primitivas han mostrado una comprensión del concepto de número que les ha permitido distinguir, al menos, entre los números "uno", "dos" y "muchos". Es decir, independientemente del nivel de conocimientos de la comunidad en cuestión, los datos históricos indican que el paso para la construcción razonada del concepto de número debió haberse materializado hace muchos miles de años, muchos años antes de la aparición de

\* Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Ciudad Universitaria 04510 México, D. F., México. Tel.: (52) 56 22 48 58. Fax: (52) 56 22 48 59. Correo electrónico: gardan@servidor.unam.mx.

Una versión preliminar de este texto corresponde a una conferencia que ofrecí en el evento *Cátedra de Matemáticas y Estética* (Universidad Distrital y Universidad Nacional de Colombia, el miércoles 11 de diciembre de 1996, Bogotá, Colombia). Agradezco, por un lado, a los organizadores de dicho evento por su amable invitación; y, por otro, al personal académico y administrativo del *Dibner Institute for the History of Science and Technology* (MIT, Cambridge, Massachusetts, USA), donde se preparó dicha conferencia como parte de una estancia de investigación durante el período agosto 1996 - julio 1997. También deseo hacer patente mi gratitud al personal académico y administrativo del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav donde preparé la versión final de este ensayo durante mi estancia sabática (enero 1998 - enero 1999). Finalmente, pero no por eso menos importante, reconozco y aprecio el cuidado y dedicación con que los árbitros revisaron el ensayo.

la escritura. De hecho, aparentemente, algunos de los objetos antropológicos que sobreviven (*e.g.*, huesos tallados, pinturas rupestres, entre otros), previos a la invención de la escritura, exponen registros matemáticos. Además, por otro lado, también es lógico pensar, en contraposición con muchos otros conceptos e ideas (*e.g.*, átomo, especie y alma, entre otros), que el concepto de número (y, muy especialmente, el de número “uno”) no ha variado, al menos desde que lo registra la historia escrita.

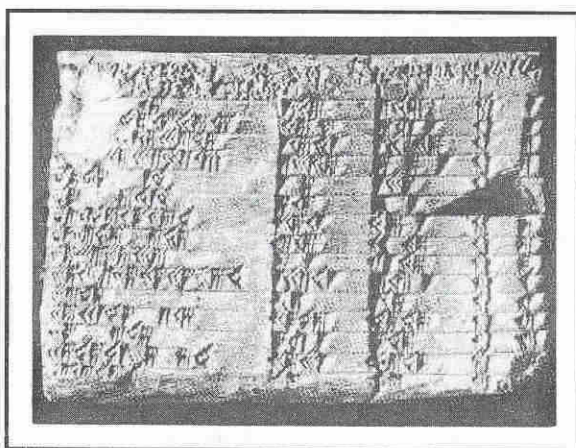
Si, aún más, consideramos el rápido avance que han sufrido las matemáticas, las ciencias, las humanidades, las artes y la tecnología en las últimas décadas, obviamente es factible pensar que ya todo se ha dicho en torno al concepto de número natural:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

—probablemente el concepto matemático más elemental— o de construcciones geométricas realizadas a partir de éste. Sin embargo, el propósito de este ensayo es mostrar que, a pesar de lo que nos indica nuestra intuición, el concepto de número natural —y en particular el concepto de número “uno”— ha sufrido constantes metamorfosis conceptuales, algunas de ellas increíblemente recientes.

## REVOLUCIÓN MATEMÁTICA

Algunas de nuestras fuentes históricas más remotas muestran a un ser humano capaz de abstraer el concepto de número en sí mismo y disociarlo de la cosa contada o enumerada. No es necesario detenernos en las matemáticas griegas (*i.e.*, al menos en los trabajos de Euclides, Nicomaco y Diofanto) para encontrar vestigios de una comprensión de número natural similar, en apariencia, al nuestro. Aún con anterioridad, los papiros egipcios y las tablillas babilónicas discuten problemas aritméticos interesantes *per se*, y cuya finalidad conlleva a ejercitar las operaciones entre los mismos números, sin necesidad de obtener una remuneración práctica o inmediata [véase, entre otros: Aaboe 1964, 20-



Tablilla babilónica

30 y Neugenbauer 1969, 29-48]. También es cierto que la mayoría de las tablillas de arcilla escritas en rasgos cuneiformes contienen tablas numéricas que debieron haber sido usadas con finalidades didácticas, las que en nuestro actual sistema educativo elemental son utilizadas como tablas de sumar y multiplicar.

A la función didáctica de estas tablas les subyace, además, una interpretación mística que establece otra noción insospechada y constantemente sujeta a innovaciones y búsquedas, como es el caso del tablero védico, que incluso ya recoge conceptos aplicados por otras civilizaciones limítrofes a su propio núcleo cultural. Recuérdese que los griegos, entre otros, habían atribuido propiedades mágicas a diversos números naturales. Por ejemplo, para los pitagóricos —de quienes incluso se dice aseguraban que la esencia misma de todas las cosas yacía en los números naturales— concebían, entre otros, al número ‘dos’ como el primer número par o femenino y al número ‘tres’ como el primer número verdaderamente masculino, el número de la armonía [Boyer 1989a, 52-53].

Sin embargo, a pesar que nuestra intuición nos sugiere haber compartido un concepto único, sobre el cual, supuestamente, ha sido posible el desarrollo de una matemática continua, acumulativa y lineal, el concepto de número natural —y, en particular, el número ‘uno’— ha sufrido transformaciones radicales hasta conformar la noción que manipulamos hoy en día.

Curiosamente, no es posible siquiera imaginar que pudiera haber sido distinta a la que se usa diariamente. Pero es sabido, al menos por la gran mayoría de los historiadores de las matemáticas, que el concepto de número natural de la época más brillante del período griego no corresponde a nuestra noción actual [véase, por ejemplo, entre otros: Van der Waerden 1963, 108 y Knorr 1975, 15]. Para dilucidar este aserto será pertinente detenerse un poco en los escritos de Aristóteles y Euclides.

Es razonable suponer que el texto dominante en matemáticas por casi dos mil años en el mundo occidental (*Los Elementos* de Euclides) contiene la definición también dominante —por los mismos casi dos mil años— de la noción de número natural. Contrariamente a la opinión de la mayoría de los historiadores y matemáticos es factible rastrear este concepto a los trabajos de Aristóteles, y no de Platón como sugiere un análisis superficial de esta cuestión. Según Euclides (y Aristóteles), un número “es una [multiplicidad] compuesta de unidades” [*Los Elementos* Libro VII Definición 2, 112], donde una ‘unidad’ se entiende como la fuente de los números [Jones 1987a, 8]. La definición de número, al referirse a una ‘multiplicidad’ —cuya raíz etimológica implica ‘pluralidad’, es decir, al menos más de uno—, excluye, en principio, al menos, dos de los números naturales que nosotros, hoy en día, consideramos como parte de la sucesión y que tornan diferente nuestra concepción de la aristotélica: El cero y el uno. Ninguno de estos dos números está compuesto por una ‘multiplicidad de unidades’.

La definición de número natural que encontramos en Aristóteles no es accidental, sino que está estrechamente relacionada con otros conceptos (e.g., ‘magnitud’, ‘proporción’, entre otros) que se discuten a lo largo de sus tratados. Esta definición es fundamental en la identificación aristotélica de la categoría de ‘cantidad’ —aquello que puede ser dividido entre dos o más partes constitutivas [Aristóteles *Metafísica* V 13, 1020<sub>a</sub> 7-14 (p. 969)] y a la cual se le puede aplicar los términos de igual o des-

igual [Aristóteles *Categorías* 6, 6<sub>a</sub> 35 (p. 240)]— y en su dicotomía entre el concepto de ‘número’ (cantidad discreta, una pluralidad que es numerable) y el concepto de ‘magnitud’ (cantidad continua, una magnitud que es medible [Aristóteles *Categorías* 6, 4<sub>b</sub> 35 (p. 237)]), caracterización que Euclides respetó en *Los Elementos*.

¿Es ésta la única diferencia entre la matemática griega y la actual? Si éste fuera el caso, entonces se podría argumentar que tal vez fuera posible que estuviéramos leyendo incorrectamente a Aristóteles y a Euclides. O, tal vez, podríamos afirmar que se trata de un texto corrupto, de alguna manera, a través del tiempo y del proceso de copiado. Sin embargo, es de fundamental importancia señalar que existen otros conceptos que confieren a la matemática griega una naturaleza radicalmente diferente a la nuestra. Por ejemplo, en la tercera definición del primer libro, Euclides establece específicamente que ‘los extremos de una línea son puntos’ —lo que para nosotros sería redundante y, como consecuencia, innecesario, puesto que nosotros consideramos que toda línea está compuesta por un número ilimitado de puntos y los extremos, si es que los consideramos como parte de la recta, necesariamente son puntos—. Sin embargo, Euclides se ve en la necesidad de hacer patente esta aclaración ya que como todo segmento de recta es una magnitud continua y, por lo tanto, divisible, al subdividir ésta, obtendríamos segmentos de recta, y, al subdividir uno de los segundos, obtendríamos más segmentos, y, subdividiendo de manera indefinida, siempre se obtendrán otros segmentos de recta. De acuerdo con la concepción aristotélica de la subdivisión indefinida de magnitudes continuas es *imposible* obtener —a través de subdivisiones sucesivas de segmentos de rectas— puntos de estos.

Si hoy en día, desde el punto de vista matemático, el número ‘uno’ sí pertenece a la sucesión de los números naturales, la primera revolución que modificara nuestra concepción de la noción de número natural debió ser aquella que

añadiera 'la unidad' a la sucesión de los números naturales, es decir, la que transformó 'la unidad' en el número 'uno'; y, a pesar que en la práctica diaria pudo haberse hecho efectiva aún antes de que apareciera Aristóteles en escena, desde el aspecto formal no se incorporó de manera explícita sino hasta mediados del siglo dieciséis.

Se le atribuye al políglota y polímata, Simón Stevin (1548-1620) la invención de las fracciones decimales [Cajori 1894, 160; Bunn 1976, 229]; pero, como a la gran mayoría de los argumentos que pretenden establecer y determinar la prioridad de alguna invención matemática, le sobreviven polémicas: existen quienes lo asignan a otros matemáticos anteriores a él [Sarton 1935, 162-174; Smith 1958 II, 238-242]. Se afirma que a él no se le debe ni la invención ni la popularización de las fracciones decimales. Incluso hay quienes argumentan que ni siquiera el mismo Stevin intentó usar sus nuevos conceptos en sus trabajos posteriores [Jones 1978, 219]. Sin embargo, en la perspectiva de esta revolución, Jones afirma a [Ibid., 220] que Stevin fue quien entendió el papel central del concepto de número y la necesidad de tratar al 'uno' como un número antes de que cualquier base sólida teórica de las fracciones pudiera ser establecida. Considérese que, para poder introducir las fracciones o números decimales, es necesario cambiar la naturaleza ontológica de la 'unidad' para poder fraccionarla o dividirla.

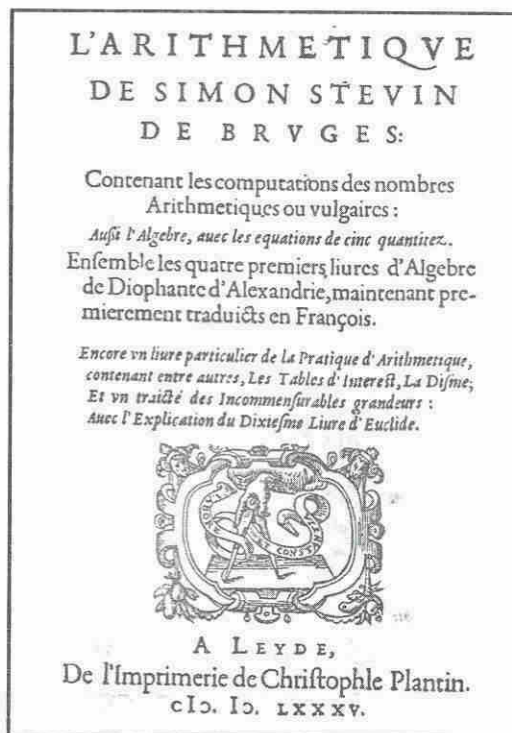
Algunas de las contribuciones más importantes de Stevin a la aritmética están contenidas en dos de sus obras más famosas: *La Disme* y *L'Arithmetique*. Las dos primeras definiciones de este último libro refieren explícitamente al nuevo concepto de número:

Definición 1.- La aritmética es la ciencia de los números; y,

Definición 2.- El número explica la cantidad de cada cosa.

Conscientemente, Stevin introduce una nueva manera de entender el concepto de número y lo hace aún más explícito al afirmar, en letras cen-

tradas y mayúsculas que "LA UNIDAD ES UN NÚMERO" [Stevin 1958 IIB, 495].



*L'Arithmetique* de Stevin.

## REVOLUCIÓN FILOSÓFICA

Como mencionábamos líneas adelante, contrariamente a lo que sugiere nuestra intuición histórica, el concepto de número 'uno' no ha sido estático ni inmutable. A través del tiempo ha sufrido metamorfosis que lo diferencian claramente del concepto concebido por nuestros antepasados.

Otras revoluciones han surgido en torno al mismo concepto. Una de ellas ya cumplió su primer centenario de vida: Su ámbito se centra en la filosofía de las matemáticas. Por diferentes razones, y con distintas finalidades en mente, en las últimas décadas del siglo pasado, diversos matemáticos y filósofos se formularon la misma pregunta, que sorprende por su sencillez: ¿Qué es un número natural?

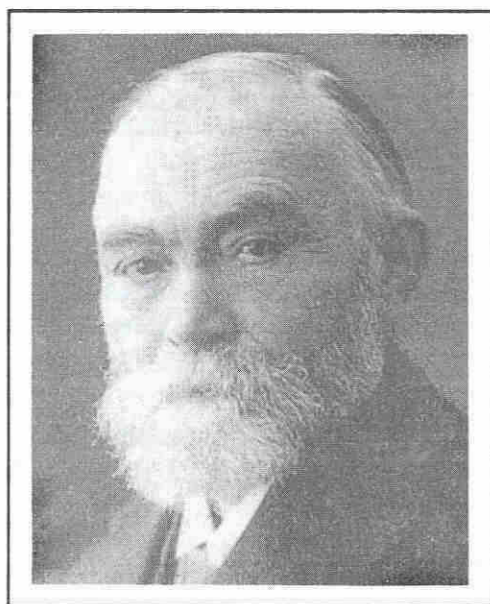
El trabajo de algunos de los intelectuales que se avocaron a resolver esta interrogante (e.g., Gottlob Frege (1848-1925), Richard Dedekind

(1831-1916), Giuseppe Peano (1858-1932) y Georg Cantor (1845-1918), entre otros) produjo algunas de las más bellas y profundas páginas de una ‘nueva’ rama de las matemáticas, ahora bautizada como ‘fundamentos de las matemáticas’. El que estos intelectuales se plantearan la cuestión anterior no fue accidental de manera alguna. Habrá que recordar que por aquellos días se habían descubierto las geometrías no-euclidianas y las álgebras no conmutativas que habrían de revolucionar la manera de conceptualizar las matemáticas. Además, entre otros varios antecedentes, Karl Weierstrass (1815-1897) ilustre matemático alemán, en su afán por impulsar una matemática libre de subjetividades, propuso desarrollar una matemática que se apoyara sobre el concepto de número y que desistiera de recurrir a la intuición o al apoyo de figuras geométricas. En particular, Weierstrass pretendía independizar el cálculo de la geometría. A este proyecto, del cual no tenemos referencias directas del propio trabajo de Weierstrass sino a través del de sus alumnos, se le conoce con el nombre de ‘aritmétización del análisis’ [Boyer 1989, 563]. Es decir, mostrar que el análisis matemático, y las matemáticas en su totalidad (en particular, la geometría), podrían ser fundamentadas única-

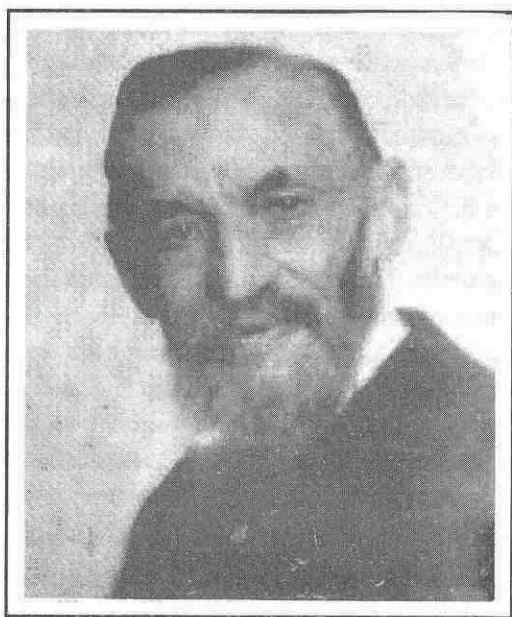
mente sobre ideas aritméticas, en particular, el concepto de número natural. Esto, como ya habíamos mencionado, en antagonismo a la dicotomía que había presentado Aristóteles —y que respetó Euclides en los *Elementos*— entre aritmética (números) y geometría (magnitudes). De acuerdo con Aristóteles, estas dos ramas eran totalmente independientes la una de la otra y ninguna predecía o servía de fundamento a la otra [Aristóteles *Análisis Posterior I* 7, 75<sub>b</sub> 3-5 (p. 362-363)].

Por otro lado, en filosofía, Kant había remplazado la dicotomía proposicional de Leibniz y Hume (*i.e.*, compuesta por proposiciones analíticas y sintéticas) por una nueva trilogía, compuesta por juicios —proposiciones sostenidas por alguien— analíticos y sintéticos *a priori* y sintéticos *a posteriori*. Los juicios analíticos son aquellos cuya negación es contradictoria en sí misma, es decir, estos juicios únicamente aclaran el significado de los términos. Por ejemplo, en el caso que se afirme que un día lluvioso es ‘húmedo’, el predicado húmedo ya está contenido en el sujeto ‘día lluvioso’ [Körner 1955, 19]. Los juicios sintéticos son aquellos que añaden algo nuevo a nuestro conocimiento y se subdividen en *a priori* (no dependen de la percepción sensorial) y *a posteriori* que describen una percepción sensible de los sentidos (*e.g.*, ‘mi libro es pesado’) ó que se derivan lógicamente de juicios que describen percepciones de los sentidos (*e.g.*, ‘la biblioteca es pesada’). Bajo esta tricotomía, Kant afirma que las matemáticas puras —incluidas tanto la aritmética como la geometría— están explicadas por proposiciones sintéticas *a priori* [Kant 1787, B14-B17].

Frege, quien inicia su *magnum opus* sobre los fundamentos de la aritmética con la pregunta qué es el número uno o que significa el símbolo ‘1’, rechazó la propuesta de Kant pues consideró que la división entre juicios analíticos y sintéticos no era exhaustiva [Frege 1884, 192] y que Kant subestimaba el valor de los juicios analíticos. Frege consideraba, al igual que Kant, que las proposiciones geométricas podían ser



Gottlob Frege.



Giuseppe Peano.

consideradas como sintéticas *a priori*, ya que la geometría está gobernada “únicamente por nuestras intuiciones espaciales, ya fueran reales o imaginarias”; y que, de hecho, sus axiomas podían ser negados sin contradicciones con los propósitos del ‘pensamiento conceptual’ [Resnik 1980, 178]. Por el contrario, de acuerdo con Frege, la aritmética era mucho más general que la geometría. Según él, las leyes de la aritmética y las de la lógica gobernaban el mismo dominio.

Por otro lado, Frege deseaba criticar la concepción empirista de John S. Mill (1806-1873), que afirmaba —como resultado de su enfoque que consideraba a la inferencia inductiva como la única parte de la lógica (una subdivisión del campo de la psicología) que era productiva para el conocimiento— que el conocimiento matemático (aún el geométrico) se apoyaba sobre la observación, y que los axiomas, en particular, son generalizaciones de las que siempre hemos experimentado [Mill 1848; véase Garciadiego 1992, 53-55]. Finalmente, Frege también estaba motivado por su crítica hacia un ‘psicologismo’ dominante en la filosofía de la época —doctrina que afirmaba que las categorías de la psicología podían ser usadas de manera apropiada en el análisis filosófico—.

Como una de las consecuencias más ricas de todo este esfuerzo, Frege llegó a la conclusión que todos los conceptos y proposiciones de la *aritmética* tradicional se deducían a partir de conceptos y nociones más primitivas pertenecientes a la lógica [Frege 1884, 191-192]. Esto, de alguna manera, le confería un nuevo estatus a la matemática que la tornaba más objetiva e independiente de nuestro pensamiento e intuición. La deducción fregeana dependía esencialmente de su nuevo concepto de número cardinal o natural. A pesar que el trabajo de Frege fue comentado, en su momento, por algunas de las más grandes personalidades de la época (*e.g.*, Peano y Cantor, entre otros), la gran mayoría de los historiadores contemporáneos han minimizado su posible influencia inmediata sobre sus contemporáneos y han llegado al extremo de afirmar que ésta podría ser desdeñada en su totalidad [véase, entre otros: Boyer 1989, 597; y Kline 1992, 1575].

Peano, por su cuenta, también logró importantes resultados en su detallado análisis del concepto de número natural. Hoy en día, el nombre de Peano aparece asociado, en los libros de texto y de historia de las matemáticas, con los postulados de los números naturales. Para formular su axiomatización, Peano propone como elemento primitivo (*i.e.*, nociones que no son definibles a partir de otras aún más primitivas) los conceptos de ‘cero’, ‘sucesor’ y la ‘relación de pertenencia’ ( $\epsilon$ ). Junto con estos tres conceptos propone un conjunto de cinco —originalmente fueron nueve— postulados (*i.e.*, proposiciones matemáticas primitivas que no requieren demostración) y de ahí deduce las propiedades de los números naturales [Peano 1889, 59]. Su programa, tal vez no tan ambicioso como el de Frege en cuanto a la visión filosófica, incluía presentar un nuevo lenguaje simbólico que erradicara la ambigüedad de las matemáticas. Para ello introdujo una nueva notación que revolucionaría la forma de expresar las matemáticas. A él se deben algunos de los símbolos (*e.g.*,  $\forall$  (para todo),  $\exists$  (existe),  $\subset$  (inclusión)) que manipulamos en matemáticas ac-

tualmente. Otra aportación sumamente importante de la obra de Peano, y que resultó ser de gran influencia en Russell, fue su distinción entre un elemento (e.g., '1') y el conjunto formado por un solo elemento (e.g., {1}).

El nombre de Cantor se ha convertido en una leyenda, y le circundan muchos mitos; en particular, aquellos relacionados con la pérdida de sus facultades psíquicas y sus largas estancias en clínicas para enfermos mentales. Su apelativo también está asociado con una nueva rama de las matemáticas que ha revolucionado la manera de ver a éstas: La teoría de los números cardinales y ordinales transfinitos —vulgarmente referida como 'teoría de conjuntos'—. No es nuestro propósito analizar por qué se creó dicha revolución, pero sí señalaré que los motivos originales de Cantor tuvieron sus raíces en un problema eminentemente matemático. Los subsecuentes resultados de su investigación le condujeron a realizar un estudio exhaustivo del concepto de número natural y sus conclusiones fueron sorprendentes: Cantor fue capaz de *construir* —y no postular o suponer su existencia como ya dada— la sucesión de los números cardinales finitos (o naturales) sobre el concepto de conjunto, y de esta manera mostrar que la

base angular de las matemáticas modernas se apoyaba sobre esta noción. Aquí, una vez más, el concepto de unidad jugó un papel fundamental ya que para obtener el número cardinal de un conjunto, Cantor argumentó que era posible abstraer la naturaleza de cada uno de los elementos de un conjunto y substituirlos con 'unidades' [Cantor 1895-1897, 86]. Esto le permitió pensar que el conjunto {a,b,c} podía ser substituido por el conjunto  $\{1_a, 1_b, 1_c\}$  a la hora de concebir su número cardinal o potencia. Como consecuencia de esta construcción, Cantor dedujo como teoremas —proposiciones demostrables a partir de otros conceptos, postulados y/o proposiciones—, lo que Peano había propuesto como postulados. Sin embargo, la riqueza de sus investigaciones no se limita a esos resultados, pues además fue capaz de desarrollar una teoría aritmética —es decir, donde es posible comparar dos números cualesquiera (i.e., si son iguales, o uno es mayor o menor que el otro); y, donde también es posible realizar operaciones aritméticas (i.e., suma, multiplicación y exponenciación) entre los números cardinales y ordinales transfinitos, aquellos que están más allá de lo finito.

Más importante aún, Cantor introduce la noción de número cardinal transfinito de manera directa o positiva, es decir, no simplemente como la negación de lo finito, al demostrar que el número cardinal ( $\aleph_0$ ) de la sucesión de *todos* los números cardinales finitos:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

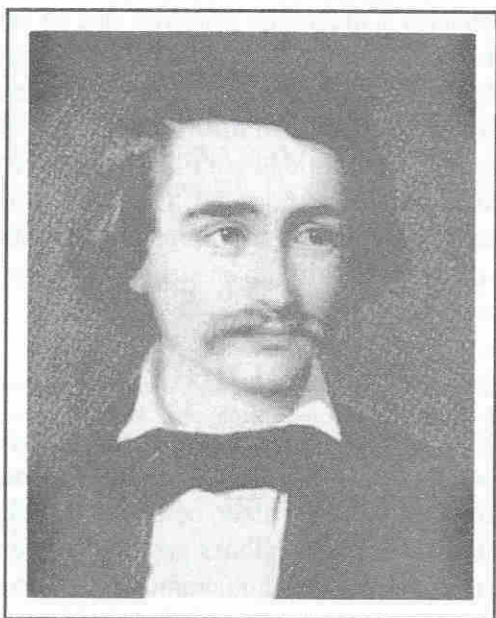
tiene propiedades que difieren de aquéllas que caracterizan a los números cardinales finitos (e.g.,  $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ , mientras que para el caso finito se tiene siempre que  $\forall a \in N$ , entonces  $a \neq a + 1$ ).

Dedekind, cuya obra y comunicación epistolar fueron elementos esenciales en el propio trabajo de Cantor, también se había formulado la misma pregunta: ¿Qué es un número natural? Algunos de sus motivos fueron esencialmente diferentes a los de sus contemporáneos. Una de las razones era de naturaleza pedagógica. De



Georg Cantor.

acuerdo con sus propios comentarios, Dedekind pretendía escribir un libro de texto sobre análisis matemático donde, siguiendo el programa de su maestro Weierstrass, deseaba introducir la definición de número irracional sin recurrir a esquemas geométricos [Dedekind 1901, 1-2]. En torno al concepto de número natural, Dedekind llegó a conclusiones muy similares a las de Peano, e incluso uno sospecha que este último debió haber leído el trabajo del primero, aunque aquél lo niega. Más importante aún, Dedekind fue capaz de introducir una nueva formulación del concepto de número racional independiente de toda consideración geométrica.



Richard Dedekind.

Finalmente, Bertrand Russell (1872-1970), quien se había interesado desde muy temprana edad por problemas relacionados con la filosofía de las matemáticas [Garcidiego 1992, 43-55], y quien creyera haber superado la influencia de los neohegelianos británicos cuando se sentó a escribir su obra magna, a la larga habría de forzar aún más la tesis de Frege al afirmar [Russell 1903, 19] que la matemática pura —y no únicamente la aritmética, como afirmaba Frege— no era más que una rama de la lógica (hoy conocida como la *tesis logicista*). Dos elementos fueron claves en la argumentación de

Russell: El nuevo lenguaje simbólico de Peano y la construcción cantoreana del concepto de número a partir de la noción de conjunto.

Como consecuencia del trabajo de estos grandes pensadores, la filosofía de las matemáticas y, en particular, la posición aristotélica, se vió radicalmente modificada en sus fundamentos. Al probar Cantor que era posible encontrar una correspondencia uno-a-uno entre todos los números reales y todos los puntos de un segmento de recta y, por otro lado, que también era posible encontrar una correspondencia uno-a-uno entre todos los puntos de un segmento de recta y todos aquellos puntos contenidos en el cuadrado unitario, Cantor demostró la identidad entre el continuo aritmético y el geométrico.

## REVOLUCIÓN HISTÓRICA

Investigaciones recientes de Knorr [1975, 1986], Unguru [1975, 1979] y Jones [1978, 1987a, 1987b], entre otros, muestran la forma en que diferentes aspectos de las matemáticas griegas son radicalmente diferentes de las interpretaciones históricas que hasta ahora hemos elaborado de ellas [véase: Berggren [1984] y Grattan-Guinness [1996]]. Por ejemplo, el análisis histórico de Knorr [1975, 288] lo ha llevado a concluir que la finalidad de *Los Elementos* de Euclides no radicaba en la comprensión del último de los capítulos (Libro XIII) dedicado a la construcción de los sólidos geométricos, sino en el entendimiento de una teoría formal de los números irracionales dentro de una compilación autosuficiente de tratados. Tal vez, el resultado no parezca ser muy espectacular; pero para situarlo en la perspectiva correcta hay que recordar, una vez más, que éste fue el texto dominante en matemáticas por más de dos mil años; y, aparentemente, ni siquiera comprendíamos la finalidad del libro.

Unguru, por su parte, ha mostrado cómo es que nuestro conocimiento de las matemáticas modernas nos ha impedido ver con claridad el verdadero significado que tenían las matemáticas (en particular, las construcciones geométricas



más sencillas) para los griegos —entendiendo por matemáticas griegas aquellas que se encuentran reflejadas en *Los Elementos* de Euclides—. Incluso algunos historiadores, especialmente aquellos que publicaron sus trabajos a principios del presente siglo, se habían visto forzados a formular conceptos (*e.g.*, álgebra-geométrica) para intentar adaptar esas matemáticas a las nuestras. Posteriormente, empezaron a surgir inconsistencias cronológicas y conceptuales, a las que los historiadores y filósofos no deseaban prestar mucha atención; o, peor aún, no se percataban del surgimiento de tales inexactitudes.

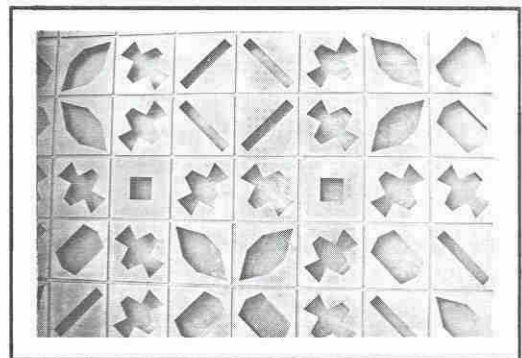
Ya habíamos mencionado con anterioridad que en algún momento de la historia debió haber existido un giro en torno a la formulación del concepto de número ‘uno’, ya que su concepción original no coincidía con la nuestra. Sin embargo, no fue sino hasta hace unos cuantos años que algunos historiadores empezaron a tomar plena conciencia de este hecho. La interrogante original parece ser muy sencilla y consistente con lo que ya hemos señalado: La definición euclideana del concepto de número impide que la ‘unidad’ [Aristóteles *Metafísica* X 1, 1052<sub>b</sub> 15-20, 1053<sub>a</sub> 25-30 (p. 1020-1022)] sea considerada como un número, y entonces resulta imperioso investigar cuándo, en dónde y con quién tomó lugar dicho giro.

Jones fue el primero en formularse dicha pregunta histórica, que sorprende por su sencillez y por su profundidad excepcional. Si, como hemos afirmado, Euclides no había incluido al número ‘uno’ en la sucesión de los números naturales y ahora sí lo hacemos así, entonces Jones se preguntó quién, cómo y cuándo llevó a cabo dicha transformación. El mismo Jones, como ya hemos visto, nos proporcionó una respuesta satisfactoria y fue Stevin quien así lo hizo. Pero para poder responder a su pregunta, Jones se vio en la necesidad de examinar los principios filosóficos y matemáticos de *Los Elementos* de Euclides. Jones, al no obtener una respuesta directa a partir de los conceptos del propio Euclides en torno a los fundamentos filosóficos

de su axiomatización de la geometría y de la aritmética, entonces se vio obligado a examinar detalladamente las obras de aquellos filósofos y matemáticos previos a Euclides, para rastrear el origen y transfondo de sus ideas. Las conclusiones a las que llegó fueron sorprendentes. Jones asegura [1987a 377 y 383; 1987b] que, en tres aspectos fundamentales, Euclides se apega más a la tradición aristotélica que a la platonista, contrariamente a como se ha asegurado conscientemente desde tiempos inmemorables. En primer lugar, la definición del concepto de número que ya hemos citado con anterioridad es tomada directamente de Aristóteles. En un segundo plano, Euclides también toma de Aristóteles la dicotomía existente, que ya hemos mencionado, entre las nociones de ‘número’ y ‘magnitud’ (la primera sirve como fundamento a la aritmética (cantidad discreta) y la segunda a la geometría (cantidad continua)). Finalmente, pero no menos importante, Euclides también retiene la definición y comprensión aristotélica del concepto de infinito en sus matemáticas.

## EPÍLOGO

Si alguien nos hubiera mencionado la posibilidad de llevar a cabo investigación de frontera en torno al viejo y trillado concepto de número natural y de construcciones geométricas centradas en el mismo, nos hubiéramos mostrado muy renuentes a aceptar tal posibilidad. Sin embargo, hemos mostrado que diferentes revoluciones, en diversas áreas que circundan a este concepto, han abierto verdaderas minas



Detalle obra de Juan Luis Díaz

pletóricas de una potencialidad susceptible a casi cualquier exploración.

El día de hoy posiblemente estemos en el umbral de otra nueva revolución que nos abrirá un diverso espectro colmado de riquezas. Juan Luis Díaz, a partir del campo de la estética, ha develado, después de un largo proceso de recovecos, frustraciones y satisfacciones, otra manera de percibir y entender algunos de los secretos escondidos en el tablero védico —que, tal vez, la mayor parte de los matemáticos e historiadores pensó que estaba suficientemente estudiado—. Estos resultados, materializados en esculturas artísticas expuestas públicamente, nos muestran, una vez más, las estrechas relaciones entre los fundamentos de la aritmética y la geometría, y nos presentan un campo novel para generar las formas, los espacios, las diversidades de la geometría a partir del concepto aritmético más elemental: La noción de número natural, cardinal o entero positivo.

## REFERENCIAS

- Aaboe, Asger. 1964. *Episodes from the early history of mathematics*. New York: Random House. [Traducción al español: *Matemáticas: episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo*. Colombia: Editorial Norma. 1964. Traductor Antonio Linares. [Reimpreso en *Mathesis* 2 (1986) 1-33, 353-396, 527-558 y 4 (1988) 265-294].
- Aristóteles. *Obras*. Madrid: Aguilar. 1964. Traducción, estudio preliminar, preámbulos y notas de Francisco de P. Samaranck.
- Berggren, J. L. 1984. "History of Greek Mathematics: A survey of recent research." *Historia Mathematica* 11: 394-410.
- Boyer, Carl B. 1989. *A history of mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc. (2da. ed. revisada). Revisado por Uta C. Merzbach. [Traducción al español: *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza editorial. (Col. Alianza Universidad Textos # 94. Traductor. Mariano Martínez. 1986)].
- Bunn, Lucas N. H. et al. 1976. *The historical roots of elementary mathematics*. New Jersey: Prentice Hall.
- Cajori, Florian. 1894. *A history of mathematics*. New York: MacMillan.
- Cantor, Georg. 1895-1897. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. New York: Dover. Editado y traducida por Philip Joudain. Contendida en: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin: J. Springer. Editor Ernst Zermelo. "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre." Pp 282-356.
- Dauben, Joseph W. 1979. *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the Infinite*. Camb, Ma.: Harvard University Press.
- Dedekind, Richard. 1882. "Continuity and irrational numbers", contenido en: *Essays on the theory of numbers*. Chicago: The Open Court. 1901. Pp 1-27. Traducción del original alemán al inglés por Wooster W. Beman. [Traducción al español, del original en alemán: *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza editorial. 1998. Traducción, introducción y notas de José Ferreirós].
- Diofanto. ca. 100. *The Arithmetica*, contenido en: Sir Thomas L. Heath. *Diophantus of Alexandria. A study in the history of Greek algebra*. Great Britain: Cambridge at the University Press. 1910.
- Euclides. ca. -300. *Los Elementos*. Madrid: Gredos. [1994]. Vol II (Libros V-IX). [Traducción al español y notas de María Luisa Puertas Castaño].
- Frege, Gottlob. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung ueber den Begriff der Zahl*. Breslau. ["Los fundamentos de la aritmética", contenido en: *Conceptografía. Los fundamentos de la Aritmética. Otros estudios filosóficos*. México: UNAM. 1972. Traducción al español de Hugo Padilla].
- Freudnthal, Hans. 1977. "What is algebra and what has it been in History?" *Archives for the History of Exact Sciences* 16: 189-200.
- Garciadiego, Alejandro. 1992. *Bertrand Russell and the origins of the set theoretic 'paradoxes'*. Basel: Birkhäuser. [*Bertrand Russell y los orígenes de las 'paradojas' de la teoría de conjuntos*. Madrid: Alianza Universidad. (Col. Alianza Universidad # 714). 1992. Traductor: Alejandro Garciadiego Dantan].

- Grattan-Guinness, Ivor. 1996. "Números, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's *Elements*: How did he handle them?" *Historia Mathematica* 23: 355-375.
- Jones, Charles V. 1978. One as a number. Disertación doctoral. University of Toronto. Canadá,
- \_\_\_\_\_. 1987a. "Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas." *Mathesis* 3: 3-14.
- \_\_\_\_\_. 1987b. "La influencia de Aristóteles en el fundamento de *Los Elementos* de Euclides." *Mathesis* 3: 375-387.
- Kant, Immanuel. 1787. *Critique of Pure Reason*. New York: St. Martin's Press. 2da.ed. Traducida al inglés por Norman K. Smith.
- Kline, Morris. 1972. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press. [*El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza editorial. 1992. 3 vols. (Col. Alianza Universidad # 715, 724 y 729). Traducción al español de Alfonso Casal, Carlos Fernández Pérez, Alejandro Garcíadiego, Mariano Martínez y Juan Tarrés. Coordinación y revisión de Jesús Hernández].
- Knorr, Wilbur. 1975. *The evolution of the Euclidean Elements*. Boston: Reidel.
- \_\_\_\_\_. 1986. *The ancient tradition of geometric problems*. Boston: Birkhäuser.
- Körner, Stephan. 1955. *Kant*. Great Britain: Penguin books.
- Mill, John S. 1848. *A system of logic*. London: Longmans, Green, Reader & Dyer. (7a. ed., 1868, 2 vols).
- Neugenbauer, Otto. 1969. *The exact sciences in antiquity*. New York. Dover. 2da ed.
- Nicomaco. ca., 100. *Introduction to Arithmetic*. Chicago. Encyclopedia Britannica Inc. (Col. Great Books of the Western World. Vol XI. Trad. Martin L. D'Ooge). 1952. Pp 811-848.
- Peano, Giuseppe. 1889. *Arithmetices Principia. Nova methodo exposita*. Roma: Fratres Bocca. [*Los Principios de la Aritmética, expuestos según un nuevo método*. Oviedo: Pentalfa Ediciones. 1979. Traducción de Julián Velarde].
- Resnik, Michael. 1980. *Frege and the philosophy of mathematics*. Ithaca: Cornell University Press.
- Russell, Bertrand. 1903. *The Principles of Mathematics*. Great Britain: Cambridge at the University Press. [*Los Principios de las Matemáticas*. Madrid: Espasa-Calpe. (2da. ed. 1967). Traducción de Juan Carlos Grimberg].
- Sarton, George. 1935. "The first explanation of decimal fractions and measure (1585). Together with a history of the decimal idea and a facsimile (no. 17) of Stevin's *Disme*." *Isis* 23: 153-244.
- Smith, David E. 1958. *History of Mathematics*. New York: Dover. 2 volúmenes.
- Stevin, Simon. 1958. *The principal works of Simon Stevin*. Amsterdam: C. V. Swets & Zeitlinger. [Editado por Dirk J. Struik]. Vol. IIB.
- Unguru, Sabetai. 1975. "On the need to rewrite the history of Greek mathematics." *Archive for the History of Exact Sciences* 15: 67-114.
- \_\_\_\_\_. 1979. "History of Ancient Mathematics: some reflections on the state of the art." *Isis* 70: 555-565.
- Van Der Waerden, B. L. 1963. *Science Awakening*. New York. J. Wiley & Sons.
- \_\_\_\_\_. 1975. "Defence of a 'shocking' point of view." *Archive for the History of Exact Sciences* 15: 199-210.
- Weil, André. 1978. "Who betrayed Euclid?" *Archive for the History of Exact Sciences* 19: 91-93.