[510]

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheseos Professorum.

TOMI TERTII PARS I.

GENEVÆ,

Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.

MDCCXLII.

Albrecht 40 2183

SERENISSIMO PRINCIPI

ARMANDO GASTONI DE ROHAN

DE SOUBISE

S. R. E. CARDINALI AMPLISSIMO

EPISCOPO & PRINCIPI ARGENTINO

&c. &c. &c.

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC

CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

Thomas LE SEUR *&* *Franciscus* JACQUIER.

MONITUM.

PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Libros tres totidem voluminibus complecti meditabamur, idque jam in alterâ operis nostri parte fueramus polliciti. Cur tertium Newtoni Librum in duas dividamus partes datamque fidem non liberemus, in causâ sunt præclara de fluxu & refluxu maris opera quæ anno 1740. à Celeberrimâ Parisiensi Academiâ præmio fuere condecorata. Tot & tam eximia in hisce operibus continentur quæ non ad fluxum refluxumque maris duntaxat, sed etiam ad generales attractionis leges universamque Astronomiam referuntur ut Clariss. Vir D. J. L. CALANDRINUS cujus consilia impensè veneramur, nos optimè facturos judicaverit, si prædicta opuscula iis adjungeremus propositionibus quas de fluxu & refluxu maris habet Newtonus; quod quidem commodè fieri non poterat, nisi tertium librum in duas partes divideremus. Quamvis eam religiosè servemus legem, sinè quâ honestus scriptor nemo esse potest, ut scilicet nihil insigne ex aliquo Autore in usum nostrum convertamus quin ei quod suum est, dùm locus occurrit, tribuatur, specialem nihilominùs grati animi significationem profiteri volûmus Clarissimis omnique lau-

laude noſtrâ majoribus Viris DD. Caſſini, De Mairan, De Maupertuis, quorum præclaris inventis plurimùm debent hæc noſtra Commentaria. Sed tanta ſunt in univerſum hocce noſtrum opus prælaudati Clariſſ. D. J. L. CALENDRINI beneficia, ut huic Doctiſſimo Viro pares meritis gratias referre non poſſimus.

Jam ſub prælo eſt altera & ultima commentariorum noſtrorum pars; quia verò nullus eſt tam mediocris ingenii, quem uſus & exercitatio non edoceant, hinc factum eſt ut aliqua nobis in mentem venerint quæ brevi collecta appendice ſimul cum reliquâ tertii Libri parte juſti voluminis molem component.

Datum Romæ
in Contu. SSæ. Trinitatis
Anno 1742.

PP.

PP. LE SEUR ET JACQUIER
DECLARATIO.

NEWTONUS in hoc tertio Libro telluris motæ hypotheſim aſſumit. Autoris propoſitiones aliter explicari non poterant, niſi eâdem quoquè factâ hypotheſi. Hinc alienam coacti ſumus gerere perſonam. Cæterum latis à ſummis Pontificibus contrà telluris motum Decretis nos obſequi profitemur.

EDI-

EDITORIS MONITUM.

Intelleximus quosdam malignè interpretari notulas quas adjecimus Commentariis PP. Le Seur *&* Jacquier, *quasi sæpius Newtoni mentem non attigissent; ne autem ipsis vitio vertatur quod concesserunt ob ipsorum absentiam ab urbe in quâ liber edebatur, ut nempe quæcumque viderentur corrigenda ab Editore ipso mutarentur sive levia sive gravia forent, monendum puto me Autorum diligentiam & Doctrinam nusquam desiderasse, correctiones quas feci levissimi esse momenti, nec esse tales ut propter ipsas quidquam ex debitâ Autoribus gloriâ tollatur quod meæ opellæ tribuatur, & asterisco notatas fuisse, non quod aliquid laudis exinde speraverim, sed quia si illic aliquid vitii irrepserit æquum est ut in Editorem non in Autores ea culpa transferatur; Ne similibus cavillationibus occasio in posterum detur, tales distinctionis notulæ non adhibebuntur in IIa hujus Voluminis parte, in quâ speramus calculos Newtonianos circa Lunam potissimum satis intricatos, in apertam lucem expositum iri.*

I N-

INTRODUCTIO AD TERTIUM LIBRUM.

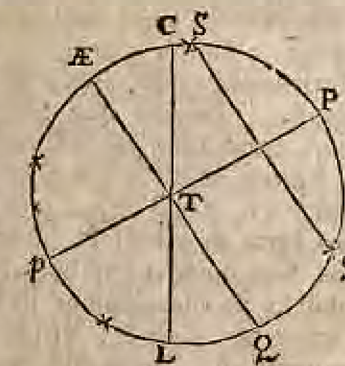
Phil. Natural. JS. Newtoni.

CAPUT PRIMUM.

Quale oculo nudo appareat mundi systema paucis exponitur; & prima Astronomiæ Elementa breviter revocantur.

1. Figura telluris est propemodùm sphærica, & ideò gravium directio (ut pote quæ aquarum stagnantium superficiei perpendicularis est) ad centrum terræ tendit quam proximè. Patet per Eclipses Lunares in quibus umbra terrestris, in quamcumque cœli plagam vergat, est semper ad sensum circularis.

2. Spectatori terrestri cælum apparet tanquam superficies sphærica concava, stellis plurimis distincta, cujus ipse spectator centrum occupat, quæque circà puncta fixa ceù cardines ab ortu ad occasum æquabiliter convertitur, & 24 circiter horis integram revolutionem absolvit. Puncta illa opposita P & p circà quæ rotari videtur sphæra, *Poli* mundi dicuntur, quorum is qui nobis conspicuus est, ut P, arcticus vel borealis dicitur, ipsi verò oppositus p antarcticus seu australis appellatur. Recta linea P p utrumque polum connectens *Axis mundi* vocatur.



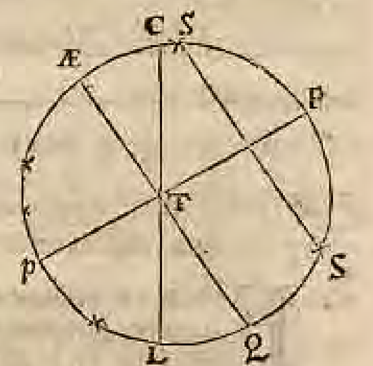
Æquator sivè *æquinoctialis* est circulus sphæræ cælestis maximus cujus poli iidem sunt cum polis mundi; proindéque sphæram mundanam dividit in duo hemisphæria, Boreale Æ P Q, in quo est polus borealis P, & australe Æ p Q, in quo est polus australis p.

3. Stellæ singulæ, ut S, in circulis S s æquatori Æ Q parallelis, communi sphæræ cælestis motu revolvi quotidie videntur. *Fixæ* nominan-

 tur

tur quæ eandem inter ſeſe diſtantiam perpetuò ſervant; *Erraticæ* verò ſeu *Planetæ* vocantur quæ diſtantias ſuas à fixis in dies mutant & motu proprio ferri conſpiciuntur. Planetæ ſunt ſeptem ſuis propriis ſignis notati, videlicet Sol ☉, Luna ☽, Mercurius ☿, Venus ♀, Mars ♂, Jupiter ♃ & Saturnus ♄; Terræ verò ſignum eſt hoc ♁.

4. *Ecliptica* eſt circulus ſphæræ maximus quem centrum ſolis motu proprio ab occaſu ad ortum ſingulis annis deſcribere videtur. Hic circulus Æquatorem obliquè interſecat ſub angulo inclinationis Æ T C, graduum $23\frac{1}{2}$ circiter. Puncta duo oppoſita in quibus æquator & ecliptica ſeſe mutuò ſecant, *Æquinoctialia* dicuntur quod ſole in iis poſito dies ubique terrarum nocti æqualis ſit, & indè tempus quo Sol punctum alterutrum æquinoctiale attingit, vocatur æquinoctium. Punctum æquinoctiale vernale eſt undè Sol motu proprio versùs polum borealem aſcendit in Eclipticâ, autumnale verò undè Sol versùs polum auſtralem deſcendit, ideóque æquinoctium eſt vernale vel autumnale. Puncta *Solſtitialia* ſunt Eclipticæ puncta duo oppoſita quæ à punctis æquinoctialibus toto circuli quadrante diſtant, quæque proindè maximè recedunt ab æquatore & in quibus aſcenſus Solis ſuprà æquatorem & deſcenſus infrà eundem terminatur. Horum punctorum prius æſtivum appellatur quo nimirum terminatur Solis aſcenſus ſuprà æquatorem; poſterius brumale vel hybernum. Dicuntur ſolſtitialia quod ſole in iis verſante, per aliquot dies ex eodem Horizontis puncto oriri, & é regione, in eodem puncto occidere videatur. Tempus quo Sol puncta ſolſtitialia ingreditur vocatur Solſtitium, quod ideò vel æſtivum vel brumale eſt.



Signum cæleſte eſt duodecima pars eclipticæ & in 30 gradus rurſus dividitur. Primi Signi principium eſt in puncto æquinoctiali vernali à quo ſigna ab occaſu in ortum juxtà motum proprium Solis numerantur. Sex ſunt borealia per borealem eclipticæ partem diſtributa, hiſque nominibus ac characteribus deſignata: Aries ♈, Taurus ♉, Gemini ♊, Cancer ♋, Leo ♌, Virgo ♍. Sex etiam auſtralia videlicet Libra ♎, Scorpius ♏, Sagittarius ♐, Capricornus ♑ vel ♑, Aquarius ♒, Piſces ♓. Aries, Taurus ac Gemini quæ inter punctum æquinoctiale vernum & punctum ſolſtitiale æſtivum continentur dicuntur ſigna vernalia; Cancer, Leo, Virgo à ſolſtitiali æſtivo ad æquinoctiale autumnale numerata appellantur æſtiva; Libra, Scorpius & Sagittarius autumnalia;

lia; Capricornus, Aquarius & Piſces, hyberna. Signa aſcendentia à puncto ſolſtitiali hyberno ad æſtivum, deſcendentia verò à ſolſtitiali æſtivo ad hybernum computantur.

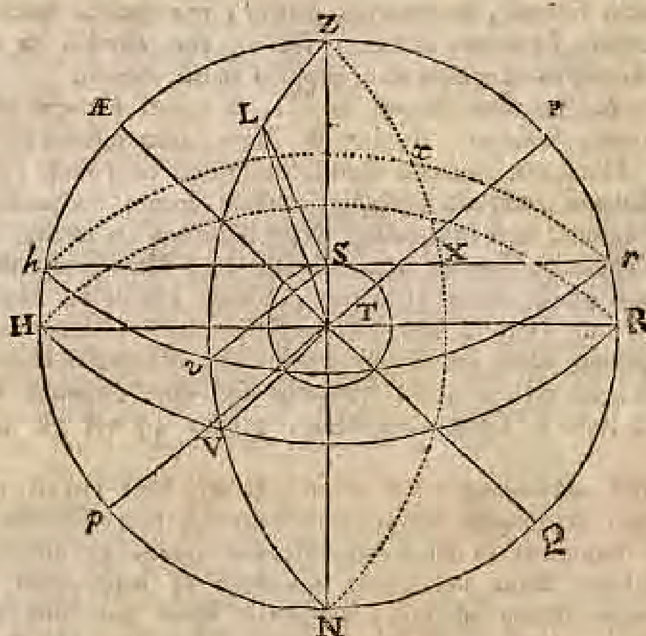
5. *Zodiacus* eſt ſphæræ cæleſtis portio ſeu zona duobus circulis Eclipticæ parallelis & gradibus 8 vel 9 hinc indè ab Eclipticâ diſtantibus terminata, ſub quâ planetæ omnes motus ſuos abſolvunt. Dum planeta ab occaſu in ortum ſeu ſecundum ordinem ſignorum, aut quod idem ſonat, in ſigna conſequentia nimirùm ab ariete ad taurum, à tauro ad geminos &c., motu proprio fertur, ille planeta tunc temporis directus vocatur; cum ipſius motus proprius ceſſare videtur, ſeu dum planeta in eodem cœli puncto morari per aliquot dies cernitur, eumdem ſitum fixarum reſpectu ſervans, ſtationarius dicitur; retrogradus tandem appellatur ubi contrà ſignorum ordinem ſeu in antecedentia ut à tauro ad arietem, ab ariete ad piſces &c. proprio motu incedit.

6. Luna & Sol ſunt ſemper directi; at cæteri planetæ tum ſuperiores, videlicet, Saturnus, Jupiter & Mars, tum inferiores, nimirum, Venus & Mercurius, directi deindè ſtationarii & poſteà retrogradi videntur. Eorum tempora periodica quibus totum zodiacum in conſequentia peragrant, ſunt inæqualia. Nam Saturnus 30 circiter annis periodum ſuam abſolvit; Jupiter annis circiter 12, Mars annis duobus ferè, Luna diebus 27 & horis 7 circiter, Venus autem & Mercurius cum Sole anno uno. Nam hi duo planetæ Solem ità conſtanter comitantur ut Venus nunquam ultrà 47 circiter gradus nec Mercurius ultrà 28 à Sole digrediatur, id eſt, angulus maximus ſub quo diſtantia Veneris aut Mercurii à Sole è Terrâ conſpicitur, gradus 47 vel 28 nunquam ſuperat.

7. *Circuli declinationis* ſeu *circuli horarii* ſunt circuli maximi per mundi polos tranſeuntes & proindè æquatori perpendiculares. Sideris vel puncti cujuſlibet in ſphærâ mundanâ *declinatio* eſt arcus circuli declinationis inter ſidus vel datum punctum & æquatorem interceptus. *Aſcenſio recta* ſideris eſt arcus æquatoris inter punctum æquinoctiale vernum & circulum declinationis ſideris illius comprehenſus ac ſecundum ordinem ſignorum numeratus. *Circuli latitudinis* ſiderum ſunt circuli ſphæræ maximi per polos eclipticæ & per ſidera tranſeuntes, atque ideò Eclipticæ perpendiculares. Hinc *Latitudo* ſideris eſt arcus circuli latitudinis inter ſidus & Eclipticam interceptus. *Longitudo* ſideris eſt arcus eclipticæ ab arietis initio versùs ortum ſeu in conſequentia uſquè ad latitudinis circulum numeratus. Punctum interſectionis Eclipticæ cum circulo latitudinis ſideris dicitur locus ſideris Eclipticus ſive locus in Eclipticâ vel locus ad Eclipticam reductus.

a 2 8. Si

8. Si per locum quemvis S in ſuperficie terræ ducatur per terræ centrum T linea recta ZSN quæ ſphæræ cæleſti occurrat in Z & N, punctum Z dicitur loci S *Zenith* ſeu vertex, & punctum N vocatur ejuſdem loci *Nadir*. *Horizon ſenſibilis* ſeu apparens loci S, eſt ſphæræ circulus h v r x centrum habens in S, & polos in Z & N. *Horizon*



rationalis ſeu verus eſt circulus HVRX, centrum habens in T, & polos in Z & N, ideóque horizonti ſenſibili parallelus.

Circulus verticalis eſt circulus quilibet maximus ZVNX per Zenith atquè Nadir & per aliud quodcumque punctum in ſphærâ mundanâ tranſiens, ideóque horizonti perpendicularis.

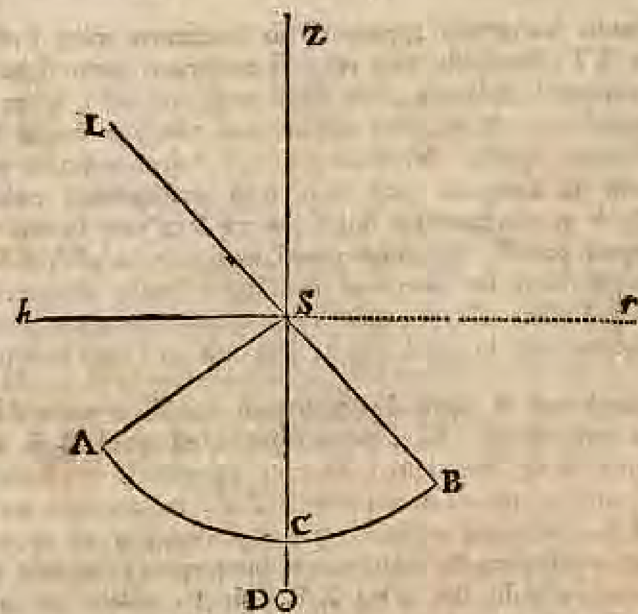
Meridianus eſt circulus verticalis PZNR per polos mundi P & p tranſiens, ac proindè æquatori perpendicularis & circulos omnes æquatori parallelos bifariam dividens. Interſectio plani Meridiani cum plano horizontis HR vel h r dicitur *Linea meridiana*. Circulus *Verticalis primarius* eſt ille verticalis qui per polos meridiani tranſit. Sit ZVNX verticalis primarius horizontem rationalem HVRX interſecans in V & X, quem meridianus etiam ſecat in H & R. Puncta quatuor R, X, H, V, dicuntur *cardines mundi*; punctum quidem R in hemiſpherio boreali cardo *Septentrionis*, H cardo *Meridiei*, V ad partes Orientis cardo *Orientis* & punctum oppoſitum X cardo *Occidentis*.

9. Diſtantia horizontis apparentis ab horizonte vero ſivè telluris ſemidiameter ST, ſenſibilis non eſt, ſi conferatur cum ſtellarum (Lunâ ferè ſolâ exceptâ) diſtantiis, & ideò terra reſpectu ſphæræ ſtellarum tanquam punctum, & quilibet terræ locus tanquam hujus ſphæræ centrum conſiderari poteſt. Nam omnes ferè Aſtronomorum obſervationes id ſupponunt & computa indè inita cum phænomenis cæleſtibus quadrant. Porrò quemadmodum ſingula terræ loca pro centro ſphæræ ſtellarum uſurpari poteſt, ità fingi poteſt in ſpatiis cæleſtibus ſphærica ſuperficies cujus tanta ſit diameter ut illius reſpectu evaneſcat Solis vel ſtellæ datæ à Tellure diſtantia, & hujus ſphæræ centrum poterit collocacari indifferenter vel in terrâ vel in ſole aut in ſpatio intermedio.

10. *Altitudo poli P ſuprà horizontem* eſt meridiani arcus PR à polo ad horizontem interceptus. Ea ſemper æqualis eſt arcui ZÆ à vertice Z ad æquatorem ÆQ intercepto; Nam ſi ex circuli quadrantibus ZPR & ÆZP ſubducatur arcus communis ZP, remanebunt arcus æquales ÆZ & PR. *Altitudo æquatoris ſuprà horizontem* eſt arcus meridiani ÆH, inter æquatorem & horizontem interceptus; æqualis eſt complemento altitudinis poli ſeu arcui ZP, quod, ablato ex quadrantibus HÆZ & ÆZP communi arcu ÆZ manifeſtum eſt. *Altitudo apparens* ſideris vel puncti cujuſlibet L in ſphærâ mundanâ, eſt angulus LSv, ſub quo ex centro S horizontis ſenſibilis videtur arcus Lv circuli verticalis per L ducti uſquè ad horizontem ſenſibilem hvrx. Altitudo vera puncti L eſt angulus LTV, ſeu ipſius menſura arcus LV in circulo verticali per L ducto uſquè ad horizontem rationalem HVRX. Undè (9) ſtellarum fixarum & ſolis altitudines apparentes & veræ coincidunt.

11. Jam verò quâ ratione phænomena quæ ſuprà retulimus & alia quæ deinceps referemus obſervari potuerint, paucis exponemus; & quidem ab obſervatione altitudinis apparentis ſiderum quæ præcipuum

torius Aſtronomiæ fundamentum eſt, initium ducemus. Circuli quadrans S A B cujus limbus A C B in gradus & minuta diviſus eſt ità ſtatuitur ut filum S C D pondere D tenſum ideóque verticale, limbum illius tangat, deindè ità vertitur ut ſidus L cujus altitudo obſervanda eſt, per dioptras aut per teleſcopium lateri S B affixum videatur in eodem latere S B producto. Quo facto, habetur arcus A C, menſura altitudinis apparentis L S h; nam cum filum è quadrantis centro S, pendens ſit ſemper in plano verticali, quadrans A S B erit etiam in eodem plano, (Eucl. 18. X I.) ideóque h r ad S D perpendicularis, erit interſectio



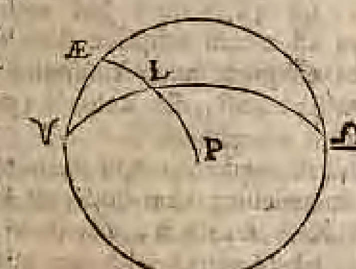
horizontis ſenſibilis & plani verticalis per L ducti, atquè angulus L S h ſideris L altitudo apparens. Sed ſi ab angulis rectis L S A, & h S D, ſubducatur communis h S A, remanent æquales anguli L S h & A S C; hujus verò menſura eſt arcus A C.

12. Hinc deſcribi poteſt linea meridiana ſuprà quam ſi ſtatuitur perpendiculariter quadrans circuli, obſervari poterit altitudo meridiana ſideris. Nam meridianus portiones illas circulorum æquatori parallelorum, quæ ſuprà horizontem eminent & qui arcus diurni dicuntur, bifariam ſecat (per El. X I. 19. & 4., & El. I I I. 30.) cum ſit illis circulis & horizonti eos arcus terminanti perpendicularis, & propterea ſi in circulo quolibet diurno ſumantur puncta duo hinc indè orientem & occi-

dentem versùs à meridiano æquidiſtantia, ea puncta erunt ſuprà horizontem ſenſibilem æquè alta, & contrà ſi æquè alta ſint, à meridiano hinc indè æquidiſtabunt. Quarè ſi ſtellæ fixæ meridiano vicinæ altitudo obſervetur versus orientem, & deindè quadrans circà filum verticale immotum ceù circa axem convertatur versùs occidentem & expectetur donec ſtella eandem altitudinem habeat, recta quæ bifariam dividet angulum inter duas quadrantis cum horizonte interſectiones comprehenſum, erit linea meridiana.

13. Datis per obſervationes duabus ejuſdem ſtellæ nunquam occidentis altitudinibus meridianis S R, s R, dantur poli P & æquatoris Æ Q altitudines P R & Æ H ſuprà horizontem H R. Nam datis arcubus S R & s R datur eorum differentia S s; & quia ſtella S circulum deſcribit æquatori parallelum (3) cujus P eſt polus, erit S P = s P; undè datur P s, cui ſi addatur s R, habebitur arcus P R altitudo poli. Eſt autem H Æ æqualis arcui Z P ſeu complemento altitudinis poli ad rectum (10), datur ergò H Æ altitudo æquatoris.

14. Datâ ſtellæ S altitudine meridianâ S R cum æquatoris vel poli altitudine, datur illius declinatio S Æ; eſt enim arcus S Æ æqualis differentiæ arcuum Æ P R & S R. Sic obſervando quotidiè altitudinem meridianam centri Solis & indè eruendo ipſius declinationem, determinatum eſt planum eclipticæ & ejus ad æquatorem inclinatio ſeu maxima ab æquatore declinatio quæ inventa eſt 23 $\frac{1}{2}$ grad. aut verius 23°. 29′. Datâ autem inclinatione eclipticæ ad æquatorem cum ſolis declinatione, datur aſcenſio recta Solis ac longitudo. Sit enim P polus mundi, ♈ Æ ♎ æquator, ♈ L ♎ ecliptica, & P L Æ, circuli quadrans æquatori perpendicularis in Æ, & datis in triangulo ſphærico Æ ♈ L rectangulo in Æ, latere ſeu declinatione Solis L Æ, & angulo Æ ♈ L, 23° 29′, dantur latus ♈ Æ aſcenſio recta ſolis, ſeu puncti L, & latus ♈ L quod eſt ejuſdem longitudo, imò datur etiam angulus Æ L ♈, quem circulus declinationis efficit cum Eclipticâ; Cum verò præter angulum Æ ♈ L, data fuerit longitudo ♈ L, dabitur tum ♈ Æ aſcenſio recta, tum Æ L, declinatio.



15. Si

15. Si quotidie obſervetur meridiana Solis altitudo, atquè indè eruantur ipſius declinatio, aſcenſio recta & longitudo, dabuntur motus Solis in Eclipticâ, motus puncti declinationis in Æquatore & temporis momenta quibus declinatio vel nulla eſt vel maxima, ſeu dabuntur Æquinoctiorum & Solſtitiorum momenta (4). Porrò obſervatum eſt nec longitudinem nec aſcenſionem rectam ſolis uniformiter creſcere & proindè dies ſolares eſſe inæquales. Nam dies ſolaris eſt tempus unius revolutionis diurnæ ſolis à meridiano ad eundem meridianum; dies ſidereus ſeu primi mobilis (qui ſemper idem manet) eſt tempus revolutionis diurnæ ſtellæ fixæ à meridiano ad eumdem. Undè cum Sol motu proprio ab occaſu in ortum feratur, ſi ſtella fixa & Sol in eodem meridiano ſimul obſerventur, ſtella ad eumdem meridianum priùs redibit quam Sol qui motu proprio versùs orientem tendit. Attamen ſi aſcenſio recta Solis ex ipſius motu proprio in Eclipticâ uniformiter creſceret, dies Solares, licet diebus ſidereis longiores, eſſent tamen inter ſe æquales; Quarè cum Solis aſcenſio recta non augeatur uniformiter, neceſſe eſt ut dies Solares inæquales ſint. Simili modo collatis inter ſeſe Æquinoctiorum & Solſtitiorum obſervationibus deprehenſum eſt Solem intervallo 8 ferè dierum diutiùs morari in ſignis borealibus quam in ſignis auſtralibus; ac tandem comparando antiquas obſervationes ad determinandum momenta æquinoctiorum vel ſolſtitiorum cum recentioribus, definita eſt quantitas anni æquinoctialis, ſivè tempus quo Sol motu proprio ab uno æquinoctio ad idem æquinoctium, vel ab uno ſolſtitio ad idem ſolſtitium progreditur & ab Authoribus Calendarii Gregoriani Lahirio, Caſſino & Blanchinio inventa eſt $365^{\text{dier.}}\ 5^{\text{hor.}}\ 49'$.

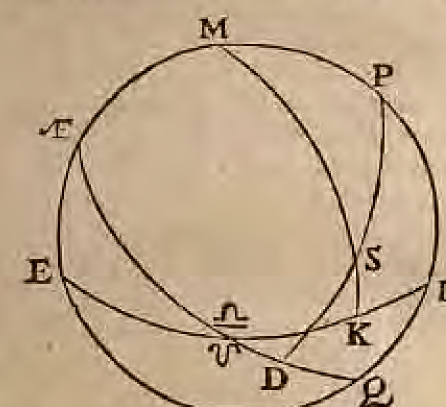
16. Datâ quantitate anni æquinoctialis, datur motus Solis medius pro quolibet dato tempore, hoc eſt motus qui Soli competeret ſi uniformiter in Eclipticâ ferretur. Eſt enim ut $365^{\text{d.}}\ 5^{\text{h.}}\ 49'$ ad tempus datum, ità 360° quos Sol anni æquinoctialis tempore deſcribit proprio motu ad arcum eclipticæ dato tempore conficiendum. Hâc proportione arcus eclipticæ anno communi $365^{\text{dier.}}$ deſcribendus eſt XI Signorum $29^{\circ}.\ 45'\ 40''$, die uno eſt $59'\ 8''\ 20'''$, horâ unâ eſt $2'\ 28''$, minuto uno eſt $2''\ 28'''$.

Arcus æquatoris qui dato tempore ſub Meridiano tranſit ſimili modo invenietur; nam quæratur arcus æquatoris dato tempore ſidereo ſub meridiano tranſiens, dicendum eſt: ut 24 horæ ſidereæ ad tempus datum, ità 360 grad. ad arcum quæſitum, is ergo horâ unâ erit 15°; minuto uno primo $15'$; minuto ſecundo $15''$. Cum autem Sol die uno deſcribat motu proprio medio ad Æquatorem relato arcum $59'\ 8''\ 20'''$ ab occaſu ad ortum, ut inveniatur arcus æquatoris dato tempore ſolari medio ſub Meridiano tranſiens, dicatur ut 24 horæ Solares ad datum tempus Solare, ità 360°
59'

$59'\ 8''\ 20'''$ ad arcum quæſitum. His igitur proportionibus tempus ſolare medium vel tempus ſidereum convertitur in gradus æquatoris & contrà. Facilè autem patet ex dictis diem ſolarem medium æqualem eſſe 24 horis ſidereis cum $3'\ 56''\ 32'''$.

17. Si obſervetur altitudo meridiana Solis & dato ante vel poſt meridiem tempore obſervetur etiam altitudo meridiana ſtellæ alicujus, ſtellæ hujus dabuntur declinatio & aſcenſio recta. Nam ex datâ altitudine meridianâ Solis datur ejus aſcenſio recta (14) & tempore quod inter duas obſervationes intercedit in arcum æquatoris converſo (16) datur arcus æquatoris qui tempore inter duas obſervationes elapſo per Meridianum tranſit; hic arcus addatur vel ſubducatur aſcenſioni rectæ Solis, & ſumma vel differentia erit aſcenſio recta ſtellæ. Declinatio autem ſtellæ ex ipſâ altitudine ejus meridianâ eruitur (14). Quod ſi centrum Solis & centrum ſtellæ in meridiano ſimul reperiantur, eadem eſt utriuſque aſcenſio recta.

18. Datis declinatione & aſcenſione rectâ ſtellæ, dantur ipſius longitudo & latitudo. Sunto ÆQ æquator, EL ecliptica, P polus mundi, M polus eclipticæ, S ſtella, PSD quadrans circuli declinationis, & MSK, quadrans circuli latitudinis. Quæruntur arcus ♈ vel ♎ K & KS. In triangulo PSM datur latus PM ſeu diſtantia polorum P & M $23^{\circ}\ 29'$, datur quoque latus PS declinationis SD complementum & angulus MPS ſeu ÆPD, cujus menſura eſt arcus ÆD datus ob datos per aſcenſionem rectam arcum ♈ D vel ♎ D & quadrantem Æ ♈. Quarè (per trig. ſphær.) invenitur latus MS latitudinis SK complementum & angulus M, cujus menſura eſt arcus KL; ex circuli quadrante ♈ L vel ♎ L ſubducatur KL, & dabitur ♈ K longitudo ſtellæ S. Hinc etiam facilè patet quomodò datis longitudine ♈ K & latitudine KS ſtellæ S inveniri poſſit ipſius aſcenſio recta & declinatio. Nam dato ♈ K datur KL, & indè datur angulus SMP, & dato SK, datur SM, undè cum datum ſit MP, datur in triangulo SMP latus PS complementum declinationis & angulus ÆPD, cujus eſt menſura ÆD, ex quâ ſi auferatur quadrans Æ♈, dabitur aſcenſio recta ♈ D.

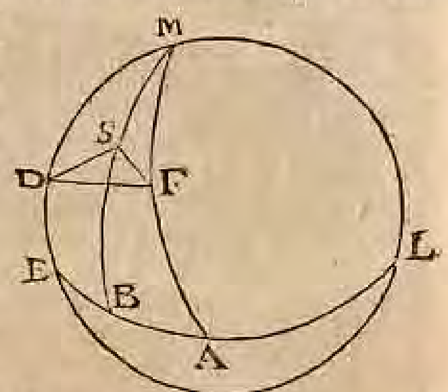


19. Ex hujuſmodi obſervationibus & calculis inventum eſt fixa-

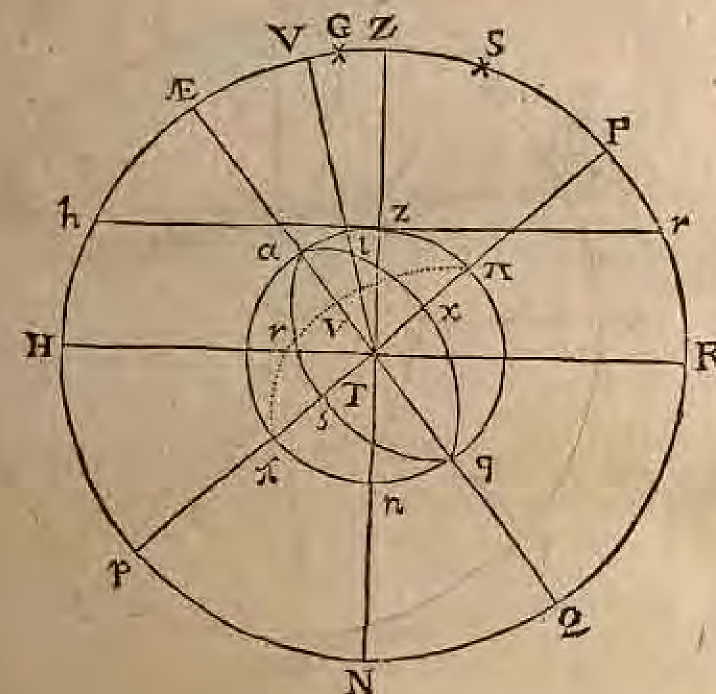
 rum

rum latitudines immutabiles eſſe, longitudines verò per ſingulos annos 50 ſecundis, & per annos 72 gradu uno quamproximè augeri. Undè manifeſtum fit ſtellas fixas motu proprio ſed lentiſſimo in circulis eclipticæ parallelis progredi in conſequentia, aut ſi ſtellæ fixæ omni proprio motu priventur, puncta æquinoctialia ſingulis annis in antecedentia moveri per arcum 50″, atquè hæc eſt præceſſio æquinoctiorum ex quâ fit ut Sol motu proprio ab æquinoctio ad idem æquinoctium citiùs revertatur quam à ſtellâ fixâ ad eandem. Annus igitur Solaris æquinoctialis brevior eſt anno Solari ſidereo, hoc eſt brevior eſt tempore unius revolutionis Solis à ſtellâ fixâ ad eandem fixam; differentia eſt 20′ 17″ quo tempore Sol motu proprio arcum 50″ conficit. Eſt ergò annus ſidereus 365 dier. 6 hor. 9′ 17″.

20. Stellarum diſtantiam dicimus arcum circuli maximi inter ſtellarum centra comprehenſum, aut, quod eodem redit, angulum quem rectæ à centris ſtellarum ad oculum ſpectatoris ductæ efficiunt. Si ope ſemicirculi vel quadrantis obſerventur diſtantiæ ſtellæ alicujus ab aliis duabus ſtellis quarum longitudo & latitudo notæ ſunt, illiùs quoque longitudo & latitudo dabuntur. Nam eſto ecliptica E L, polus ejus M, ſtellæ notæ longitudinis & latitudinis S & F, tertia ſtella D. Ducantur tres circuli latitudinis M D E, M S B & M F A, ſintque datæ diſtantiæ D S & D F. Quia dantur latitudines S B & F A ſtellarum S & F, dabuntur earum complementa S M & F M cum angulo B M A, cujus menſura eſt arcus B A, differentia longitudinis ſtellarum S & F, & ideò in triangulo S F M, dabitur S F, cum angulo M S F. Datis in triangulo D S F, tribus lateribus dabitur angulus D S F, & ſi ex 360° ſeu quatuor angulis rectis ſubducatur ſumma angulorum datorum D S F & F S M, dabitur angulus D S M, cum quo & notis lateribus D S & S M, reperientur latus M D complementum quæſitæ latitudinis ſtellæ D, & angulus E M B cujus menſura eſt arcus E B differentia longitudinum ſtellarum D & S; hæ autem obſervationes diſtantiarum Aſtrorum inter ſe propter Aſtrorum continuam converſionem non facile ad ſummam acribeiam perducuntur.

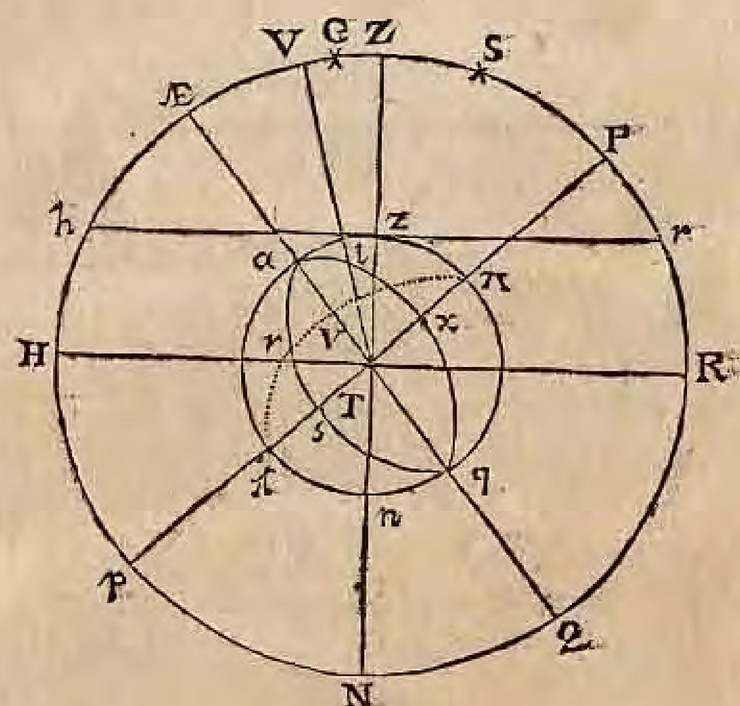


21. Sit Π z æ π q telluris globus per cujus centrum T tranſit axis mundi P p. Loci z ſit horizon ſenſibilis h r, horizon rationalis H R, & meridianus P Z H N. His ità conſtitutis, axis telluris dicitur pars Π π, axis mundi P p telluris ſuperficie terminata in punctis Π & π, quæ poli terræ vocantur. Polus Π polo cœleſti P nobis conſpicuo ſubjectus borealis vel arcticus, alter π auſtralis vel antarcticus appellatur. Interſectio plani æquatoris cœleſtis cujus eſt diameter Æ Q, cum telluris ſuperficie, ſivè circulus maximus æ s q x, cujus poli ſunt Π & π, dicitur æquator terreſtris aut etiam circulus æquinoctialis vel κατ᾽ ἐξοχὴν linea. Latitudo loci cujuſvis z in ſuperficie terræ eſt diſtantia ejus ab æquatore, ſivè eſt meridiani terreſtris arcus z æ inter locum z & æquatorem æ z q x interceptus. Undè patet latitudinem loci z in ſuperficie terræ numero graduum æqualem eſſe declinationi cœleſti verticis Z ejuſdem loci, ſeu elevationi poli P R. Nam arcus P R & Z Æ, ſunt æquales (10) & arcus Z Æ ac z æ ſimiles; Per locum in ſuperficie terræ pro arbitrio determinatum ducatur meridianus Π r π æquatorem æ s q x ſecans in r; dicaturque Π r π primus meridianus, & loci cujuſvis alterius z longitudo dicetur æquatoris arcus r æ inter meridianum primum Π r π & meridia-



ridianum zæπq loci z interceptus atquè ab occasu ad ortum numeratus.

22. Si per trigonometriam mensuretur distantia zl duorum locorum z & l sub eodem meridiano sitorum & ope quadrantis circuli ex iisdem locis observentur distantiæ SZ & SV, stellæ fixæ S à locorum verticibus Z & V, dabitur telluris semidiameter zT. Nam datis arcubus SV & SZ, dabitur eorum differentia vel summa VZ, & hinc

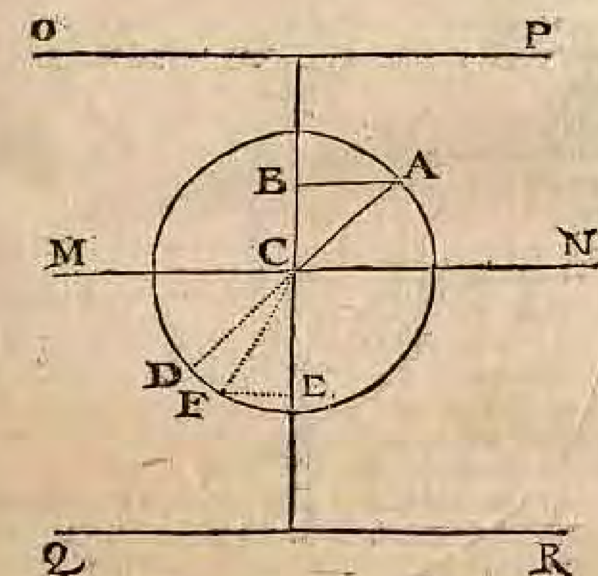


datur arcus lz qui arcui VZ similis est. Quarè per observationes astronomicas notum erit quot gradus vel minuta in arcu lz contineantur & per trigonometricas mensuras ejusdem arcûs longitudo hexapedis vel pedibus aut aliis mensuris notis data erit, & indè inferendo ut numerus minutorum in arcu lz contentorum ad 360° seu ad 21600′, ità longitudo lz mensuris notis expressa ad circulum telluris maximum, dabitur hic circulus ex quo invenietur semidiameter zT.

CAPUT II.

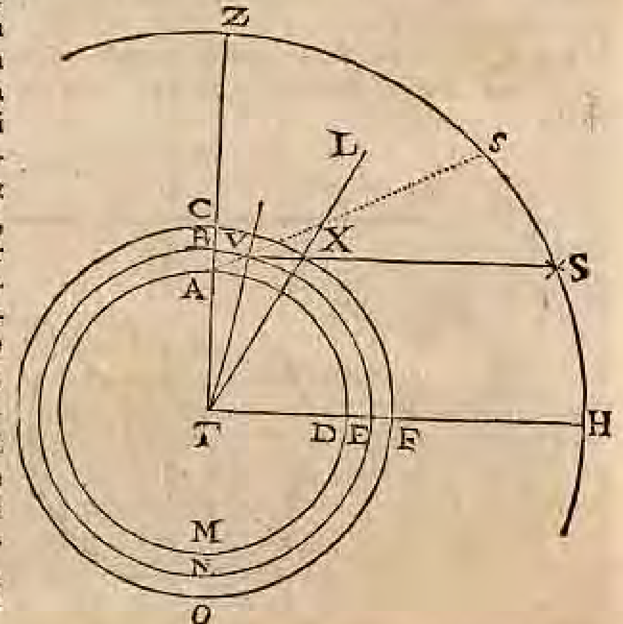
Siderum refractio & parallaxis breviter explicantur.

23. SIt MN plana superficies quâ aer rarior MOPN aerem densiorem contingit. Radius lucis per rectam AC propagatus



ex aere rariori in densiorem obliquè transeat per punctum C & indè feratur per CE, per C ducatur BF ad MN perpendicularis, experientiâ certum est radium AC in aere densiori non propagari per rectam continuam ACD, sed in puncto C ità refrangi per CE accedendo ad perpendicularem BCF, ut sinus anguli cujusvis ACB sit semper ad sinum anguli ECF in datâ ratione. AC dicitur radius incidens, C punctum incidentiæ, CE radius refractus, ACB angulus inclinationis, ECF angulus refractus, & DCE angulus refractionis.

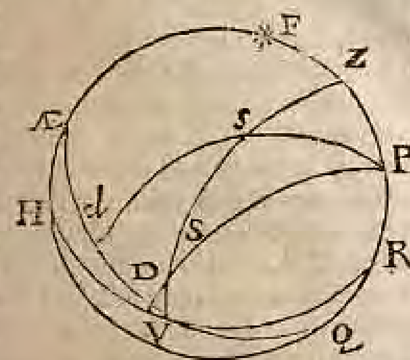
24. Si atmosphæra CXFOMA terræ ADM circumfusa, divisa intelligatur in innumeras superficies sphæricas telluris superficiei concentricas CXFO, BVEN aer inter duas hujusmodi superficies contentus & aeris superioris pondere compressus eò densior erit quò minùs à telluris centro T distabit. Sit ZSH circulus verticalis ex centro telluris T descriptus, arcus SH altitudo sideris S suprà horizontem rationalem TH, & ZS distantia sideris à vertice Z. Si radius lucis SX è sidere S propagatus incidat in atmosphæram in X, is refringetur in X per XV accedendo ad semidiametrum TX superficiei sphæricæ CXFO perpendicularem (23) & quoniam aëris densitas in V major est quam in X radius in puncto V, superficiei BVE rursùs refringetur accedendo ad TV, atquè ità continuò incurvabitur & in lineam



XVA versùs T cavam flectetur. Hanc curvam tangat in A recta As, circulo verticali ZH occurrens in s, & quoniam radius lucis SXVA oculum spectatoris in A ingreditur secundum directionem tangentis As, sidus, quod est reverà in S, videbitur in s, in loco nempe altiore; notum enim est ex opticâ objectum videri in eâ rectâ secundum quam fit directio radiorum oculos ingredientium.

25. Producatur TX ad L, ut sit SXL angulus inclinationis radii SX in atmosphæram incidentis, & VXT angulus refractus, data erit ratio sinus anguli SXL, ad sinum anguli VXT (23) ac proindè sinus angulorum inclinationis erunt semper ut sinus angulorum refractorum. Quarè sideris in vertice Z constituti, ubi nullus est angulus inclinationis, nulla erit refractio, & siderum in æqualibus à vertice distantiis sitorum, ubi æquales sunt inclinationum anguli, æquales erunt refractiones. Solis igitur, Lunæ, fixarum ac siderum omnium extrà terrestrem atmosphæram constitutorum, in paribus à vertice distantiis refractiones sunt æquales. 26. Si-

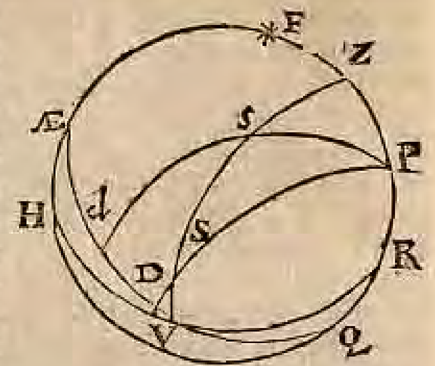
26. Siderum refractio ad singulos altitudinis gradus, observatione definiri potest. Esto HR horizon, P polus mundi, ÆQ æquator, PZH Meridianus, ZSV circulus verticalis, PSD & Psd, circuli declinationis. Stellæ fixæ F propè Zenith constitutæ observetur altitudo meridiana HF, quæ à refractione libera est, & indè eruatur ejus declinatio FE (14). Deindè observetur ejusdem stellæ in S positæ altitudo qualibet SV, & ope horologii oscillatorii notetur tempus quod inter primam & secundam observationem intercedit, & inveniatur



arcus æquatoris ÆD qui eo tempore per meridianum transiit (16). Stella quæ ob refractionem in loco altiori s apparet sit reverâ in S, erit PSD circulus declinationis stellæ in S constitutæ, & in triangulo PZS, dabitur angulus ZPS, cujus mensura est arcus ÆD cum latere PZ quod est distantiâ poli à vertice & latere PS, quod est declinationis DS seu ÆF complementum, undè invenitur latus ZS cum altitudine SV, complemento lateris ZS. Si ergò ex altitudine observatâ SV, subducatur altitudo inventa SV, quæ à refractione libera est, dabitur arcus Ss, refractio stellæ in quolibet gradu altitudinis. Hoc modo D. De la Hire in tabulis Astronomicis observavit refractiones siderum diversis anni tempestatibus, in pari altitudine easdem esse exceptis refractionibus circà horizontem quas nonnullis inconstantiis obnoxias expertus est, atquè hinc unicam tabulam refractionum ex ipsis observationibus deductam constituit, quam postea correxit D. Cassinus & eâ correctâ utuntur Astronomi. Quoniam verò radiorum lucis in atmosphæram incidentium obliquitas cum sideris à vertice distantiâ crescit, iisdem observationibus invenit refractiones siderum à vertice ad horizontem usquè ubi maximæ sunt, continuò augeri; at quod ex alienis observationibus supponebat, videlicet refractiones borealium regionum ipsâ etiam æstate, longè majores esse quam in zonis temperatis, id minimè verum esse ostendunt accuratiores observationes ab Academicis Parisiensibus ad circulum polarem habitæ, quibus refractiones etiam horizontales Parisiensibus æquales invenerunt. Vide Domini De Maupertuis nobilissimum opus de figurâ telluris per observationes ad circulum polarem definitâ.

27. Refractio sideris declinationem, ascensionem rectam, longitudinem ac latitudinem afficit & arcus circuli maximi quo sideris declinatio, ascensio recta, longitudo & latitudo minuitur vel augetur per refractio-

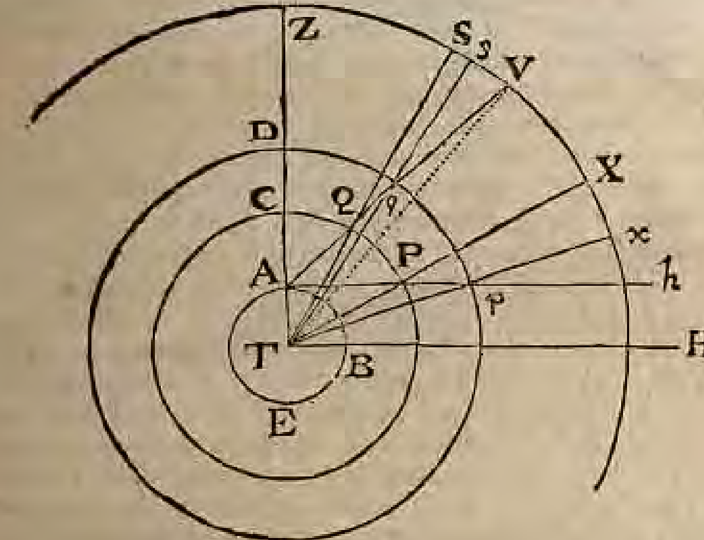
fractionem, dicitur refractio declinationis vel aſcenſionis rectæ &c.; at ex datâ altitudinis refractione aliæ refractionum ſpecies inveniri poſſunt. Nam in figurâ ſuperiori dantur in triangulo sZP latera Zs & ZP cum angulo sZP & indè reperitur latus sP cum angulo sPZ cujus menſura eſt arcus Æd, undè cum detur arcus ÆD, dabitur arcus dD refractio aſcenſionis rectæ ſideris S; & quia dantur arcus ds & DS, dabitur etiam horum arcuum differentia, quæ eſt refractio declinationis. Sed datis declinatione & aſcenſione rectâ: puncti cujuſvis in ſphærâ mundanâ, dantur ipſius latitudo & longitudo (18); patet igitur quomodo latitudinis & longitudinis refractiones poſſint inveniri.



28. Jam de *Parallaxibus* pauca nobis delibanda ſunt. Cætera, ubi opus fuerit, ſuis locis exponemus. Itaque diſtantia locorum in ſphærâ cæleſti ad quæ ſidus vel phænomenon quodvis è ſuperficie telluris & ex ejus centro ſpectatum refertur, ſivè arcus circuli maximi inter illa duo loca interceptus, ipſius ſideris aut phænomeni parallaxis appellatur, quæ proindè nulla eſt niſi terræ ſemidiameter ſenſibilem habeat rationem ad diſtantiam ſideris à terrâ. Sit T centrum telluris ac cœli; A oculus in ſuperficie terræ; Z zenith loci A; Q ſidus vel phænomenon quodvis; CQP verticalis per Q tranſiens; ZSXH verticalis in ſuperficie ſphæræ cæleſtis; ABE verticalis in ſuperficie terræ; TH horizon rationalis & Ah horizon ſenſibilis. His ità conſtitutis, locus phyſicus ſideris Q, eſt punctum illud in quo ſideris centrum hæret. Locus opticus apparens ſeu viſus eſt punctum V in ſuperficie ſphæræ cæleſtis, in quo recta ex oculo A per centrum ſideris Q ducta terminatur. Locus opticus verus eſt punctum S in ſuperficie ſphæræ cæleſtis in quo terminatur recta linea TQS ex terræ centro T per Q ducta. *Parallaxis* eſt arcus SV ſivè differentia duorum locorum opticorum. *Angulus parallacticus* qui plerumque etiam *Parallaxis* vocatur, eſt angulus AQT quem in centro ſideris efficiunt rectæ AQ & TQ ex oculo A & ex centro terræ T ad ſideris centrum Q ductæ. Parallaxis altitudinis quæ & parallaxis ſimpliciter dicitur, eſt differentia inter diſtantiam ZV à zenith Z ex loco A viſam & diſtantiam veram ZS, ſivè eſt arcus SV in circulo verticali ZSVH, undè manifeſtum eſt altitudinem ſideris veram per parallaxim minui & ejus à vertice diſtantiam augeri, atquè ideò parallaxim eſſe refractioni contrariam. Parallaxis horizontalis eſt parallaxis Xh, ſideris P in horizonte ſenſibili Ah apparentis.

29.

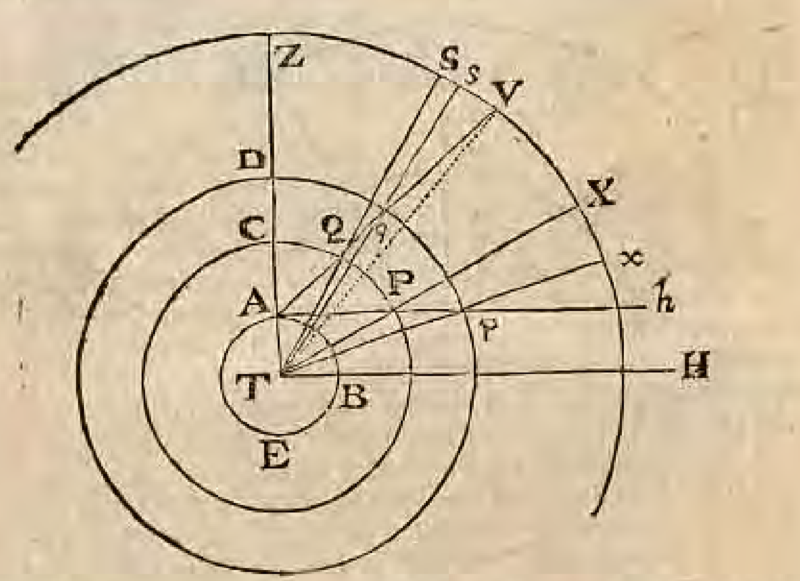
29. Parallaxis SV eſt menſura anguli parallactici AQT. Jungatur TV, & angulus externus AQT æqualis erit duobus internis oppoſitis QTV & QVT; ſed angulus QVT ſivè AVT, evaneſcente AT reſpectu TV, nullus eſt (9), ergò angulus parallacticus AQT, æqualis eſt angulo QTV, ſeu STV, cujus menſura eſt arcus SV.



30. Manente ſideris à centro terræ diſtantiâ; ſinus parallaxeos eſt ad ſinum diſtantiæ viſæ ſideris à vertice in ratione datâ ſemidiametri telluris ad diſtantiam ſideris à centro terræ. Nam in triangulo AQT, eſt AT ad QT, in ratione ſinûs anguli parallactici AQT ſeù ſinus parallaxeos ad ſinum anguli TAQ ſivè ad ſinum diſtantiæ viſæ ZV à vertice, & ideò, datis AT & QT, data eſt ratio ſinuum illorum. Hinc verò ſequitur ſideris in vertice Z, conſtituti parallaxim eſſe nullam, eandem creſcere cum diſtantiâ à vertice & in horizonte fieri maximam. Sequitur quoquè ſinus parallaxium in paribus ſideris à centro terræ diſtantiis eſſe ut ſinus diſtantiarum viſarum à vertice, & ideò ſi detur parallaxis ſideris in aliquâ à vertice diſtantiâ, dabitur in aliâ quâvis diſtantiâ à vertice.

31. Datâ ſideris Q, parallaxi AQT; cum angulo ZAV ſeu diſtantiâ apparente à vertice, datur in ſemidiametris terræ tum diſtantia QT ſideris Q à centro terræ, tum diſtantia ejus AQ à loco A. Dato enim angulo ZAQ datur TAQ complementum illius ad duos re-

ctos, undè, ob datum etiam angulum A Q T, dantur tres anguli triangguli Q A T, ex quibus datur ratio laterum inter se. Hinc datâ sideris P parallaxi horizontali, si inferatur ut sinus parallexeos ad sinum totum, ità semidiameter telluris A T ad quartum obtinebitur distantia P T sideris à centro terræ ob angulum T A P rectum.

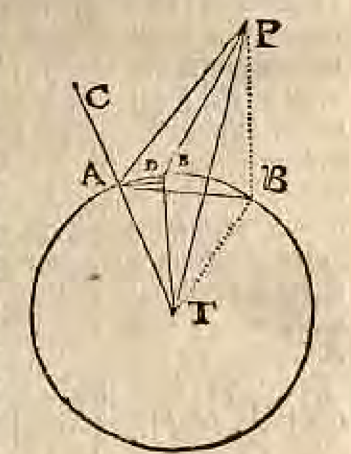


32. Sinus parallaxeon siderum Q & q in æqualibus distantiis apparentibus à vertice, sunt in ratione reciprocâ distantiarum siderum à centro terræ. Etenim ut sinus parallaxeos A Q T, ad sinum anguli Z A V, ita est A T ad Q T & ut sinus anguli Z A V, ad sinum parallaxeos A q T, ità q T ad A T, ideòque ex æquo, sinus parallaxeos A Q T est ad sinum parallaxeos A q T ut q T ad Q T. Ex quo etiam sequitur siderum in eâdem altitudine apparente existentium, hujus majorem esse parallaxim quod minùs distat à centro terræ.

33. Parallaxis altitudinis, uti de refractione dictum est, sideris declinationem, ascensionem rectam, longitudinem & latitudinem mutat; & eodem modo quo ex refractione altitudinis inveniuntur aliæ refractionum species, sic ex datâ parallaxi altitudinis eruuntur parallaxes declinationis, ascensionis rectæ, longitudinis & latitudinis; illud quoque observandum est sideris in meridiano existentis nullam esse ascensionis rectæ refractionem nec parallaxim; cum enim altitudinis refractio sidus attollat, & altitudinis parallaxis illud deprimat, in eodem meridiano seu

seu circulo declinationis (per hyp.) ascensio recta indè non mutatur. Similiter si circulus verticalis in quo sidus reperitur sit ad eclipticam perpendicularis, nulla erit longitudinis refractio nullaque parallaxis; nam in hoc casu circulus verticalis est simul circulus latitudinis, & siderum in eodem latitudinis circulo existentium longitudo est eadem.

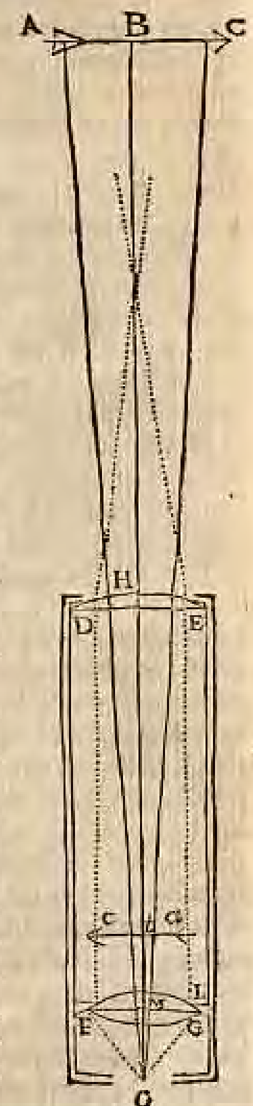
34. Datâ differentiâ longitudinis locorum duorum in superficie terræ, seu dato arcu æquatoris inter locorum illorum meridianos intercepto, datur tempus quo Sol vel stella fixa ab uno meridiano ad alterum motu diurno transit (16); & indè definiri potest utrum observationes in illis duobus locis habitæ, respondeant eidem temporis absoluti momento an non. Facilè idem innotescit per Lunæ & Jovis Satellitum eclipses; eodem enim momento temporis eclipsis initium ac finis, & macularum in Lunâ notarum immersio in umbram vel emersio ex umbrâ ex omnibus terræ locis undè conspici possunt videntur, atquè ex his phænomenis differentia longitudinis locorum determinatur. His positis si ex locis duobus A & B, quorum distantia A D B data est, Phænomeni vel sideris P in plano verticali A P B T, existentis altitudines apparentes & à refractionibus liberæ observatæ fuerint eodem tempore, inveniri poterit puncti P parallaxis & distantia à centro terræ P T. Nam per observationem altitudinis apparentis in loco A, datur angulus C A P, distantia apparens sideris à vertice & indè datur angulus P A T, anguli CAP complementum ad duos rectos, eodemque modo per observationem in loco B factam invenitur angulus P B T. Sed dato arcu ADB, datur angulus ATB & hinc in triangulo isoscele A T B, dantur anguli æquales T A B & T B A. Quarè dantur etiam in triangulo A B P, anguli P A B, & P B A quos latera P A & P B efficiunt cum chordâ A B. Ergò triangula duo A B T & A B P dantur specie ac proindè datur ratio P B ad B T. & quia datis angulis A B T & ABP datur angulus P B T, ductâ rectâ P T, dabuntur in triangulo P T B, angulus T B P, & ratio laterum T B & B P, atquè ideò triangulum hoc specie dabitur. Innotescet igitur tum angulus parallacticus B P T, tùm distantia P T, seu ejus ratio ad telluris notam semidiametrum. Hâc igitur ratione inveniri potest parallaxis sideris aut Phænomeni vel quiescentis vel utlibet moti. Verùm Astronomi recentiores plures invenerunt methodos quibus unicus observator in eodem loco manens siderum



motu diurno ac proprio agitatorum parallaxes poteſt determinare. De his, ubi è re viſum fuerit, dicemus. Vid. Keill. in Introductione ad veram Aſtronomiam.

CAPUT III.

De Teleſcopii ac Micrometri uſu & Phænomenis horum Inſtrumentorum beneficio obſervatis pauca.



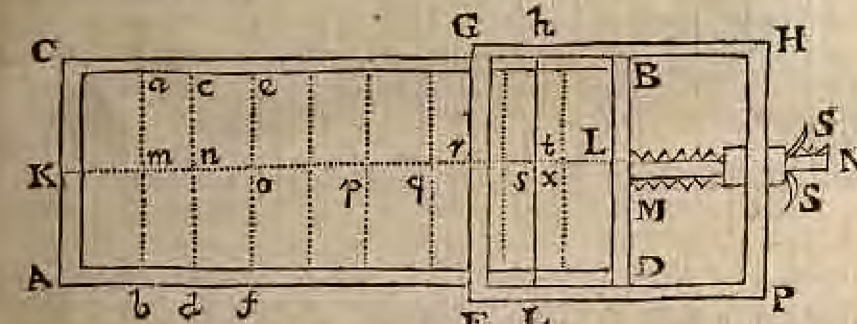
35. SIt Teleſcopium Aſtronomicum DFGE, vitrum objectivum DE, oculare FG; objectum AC; ità remotum ut radii qui ex ſingulo illius puncto in totam vitri objectivi ſuperficiem incidunt pro parallelis poſſint uſurpari. Radii illi ex eodem puncto v. gr. A propagati, à vitro objectivo ità franguntur ut poſt vitrum DE coeant in unum punctum a, quod eſt puncti A imago, & ſimiliter punctum C pingitur in c, totumque objectum AC in ac, ſitu inverſo, eſtque c a foci locus in quo proindè oculus O, trans vitrum oculare FG, videt objectum AC, ſeu ipſius imaginem a c. Hinc ſi in foci loco c a poſitum ſit corpus aliquod opacum, oculus illud diſtinctè videbit tanquam objecto AC, ſeu potiùs imagini ejus a c contiguum.

36. Sit BO Radius ad AC normalis & per centra H & M vitrorum tranſiens, ideóque irrefractus. Jungatur recta AO, & objectum AB, oculo nudo videretur ſub angulo AOB, eſtque proindè angulus AOB, magnitudo apparens objecti AB. Quoniam verò radii ex punctis imaginis b & a parallelè propagati colliguntur à vitro oculari FG in ejus foco O ubi oculus verſatur, pars objecti AB, ſeu ejus imago a b, videtur ſub angulo MOL, & (per probl. 31. Element. Dioptr. Clariſſ. Wolf.) diſtantia foci lentis objectivæ Hb, eſt ab diſtantiam foci lentis ocularis b M, ut angulus MOL ad angulum AOB, ſeu ut magnitudo apparens imaginis a b ad magnitudinem apparentem objecti AB nudo oculo viſi, ex quo pa-

tet

tet quod in eodem Teleſcopio magnitudines apparentes objectorum ſunt proportionales magnitudinibus imaginum in foco poſitarum & trans vitrum oculare viſarum.

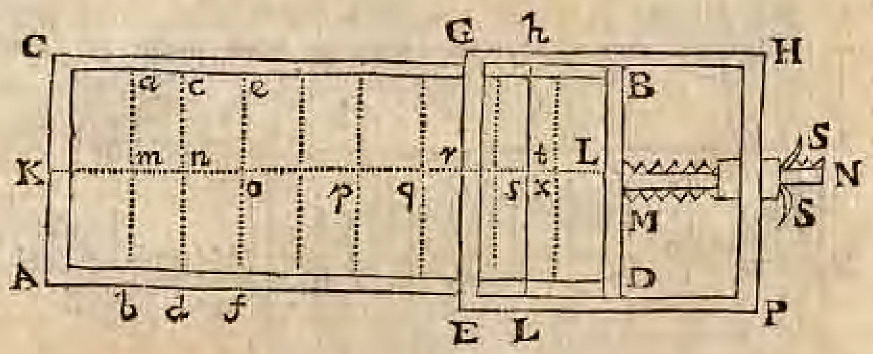
37. His poſitis, facile eſt micrometri uſum intelligere. Eſt autem micrometrum inſtrumentum quod in foco lentis objectivæ teleſcopii aptatur ad magnitudines apparentes quæ gradum unum vel gradum cum ſemiſſe non ſuperant, dimetiendas. Illius conſtructionem quam D. De-la-Hire in tabulis Aſtronomicis veluti uſibus Aſtronomicis accommodatiorem dedit, referemus. Conſtat ex duobus quadris rectangulis quorum alterum ABCD, ut plurimum longitudinem habet duorum pollicum cum ſemiſſe & latitudinem unius pollicis cum ſemiſſe. Hujus quadri, latera longa AD, CB, in partes æquales & tertiâ parte unius pollicis inter ſe diſtantes dividuntur, ità tamen ut lineæ ductæ per ſingu-



las diviſiones ſint ad latera AD, CB, perpendiculares. Hiſce diviſionibus fila ſerica benè tenſa applicantur, glutinanturque cerâ. Additur filum ſericum KL, dictum tranſverſale, quod ad angulos rectos fila parallela modò deſcripta ab, cd, ef, &c. ſecet & in medio laterum AC, BD glutinatur. Alterum quadrum EFGH cujus longitudo EF non ſuperat unum pollicem cum ſemiſſe, ita priori accommodatur ut ejus latera EF, GH, moveantur ſuper latera AD, CB, alterius quadri nec ab ipſo ſeparentur. Facies hujus ſecundi quadri quæ diviſam faciem prioris reſpicit, filo etiam ſerico & tenſo hL, inſtruitur, quod, cum movetur quadrum ubiquè prioris quadri filis parallelum maneat, eaque ſuperlabitur quam proximè, nec tamen eis occurrit. Cochlea deindè MN, lateri BD, longioris quadri affigitur, cujus ſtriatum receptaculum lateri FH alterius adhæret & in foramine rotundo circumvolvitur. Cochlea ejuſque receptaculum auriculis S, S inſtructum ità inter ſe aptari debent ut receptaculum & quadrum EH, ne minimùm quidem moveri poſſit, niſi receptaculi motu converſionis.

Qua-

Quadrum ABCD, teleſcopii cujuſvis longitudinis tubo in diſtantiâ foci objectivæ lentis ità aptatur ut ipſius quadri planum perpendiculare ſit ad teleſcopii axem. His ità conſtitutis, teleſcopium in cœlum convertatur & ità diſponatur ut duæ ſtellæ fixæ quarum diſtantia apparens in minutis ſecundis aliundè nota ſit, ſint in filo tranſverſali KL, poſitæ verſeturque cochlea donec filum mobile hL, per centrum x, ſtellæ unius tranſeat, alterius ſtellæ centro m, vel n, exiſtente in alio filo ab, vel cd. Hâc obſervatione notum erit cuinam diſtantiæ apparenti reſpondeat longitudo mx, vel nx, in lineis & lineæ partibus data, & indè per proportionis regulam, obſervatâ quâlibet aliâ ſiderum diſtantiâ



nq, dabitur angulus ſub quo hæc diſtantia nudo oculo videretur, inferendo ſic: ut mx vel nx ad nq, ità diſtantia apparens ſtellarum duarum m, vel n, & x ad diſtantiam apparentem punctorum n & q. Moveatur jam quadrum EFGH ope receptaculi ſtriati donec filum ejus ſericum hl, exactè conveniat cuilibet ex filis parallelis alterius quadri, noteturque poſitio auricularum receptaculi & iterum moveatur receptaculum donec idem filum quadri EFGH proximo filo alterius congruat, vel, quod idem eſt, moveatur quadrum EFGH, per ſpatium quatuor linearum, numerenturque revolutiones receptaculi & partes unius revolutionis quæ filorum intervallo linearum quatuor conveniunt. Condatur tandem tabula revolutionum receptaculi & partium ejus quæ ſingulis minutis primis & ſecundis ex noto ſuperiùs toto intervallo debentur.

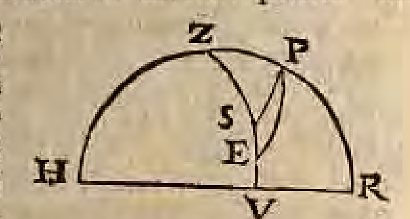
38. Ubi diameter planetarum erit obſervanda, directo teleſcopio cum micrometro ad planetam ità diſponantur fila movendo teleſcopium ut ſideris limbus unum ex filis parallelis immobilibus percurrat; deindè receptaculum convertatur, donec filum mobile limbum alterum Planetæ contingat. Manifeſtum eſt ex diſtantiâ cognitâ inter fila micrometri

quæ

quæ planetam comprehendunt, notam fieri Planetæ diametrum apparentem.

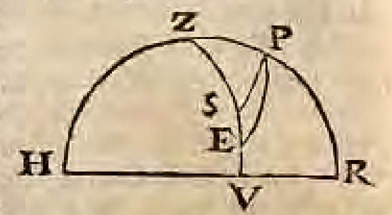
39. Datâ declinatione & aſcenſione rectâ ſtellæ fixæ, inveniri poteſt alterius ſtellæ declinatio & aſcenſio recta, modò tamen duæ illæ ſtellæ tranſire viciſſim poſſint per campum teleſcopii immoti. Ità enim diſponantur fila parallela micrometri ut motus diurnus ſtellæ quæ alteram præcedit fiat ſuper unum ex illis VG. Super ab, in quo ſitu filum cd, exponet portionem exiguam paralleli quem ſtella deſcribit, & filum KL illud ad angulos rectos interſecans, circulum aliquem declinationis. Notetur temporis momentum quo ſtella præcedens filo tranſverſali occurrit in m. Similiter immoto teleſcopio obſervetur tempus appulſûs alterius ſeu ſequentis ſideris ad idem filum tranſverſale ſeu circulum declinationis, & ſi intereà filum parallelum mobile hL, ſideri huic aptetur, immoto manente micrometro ope diſtantiæ mx, filorum ab & hL, diſtantiam apparentem inter parallelos ſiderum duorum quæ eſt differentia declinationis ſiderum, obtinebimus. Sed ſi differentia temporis inter utriuſque ſideris tranſitum per filum tranſverſale in minuta tam prima quam ſecunda gradûs convertatur (16) differentiam aſcenſionalem ſiderum habebimus.

40. Hæc obſervatio ſupponit nullum eſſe ſideris motum proprium nullamque parallaxim. Si ſidus motum proprium habeat, illum oportet ex obſervationibus determinare quoad declinationem & aſcenſionem rectam illiúſque rationem habere. Quo peracto, ſi aliqua ſit ſideris parallaxis poterit ità reperiri. Obſervetur ſideris ad meridianum appellentis aſcenſio recta quæ parallaxi obnoxia non eſt (33), & differentia inter hanc aſcenſionem rectam ſideris in meridiano exiſtentis & aſcenſionem rectam ejuſdem ſideris alibi exiſtentis obſervatam, erit parallaxis aſcenſionis rectæ ex qua parallaxis altitudinis inveniri poterit. Sit enim HR horizon, HZR meridianus, Z zenith, P polus mundi, ZSEV circulus verticalis, S ſidus obſervatum in loco S & deindè in meridiano, E locus ſideris viſus, S locus verus, & ideò SE parallaxis altitudinis; SP & PE circuli declinationis. Datur, (per hyp.) angulus SPE, cujus menſura eſt parallaxis aſcenſionis rectæ ſideris obſervata. Datur etiam punctum illud quod eſt interſectio æquatoris & meridiani tempore obſervationis ſideris in E, apparentis, undè habetur arcus æquatoris inter meridianum RZH & circulum declinationis PE interceptus qui eſt menſura anguli ZPE. Quarè in triangulo ZPE, dantur latus ZP diſtantia poli à vertice, & latus ZE diſtantia viſa



ſideris

ſideris à vertice cum angulo ZPE. Innoteſcet igitur angulus PZE. ab angulo ZPE, ſubducatur datus SPE, & dabitur angulus ZPS. Denique in triangulo ZPS, ex datis angulis PZS & ZPS, cum latere ZP, dabitur latus ZS, vera ſideris à vertice diſtantia quæ ex visâ ZE, ablata relinquet SE parallaxim altitudinis.



41. Teleſcopium maculas quampluri-mas variabiles quæ ſuper corpus Solis incedere videntur oſtendit, ex earum motu ſolem circà proprium axem 25 ½ diebus revolvi infertur. In Venere pro variâ ejus ad Solem & Terram poſitione phaſes diverſæ conſpiciuntur phaſibus Lunaribus ſimiles ità ut partem illuminatam Soli conſtanter obvertat. Præterea Mercurius & Venus tanquam maculæ nigræ & rotundæ diſcum Solis trajicere viſi ſunt. Undè notum factum eſt Planetas illos eſſe corpora opaca à Sole illuſtrata. In Jove, Marte ac Venere maculæ obſervatæ fuerunt quarum motus rotationem illorum planetarum circà proprium axem probat. Circà Jovem quatuor revolvi videntur lunulæ Jovis corpus perpetuò comitantes. Sunt omnes ut & Jupiter ipſe corpora opaca lumen ſuum à Sole mutuantia; nam Jove inter ipſas & Solem diametraliter interpoſito, lumine privantur & cælo ſereno evaneſcunt; ubi verò aliqua Jovialis Lunula inter Solem & Jovem tranſit, ejus umbra inſtar maculæ nigræ ac rotundæ obſervatur in ipſo Jovis diſco. Quinque pariter Lunulæ Saturnum comitantur & circà eum revolutiones ſuas agunt lumineque privantur dum radii Solares à Saturni corpore opaco intercipiuntur. Hugenius ex propriis obſervationibus intulit Saturnum cingi annulo tenui, plano, nuſquam cohærente cum corpore Saturni & ad Eclipticam inclinato; quæ hypotheſis, ſi ità nunc poteſt appellari, non ſolùm Phænomenis ab Hugenio obſervatis, ſed & aliis plurimis quæ magnâ diligentiâ à Caſſino & Maraldo obſervata fuere ſatisfacit. Tandem per teleſcopium ſtellæ longè plures quam oculo nudo cernuntur; Stellæ illæ quas nebuloſas dicunt & integra via lactea nihil aliud ſunt quam plurimarum ſtellarum quæ oculo non diſtinguuntur congeries. Novæ quoque in cælis ſtellæ apparent & quæ antè videbantur, nonnunquam inconſpicuæ fiunt, illarum quædam apparitionis & diſparitionis periodos habent quæ quámdam regularitatem obtinere videntur, earumque magnitudo ſub initio apparitionis creſcit & ſub finem decreſcit.

42. Si ſæpius obſervetur tum motus Solis in Eclipticâ (15) tum ipſius diameter apparens (39) quam fieri poteſt accuratiſſimè, circà datum punctum in plano deſcribi poterit curva ſimilis orbitæ quam Sol circà terram percurrere videtur. Nam cum diametri Solis apparentes

DE MUNDI SYSTEMATE.

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus Principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantùm, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maximè ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi ſcholiis quibuſdam philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maximè fundari videtur, uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque lucis & ſonorum. Supereſt ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem ſyſtematis mundani. De hoc argumento compoſueram librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus à multis retro annis inſueverunt: & propterea ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in propoſitiones, more mathematico, ut ab iis ſolis legantur qui principia prius evolverint. Verumtamen quoniam propoſitiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere poſſint, auctor eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis definitiones, leges motuum & ſectiones tres priores libri primi ſedulo legat, dein tranſeat ad hunc librum de mundi ſyſtemate, & reliquas librorum priorum propoſitiones hic citatas pro lubitu conſulat.

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I. (a).

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ sint & earum phænomenis explicandis sufficiant.

DIcunt utique philosophi: Natura nihil agit frustra, & frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideóque effectuum naturalium ejusdem generis eædem assignandæ sunt causæ, quâtenus fieri potest.

Uti respirationis in homine & in bestiâ; descensus lapidum in *Europâ* & in *Americâ*; lucis in igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in terrâ & in planetis.

R E-

(a) 49. * *Regula prima.* Hæc regula duas habet partes; prima est, ne Philosophia in vana abeat opinionum commenta, causæ rerum naturalium non aliæ admitti debent quam quæ reverâ existunt & quæ phenomenis explicandis sufficiunt; unde si velimus cum evidentiâ ac certitudine philosophari, omnes hypotheses negligendæ nobis sunt; hypothesis enim si legitima est, causæ quidem possibilitatem, minimè verò existentiam adstruit, cum effectus idem pluribus modis produci possit. Verumtamen ubi certitudinis obtinendæ ab Experimentis & inde Mathematicâ via procedendo spes non affulget hypothesibus quibusdam particularibus uti licet ad veritatem novis experimentis indagandam, quemadmodum Astronomi varias adhibuerunt hypotheses ut phænomena cælestia prædicere & accuratius observare, atque ità veras eorum causas conjectando investigare possent. Altera pars regulæ ea scilicet quæ præscribit non plures admittendas esse rerum naturalium causas quam quæ eorum phænomenis explicandis sufficiunt, manifesta est; nam cum vera effectûs causa per experientiam semel inventa est, & matheseos ope præsertim demonstratum est causæ illius eam esse vim quæ ad effectum producendum sufficiat, liquet aliam quamlibet causam esse inutilem.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt.

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt, ideoque generales statuendæ sunt quotquot cum experimentis generaliter quadrant; & quæ minui non possunt, non possunt auferri. Certè contra experimentorum tenorem somnia temerè confingenda non sunt, nec à naturæ analogiâ recedendum est, cum ea simplex esse soleat & sibi semper consona. Extensio corporum non nisi per sensus innotescit, nec in omnibus sentitur: sed quia sensibilibus omnibus competit, de universis affirmatur. Corpora plura dura esse experimur. Oritur autem durities totius à duritie partium, & inde non horum tantùm corporum quæ sentiuntur, sed aliorum etiam omnium particulas indivisas esse duras meritò concludimus. Corpora omnia impenetrabilia esse non ratione sed sensu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem esse proprietatem corporum universorum. Corpora omnia mobilia esse, & viribus quibusdam (quas vires inertiæ vocamus) perseverare in motu vel quiete, ex hisce corporum visorum proprietatibus colligimus. Extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extensione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras esse & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc est fundamentum philosophiæ totius. Porro corporum partes divisas & sibi mutuò contiguas ab invicem separari posse, ex phænomenis novimus, & partes indivisas in partes minores ratione distingui posse (b) ex mathematicâ certum est. Utrum verò partes illæ distinctæ

(b) 50. * *Ex mathematicâ certum est.* Demonstrationes passim reperiuntur apud eos autores qui de materiæ divisibilitate tractant, ut ex incommensurabilitate lateris quadrati & ejus Diagonalis &c.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tinctæ & nondum divisæ per vires naturæ dividi & ab invicem separari possint, incertum est. At si vel unico constaret experimento quod particula aliqua indivisa, frangendo corpus durum & solidum, divisionem pateretur: (c) concluderemus vi hujus regulæ, quod non solum partes divisæ separabiles essent, sed etiam quod indivisæ in infinitum dividi possent.

Denique si corpora omnia in circuitu terræ gravia esse in terram, idque pro quantitate materiæ in singulis, & lunam gravem esse in terram pro quantitate materiæ suæ, & vicissim mare nostrum grave esse in lunam, & planetas omnes graves esse in se mutuo, & cometarum similem esse gravitatem in Solem, per experimenta & observationes astronomicas universaliter constet: dicendum erit per hanc regulam quod corpora omnia in se mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex phænomenis de gravitate universali, quam de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœlestibus nullum experimentum, nullam prorsus observationem habemus. Attamen gravitatem corporibus essentialem esse minimè affirmo. Per vim insitam intelligo solam vim inertiæ. Hæc immutabilis est. (d) Gravitas recedendo à terrâ, diminuitur.

R E-

(c) * *Concluderemus vi hujus regulæ*, seu ex analogiâ naturæ quæ simplex esse solet & sibi semper consona. * Hinc patet differentia Newtonianismi & hypotheseos Atomorum; Atomistæ necessariò & Metaphysice atomos esse indivisibiles volunt, ut sint corporum Unitates; Metaphysicam hanc quæstionem missam facit Newtonus, & huc redit ejus sententia, si illæ partes quas Deus condidit indivisas, quæque ideo sunt corporum Physica Elementa seu Physicæ Monades, frangendo dividerentur, tunc exinde edocti, statueremus eas posse dividi, ideoque ulterius ulteriusque sine fine divisibiles esse diceremus, omnem hâc de re Theoriam Metaphysicam experimentis facile postponentes. Hæc etiam fluunt ex Lockii, de ratione quâ agnoscimus qualitates essentiales, Doctrinâ; Ignoramus planè, inquit ille, quænam qualitates cum subjecti natura sint conjunctæ si rem Metaphysicè spectemus; sed fit ut experientiâ Magistrâ, has aliasve qualitates ad universa subjecta quæ ad eamdem Classem referimus pertinere deprehendamus, aut saltem ad omnia in quæ experimenta instituere licuit & eas essentiales dicere lubuit. Hinc infert Newtonus, eadem istâ regulâ quâ utimur vulgo ad agnoscendas eas qualitates, eâdem etiam regulâ in rebus Philosophicis uti debemus ubi experientiâ quidem, sed minus obviâ ac vulgari, similem Inductionem instituere dabitur. Adjungit quidem præter eam Inductionem, caracterem hunc Metaphysicum, ut illæ qualitates intendi ac remitti nequeant, etenim qualitates quæ remitterentur, gradatim eâdem ratione quâ remittuntur, aboleri possent, sicque Universorum corporum qualitates non amplius forent.

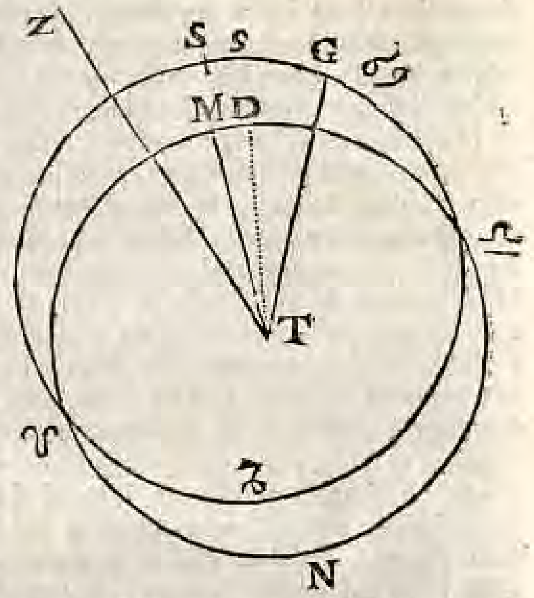
(d) * *Gravitas recedendo à terrâ diminuitur*, ut infrà demonstrabitur.

sint reciprocè ut ipsius à tellure distantiæ, ex datis diametris apparentibus dantur distantiarum rationes & ex dato Solis motu in Eclipticâ, dantur anguli inter illas distantias contenti. Si verò ex hujusmodi observationibus conferantur diametri apparentes Solis cum ipsius angulari velocitate circà terram, apparet areas quas Sol radio ad terram ducto verrit, esse temporibus proportionales, Solisque orbitam non multum differre à circulo & haberi posse pro ellipsi cujus umbilicum alterum occupat terra. Est autem Solis diameter apparens maxima 32′ 40″, & minima 31′ 36″ juxtà D. Cassini in tabulis Astronomicis & ideò maxima distantia Solis à terrâ est ad distantiam minimam ut 32′ 40″ ad 31′ 36″, sivè ut 1960 ad 1896 circiter, sive 245 ad 237. Ex similibus observationibus, tum diametri apparentis Lunæ, tum velocitatis ipsius in unâ revolutione colligitur hunc planetam radio ad centrum terræ ducto areas describere temporibus circiter proportionales.

43. Si itaquè observetur locus Solis in Eclipticâ quandò tum ipsius velocitas tum diameter apparens minima est, dabitur tempore dato locus Apogæi Solis & collatis plurium annorum observationibus innotescet Apogæi motus annuus qui juxtà D. Cassini est 1′ 2″ & indè per proportionis regulam habetur motus Apogæi pro quolibet dato tempore. Hinc si tempore quovis observetur Solis longitudo vera, dabitur eodem tempore locus Apogæi Solis & ipsius anomalia vera ex quâ eruetur ejusdem anomalia media (per schol. ad prop. 31. lib. 1.) ac proindè longitudo media habebitur tempore observationis. Hæc longitudo media assumatur tanquam radix seu principium motuum mediorum Solis & tempus observationis tanquam epocha temporum mediorum computandorum & dato quolibet alio tempore medio inveniri poterit medius Solis motus huic tempori proportionalis, & indè habebitur ipsius longitudo media & distantia ejus media ab Apogæo seu anomalia media dabitur ex quâ deindè eruetur anomalia coæquata, ac proindè longitudo vera Solis habebitur.

44. Quia verò dies Solares sunt inæquales (15), necesse est ut tempus apparens quod diebus solaribus constat, fluat etiam inæquabiliter. Differentia quæ est inter tempus apparens seu verum & tempus æquabile seu medium dicitur æquatio temporis quâ indigemus ut tempus medium convertatur in tempus apparens & viceversâ, ideóque ut invento loco Solis pro tempore medio, inveniatur etiam pro tempore vero & contrà.

45. Sit T, Cœli & Terræ centrum T Z, planum immobile circuli alicujus horarii, ♈ M ♎ N æquator, ♈ S ♋ ♎ ♑ Ecliptica, S Sol, ♈ S Solis longitudo vera, ♈ S ejusdem longitudo media, cui æqualis capiatur arcus æquatoris ♈ M, & ♈ D sit Solis ascensio recta vera. Ducantur ad puncta mobilia M & D radii æquatoris T M & T D qui semper moveantur cum punctis M & D, in consequentia. Quoniam æquator per circulum horarium T Z, motu æquabili diurno nempè qui fit ab oriente in occidentem, transit; si punctum D ascensionis rectæ Solis etiam æquabiliter progrederetur in æquatore ab occidente in orientem, dies Solares seu revolutiones singulæ puncti D à circulo horario T Z ad eundem, essent æquales & tempus apparens à medio non differret. Sed cum motus ascensionis rectæ D, inæquabilis sit, dies & horæ Solares sunt quoquè inæquales. At punctum M, æquabiliter progreditur in æquatore ab occasu ad ortum, & ideò motus illius constitui potest pro mensurâ temporis medii. Itaque longitudo Solis media ♈ S vel æqualis est ascensioni rectæ ♈ D vel eâ major est aut minor. In primo casu punctum M coincidit cum puncto D, in secundo casu est ultrà D, versùs orientem & in tertio casu est citrà D, versùs occidentem. Temporis absoluti momentum quo punctum M, coincidit cum puncto D, sumatur tanquam principium à quo tempus apparens & tempus medium incipiunt computari & quo simul coincidunt; & in aliis casibus tempus apparens à medio differet pro quantitate arcûs M D in tempus solare conversi (16); Nam dum punctum D, est sub meridiano T Z, horâ 12ª computatur in loco cujus meridianus est T Z, & ubi punctum M distat à puncto D, arcus M D, in tempus solare conversus, dabit differentiam inter meridiem apparentem & meridiem medium qui contingit quandò punctum M est in meridiano T Z.



46. Itaquè tempus medium in apparens sic convertitur. Quæritur longitudo Solis tum media, tum vera tempori dato respondens (44) indè eruitur longitudinis veræ ascensio recta (14), si hæc major est mediâ Solis longitudine, differentia in tempus solare conversa subtrahitur ex tempore medio ut fiat apparens, additur si minor est. At tempus apparens in medium ità mutatur. Tempus apparens tanquam medium consideratur, & inquiritur pro dato tempore longitudo Solis tùm media, tum vera, & indè eruitur longitudinis veræ ascensio recta; si hæc mediam Solis longitudinem superat, differentia in tempus solare conversa additur tempori apparenti ut fiat medium. Si verò longitudinis veræ ascensio recta minor est mediâ Solis longitudine, differentia in tempus solare conversa à tempore apparente subducitur. Quod si media Solis longitudo æqualis sit ascensioni rectæ longitudinis veræ, tempus apparens congruit cum medio nullâque eget æquatione. Hæc omnia ex modò dictis (46) manifesta sunt; si enim punctum D est orientalius puncto M, hoc citiùs ad meridianum T Z, pervenit quam illud, ac proindè hora 12ª temporis medii computatur, cum nondùm est meridies temporis apparentis, & contrarium contingit, si punctum D puncto M fuerit occidentalius. Ubi tempus apparens in medium oportet converti, tempore apparente utimur tanquam medio ad locum Solis inveniendum; cum enim tempus apparens non multum differat à tempore medio; differentia inter ascensionem rectam & longitudinem mediam Solis est quam proximè eadem, sivè per tempus medium, sivè per tempus apparens inquiratur.

47. Jam verò si tempore quovis apparente observetur Solis ascensio & longitudo vera, indèque eruatur ipsius longitudo media (44) ac tempus apparens convertatur in tempus medium (47) habebimus locum Solis medium pro dato temporis medii momento, & hic locus erit radix motuum Solis, momentum verò temporis medii datum epocha temporum computandorum; quibus semel constitutis ad quodlibet aliud datum tempus medium vel apparens inveniri poterit locus Solis verus vel medius in Eclipticâ & contrà. Exposuimus jam (44) quomodò locus Solis dato tempore medio inquiratur. Si datum sit tempus apparens, hoc tanquam tempus medium usurpetur & quæratur locus Solis verus huic correspondens (44); Deindè longitudini Solis sic inventæ tantum longitudinis addatur vel dematur quantum temporis æquationi debetur & ità prodibit locus Solis tempori apparenti respondens. Facile est ex dictis problema inversum solvere, seu ex dato loco Solis medio aut vero tempus medium aut apparens huic Solis loco respondens invenire.

48. Nec opus eſt ut moneamus eaſdem eſſe motuum cæleſtium apparentias, ſive cœlum omne cum ſtellis circà tellurem motu diurno revolvatur ab oriente in occidentem, ſive terra circà proprium axem eodem tempore ab occidente in orientem converti ſupponatur immoto cœlo; ſive etiam terra immota maneat & Sol proprio motu ab occaſu ad ortum feratur, ſeu circa Solem immotum terra motu annuo circumvolvatur in Eclipticâ. Nam in utrâque ſuppoſitione diametri apparentes & velocitates relativæ ſunt eædem.

REGULA IV.

In Philoſophiâ experimentali, propoſitiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris aut accuratè aut quamproximè haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.

(e) Hoc fieri debet ne argumentum inductionis tollatur per hypotheſes.

(e) * *Hoc fieri debet.* Hanc regulam in quæſtionibus opticis hoc fere modo exponit Newtonus. In Phyſicis non ſecus ac in Mathematicis Scientiis, ad res difficiles inquirendas methodus analytica priùs eſt uſurpanda quam ſynthetica methodus in auxilium vocetur. Hæc prima methodus in eo poſita eſt ut adhibeantur experimenta atque obſervationes ex quibus deindè per inductionem concluſiones generales deducantur, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, niſi eas aliquo experimento aut certâ aliquâ veritate nixas eſſe contigerit. Nam quod hypotheſes ſpectat, eæ in Philoſophiâ experimentali locum habere non debent. Quamvis ratiocinia ab experimentis & obſervationibus per inductionem deducta ad ſtabiliendas modo demonſtrativo concluſiones generales ſatis non ſint, hic tamen ratiocinandi modus eſt omnium quos rerum naturâ admittere poſſit optimus, iſque eò tutior reputari debet quo generalior eſt inductio; Si autem nulla repugnaverint phænomena, generalem concluſionem deducere licebit. Sin verò deinceps contraria occurrant phænomena, exceptionibus neceſſariis limitanda erit atque reſtringenda concluſio. Hujus analyſeos auxilio à compoſitis ad ſimplicia, à motibus ad vires producentes, & generatim ab effectibus ad eorum cauſas perveniri poteſt. Quod ad ſyntheſim pertinet, hæc cauſas cognitas atque probatas tanquam principia aſſumit quorum ope phænomena inde nota explicantur. 50.

DE MUNDI SYSTEMATE.

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

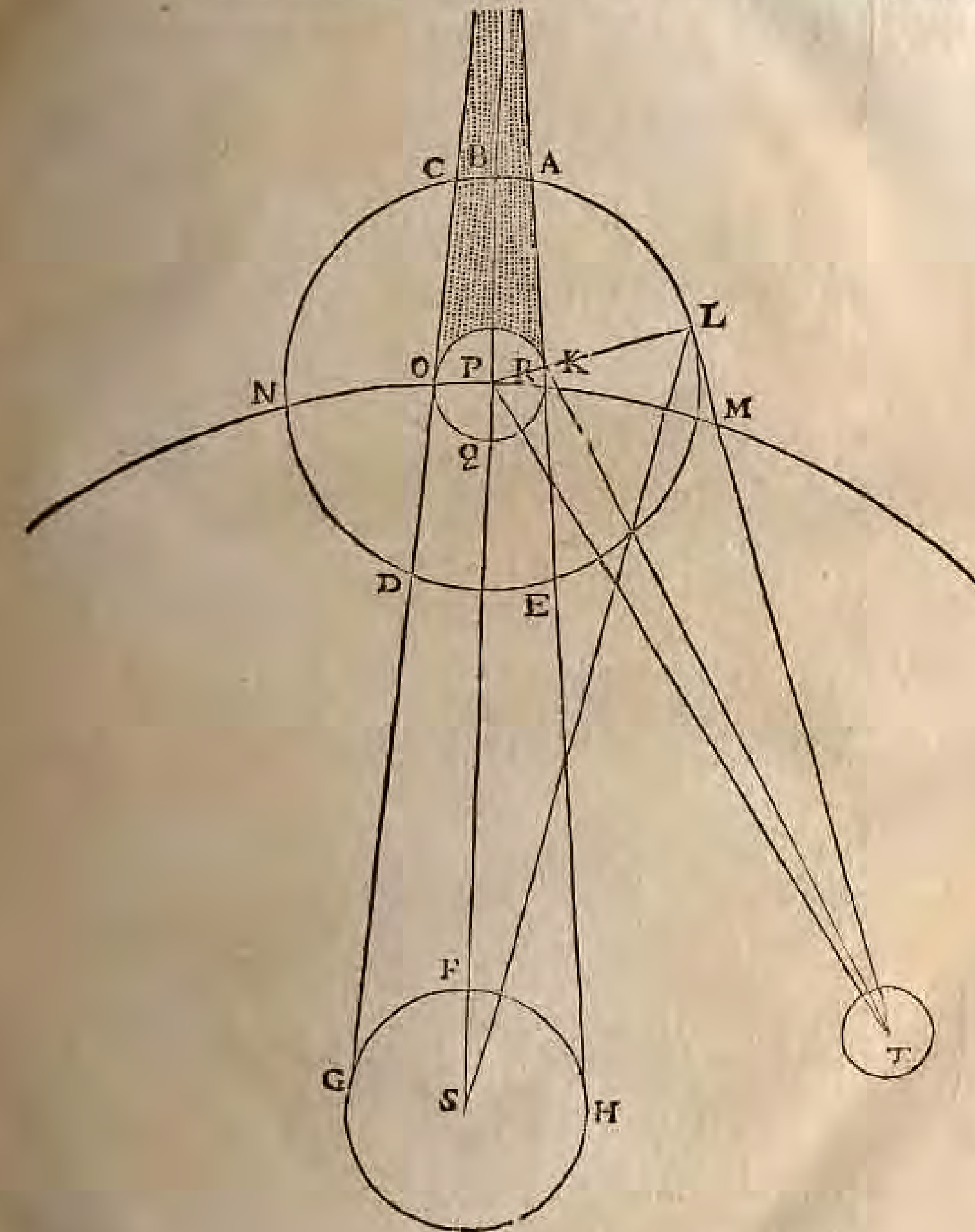
(f) *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum ab ipsius centro.*

(f) 51. * *Planetæ circumjoviales.* Lemma ..... Satellitum Jovis & Saturni orbes ac motus determinare.

Sit HFGH Sol, cujus centrum S, T Terra; KOQ Jupiter vel Saturnus circà Solem S describens orbitam MPN, ACDEL orbita satellitis; radii Solis extremi GO, HR paulo plusquam dimidium planetæ P illustrant, & producti umbram conicam R A C O terminant, cujus axis est recta SPB per Solis & Planetæ centra transiens. Dum satelles in orbitâ suâ L C D E girans, conum umbrosum attingit in A, in umbram immergitur & cessat videri; deinde ex umbrâ emergens in C rursus apparet. Attamen satellitum Saturni, ob nimiam illorum à Sole & Tellure distantiam, eclipses observari hoc usque non potuerunt, sed omnium satellitum Jovis eclipses è terrâ conspici possunt, cum hoc tamen discrimine quod immersiones & emersiones quarti & tertii & nonnunquam secundi in eâdem eclipsi cernantur, primi verò immersio tantum vel emersio observari possit. Sit jam satelles in L, & ductis è terrâ T rectis TP, TL, angulus PTL, dicitur elongatio seu digressio geocentrica satellitis L à Planetâ primario P. Ducatur etiam recta TK discum primarii Planetæ tangens in K, & angulus PTK erit semidiameter primarii è tellure visâ seu apparens, ideóque elongatio geocentrica erit ad semidiametrum apparentem ut angulus PTL ad angulum PTK. Observatis pluribus hujusmodi elongationibus geocentricis & semidiametris apparentibus, iisque inter se collatis, inveniuntur elongationes maximæ ubi ratio anguli PTL ad angulum PTK maxima est, & hoc modo observatum est elongationes maximas geocentricas ejusdem satellitis in variis orbitæ suæ locis æquales esse inter se quam proximè, ideóque satellites describunt circulos Planetæ primario concentricos. Quia ergò, ubi elongatio maxima est, PK est quamproximè ad PL, ut angulus PTK ad angulum PTL, ob datam rationem horum angulorum & datam quoque semidiametrum PK, datur & PL, seu distantia satellitis à centro primarii. Angulus PSL sub quo è centro Solis S videretur distantia satellitis à centro primarii P, dicitur ejus elongatio heliocentrica quæ maxima est, cum angulus SPL rectus est. Quia verò PL data est, elongationes maximæ heliocentrica & geocentrica æquales sunt, ubi planeta P à Sole & terrâ æquè distat.

Cognitis orbitarum diametris, tempora periodica satellitum inveniri possunt per eorum eclipses maximæ durationis, atque etiam per transitum satellitis aut umbræ illius per medium discum Planetæ primarii. Nam cum radius circuli sit æqualis arcui grad. 57.29578, (lib. 1. not. 372.) & data sit ratio radii PL ad diametrum Planetæ primarii OR, erit quamproximè ut PL ad OR, ità gradus 57.29578 ad numerum graduum arcûs exigui CA, qui ferè æqualis est diametro OR, ob parallelas OC, RA. Fiat deinde ut numerus graduum aut partium gradûs CA vel OR ad gradus 360, ità tempus quo describitur CA vel OR ad tempus periodicum satellitis, quod ità dabitur. Suppositâ Theo-

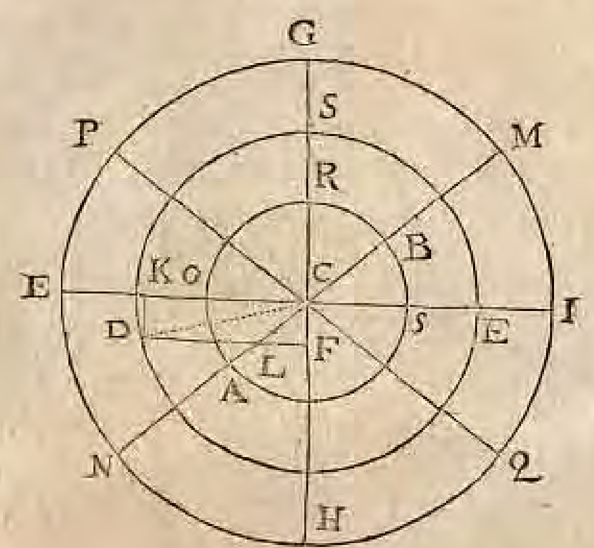
LIBER TERTIUS.



Theo-

DE MUNDI SYSTEMATE.

Theoriâ primarii Planetæ per observationes determinatâ, tempora periodica inveniuntur mensurando intervalla temporis inter duas satellitum conjunctiones, vel etiam inter duas digressiones maximas.



52. 52. Satellitum à centro Jovis distantias observandi & in diametri partibus æstimandi triplicem methodum describit Clariss. Cassinus in Elementis Astronomiæ anno 1740. editis.

1°. Sit ARB Jupiter, DSED orbita satellitis, micrometro capiatur diameter Jovis AB, deindè ubi satelles in maximâ elongatione versatur, capiatur distantia DC, inter centrum Jovis C, & satellitem D, quo facto, distantia DC, conferatur cum diametro Jovis, habebitur distantia satellitis à centro Jovis in partibus diametri.

2°. Adhibendum est telescopium in cujus foco aptantur fila quatuor, quorum duo GH, EI sese perpendiculariter secent, reliqua duo NM, PQ his ad angulos semirectos insistant in communi sectione C. Quibus itâ paratis dirigatur telescopium & continuò vertatur, donec centrum Jovis C, motu diurno unum ex his filis, putà EI, percurrere videatur, in quo situ filum GH circulum aliquem horarium repræsentabit. Observetur deindè differentia temporis inter appulsum centri Jovis & appulsum satellitis in maximâ suâ elongatione versantis ad eumdem circulum horarium GH, differentia temporis convertatur in gradus & minuta, itâ ut quatuor minutis horariis respondeat gradus unus, habebitur portio DF vel KC, circuli paralleli Jovis. Observetur etiam differentia temporis inter appulsum satellitis ad L, & appulsum ad F, quæ differentia simili modo in gradus circuli paralleli graduumque partes convertatur, habebitur LF, cui æqualis est FC, ob angulos LCF, FLC, semirectos. Datis verò DF & FC, datur DC. Jam conferatur DC, cum diametro Jovis AB vel OS, cujus diametri mensura habebitur, si tempus quo diameter per filum horarium GH, transit in gradus & minuta convertatur, utriusque diametri DC, OC obtinebitur ratio, & eorumdem absoluta magnitudo in gradibus circuli maximi sphæræ habebitur, gradibus circuli paralleli Jovis ad gradus circuli maximi reductis, dicendo, ut radius circuli maximi ad radium paralleli, itâ numerus graduum & minutorum in arcu circuli paral-

LIBER TERTIUS: PHÆNOMENA.

Constat ex observationibus astronomicis. (g) Orbes horum planetarum non differunt sensibiliter à circulis jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica esse in sesquiplicatâ ratione semidiametrorum orbium consentiunt astronomi; & idem ex tabulâ sequente manifestum est.

(h) *Satellitum jovialium tempora periodica.*

$1^d.18^h.27'.34''$ $3^d.13^h.13'.42''$. $7^d.3^h.42'.36''$. $16^d.16^h.32'.9''$.

(i) *Distantiæ satellitum à centro jovis.*

Ex observationibus.	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini *per telescop.*	5	8	13	23	
Cassini *per eclips. satell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
(l) *Ex temporibus periodicis.*	5,667	9,017	14,384	25,299	

Elon-

paralleli ad numerum graduum & minutorum in arcu circuli maximi. Nam in circulis inæqualibus, gradus qui æqualibus arcubus continentur esse reciprocè ut circulorum radios ex elementis patet.

3°. In Eclipsibus Satellitum centralibus, dum nempe duratio est omnium maxima, observetur tempus quod ab ingressu centri satellitis in discum Jovis usque ad illius egressum interfluxit. Deinde fiat, ut tempus periodicum satellitis ad tempus moræ in disco Jovis, itâ 360° ad quartum proportionalem, hoc est, ad gradus quos continet arcus æqualis disco Jovis satellitis orbitæ applicato. Iterum (ex trigon.) infertur, ut sinus semissis ejusdem arcûs ad sinum totum, itâ semidiameter Jovis ad semidiametrum orbitæ satellitis, idemque comparari poterit semidiameter Jovis cum semidiametro orbitæ satellitis, hoc est, cum distantiâ satellitis à centro ac proinde habebitur distantia satellitis à centro Jovis in partibus semidiametri Jovis.

Quod Saturnum spectat, solis oculis Telescopio adjutis distantias satellitum à centro Saturni cum diametro annuli comparare solent Astronomi. 52.

(g) * *Orbes horum planetarum* (51).

(h) * *Satellitum Jovialium tempora periodica* (ibid.).

* In novissimo Cassini Opere suprà laudato tempora Periodica paulo majora constituuntur, scilicet, primus Satelles, 62", 2^{us}. Sat., 4' 12"; 3^{us}. Sat., 17'; 4^{us}. Sat., 1^h, 32', 58", tardius revolutiones suas absolvere statuuntur; illæ autem differentiæ totius temporis Periodici respectu minimæ sunt, maximæ enim differentiæ non excedunt trecentesimam partem durationis totius revolutionis.

(i) * *Distantiæ satellitum à centro Jovis* (52).

(l) * *Ex temporibus periodicis.* Newtonus computum iniit hoc modo. Assumpsit distantiam observatam primi Satellitis $5\frac{2}{3}$, seu 5'667, & deinde per tempora periodi-

riodi-

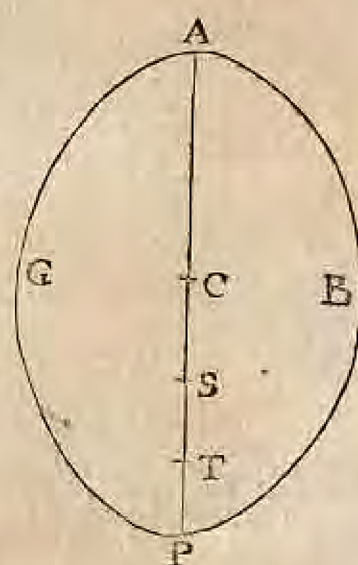
DE MUNDI SYSTEMATE.

Elongationes ſatellitum jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit ut ſequitur. (m) Elongatio maxima heliocentrica ſatellitis quarti à centro jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit, & prodiit in mediocri jovis à terrâ diſtantiâ 8′. 16″ circiter. Ea ſatellitis tertii micrometro in teleſcopio pedes 123 longo capta fuit, & prodiit in eadem jovis à terrâ diſtantiâ 4′. 42″. Elongationes maximæ reliquorum ſatellitum in eâdem jovis à terrâ diſtantiâ ex temporibus periodicis prodeunt 2′. 56″. 47‴, & 1′. 51″. 6‴.

Diameter jovis micrometro in teleſcopio pedes 123 longo ſæpius capta fuit, & (n) ad mediocrem jovis à ſole vel terrâ

52. riodica etiam obſervata quæſivit aliorum Satellitum diſtantias, ſupponendo quadrata temporum periodicorum cubis diſtantiarum proportionalia. Nam ſi Logarithmi temporum periodicorum primi & ſecundi Satellitis dicantur l, L, & Logarithmi diſtantiarum d, D, erit $2l$ ad $2L$, arithmetice ut $3d$ ad $3D$, ideóque $2l + 3D = 2L + 3d$, undè invenitur $D = d + \frac{2L}{3} - \frac{2}{3}l$. Eſt autem $d = 0{,}7533532$, $\frac{2}{3}L = 2{,}324591$, & $\frac{2}{3}l = 2{,}1228512$, quare habetur $D = 0{,}955093$, cui reſpondet numerus 9,07, uti Newtonus invenit; & ità inveniuntur cæterorum Satellitum diſtantiæ per eorum tempora periodica.

(m) 53. * *Elongatio maxima heliocentrica* ſatellitis in mediocri Jovis à Sole diſtantiâ æqualis eſt ipſius elongationi maximæ geocentricæ in mediocri diſtantiâ ejuſdem Jovis à Terrâ. Sit enim ABPG orbita Jovis, Sol in S, A aphelium Jovis; P perihelium, T Terra, erit AS maxima diſtantia Jovis à Sole, SP minima; AT verò maxima diſtantia Jovis à Terrâ; PT minima, & ideò mediocris diſtantia Jovis à Sole ſeu $\frac{1}{2}$ AP $= \frac{1}{2}$ AS $+ \frac{1}{2}$ SP, & mediocris diſtantia Jovis à Terrâ erit $\frac{1}{2}$ AT $+ \frac{1}{2}$ TP $= \frac{1}{2}$ AP. Quarè duæ illæ mediocres diſtantiæ ſunt æquales, ideóque elongationes maximæ heliocentricæ & geocentricæ in mediocribus illis diſtantiis ſunt etiam æquales.



(n) 54. * *Et ad mediocrem Jovis à Sole.* Datur poſitio lineæ ductæ ab oculo ſpectatoris ad Jovem tempore obſervationis,

LIBER TERTIUS. PHÆNOMENA.

râ diſtantiam reducta, ſemper minor prodiit quam 40″, nunquam minor quam 38″, ſæpius 39″. In teleſcopiis brevioribus hæc diameter eſt 40″ vel 41″. (o) Nam lux jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum jovis in longioribus & perfectioribus teleſcopiis quam in brevioribus & minus perfectis. Tempora

nis, & per theoriam Solis, datur etiam poſitio lineæ ductæ ab oculo ad Solem (47) eodem tempore; unde datur angulus his duabus lineis interceptus, ſeu elongatio Jovis à Sole. Inſuper datur, per theoriam Jovis, locus ejus in propriâ orbitâ, & ideò notus eſt angulus quem comprehendunt duæ lineæ à centro Solis ductæ ad Jovem & ad Terram ſeu oculum obſervatoris. In triangulo igitur ex tribus illis lineis facto cujus angulus unus eſt in oculo ſpectatoris ſeu in Terrâ, alter in Sole & tertius in Jove, dantur anguli omnes & exinde datur ratio laterum ſeu ratio diſtantiæ Jovis à Sole ad diſtantiam Jovis à Terrâ tempore obſervationis. Datur verò, per theoriam Jovis ex obſervationibus conſtitutam, ratio diſtantiæ Jovis à Sole tempore obſervationis ad ipſius diſtantiam mediocrem à Sole vel à Terrâ. Quarè datur ratio diſtantiæ Jovis à Terrâ tempore obſervationis ad diſtantiam ejus mediocrem à Sole vel à Terrâ. Sed diametri apparentes Jovis è Terrâ viſi ſunt inter ſe inverse ut diſtantiæ Jovis à Terrâ, dabitur itaque ratio diametri apparentis tempore obſervationis ad diametrum apparentem in mediocri diſtantiâ Jovis à Terrâ vel Sole.

(o) 55. * *Nam Lux Jovis.* Newtonus prop. 7. lib. 1. optices experimentis & calculo invenit quod, ſi ex puncto lucido in axem teleſcopii poſito ad ingentem diſtantiam, radii in vitrum objectivum incidant axi paralleli, diſtincta & minima hujus puncti imago in vitri foco depicta, eſt circulus, non verò punctum ut eſſe deberet, obſtante nimirum non tantum vitri ſphæricitate, ſed præcipuè radiorum inæquali refrangibilitate quâ Lux ea dilatatur. Nam in vitro plano convexo cujus convexitas puncto lucido obvertitur cujuſque ſphæricitas diametrum habet 100 ped. ſeu 1200 digit. apertura verò 4 digit. diameter circelli qui ex vitri ſphæricitate oritur erit ad diametrum ejuſdem circelli maxime diſtincti qui ex inæquali refrangibilitate provenit ut $\frac{961}{72000000}$ ad $\frac{4}{250}$, ſeu ut 1 ad 1200; diſtincta ſiquidem ejus puncti lucidi imago & maxime ſplendida continet partem 250am. aperturæ vitri objectivi optime elaborati, neglectâ luce debili & ſubobſcurâ quæ imaginem illam circumdat. Unde in Teleſcopio cujus apertura eſt 4 digit. & longitudo 100 ped. hujus imaginis diameter trans vitrum oculare viſa occupat 2″ 45‴ vel 3″, & in Teleſcopio cujus apertura eſt duorum digitorum & longitudo 20 aut 30 ped. occupabit imago 5″ vel 6″. Itaque in Teleſcopio optimo Hugeniano 123 ped. error erit circiter 2″ in minoribus major. [55]

* In Teleſcopiis autem recte conſtitutis ſive ſecundum Theoriam Prop. 56. Dioptrices Hughenii, id curatur ut aberratio lucis circa imaginem puncti lucidi æquale occupet ſpatium ſuper retinâ, ſed imago ipſius objecti in Teleſcopiis majoribus majus occupat ſpatium in retina idque ſecundum rationem Radicum quadratarum longitudinis Teleſcopiorum, Ergo lux erratica quæ dilatat objecti imaginem ab utraque ejus extremitate, minorem habet rationem ad illius objecti apparentiam in majoribus Teleſcopiis quam in minoribus, in ratione nempe inversâ Radicum quadratarum longitudinis Teleſcopiorum.

Hæc omnia ex Doctrina Newtonianâ circa colores ita jam ſunt cognita ut ea fuſius & accuratius demonſtrare neceſſarium non judicemus.

56

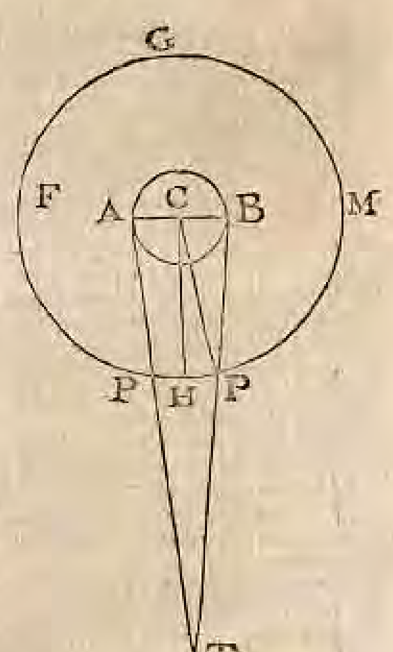
DE MUNDI SYSTEMATE.

pora quibus ſatellites duo, primus ac tertius, tranſibant per corpus jovis, ab initio ingreſſus ad initium exitus, & ab ingreſſu completo ad exitum completum, obſervata ſunt ope teleſcopii ejuſdem longioris. Et (P) diameter jovis in mediocri ejus à terrâ diſtantiâ prodiit per tranſitum primi ſatellitis $37\frac{1}{8}''$, & per tranſitum tertii $37\frac{3}{8}''$. Tempus etiam quo umbra primi ſatellitis tranſiit per corpus jovis obſervatum fuit, & inde diameter jovis in mediocri ejus à terrâ diſtantiâ prodiit $37''$ circiter. Aſſumamus diametrum ejus eſſe $37\frac{1}{4}''$ quamproximè; & elongationes maximæ ſatellitis primi, ſecundi, tertii, & quarti æquales erunt ſemidiametris jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 reſpectivè.

PHÆ-

56. 56. Hugenius planetarum lucem obſtaculo quodam intercipiens majores invenit planetarum diametros quam ab aliis micrometro definitum eſt; nam lux erratica, ubi tegitur planeta, vividioribus radiis minus extenuatur, ideóque latius propagari videtur. Contrariam ob cauſam fit quod planetæ in Sole viſi, dilatatâ luce non parum attenuentur. Mercurius in Sole Hevelio, Galletio & Halleio obſervantibus, non ſuperavit 12″ vel 15″, & Venus Crabtrio ſolum 1′ 3″, Horroxio 1′ 12″ occupare viſa eſt, quæ tamen juxtà menſuras Hevelii & Hugenii extrà diſcum Solis captas implere debuiſſet 84″ ad minimum. Sic & Lunæ diameter apparens quæ anno 1684, paucis diebus ante & poſt Eclipſim Solis menſurata fuit in obſervatorio Pariſienſi 31′ 30″, in ipsâ Eclipſi non ſuperabat 30′ vel 30′ 5″. Quare patet diametros planetarum extrà Solem minuendas eſſe & intrà Solem augendas minutis aliquot ſecundis.

(p) 57. * *Et diameter Jovis in mediocri &c.* Sit T tellus, AB diameter Jovis, PFGM orbita ſatellitis, ductis è terrâ radiis TA, TB ferè parallelis, dum ſatelles deſcribit arcum Pp, videbitur è terrâ deſcribere diametrum Jovis AB cui æqualis eſt arcus Pp quamproximè, propter diſtantiæ TP magnitudinem. Datis autem tempore periodico & tempore quo deſcribitur Pp, datur ratio Pp ad totum circulum, ſeu datur arcus Pp, in gradibus vel partibus gradûs, & inde datur dimidius arcus PH, hincque habetur angulus PCH ſeu APC. Jam verò datur PC ob datas per obſervationem elongationes maximas ſatellitum à centro Jovis in mediocri Jovis à Tellure diſtantiâ; quare ſi fiat AB ad PC ut duplus ſinus anguli dati PCH, ad ſinum totum, dabitur (ex trig.) diameter apparens Jovis ſeu angulus ATB, ſub quo videtur in mediocri ejus à Tellure diſtantiâ. Eodem modo patet determinari diametrum Jovis per tranſitum umbræ hanc diametrum percurrentis.



LIBER TERTIUS. PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON II.

Planetas circumſaturnios, radiis ad ſaturnum ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro.

(†) *Caſſinus* utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum à centro Saturni & periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

Satellitum ſaturniorum tempora periodica.

$1^d.\ 21^h.\ 18'.\ 27''$. $2^d.\ 17^h.\ 41'.\ 22''$. $4^d.\ 12^h.\ 25'.\ 12''$. $15^d.\ 22^h.\ 41'\ 14''$. $79^d.\ 7^h.\ 48'.\ 00''$.

Diſtantiæ ſatellitum à centro Saturni in ſemidiametris annuli

Ex obſervationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis.	1,93	2,47.	3,45.	8.	23,35.

Quarti ſatellitis elongatio maxima à centro Saturni ex obſervationibus colligi ſolet eſſe ſemidiametrorum octo quamproximè.

(†) *Caſſinus utique &c.* Hæc ex Philoſophicis Tranſactionibus n. 187. ſunt deprompta: Exigua quædam eſt horum differentia à numeris quos in Elementis Aſtronomiæ aſſignat Caſſinus filius, ille ita determinat ſatellitum Sat. Tempora Periodica, & diſtantias.

Primi	$1^d.\ 21^h.\ 18'.\ 27''$.	1. 933. &c.
Secundi	$2^d.\ 17^h.\ 44'.\ 22''$.	2. 5.
Tertii	$4^d.\ 12^h.\ 25'.\ 12''$.	3. 52
Quarti	$15^d.\ 22^h.\ 34'.\ 38''$.	8.
Quinti	$79^d.\ 7^h.\ 47'.\ 0''$.	23. paulo plus.

59. Obſervat autem primi & ſecundi ſatellitis diſtantias à Saturno æſtimatione ſolummodo potuiſſe determinari; motibus verò eorum ſatis accurate nunc cognitis ex unius nempe quarti cognitâ diſtantiâ 8 ſemi-Diametrorum annuli per Regulam Kepleri reliquorum diſtantias poſſe exquiri, atque ita inveniri.

Diſtantia primi	1. 93.
Secundi	2. 47.
Tertii	3. 45.
Quarti (ex obſervat.)	8.
Quinti	23. 23.

Quæ quidem, inquit, adeò congruunt cum obſervationibus immediatis ut ſine errore ſenſibili adhiberi poſſint. *Elem. Aſt. Tom. I. pag. 640. & ſeq.*

C

DE MUNDI SYSTEMATE.

mè. At elongatio maxima satellitis hujus à centro saturni, micrometro optimo in telescopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit semidiametrorum octo cum septem decimis partibus semidiametri. Et ex hâc observatione & temporibus periodicis, distantiæ satellitum à centro saturni in semidiametris annuli sunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem telescopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, & diameter annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719. prodiit 43″. Et (q) inde diameter annuli in mediocri saturni à terrâ distantiâ est 42″, & diameter saturni 18″. (r) Hæc ita sunt in telescopiis longissimis & optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœlestium in longioribus telescopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem lucis in terminis illorum corporum quam in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter saturni haud major quam 16″.

PHÆ-

57. (q) * *Et inde diameter annuli.* Quia diametri apparentes sunt in distantiarum ratione reciprocâ, datis diametro annuli diebus Maii 28 & 29 anno 1719, & distantiâ Saturni à terrâ iisdem diebus datâ (per theoriam planetæ) dabitur quoque diameter annuli in datâ mediocri distantiâ Saturni à terrâ; hæc autem diameter prodiit 42″; sed Saturni diameter erat ad diametrum annuli ut 3. ad 7 (per obs.) quare diameter Saturni in mediocri à terrâ distantiâ est 18″.

(r) * *Hæc ità sunt* (55). * Si in hoc Telescopio Lux erratica subtendat angulum duorum secundorum, fiet diameter annuli 40″ & Saturni 16″ ut revera sint in ratione 5 ad 2, hinc autem ut id obiter notemus cum Parallaxis Solis in distantiâ terræ mediocri à Sole sit 10″ sive diameter Telluris à Sole tunc visa sit 20″, distantia verò mediocris terræ à Sole sit ad mediocrem distantium Saturni à Terrâ vel à Sole, quod idem est (n. 53.) ut 100 ad 954, hinc Diameter terræ erit ad Diametrum annuli ut 100 ad 1908, sive ut 1 ad 19 & ad Diametrum ipsius Saturni ut 1 ad $7\frac{3}{5}$.

Pariter, cum Diameter Jovis in mediocri ejus à Sole distantiâ sit $37\frac{1}{4}$″ sitque mediocris distantia terræ ad mediocrem distantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52, erit Diameter terræ, ad Diametrum Jovis ut

$$1 \text{ ad } \frac{52 \times 37\frac{1}{4}}{200}.$$ Sive ut 1 ad 9. 685;

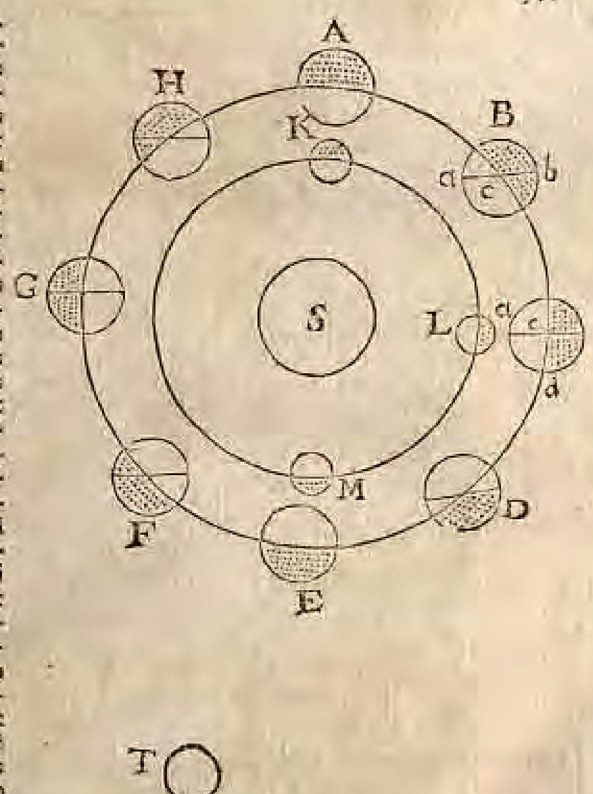
sicque Diameter Jovis est circiter dimidia Diametri annuli Saturni & est ad ipsius Saturni Diametrum ut 5 ad 4. Solis autem Diameter vera est circiter Decupla Diametri Jovis.

LIBER TERTIUS. PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios mercurium, venerem, martem, jovem & saturnum orbibus suis solem cingere.

Mercurium & venerem circa solem revolvi ex (s) eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra solem siti sunt; dimidiatâ è regione solis; falcatâ cis solem, per discum

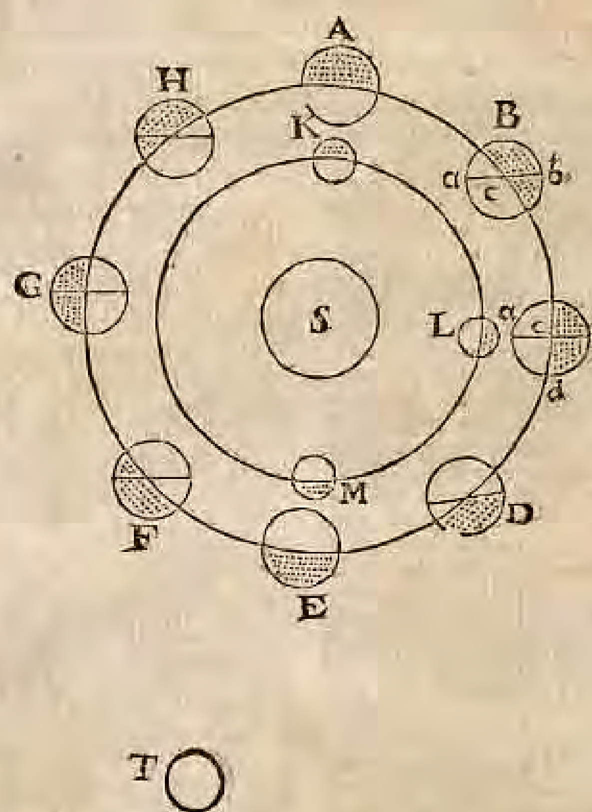


57. (s) * *Ex eorum phasibus Lunaribus.* Si Veneris faciem telescopio contemplemur, in unâ ejus conjunctione cum Sole plenâ facie fulgere cernitur, deinde phases habere phasibus Lunaribus simillimas partemque illuminatam Soli constanter obvertere videtur. Dum verò ad alteram conjunctionem cum Sole pervenit, tenebris obvolvitur & nonnunquam per discum Solis ad modum maculæ nigræ & rotundæ transit, nunquam verò Soli opponitur neque ab eo digreditur ultrà gradus 47. Eadem ferè de Mercurio observantur quantùm licet per ejus exiguitatem cum hoc tamen discrimine quod ejus elongationes maximæ à Sole 28 gradus nunquam superent. Sunt igitur Venus & Mercurius corpora opaca & rotunda quorum pars circiter dimidia Soli obversa illustratur & pars altera à Sole aversa lumine privatur. Undè cum Venus & Mercurius in unâ conjunctione in E vel M hemisphærium obscurum telluri T obvertant, hemisphærium verò illustratum Soli S, necesse est ut in illâ conjunctione inter solem & tellurem constituantur; è contrà ubi in alterâ proximè sequenti conjunctione in A vel K versantur, totam faciem illustratam & Soli obversam è tellure T, observamus, hinc necesse est ut tunc temporis Sol S, inter ipsos atque tellurem T positus sit. Ubi verò Venus aut Mercurius à Sole digreditur, primum gibbosa apparet, tum dimidiatâ facie lucet, posteà falcata fit & denique tota obscuratur ut in locis B, C, D, E, & contrariâ ratione splendescere in locis, F, G, H videtur. Si verò ex tellure T, ad Veneris centrum ducatur linea recta ad quam ducatur planum perpendiculare a b, per centrum Veneris transiens, ea pars tantum apparet quæ est inter planum a c, & planum c d, unde cum projectio plani C c d, sit ellipsis, hinc gibbosa apparet planetæ pars visa in B, in C dimidiata & in D, falcata &c., quia à puncto A, con-

De Mundi Systemate.

discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex martis quoque plenâ facie prope solis conjunctionem, & gibbosâ in quadraturis, certum est, quod is solem ambit. De jove etiam & saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur: hos enim luce à sole mutuatâ splendere ex umbris satellitum in ipsos projectis manifestum est.

PHÆ-



57\. Conjunctionis superioris cum Sole, elongatio seu angulus ATB, crescit usque ad situm C è regione Solis, ubi digressio maxima est & deinde decrescit in D, atque evanescit in E, ac posteà rursùs crescit usque ad G, ac deindè decrescit & denique rursùs evanescit in A. Evidens ergò est quod Venus & Mercurius circà Solem revolvantur in orbitis quæ tellurem excludunt. Jam cum maximæ elongationes Veneris à Sole majores sint elongationibus maximis Mercurii, necesse est ut orbita Veneris orbitam Mercurii complectatur.

Mars, Jupiter & Saturnus Soli S oppositi, è tellure M in E plenâ facie lucentes conspiciuntur, ideóque tellus tunc temporis inter solem & planetas illos collocatur.

Liber Tertius. Phænomena.

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & vel solis circa terram vel terræ circa solem tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ mediocrium distantiarum à sole.

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confesso est apud omnes. (t) Eadem utique sunt tempora periodica, eædemque orbium dimensiones, sive sol circa terram, sive terra circa solem revolvatur. Ac de mensurâ quidem temporum periodicorum convenit inter astro-

locatur. At verò in conjunctione ut in A, iidem planetæ pleno orbe fulgent, proindéque partem illustratam soli ac terræ obvertentes, sunt ultra solem positi; deindè verò digrediuntur à Sole & Mars quidem in quadrato cum Sole aspectu ut in C, aliquantulùm gibbosus apparet, quod hemisphærium ipsius illustratum & soli obversum non possit totum terræ sensibiliter obverti, quia non satis magna est ejus à tellure distantia. At Jupiter & Saturnus cum longiùs à Sole & tellure distent, hemisphærium illuminatum Soli ac telluri semper obvertunt sensibiliter; nam cum (ex obs.) Mars Jovem & Jupiter Saturnum nonnunquam tegant, necesse est ut orbita Saturni orbitam Jovis & hæc orbitam Martis complectatur, tres verò orbitæ illæ terram & solem ambiant. Quia verò diametri apparentes planetarum superiorum multò minores videntur in oppositionibus quam in conjunctionibus planetarum, & distantiæ à terrâ sunt ut diametri apparentes inversè, necesse est ut orbitæ Martis, Jovis & Saturni sint telluri admodum excentricæ.

(t) 58. * *Eadem utique sunt tempora periodica.* Tempora periodica planetarum circà solem hoc modo possunt inveniri. Observentur planetarum oppositiones & conjunctiones cum Sole, tunc enim planeta e Sole videtur in loco qui oppositus est loco Solis è terrâ visi, unde dato Solis loco datur planetæ locus in cœlo. Jam verò observatis pluribus oppositionibus cum temporum intervallis inter singulas oppositiones interceptis, datur tempus quo planeta circa solem motu vero describit angulos ad solem inter oppositiones contentos & per regulam proportionis habetur tempus quo planeta 360 gradus seu revolutionem unam absolvit. Tempore periodico ità crassè determinato, habetur numerus revolutionum planetæ tempore satis longo peractarum. Si autem capiantur duæ oppositiones valdè dissitæ iisque addatur arcus necessarius ut planeta ad idem orbitæ suæ punctum redeat, totumque tempus dividatur per numerum revolutionum, habebitur tempus periodicum accuratiùs, supponendo quod aphelia planetæ non aliter moveantur quam fixæ. Sufficit verò in his Newtoni Phænomenis ut hæc tempora, neglectis minutiis, definiantur. 58.

Potest etiam tempus periodicum determinari per observationes latitudinum planetæ. Nam dum latitudo nulla est, planeta versatur in plano Eclipticæ, seu in nodo orbitæ suæ; invenitur autem tempus, ubi latitudo nulla est, observando illam antequam nulla fit & ubi decrescit, aut postquam nulla fuit & ubi crescit, atque per regulam proportionis ex incrementis vel decrementis, determinatur tempus, quandò nulla fuit. Si itaque observetur hoc modo tempus elapsum inter appulsum planetæ ad nodum & reditum ejusdem ad eundem nodum, hoc erit tempus periodicum planetæ; constat enim planetarum nodos vix in unâ revolutione planetæ moveri.

59\. Longitudo ac latitudo planetæ ob-astronomos universos. Magnitudines autem orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentissimè ex observationibus determinaverunt: & distantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non differunt sensibiliter à distantiis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermediæ; uti in tabulâ sequente videre licet.

Planetarum ac telluris tempora periodica circa solem respectu fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

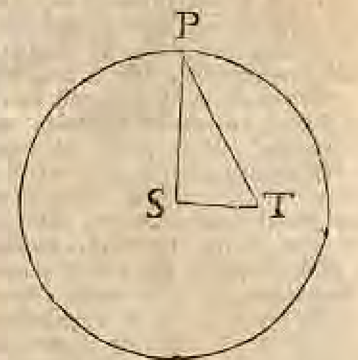
Planetarum ac telluris distantiæ (u) *mediocres à sole.*

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

De

59. servari possunt (per not. 17. 18. 20.) & indè determinatur tempus Syzigiarum, cum videlicet longitudo planetæ non differt à longitudine solis quo tempore fit conjunctio, vel differt semicirculo ut in oppositione. Quod Mercurium spectat, determinatur ipsius conjunctio inferior cum sole per ipsius transitum in disco solis qui vicibus octo observatus fuit, dum transitus Veneris semel tantum visus est, in his vero non supponitur telluris motus nec quies. Determinato tempore periodico planetæ, habetur motus ejus medius in orbitâ & ex observatis pluribus locis planetæ è Sole visis per oppositiones vel conjunctiones aut per digressiones, dantur etiam ipsius motus veri, ac proindè dantur differentiæ inter motus veros & motus medios. Indè verò determinantur aphelia & perihelia planetarum cum ipsorum excentricitate, atque construi possunt tabulæ per quas tempore quolibet inveniri potest eorum locus in propria orbitâ. Quæ omnia quomodò ex observationibus determinari possint independenter ab hypothesibus tom. 1. Element. Astronom. exposuit celeberrimus Cassinus.

(u) 60. * *Distantiæ mediocres à Sole.*



Planetarum distantiæ à Sole per observationes possunt definiri. Hic autem non quæruntur absolutæ distantiæ planetarum à Sole, sed solummodò rationes illarum distantiarum ad distantias solis à tellure. Itaque sit Sol in S, terra quiescens vel mota in T, planeta in P; observetur locus planetæ in cœlò, & per theoriam solis, dabitur locus solis tempore observationis seu positio lineæ TS, unde datur angulus STP. Quæratur etiam locus plane-

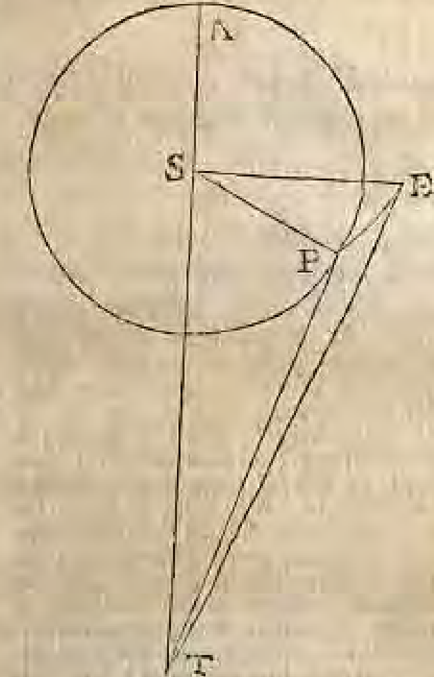
tæ

(x) De distantiis mercurii & veneris à sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum elongationes à sole determinentur. De distantiis etiam superiorum planetarum à sole tolli-

tur

tæ P, in propriâ orbitâ per theoriam planetæ, & quia datur locus terræ T è Sole visus atque locus planetæ P, dabitur angulus PST. In triangulo igitur PST, dantur tres anguli ac proinde datur etiam ratio laterum PS & ST, sed, per theoriam solis, datur ratio ST ad mediocrem distantiam Solis à terrâ, & per theoriam planetæ P, datur ratio distantiæ SP, ad mediocrem distantiam planetæ à Sole, ergò dabitur ratio distantiæ mediocris planetæ à Sole ad distantiam mediocrem solis à terrâ. Negligimus autem minutias quæ ex inclinatione orbium planetarum ad eclipticam oriri possunt, & prætereà observationes possunt fieri dum planeta est prope nodos, ubi ferè in plano Eclipticæ versatur. 61.

(x) 61. * *De distantiis Mercurii & Veneris.* Sit ABP orbita Veneris, S Sol, Terra T, Venus P in maximâ suâ elongatione. Quia orbita Veneris est ferè circularis, linea TP tanget orbitam in P, ideoque angulus SPT, rectus. Undè est ut sinus totus ad sinum elongationis maximæ seu anguli observati STP, ita distantia Solis à Terrâ ST ad distantiam SP, Veneris à Sole. Supponitur autem orbita circularis, quia Venus nunquam digreditur à Sole ultrà 47° 30′ & ejus elongationes maximæ nunquam minores sunt gradibus 45° 30′. Quare angulus SPT est ferè rectus. Si verò considerare velimus inclinationem orbitæ Veneris, sit latitudo Veneris ex tellure observata PTE, è Sole visa PSE, E punctum in Ecliptica, erit ut PS ad PT, ita tangens latitudinis PTE, ad tangentem latitudinis PSE. Nam ob angulos EPT & EPS rectos, est PT ad PE ut sinus totus ad tangentem anguli PTE; & similiter PS ad PE ut sinus totus ad tangentem anguli PSE, ideoque ut PS ad PT, ita tangens anguli PTE ad tangentem anguli PSE, quare dabitur angulus iste cum recto EPS, & ideò erit SP ad SE ut sinus anguli SEP, complementi PSE ad rectum ad sinum anguli PSE, dabitur ergò SE, seu ratio ejus ad ST, sicque observatis variis distantiis SP, dabitur mediocris, quia verò datur ratio ST ad mediocrem distantiam Solis à terrâ tempore observationis, dabitur ratio distantiæ mediocris Veneris ad distantiam mediocrem Solis à terrâ. Mercurii distantiæ à terrâ determinantur etiam per elongationes ejus maximas à Sole, sed quia orbita Mercurii est admodum excentrica, si Mercurius sit in P, in maximâ digressione, per observationem notus fit oportet angulus STP & per Theoriam motuum Mercurii angulus PST unde deducetur angulus TPS, quia angulus ille rectus non est, unde tandem cætera determinentur ut in Venere neglectis minutiis.



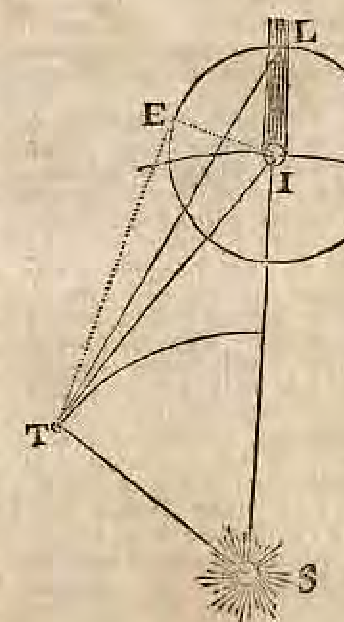
DE MUNDI SYSTEMATE.

tur omnis disputatio per eclipses satellitum jovis. (y) Etenim per eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ & geocentricâ inter se collatis determinatur distantia jovis.

PHÆ.

63. (y) 63. * *Etenim per Eclipses Jovis determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentricâ.*

* Sit S Sol; T terra; I Jupiter; L Satelles ejus per medium umbræ I L transiens: Ex Terrâ T observetur in partibus semi-Diametri Jovis, distantia centri Jovis à Satellite in umbram sese immergente & ex eâ emergente, medium inter eas distantias erit distantia à centro Jovis ad Satellitem in medio umbræ immersum in partibus semi-Diametri Jovis, eadem distantia in minutis & secundis observari poterit, eritque mensura anguli I T L; Ducatur T E tangens ad orbitam satellitis, & I E quæ erit in E T perpendicularis, quia cognoscitur ratio maximæ elongationis hujus satellitis ad semi-Diametrum Jovis, & hic habetur in secundis semi Diameter Jovis habebitur in secundis angulus I T E sub quo apparere deberet linea I E, si Satelles foret in maximâ suâ elongatione eo temporis momento; sed ex Trigonometricis, est sinus anguli I T E, ad sinum totum sive sinum anguli E, ut est I E ad T I, rursus in Triangulo T I L est I L (sive I E ipsi æqualis) ad T I ut sinus anguli observati I T L ad sinum anguli T L I; Itaque ut sinus anguli I T E ad sinum totum, ita sinus anguli I T L ad sinum anguli T L I sive TLS; unde in Triangulo T L S, cognito per observationem angulo S T L & invento ut



indicatum est angulo TLS, habetur angulus TSL, qui additus vel detractus è longitudine Heliocentricâ terræ dat Jovis Heliocentricam longitudinem. Q. E. I.

LIBER TERTIUS.

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad terram ductis, areas describere temporibus minimè proportionales; at radiis ad solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in periheliis ac tardius in apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est astronomis notissima, & (z) in jove apprimè demonstratur per eclipses satellitum, quibus eclipsibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & distantias à sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum à vi solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce phænomenis negligo.

(z) *Et in Jove apprimè demonstratur.* Nam per eclipses satellitum determinatur locus Jovis è Sole visus ejusque à Sole distantia, & ideò collatis plurium eclipsium observationibus, habetur motus verus Jovis in propriâ orbitâ circà Solem & orbita ipsa describi potest, undè quemadmodum de Sole diximus (43) patet Jovem describere areas temporibus proportionales circà Solem. 64.

De Mundi Systemate.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus suis retinentur, respicere centrum jovis, & esse reciprocè ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior propositionis per phænomenon primum, & propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per phænomenon primum, & corollarium sextum propositionis quartæ ejusdem libri.

Idem intellige de planetis qui Saturnum comitantur, per phænomenon secundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus suis retinentur, respicere solem, & esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior propositionis per phænomenon quintum, & propositionem secundam libri primi: & pars posterior per phænomenon quartum, & propositionem quartam ejusdem libri. Accuratissimè autem demonstratur hæc pars propositionis per (a) quietem apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicatâ (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) motum apsidum

62. (a) * *Per quietem apheliorum.* * Astronomi motus cœlestes calculant referendo Astra ad Eclipticam, cujus initium per interfectionem æquinoctis & Eclipticæ determinatur; sed illud initium fixum non est, & propter axis terræ nutationem intersectio illa in antecedentia fertur 51 circiter secundis singulo anno, hinc fixæ totidem secundis progredi videntur, Aphelia Planetarum etiam progredi videntur respectu ejus initii Eclipticæ, progreditur ergo singulo anno - - -

Liber Tertius. Prop. III. Theor. III.

sidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim, quâ luna retinetur in orbe suo, respicere terram, & esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior per phænomenon sextum, & propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per motum tardissimum lunaris apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium & minutorum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) quod si distantia lunæ à centro terræ sit ad semidiametrum terræ ut D ad 1; vis à quâ motus talis oriatur sit reciprocè ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id est, reciprocè ut ea

Aphelium terræ - - -	62''.
Saturni - - -	78''.
Jovis - - -	57''.
Martis - - -	72''.
Veneris - - -	86''.
Mercurii - - -	80''.

Sed multum abest quam ut ille Apheliorum motus, certissime determinetur, & uniformis esse deprehendatur; ex observationibus motûs Aphelii terræ nunc plus procedere quam 50'' nunc minus deprehenditur, unde quidam Astronomi non alium esse ejus motum præter motum ipsius initii Eclipticæ censent. Pariter ex observationibus Aphelii Saturni, ejus motus irregularis videretur, aliquando accelerari aliquando retrocedere, ex. gratia, ab anno 1694 ad finem anni 1708, minutis fere 73 retrocessisse testatur Cassinus. Aphelium Jovis ad motum fixarum proxime accedere videtur, &c. Unde constat, Aphelia quamproxime quiescere, & eam quantitatem exiguam motus ipsis assignati quæ excedit motum fixarum, forte observationum erroribus deberi, forte actioni mutuæ vicinorum Planetarum inter se; sic cum anno 1703 Saturnus & Jupiter conjuncti fuerint, & cum nonnisi quinque annis nonaginta gradibus à se mutuo discedant patet quod ab anno 1698 ad annum 1708 Jupiter inter Solem & Saturnum erat versatus, ejusque actio in Saturnum adjuncta fuerat actioni Solis in Saturnum; Posito autem quod reverâ vis Solis in Saturnum decrescat secundum quadrata distantiarum, & Jovis interpositione vim qualemcumque illi addi quæ X dicatur, ex Propositione XLV. primi Libri habebitur angulum Apsidis imæ cum summa esse $180^{gr.}\sqrt{\frac{1+X.}{1+3X}}$ sed $\frac{1+X}{1+3X}$ est fractio ideóque ille angulus est minor $180^{gr.}$ regreditur itaque Apsis ex his hypothesibus planè ut observatione constat: Unde non obscure colligitur Apheliorum fixarum respectu quies (semotis his accidentalibus causis) ac per consequens quod vires quibus Planetæ ad Solem retrahuntur sunt in duplicatâ distantiarum ratione accuratè, siquidem si vel unâ sexagesimâ parte, accederet ratio à duplicata ad triplicatam, Apsides tribus ad minimum gradibus progrederentur ut demonstratum fuit in fine 1. Coroll. Prop. 45æ. Lib. I. 62

DE MUNDI SYSTEMATE. ea ipſius D dignitas cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt, in ratione diſtantiæ paulo majore quam duplicatâ inversè, ſed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ proprius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione ſolis (uti poſthac dicetur) & propterea hic negligendus eſt. (b) Actio ſolis quâtenus lunam diſtrahit à terrâ, eſt (c) ut diſtantia lunæ à terrâ quamproximè; (d) ideoque (per ea quæ dicuntur in corol. 2. prop. XLV. lib. 1.) eſt ad lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglectâ ſolis vi tantillâ, vis reliqua quâ

621. (b) * *Actio Solis quâtenus Lunam diſtrahit à terrâ.* * Motus Apogæi Lunaris uniformis non eſt, ſed aliquando procedit, aliquando recedit, aliquando quieſcit, ſed ita ut omnibus compenſatis progrediatur, & octo aut novem annis 360. gr. percurrerit; Pariter & actio Solis quâ Lunam diſtrahit à terrâ non eſt continua, actio Solis Lunam à terrâ diſtrahit dum Luna à Syzygiâ non plus quam 55. gradibus hinc inde diſceſſit, circa quadraturas verò actio Solis cum terræ attractione conſentit, Lunamque ad terram attrahit, ſed tunc & debilior eſt & per pauciores gradus agit, quam circa Syzygias, hinc effectus qui reſultat pendet ex actione Solis quâ Luna diſtrahitur. (Lib. I. Prop. LXVI. Cor. 6. 7. 8. cum notis).

(c) * *Eſt ut diſtantia Lunæ à Terrâ quam proximè.* * Propter motum Telluris cum Lunâ circa Solem, omnia puncta Lunaris Orbitæ ſucceſſivè obvertuntur Soli, & verſantur in Syzygiâ, poſtea verò in quadraturâ, & cum ea orbita non ſit circulus cujus terra ſit centrum, patet puncta Syzygiarum & quadraturarum, nunc viciniora nunc remotiora fore terræ; Jam verò vis quâ Sol diſtrahit Lunam à terrâ, in Syzygiis, ſicut & vis quâ Sol Lunam attrahit terram verſus in Quadraturis creſcit ſecundum diſtantias Lunæ à terrâ, in iis autem punctis præcipua eſt Solis actio ad Apogæum Lunæ movendum, unde effectus reſultans pendebit à differentiâ earum actionum quæ erit ſicut diſtantia Lunæ à terrâ: Vel ut melius res concipiatur, fingatur Orbitam Lunæ cingi undique Solibus æqualiter à terrâ diſtantibus, ita ut ſingulum punctum Orbitæ Lunaris ſit ſimul in Syzygiâ & quadraturâ; cum actio Solis in Syzygiâ ſicut & actio Solis in quadraturâ ſit ut diſtantiæ Lunæ à terrâ, differentia earum actionum erit etiam ut diſtantia Lunæ à terra, ſed effectus differentiæ earum actionum erit idem ac id quod reſultabit ex tranſlatione dicti puncti per Syzygiam & poſtea per Quadraturam, hinc ſi motus Apogæi medius aſſumatur is pendebit ab actione quæ erit ut diſtantia Terræ à Lunâ; addit autem Newtonus quam proximè propter actionem in punctis inter Syzygias & quadraturas, ſed quæ parum hanc rationem turbant nam in punctis intermediis ubi actio quâ Luna diſtrahitur à Terra magis recederet ab hac ratione actiones compoſitæ ſeſe mutuò deſtruunt & in punctis à Syzygiis aut à quadraturis non remotis actio Solis ſequitur proxime eaſdem rationes ac in ipſis Syzygiis ac quadraturis; hinc actio Solis quâtenus Lunam diſtrahit à terra eſt proxime ut diſtantia terræ à Lunâ.

(d) * *Ideoque per ea quæ dicuntur in Cor. 2. Prop. XLV. Lib. I.* * Dicitur in eo Corollario, quod ſi ex vi decreſcente ſecundum quadrata diſtantiarum auferatur vis quæ creſcat ſecundum ipſas diſtantias, quæ ſit ad priorem ut 1 ad 357.45, motus progreſſivus Apogæi erit 1d. 31'. 28" in ſingulâ revolutione; motus autem progreſſivus Apogæi Lunaris eſt circiter duplo velocior, hinc vis illa ablatitiâ debet eſſe ad vim Lunæ centripetam ut 2 ad 357.45 ſive ut 1, ad 178.725

lunâ retinetur in orbe erit reciprocè ut D^2. Id quod etiam plenius conſtabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in propoſitione ſequente. LIBER TERTIUS. PROP. IV. THEOR. IV.

Corol. Si (e) vis centripeta mediocris quâ lunâ retinetur in orbe augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicatâ ſemidiametri terræ ad mediocrem diſtantiam centri lunæ à centro terræ: habebitur vis centripeta lunaris ad ſuperficiem terræ, poſito quod vis illa deſcendendo ad ſuperficiem terræ perpetuo augeatur in reciprocâ altitudinis ratione duplicatâ.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi ſemper à motu rectilineo, & in orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris à terrâ in ſyzygiis eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum *Ptolemæum* & pleroſque aſtronomorum 59, ſecundum *Vendelinum* & *Hugenium* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, ſecundum *Streetum* $60\frac{2}{5}$, & ſecundum *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones ſolis & lunæ (omnino (f) contra naturam lucis) majores quam fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, (g) auxerunt parallaxin lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecimâ vel decimâ quintâ parte

(e) * *Si vis centripeta mediocris.* Quoniam vis ablatitia Solis eſt ad vim centripetam Lunæ ut 1 ad $178\frac{29}{40}$, ſi vis ablatitia Solis ſit 1, erit vis centripeta Lunæ $178\frac{29}{40}$, ideòque detractâ vi ablatitiâ Solis, erit vis Lunæ quâ reverâ retinetur in orbitâ ſuâ per vim terræ minutam actione Solis $177\frac{29}{40}$. Quare ſi vis mediocris quâ Luna retinetur in orbe, augeatur in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, obtinebitur vera vis Lunæ centripeta, qualis foret ſi nulla eſſet actio Solis. Hinc poſito quod vis illa deſcendendo ad ſuperficiem terræ perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis ſeu diſtantiæ à centro terræ ratione duplicatâ, ut habeatur vis centripeta in ſuperficie terræ, dicendum eſt ut quadratum ſemidiametri terræ ad quadratum diſtantiæ mediocris centri Lunæ à centro terræ, ita vis centripeta ad quartum quod erit vis in ſuperficie terræ. 622.

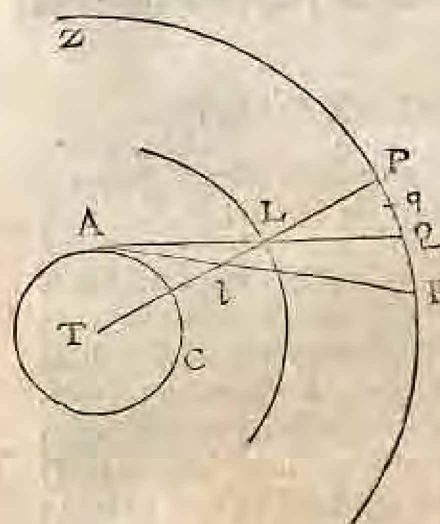
(f) * *Omninò contrà naturam lucis* (21).

(g) * *Auxerunt parallaxin Lunæ.* Tantum augeri parallaxim Lunæ quantum augetur refractio, patet ſi determinetur pa-

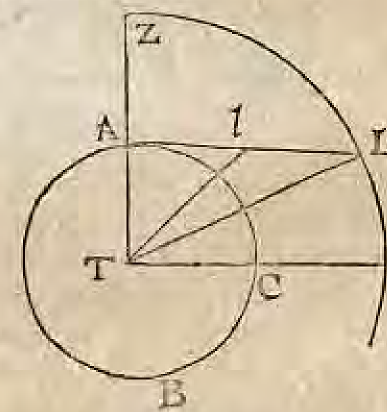
D 3 talla-

DE MUNDI SYSTEMATE.

te totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & (h) distantia evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium, ferè ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum in syzygiis; & lunarem periodum respectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab astronomis statuitur; atque ambitum terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti (i) à *Gallis* mensurantibus definitum est: &



62. rallaxis Lunæ, quod ità præstari potest. Sit ACT, tellus cujus centrum T, observetur altitudo meridiana centri Lunæ L ex loco A in Q à refractionibus libera, & ex tabulis eruatur pro tempore observationis longitudo & latitudo Lunæ; deinde (per trigon.) quæratur ipsius declinatio, habebitur ejus distantia à vertice Z seu locus P è terræ centro T visus, differentia PQ seu angulus PLQ aut æqualis ALT est parallaxis Lunæ. Porrò ut habeatur locus Q è loco A visus à refractione liber, quoniam refractio auget altitudinem, sit locus visus q, Qq metietur refractionem, unde arcus Qq, addendus est arcui Pq ut habeatur parallaxis tota PQ; si verò refractio major assumatur ut qR, parallaxis erit major nempè PR, quasi Luna esset in l; unde tantum augetur parallaxis quantum refractio ipsa.



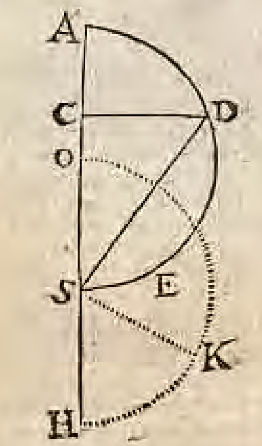
(h) * *Distantia evadet.* Sit T centrum terræ & angulus ALT parallaxis horizontalis mediocris. Ob angulum LAT rectum, erit semidiameter terræ AT ad distantiam mediocrem Lunæ à terrâ TL, ut sinus parallaxeos mediocris ad sinum totum. Est autem parallaxis ista 58' circiter. Jam ducatur Tl, sitque angulus AlT 63' vel 62', ob refractionem malè constitutam, erit Tl ad TL ferè ut 58 ad 62 vel 63, ideoque cùm sit juxtà Tychonem $Tl = 56\frac{1}{2}$ semid. terræ, erit ut 58 ad 62 vel 63 ità $56\frac{1}{2}$ ad $60\frac{23}{58}$ vel $61\frac{41}{116}$. Quarè si corrigatur error qui ex refractione malè constitutâ oritur, distantia mediocris Lunæ à terrâ evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semid. terrestr.

(i) * *A mensurantibus Gallis*, à Picarto nimirum inventum est gradui circuli maximi terrestris respondere hexapedas 57060 seu ped. Parif. 342360. Quare inferatur (22) ut numerus graduum arcus distantiæ duorum locorum ad 360°. seu peripheriam integram, ità idem arcus in milliaribus aut pedibus expressus ad ambitum telluris in eâdem mensurâ inveniendum, sicque definitum est ambitum telluris esse ped. Parif. 123249600 ejusque proinde diameter est ped. Parif. 39231566.

LIBER TERTIUS. PROP. IV. THEOR. IV.

& si luna motu omni privari fingatur ac dimitti, ut urgente vi illâ omni, quâ (per corol. prop. III.) in orbe suo retinetur, descendat in terram; hæc spatio minuti unius primi cadendo describet pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$. (k) Colligitur hoc ex calculo vel per propositionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per corollarium nonum propositionis quartæ ejusdem libri, confecto. Nam arcus illius quem luna tempore minuti

(k) 63. * *Colligitur hoc per propositionem XXXVI. lib. I.* * In hâc Propositione 36. sit S centrum terræ SA distantia mediocris Lunæ à Terra, SO dimidium ejus distantiæ mediocris, velocitas quâ corpus revolvi potest in circulo OKH erit ad velocitatem Lunæ in propriâ orbitâ ut $\sqrt{2}$ ad 1, sit X arcus quem Luna in propriâ orbita uno minuto primo describit, erit $X\sqrt{2}$ arcus OK eodem tempore descriptus in circulo OKH & area OKS erit $\frac{1}{2}SO \times X\sqrt{2}$, æqualis areæ $ASD = \frac{1}{2}AS \times CD$ (nam ob exiguitatem arcus AD pro rectâ sumi potest) sive $\frac{1}{2}SO \times X\sqrt{2} = SO \times CD$ unde est $CD = \frac{X}{\sqrt{2}}$, sed est SC ad CD ut CD ad AC ergo $AC = \frac{CD^2}{SC} = \frac{X^2}{2SC}$ sed SC est proximè æqualis SA ergo $AC = \frac{X^2}{2SA}$, rursus sit 1 ad p ut radius ad circumferentiam, orbitæ Lunaris Peripheria erit $p.SA$, & quoniam tota à Luna



describitur tempore $27^d. 7^h. 43'$. sive minutis 39343; erit arcus $X = \frac{pSA}{39343}$ & $AC = \frac{p^2\overline{SA}^2}{2 \times 39343^2 \times SA} = \frac{p^2SA}{3095743298}$, est verò $\frac{pSA}{60}$ ambitus terræ qui pedum 123249600 ex Picarto adsumptus fuit; ideoque $pSA = 7394976000$; unde divisione factâ est $AC = 2.388756p$; sed Radius est ad Peripheriam ut 1 ad 6.283185 &c. unde tandem habetur $AC = 15.00878$ &c. Alter autem calculus ex Cor. 9. Prop. IV. deductus ita se habet. 63.

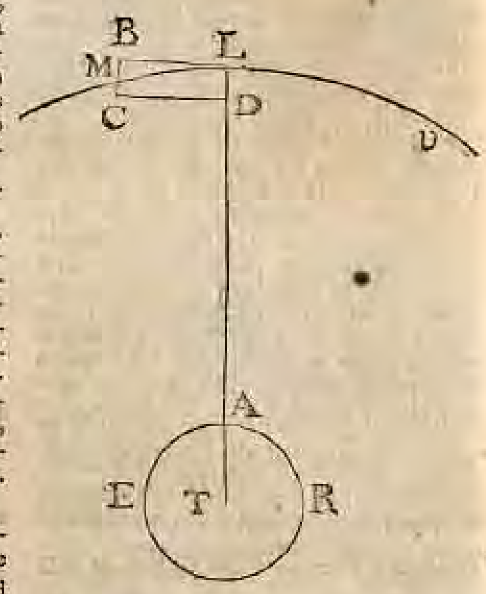
De Mundi Systemate.

minuti unius primi, medio suo motu, ad distantiam sexaginta semidiametrorum terrestrium describat, sinus versus est pedum Parisiensium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicatâ distantiæ ratione inversâ, ideoque ad superficiem terræ major sit partibus 60×60 quam ad lunam; corpus vi illâ in regionibus nostris cadendo, describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & spatio minuti unius secundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eâdem vi gravia reverâ descendunt in terram. Nam penduli, in latitudine Lutetiæ Parisiorum ad singula minuta secunda oscillantis, longitudo est pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut observavit *Hugenius*. Et (l) altitudo, quam grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius*) (m) ideoque est pedum Parisiensium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis quâ luna in orbe suo retinetur, si descendatur in superficiem terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideoque (per reg. 1. & 11.) est illa ipsa vis quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab eâ diversa esset, corpora viribus utrisque conjunctis terram petendo duplo velocius descenderent, & spatio minuti unius secundi cadendo describerent pedes Parisienses $30\frac{1}{6}$: omninò contra experientiam.

(n) Calculus hic fundatur in hypothesi quod terra quiescit. Nam si terra & luna moveantur circum solem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis distantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri potest per prop. LX. lib. I.

Scho-

63 Sit R A E terra, cujus centrum T, V L orbita Lunæ cujus pars L M à Lunâ percurritur minuti unius primi intervallo. Quoniam Luna periodum suam respectu fixarum complet diebus 27, hor. 7. minutis primis 43, ut ab astronomis statuitur, hoc est, minutis primis 39343, erit L M, $\frac{1}{39343}$ totius peripheriæ. Porrò ambitus terræ est ped. Paris. 123249600, unde habitur orbitæ Lunaris circumferentia quæ ejus est sexagecupla 7394976000 ped. Paris. quæ si dividatur per 39343, quotus dabit longitudinem arcûs à Lunâ minuto primo descripti pedibus Parisiensibus expressam scilicet 187964. ped. circiter cujus quadrato 35330465296 per diametrum diviso, quæ est pedum 2353893976 habebitur sinus versus L D ped. Paris. 15.0093 &c. proximè ut priori calculo.



* Sed ex Corollario propositionis præcedentis, vis quâ Luna retinetur in orbe suo augeri debet in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ ut corrigatur vis ejus per Solis actionem diminutionem, & spatia per diversas vires iisdem temporibus percursa sunt ut illæ vires, ergo linea A C inventa 15ped.009 est ad spatium quod Luna dempta vi Solis describeret ut $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ illud ergo spatium est 15ped.0934, quæ $\frac{934}{10000}$ pedis efficiunt accuratè pollices 1. lin. $1\frac{4}{9}$.

Liber Tertius. Prop. IV. Theor. IV.

(l) * *Et altitudo.* (471. lib. 1.).

(m) * *Ideoque est ped. Paris.* (ibid.).

(n) 64. * *Calculus hic fundatur in hypothesi quod terra quiescit.* * Undecima Sectione Libri I. quæsivit Newtonus qualis oriretur differentia inter motus corporum attractorum, quando tota vis uni immoto tribuitur, aut quando (sicut res se habet) attractione mutuâ in se agunt, & demonstravit Propositione 58 & 59. Quod si è duobus corporibus se mutuo attrahentibus & circa commune gravitatis centrum Ellipses similes describentibus, alterutrum sit nostra sedes, ita ut motum totum alteri tribuamus quod circa nos Ellipsim describere videretur; illud eâdem vi centripetâ eamdem Ellipsim circa nos si immoti reverâ foremus nonnisi longiori tempore describeret, ita ut tempus quo mutuâ actione gravitatis circa nos *motos* revolvi videretur, foret ad tempus quo circa nos *immotos* revolveretur in ratione subduplicatâ corporis Centralis immoti ad summam duorum Corporum revolventium; Unde, manente eâdem gravitatis Lege, Ellipsis quæ describeretur circa nos *immotos* eodem tempore quo describitur Ellipsis relativa circa nos *motos*, minor foret quam ea Ellipsis relativa, & ratio axium invenietur dicendo, quadratum temporis quo hæc Ellipsis describitur sive (ex hyp.) quadratum temporis quo describitur Ellipsis relativa circa nos, est ad quadratum temporis quo Ellipsis relativæ ellipsi æqualis circa nos verè immotos describitur, ut Cubus semi Axis Ellipseos minoris descriptæ circa corpus immotum ad Cubum semi Axis Ellipsis majoris descriptæ circa corpus etiam immotum & quæ Ellipsi relativæ est æqualis, sed illa tempora erant in subduplicatâ ratione massæ corporis immoti 64.

moti

DE MUNDI SYSTEMATE.

Scholium.

Demonstratio propositionis sic fusius explicari potest. Si lunæ plures circum terram revolverentur, perinde ut fit in systemate saturni vel jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) observarent legem planetarum à *Keplero* detectam, & propterea harum vires centripetæ forent reciprocè ut quadrata distantiarum à centro terræ, per prop. 1. hujus. Et si earum infima esset parva, & vertices altissimorum montium prope tangeret: hujus vis centripeta quâ retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproximè, efficeretque ut eadem lunula, si motu omni quo pergit in orbe suo privaretur, defectu vis centrifugæ quâ in orbe permanserat, descenderet in terram, idque eâdem cum velocitate quâ gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus descendunt. Et si vis illa quâ lunula illa infima descendit, diversa esset à gravitate, & lunula illa etiam gravis esset in terram more corporum in verticibus montium: eadem lunula vi utrâque conjunctâ duplo velocius descenderet. Quare cum vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum terræ respiciant, & sint inter se similes & æquales, eædem (per reg. 1. & 11.) eandem habebunt causam. Et propterea vis illa, quâ luna retinetur in orbe suo, ea ipsa erit quam nos gravitatem dicere solemus: idque maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplò velocius cadat quam corpora gravia solent cadere.

65. moti ad summam massarum duorum Corporum, ergo, ut massa corporis immoti ad summam massarum duorum Corporum, sic Cubus semi-Axis Ellipseos minoris descriptæ circa corpus immotum ad cubum semi-axis Ellipsis majoris reverá descriptæ; Hinc cum hactenus immotam terram supposuerimus Lunamque revolventem tempore quo reverá revolvitur & semiaxem orbitæ Lunaris 60 semi Diametrorum terræ assumserimus, sitque massa terræ ad massam Lunæ ut 42. ad 1. erit 42. ad 43. ut Cubus 60. ad Cubum semi axeos ejus Ellipseos quam (manente eadem gravitatis Lege eodemque tempore Periodico) Luná relativè describet circa terram dum ipsâ terrâ mutuâ Lunæ attractione circa centrum gravitatis commune reverá revolvetur, ille ergo semi Axis erit $\frac{43 \times 216000}{42}$ cujus Radix Cubica est 60.47 fere $60\frac{1}{2}$ ut habet Newtonus;

65. Eodem modo quo Luna in orbitâ suâ revolvitur circà tellurem ità aliud quodvis grave ex puncto extrà telluris superficiem secundum rectam horizontalem satis valide projectum orbitam describeret & planetæ, instar periodum suam compleret (10. lib. 1.). Sed quò altius est suprà terram punctum illud ex quo grave projicitur, eò minori opus est vi projectili ut projectum in planetam mutetur, & quò humilius est eò majori (ibid.) hoc est, celeritas per vim projectilem impressa erit inverse ut distantia, v. gr. Si Luna eâdem celeritate quâ nunc in orbitâ suâ revolvitur juxta terram projiceretur secundùm directionem horizontalem, circà tellurem non giraret, sed terrestrium projectilium more in terram caderet, antequam * per tertiam partem minuti esset mota. Nam arcus quem Luna 20 scrupulis secundis horariis in suo circulo percurrit est 11″ si juxta tellurem accedat & eadem celeritate moveatur ille arcus erit 11′; sinus versus Arcus 11′ est $\frac{51}{10.000.000}$ Radii qui Radius cum sit pedum 19615783 erit sinus ille versus pedum centum circiter, sed grave prope terram viginti illis scrupulis secundis cadendo percurrit 20 × 20 × 15 $\frac{1}{12}$, sive 6033 ped. Unde Luna in circulo suo non manebit sed longè prius in terram impegerit quam 20 secunda elapsa fuissent.

LIBER TERTIUS. PROP. V. THEOR. V.

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas circumjoviales gravitare in jovem, circumsaturnios in saturnum, & circumsolares in solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones planetarum circumjovialium circa jovem, circumsaturniorum circa saturnum, & mercurii ac veneris reliquorumque circumsolarium circa solem sunt phænomena ejusdem generis cum revolutione lunæ circa terram; & propterea (per reg. 11.) à causis ejusdem generis dependent: præsertim cum demonstratum sit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra jovis, saturni ac solis, & recedendo à jove, saturno & sole decrescant eâdem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decrescit in recessu à terrâ.

Corol. 1. (o) Gravitas igitur datur in planetas universos. Nam venerem, mercurium, cæterosque esse corpora ejusdem generis

(o) 66. * *Gravitas igitur datur in Planetas universos;* * Datur gravitas in terram & eâ gravitate Luna circa eam revolvitur per Prop. IV; datur gravitas in Jovem & Saturnum, nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, & circum- 66

De Mundi Systemate. generis cum jove & ſaturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis per motus legem tertiam mutua ſit, jupiter in ſatellites ſuos omnes, ſaturnus in ſuos, terraque in lunam, & ſol in planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. (p) Gravitatem, quæ planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Corol. 3. Graves ſunt planetæ omnes in ſe mutuò per corol. 1. & 2. Et (q) hinc jupiter & ſaturnus prope conjunctionem ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, ſol perturbat motus lunares, ſol & luna perturbant mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

Scholium.

Hactenus vim illam quâ corpora cœleſtia in orbibus ſuis retinentur centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem eſſe conſtat, & propterea gravitatem in poſterum vocabimus. Nam cauſa vis illius centripetæ, quâ lunâ retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per reg. I. II. & IV.

PRO-

66. circumſaturniorum circa Saturnum ſunt ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa terram, pendent ergo (per reg. 2.) ex gravitate eorum Satellitum in eos Planetas; Quamvis autem non ſint aut non obſervati ſint Satellites circa Martem, Venerem & Mercurium, attamen Jovi, Saturno, Terræ in cæteris ita ſunt ſimiles ut dubitandi locus non relinquatur quod ſi Satellites juxta ipſos collocarentur idem eveniret illis ac Lunæ & circumſaturniis aut circumjovialibus, unde ſequitur Gravitatem etiam dari in illos Planetas; Poſtea propter mutuam attractionem, terram eſſe gravem in Lunam, &c. conſtabit.

(p) * *Coroll.* 2. Patet (ex reg. 1. & prop. 1.).

(q) * *Et hinc Jupiter.* Hæc mutua planetarum perturbatio ut potè cum ſequentibus propoſitionibus conjuncta deinceps convenientius explicabitur, * ſufficiant in præſentiarum quæ de eâ ſuperius dictum eſt, occaſione quietis Apheliorum, vide notam a ad Prop. 2.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Liber Tertius. Prop. VI. Theor. VI.

Corpora omnia in planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus diſtantiis à centro planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

(r) Deſcenſus gravium omnium in terram (demptâ ſaltem inæquali retardatione quæ ex aëris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, ſale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quam potui exactè) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant pendula, quoad pondus, figuram, & aëris reſiſtentiam omnino paria: & paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant unà & redibant diutiſſimè. (ſ) Proinde copia materiæ in auro (per corol. 1. & 6. prop. XXIV. lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quam pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſtò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in planetas eandem eſſe atque in terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terreſtria ad uſque orbem lunæ, & unà cum lunâ motu omni privata demitti, ut in terram ſimul cadant; &

per

(r) * *Deſcenſus gravium omnium* (3. lib. 1.).

(ſ) * *Proindè copia materiæ.* Quantitas materiæ in medio non reſiſtente eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inverſe (per cor. 6. prop. 24. lib. 2.) ideòque datis tempore & longitudine penduli, ut pondus comparativum directè. Sed pondus comparativum eſt actio vis motricis (per cor. 6. prop. 20. lib. 2.). Ergò copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in lignum, hoc eſt, (per cor. 1. prop. 24. lib. 2.) ut pondus ad pondus. 66.

DE MUNDI SYSTEMATE.

(^{t}) per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum lunâ, ideoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in lunâ, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam ſatellites jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro jovis, (^{u}) erunt eorum gravitates acceleratrices in jovem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro jovis; & propterea in æqualibus à jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus in hâc terrâ noſtrâ. Et (^{x}) eodem argumento planetæ circumſolares, ab æqualibus à ſole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in ſolem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. (^{y}) Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in planetis. Porro jovis & ejus ſatellitum pondera in ſolem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quam maximè regulari; per corol. 3. prop. LXV. lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in ſolem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: motus ſatellitum (per corol. 2. prop. LXV. lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus à ſole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in ſolem pro quantitate materiæ ſuæ, quam jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quâcunque datâ, puta d ad e: diſtantia inter centrum ſolis & centrum orbis ſatellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum ſolis & centrum jovis in ratione ſubduplicatâ quam

66. (t) * *Per jam antè oſtenſa* (prop. 4. lib. hujus).

(u) * *Erunt eorum gravitates acceleratrices.* (Per cor. 2. prop. 5.).

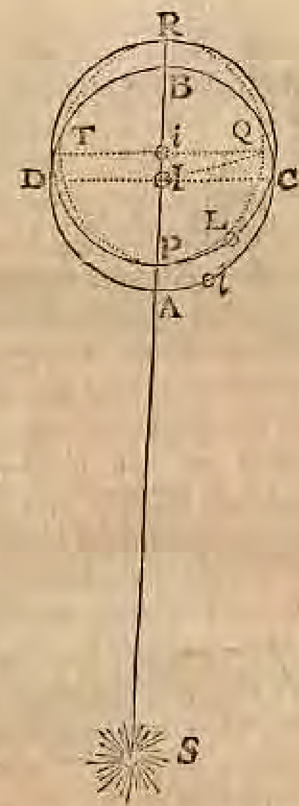
(x) * *Et eodem argumento.* Gravitates acceleratrices planetarum in Solem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Solis (cor. 2. prop. 5.) & propterea in æqualibus à Sole diſtantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales, proindéque temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo deſcriberent ſpatia æqualia. Quanto autem tempore planeta quilibet circumſolaris omni motu revolutionis privatus ſolâ vi centripetâ deſcenderet & ad ſolem uſquè perveniret ex datâ ejus à Sole diſtantiâ innoteſcit per not. 401. lib. 1. dimidio ſcilicet temporis periodici quo planeta ad diſtantiam duplò minorem revolvi poſſet, ſive tempore quod eſt ad tempus periodicum planetæ ut 1 ad $4\sqrt{2}$, idem planeta cadendo ſolem attingeret.

(y) * *Vires autem quibus corpora inæqualia.* (Def. 7. & not. 15. lib. 1.).

LIBER TERTIUS. PROP. VI. THEOR. VI.

quam proximè; (^{z}) uti calculo quodam inito inveni. Et ſi ſatelles minus gravis eſſet in ſolem in ratione illa d ad e, diſtantia centri orbis ſatellitis à ſole minor foret quam diſtantia centri jovis à ſole in ratione illâ ſubduplicatâ. Ideoque ſi in æquali-

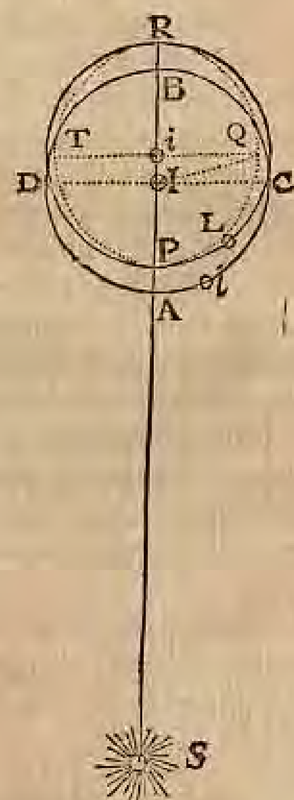
66.



(z) * *Uti calculo quodam inito inveni.* * Sit S Sol, I Jupiter, L Satelles gravior in Solem quam Jupiter paribus in diſtantiis in ratione d ad e, Fiat SI ad Si ſicut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ & quoniam gravitas eſt inverse ut quadrata diſtantiarum, gravitas in Solem ad diſtantiam SI erit ad gravitatem in Solem ad diſtantiam Si ut d ad e; unde ſi gravitas Jovis in I poſiti ſit ut e, & gravitas ſatellitis gravioris in I etiam poſiti ſit ut d, ejuſdem ſatellitis gravitas in i poſiti erit ut e, quare erit æqualis gravitati Jovis in I poſiti: Fingatur ſatelles l qui Jove nec gravior nec levior ſit, qui circa Jovem I circulum deſcribat ACBD; & fingatur in i corpus centrale Jovi ſimile circa quod, ſemotâ Solis actione, ſatelles gravior L deſcribere poterit orbitam PQRT priori ACBD æqualem; Reſtituatur Solis actio, actio ejus in utrumque ſatellitem erit æqualis, in ſimilibus orbitarum punctis nam propter ingentem puncti S diſtantiam erit SA ad SP, & SB ad SR ut SI ad Si, ideoque ut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ gravitates in eis punctis forent ut d ad e, ideóque ſi ſatellites forent æque graves, paribus in diſtantiis gravitates in eis punctis forent ut d ad e, ſed quia gravitas ſatellitis l eſt ad gravitatem ſatellitis L ut e ad d compenſatur diſcrimen gravitatis ex diſtantiâ ortum per diſcrimen gravitatis ex Hypotheſi conſtitutum: mutatio autem quæ ex actione Solis oritur in orbitam ſatellitis relate ad ejus primarium pendet ex diſcrimine actionis Solis in ſatellitem & in primarium, hoc eſt in oppoſitione pendet ex reſiduo actionis Solis in primarium demptâ actione Solis in ſatellitem; & in conjunctione ea mutatio pendet ex reſiduo actionis Solis in ſatellitem demptâ Solis actione in primarium: Cum ergo actio Solis in ſatellites L & l, ſit eadem; ſed actio Solis in primarium i ſit minor quam in primarium I, in oppoſitione minus eſt reſiduum quod mutationem pariet in orbita ſatellitis L, quam reſiduum quod mutationem ſatellitis l parit in orbitâ & majus è contra eſt reſiduum in conjunctione reſpectu orbitæ ſatellitis L quam reſpectu orbitæ ſatellitis l; ſed illa Reſidua tam in oppoſitione quam in conjunctione vim centripetam minuunt; Ergo vis centripeta major manet in R quam in B, & minor è contra in P quam in A, unde patet

De Mundi Systemate.

æqualibus à sole distantiis, gravitas acceleratrix satellitis cujusvis in solem major esset vel minor quam gravitas acceleratrix jovis in solem, parte tantum millesimâ gravitatis totius; foret distantia centri orbis satellitis à sole major vel minor quam distantia



30. patet quod ut restituatur similitudo inter orbitam satellitis L, & orbitam satellitis l corpus centrale debeat removeri à puncto R & accedere versus P, hoc est transferri ex i versus I; ita ut centrum orbitæ satellitis L remotius esse debeat à Sole quam ipsius corpus Centrale.

Jam verò dico illud corpus centrale ad I transferri debere, nam sit corpus centrale in I, semotâ Solis actione, satelles L eodem tempore Periodico ac prius describet Ellipsim cujus centrum i, focus verò I & axis major R P, (per Cor. Prop. XV. Lib. I.) & in mediocri suâ distantia I Q (Cor. 4. Prop. XVI. Lib. I.) velocitatem eamdem habebit quam habet satelles l in suo circulo, qualem v. gr. habet in C ubi velocitatum illarum directiones sunt Parallelæ tam inter se quam diametro R P, & ob distantiarum I Q & I C æqualitatem vires centrales sunt æquales directionis obliquitate paulum differentes; Addatur jam actio Solis, & cum sit S Q ad S C ut S i ad S I actiones illæ Solis (ex Hyp. & demonstratis) in satellites diversæ gravitatis sed positos in Q & C erunt etiam æquales; Movebitur ergo satelles L in mediocribus distantiis Q & T ut satelles l movetur in C & D quam proximè, tam ratione corporis centralis I quam etiam ex adjuncta actione Solis, mutationes verò ex Sole pendentes in A & P, & in R & B æquales sunt, quia sunt differentia ejusdem vis Solis in in I & virium Solis in A & P, ut & virium Solis in R & P, vires autem in A & P sunt æquales ex Hyp. & dem. ut & in B & P. Unde cum vis Primarii magna censenda sit respectu vis S; rationes virium Centripetarum residuarum in P & A, B & R manent inter se in eadem ratione ac si nulla foret actio Solis, & ut semotâ actione Solis curvas suas iisdem temporibus describere faciebant, celeritate quidem majori in P, minori in R, media verò in A & B, itaque eadem proximè iis in punctis manebit ratio descriptionis curvarum; cum ergo demonstratum sit quod in punctis P Q R T, A C B D actio Solis non turbet relationem quæ intercedit inter modum quo curvæ illæ P Q R T, ACBD describuntur cùm virium rationes eædem maneant ac prius quamproximè, idem etiam de punctis intermediis erit intelligendum. Unde sequitur quod satelles L in orbita P Q R T revolvi poterit eodem tempore iisdemque proximè Legibus ac Sa-

Liber Tertius. Prop. VI. Theor. VI.

tantia jovis à sole (a) parte $\frac{1}{2000}$ distantiæ totius, id est, parte quintâ distantiæ satellitis extimi à centro jovis: quæ quidem orbis eccentricitas foret valde sensibilis. Sed orbes satellitum sunt jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices jovis & satellitum in solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera saturni & comitum ejus in solem, in æqualibus à sole distantiis, sunt ut quantitates materiæ in ipsis: & pondera lunæ ac terræ in solem vel nulla sunt, vel earum massis accuratè proportionalia. Aliqua autem sunt per corol. 1. & 3. prop. v.

Quinetiam pondera partium singularum planetæ cujusque in alium quemcunque sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minùs quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si verbi gratia corpora terrestria, quæ apud nos sunt, in orbem lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore

telles L in orbitâ suâ A C B D, si gravior sit Jove paribus in distantiis in ratione duplicatâ distantiæ Solis à centro suæ orbitæ ad distantiam Solis ab ipso Jove. Q. E. D.

Eamdem demonstrationem applicari posse ad casum ubi satelles supponeretur levior Jove paribus in distantiis, illumque tunc descripturum Ellipsim cujus centrum Sole vicinius erit quam Jupiter ita ut sit gravitas satellitis ad gravitatem Jovis in duplicatâ ratione distantiæ Solis à centro Orbitæ ad distantiam Solis à Jove. Q. alterum E. D.

Hâc ratione satis constare assertum Newtoni credimus, idem tamen aliter initio calculo magis ad mentem Newtoni demonstrari posse non negamus; sed ratio eum calculum incundi ex iis quæ postea de motibus Lunaribus dicentur, erit deducenda.

66. (a) * *Parte $\frac{1}{2000}$ distantiæ totius.* Gravitas acceleratrix Jovis sit 1, erit (per hyp.) gravitas acceleratrix satellitis $1+\frac{1}{1000}$, sed (ex dem.) distantia inter centrum Solis & centrum orbis satellitis major est quam distantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione illâ subduplicatâ quamproximè, hoc est, ut 1, ad $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}$. Quare utriusque distantiæ differentia est $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}-1$ seu $\sqrt{\frac{1001}{1000}}-1=\sqrt{1.001}-1=1.0004998$ &c. $-1=.0004998$ &c. sive $=\frac{5}{10000}=\frac{1}{2000}$, ideóque distantia centri orbis satellitis à Sole major erit quam distantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ distantiæ totius.

pore lunæ: ſi horum pondera eſſent ad pondera partium externarum lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materiâ: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora univerſa, quæ circa terram ſunt, gravia ſunt in terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omninò deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in formâ materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, & viciſſim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in corollario ſuperiore.

Corol.

664 tius, id eſt parte quintâ diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis.

* Nam eſt Diameter Jovis circiter decima pars Diametri Solis ut ſupra indicavimus ſive ut 997 ad 10.000, diſtantiâ extimi ſatellitis eſt 26.63 ſemi Diametrorum Jovis, ergo ea diſtantiæ ſemi Diametros Solis continebit 2.663 aut accuratiùs 2.655.

Solis ſemi Diameter mediocris è terrâ viſus ſecundum Caſſini tabulas eſt 16′. 3″ vel 16′ 4″. Jam verò in Triangulo Rectangulo cujus angulus verticis eſt 16′. 4″ altitudo continet Baſim 213.96 vicibus; ergo inter ſolem & terram intervallum eſt quod Solis ſemi Diametros 213.96 contineret, ſive proximè, Solis Diametros 107.

Jovis autem diſtantia mediocris à Sole eſt ad diſtantiam mediocrem terræ à Sole, ut 52 ad 10, ergo ea continebit ſemi Diametros Solis 1112.592, ejus numeri bis milleſima pars eſt .556296 quæ eſt excentricitas Jovis ſi ſatelles ſit Jove 1000ᵃ. parte gravior vel levior paribus in diſtantiis, ille verò numerus .556296 eſt quinta pars numeri 2.78148 paulò majoris quam 2.655 ſed diſtantiâ extimi ſatellitis à Jove continebat Solis ſemi Diametros 2.655; Ergo excentricitas Jovis ſi ſatelles ſit Jove 1000ᵃ. parte gravior vel levior paribus in diſtantiis eſt ad minimum quintâ pars diſtantiæ ſatellitis extimi à Jove. Q. E. D.

Corol. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aëris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aëre deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecificè graviora ſint, minimè deſcendunt. Quod ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque ſine poris rareſieri poſſint, (z) vacuum datur. Ejuſdem denſitatis eſſe dico, (a) quarum vires inertiæ ſunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis (b) gravitatis diverſi eſt generis à vi magneticâ. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora

664 (z) * *Vacuum datur.* Quibus reſponſionibus hoc Newtoni ratiocinium effugiant Carteſiani jam diximus (lib. 2. num. 187.).

(a) * *Quarum vires inertiæ.* Cum enim vis inertiæ ſit quantitati materiæ proportionalis, ſi vires inertiæ ſunt ut magnitudines, magnitudines ſunt ut quantitates materiæ; hoc eſt, ſunt ejuſdem denſitatis.

(b) * *Vis gravitatis diverſi eſt generis.* Clariſſ. Muskenbroek in Diſſertatione de Magnete plurima atque accuratiſſima de hujuſce lapidis actione refert experimenta. Ex deſcriptâ à diligentiſſimo viro experimentorum ſerie palam quidem ſit æqualem non eſſe magnetis in varia corpora actionem, eamque tempeſtatum viciſſitudinibus obnoxiam & modò remitti modò intendi. At vim magneticam in ratione multò minori quam triplicatâ diſtantiarum decreſcere eadem oſtendunt experimenta. Hinc poſt tranſcriptum hoc ipſum Corollarium V., ſubdit Muskenbroek: „utinam memoriæ prodita fuiſſent „experimenta ex quibus Newtonus hæc „collegit; forſitan enim vir ſtupendæ ſubtilitatis in Mathematicis diſciplinis methodum invenit ſeparandi attractiones à „repulſionibus quarum proportionem in diſtantiæ ratione triplicata decreſcere deprehendit, ſed quia nihil de hâc re ulterius determinavit nec amplecti ejus ſententiam poſſumus:„. Ut intelligantur hæc Clariſſ. Muskenbroekii verba, ſciendum eſt virum doctiſſimum ſuis experimentis in eam inductum fuiſſe ſuſpicionem, quod ſcilicet magnes conſtaret partibus valdè heterogeneis, quarum quædam attraherent quædam repellerent ità ut duæ illæ vires oppoſitæ vel ſimplicis repulſionis vel attractionis proportionem turbent. Idque non caret veriſimilitudine, cum experimentis notiſſimum ſit magnetes non ſolùm ſeſe mutuò attrahere, ſed etiam alterutro magnete in contrariam partem converſo, unum ab altero repelli. Uterque magnetis polus vim repellentem atque attrahentem æque oſtendit & idcircò ex eodem polo vis attrahens & repellens emanat. Si amici magnetum poli ſibi obvertantur, attractio præpollet repulſioni, & è contrà inimici poli ſeſe invicem reſpiciant, prævalet repulſio. Quamobrem qui ſolam attractionem vult cognoſcere, perſpectam habere debet eorumdem polorum vim repulſivam eamque addere vi attrahenti experimento cognitæ, ſumma indica-

De Mundi Systemate.

pora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi poteſt & remitti, eſtque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ

teriæ

66. dicabit vim totam attrahentem. Hinc forſan fieri poſſet ut ſeparatis ab invicem attractionis repulſioniſque viribus, conſtans quam Newtonus deprehendit inter attractiones & diſtantias proportio obtineret. At verò cum ex craſſis obſervationibus duntaxat id ſe animadvertiſſe fateatur Newtonus, non ità longè quærenda videtur mens noſtri autoris.

* Vim magneticam decreſcere in ratione triplicatâ diſtantiarum ab experimentis ſtatuit Wiſthonus in egregio opuſculo, De Acus magneticæ inclinatione: ipſe autem Muyſchenbroekius in Tomo primo Phyſices ſuæ, Rationem diminutionis vis magneticæ eſſe fere quadruplicatam diſtantiarum deducit ingenioſiſſimis experimentis, ſcilicet magnetem unum alteri lanci bilancis appendit, ponderibus in alterâ lance ad æquilibrium inſtituendum impoſitis, tum admovet magnetem ſub eo qui ſuſpenſus eſt, ſic vis attractionis magnetum æquilibrium tollit, quod adjectis ponderibus reſtituitur; & pondera illa addenda varia ſunt pro varia diſtantia magnetum inter ſe, ita ut videantur ſequi rationem quadruplicatam inverſam ſpatii vacui inter magnetes intercepti, quod ſpatium vacuum non eſt Cylindricum aut Priſmaticum, quia magnetes quibus utebatur Cl. Muyſchenbroekius erant Sphærici unde hæc ratio non eſt accurate ratio quadruplicata inverſa diſtantiarum.

Aliâ ratione hæc experimenta poſſunt inſtitui, nempe conſiderando actionem magnetis in acum magneticam, quantum nempe pro variâ magnetis diſtantiâ à magnetico meridiano acum detorqueat, atque hâc ratione, experimenta à Wiſthono inſtituta fuiſſe (niſi memoria fallit) puto, quæ forte Methodus ea eſt etiam quâ Newtonus uſus fuerat, & ſane omnibus probè notatis quæ ad æſtimationem virium requiruntur, vis magneticæ diminutionem ſecundum triplicatam rationem procedere experimentis quam accuratiſſimè potui inſtitutis deprehendi, quæ quidem experimenta (cum non ſint ad manum ea quæ Wiſthonus hâc de re tradidit) referre noſtri puto eſſe inſtituti.

Sit ergo ACB, meridianus magneticus, NCS acus magnetica actione magnetis M, extra meridianum magneticum tracta, ſitque linea Cm à centro acus ad centrum magnetis ducta meridiano magnetico perpendicularis & ſtatim ſupponatur diſtantiam Cm à centro acus ad centrum magnetis eſſe Phyſicè infinitam.

Vis magnetica terræ retrahit acum a ſitu SCN ad BCA, ſed quia illi ſitui eſt obliqua, reſolvenda eſt in duas vires unam lineæ SCN perpendicularem alteram ipſi Parallelam; hæc fruſtra agit obnitente centro C, illa vero gyrationem acus efficit, itaque ſi in puncto quovis c, ac repræſentet vim magneticam totam, an repræſentabit vim quâ convertitur acus quæ ideo eſt ad vim magneticam totam in eo puncto ut ſinus anguli acn (declinationis acus à meridiano magnetico) ad Radium; In omnibus punctis CN vim æqualem exerceri ſupponi poteſt, ſed in parte CS vis ea repulſivè agit, ideoque conſentit cùm vi quæ convertit partem CN, & ejus efficaciam geminat: Notum eſt verò quod ſi vires æquales in omnibus punctis CN agant æqualiter & perpendiculariter ut eam lineam convertant earum omnium efficacia eadem erit ac ſi ſumma omnium virium perpendiculariter ageret in puncto P duabus tertiis partibus acus CN à centro C remoto, hic ergo collecta cenſeri poteſt tota vis magnetica convertens partem CN, & eodem ratiocinio vis repulſiva convertens partem CS, in puncto p, duabus tertiis arcus CS à centro C remoto, collecta cenſeri poteſt; & propter æqualitatem linearum CN, CS, ideoque partium CP ac Cp, tota vis magnetica tam attractiva quam repulſiva acumconvertens puncto P applicata cenſeri poteſt.

Si magnes M ab acu infinitè diſtaret, pari ratiocinio oſtenderetur vim totam quâ

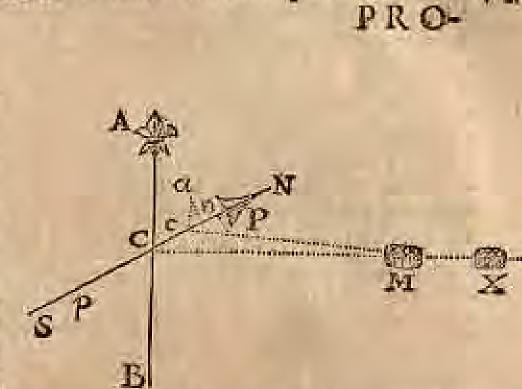
con-

teriæ quam vis gravitatis, & in receſſu à magnete decreſcit in ratione diſtantiæ non duplicatâ, ſed ferè triplicatâ, quantum ex craſſis quibuſdam obſervationibus animadvertere potui.

Liber Tertius. Prop. VI. Theor. VI.

PRO-

convertit acum in puncto P eſſe collectam & per reſolutionem virium, vim quâ convertit acum, eſſe ad vim totam ejus magnetis M ut ſinus anguli NCM (deviationis nempe acus à magnete) ad Radium.



Hinc in caſu, in quo acus quieſcit, vis magnetica terræ convertens acum eſt æqualis vi magnetis convertenti acum, ſiquidem manet acus in æquilibrio in ſitu NSC, cum ergo ſit vis magnetica terræ tota, ad vim magneticam terræ convertentem acum ut Radius ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico; & ſit vis magnetis convertens acum (æqualis illi vi magneticæ terræ convertenti acum) ad vim totam magnetis ut ſinus deviationis acus à magnete ad Radium; ex æquo & per compoſitionem rationum habebitur vis tota magnetica terræ ad vim totam magnetis M ut ſinus deviationis acus à magnete, ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico, quod etiam per compoſitionem virium demonſtrari potuiſſet.

Itaque ſi idem magnes ad aliam diſtantiam ponatur, ut in X, ita ut in alio ſitu acum conſtituat, habebitur etiam vis magnetis in X, ad vim totam magneticam terræ, ut ſinus declinationis acus à meridiano magnetico ad ſinum deviationis acus à magnete. Quare per compoſitionem rationum erit vis magnetis in X, ad vim magnetis in M, ut ſinus declinationis acûs à meridiano magnetico cum magnes eſt in X diviſus per ſinum deviationis ab eo magnete in X poſito, ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico cum magnes eſt in M diviſum per ſinum deviationis à magnete, in M poſito, hoc eſt, vis magnetis in diverſis diſtantiis, (infinitis, reſpectu magnitudinis acus) eſt ut ſinus declinationis acus à magnetico meridiano diviſus per ſinum deviationis ejus à magnete.

Equidem quando magnes ſatis eſt vicinus ab acu ut diverſa cenſeri poſſit ejus diſtantia à diverſis punctis acus, & fortior ſit ejus vis in puncta viciniora quam in remotiora, ſimulque actio magnetis ad diverſa puncta acus diverſa cum obliquitate applicetur, centrum actionis vis magnetis ſiet vicinius extremitati N, attamen ob figuram vulgarem acus magneticæ quæ ſpiculi inſtar formata circa punctum P latior eſt, centrum rotationis acus in puncto P manere cenſeri poteſt niſi nimia ſit magnetis vicinia. 66.

Ideoque diſtantia magnetis ab acu & angulus deviationis acus à magnete determinabuntur ducendo lineam à centro magnetis ad id punctum P atque his Principiis per experimenta mox recenſenda vires magnetum in diverſis diſtantiis poſitorum fuerunt æſtimatæ.

In his experimentis adhibita fuit acus magnetica trium pollicum; quæ ut ſolet, attingebat utrâque extremitate circulum diviſum in ſuos gradus, ductaque linea perpendiculari in centrum acus cùm ſponte in meridiano magnetico jacebat, applicabatur magnes Parallelepipedon ſuper eam lineam ita ut ejus facies Polares perpendiculares eſſent ei lineæ, Poluſque ejus meridionalis acum ſpectaret, Borealemque ejus extremum ad ſe traheret, menſurabantur diſtantiæ à centro acus ad centrum magnetis in Pollicibus lineiſque Pariſienſibus, & obſervabatur quantùm in ſingulis magnetis diſtantiis diſcederet acus à meridiano magnetico, tum, primò graphicè, poſtea calculo Trigonometrico, diſtantia centri magnetis, à centro Rota-

tio-

DE MUNDI SYSTEMATE.

66. tionis acus, ut & angulus ejus lineæ cum acu, determinabantur; diviso itaque sinu declinationis acus per sinum istius anguli Quotiens exprimit Rationem vis magneticæ in distantia singula inventa, sive Logarithmis utendo, Differentia Logarithmorum Sinuum angulorum deviationis à meridiano magnetico & à magneta erit Logarithmus vis magneticæ, in distantia in quâ anguli illi habentur, & tertia pars ejus differentiæ erit Logarithmus Radicis cubicæ vis magneticæ, & assumptis iis Radicibus cubicis in numeris, si per eas dividatur numerus aliquis constans (qui hic est $57\frac{3}{4}$) Quotientes erunt ipsæ distantiæ; Unde liquet quod Radices cubicæ virium magnetis sunt inversè ut distantiæ sive quod vis magnetica sit inverse in ratione triplicatâ distantiarum: sequenti verò tabellâ exhibentur hæc experimenta magnâ curâ instituta, cum calculo inde deducto; Prima columna designat distantias à Centro acus ad Centrum magnetis; Secunda columna designat distantiam à Centro rotationis acus ad centrum magnetis; Tertia declinationem acus à meridiano magnetico cum suo Logarithmo & tertiâ ejus parte; Quarta, declinationem acus à lineâ ductâ à centro rotationis acus ad centrum magnetis cum suo Logarithmo & tertiâ parte; Quinta, differentias earum tertiarum partium, cum suis numeris qui rationem exprimunt Radicum cubicarum virium magnetis in diversis distantiis; Sexta denique Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per istos numeros divisi, qui Quotientes ipsas distantias quamproximè æquant.

Distantia à Centr. magn. ad Centrum acus.	Distantia à Centr. magn. ad Cent. rotat. acus.	Declin. à merid. magnetico cum Logar. & ejus tertiâ parte observata.	Declin. à magnete cum Logarith. & ejus tert. parte.	Differentia tertiar. part. Logar. cum suis numeris.	Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per numer. qui Radic. Cubic. virium magneticarum exhibent divisi.
51.46 - - -	40 - -	75^d.	19^d. 27		
		9.9849438	9.5224235	0.1541734	
		3.3283146	3.1741412	n. 1.426 - -	40.4
60.16 - - -	50 - -	61	35. 41		
		9.9418193	9.7658957	0.2586412	
		3.3139398	3.2552986	n. 1.144 - -	50.6
67.49 - - -	60 - -	44. 30′	53. 42′		
		9.8456618	9.9062964	—1.9797885	
		3.2818873	3.3020988	n. 0.9545 - -	60.5
83 - - -	80 - -	21	77°. 6′		
		9.5543292	9.9888982	—1.8541437	
		3.1837764	3.3296327	n. 0.7147 - -	80.8
101 - - -	100 - -	11^d.	85. 46′		
		9.2805988	9.9988135	—1.7605951	
		3.0935329	3.3329378	n. 0.5762 - -	100.2
120.7 - - -	120 - -	6. 20′	89′ 22′		
		9.0426249	9.9999735	—1.6809838	
		3.0143083	3.3333245	n. 0.4797 - -	120.4
150.2 - - -	150 - -	3. 20	91. 15		
		8.7645111	9.9998966	—1.5882049	
		2.9215037	3.3332988	n. 0.3874 - -	149.
160.1 - - -	160 - -	2^d. 40′	91^d. 38′		
		8.6676893	9.9998235	—1.5559553	
		2.8892298	3.3332745	n. 0.3597 - -	160.5

Eodem modo experimenta instituta sunt lineâ à centro magnetis ad centrum acus angulum 45 graduum cum meridiano magnetico constituente.

Repetita fuere ea experimenta cum duobus diversis magnetibus, & vires quidem diversæ sunt repertæ sed decrescere secundum eamdem distantiarum rationem deprehensæ sunt.

Repetita fuere cum magnetibus iisdem & armatis & armatura spoliatis & quod omninò observabile est, idem magnes eamdem declinationem acus magneticæ produxit sive armatus foret sive non armatus, in eadem nempe centri magnetis à centro acus distantia ac directione; Quod quidem Paradoxon videbitur cum vis quâ magnes armatus ferrum sustinet, multum differat à vi quâ idem magnes non armatus ferrum trahit. Idem tamen Phænomenon in utroque magnete deprehendi in quâlibet distantiâ ac directione ita ut cum tutius mensurarentur distantiæ centri acus & centri magnetis, magnete non armato sum usus in experimentis præcedentibus, ex quibus satis probari credo; *In recessu à magnete vim magneticam decrescere in ratione ferè triplicatâ quantum saltem crassis illis observationibus animadverti potest.*

LIBER TERTIUS. PROP. VII. THEOR. VII.

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuò graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à centro planetæ. Et inde consequens est (per prop. LXIX. lib. I. & ejus corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cum planetæ cujusvis A partes omnes graves sint in planetam quemvis B, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius; & actioni omni reactio (per motûs legem tertiam) æqualis sit; planeta B in partes omnes planetæ A vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus (c) in attractionibus magneticis & electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res

(c) * *In attractionibus magneticis & electricis*, ubi ut plurimùm quò majùs est attrahens, eò cæteris paribus, major est attractio. 66.

Eodem

Res (d) intelligetur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. (e) Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hâc lege gravitare deberent in se mutuò, cum tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: respondeo quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in terram totam ut sunt hæc corpora ad terram totam, longè minor est quàm quæ sentiri possit.

Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à particulis. Patet per corol. 3. prop. LXXIV. lib.

PRO-

66. (d) * *Res intelligetur in gravitate.* Vires quæ sunt ut materia in omnium formarum corporibus atque ideò non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus universis singulisque corporum partibus & esse proportionales quantitati materiæ, hinc vis corporis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Si itaque concipiamus Jovem & Satellites ejus ad se invicem accedere ut globum unicum componant, pergent singuli sese mutuò trahere, & viceversâ si corpus Jovis resolveretur in globos plures, hi quoque globi satellitum instar sese mutuò traherent.

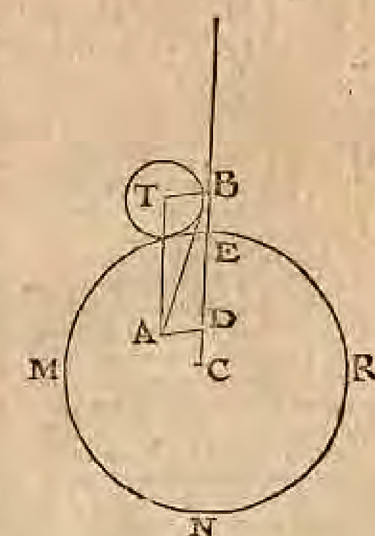
67. Globi cujusque vis absoluta est ut quantitas materiæ in eodem globo; vis autem motrix quâ globus unusquisque trahitur in alterum & quæ ponderis nomine vulgò designatur, est ut contentum sub quantitatibus materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum distantiæ inter centra (per cor. 4. prop. 76. lib. 1.) & huic vi proportionalis est quantitas motûs quâ globus uterque dato tempore movebitur in alterum (def. 8. lib. 1.) vis autem acceleratrix quâ globus unusquisque pro ratione materiæ suæ attrahitur in alterum est ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum distantiæ inter centra (per cor. 2. prop. 76. lib. 1.) & huic vi proportionalis est velocitas quâ globus attractus dato tempore movebitur in alterum (def. 7. lib. 1.). Hinc coporum cælestium motus inter se possunt facile determinari. Quia verò respectu terræ totius exigua admodum sunt corpora terrestria, patet minimam quoque esse mutuam horum corporum attractionem respectu attractionis in terram totam. Sic sphæra terræ homogenea diametroque pedis unius descripta minus trahet corpusculum juxtà superficiem suam quam terra juxtà suam in ratione diametri sphæræ ad diametrum terræ (prop. 72. lib. 1.) hoc est in ratione 1 ad 39231566 sive 1 ad 40000000 circiter, quæ tantilla vis sentiri non potest.

(e) * *Si quis objiciat* &c. Majora etiam quæ in terrâ concipi possunt corpora haud magnos effectus producent. Sit enim EMNR, tellus cujus centrum C, eaque ponatur sphærica & homogenea. Sit corpus ubicumque putà in loco B, sublato omni impedimento, ad telluris superficiem perpendiculariter dirigeretur per rectam BEC; in ipsâ telluris superficie addatur sphæra T, telluri homogenea triumque milliarium sive Leucæ unius marinæ diametro descripta quam tangat recta BEC; designet EC vim gravitatis in ipsa superficie terræ & designabit TB gravitatem in ipsa superficie sphæræ T (prop. 72. lib. 1.) gravitas in E, in tellurem erit ad gravitatem in B in eandem, ut BC^2 ad EC^2 (prop. 74. lib. 1.). Quare ponendo

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique in regionibus, quæ à centris æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum distantiæ inter centra.

Postquam invenissem gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & esse in partes singulas reciprocè proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compositâ, an verò quam proximè. Nam fieri posset ut proportio, quæ in majoribus distantiis accuratè obtineret, prope superficiem planetæ ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret.



68. do BC^2 ad EC^2 ut EC ad BD, recta BD exhibebit gravitatem in terram in loco B, ac proinde completo rectangulo TBAD, gravitatis directio erit per diagonalem BA (41. lib. 1.). Jam in triangulo rectangulo BAD, est BD ad AD ut radius ad tangentem anguli DBA. Quia verò telluris semidiameter mediocris est fere 1145 Leucarum Marinarum (quarum nempe viginti gradum complent, uno marino milliari singulo gradus minuto respondenti) poni etiam potest recta BD æqualis EC, ideoque erit ad TB, sive BD ad AD ut 2290 ad 1, unde prodit angulus ABD, minuti primi cum dimidio. Si itaque loco sphæræ T, intelligatur mons aliquis cujuscumque figuræ cujus attractio æquipolleat attractioni ipsiusmet sphæræ, pendulum ad radicem hujusce montis constitutum vi montis attractum deviabit à perpendiculo magis quam minuti unius primi intervallo. Hæc autem aberratio minor fiet, si pendulum in partes contrarias ab aliis montibus circumpositis trahitur, si densitas partium internarum terræ, major sit quam densitas partium montis, denique ex Piramidali montium figurâ, aliisque forte causis, hinc admodum difficile ut perturbationes illæ sensibiles fiant nisi in maximis montibus; ut etiam D. nus Bouguer attractionem montis Chimboraço in Peruvio sensibilem deprehendit.

De Mundi Systemate.

raret. Tandem verò, (f) per prop. LXXV. & LXXVI. libri primi & ipſarum corollaria, intellexi veritatem propoſitionis de quâ hic agitur.

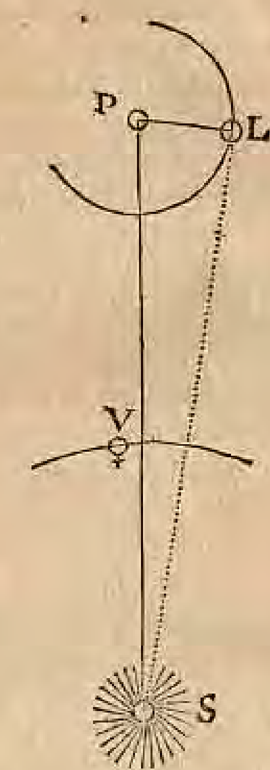
Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos planetas. Nam pondera corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium ſunt (per corol. 2. prop. IV. lib. 1.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inversè; & pondera ad ſuperficies planetarum, aliaſve quaſvis à centro diſtantias, majora ſunt vel minora (per hanc propoſitionem) in duplicatâ ratione diſtantiarum inversâ. Sic ex temporibus periodicis veneris circum ſolem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, ſatellitis extimi circumjovialis circum jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, ſatellitis Hugeniani circum ſaturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & lunæ circum terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum diſtantiâ mediocri veneris à ſole & cum elongationibus maximis heliocentricis ſatellitis extimi circumjovialis à centro jovis 8'. 16''. ſatellitis Hugeniani à centro ſaturni 3'. 4''. & lunæ à centro terræ 10'. 33''. (g) computum ineundo inveni quod corporum

68. (f) * *Per prop. 75. & 76. lib. 1.* Ex ſingularum particularum viribus componitur vis planetæ totius (cor. 1. prop. 7.) & gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis (per cor. 2. prop. ejuſdem). Hinc vis planetæ totius decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro, modò tamen planetæ ex uniformi materiâ conſtare ponantur (prop. 75. lib 1.) & hujuſmodi planetæ duo ſe mutuò trahent vi decreſcente in duplicatâ ratione diſtantiæ inter centra (per corollaria ejuſdem prop.). Quamvis autem planetæ in progreſſu à centro ad circumferentiam non ſint uniformes, obtinebit idem decrementum in ratione duplicatâ diſtantiæ (prop. 76. lib. 1.) ſi ſecundùm quamcumque Legem creſcat vel decreſcat denſitas in progreſſu à centro ad circumferentiam, & ſimiliter hujuſmodi planetæ duo ſeſe invicem trahent viribus in ratione duplicatâ diſtantiarum inter centra decreſcentibus.

(g) 68. * *Computum ineundo*, * ut hæc omnia ad Algebrica ſigna revocentur; ſit S centrum Solis, V centrum Veneris, P centrum alterius Planetæ Primarii, L ſatelles in maximâ ſuâ elongatione heliocentricâ quam metitur angulus LSP, unde angulus SLP eſt rectus.
Dicatur tempus Periodicum Veneris t;
tempus Periodicum ſatellitis L circa primarium P dicatur θ.
Diſtantia SP qualiſcumque ſit dicatur z;
Ratio SP ad SV quæ datur per Phænom. IV. exprimatur per rationem a ad b, inde erit $SV = \frac{bz}{a}$;
& Radio exiſtente 1 ſinus elongationis maximæ heliocentricæ ſatellitis L, ſive ſinus anguli LSP dicatur e;
Hinc in Triangulo SLP Rectangulo, erit ſinus

Liber Tertius. Prop. VIII. Theor. VIII.

porum æqualium & à centro ſolis, jovis, ſaturni ac terræ æqualiter diſtantium pondera ſint in ſolem, jovem, ſaturnum ac terram



ſinus totus anguli SLP (1) ad ſinum anguli LSP (e) ut latus SP (z) ad latus PL quod erit ergo ez;
Quoniam vis Solis in venerem & vis Primarii in ſatellitem, ſunt per Cor. 2. Prop. IV. Lib. 1. ut Diſtantiæ Veneris & Satellitis à Centro Solis & Primarii diviſæ per quadrata temporum Periodicorum, ſive ut $\frac{bz}{att}$ ad $\frac{ez}{\theta\theta}$, ſive, ſi vis Solis dicatur 1, erit vis Primarii $\frac{aett}{b\theta\theta}$.

Sed vis Primarii in ſatellitem in diſtantia PL, eſt ad vim quâ in ipſum ageret ſi tantumdem diſtaret quantùm diſtat Venus à Sole, inversè ut quadrata diſtantiarum; ſiat ergo $\frac{1}{e^2z^2}$ ad $\frac{a^2}{b^2z^2}$ ut $\frac{aett}{b\theta\theta}$ ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ & habebitur tandem quod vis Solis in venerem eſt ad vim Primarii P in ſatellitem, ſi tantumdem diſtaret ab ipſo quantum diſtat Venus à Sole ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.

Jam verò transferantur Venus & Satelles in alia quâcumque diſtantiâ ſed ita ut ambo iterum æqualiter diſtent à Corpore ſuo Centrali; Vires quidem Centralium corporum in ipſos mutabuntur, ſed eodem modo utrinque mutabuntur; unde manebunt in eâdem ratione ac priùs, nam erit ut quadratum novæ diſtantiæ ad quadratum prioris diſtantiæ, ut vis prior Solis in Venerem ad vim novam; & in eadem ratione erit vis prior Primarii in ſatellitem ad ejuſdem vim novam unde alternando, vis Prior Solis in Venerem eſt ad vim Priorem Primarii in ſatellitem, ut vis nova Solis in venerem ad vim novam primarii in Satellitem, ergo in qualicumque diſtantia, ſi modo æqualiter diſtent Venus & Satelles à ſuo Corpore Centrali vis Solis erit ad vim Primarii ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.

68 Denique; cum pondera Corporum ſint ut Vires Centrales & quantitates materiæ quæ per eas Vires urgentur conjunctim, & in hoc Corollario Newtonus ſupponat *Corpora æqualia & æqualiter à Corporibus centralibus diſtantia* Pondera talium Corporum erunt ut Vires Centrales ideoque Pondus in Solem erit ad Pondus in Primarium qualemcumque ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.

Computus per Logarithmos commodè initur, exempli gratia ſit P centrum Jovis, & L hujus extimus ſatelles, eſt b ad a ut 72333 ad 520096 quorum Logarithmi ſunt 4.8593365 & 5.7160855; eſt e ſinus anguli 8' 16'' cujus Logarithmus eſt

DE MUNDI SYSTEMATE. terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, $\frac{1}{169282}$ (h) respectivè, & auctis vel diminutis distantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium corporum in solem, jovem, saturnum ac terram in distantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideò in eorum superficiebus, (i) erunt ut 10000, 943, 529, & 435 respectivè. Quanta sint pondera corporum in superficie lunæ dicetur in sequentibus.

Corol.

68. -3.3810609 (Radio existente 1) hinc Logarithmus $\frac{ae}{b} = -2.2378099$, & Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3}$ hujus triplus est -6.7134297.

Præterea Logarithmus t (sive 224^d. horar. $16\frac{1}{2}$, hoc est, horarum $5392\frac{3}{4}$) est 3.7318103, Logarithmus θ (sive 16^d. $16\frac{8}{15}$ horar., hoc est, horarum $400\frac{8}{15}$ est 2.6026384 ideoque Log. $\frac{t}{\theta}$ est 1.1291719 & Log. $\frac{tt}{\theta\theta}$ hujus duplus est 2.2583438.

Unde tandem Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ est -4.9717735, quæ fractio in Decimalibus potuisset exprimi, sed eam Newtonus exprimit unitate divisâ per Denominatorem quemdam, cujus Logarithmus obtinebitur hunc Logarithmum -4.9717735 ex Logarithmo unitatis nempe 0. tollendo, erit ideo 3.0282265 cujus Logarithmi numerus est 1067 ut eum Newtonus invenit.

(h) * *Respectivè &c.* * In præcedentibus Editionibus (ante Londinensem) indicabat Newtonus hic loci elementa ex quibus rationes verarum Diametrorum Jovis, Saturni & Terræ determinaverit, quæ quidem elementa, ex novis observationibus, quibusdam minutiis immutavit, illa hæc esse nobis videntur.

Primò, Diametrum Solis ex mediocri Terræ distantiâ visam, 32′ 8″ assumit, qualem etiam Cassinus in novissimis Astronomicis Tabulis eam constituit, cum prius 32′ 12″ statueretur; tum Diametrum Jovis in mediocri ejus à Tellure distantia 37″ facit qualem eam prodiisse sub finem primi Phænomeni dicit, cum prius fieret 40″. Ex his, cùm distantia mediocris Solis (sive Telluris n. 53.) à Jove sit ad mediocrem distantiam Solis à Terrâ ut 520096 ad 100000 (per Phænom. IV.) & Diametri veræ Sphærarum sub parvis angulis visarum sint directè ut anguli sub quibus videntur & ut Distantiæ ex quibus spectantur erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Jovis ut 1928″×100000 ad 37″×520096 sive 10000 ad 997. ut calculo invenitur.

Secundò, Diametrum Saturni in mediocri ejus à Sole sive Tellure distantia assumit 16″, quem 22″ in prioribus Edit. faciebat, indè cum distantia ejus mediocris à Sole sive Tellure, sit ad mediocrem distantiam Solis à terrâ ut 954006 (Phæn. IV.) ad 100000 erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Saturni ut 1928″×100000 ad 16″×954006, sive 10000 ad 791.

Denique Parallaxim Solis, in distantia ejus mediocri 10″ 30‴ constituit, Parallaxis verò Solis est ipsa semi-Diameter Terræ è Sole visa, ergo Diametri veræ Solis & Terræ, sunt ut Diameter Solis apparens ad duplum Parallaxeos Solis, hoc est, 1928, ad 21, sive ut 10000 ad 109 proximè.

(i) * *Erunt ut;* * Ut insistere pergamus ei Analysi quâ Newtonus usus esse videtur, assumptis omnibus ut in Nota 68.

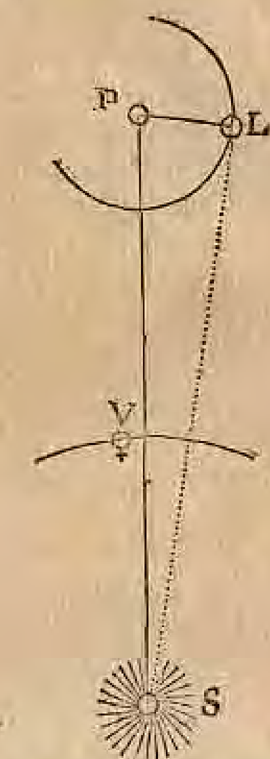
Tangens semi-Diametri apparentis Solis dicatur s, Radio existente 1.

Sinus Parallaxeos Solis (quæ est semi-Diameter primarii P è Sole visi) dicatur p.

Vera semi-Diameter Primarii dicatur d.

Erit ex natura Parallaxeωn p ad 1 sicut d ad

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in planetis singulis. Nam quantitates materiæ in planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris, id est, in sole, jove, LIBER TERTIUS. PROP. VIII. THEOR. VIII.



d ad PS quæ dicebatur z quæque ideo dicenda erit $\frac{d}{p}$.

Pariter sicut 1 ad s, distantia z sive $\frac{d}{p}$ ad semidiametrum veram Solis quæ erit $\frac{sd}{p}$.

Rursus Parallaxis satellitis L dicatur q. 68

Ex natura Parallaxeωn erit q ad 1 ut d ad PL, quæ ideo erit $\frac{d}{q}$ & numerus semi-Diametrorum Primarii P in ea linea PL contentus erit $\frac{1}{q}$, & cum singula semi-Diameter è Sole spectata, videatur sub angulo cujus sinus est p, propter illorum sinuum parvitatem, anguli erunt ut sinus, & sinus elongationis heliocentricæ qui dicebatur e continebit sinum p numero vicium qui dici poterit $\frac{1}{q}$ ideoque erit $e = \frac{p}{q}$.

Si autem fingatur Corpus in Solis superficie positum, quod itaque ab ejus Centro distet quantitate æquali ejus veræ semi-Diametro $\frac{sd}{p}$, vis Solis in id Corpus, erit ad vim P in corpus æquale ad eamdem distantiam à Centro ejus Primarii positi ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ per not. 68, sive substitutione factâ $\frac{p^3}{q^3}$ loco e^3, ut $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.

Sed hæc vis Primarii in id corpus, erit ad vim ejusdem corporis in superficie Primarii positi inversè ut Quadrata distantiarum sive inversè ut Quadrata Diametrorum verarum Solis & Primarii sive erit $\frac{p^2}{s^2d^2}$ ad $\frac{1}{d^2}$ sicut $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ ad $\frac{a^3ps^2}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ quæ quantitas exprimet vim Primarii in corpus in suâ superficie positum, dum vis Solis in Corpus æquale in suâ superficie etiam positum erit 1: Quæ quantitas $\frac{a^3ps^2}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ est æqualis quantitati $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (quæ vim in æqualibus distantiis exprimit) divisæ per $\frac{p^2}{s^2}$. Sed ob æqualitatem corporum vires in Corpora sunt ut Pondera Corporum; hinc ergo habetur ratio Ponderis Corporum æqualium in superficiebus Solis, Jovis, Saturni ac Terræ.

Quare si Logarithmis utamur; Ex Logarithmo p tollatur Logarithmus s, & residui duplum tollatur ex Logarithmo numeri jove, ſaturno ac terrâ ſunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpectivè. Si parallaxis ſolis ſtatuatur major vel minor quam 10″. 30‴, (k) debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

Corol. 3. Innoteſcunt etiam denſitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri, per prop. LXXII. lib. I. ideoque ſphærarum heterogenearum denſitates (l) ſunt ut pondera illa applicata ad ſphærarum diametros. Erant autem veræ ſolis, jovis, ſaturni ac terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109, & pondera in eoſdem ut 10000, 943, 529 & 435 reſpectivè, & propterea denſitates ſunt ut 100, $94\frac{1}{2}$, 67 & 400. (m) Denſitas terræ

68. meri qui exprimebat vim Primarii in æqualibus diſtantiis, reſiduum erit Logarithmus vis Primarii in Corpora in ejus ſuperficie poſita.

Calculus iſte reſpectu Terræ commodè fieri poteſt, quia datur ex obſervatione Parallaxis Solis p, & apparens Solis ſemidiameter: In Jove & Saturno Parallaxis ipſorum eſt æqualis eorum ſemidiametro apparenti in mediocri ipſorum diſtantiâ, & ſemidiameter apparens Solis in ipſis eſt ad ſemidiametrum Solis apparentem in terrâ, inverſe ut diſtantiæ eorum & Terræ à Sole.

(k) *Debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ* Parallaxeωn *ratione.* * Nam cum quantitates materiæ in Planetis ſingulis, ſint ut eorum vires in æqualibus diſtantiis; Quantitas materiæ in Sole eſt ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, manente ergo ratione a ad b diſtantiarum nempe Terræ & Veneris à Sole, manentibus temporibus Periodicis Veneris & Lunæ t & θ, & ſinu Parallaxeos Lunæ q, liquet quod ſi varietur ſinus Parallaxeos Solis p & ex novis obſervationibus, putà ex obſervatione tranſitus Veneris ſuper diſcum Solis, alia Parallaxis cujus ſinus ſit π deprehendatur, eo caſu invenietur quantitas materiæ in Sole ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 \pi^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, itaque quantitas materiæ terræ in præcedenti Hypotheſi Parallaxeos p reperta, erit ad eam quæ tunc invenietur ut p^3 ad π^3 ſive (ob exiguitatem angulorum Parallacticorum) ut cubi Parallaxeωn.

(l) * *Sunt ut pondera illa.* Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas & inæquales ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri (loco cit.), & pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras heterogeneas & æquales in ſuperficiebus ſphærarum ſunt ut quantitates materiæ in ſphæris, hoc eſt, ut denſitates ſphærarum (2. lib. 1.). Unde pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras heterogeneas & inæquales in ſuperficiebus ſphærarum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione denſitatum & diametrorum ſphærarum, conſequenter denſitates ſphærarum ſunt pondera illa directè & ſphærarum diametri inverſe.

(m) * *Denſitas terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi Solis* &c. * Ratio Ponderum in ipſis ſuperficiebus Solis & Terræ exprimebatur numeris 1 ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (denominationibus iiſdem

terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi ſolis, ſed determinatur per parallaxin lunæ, & propterea hic rectè definitur. Eſt igitur ſol paulò denſior quam jupiter, & jupiter quam ſaturnus, & terra quadruplo denſior quam ſol. Nam per ingentem ſuum calorem ſol rareſcit. Luna vero denſior eſt quam terra, ut in ſequentibus patebit.

Corol. 4. Denſiores igitur ſunt planetæ qui ſunt minores, cæteris paribus. Sic (n) enim vis gravitatis in eorum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & denſiores ſunt planetæ, cæteris paribus, qui ſunt ſoli propiores; ut jupiter ſaturno, & terra jove. In diverſis utique diſtantiis à ſole collocandi erant planetæ ut quilibet pro gradu denſitatis calore ſolis majore vel minore frueretur. Aqua noſtra, ſi terra locaretur in orbe ſaturni, rigeſceret, ſi in orbe mercurii in vapores ſtatim abiret. Nam lux ſolis, cui calor proportionalis eſt, (o) ſeptuplo denſior eſt in orbe mercurii quam apud nos: & thermometro

dem adhibitis quæ in Notis (g) & (i) aſſignantur. Denſitates verò ſunt ut illa pondera applicata ad ſphærarum Diametros vel ſemi-Diametros; ſemi-Diameter vera Solis erat $\frac{sd}{p}$, & ſemi-Diameter vera terræ erat d; Quare denſitates Solis & terræ erant ut $\frac{1}{\frac{sd}{p}}$ ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2 d} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ ſive ut 1 ad $\frac{a^3 s^3}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, in quâ quantitate Parallaxis Solis quæ dubia eſt non amplius adhibetur, ſed tantum quantitates de quibus conſtat apud Aſtronomos, Parallaxis nempe Lunæ, ſemi-diameter apparens mediocris Solis, Ratio diſtantiarum terræ & Veneris à Sole, & ratio temporum Periodicorum Veneris & Lunæ, quare ea *Denſitas terræ hic rectè definitur.*

(n) * *Sic enim vis gravitatis.* Quoniam ſphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera in earum ſuperficiebus ad ſphærarum diametros applicata, ideóque pondera ut denſitates & ſphærarum diametri conjunctim, ſi denſiores ſint planetæ qui ſunt minores, minor diameter in variis planetis per majorem denſitatem quadam ex parte compenſabitur ac proinde vis gravitatis in variorum planetarum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedet quam ſi planetæ omnes vel denſitate æquales forent, vel planetæ majores forent minoribus denſiores. 68.

(o) * *Septuplo denſior eſt.* Nam (14. lib. 1.) denſitas lucis decreſcit in ratione duplicatâ diſtantiarum à Sole, ſed (phæn. 4.) diſtantia terræ eſt ad diſtantiam Mercurii ut 1000 ad 387 proximè. Eſt igitur denſitas lucis in Mercurii ad denſitatem lucis in terrâ ut 1000000 ad 149769 ſeu ut 6,68 ad 1, hoc eſt ferè ut 7 ad 1.

* Addit Newtonus *Thermometro expertus ſum quod ſeptuplo Solis æſtivi calore aqua ebullit*, hæc videntur referri ad n. 270 Tranſactionum Philoſophicarum qui continet ſcalam de caloris gradibus, ingenioſe ſane conſtructam, cujus author non indicatur: «Conſtructa fuit hæc Tabula ope Thermometri & ferri candentis; Per Thermometrum ex oleo lini «conſtructum inveni (inquit author) quod «ſi oleum ubi Thermometer in nive liqueſcente

metro expertus ſum quod ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium vero non eſt quin materia mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hâc noſtrâ; cum materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

PRO-

28. «cente locabatur (computus enim in hæc «Tabula inchoatur à calore quo aqua in«cipit rigeſcere tanquam ab infimo calo«ris gradu ſeu communi termino caloris «& frigoris) occupabat ſpatium partium «10000 idem oleum calore corporis hu«mani rarefactum occupabat ſpatium «10256 & calore aquæ jamjam ebullire in«cipientis ſpatium 10705 & calore aquæ «vehementer ebullientis 10725, & calore «ſtanni liquefacti ubi incipit rigeſcere «11516 &c.; Rarefactio aëris æquali calo«re fuit decuplo major quam rarefa«ctio olei quaſi quindecim vicibus major «quam rarefactio ſpiritus vini. Et ex his «inventis ponendo calores olei ipſius ra«refactioni proportionales & pro calore «corporis humani ſcribendo partes 12 pro«diit calor aquæ ubi vehementer ebullit «partium 34». In eâdem autem Tabulâ ponendo calorem corporis humani 12, ponit calorem aeris æſtivi 4, 5, vel 6. Quare medium aſſumendo, eſt ut quinque ad 34 ſive proxime ut 1 ad 7, ita calor aeris æſtivi ad calorem aquæ ebullientis: qui ergo ſeptuplus eſt caloris aeris æſtivi ſecundum aſſertum Newtonianum.

Diſputari autem poſſet, quod calor rarefactioni olei proportionalis ſupponatur abſque ſufficienti ratione, & quod terminus à quo rarefactio ea numerari incipit (is nempe gradus frigoris quo aqua incipit rigeſcere) ſit ad arbitrium aſſumptus; cum ea rarefactio numerari debuiſſet ab abſoluto frigore eo nempe frigoris gradu quo partes olei nullam ulteriorem compreſſionem per vim frigoris pati poſſent, qui gradus eſt ignotus; At hujus Tabellæ conſtructio, ingenioſe demonſtratur ab eodem Autore per ferri candentis refrigerationem; Locavit enim ferrum candens in vento uniformiter ſpirante, ut aer à ferro calefactus ſemper abriperetur à vento, & aër frigidus in locum ejus uniformi cum motu ſuccederet, ſic enim aëris partes æquales æqualibus temporibus calefactæ ſunt & concipiebant calorem calori ferri proportionatam; Hinc ſi dividatur tempus refrigerii ferri in inſtantia æqualia, erit, ut totus calor ferri initio primi inſtantis, ad calorem durante eo inſtanti amiſſum, ſic calor ferri initio ſecundi inſtantis ad calorem durante eo ſecundo inſtanti amiſſum, &c. ideóque fingatur lineam rectam duci cujus abſciſſæ deſignent tempora; ordinatæ in extremis abſciſſis erigantur, quæ calores ferri ſingulis momentis deſignent; differentiæ earum ordinatarum erunt iis ipſis ordinatis proportionales Geometricè, ideóque curva per earum ordinatarum vertices tranſiens erit Logarithmica, creſcentibus ergo temporibus Arithmeticè, calor ferri Geometricè decreſcit & propterea calorum eorum Geometrica ratio per Logarithmorum tabulam haberi poterit.

Quo ſuppoſito, imponebat Autor candenti ferro particulas diverſorum metallorum, & aliorum corporum liquabilium, & notavit tempora refrigerii donec particulæ omnes amiſsâ fluiditate rigeſcerent & tandem calor ferri æquaretur calori corporis humani; hinc calores omnes quibus cera, biſmuthum, ſtannum, plumbum, Regulus ſtibii, eorumque variæ miſcelæ liqueſcunt innotuere, ſive eorum Geometricæ rationes, cumque calores ita inventi eamdem habuerint inter ſe rationem cum caloribus per Thermometrum inventis, propterea rectè aſſumptum fuit, rarefactiones olei ipſis caloribus eſſe proportionales.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo à ſuperficiebus planetarum deorſum decreſcere in ratione diſtantiarum à centro quam proximè.

Si materia planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc propoſitio accuratè: per prop. LXXIII. lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus planetarumè in cœlis diutiſſimè conſervari poſſe.

In ſcholio propoſitionis XL. lib. II. oſtenſum eſt quod globus aquæ congelatæ, in aëre noſtro liberè movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentiâ aëris amitteret motus ſui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò globum terræ noſtræ denſiorem eſſe, quàm ſi totus ex aquâ conſtaret, ſic colligo. Si globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quam aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent. Eaque de causâ globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſitâ. Et par eſt ratio terræ noſtræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppoſitam confluentibus.

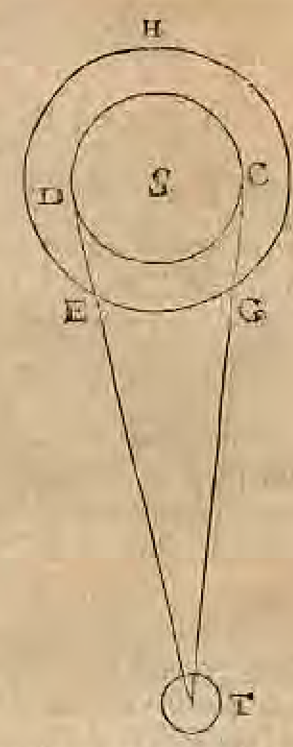
Eodem argumento (p) maculæ ſolares leviores ſunt quàm materia lucida ſolaris cui ſupernatant. Et in formatione qualicunque planetarum ex aquâ, materiâ omnis gravior, quo tem-

pore

(p) 69. *Maculæ Solares.* Si radii Solares teleſcopio duobus vitris inſtructo excipiantur, locuſque circumpoſitus obſcuretur, inverſa Solis imago ſuprà chartam ad axem teleſcopii normalem pingitur & maculæ conſpiciuntur quæ nunc emergere nunc evaneſcere obſervantur. Maculas illas in materiâ Solari ſupernatare vel ſaltem Soli quam proximas eſſe certum eſt. 69.

pore massa fluida erat, centrum petebat. Unde cum terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiæ totius

69. Sit enim Sol in S, ex Tellure T visus sub angulo D T C 32'. Si macula orbitam aliquam H E G H extrà Solis superficiem describeret, non videretur Solis discum ingredi antequam ad E pervenisset ubi recta T E D ex terrâ ducta discumque Solis tangens maculæ orbitam secat, & ductâ T G C Solem quoque tangente, per Solis superficiem tantummodò progredi videretur, quandiù describeret arcum E G qui semiperipheriâ minor est, ideóque arcus ille tempore quod semiperiodo minus est percurreretur. Sed ex observationibus notum est quamplures maculas, duas aut tres integras periodos absolvisse 27 dierum spatio atque 13 $\frac{1}{2}$ dies impendisse ut à limbo occidentali Solis ad limbum orientalem pervenirent; illarum ergò macularum orbitæ vel in ipsâ superficie Solari extiterunt, vel Soli fuerunt proximæ.



* Newtonus hic loci receptam opinionem sequitur maculas Solares ipsi Solari superficiei inhærere; quæ opinio his tribus argumentis nititur; 1°. Quod illæ maculæ in medio Solis disco latiores videantur quam juxta ejus limbum ubi angustissimæ apparent; & quidem hoc demonstrat maculas eas non esse Planetas rotundos, ut quidam volebant, sed esse corpora lata, non verò spissa, & à Sole non multum distare, nullomodotamen exinde probatur eas esse in ipsâ superficie Solis: 2um. Argumentum est, Quod spatium quod maculæ emetiuntur in medio disco Solis diurno spatio, sit proportionatum revolutioni ipsarum, quod majus esse debuisset si forent cis Solem, sed rursus hoc argumentum proximitatem macularum superficiei Solis, non verò earum ipsi superficiei Solis adhærentiam probat.

Denique, asserit Keillius (Lection. Ast. V.) observationibus constare maculas quæ integram revolutionem 27 dierum absolvunt tredecim cum semisse dies impendere ut à limbo Occidentali Solis ad Orientalem perveniant, unde meritò concludit quod cum dimidium tempus Periodi suæ in transcurrendo Solis disco impendant, ipsarum orbita in ipsâ superficie Solari extet; At Wolfius (Ast. n°. 413.). Quoniam, inquit, maculæ Solares tribus circiter diebus diutius post Solem latent quam Hemisphærium nobis conspicuum peragrantes consumunt, Soli quidem proximæ sunt, non ipsi tamen superficiei Solari inhærent, sed aliquam ab eâ distantiam habent.

Et quidem in Astronomorum fastis quæ in

tius in terrâ quasi quintuplo vel sextuplo major sit quàm si tota ex aquâ constaret; præsertim cùm terram quasi quadruplo densiorem esse quam jovem jam ante ostensum sit. Quare si Jupiter

in manibus venerunt, numquam deprehendi maculam per tredecim super discum Solis actu visam fuisse, nullam reducem ante decimum quintum diem observatam & quidem cum anno 1739 plurimæ maculæ Solis discum percurrerent, multasque ab ingressu ad egressum usque persequerer, nulla integros tredecim dies in disco perstare mihi visa est; Cum autem quæstio hæc tota, sit de facto, referam observationes duas quæ accuratissime institutæ videntur, desumetur altera e Transactionibus Philosophicis Anglicanis n. 294, altera è Diario eruditorum ad annos 1676. 1677.

215. Maii anni 1703 Septempedali Telescopio] circa Centrum Solis maculam detexit Dnus. Stannyan, eamdem observavit diebus sequentibus, & 22. Maii mane jam admodum vicinam limbo Solis eam vidit; 23a. Maii horâ sextâ matutina appulerat ad ipsum limbum Solis, angusta & tenuis, similis aristæ, & ejus distantia à limbo Solis non excedebat ipsius maculæ parvam Diametrum, Octava, Decima, Duodecimaque hora illam adhuc videbat; secunda hora ipsi circumferentiæ applicata erat nec visibilis ipsi fuisset nisi totâ die oculos in ipsam intentos habuisset; Quarta denique hora nullum ejus vestigium telescopio decem & octo pedum optimo apparebat, unde statuendum illam omninò è Sole exivisse hora 3a. post Meridiem 23æ. diei Maii.

Tertia Junii & sequentibus diebus ad observationes rediit noster, usus Telescopio decem & octo pedum, tandem die septima Junii, hora tertia pomeridiana, eamdem maculam (ut postea certior ejus factus est) Solis discum subeuntem vidit, hora quarta decem & octo pedum Telescopio Sole lucidissimo eam distinctè vidit, sed tenuem admodum & Elliptica atmosphæra cinctam, sequentibus verò diebus ex via cui institit, eamdem esse quam prius viderat agnovit, & eam est persecutus sequentibus diebus, donec tandem 18. Junii tenuis apparere incepit, die verò decima nona ab hora 5ta. matutina eam observare cæpit Telescopio decem & octo pedum fere singulis semihoris, hora duodecima Atmosphæra & sensibili latitudine spoliatam vidit & adeo vicinam Solis limbo, ut vix inter ipsam & limbum Solis lucis radius perciperetur; hora secunda evanescebat, ita ut hora secunda cum semisse evanuisse censenda sit. 69.

Ergo à 23. Maii horâ tertiâ pomeridianâ ad septimam Junii eâdem horâ latuit macula, per integros scilicet quindecim dies, ab eo tempore ad 19 Discum pertransivit, per duodecim nempe dies.

Altera observatio Illmi. Cassini huic omninò congrua extat in primo Eruditorum diario anni 1677., illic exhibet Cassinus figuram maculæ quæ 30. Octobris 1676. observari cæpit, evanuit Novembris 3a. Iterum conspicua facta est quindecim post dies nempe 18a. Novembris; evanuit verò post duodecim dies, nempe horâ quartâ diei 30æ. Novembris, observationibus magnâ curâ institutis ad singulas ferè horas, postea verò 15a. Decembris hora meridiana cum semisse Telescopio 35. pedum in limbo orientali Solis visa est, ut instar lineæ obscuræ nec aliis Telescopiis observari poterat, sequentibus verò diebus facile videri potuit; hinc per quindecim dies maculas latere per duodecim dies Solis discum transcurrere liquet.

Ex quibus sequitur æqualitatem temporum occultationis & apparentiæ macularum observationibus non constare; quinimò rectius inæqualitatem eorum temporum exinde deduci. Ut quâdam quantitate à Solis disco distare maculas deducatur, & quidem cum differentia temporum eorum sit circiter dierum trium, in singulo quadrante erit horarum decem & octo, quo tempore decem gradus circa Solis centrum maculæ percurrunt; sed sinus versus decem graduum sunt 15. Centesimæ Radii, hinc tandem deducetur quod semi-Diameter Solis sit ad semi-Diametrum

DE MUNDI SYSTEMATE.

Jupiter paulo densior sit quàm aqua, hic (q) spatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 semidiametrorum suarum describit, (r) amitteret in medio ejusdem densitatis cum aëre nostro motus sui partem fere decimam. Verùm cum resistentia mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut aqua, quæ partibus $13\frac{2}{3}$ levior est quàm argentum vivum, minus resistat in eâdem ratione; & aer, qui partibus 860 levior est quàm aqua, minus resistat in eâdem ratione: si ascendatur in cœlos ubi pondus medii, in quo planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia prope cessabit. Ostendimus utique in scholio ad prop. XXII. lib. II. quod si ascenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum supra terram, (s) aër ibi rarior foret quam ad superficiem terræ in ratione 30 ad 0,0000000000003998, seu 75000000000000 ad 1 circiter. Et

69. trum circuli quem describunt maculæ ut 85 ad 100 sive ut 17 ad 20, & maculæ quindecim circiter semi-Diametris terræ supra Solis superficiem emineant: Hinc idem Wolfius eas esse Nubes in Solis Atmosphærâ elatas, conjectatur quæ quidem fuerat Kepleri sententia.

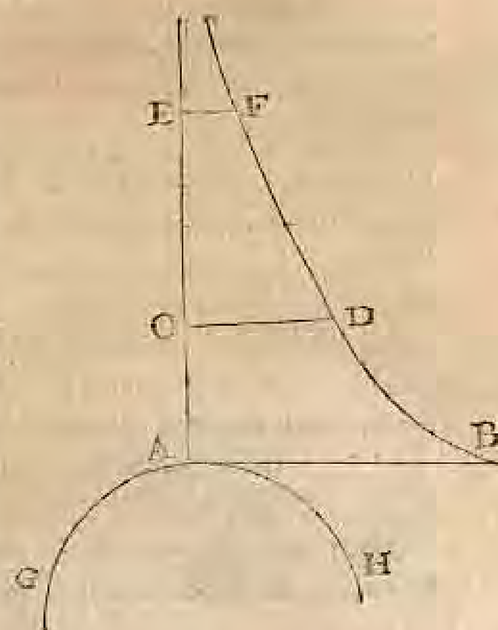
(q) * *Spatio dierum triginta.* Si arcus quem Jupiter motu diurno medio circà Solem describit multiplicetur per 30 & factum dividatur per semidiametrum apparentem Jovis in mediocri ejus distantiâ à terrâ, quotus erit numerus semidiametrorum Jovis quas intervallo 30 dierum describit. Potest etiam idem inveniri dicendo ut tempus periodicum Jovis ad 360 gradus ità 30 dies ad arcum hoc tempore descriptum, hic arcus dividatur per semidiametrum apparentem Jovis & quotus erit numerus semidiametrorum quas Jupiter 30 diebus describit.

(r) * *Amitteret in medio ejusdem densitatis.* (per schol. prop. 40. lib. 2. circa finem). Si diameter jovis dicatur D, V velocitas ejus sub initio motûs, & T tempus quo velocitate V in vacuo describet spatium S quod sit ad spatium $\frac{8}{3}D$ ut densitas jovis ad densitatem aëris nostri, hoc est, ut 860 ad 1 circiter. Jupiter in aëre nostro projectus cum velocitate V tempore quovis alio t amittet velocitatis suæ partem $\frac{tV}{T+t}$. Quoniam igitur Jupiter intervallo 30 dier. longitudine $459\frac{D}{2}$ describit, & densitas Jovis est ad densitatem aëris nostri ut 860 ad 1 ciciter, erit $1 : 860 = \frac{8}{3}D : S = \frac{6880}{3}D$, & $459\frac{D}{2} : 30$ dier. $= \frac{6880}{3}D : T = \frac{137600}{459}$. Undè si ponatur $t = 30$. dieb. erit $T + t = \frac{151370}{459}$, & $\frac{t}{T+t} = \frac{1377}{15137} = 0,09097 = \frac{1}{10}$ ferè. Cum autem Jupiter supponatur paulò densior quam aqua, minorem adhuc velocitatis suæ partem amitteret in aëre nostro.

(s) 70. * *Aër ibi rarior foret.* Si gravitas particularum aëris in omnibus à terrâ distantiis eadem sit, sintque distantiæ in progressione arithmeticâ, demonstratum est (in schol. prop. 22. lib. 2.) densitates fore in progressione geometricâ. Hinc patet in variis à terrâ distantiis per Logarithmicam exhiberi posse varias aëris densitates. Sit enim F D B Logarithmica, sintque abscissæ A C, A E, in progressione arithmeticâ, ordinatæ A B, C D, EF

LIBER TERTIUS. PROP. X. THEOR. X.

Et (t) hinc stella jovis in medio ejusdem densitatis cum aere illo superiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex resistentiâ medii non amitteret motus sui partem decimam centesimam millesimam. In spatiis utique terræ proximis, nihil invenitur quod resistentiam creet præter aërem, exhalationes & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentissimè exhaustis gravia intra vitrum liberrimè & sine omni resistentia sensibili cadunt; ipsum aurum & pluma tenuissima simul demissa æquali cum velocitate cadunt, & casu suo describendo altitudinem pedum quatuor sex vel octo simul incidunt in fundum, ut experien-



EF densitates aëris in locis A, C, E, repræsentabunt (33. lib. 2.). Quare datis altitudinibus A C, A E, & ratione $\frac{AB}{CD}$, innotescet ratio $\frac{AB}{EF}$. Nam (ex naturâ Logarithmicæ, per cor. 2. theor. 2. de Logarithmicâ) $AC : AE = L.\frac{AB}{CD} : L.\frac{AB}{EF}$, ideóque $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = L.\frac{AB}{EF}$.

Jam quia altitudines mercurii in barometro sunt ut pressiones atmosphæræ in diversis ab horizonte distantiis (prop. 20. lib. 2.). Si aëris densitas compressioni ponatur proportionalis, datis altitudinibus mercurii in barometro in locis A, C, datâque altitudine A E, dabitur altitudo mercurii in barometro in loco E, ideóque nota erit densitas aëris in E. Ut autem hæc omnia ad præsentem casum transferamus, sit G A H pars superficiei terrestris, altitudo mercurii in barometro in $A = 30$ poll. distantia $AC = 2280$ ped. Anglicis & altitudo mercurii in barometro in $C = 28$ poll. quemadmodum Newtonus experimento cognitum supponit. Sit altitudo $AE = 200$ milliaribus hoc est $=$ 1056000 ped. Anglicis, si milliare sit mensura ped. 5280, erit $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = \frac{1056000}{2280} L.\frac{30}{28} = 13,875061$; circiter cui Logarithmo in tabulis respondet numerus 75000000000000 erit ergò densitas aëris in A, hoc est, in superficie terræ ad ejusdem densitatem in distantia 200 milliarum seu ped. 1056000 ut 75000000000000 ad 1, circiter. 70.

(t) * *Hinc stella jovis.* Densitas Jovis est ad densitatem aëris illius superioris ut 860 × 75000000000000 ad 1. Hinc 1 : 860

DE MUNDI SYSTEMATE.

perientiâ compertum est. Et propterea si in cœlos ascendatur aëre & exhalationibus vacuos, planetæ & cometæ sine omni resistentiâ sensibili per spatia illa diutissimè movebuntur.

HYPOTHESIS I.

Centrum systematis mundani quiescere.

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui terram, alii solem in centro systematis quiescere contendant. Videamus quid inde sequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis terræ, solis & planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (per legum corol. IV.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper progrediente, centrum mundi quoque movebitur contra hypothesin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, sed nunquam longè recedere à communi gravitatis centro planetarum omnium.

Nam cum (per corol. 2. prop. VIII.) materia in sole sit ad materiam in Jove ut 1067 ad 1, & distantia jovis à sole sit ad semi-

70. $1 : 860 \times 7500000000000 = \frac{8}{5} D : S =$ $1720000000000000 : D$, & $459 \frac{D}{2}$ est ad 1710000000000000, ut anni pars duodecima seu $\frac{1}{12}$ ad $T = \frac{8600000000000000}{1367}$, annis $= 6300000000000$ ferè. Ponatur $t = 1000000$ annis & erit pars motûs amissa tempore $t = \frac{t}{T+t} = \frac{1000000}{6300000000000+1000000}$ $= \frac{1}{6300000+1} = \frac{1}{6300000}$ ferè,

LIBER TERTIUS. PROP. XII. THEOR. XII.

semidiametrum solis in ratione paulò majore (†); incidet commune centrum gravitatis jovis & solis in punctum (u) paulo supra superficiem solis. Eodem argumento cùm materia in sole sit ad materiam in saturno ut 3021 ad 1, & distantia saturni à sole sit ad semidiametrum solis in ratione paulò minore: incidet commune centrum gravitatis saturni & solis in punctum (x) paulò infra superficiem solis. (y) Et ejusdem calculi vestigiis insistendo si terra & planetæ omnes ex unâ solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integrâ solis diametro à centro solis distaret. (z) Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuò quiescit, sol pro vario planetarum situ in omnes partes movebitur, sed à centro illo nunquam longè recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum terræ, solis & planetarum omnium pro centro mundi habendum est. Nam cum terra, sol & planetæ omnes gravitent in se mutuò, & propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motus perpetuò agitentur: perspicuum est quod horum centra mobilia pro mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum esset in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset soli. Cùm autem sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, à quo centrum solis quam minimè discedit, & à quo idem adhuc minus discederet, si modo sol densior esset & major, ut minus moveretur.

(†) * *Et distantia Jovis à Sole sit ad semidiametrum Solis in ratione paulo majore*, * cum semi-Diameter Solis è tellure visa sit 16′ 4″ & distantia Terræ à Sole sit ad distantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52 circiter, sintque anguli sub quo idem objectum videtur e diversis distantiis reciproce ut illæ distantiæ fere, erit 52 : 10 = 16′ 4″ : ad semi-Diametrum Solis è Jove visam, quæ itaque erit 3′ 5″ circiter, fingatur ergo Triangulum Rectangulum cujus vertex sit in Jove & basis sit Solis semi-Diameter, angulus verticis erit 3′ 5″; Ideòque (per Tabulas Tangentium,) basis ejus continebitur in ejus altitudine 1115 vicibus; hinc distantia Jovis à Sole est ad semi-Diametrum Solis, ut 1115 ad 1, ideòque in ratione paulò majore quam ratio 1067 ad 1, hoc est, quam ratio materiæ in Sole ad materiam in Jove. 70.

(u) * *Paulò suprà superficiem Solis* (60. lib. 1.).

(x) * *Paulò infrà superficiem Solis* (ibid.).

(y) * *Et ejusdem calculi vestigiis* (61. lib. 1.).

(z) * *Aliis in casibus.* Si nempè ad diversas Solis partes planetæ consistant, centrum gravitatis modò versùs unam partem, modò versùs alteram incidit, hinc centrum gravitatis quasi medio loco iis in casibus poni debet, minor itaque sit centrorum distantia. 71.

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in ellipſibus umbilicum habentibus in centro ſolis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes à priori. Quoniam pondera planetarum in ſolem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro ſolis; ſi ſol quieſceret & planetæ reliqui non agerent in ſe mutuò, forent orbes eorum elliptici, ſolem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per prop. I. & XI. & corol. I. prop. XIII. lib. I.) actiones autem planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus planetarum in ellipſibus circa ſolem mobilem minùs perturbant (per prop. LXVI. lib. I.) quam ſi motus iſti circa ſolem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem jovis in ſaturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in jovem eſt ad gravitatem in ſolem (paribus diſtantiis) ut (a) 1 ad 1067; ideoque in conjunctione jovis & ſaturni, quoniam diſtantia ſaturni à jove eſt ad diſtantiam ſaturni à ſole fere ut 4 ad 9, (b) erit gravitas ſaturni in jovem ad gravitatem ſaturni in ſolem ut 81 ad 16×1067 ſeu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis ſaturni in ſingulis planetæ hujus cum jove conjunctionibus adeo ſenſibilis ut ad eandem aſtronomi hæreant. Pro (c) vario ſitu planetæ in his conjunctionibus, eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur, aphelium nunc promovetur nunc fortè retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. (d) Error tamen omnis in motu ejus circùm ſolem à tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere poteſt conſtituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis jovis & ſolis (per prop. LXVII. lib. I.) & propterea ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In (e) conjunctione autem jovis & ſaturni gravitates acceleratrices ſolis in ſaturnum, jovis in ſaturnum & jovis in ſolem ſunt fere ut 16, 81 & $\frac{16\times81\times3021}{25}$ ſeu 156609, ideoque differentia gravitatum ſolis in ſaturnum & jovis in ſaturnum eſt ad gravitatem jovis in ſolem ut 65 ad 156609 ſeu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima ſaturni efficacia ad perturbandum motum jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longe minor eſt quam ea ſaturnii. Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longè minores (f) præterquam quod orbis terræ ſenſibiliter perturbatur à lunâ. (g) Commune centrum gravitatis terræ & lunæ, ellipſin circum ſolem in umbilico poſitum percurrit, & radio ad ſolem ducto areas in eâdem temporibus proportionales deſcribit, terra vero circum hoc centrum commune motu menſtruo revolvitur.

PRO-

71\. 71. Quoniam Sol pro diverſo planetarum ſitu diverſimode agitatur, motu quodam libratorio lente ſemper errabit, nunquam tamen integrá, ſui diametro à centro quieſcente ſyſtematis totiùs recedet. Quia verò Solis & planetarum ponderibus (per cor. 1. prop. 8.) inventis, datoque ſitu omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum (61. lib. 1.) patet quoque dato communi gravitatis centro haberi locum Solis ad tempus propoſitum.

(a) * *Ut 1 ad 1067* (cor. 2. prop. 8.).

(b) * *Erit gravitas Saturni in Jovem* (prop. 8.)

(c) * *Pro vario ſitu planetæ.* Saturnum his perturbationibus obnoxium eſſe patet (per cor. 6. 7. 8. 9. prop. 66. lib. 1.).

(d) * *Error tamen omnis.* Si ad evitandum omnem ferè errorem, orbis Saturni umbilicus (per prop. 67. lib. 1.) locetur in communi centro gravitatis Jovis & Solis, Theoria Saturni juxtà hanc hypotheſim conſtituta ſatis accuratè congruit cum phænomenis, ità ut error qui ex hâc hypotheſi oritur, ubi maximus eſt, vix ſuperet minuta duo prima, & error maximus in motu medio vix minutis duobus primis annuatim major obſervetur. Hinc non parum confirmantur ea quæ de mutuâ planetarum perturbatione hactenus dicta ſunt.

(e) * *In conjunctione autem Jovis.* Quoniam in conjunctione Jovis & Saturni, diſtantia Saturni à Sole, Saturni à Jove, & Jovis à Sole ſunt inter ſe ut 9, 4 & 5, circiter, gravitatis acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem erunt ut $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{16}$ & $\frac{3021}{25}$ (per cor. 1. prop. 8.) hoc eſt, ut 16, 81 & $\frac{16\times81\times3021}{25}$. 71.

(f) * *Præterquam quod orbis terræ.* Orbem terræ ſenſibiliter perturbari à lunâ oſtendetur deinceps ubi vis lunæ definietur.

(g) * *Commune centrum gravitatis terræ & lunæ.* (prop. 65. lib. 1.).

LIBER TERTIUS. PROP. XIII. THEOR. XIII.

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium aphelia & nodi quieſcunt.

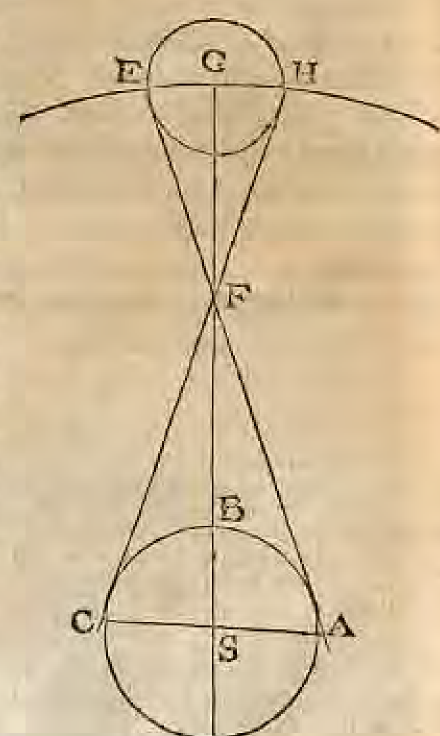
Aphelia quieſcunt, per prop. XI. lib. I. ut & orbium plana, per ejuſdem libri prop. I. & quieſcentibus planis quieſcunt nodi. Attamen à planetarum revolventium & (h) cometarum actionibus in ſe invicem orientur inæqualitates aliquæ, ſed quæ ob parvitatem hic contemni poſſunt.

Corol I. Quieſcunt etiam ſtellæ fixæ, propterea quod datas ad aphelia nodoſque poſitiones ſervant.

Corol. 2. Ideoque (i) cum nulla ſit earum parallaxis ſenſibilis ex terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immenſam cor-

72. (h) * *Et cometarum actionibus.* Eodem prorſus modo quo planetæ in ſe invicem agunt, patet quoque cometas in alios planetas agere ſimileſque effectus producere, ſed cum obſervationes Aſtronomicæ oſtendant apheliorum nodorumque motum eſſe tardiſſimum, ob parvitatem contemni poſſunt inæqualitates quæ ex planetarum & cometarum actionibus in ſe invicem oriuntur.

(i) * 72. *Cum nulla ſit earum parallaxis.* In hypotheſi terræ motæ, quieſcentibus Sole & ſtellis, tellus integram revolutionem abſolvit ſpatio 23. hor. 56'. 4''. circiter & circà ſolem revolvitur unius anni intervallo circulumque deſcribit qui ecliptica vel orbis annuus appellatur. Referat S ſolem, ſit F ſtella fixa in Eclipticæ plano ad diſtantiam quamlibet conſtituta; Sit A B C D orbis annuus, ponaturque tellus primum in loco A deindè poſt ſex menſes perveniat ad locum C in quo diſtet à loco A totâ diametro orbis annui, hoc eſt, 20000 terræ diametris circiter, ità ut anguli F S A, F S C ſint recti, ſtella F ex tellure A viſa reſpondebit puncto E, quod ad diſtantiam infinitam à terra removeri ſupponitur. Deindè eadem ſtella ob motum terræ ab A versùs B, progredi videbitur ab E versùs G, donec tellure perveniente ad C ſtella videatur in H, diſtans ſcilicet à loco in



quo

corporum diſtantiam nullos edent ſenſibiles effectus in regione ſyſtematis noſtri. Quinimo fixæ in omnes cœli partes æqualiter diſperſæ contrariis attractionibus vires mutuas deſtruunt, per prop. LXX. lib. I.

Liber Tertius. Prop. XIV. Theor. XIV.

quo ante ſex menſes verſabatur, toto arcu E H, cujus menſura eſt angulus E F H vel A F C. Hujus anguli ſemiſſis A F G, eſt parallaxis orbis annui ex terræ motu annuo oriunda. Dato autem angulo AFS, facilè invenitur diſtantia ſtellæ fixæ à terrâ A F, ſi fiat, ut ſinus anguli A F S, ad ſinum totum, ità A S Semidiameter orbis annui quæ eſt 10000 diametrorum terræ circiter ad A F. Jam verò patet ex telluris annuo motu oriri debere tranſlationem fixarum inter ſe parallaxi duplicatæ circiter æqualem. At ſtellæ majores & propiores reſpectu remotiorum quæ teleſcopiorum ope duntaxat conſpici poſſunt, moveri non obſervantur. Nulla eſt itaque fixarum parallaxis ſenſibilis ex terræ motu annuo oriunda, ideóque immenſa eſt fixarum à tellure diſtantia. Sivé autem terra moveatur, ſivé quieſcat, ſtellas fixas immenſis intervallis à terrâ diſtare certiſſimum eſt, nam parallaxim annuam minuto primo longè minorem eſſe conſentiunt omnes Aſtronomi. Fingamus vero annuam fixæ alicujus proximioris parallaxim eſſe uniùs minuti primi, à tellure diſtabit ſtella illa 3437 ſemi-Diametris orbitæ quam deſcribit terra ſiquidem ſinus unius minuti eſt ad Radium ut 1 ad 3437, & ſi ſemi-Diameter orbitæ ſit 20000 ſemi-Diametrorum terræ, ad minimum 68740000 terræ ipſius ſemi-Diametris diſtabit fixa à Tellure.

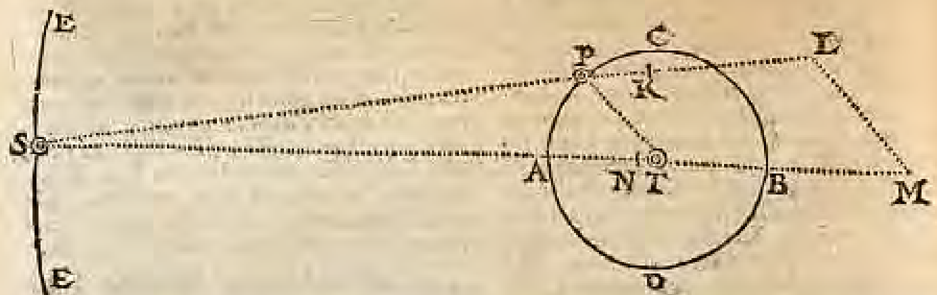
73. Chriſtianus Hugenius in Coſmotheoro lib. 2. aliam excogitavit methodum quâ rationem diſtantiæ fixarum ad diſtantiam Solis conjectando inveſtigaret. Supponit itaque ſirium quæ ſtella eſt inter alias fulgentiſſima, Soli circiter æqualem eſſe. Deindè tentavit quâ ratione Solis diametrum ità imminuere poſſet ut non major aut ſplendidior ſirio appareret. Quod ut aſſequeretur, tubi vacui duodecim circiter pedes longi aperturam alteram occluſit lamellâ tenuiſſimâ in cujus medio tam exiguum erat foramen ut lineæ partem duodecimam non excederet; oculoque alteri aperturæ admoto, ea videretur Solis particula cujus diameter erat ad diametrum totiùs ut 1 ad 182. Cum verò particula illa ſirio ſplendidior adhuc appareret, foramini globulum vitreum ejuſdem cum foramine diametri objecit, taliſque foci globulum ſelegit ut lux Solis ad oculum tranſmiſſa non major aut ſplendidior videretur eâ quam à ſirio emiſſam nudis oculis intuemur. Quo facto, hujus particulæ Solis diametrum invenit partem $\frac{1}{27664}$ diametri totiùs. Quare Sol inſtar ſirii appareret, ſi conſpicua foret pars diametri totius Solaris tantùm $\frac{1}{27664}$, diſtantia autem Solis à terrâ in quâ tantillus videretur foret ad diſtantiam in quâ ejus diametrum apparentem intuemur ut 27664 ad 1, diviſâque apparente Solis diametro mediocri per 27664, foret diameter Solis 4''' circiter. Hinc ſirii quoque diſtantia à terrâ eſt ad diſtantiam Solis ab eâdem ut 27664 a 1 & diameter apparens Sirii 4'''. Jam diſtantia Solis à terrâ ſi Parallaxis Solis ponatur 10'' 30''' eſt fere 20000 ſemid. terreſtrium, erit ergo diſtantia Sirii 553280000 ſemid. terreſtr. Si verò diſtantiam mediam Saturni à terra conſtituamus 190800 ſemid. terreſtr. prodit diſtantia inter Saturnum & Sirium 553089200 ſemid. terreſtr. 73.

 Scho-

De Mundi Syſtemate.

Scholium.

Cum planetæ ſoli propiores (nempe mercurius, venus, terra, & mars) ob corporum parvitatem parum agant in ſe invicem: horum aphelia & nodi quieſcent, niſi quâtenus à viribus jovis, ſaturni & corporum ſuperiorum turbentur. Et (a) inde colligi poteſt per theoriam gravitatis, quod horum aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu fixarum, idque in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum planetarum à ſole. Ut ſi aphelium martis in annis centum conficiat 33′. 20″ in conſequentia reſpectu fixarum; aphelia terræ, veneris, & mercurii in annis centum conficient 17′. 40″, 10′. 53″, & 4′. 16″ reſpectivè. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hâc propoſitione.



74. (a) 74. * *Et indè colligi poteſt.* Deſignet S Planetam aliquem ſuperiorem puta Jovem cujus Orbita ESE; ſit T Sol, P Planeta aliquis inferior, ponaturque corporum S, P, aliorumve plurium ſyſtema revolvi circà corpus T manentibus orbium E S E & P A B formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutentur verò utcumque magnitudines & per theoriam gravitatis colligitur (cor. 15. & 16. prop. *66.* & not. in eadem corollaria) errores angulares corporis P in quâvis revolutione genitos, ideóque & motus aphelii in quâlibet revolutione corporis P eſſe ut quadratum temporis periodici quam proximè. Si itaque numerentur illi errores, in variis Planetis P durante eodem determinato tempore, per centum v. gr. annos ut hic aſſumit Newtonus, errores integri eo tempore deſcripti erunt ut errores ſingulâ revolutione commiſſi & ut numerus revolutionum ſæculo integro peractarum, ille numerus revolutionum eſt inverſè ut tempus periodicum & errores (qui ſunt, ut dictum eſt, directè ut quadratum temporis periodici) ergo errores Apheliorum durantibus centum annis erunt in ſimplici temporum periodicorum ratione. Sed tempora periodica Planetarum P ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro T (per phæn. 4.). Sunt ergò errores Planetarum inferiorum in hâc ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro Solis. Quare ſi ponatur eum eſſe aphelii Martis progreſſum ut in annis centum conficiat 33′ 20″ in conſequentia reſpectu fixarum, invenietur motus aphelii aliorum planetarum qualis à Newtono definitur, dicendo ut Radix quadrata cubi diſtantiæ martis ad Radicem quadratam cubi diſtantiæ terræ à Sole, ita 33′ 20″ ad motum Aphelii terræ annis centum. Quamvis autem ex ipsâ gravitatis theoriâ colligatur planetarum inferiorum aphelia nunc promoveri nunc retrahi, medios tamen apheliorum motus notabili aliquo tempore in conſequentia fieri, patet ratiocinio ſimili illi quod de Lunâ factum eſt in nota c p. 24. hujuſce, unde facile conſtabit reverâ medium motum reſultantem poſt centum annos eſſe ut

Liber Tertius. Prop. XIV. Theor. XIV.

PRO-

ut ipſa tempora periodica, ideóque in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à Sole. Secundùm ea quæ dicuntur in cor. 16. prop. 66. lib. 1., &c. De præſenti ſcholio hæc dicta ſint. Sed prætermittenda non ſunt verba doctiſſimi Viri Joannis Bernoullii cujus authoritatem maxime veneramur. Sic ferè habet Clariſſ. Autor in Diſſertatione de Syſtemate Carteſiano quæ anno 1730. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecorata fuit, Paragrapho X L I. «((Newtonus ſupponit motum aphelii Martis in conſequentia eum «eſſe ut centum annorum ſpatio 33′ 20″ «conficiat. Hinc colligit per theoriam «gravitatis quod aliorum planetarum in«feriorum aphelia moventur in conſequen«tia reſpectu fixarum, idque in propor«tione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum «planetarum à Sole. Nullo fundamento «merâque apparentiâ nixus videtur New«tonus in conſtituendâ hâc ratione ſeſ«quiplicatâ. Neque enim intelligo, ne«que ut arbitror, plures alii me ipſo perſ«picaciores intelligunt quare mutua pla«netarum gravitatio, etiamſi concedere«tur, hanc proportionem poſtulet. Et «certè hæc eadem gravitatio planè irre«gularem effectum & ſuæ regulæ contra«rium producit reſpectu aphelii Saturni, «cum Newtonus ipſe ſtatuat in conjun«ctione Jovis & Saturni aphelium illud «nunc promoveri nunc retrahi. Numquid «de ſingulis planetis inferioribus idem quo«que ſtatuendum videretur. Nam ſi talis «admittenda foret attractio, tellus v. gr. «ubi in aphelio verſatur Jovemque reſ«pectu zodiaci præcedit, retraheretur, & «contra promoveretur ubi Jupiter tellu«rem præcederet. Unde hæc gravitatio «contrarios omninò effectus antè & poſt «conjunctionem telluris & Jovis produ«ceret. Sed nil tale obſervatur, idque ex «ſuâ hypotheſi Newtonus minime colli- 74.
«git, ſicut facere deberet.)).

* Ex prædictis autem facile reſponderi poſſe videtur Viri Doctiſſimi quæſitis.

1°. Enim conceſſa Planetarum gravitatione motum Apheliorum Planetarum inferiorum ſecundum proportionem ſeſquiplicatam diſtantiarum fieri debere, Mathematicè ſequitur ex Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. ut ſupra oſtenſum eſt, illud autem Corollarium 16. tam ex Sectione nona Lib. I. quam ex ipſa Prop. LXVI. legitimè deduci, ex ipſo Newtono notiſque illis locis adjectis probatum credimus.

2°. Quod queritur V. D. eamdem gravitationem contrarium effectum regulæ ſuæ producere reſpectu Aphelii Saturni, id vitio vertendum non eſt Syſtemati Newtoniano, quin è contra egregia procul dubio eſt ejus confirmatio. Quippe eo ipſo quod Saturnus cæteris Planetis ſit exterior, ex Syſtemate Newtoniano fluit vim Solis in Saturnum agentem augeri per vim Planetarum interiorum in conjunctione, unde Aphelium ejus debet regredi per Prop. XLV. (quod in Saturno obſervari, ex ipſo Caſſino didicimus, ut ſuperius notâ c pag. 23. retulimus) dum è contra Aphelia Planetarum interiorum per vim exteriorum in conjunctione poſitorum progredi debeant.

3°. Queritur denique quod Aphelia Planetarum inferiorum nunc retrahi nunc promoveri debeant, quod tamen non obſervatur; ſcilicet Newtonus ſtatuit quidem Aphelia Planetarum inferiorum in ſyzygiis promoveri, in Quadraturis retardari, plus promoveri verò quam retardari unde in totum progredi videntur; Aphelii autem ea veluti libratio obſervabilis non

eſt;

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire orbium principales diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſubſeſquiplicatâ temporum periodicorum, per prop. xv. lib. 1. (b) Deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum ſolis & planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter ſummam illam & ſolem, per prop. LX. lib. 1.

PRO-

74. eſt; etenim qui praxi Aſtronomicæ operam dant facile ſentiunt loca Apheliorum ita non determinari, ut nutatio Aphelii in ſingulis orbitæ partibus obſervatione obtineatur, imo poſt plures duntaxat revolutiones ſatis tutò Aphelii progreſſum inveniri, ipſæ Methodi ad eas obſervationes adhibitæ docent, hinc, ad obſervationes provocare non licet ut illam nutationem vel veram vel fictitiam eſſe probetur, ſiquidem obſervationes hâc de re nihil docere nos poſſunt.

Addit verò, *tellus ubi in Aphelio verſatur Jovemque reſpectu Zodiaci præcedit retraheretur, & contra promoveretur ubi Jupiter tellurem præcederet, unde gravitas contrarios effectus produceret ante & poſt conjunctionem Telluris & Jovis*, ſi in hoc exemplo agatur de motu Telluris in longum hæc revera fluunt ex gravitationis ſyſtemate, & reverâ in Lunâ inde producitur ea inæqualitas quæ *Variatio* dicitur Aſtronomis notiſſima; ſimilem inæqualitatem in terra non quidem obſervarunt Aſtronomi quia minima eſſe debet per ipſam gravitationis naturam, & cum ſeſe utrinque compenſet nullum ſui relinquit Veſtigium; Quod ſi in hoc exemplo de motu Aphelii Terræ agatur ut ex ſermonis ſerie, quis forte ſuſpicaretur, res fieri non debet ut hic indicatur, nam in tota ſyzygia Aphelium telluris progredi debere, & in quadraturâ duntaxat regredi, liquet per XLV. & LXVI. primi Libri.

Quas quidem adnotationes eâ mente non adjungimus ut quidquam derogetur ſummæ Viri Illuſtriſſimi, apud omnes φιλομαθηματικοῖς authoritati. Sed cum Newtonus brevitate ſuâ occaſionem dederit V. Ill. dicendi, eum nullo fundamento meráque apparentiâ proportionem motus Apheliorum ſtatuiſſe, hâc notâ ipſi injuſtâ eum purgare & veritas & Commentatoris officium poſtulabant.

(b) *Deindè ſigillatim* Jam capti ſunt orbium axes majores in ratione ſubſeſquiplicatâ temporum periodicorum, nempè nullâ habitâ ratione maſſarum; planetæ ſpectati ſunt tanquam totidem puncta in ellipſibus circà immotum in umbilico Solis centrum revolventia. Quoniam verò fit ut propter Solis & planetæ actiones mutuas, planeta ellipſim deſcribat cujus focus eſt commune gravitatis centrum planetæ & Solis, major axis ellipſeos quam planeta deſcribit circà Solem qui ipſe ſimul revolvitur circà commune centrum gravitatis, eſt ad axem majorem ellipſeos quam idem planeta circà Solem quieſcentem eodem tempore periodico deſcribere poſſet in ratione ſummæ maſſarum Solis & planetæ ad primam duarum mediè proportionalium inter ſummam illam & Solem (prop. 60. lib. 1.) ideóque ut axis major orbitæ corrigatur, augendus eſt in dictâ ratione. Datur autem ratio inter maſſas Solis & planetarum, ac proindè datur ratio in quâ orbitarum axes majores ſunt augendi. Vide de his not. 64. hujus libri.

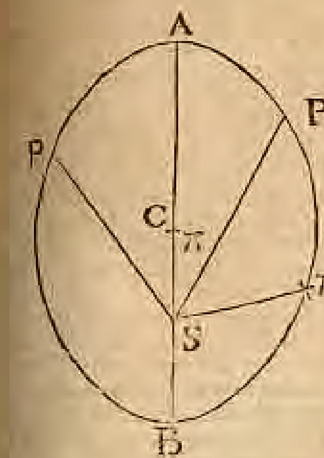
LIBER TERTIUS. PROP. XVI. PROBL. II.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

Invenire orbium eccentricitates & aphelia.

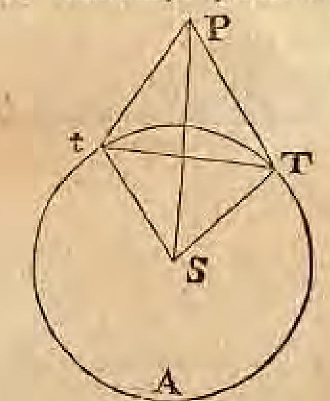
(c) Problema conſit per prop. XVIII. lib. 1.

PRO-



(c) 75. * *Problema conſit.* Sit S Sol, ſintque planetæ loca tria P, p, π è Sole viſa & data ſit recta BA axis major ellipſeos, deſcribatur (per prop. 18. lib. 1.) ellipſis cujus umbilicus eſt S & axis major AB, quod fit, ſi ex axe BA demantur longitudines SP, Sp, Sπ & cum reſiduis arcus ex punctis P, p, π deſcribantur, interſectio horum trium arcuum erit alter focus Ellipſeos quo invento orbita planetæ determinabitur, ſimulque dabitur diſtantia Solis à centro ellipſeos, hoc eſt, excentricitas, notumque erit ellipſeos punctum à Sole remotiſſimum, id eſt, aphelium.

Quia verò problema illud ſupponit data eſſe tria planetæ loca centrica, hoc eſt, ex Sole viſa, dataſque eorum à Sole diſtantias, hic adjungemus methodum quâ Clariſſ. Halleius ex dato tempore periodico, planetæ locum centricum ejuſque à Sole diſtantias invenire docuit. Referat TtA orbitam Telluris, S Solem, ſitque P planeta ſeu potiùs locus Planetæ ad Eclipticam reductus ſive punctum ubi 75.
perpendicularis ex planetâ in planum Eclipticæ demiſſa incidit. Ponatur tellus in T, obſerveturque planetæ longitudo



geocentrica, ex datâ theoriâ Telluris; dabitur longitudo apparens Solis, ideóque dabitur angulus PTS. Poſt integram planetæ revolutionem, planeta rurſus erit in P, quo tempore tellus ſit in t, ex eo puncto iterum obſervetur planeta, inveniaturque angulus PtS elongatio planetæ à Sole. Ex datis obſervationum momentis, dantur loca Telluris in Ecliptica è Sole viſa ejuſque à Sole diſtantiæ, ac proindè in triangulo tST, dantur latera tS, ST & angulus tST, quare inveniuntur anguli StT, STt & latus tT. Si itaque ab angulis datis PTS & PtS, auferantur anguli noti tTS, TtS dabuntur anguli PTt & PtT; undè in triangulo PtT ex datis angulis unà cum latere Tt, innoteſcet PT Deindè in triangulo PTS, dantur latera PT, TS cum angulo intercepto PTS, ideóque dabitur SP, quæ diſtantia planetæ à Sole curtata appellatur & notus fiet angulus TSP, ex quo dabitur

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

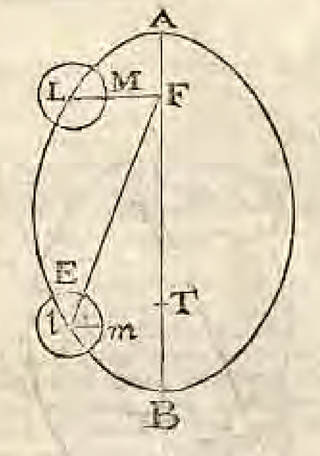
Patet per motus legem 1. & corol. 22. prop. LXVI. lib. 1. Jupiter utique respectu fixarum revolvitur horis 9. 56′, mars horis 24. 39′. venus horis 23. circiter, terra horis 23. 56′, sol diebus $25\frac{1}{2}$ & luna diebus 27. 7 hor. 43′. Hæc ita se habere ex phænomenis manifestum est. (d) Maculæ in corpore solis ad eundem situm in disco solis redeunt diebus $27\frac{1}{2}$ circiter, respectu terræ; ideoque respectu fixarum sol revolvitur diebus $25\frac{1}{2}$ circiter. Quoniam vero lunæ circa axem suum uniformiter revolventis dies menstruus est: hujus facies eadem ulteriorem

75. bitur locus planetæ heliocentricus. Est autem (ex trigon.) tangens latitudinis geocentricæ planetæ ad tangentem latitudinis heliocentricæ ut distantia planetæ à Sole curtata ad distantiam ejusdem à tellure curtatam, sed per observationem, nota est latitudo geocentrica planetæ, quare innotescet planetæ latitudo heliocentrica ex quâ simul & distantiâ à Sole curtatâ elicietur planetæ à Sole vera distantia & simili modo vera distantia Planetæ à terra, unde tandem in Triangulo cujus tria puncta sunt Sol, terra & Planeta omnia latera sunt cognita. Hâc ratione obtineri possunt varia loca centrica planetæ variæque à Sole distantiæ.

Cæterum hæc fusè variisque adhibitis methodis, explicata reperiuntur in introductione ad veram Physicam Joannis Keill, in Astronomiâ Physicâ Davidis Gregorii, & potissimum in elementis Astronomicis à Clariss. Cassino nuper editis.

(d) * *Maculæ in corpore Solis.* Cum revolutio macularum circà Solem sit admodum regularis & maculæ ipsæ vel Soli supernatent vel à Sole parum distent (69) non maculæ circà solem sed Sol ipse $25\frac{1}{2}$ dierum spatio circiter, circà proprium axem motu vertiginis movetur. Jovem, Venerem & Martem circà axem suum gyrare ex maculis quoque in horumce planetarum corporibus per vices in conspectum redeuntibus colligitur. In Mercurio autem qui Soli proximus est, ob nimium Luminis splendorem, & in Saturno ob maximam ejus à terrâ distantiam maculæ nullæ hactenus deprehendi potuerunt quibus determinaretur eorum vertigo. Attamen nil obstat quominus ex analogiæ lege colligamus Mercurium quoque & Saturnum circà axem suum gyrare. Macularum solarium theoriam elegantissimè exposuerunt Clariss. D. De-Lisle in Libro cui titulus, monumenta quæ ad Astronomiæ Physicæ & Geographiæ progressum conducunt, sæpeque laudatus D. Cassinus in Elementis Astronomicis. De maculis Veneris ejusque circà axem revolutione quædam inter Astronomos est lis; à Cassino patre 23 horis & 20′ absolvi, ex maculâ sive potius splendore quodam in disco Veneris notabili annis 1666, 1667 compertum fuerat, non ita tamen tuto, ipse enim scribebat de motu Veneris referente ipsius filio, *debiles adeò & confusas esse Veneris maculas ut earum terminos accuratè notare non liceat, unde utrum aliquis sit Veneris motus per eas determinare frustra quæritur.* Anno vero 1726. D^nus. Bianchinus maculas Veneris Lunaribus similes diu est persecutus, earumque

rem umbilicum orbis ejus (e) semper respiciet quamproximè, & propterea pro situ umbilici illius deviabit hinc inde à terrâ. Hæc



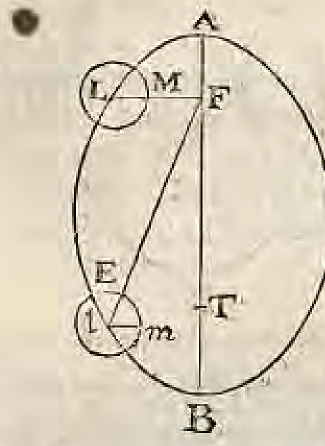
revolutionem 24 diebus 8. horis absolvi deduxit, circa axem admodum obliquum Eclipticæ; in suam autem sententiam D^num Cassinum filium non adduxit, quia apparentiæ à D^no. Bianchino observatæ per motum 23 horarum explicari poterant, dum Parentis observationes, cum hypothesi revolutionis 24 dierum & 8. horarum consentire non possent, hinc quæstio in medio remansit non facile solvenda, maculæ enim Veneris nonnisi Cœlo purissimo observari possunt & Lutetiæ nequidem cum maximis Telescopiis videri potuisse narrat idem Ill. Cassinus filius.

(e) 76. *Semper respiciet quamproximè.* Sit orbita lunæ ellipsis A L B A, in cujus umbilico T locatur terra, ductus ex umbilico radius vector areas ellipticas temporibus proportionales describit (prop. 1. lib. 1.); demissis autem à duobus quibusvis in ellipseos peripheriâ punctis ad alterum umbilicum F rectis L F, l F, angulus L F l erit quamproximè ad quatuor rectos sicut tempus quo arcus L l à Lunâ describitur ad integrum tempus periodicum Lunæ, si ellipsis sit parum excentrica. Jam referat L M meridiani Lunaris, hoc est, circuli per axem conversionis Lunæ planum, quod productum transeat per F, idem planum in quocumque orbitæ ellipticæ puncto locetur Luna, productum quoque per F transibit. Quoniam enim Luna circà axem suum uniformiter revolvit eodem tempore quo circà tellurem periodum suam absolvit, patet meridiani planum quod Lunâ existente in L situm L M obtinebat, dum Lunæ centrum aliud quodvis punctum l attigit, ad talem situm l E pervenisse, ut positâ l m parallelâ ad L M, angulus m l E sit ad quatuor rectos sicut tempus quo Luna arcum L l, percurrit ad integrum tempus periodicum Lunæ, ideòque (prop. 11. lib 5. elem.) angulus m l E est ad quatuor rectos sicut L F l ad quatuor rectos, ac proindè angulus m l E æqualis est angulo L F l, & ob rectas L F, l m parallelas jacebit l E in directum ipsi l F, hoc est, ubi Luna in l versatur, ejusdem meridiani planum quod in priori situ L productum etiamnum transit per F. Quarè in quocumque Lunaris orbitæ puncto centrum Lunæ occurat, productum ejusdem meridiani planum transit per F.

His præmissis patet eandem ferè Lunæ faciem semper ad terram converti easdemque ferè Lunares maculas observatori terrestri apparere. Cum enim productum ejusdem meridiani planum per alterum orbitæ Lunaris focum F transeat, sitque Lunaris orbita parum excentrica, hoc est, non multum distent umbilici F & T, eadem quamproximè Lunæ facies terræ obvertitur. Si verò accuratè observatis Lunaribus maculis, Lunæ facies ad terram conversa diligentiùs consideretur, non eadem præcisè facies à nobis videbitur. Quoniam enim ejusdem meridiani planum L M non ad terram T, sed ad alterum focum F dirigitur, patet Lunæ in L existentis hemisphærium è tellure T visum aliquantulum esse diversum ab illo quod videtur, dum Luna reperitur in l; nam pars hemisphærii Lunaris versus plagam B quæ anteà occultabatur fit conspicua, & contrà pars hemisphærii alterius versus K quæ anteà apparebat oculis evanescit, motus hic Lunæ è terrâ apparens quo fit ut quædam maculæ

De Mundi Systemate.

Hæc eſt libratio lunæ in longitudinem: Nam (f) libratio in latitudinem orta eſt ex latitudine lunæ & inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ. Hanc librationis lunaris theoriam D. (g) *N. Mercator* in aſtronomiâ ſuâ initio anni 1676 edita, ex literis



76. maculæ in partem à terrâ averſam ſe recipiant, dum aliæ ex parte averſâ in conſpectum prodeunt, libratio Lunæ in longitudinem appellatur. Librationem hanc bis in quolibet menſe periodico reſtitui manifeſtum eſt, quandò nempè Luna in apogæo A aut perigæo B verſatur; in utroque enim ſitu ejuſdem meridiani planum quod protenſum in F incidit, tranſit etiam per T. Cæterum hæc libratio omnibus inæqualitatibus obnoxia eſt quibus afficitur motus in longitudinem. (Vid. corollaria prop. 66. lib. 1.).

(f) 77. * *Libratio in latitudinem.* Quoniam axis circà quem Luna revolvitur, non eſt ad Lunarem orbitam normalis, ſed ad illam inclinatus, manifeſtum eſt Lunæ polos per vices ad terram vergere, ideòque Lunæ maculas nunc huic nunc illi polo vicinas è terrâ ſpectari. Quia verò axis Lunæ eſt fere ad planum Eclipticæ normalis, patet hanc librationem pendere à ſitu Lunæ reſpectu nodorum orbitæ Lunaris cum eclipticâ, ſeu ab ipſâ latitudine Lunæ. Ex illâ libratione oritur ut dum Luna versùs auſtrum ab eclipticâ maximè recedit, hoc eſt, dum in limite auſtrali verſatur, Lunæ polus borealis & aliquæ ultrà polum Lunaris globi partes à Sole illuſtrentur, intereadum polus auſtralis & aliquæ citrà hunc polum regiones Lunares in tenebris immerguntur; Si ergò in hoc ſitu contingat Solem in eâdem plagâ cum limite auſtrali verſari, Luna à conjunctione cum Sole ad nodum aſcendentem, hoc eſt, versùs Boream progrediens, has regiones maculaſque polo Boreali vicinas oculis ſubducet, dum interim ab oppoſitâ plagâ aliæ cum polo auſtrali regiones è tenebris emergunt, contrariumque accidet deſcendente Lunâ novâ à limite boreali, borealiores nempè Lunæ partes paulatim in lucem è tenebris prorepent, dum auſtraliores evaneſcunt.

(g) 78. * *D. N. Mercator.* Hic tranſcribemus N. Mercatoris verba. «Harum «tamen variarum atquè implicitarum li«brationum (Lunæ ſcilicet) cauſas, hy»potheſi elegantiſſimâ explicavit nobis Vir «Cl. Iſaac. Newton cujus humanitati «hoc & aliis nominibus plurimum debere «me lubens profiteor. Hanc igitur hypo«theſim Lectori gratificaturus, exponam «verbis, ut potero, nam delineationes in «plano vix ſufficiunt huic negotio. Itaque «reverſus ad globum, cogita nunc «illum repræſentare ſphæram in quâ mo«vetur Luna cujus centrum occupet tellus; «ipſum verò Lunæ globum credito polis «& axe ſuo inſtructum circà quem re«volvatur motu æquabili ſemel menſe ſy«dereo, dum à fixâ aliquâ digreſſa ad «eandem revertitur, & æquator Lunaris «ad firmamentum continuatus intelligatur «congruere plano horizontis lignei, & po«lus æquatoris Lunaris in firmamento im«mineat polo Boreo globi ad zenith ele«vato. Orbitam verò Lunæ concipito «partim ſuprà horizontem ligneum attol«li, partim verò infrà eundem deprimi, «quemadmodum in hoc ſitu globi conſ«pici-

Liber Tertius. Prop. XVII. Theor. XV.

literis meis plenius expoſuit. Simili motu (h) extimus ſaturni ſatelles circa axem ſuum revolvi videtur, eâdem ſui facie ſaturnum perpetuò reſpiciens. Nam circum ſaturnum revolvendo,

«picitur ecliptica, licet angulus æquato«ris Lunaris & ejus orbitæ non ſit fortè «æquè magnus atque hic quem globus exhi«bet. Deinde finge tibi globulos duos «æquales quorum uterque polis, æquato«re & meridiano unico primario inſignia«tur & uterque filo ſuſpendatur alterutri «polorum alligato. Horum alter referat «Lunam fictitiam motu æquabili ſecun«dum horizontis lignei circumlatam, atque «eodem tempore circà axem ſuum re«volutam reſpectu firmamenti, ità ut pla«num meridiani primarii Lunaris perpe«tuò tranſeat per centrum terræ. Alter «verò globulus veram Lunam imitatus in «orbitâ ſuâ feratur motu inæquali, nunc «ſuprà horizontem ligneum emergens, «nunc infrà eundem deſcendens, ità ut «planum æquatoris hujus Lunæ veræ ſem«per parallelum maneat plano horizontis «lignei, & planum meridiani primarii «ejuſdem Lunæ veræ ſemper parallelum «plano meridiani primarii Lunæ fictæ. Ità «fit ut Luna ficta eandem nobis faciem ob«vertens ſemper nulli prorsùs librationi «ſit obnoxia. At Luna vera dum à peri«gæo pergit ad apogæon præcedens Lunam «fictam, meridianum ſuum primarium oſ«tendit in medietate ſiniſtrâ ſui diſci tot «gradibus abeuntem à medio quot ſunt «inter longitudinem Lunæ veræ & fictæ. «Ab apogæo verò ad perigæon deſcendens «Luna vera ſequitur fictam atquè tum me«ridianus primus veræ Lunæ recedit ab «ejus medio ad dextram, hoc eſt, macu«læ omnes vergunt in occaſum, & cum «differentia inter mediam & veram Lunæ «longitudinem in quadraturis evadat ma«jor, propter evectionem ſyſtematis Lu«naris à centro telluris, hinc eſt quod in «quadraturis librationes in longum cer«nuntur majores. Similiter intelligitur «cauſa librationis in latum, quando Lu«na ſuperato nodo aſcendente, ſivè ſectio«ne horizonti lignei & orbitæ ſuæ, ten«dit ad limitem boreum, tum enim nobis «in centro ſphæræ poſitis, polus Lunæ «boreus & quæ ſunt circà eum maculæ 78.
«abſconduntur & polus auſtralis cum ſuis «maculis in conſpectum venit, undè ma«culæ omnes conſpicuæ in boream tende«re videntur; contrarium accidit, Lunâ «ad limitem auſtralem accedente. Ab iiſ«dem cauſis procedit macularum ex par«te lucidâ in obſcuram tranſitus & vicíſ«ſim. Nam in limite auſtrali polus Lunæ «boreus à Sole illuſtratur & quidquid eſt «zonæ frigidæ arctico Lunari incluſum, «dum frigida auſtralis in tenebris verſatur. «Quod ſi igitur Solem concipias in eâdem «plagâ cum limite auſtrali & lunam poſt «conjunctionem indè procedere ad no«dum aſcendentem, tum maculæ ſuperio«res apud polum boreum ſitæ, paulatim «cum ſuo polo à Luce in Tenebras con«cedunt, dum inferiores maculæ cum po«lo auſtrali ex Tenebris in Lucem prore«punt. Contrarium evenit ſemeſtri poſt, «cum Sol acceſſit ad limitem Lunæ bo«reum». Hactenus N. Mercator ſed plenior librationum Lunarium expoſitio habetur in elementis Aſtronomicis Clariſſ. Caſſini, ubi Vir Doctiſſ. varias harumce librationum apparentias reſpectu fixarum & Solis determinat, docetque methodum quâ ad quodlibet tempus datum poſſit definiri apparens macularum Lunarium ſitus.

(h) * *Extimus Saturni ſatelles*, tertio ſatellite ſæpè major apparet, poſteàque decreſcit ac tandem juxtà periodum nondum probè notam evaneſcit, id tamen ut plurimum contingit dum ſatelles in orbitæ ſuæ orientali parte reſpectu Saturni verſatur, rursùs deinde in conſpectum redit. Cauſa hæc eſſe videtur quod ſcilicet hemiſphærii ſatellitis pars quæ ad nos converſa eſt, maculis obſcurata præ luminis tenuitate cerni non poſſit, revolvente autem circà axem ſatellite, ad hemiſphærium oppoſitum tranſeunt maculæ, iterumque ſatelles fit conſpicuus. Cumque in eâ orbis ſui parte quæ orientem ſpectat obſcuratus ſatelles ſemper obſervetur, in alterâ verò parte nunquam, valdè probabile

DE MUNDI SYSTEMATE. do, quoties ad orbis ſui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, & plerumque videri ceſſat: id quod evenire poteſt per maculas quaſdam in eâ corporis parte quæ terræ tunc obvertitur, ut *Caſſinus* notavit. Simili etiam motu ſatelles extimus jovialis circa axem ſuum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis jovi averſâ maculam habeat quæ tanquam in corpore jovis cernitur ubicunque ſatelles inter jovem & oculos noſtros tranſit.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.

(i) Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. (k) Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic jovis diameter (conſentientibus aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem

7 8. bile eſt eandem hujus ſatellitis faciem planetæ primario ſemper obverti. Idem quoque ſimili argumento patet in extimo jovis ſatellite, niſi dicatur illas ſatellitum maculas fuliginum inſtar modò naſci, modò diſſipari, ſed ubi apparentiæ aliquæ ex duplici causâ ortum habere poſſunt, anteponendæ ſunt explicationes quæ à motu locali repetuntur. Alios Saturni Joviſque Satellites, Lunæ inſtar, Planetis primariis invariatam manifeſtarem facie ex analogiæ lege colligunt multi. Rem aliter ſe habere cenſet Clariſſ. Daniel Bernoullius in diſquiſitionibus Phyſico-Aſtronomicis an. 1734. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecoratis. Has conſular Lector.

(i) * *Planetæ ſublato omni motu circulari.* Patet (per not. 172. lib. 2.). Si planetarum materia ponatur fluida, viſque gravitatis ad unum centrum dirigatur.

(k) * *Per motum illum circularem.* Quoniam planetæ circà axem ſuum revolvuntur, planetarum partes à centris circulorum in quibus moventur, recedere conantur eóque major eſt vis illa centrifuga quo majores ſunt circulorum quas deſcribunt peripheriæ (cor. 3. prop. 4. lib. 1.). Sed æquator eſt circulus maximus, circuli autem versùs polos continuò decreſcunt, quare planetarum partes magis à centro æquatoris quam à centris parallellorum recedere conantur, ideóque ſi fluida ſit planetarum materia aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò deſcenſu ſuo ad polos diminuet.

dem argumento, niſi terra noſtra paulo altior eſſet ſub æquatore quam ad polos, maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noſter circa annum 1635 menſurando diſtantiam pedum Londinenſium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, ac obſervando differentiam latitudinem 2 *gr.* 28′ collegit menſuram gradus unius eſſe pedum Londinenſium 367196, id eſt hexapedarum Pariſienſium 57300.

(†) *Picartus* menſurando arcum gradus unius & 22′. 55″ in

(†) * *Picartus menſurando arcum .... invenit arcum gradus unius eſſe Hexap.* 57060. * Circa hanc Picarti menſuram obſervandum Ill. Caſſinum juniorem diſtantiam terreſtrem inter Parallelos Malvoiſinæ & Ambiani 42 hex. imminuendam ſtatuiſſe, ipſum verò arcum cæleſtem propter refractiones $1\frac{1}{2}''$ eſſe augendum, unde arcus gradus unius evadit hexap. 57010. Noviſſimè verò D. de Maupertuis arcum cæleſtem inter Lutetias & Ambianum metitus, multo minorem eum deprehendit quam eſſe debuiſſet ſecundum obſervationes Picarti, quare ſervatis menſuris terreſtribus Picarti arcum unius gradus 57183 hex. determinavit: Hæc paulo fuſiùs ſunt diducenda.

I. Cum menſura Picarti à Malvoiſina ad Sourdonem procedat, & hinc ad Ambianum; Picartus diſtantiam à Malvoiſina ad Sourdonem per duas Triangulorum ſeries determinat, unam præcipuam vocat quoniam ea ipſa erat quâ uti primum conſtituerat, ſed cum aliquid dubii in eâ obſervaſſet alteram inſtituit, quam priori antepoſuit quia obſervationum in eâ factarum certior ſibi videbatur, & accurate conſentiebat cum baſi proximâ actu menſuratâ: Ill. verò Caſſinus diſtantiam inter Parallelos, Malvoiſinæ & Sourdonis ex priori ſerie determinat $68325\frac{2}{3}$ hex. dum eamdem diſtantiam Picartus, cui Ill. de Maupertuis ſuffragatur, facit hex. 68347. 7 8.

Differunt iterum Picartus & Illuſtriſſimus Caſſinus in diſtantiâ inter Sourdonem & Ambianum, eam enim diſtantiam Picartus ex ſuis menſuris hex. $11161\frac{2}{3}$ invenit, Caſſinus verò hex. $11135\frac{1}{2}$: diſcriminis autem hujus ratio duplex eſt, nam cum uterque Triangulos formare incipiat in lineâ quæ intercipitur inter Sourdonem & Montemdeſiderium, Ill. Caſſinus eam lineam aſſumit hex. $7116\frac{1}{2}$ juxta priorem ſeriem Triangulorum Picarti, & Picartus alteram ſeriem verificatam per Baſim proximam actu menſuratam anteponens eam lineam $7122\frac{1}{2}$ Hex. facit: Cum verò diverſis Triangulis inde ad Ambianum uſi ſint, in iis Triangulis occurrit ſenſibilis differentia quæ ſeſe prodit in Angulo Sourdoni facto inter lineas inde ad Ambianum & Montemdeſiderium protenſas, nam is Picarto eſt 137°. 56′. 10″ angulus autem idem à Caſſino determinatur 137°. 53′. 30″, ex quâ differentiâ 2′. 40″. & ex Baſeos inter Sourdonem & Montemdeſiderium diverſitate, oriri potuit diſcrimen illud in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoisinam*, invenit arcum gradus

78. illud in distantiâ inter Sourdonem & Ambianum.

In arcu autem Cælesti à Picarto mensurato refractionis correctionem adhibet Cassinus quam neglexerat Picartus; cum ergo invenisset distantiam genu Cassiopeæ à Zenith loci in quo observabat & qui erat 18 Hex. Malvoisinâ meridionalior 9° 59' 5" versus septentrionem, & cum ejus stellæ distantiam à Zenith loci 75 hex. meridionaliori quam ædes Ambiani 8° 36' 10" invenisset, arcum inter Zenith eorum locorum juxta Malvoisinam & Ambianum interceptum fecit Picartus 1°. 22' 55" ut refert Newtonus.

Verum propter refractionem augendas esse has distantias à Zenith statuit Cassinus ita ut prima distantia 10", altera $8\frac{3}{5}''$ fiat, cum ergo prior fiat 9° - 59 - 15

Altera - - - 8 - 36 - $18\frac{3}{5}$

Arcus interceptus inter Zenith locorum observationis fit - - - - 1 - 22 - $56\frac{2}{5}$

Ex his ergo correctionibus tam in arcu Cælesti quam in mensuris terrestribus, à Picarto observatis deducit Ill. Cassinus arcum unius gradus esse 57010 hex.

II. Ill. de Maupertuis mensuras terrestres quas Picartus adoptavit admittens arcum cælestem mensuravit Instrumento, à solertissimo Graham accuratissimè constructo, cum autem priores sectores circa axem immotum ex quo filum verticale pendet revolverentur, & divisiones subtiliores in sectoris limbo per lineas transversas signarentur, in hoc Instrumento Telescopium in sua summitate duos cylindros adjunctos habet circa quos cum sectore inferius adfixo revolvitur & ex quorum centro pendet filum verticale quo notentur gradus in limbo sectoris; Divisiones in eo limbo gradus & eorum partes octavas tenuissimis punctis indicant nihilque præterea, & ad observationem faciendam ita constituitur instrumentum, ut filum pendulum alicui è divisionibus accuratè applicetur, idque Microscopio cum lumine juxta limbum collocato agnoscitur, tum cochleâ pellitur instrumentum donec objectum in axe Telescopii cernatur & numerus gyrorum cochleæ, partesque singuli gyri numerantur in limbo circuli horologii instar cochleæ adnexi, ita ut minimi cochleæ progressus maximè sensibiles fiant. Tali itaque instrumento cujus radius est octo pedum una unciâ demptâ observationes instituit Ill. de Maupertuis Lutetiæ in loco 1105 Hex. magis septentrionali quam ædes B. Virginis, & Ambiani in loco $9\frac{1}{2}$ meridionaliori æde ejus urbis. Inde ex stellis & Persei, & Draconis, arcum cælestem inter Zenith eorum locorum interceptum 1° 1' 12" determinavit, correctionibus præcessionis Æquinoxiorum & aberrationis lucis adhibitis. Hinc cum juxta Picartum inter Parallelos Malvoisinæ & Ambiani sint 78907. hex. inter Malvoisinam & ædes B. Virginis Luteriis sint $19376\frac{1}{2}$ hex. manent inter utramque ædem $59530\frac{1}{2}$ hex. ex quibus detractis $1203\frac{1}{2}$ hex. propter observationum loca. Invenitur arcum 1°. 1'. 12" respondere mensuræ 58327. hex. ideóque arcum unius gradus Hexapedas 57183. in eâ latitudine continere.

Verum hic non dissimulandum qualis quantusque error observationi Picarti adscribatur, ex hac novissimâ Ill. de Maupertuis observatione, & ut ille error rectè æstimetur corrigendæ sunt ejus observationes cælestes non tantùm per refractionem sed etiam per Æquinoctiorum præcessionem & aberrationem lucis, etenim cum eodem tempore factæ non fuerint observationes à Picarto Malvoisinæ & Ambiano, sed inter eas mensis intervallum effluxerit, interea per præcessionem Æquinoctiorum augebatur stellæ genu Cassiopeæ declinatio $1\frac{1}{2}''$ ut ipse Picartus observat, simulque propter aberrationem lucis 8" circiter augeri eam declinationem nunc constat, quare stella quæ Ambiani observabatur non erat in eodem cæli puncto quo fuerat cum Malvoisinæ observaretur, sed erat 10 secundis ad septentrionem provectior, dum ergo observabatur eam stellam distare à Zenith Ambiani 8°. 36'. $18\frac{3}{5}$ (adhibita refractionis correctione) Punctum fixum quod fuerat Malvoisinæ observatum 8°. 36' $8\frac{3}{5}$ à Zenith duntaxat distabat, & cum id Punctum Malvoisinæ 9° 59' 15" à Zenith distasset arcus inter duo Zenith interceptus erat 1°. 23' $6\frac{2}{5}$ (non 1°. 23' $56\frac{2}{5}$) qui respondet 78850. hex. unde gradus unius mensura fiet duntaxat $56916\frac{5}{8}$ hexapedarum; sive ut conferatur hæc observatione cum observat. Il. de Maupert. fiatque si $58315\frac{1}{6}$ hex. respondeant 1° 1' 12" Quot gradibus respondebunt 78850. Invenietur 1°. 22' $45\frac{1}{3}''$. loco 1°. 23' $6\frac{2}{5}''$ ita ut error in observatione Cælesti Picarti, sit 20".

Singulare quid occurrit in ipsa Picarti narratione; Postquam enim differentias inter Zenith Malvoisinæ & Sourdonis, Malvoisinæ & Ambiani dedit, addit; «Differentia temporis quod effluxit inter observationes requireret ut ex priori differentia 1" *demeretur* ex posteriori $1''\frac{1}{2}$ (propter æquinoctiorum præcessionem) sed hanc correctionem ne minutias sectari videamur omisimus » si mutatio declinationis per præcessionem æquinoctiorum orta ex iis differentiis *demenda* foret, mutatio declinationis propter aberrationem pariter foret demenda siquidem fit in eamdem partem, itaque cum arcus inter Malvoisinam & Ambianum adhibitâ correctione refractionis, sit 1°. 22. $56\frac{2}{5}$ dempta præcessionis & aberrationis variatione 10" circiter, maneret is arcus 1°. 22. $46\frac{2}{5}$ ad unam secundam qualis secundum Dni. De Maupertuis observationem inveniri debuisset.

Verum ut correctio præcessionis & aberrationis *demenda* foret, ut vult Picartus, oporteret ut observationes primum Ambiano postea Malvoisinæ fuissent factæ, sed ita notantur illæ observationes, *Septembri Malvoisinæ* & *Octobri Ambiano*, si itaque rectè ratiocinatus sit sed male tempora notaverit elegantissimè consentient ejus observationes cum accuratissimis postea factis; sin bene tempora notaverit, sed malè fuerit ratiocinatus, fatendum erit errorem circiter 20" inter duas ejus observationes esse distribuendum, stantibus observationibus Ill. De Maupertuis 6" aut 7" secundis propiùs accederent ad has observationes illæ quas instituit Picartus à Malvoisinâ ad Sourdonem, ita ut error 12" duntaxat, inter duas observationes distribuendus superesset. 78.

(‡) * *Cassinus senior mensuravit distantiam in meridiano à villâ Collioure ad observatorium Parisiense & filius addidit distantiam ab observatorio ad turrim Urbis Dunkirk.*

* Has duas mensuras in unam summam conjicit Newtonus, quia cum Cassinus senior gradum majorem quam Picartus invenerit; Cassinus filius minorem, conjunctis mensuris obtinetur gradus mediocris proximè æqualis mensuræ gradus à Picarto assignatæ, quem ut gradum telluris ut sphæricæ consideratæ assumit Newtonus; verum hic duo sunt notanda, 1°. utitur Newtonus isto gradu mediocri quasi foret Æquatoris gradus, qui quidem isto major est, sed inde parum mutatur sequens calculus ut liquebit si eumdem instituamus assumpto gradu æquatoris isto majore, v. gr. 57216 hex. ut deduceretur ex Theoriâ ipsius Newtoni, & gradum in 45. gradu faciendo 57100. hex.

2°. Distinguendæ sunt observationes Cassini senioris & filii, hæc enim propter aberrationem lucis correctione indiget, mensura vero Ill. Cassini Patris à villâ Collioure ad observatorium arcum Cælestem 6°. 18' 57". continet & respondet hexapedis 360614. (ad maris libellam reductis mensuris) unde gradus fit 57097 hex.

gradus unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. (‡) *Cassinus* senior mensuravit distantiam in meridiano à villâ *Collioure* in *Roussilon* ad observatorium Parisiense; & filius ejus addidit distan-

diſtantiam ab obſervatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Diſtantia tota erat hexapedarum $486156\frac{1}{2}$ & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & $31'.\ 12\frac{1}{5}''$. Unde arcus gradus unius prodit hexapedarum Pariſienſium 57061.

78. hex. verificatæ ſunt menſuræ in utroque extremo, nec in iis gravis error eſt metuendus cum aptè conſenſerint Triangulorum calculi cum ultimis lineis ſeu Baſibus actu menſuratis; Error verò qui in obſervatione Cœleſti occurrere poteſt ſinguli gradûs menſuram parùm immutat quia in ſex gradûs & ultra diſtribuitur, cum verò iiſdem anni temporibus tàm Lutetiæ quàm in villâ Collioure obſervationes inſtitutæ fuerint aberratio lucis calculum arcûs Cœleſtis non immutavit; Hinc in numeris proximis rotundis gradus in latitudine graduum 45. 57100. Hexapedarum aſſumi poteſt ſatis tutò.

3°. Quoad obſervationes Ill. Caſſini filii, cum inter 15. Julii & 4. Sept. factæ fuerint obſervationes Cœleſtes quibus determinaretur arcus inter Zenith urbis Dunkirk & Obſervatorii interceptus, aberrationis correctio illis eſt adhibenda quæ tunc temporis nondum erat cognita; verùm illam correctionem neceſſariam eſſe tantò minùs dubium eſt, quod cum is arcus per obſervationes ſtellæ γ Draconis fuerit determinatus, ejus ipſius ſtellæ aberratio ab Ill. Bradleio fuerit obſervata (vid. Tranſ. Phil. Vol. XXXV. pag. 637.) & nuperrimè à D. Le Monnier; immediatis ergo experimentis conſtat ejus ſtellæ declinationem augeri à menſe Julio ad Septembrem, ita ut cum Lutetiæ ſerius obſervata ſit, $11\frac{1}{2}$ ſecundis Polo tunc vicinior eſſe potuit quam cum in urbe Dunkirk obſervata fuerat, ideoque totidem ſecundis Zenith remotior apparebat, quàm punctum fixum quod in urbe Dunkirk fuerat obſervatum; unde cum ex diſtantiâ à Zenith Lutetiæ detrahatur diſtantia ejuſdem ſtellæ à Zenith urbis Dunkirk, arcus reſiduus illis $11\frac{1}{2}$ ſec. eſt mulctandus, & cum reſiduum invenerit Ill. Caſſinus $2°.\ 12'.\ 9\frac{1}{2}''$ eſt reducendus ad $2°.\ 11'.\ 58''$, & cum is arcus 125454 Hexapedis reſpondere ab Ill. Autore ſtatuatur, arcus unius gradus fiet Hex. 57038. 5^{ped}.

Verum minor diſſenſus inter obſervationes Ill. Caſſini filii & D^{ni}. de Maupertuis apparebit ſi attendatur, partem illius diſſenſus oriri ex eo quod, dum menſuris Picarti uterentur diverſas ejus Triangulorum ſeries adoptaverint, quare ut conferantur eorum inventa, reducendæ ſunt eorum ſupputationes quaſi eâdem ſerie Triangulorum Picarti uterentur ambo: v. gr. ſupponatur utrumque aſſumpſiſſe eam ſeriem Triangulorum quam ipſe Picartus adhibuit, ſed ad Sourdonem uſque, & inde (quia Ill. Caſſinus propriis ſuis Triangulis diſtantiam à Sourdone ad Ambianum determinavit) aſſumatur ea diſtantia qualis ex Triangulis Ill. Caſſini deduceretur ſi modo priori ſerie uſus fuiſſet, & reliqua ejus Triangula uſque ad urbem Dunkirk in eadem proportione augeantur; hinc iſte emerget calculus.

Primo tota diſtantia inter Parallelos Obſervatorii & Sourdonis erit ex Picarto - - - $49926^{hex}.\ 3^{ped}$.

Secundo; Diſtantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani eſt ex Caſſino $10539\frac{1}{2}^{hex}$. aſſumpta Baſi $7116\frac{1}{2}$; ſed in alterâ ſerie Triangulorum eadem Baſis erat $7122\frac{1}{5}$ hinc aſſumptâ hac menſura, diſtantia Parall. inter Sourdonem & Ambianum ex Triangulis Ill. Caſſini erit - $10547^{hex}.\ 4^{ped}$.

Tota ergo diſtantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani erit - - 60474 - 1

Ter-

57061. Et ex his menſuris colligitur ambitus terræ pedum Pariſienſium 123249600, & ſemidiameter ejus pedum 19615800, ex hypotheſi quod terra ſit ſphærica.

In latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit pedes Pariſienſes 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$ ut ſupra, id eſt, (††) lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis

Tertio diſtantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk eſt ex Caſſino $65109^{hex}.\ 1^{ped}.$, ſuppoſitâ Baſi $7116\frac{1}{2}$, ſi ergo ſupponatur ea linea $7122\frac{1}{5}$ fiet diſtantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk ex Triangulis Ill. Caſſini. - - - $65162^{hex}.\ 3^{ped}$.

Tota ergo diſtantia inter obſervatorium & Parallel. urbis Dunkirk fiet 125636 - 4 & detractis 9^{h}. hex. pro locis obſervationum Cœleſtium & $2\frac{1}{2}^{hex}$. pro libellâ ſuperſunt $125536^{hex}.\ \frac{1}{6}$, quæ reſpondent $2°.\ 11'.\ 58''$, unde arcus unius gradus invenitur 57076 : 2.

Pariter in Obſervatione D^{ni}. de Maupertuis cum ſint inter Parallelum Obſervatorii & ædis Ambiani 60474 : 1. & propter obſervationum Cœleſtium loca 2159^{hex}. ſint detrahendæ, arcus inter obſervationes D^{ni}. de Maupertuis obſervatus, qui eſt $1°.\ 1'.\ 12''$, reſpondebit hex. 58315 : 1. Unde gradus erit $57171\frac{2}{3}$.

Ut itaque verus diſſenſus inter obſervationem Ill. Caſſini & D^{ni}. de Maupertuis habeatur, fiat ſicut $57171\frac{2}{3}$ ad $125536\frac{1}{6}$ ita unus gradus ad quartum, invenietur arcus $2°.\ 11'.\ 45''$, qui 13″ duntaxat differt ab arcu $2°.\ 11'.\ 58''$ quem Ill. Caſſinus obſervavit; Quæ differentia inter quatuor obſervationes Cœleſtes & menſuras terreſtres diſtributa, efficeret concluſiones uniformes: Ergo illæ obſervationes nedum inter ſe pugnent, iis differentiolis tantùm diſcrepant, quæ inevitabilibus accidentibus debentur.

Interea ſatis liquet quod ſi in unam ſummam conjicerentur menſuræ Ill. Caſſini Patris & Filii, diminuendus eſſet arcus

totalis 12″ propter correctionem aberrationis Lucis, cui obnoxia eſt obſervatio Ill. Caſſini filii, & menſuræ terreſtres forent augendæ, quia ex obſervatione D^{ni}. de Maupertuis additur pondus rationibus quibus inter duas ſeries Triangulorum D^{ni}. Picarti ea præponenda cenſeatur quam Picartus prætulerat & quam Ill. Caſſinus neglexerat, imo & probabile ſit errores minimos inevitabiles, eam in partem conſpiraſſe ut arcus Cœleſtis major vero videretur Ill. Caſſino & menſuræ terreſtres vero minores; Quibus omnibus perpenſis, magnitudinem unius gradus in 45°. lat. gradu, circa medium menſuræ à Caſſino Patre inſtitutæ rotundis numeris ſatis tuto 57100. hex. aſſumi poſſe liquet. 78.

(††) *Id eſt, lineas* $2173\frac{7}{9}$. Ex accuratiſſimis obſervationibus D^{ni}. de Mayrans (cap. 6. lib. 3. fig. terræ deter. à D. de Maupertuis) longitudo penduli ad ſingulas ſecundas vibrans eſt linearum 440.57. hinc, cum juxta Prop. 26. Horol. Oſcill. Hugh ſit circuli circumferentia ad Diametrum ut 1″. ad tempus deſcenſus per dimidiam altitudinem penduli, ſive per lineas 220. $28\frac{1}{2}$, ſint verò quadrata temporum ut ſpatia deſcenſu verticali iis temporibus deſcripta erit *9.8696* ad 1. (Quadratum circumferentiæ ad quadratum Diametri 1.) ſicut ſpatium uno ſecundo deſcriptum ad $220.28\frac{1}{2}$ lin. Ergo corpus grave in latitudine Lutetiæ tempore minuti unius ſecundi deſcribit lineas 2173.631356. paulò minus quam Newtonus aſſignat, ejus undecima milleſima pars foret .197602. Quare id grave in vacuo cadendo deſcriberet altitudinem 2173.828958.

poris diminuitur per pondus aëris ambientis. (l) Ponamus pondus amissum esse partem undecimam millesimam ponderis totius, & corpus illud grave cadendo in vacuo describet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius secundi.

Corpus in circulo ad distantiam pedum 19615800 à centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56'. 4'' uniformiter revolvens tempore minuti unius secundi (m) describet arcum pedum 1433,46, cujus sinus versus est pedum 0,0523656, seu linearum 7,54064. (n) Ideoque vis, quâ gravia descendunt in latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centrifugam corporum in æquatore à terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore terræ est ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt à terrâ in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50'. 10'', in (o) duplicatâ ratione radii ad sinum

78. (l) * *Ponamus pondus amissum.* Quoniam corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris, & plumbum est ad aquæ gravitatem specificam ut 11,345 ad 1000, aqua verò ad aërem paulo minus quam 1000 ad 1, hinc gravitas plumbi est ad gravitatem aëris fere ut 11000 ad 1, hinc ergo plumbum amittit in aëre ponderis sui partem undecimam millesimam, itaque in vacuo augetur pondus plumbi parte undecimâ millesimâ ponderis totius, hoc est spatia eodem tempore descripta undecimâ millesimâ totius spatii descripti parte augeri debent, fiat ergo 11000 ad 11001 ut $2173\frac{7}{9}$ ad quartum, illud quartum erit 2173.966 ergo poni potest quam proximè spatium tempore minuti unius secundi descriptum in vacuo à plumbo, ideoque à quovis alio corpore gravi (nam omnia gravia æquali celeritate in vacuo cadunt) linearum 2174

(m) * *Describet arcum ped.* Computum initur eodem planè modo ac not. 63.

(n) * *Ideòque vis.* Vires uniformes sunt ut spatia dato tempore descripta, sed est spatium vi gravitatis tempore unius minuti secundi descriptum 2174 lin. spatium autem vi centrifugâ descriptum ut sinus versus, hoc est, lin. 7, 54064.

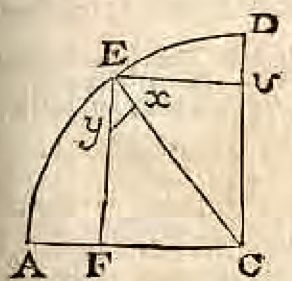
* Si gradus Æquatoris sit major 57061 hex., v. gr. si 57226 hex. sumatur, erit iste sinus versus linearum 7. 56244; ideoque vis quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ est ad vim centrifugam corporum in Æquatore ut 2173. 828956 ad 7. 56244.

(o) 81. * *In duplicatâ ratione radii.* Quadrans circuli A E D revolvatur circà radium A C, ducatur radius C D ad A C normalis, ipsique parallela agatur ordinata E F, erit vis centrifuga in D secundum directionem D C sive E F, ad vim centrifugam in E secundum directionem C E, in ratione duplicatâ radii C D ad ordinatam E F quæ est sinus complementi arcûs seu altitudinem E D. Exprimat enim D v vim centrifugam in D secundum directionem D C, & recta E y, exprimat vim centrifugam in E secundum directionem E F, ductâ perpendiculari yx ad rectam E C, exprimet E x, vim centrifugam in E, secundum directionem E x; sed est D v : E y = D C : E F (cor. 3. prop. 4. lib. 1.) & ob triangula rectangula E xy E F C similia, E y : E x = E C vel

sinum complementi latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 5,267. Addatur hæc vis ad vim quâ gravia descendunt in latitudine illa *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illâ vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describet lineas 2177,267, seu pedes Parisienses 15 dig. 1 & lin. 5.267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore terræ ut 2177,267 ad 7,54064 seu 289 ad 1.

Unde

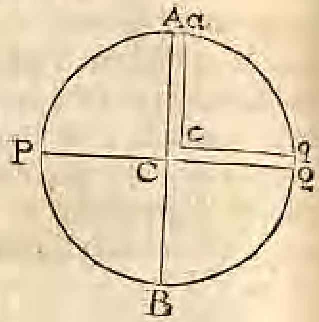
vel D C : E F. Quarè, componendo D v : E x = D C^2 : E F^2. Q. E. D.



* Verum si Meridianus terræ sit alia curva quam circulus v. gr. sit Ellipsis, vis centrifuga corporum in æquatore terræ est ad vim centrifugam qua corpora perpendiculariter à terra recedunt in latitudine datâ, in ratione compositâ ex ratione radii ad sinum complementi latitudinis illius, & ex ratione radii Æquatoris, ad ordinatam ejus Ellipseos in eâ latitudine datâ; hinc pro Ellipsi ratio vis centrifugæ in Æquatore ad vim centrifugam in latitudine data exprimetur hoc modo, sit m axis major, n axis minor, r Radius, c sinus complementi latitudinis quæsitæ, erit vis in Æquatore ad vim in eâ latitudine, ut $mr\sqrt{m^2 \times \overline{r^2 - c^2} + n^2c^2}$ ad n^2c^2. Ut facile deducetur ex Ellipseos naturâ; Quare si fingatur $m = 230$ & $n = 229$ juxta Newtonum invenietur calculo eas vires esse inter se ut 7.56244 ad 3.09660, addatur hæc vis ad vim quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ, & vis tota gravitatis (in hyp. assumptis) efficeret ut gravia cadendo describerent lineas 2176. 92558. Unde vis tota gravitatis in latitudine Lutetiæ erit ad vim Centrifugam corporum Æquatore terræ ut 2176. 92558 ad 7.56244 sive ut 287. 86 ad 1. 78.

Hæc autem vis gravitatis in latitudine Lutetiæ non est vis ipsa gravitatis in Æquatore, de quâ agitur in reliquâ hac propositione, sed parum ab ea differt, ita ut calculo quodam inito inveniatur quod hæc vis gravitatis in latitudine Lutetiæ sit ad vim gravitatis in Æquatore (terrâ uniformiter densâ suppositâ), ut 1532 ad 1531 ideòque sit vis gravitatis in Æquatore ad vim ejus Centrifugam ut 287.67 ad 1. Quas quidem varias correctiones, Newtonianis numeris adplicamus, ut inde liqueat, quod quamvis numeris ut ita dicam mediocribus sit usus Newtonus & sæpe ex Hypothesi terræ sphæricæ ductis, parum mutationis tamen adfuturum sit, etsi assumantur alii numeri qui ex veriori terræ figurâ deducerentur.

DE MUNDI SYSTEMATE.



Unde si $APBQ$ figuram terræ designet (p) jam non amplius sphæricam sed revolutione ellipseos circum axem minorem PQ genitam, sitque $ACQqca$ canalis aquæ plena, à polo Qq ad centrum Cc, & inde ad æquatorem Aa pergens: (q) debebit pondus aquæ in canalis crure $ACca$, esse ad pondus aquæ in crure altero $QCcq$ ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex propositionis XCI. corol. 2. lib. 1.) computationem ineundo, invenio quod si terra constaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, (r) & esset ejus axis PQ ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in eodem loco Q in sphæram centro C radio PC vel QC descriptam, ut

78. (p) * *Jam non amplius sphæricam sed revolutione Ellipseos circum axem minorem PQ genitam.* * Terram non multum à figurâ sphæricâ discedere ex Eclipsibus Lunæ patet; magis adhuc ad formam ejus Ellipseos accedere cujus axes forent æquales Diametro Æquatoris, & distantiæ Polorum terræ respective, satis liquet; utrum verò curva illa quæ singulum Meridianum terræ constituit & quæ convolutione arcus PAQ circa axem minorem PQ generatur sit Ellipsis Apolloniana, utrum tantùm curva ad eam accedens non determinat Newtonus; Paulò fusius de hujus curvæ Naturâ inferius differemus, hic enim ad calculum Newtonianum intelligendum, sufficit assumere eam curvam ad Ellipsim satis accedere, ut Ellipsis pro eâ assumi possit.

(q) * *Debebit pondus aquæ.* Si fluidum in canale contentum quiescere supponatur, fluidi partes in canalis crure AC debent esse in æquilibrio cum partibus fluidi in ejusdem canalis crure QC. Cum itaque vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam ponderis detrahat e ponderis partibus 289, oportet ut pondus in altero crure sit 288 (sive ex inventis ut 288.67 ad 287.67), sic enim pondera in utroque canalis crure erunt æqualia.

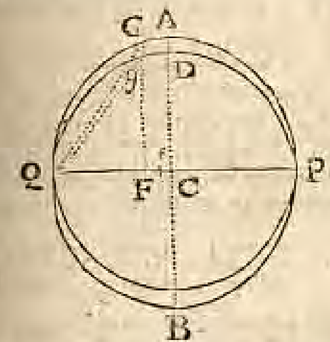
(r) * *Et esset ejus axis PQ ad* **Diametrum** *AB ut 100 ad 101, gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in Sphæram centro C radio QC descriptam, ut 126 ad 125 & eodem argumento gravitas in loco A in sphæroidem circa axem AB descriptam est ad gravitatem in sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125 ad 126.*

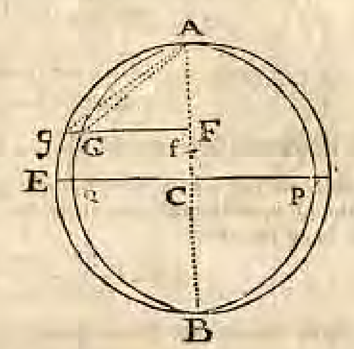
* Utrumque simul probari potest: Sit PAQB, in utrâque figurâ, terræ Meridianus; in primâ figurâ sit QDPQ sphæra Centro C radio QC descripta & in secundâ figura PAQB repræsentat sphæroidem quam revolutione meridiani terræ circa Æquatorem describi fingit Newtonus & AED sphæram radio AC descriptam. Constat Corollario 2. Prop. XC. lib. 1. quod si ducantur circuli ad axes revolutionum perpendiculares quorum radii sunt FG, fg (in utrâque figurâ) attractio punctorum Q & A ab illis circulis erit $1-\frac{QF}{QG}$, $1-\frac{QF}{Qg}$, $1-\frac{AF}{AG}$, $1-\frac{AF}{Ag}$ respective:

Qua-

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in sphæroidem, convolutione ellipseos $APBQ$ circa axem AB descriptam, est ad gravitatem in eodem loco A in sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125 ad 126.





Quare si dicatur CQ sive CD, b, & AC sive CE, r, dicaturque abscissa QF, AF, 78.
in utrâque figurâ, x, erit in primâ figurâ $\overline{FG}^2=\frac{r^2}{b^2}\times\overline{2bx-xx}$; $\overline{Fg}^2=2bx-xx$, & in secundâ figurâ est $\overline{FG}^2=\frac{b^2}{r^2}\times 2rx-xx$ & $\overline{Fg}^2=2rx-xx$, quibus quadratis si addatur quadratum $\overline{QF}^2$ vel $\overline{AF}^2$ sive xx, habebuntur quadrata linearum $\overline{QG}^2$, $\overline{Qg}^2$, $\overline{AG}^2$, $\overline{Ag}^2$, respective, quæ erunt $\frac{r^2}{b^2}\times 2bx-\frac{r^2-b^2}{b^2}x^2$; $2bx$; $\frac{b^2}{r^2}\times 2rx+\frac{r^2-b^2}{r^2}x^2$; & $2rx$; Unde (si compendii gratia loco r^2-b^2 scribatur m) attractiones istorum circulorum evadent

$$1-\frac{bx}{\sqrt{2r^2bx-mx^2}};\ 1-\frac{x}{\sqrt{2bx}};\ 1-\frac{rx}{\sqrt{2b^2rx+mx^2}},\ 1-\frac{x}{\sqrt{2rx}};$$

Sit verò $Ff=dx$ & multiplicetur attractio singuli circuli per dx habebuntur elementa attractionis sphæroideωn & sphærarum, quæ elementa erunt

$$dx-\frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx-mx^2}};\ dx-\frac{xdx}{\sqrt{2bx}};\ dx-\frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx+mx^2}};\ dx-\frac{xdx}{\sqrt{2rx}}.$$

Facile revocabuntur ad fluentes suas ea elementa attractionis sphærarum quippe fluentes quantitatum $dx-\frac{xdx}{\sqrt{2bx}}$ & $dx-\frac{xdx}{\sqrt{2rx}}$ sunt $x-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ & $x-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ & ubi QF vel AF diametros QP vel AB æquant, ideòque x fit æqualis $2b$, vel $2r$, evadunt illæ fluentes $2b-\frac{2b\sqrt{2b}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ & $2r-\frac{2r\sqrt{2r}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ sive $\frac{2}{3}b$ & $\frac{2}{3}r$.

Ut obtineatur fluens quantitatis $dx-\frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx-m^2}}$, quantitas $\frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx-mx^2}}$ resolvatur in seriem (eam considerando ut $bxdx\times\overline{2r^2bx-mx^2}^{\,-\frac{1}{2}}$) sumatur juxta

formu-

formulam Newtonianam quotiens ſecundi termini $-mx^2$ per primum $2r^2bx$ diviſi, qui quotiens erit $-\frac{mx}{2b\times r^2}$, Primi termini $2r^2bx$ ſumatur dignitas $-\frac{1}{2}$, quæ eſt $\frac{1}{rx^{\frac{1}{2}}\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}$; tum adhibitis coefficientibus ſecundum formulam, tota quantitas evadet

78. $$dx - \frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1\times bmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}} - \frac{1\times3bm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times4r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}} - \frac{1\times3\times5bm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times4\times6r^7\times\overline{2b}^{\frac{7}{2}}} \ \&c.$$

& Integrando habebitur $x - \frac{2bx^{\frac{3}{2}}}{3r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}} - \frac{2bmx^{\frac{5}{2}}}{10r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}} - \frac{1\times3\times2bm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times4\times7r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.2bm^3x^{\frac{9}{2}}}{2.4.6.9r^7.\overline{2b}^{\frac{7}{2}}}$ &c.

Quando vero $x=2b$, ſeries fit $2b - \frac{2b^2}{3r} - \frac{2b^2m}{10r^3} - \frac{1\times3\times2b^2m^2}{2\times4\times7r^5} - \frac{1\times3\times5\times2b^2m^3}{2\times4\times6\times9r^7}$.

Sive dividendo per $2b$ & ad terminos præcedentes revocando; attractio terræ, in corpuſculum Q in extremitate minoris axis poſiti circa quem revolvi cenſetur, exprimitur per hanc ſeriem

$$2b\times1 - \frac{2b}{3r} - \frac{1\times3m}{2.5r^2}B - \frac{3\times5m}{4\times7r^2}C - \frac{5\times7m}{6\times9r^2}D - \frac{7\times9m}{8\times11r^2}E \ \&c.$$

Simili modo obtinebitur fluens quantitatis $dx - \frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx+mx^2}}$ nempe ſecundam partem conſiderando ut $rxdx\times\overline{2b^2rx+mx^2}^{-\frac{1}{2}}$, quæ in ſerie reſolvatur, quotiens ſecundi termini per primum diviſi erit $+\frac{mx}{2rb^2}$; Primi termini dignitas $-\frac{1}{2}$ erit $\frac{1}{bx^{\frac{1}{2}}\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}$ & calculando ſecundum formulam tota quantitas

$$\text{evadet } dx - \frac{rx^{\frac{1}{2}}dx}{b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}} + \frac{1\times rmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}} - \frac{1\times3rm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times4b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}} + \frac{1\times3\times5rm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times4\times6b^7\times\overline{2r}^{\frac{7}{2}}} \ \&c.$$

Integrando habetur $x - \frac{2rx^{\frac{3}{2}}}{3b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}} + \frac{1\times2rmx^{\frac{5}{2}}}{2\times5b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}} - \frac{1\times3\times2rm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times4\times7b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}} + \frac{1\times3\times5\times2rm^3x^{\frac{9}{2}}}{2\times4\times6\times9b^7\times\overline{2r}^{\frac{7}{2}}}$ &c.

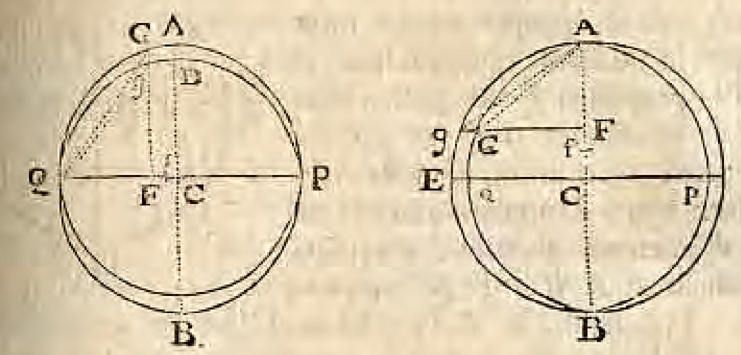
Quando $x=2r$ ſeries fit, $2r - \frac{\overline{2r}^2}{3b} + \frac{\overline{2r}^2\times m}{2\times5b^3} - \frac{1\times3\times\overline{2r}^2\times m^2}{2\times4\times7b^5} + \frac{1\times3\times5\times\overline{2r}^2m^3}{2\times4\times6\times9b^7}$ &c.

$$\text{Sive } 2r\times1 - \frac{2r}{3b} + \frac{3m}{2\times5b^2}B - \frac{3\times5m}{4\times7b^2}C + \frac{5\times7m}{6\times9b^2}D - \frac{7\times9m}{8\times11b^2}E \ \&c.$$

Cum ergo ſit $r=101$, & $b=100$ eſt $r^2-b^2=r+b\times r-b=201=m$, eſt $r^2=10201$. Hinc ſubſtitutionibus factis prima ſeries evadit

$2b\times1 - .66006600$
$- .00390177$
$- .00004118$
$- .00000052$
$- .00000001.$

Hoc eſt, $2b\times1 - .66400948$, ſive $2b\times.33599052$; Sed ſphæræ attractio erat $\frac{2b}{3}$; Ergo gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in ſphæram centro C radio QC deſcriptam ut 1.00797156 ad 1 (multiplicando utrumque terminum per 3 & dividendo per $2b$) ſive ut 1008 fere ad 1000, qui numeri ſunt accurate ut 126 ad 125, ut liquet utrumque per 8, dividendo. Q. E. 1°. D.

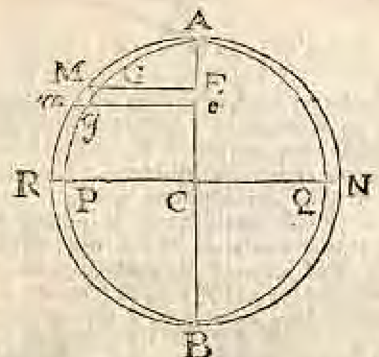


78.

Pariter ſubſtitutionibus factis in ſerie ſecundâ, evadit

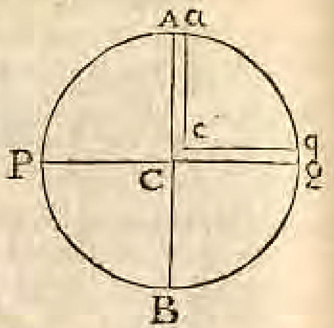
$2r\times1 - .67333333 + .00406020$
$- .00004372 + .00000057$
$- .00000001.$

Sive $2r\times1 - .67337706 + .00406077$ hoc eſt $2r\times33068371$, ſed ſphæræ attractio erat $\frac{2r}{3}$, ergo utrumque terminum multiplicando per 3 & dividendo per $2r$, gravitas in loco A in Ellipſoidem, convolutione circa majorem axem genitum, erit ad gravitatem in ſphæram radio AC deſcriptam ut 99205113 ad 1; Multiplicetur uterque terminus per 1008, & evadent 999.987589 & 1008; proxime 1000 & 1008 qui numeri ſunt ut 125 ad 126. Q. E. 2°. D.



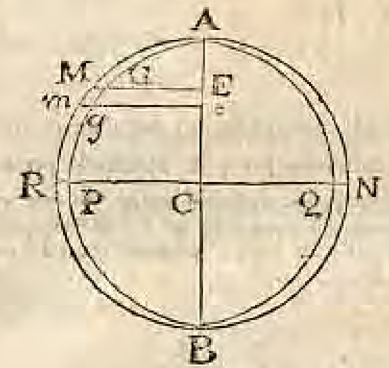
79. Lemma. Sphærois compreſſa convolutione Ellipſeos APBQ circà axem minorem PC genita, eſt media proportionalis inter ſphæram circumſcriptam cujus radius eſt AC, & ſphæroidem oblongatam convolutione ellipſeos circà axem AC genitam. Nam ductis ordinatis ME, me, infinité propinquis, tum ſphæra circumſcripta tum ſphærois oblongata dividi intelligantur in cylindrulos ordinatarum ME & me, GE & ge convolutione deſcriptos, erit cylindrulus EGge in ſphæroide ad cylindrulum EMme in ſphærâ, ut altitudo Ee ducta in circulum radio GE rotando deſcriptum, ad altitudinem Ee, ductam in circulum cujus eſt radius ME, ſive quia circuli ſunt ut quadrata radiorum & utriuſque cylindruli communis eſt altitudo, erit cylindrulus EGge, ad cylindrulum EMme, ut GE^2 ad ME^2. Sed GE^2 ad ME^2 ſemper eſt ut PC^2 ad RC^2 vel AC^2, ideóque in datâ ratione, erit itaque ſumma tota cylindrulorum in ſphæroide ad ſummam totam cy-

DE MUNDI SYSTEMATE.



(^{s}) Eſt autem gravitas in loco A in terram media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroidem & ſphæram: propterea quod ſphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram terræ; & hæc figura diminuendo in eâdem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AB, PQ perpendicularis eſt, vertitur in dictam ſphæroidem; & gravitas in A, in

79



lindrulorum in ſphærâ, hoc eſt, ſphærois ipſa ad ſphæram ut PC^2 ad AC^2. Jam verò ſphæra radio RC deſcripta & ſphærois compreſſa ellipſeos AGP circà axem PC convolutione genita, ſimili modo dividi intelligantur in tubulos innumeros ordinatarum ME & me, GE & ge, circa axem PC convolutione genitos, ob radiorum CE & rectarum Ee æqualitatem, erunt tubuli illi ut ME, GE, ſive ut AC ad PC, hoc eſt, in datâ ratione, ideóque ſphæra eſt ad ſphæroidem compreſſam ut AC ad PC. Quare ſi ſphæra dicatur S ſphærois compreſſa s, & ſphærois oblongata σ, ſitque $AC = b$, $PC = a$ erit $S^2 : s^2 = b^2 : a^2$, ac proindè $S s \sigma = S^2 s^2$ undè $s = \sqrt{S \times \sigma}$. Q. E. D.

(^{s}) 80. *Eſt autem gravitas.* Diameter PQ, in figurâ Newtoni reſpondeat diametro RN minuatur diameter illa RN in ratione 101 ad 100 ut fiat PQ = 100, tunc ſphæra quæ centro C radio AC deſcripta erat vertetur in figuram terræ. Jam verò concipiatur tertia diameter quæ in revolutione ſphæræ duabus diametris AB, PQ, ſit perpendicularis, hæcque diameter diminuatur in eâdem ratione 101 ad 100, patet figuram terræ verti in ſphæroidem oblongatam. Quia verò utraque ſphærois ſive compreſſa ſive oblongata ad ſphæram quam proximè accedit, ſphæroides illæ pro ſphæris quæ eandem reſpectivè contineant materiæ quantitatem quam proximè haberi poſſunt. Sunt autem attractiones ſphærarum in diſtantiis æqualibus ut quantitates materiæ (cor. 1. prop. 74. lib. 1.) ideóque gravitas in utroque caſu prædicto diminuitur in eâdem ratione materiæ detractæ quam proximè, ac proindè attractiones ſphæræ ſphæroidis compreſſæ & ſphæroidis oblongatæ ſunt reſpectivè ut quantitates materiæ in illis corporibus contentæ quàm proximè. Sed ſphærois compreſſa convolutione ellipſeos ABPQ, circà axem PCQ genita eſt media proportionalis inter ſphæram circumſcriptam cujus radius eſt AC, & ſphæroidem oblongatam convolutione ellipſeos circà axem ACQ geni-

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

in caſu utroque, diminuitur in eâdem ratione quam proximè. (^{t}) Eſt igitur gravitas in A in ſphæram centro C radio AC deſcriptam, ad gravitatem in A in terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco Q in ſphæram centro C radio QC deſcriptam, eſt ad gravitatem in loco A in ſphæram centro C radio AC deſcriptam, in ratione diametrorum (per prop. LXXII. lib. 1.) id eſt, ut 100 ad 101. (^{u}) Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in terram ad gravitatem in loco A in terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, ſeu ut 501 ad 500.

Jam cum (per corol. 3. prop. XCI. lib. 1.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ ſit ut diſtantia locorum à centro terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, (^{x}) ut magnitudines & gravitates accelera-

genitam (81). Quarè gravitas in loco A, in terram eſt media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroidem, oblongatam ſcilicet, & ſphæram.

(^{t}) * *Eſt igitur gravitas.* Gravitas in loco A in terram dicatur G, gravitas in loco Q, in terram ſit g, gravitas in loco Q, in ſphæram radio PC, deſcriptam dicatur γ, gravitas in loco A, in ſphæroidem convolutione ellipſeos ABPQ, circà axem AB genitam dicatur V, ac tandem gravitas in loco A in ſphæram radio AC deſcriptam ſit Γ, erit (ex dem.).

$g : \gamma = 126 : 125$

$V : \Gamma = 125 : 126$ prætereà

$V : G = G : \Gamma$, ideoque inter V & Γ, hoc eſt, inter 125 & 126 ſumpto medio termino proportionali erit

$V : G = G : \Gamma = 125 : 125\frac{1}{2} = 125\frac{1}{2} : 126.$

(^{u}) * *Conjungantur jam hæ tres rationes*, ſcilicet

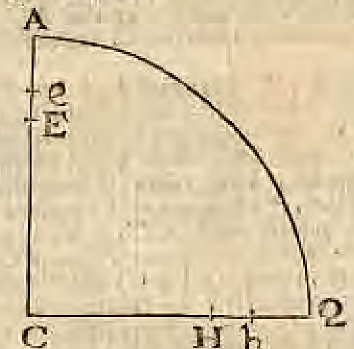
$g : \gamma = 126 : 125$

$\Gamma : G = 126 : 125\frac{1}{2}$

$\gamma : \Gamma = 100 : 101$ erit per compoſitionem rationum & ex æquo.

$g : G = 126 \times 126 \times 100 : 125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$ 81.

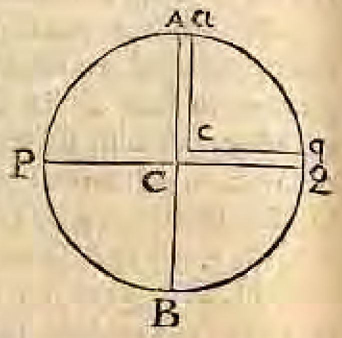
vel $g : G = 1587600 : 1584437\frac{1}{2} = 501 : 500$ ideóque gravitas in loco Q, in terram fiet ad gravitatem in loco A, in terram ut 501 ad 500.



(x) 81. * *Ut magnitudines & gravitates.* Crura AC, QC ità diſtinguantur ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus ut crura illa æqualem contineant particularum Ee, Hh numerum, ſintque ſingulæ particulæ in crure AC ad ſingulas particulas in crure CQ ut crus AC ad crus alte-

DE MUNDI SYSTEMATE.

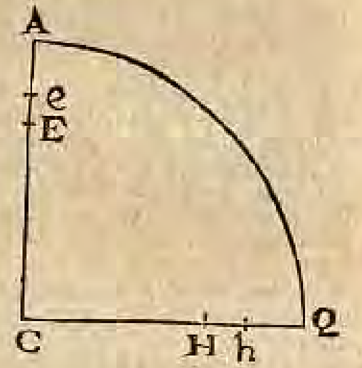
celeratrices conjunctim; id est, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501. (y) Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 289, hoc est, vis centrifuga quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{505}$ est tantum pars



$\frac{1}{289}$.

82. alterum CQ, sive ut 101 ad 100; Quoniam gravitas in loco A est 500 & gravitas in loco Q, est 501 propter figuram sphæroidis & omnium particularum in cruribus A C & CQ similium & similiter positarum, gravitates acceleratrices erunt in eadem ratione, earum itaque Pondera, (sive facta gravitatis acceleratricis per Quantitatem materiæ erunt in ratione composita 101 ad 100 & 500 ad 501 sive 505 ad 501, & totorum crurum A C & CQ gravitates erunt in eâ ratione 505 ad 501.

(y) 82. * *Ac proindè si vis centrifuga.* Ex motu diurno circà axem Q C, oritur vis centrifuga quâ fit ut partes quæ sunt in crure A C, versùs C, vi gravitatis attractæ, simul etiam vi centrifugâ repellantur, * illa autem vis Centrifuga in singulis punctis cruris A C est in ratione distantiæ eorum punctorum à Centro C E per (cor. 3. prop. 4. lib. 1.) sed est etiam gravitas acceleratrix in ratione distantiæ à Centro per (cor. 3. Prop. XCI. lib. 1.) ergo si alicubi data sit ratio vis gravitatis ad vim centrifugam eadem erit in omnibus punctis, sit ergo alicubi ut 505 ad 4 gravitas acceleratrix tota singularum & omnium partium cruris A C erit ad gravitatem residuam in singulis & omnibus partibus ejusdem cruris ut 505 ad 501, sed in eâdem ratione erat tota



gravitas cruris A C (absque detractione vis centrifugæ ad gravitatem cruris CQ quod cum sit axis vim centrifugam nullam habet) ergo residuum vis gravitatis in crure A C sublatâ vi Centrifugâ in æquilibrio est cum gravitate cruris CQ.

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

$\frac{1}{289}$. (z) Et propterea dico, secundum regulam auream, quod si vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* superet altitudinem aquæ in crure *QCcq* parte centesimâ totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut excessus altitudinis in crure *ACca* sit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $\frac{1}{229}$. Est igitur diameter terræ secundum æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum terræ

82. (z) * *Et propterea dico secundum regulam auream* * Vix crediderim Newtonum ad applicandam regulam auream hic loci, alio nixum non fuisse fundamento quam ista confusâ notione, quod cum excessus ponderum in longioribus cruribus sphæroidean pendeant ex inæqualitate crurum, sive ab excessu unius cruris supra alterum, ideo rationes excessuum crurum majorum ad minora crura eædem esse debeant ac rationes excessuum ponderum ad pondera minorum crurum quæ quidem ultimæ rationes (sive ipsis proximæ rationes excessuum ponderum ad pondera majorum crurum) æquantur rationibus virium centrifugarum ad gravitatem totam, quia illæ vires centrifugæ ex gravitate detractæ eos excessus ponderum accuratè compensant. Sed mihi videtur ipsum deduxisse hanc proportionem ex ipsâ serie ab ipso adhibitâ, & quam assequi sumus conati in Notâ (r) proximâ; quod ut concipiatur resumantur quæ in ea Notâ dicta sunt & ad ratiocinium Newtonianum applicentur, supponendo Quæstionem esse de duobus sphæroidibus, quorum unus sit assumptitius ille cujus Axes sunt ut 101 ad 100 alterum verò ipsa terra, ita ut semi Diameter Æquatoris quæ in Sphæroide fictitio in Notâ prædictâ per r designabatur, terræ respectu designetur per ϱ, semiaxis verò PQ qui in serie assumptâ dictus fuerat b & applicatus fictitio sphæroidi, ubi verò ipsum semi-axem terræ designat dicatur B. Assumptis ergo duobus primis terminis serierum sed mutatis r in ϱ & b in B, ubi agetur de terrâ, 1°. Gravitas in loco Q in sphæroidem erit ad Gravitatem in eodem loco in sphæram radio b descriptam erit ut $\frac{6br-4b^2}{3r}$ ad $\frac{2b}{3}$ & si agatur de terrâ, Gravitas in loco Q in terram erit ad Gravitatem in eodem loco in Sphæram quæ radio B describetur ut $\frac{6B\varrho-4B^2}{3\varrho}$ ad $\frac{2B}{3}$; ideóque Rationes gravitatis in loco Q in Sphæroidem vel terram ad gravitatem in Sphæras radiis b & B descriptas erunt ut $\frac{3r-2b}{r}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho}$.

2°. Gravitas in Sphæras quarum sunt radii b & B est ad gravitatem in Sphæras radiis A C descriptas ut radiis b ad r, & B ad ϱ, ideoque rationes gravitatis in sphæras radiis PQ descriptas ad gravitates in sphæras radiis A C descriptas erunt ut $\frac{b}{r}$ ad $\frac{B}{\varrho}$.

3°. Gravitas in sphæras radiis A C descriptas est ad Gravitatem in Ellipsoides convolutione Ellipsium A P B Q circa AC descriptas ut $\frac{2r}{3}$ ad $\frac{6rb-4rr}{3b}$, si agatur de fictitio Sphæroide, aut ut $\frac{2\varrho}{3}$ ad $\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}$ ubi agitur de terrâ; Et quoniam attractio sphæroidis fictitii aut terræ est media proportionalis inter has attractiones, erit gravitas in sphæram ad Gravitatem in A in sphæroidem, ut $\frac{\sqrt{2r}}{3}$ ad $\sqrt{\frac{6rb-4rr}{3b}}$ & gravitas in sphæram ad Gravitatem quæ est in A in terram ipsam ut $\sqrt{\frac{2\varrho}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}}$, ideoque rationes gravitatum in sphæras ad gravitates in sphæroidem & in terram erunt ut

DE MUNDI SYSTEMATE.

ræ semidiameter mediocris, juxta mensuram *Picarti*, sit pedum Parisiensium 19615800, seu milliarium 3923,16 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos excessu pedum 85472, seu milliarum $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si

82. $\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\sqrt{\frac{B}{3B-2\rho}}$ reductis fractionibus ad minimos terminos.

Hinc tandem compositis omnibus rationibus, Rationes gravitatum in punctis Q tam sphæroideos fictitii quam terræ, ad gravitates in punctis A eorum erunt ut $\frac{3r-2b}{\rho} \times \frac{b}{r} \times \sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\rho-2B}{\rho} \times \frac{B}{\rho}\sqrt{\frac{B}{3B-2\rho}}$.

Rursus in fictitio sphæroide ratio magnitudinis crurum exprimitur per $\frac{b}{r}$ & in terrâ per $\frac{B}{\rho}$; per quas quantitates ducantur rationes gravitatis & habebuntur rationes ponderum quæ ideo erunt ut $\frac{3r-2b}{r} \times \frac{b^2}{r^2}\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\rho-2B}{\rho} \times \frac{B^2}{\rho^2}\sqrt{\frac{B}{3B-2\rho}}$; Inde cum differentia quantitatum r & b, ρ & B non sit magna, numeratores $3r-2b$ aut $3\rho-2B$; pro r ac ρ sumi possunt & denominatores $3b-2r$, $3B-2\rho$ pro b & B, ideóque rationes ponderum sunt ut $\frac{r}{r} \times \frac{b^2}{r^2} \times \sqrt{\frac{b}{b}}$, ad $\frac{\rho}{\rho} \times \frac{B^2}{\rho^2} \times \sqrt{\frac{B}{B}}$ sive ut $\frac{b^2}{r^2}$ ad $\frac{B^2}{\rho^2}$. Vel, invertendo, rationes ponderum in crure CA ad pondus in crure CQ sunt in sphæroide fictitio & in terrâ ut $\frac{r^2}{b^2}$ ad $\frac{\rho^2}{B^2}$ quod si differentia Diametri r & axis fictitii b dicatur f; differentia Diametri ρ & axis terræ B dicatur g hoc modo exprimentur rationes ponderum crurum CA & CQ. $\frac{b^2+2bf+ff}{bb}$ & $\frac{B^2+2Bg+gg}{B^2}$ erunt ergo rationes excessus ponderis in crure AC ad pondus totum cruris CQ ut $\frac{+2bf+ff}{bb}$ ad $\frac{+2Bg+gg}{B^2}$ sive deletis ff & gg quæ evanescunt respectu $2rf$ & $2\rho g$; cùm differentiæ inter diametros & axes minimæ supponantur respectu earum diametrorum; erunt illæ rationes ut $\frac{2bf}{b^2}$ ad $\frac{2Bg}{B^2}$, sive ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, sed rationes excessus ponderum ad pondus cruris CQ sive ad pondus cruris AC (quod perinde est ob magnitudinem crurum & parvitatem excessus) æquales esse debent (ut jam dictum est) rationibus virium Centrifugarum ad gravitatem ipsam, quare, rationes illæ virium Centrifugarum ad gravitatem debent esse ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, sive ut rationes excessuum diametri Æquatoris supra Axes ad Axes, quæ quidem est proportio quam Newtonus assumit, cujus fundamentum ita deprehensum est: hinc Vis Centrifuga quæ est $\frac{4}{505}$ ponderis totius est ad Vim Centrifugam quæ est $\frac{1}{289}$ ponderis totius ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$ sivè ut $\frac{f}{b}$ ad $\frac{g}{B}$, sed dum b est 100 est $f=1$, ergo est $\frac{g}{B} = \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{289}}{\frac{4}{505}}$ sive $\frac{505}{115600} = \frac{1}{229}$.

LIBER TERTIUS. PROP. XIX PROBL. III.

(a) Si planeta major sit vel minor quam terra manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et si densitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, & differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, jupiter autem horis 9 56′, sintque temporum quadrata

(a) 86. *Si planeta major sit vel minor quam terrâ manente ejus densitate ac tempore Periodico revolutionis diurnæ, manet proportio vis Centrifugæ ad gravitatem.* * Manere Rationem vis Centrifugæ ad gravitatem liquet ex nota 85. sive ex Cor. 3. Prop. IV. Lib. 1., nam manente tempore Periodico crescit Vis Centrifuga in ratione distantiarum, sed crescit etiam gravitas acceleratrix in ratione distantiarum (Cor. 3. Prop. XCI. lib. 1.) ergo in eadem ratione crescunt vis Centrifuga & gravitas ideóque in eadem ratione manent ac prius.

Propterea manebit proportio diametri inter Polos ad diametrum secundum Æquatorem, quippe, per notam præcedentem z, Ratio vis Centrifugæ ad gravitatem est ut ratio excessus Diametri Æquatoris super longitudinem Axeos; manente ergo priori ratione per hypothesin manebit & ista.

Si acceleretur vel retardetur motus diurnus ut tempus Periodicum sit majus vel minus, vis centrifuga crescit reciprocè ut quadrata temporum Periodicorum manentibus radiis (Cor. 2. Prop. IV. lib. 1.) inde manentibus gravitatibus & Diametris majoribus vel minoribus, liquet (ex notâ illâ z.) numeratores, fractionum $\frac{f}{b}$ & $\frac{g}{B}$, nempe excessus Diametrorum, crescere secundum rationem virium centrifugarum, hoc est, ut quadrata temporum Periodicorum inversè, aut ut quadrata Celeritatum directè, hinc ait Newtonus *differentia diametrorum* (quæ differentiæ exprimuntur per f & g) *augebitur vel minuetur in ea ratione duplicata celeritatum quamproximè.*

83. *Et si densitas planetæ augeatur, gravitas augebitur in eâdem ratione* hinc ratio vis Centrifugæ manente radio & celeritate manentis, ad gravitatem minuetur; ideóque minuetur ratio differentiæ Diametrorum ad ipsas Diametros.

Et in genere dicatur Radius terræ R, ejus densitas D, tempus Periodicum T, in altero Planeta litteris iisdem sed minoribus eadem exprimantur erit $\frac{\frac{R}{TT}}{DR}$ ad $\frac{\frac{r}{tt}}{dr}$ sicut $\frac{1}{229}$ ad differentiam inter Diametros Æquatoris & Axis Planetæ quæ itaque erit $\frac{1}{229} \times \frac{D \times TT}{d \times tt}$.

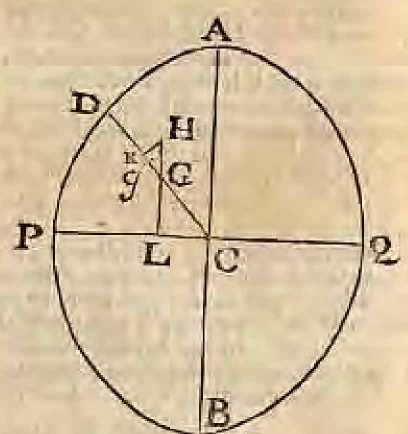
drata ut 29 ad 5, & (b) revolventium densitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, seu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Est igitur diameter jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Unde cum ejus diameter major sit $37''$, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit $33''. 25'''$. (c) Pro luce erraticâ addantur $3''$ circiter, & hujus planetæ diametri apparentes evadent $40''$ & $36''. 25'''$: quæ sunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproximè. Hoc ita se habet ex hypothesi quod corpus jovis sit uniformiter densum. (d) At si corpus ejus sit densius versus planum æquatoris quam versus polos, diametri ejus possunt

83 (b) * *Et revolventium densitates.* (prop. 8. lib. hujus.).

(c) * *Pro luce erraticâ.* (53).

(d) * *At si corpus ejus.* Ille enim excessus densitatis in plano æquatoris facit ut ibi major sit gravitas ac proindè ibi minor requiratur altitudo ad compensandam vim Centrifugam unde minuitur diametrorum differentia (ut patet ex notis præced.).

84. Lubet hic referre formulam quâ, in hypothesi gravitatis proportionalis cuilibet dignitati distantiarum à centro, simulque quod ejus actio ad id centrum dirigatur, diametrorum proportio inveniri potest: Sit semidiameter secundum æquatorem $AC = a$, radius variabilis $CD = r$ sinus anguli $DCP = h$, posito sinu toto $= 1$, Sit gravitas in loco $A = p$ vis centrifuga in eodem loco $= f$, ponaturque gravitas versùs centrum C tendens dignitati cuilibet n distantiarum à centro proportionalis, erit gravitas in A ad gravitatem in D ut a^n ad r^n, ideóque gravitas in $D = \frac{pr^n}{a^n}$. Quoniam vires centrifugæ in locis A & G, sunt in ratione distantiarum CA, LG, erit vis centrifuga in $G = \frac{f \times LG}{CA}$; sed $LG : CG = h : 1$ ideóque $LG = CG \times h$, undè vis centrifuga in G, fit $= \frac{fh \times CG}{CA}$; sit autem vis illa $= GH$. Quoniam vis cen-



trifuga quæ agit secundum directionem GH, non minuit gravitatem versùs centrum C, nisi in quantum agit secundum directionem DC, resolvatur vis centrifuga GH in vires laterales KH, GH; est

sunt esse ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel fortè 14 ad 13. Et *Cassinus* quidem anno 1691 observavit, quod jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram superaret parte sui circiter decimâ quintâ: *Poundus* autem noster telescopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros jovis anno 1719, mensuravit ut sequitur. *Tem-*

est autem $GH : GK$ vel $1 : h = \frac{fh \times CG}{CA} : GK$, quarè $GK = \frac{fhh \times r}{a}$, ideóque pondus cylindruli $Gg = \frac{pr^n dr}{a^n} - \frac{fhhrdr}{a}$. Sumptisque fluentibus, pondus totum fluidi in crure $DC = \frac{pr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhh \times rr}{2a}$. Simili argumento, quia gravitas in $A = p$, erit gravitas in alio quolibet loco cruris CA $= \frac{px^n}{a^n}$, si nempè distantia à centro dicatur x; vis autem centrifuga $= \frac{fx}{a}$, & pondus Cylindruli manebit $\frac{px^n dx}{a^n} - \frac{fxdx}{a}$ cujus fluens $\frac{px^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fx^2}{2a}$ undè pondus totum fluidi in crure CA, est $\frac{pa^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa^2}{2a}$ jam verò quia fluidum in utroque crure CA, CD consistere debet in æquilibrio, oportet ut pondera sint æqualia ac proindè, $\frac{pa^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa}{2} = \frac{pr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhhrr}{2a}$, undè eruitur $2pr^{n+1} - (n+1)fhha^{n-1}rr = (2p - nf - f)a^{n+1}$. Ope hujus æquationis facilè invenitur diametrorum proportio, si enim fiat $h = o$, radius r abit in CP, habeturque $2pr^{n+1} = (2p - nf - f)a^{n+1}$, hoc est, $CA : CP = (2p)^{\frac{1}{n+1}} : (2p - nf - f)^{\frac{1}{n+1}}$.

In hypothesi gravitatis uniformis, fit $n = o$, ideóque $CA : CP = 2p : 2p - f$. Quoniam verò in terrâ gravitas est ad vim centrifugam ut 289 ad 1, erit $CA : CP = 578 : 577$, prout Hugenius invenit. At in hypothesi gravitatis in ratione duplicatâ distantiarum à centro decrescentis, erit $n = -2$, ideoque $CA : CP = 2p + f : 2p = 579 : 578$.

* 85. Verum duæ Hypotheses in hâc formulâ invenienda assumptæ cum rei natura & Newtoniano systemate neutiquam quadrant, ideóque locum habere nequeunt: 85.
Primùm enim Gravitatem ad Centrum terræ dirigi verum non est si terra sit sphærois qualiscumque, quippe ex ipso facto constat gravitatis directionem esse perpendicularem superficiei aquarum, sive esse perpendicularem curvæ quam meridianus quilibet affectat; sed perpendiculares ad curvam à circulo diversam ad ejus curvæ centrum neutiquam tendunt nisi in solâ axium extremitate.

2°. Gravitatis quantitas in variis punctis superficiei solidi ratione curvæ alicujus geniti non sequitur rationem ullius dignitatis distantiarum à centro, sed aliam omnino Legem juxta formam solidi, hoc est, juxta naturam curvæ illius quam meridianus affectat & locum in quo corpusculum attrahendum locatur, ut satis liquet ex eo artificio quo Newtonus usus est ad determinandam rationem gravitatis in puncto A ad gravitatem in puncto Q, unde gravitatis in variis locis proportio non per dignitatem aliquam distantiarum, sed per rationes serierum quales eas in Nota (1) invenimus sunt exhibendæ; quamvis ergo verum sit in systemate Newtoniano gravitatem decrescere ut quadrata distantiarum à quocumque corpore collecto in centro suæ gravitatis quasi in uno puncto, idem verum non erit si id corpus figurâ sphærica non donetur, & corpusculum attrahendum juxta diversas partes ejus solidi collocetur; hinc ubi in formandâ generali formulâ assumitur quod gravitas in A sit ad gravitatem in D ut a^n ad r^n ideóque gravitatem in D esse $\frac{pr^n}{}$

Tempora.	Diam. max.	Diam. min.	Diametri ad invicem.	
dies hor.	part.	part.		
Jan 28 6	13,40	12,28	ut 12	ad 11
Mar. 6 7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$	$12\frac{3}{4}$
Mar. 9 7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$	$11\frac{2}{3}$
Apr 9 0	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam planetæ magis incalescunt ad lucem solis versus æquatores suos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur quam versus polos.

Quin-

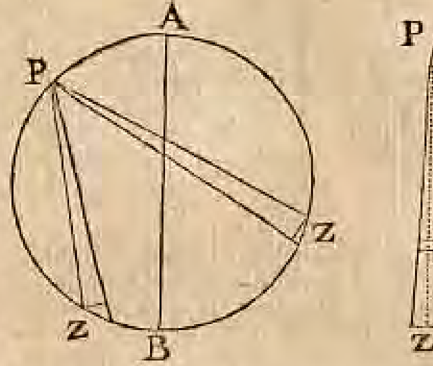
86. $\frac{p\,r^n}{a^n}$, id omninò adversus Theoriam gravitati Newtonianam deducitur; quod autem hæc formula non multum à vero aberret, oritur ex eo quod reverâ figura terræ à sphærâ per parum discrepet.

87. Vis centripeta vel centrifuga corporis circulum describentis est in ratione directa radii & duplicata inversâ temporis periodici (cor. 2. prop. 4. lib. 1.). Quare si distantia planetæ à centro Solis vel distantia satellitis à centro planetæ primarii dicatur D tempus periodicum T radius ipsius Planetæ circa quem motu diurno revolvitur R, gravitas versus centrum revolutionis erit $\frac{D}{TT}$; Si autem hæc gravitas crescat in ratione duplicatâ inversa distantiarum, erit gravitas planetæ in eo in quo nunc versari supponitur loco, ad illius gravitatem, si positus fingeretur in superficie corporis centralis circa quod revolvitur ut RR ad DD, ideoque foret gravitas planetæ in superficie hujus corporis ut $\frac{D^3}{RRTT}$. Jam verò cum vis centrifuga planetæ positi in æquatore corporis circa quod revolvitur sit in ratione directâ radii hujus planetæ & inversâ duplicatâ temporis revolutionis circa axem, si tempus periodicum circa axem dicatur t vis centrifuga F, erit $F = \frac{R}{tt}$ unde si vis gravitatis in superficie corporis centralis dicatur P, erit $P : F = \frac{D^3}{RRTT} : \frac{R}{tt} = D^3 \times tt : R^3 \times TT$.

90. Distantia D, quarti satellitis jovialis à centro planetæ primarii fit 26,63 semid. jovis, prout à Newtono in fine Phænomeni II determinantur & tempus periodicum $T = 16$ dieb. $18^h.\ 5'\ 7''$ prout à Cassino in novis Elementis Astron. traduntur. Semidiameter jovis $R = 1$, tempus periodicum jovis circà axem $t = 9^h.\ 55'\ 52''$ posito in formulâ generali (87) $n = -2$, habetur $CA : CP = 2p + f : 2p$, vel $CA - CP : CP = f : 2p$, aut $CA - CP : CP = R^3\,TT : 2\,D^3\,tt$, erit itaque in hâc hypothesi gravitatis pro jove $CA - CP : CP = 1 : \frac{2\,D^3 \times tt}{TT} = 1 : 11\frac{1}{2}$, quæ differentia inter semidiametrum secundum æquatorem jovis & semidiametrum inter polos quamproxime æqualis est differentiæ quam Newtonus ex suâ methodo derivavit.

Sit mediocris distantia Lunæ à terrâ $D = 60$ semid. terrestr. tempus periodicum Lunæ $= 27$ dieb. $7^{hor.}\ 43'$, semid. terræ $= 1$, tempus revolutionis terræ circà axem $= 23^{hor.}\ 56'\ 4''$, erit gravitas ad vim centrifugam ut 288 ad 1. Unde pro terrâ foret $CA - CP : CP = 1 : 576$: terra itaque minùs compressa foret quam à New-

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam terræ nostræ minui sub æquatore, atque ideo terram ibi altius surgere quam ad polos (si materia ejus uniformiter densa sit) patebit per experimenta pendulorum quæ recensentur in propositione sequente.



Newtono definitum est, magis tamen quam determinatum est ab Hugenio, verùm ob actionem Solis in Lunam, tempus ejus Periodicum non respondet accuratè vi centrifugæ terræ; alias correctiones hujus calculi invenies Trans. Philos. No. 438 quibus ad Newtonianam proportionem magis accurate revocatur. De hâc Quæstione nobilissimâ procul dubio legantur quæ de telluris figurâ dederunt Clarissimi Viri D. De Mairan in monumentis Paris. an. 1720. D. De Maupertuis ibidem an. 1733. 1734. 1735. 1736. & in duobus opusculis quorum unum de figuris corporum cælestium, alterum de figurâ telluris inscribitur. Præclara quoque de eodem argumento ediderunt D. Clairaut in monumentis Parisiensibus an. 1735. & in Transactionibus Philosophicis num. 445. & 449. D. Bouguer ibid. an. 1736. D. Eustachius Manfredius ibid. an. 1734. & D. Stirling in transactionibus Anglicis an. 1735.

* Viam sternet ad determinandam figuram terræ ortam ex necessitate æquilibrii vis centrifugæ & vis gravitatis singularum ejus partium, si generalissime solvatur Probl. XLV. (Prop. XCI. Lib. I.) Newtoni, nempe, si inveniatur attractio corpusculi non solum *siti in axe* solidi rotundi, sed siti ubivis in ejus superficie, cujus Problematis Analysim hic in compendium tradimus.

PROBLEMA.

Datâ Æquatione curvæ cujuscumque quæ circa axim revolvendo solidum describat invenire attractionem corpusculi siti in quocumque puncto superficiei ejus solidi.

Constructio. Fingatur Planum tangens id solidum in P, & super eo plano, è puncto P ut centro descripta intelligatur sphæra radio infinitè parvo, dividatur tota superficies hemisphærii versus solidum conversi in portiunculas æquales, & concipiantur Pyramides (quarum vertices sint in centro sphæræ) illis portiunculis insis-

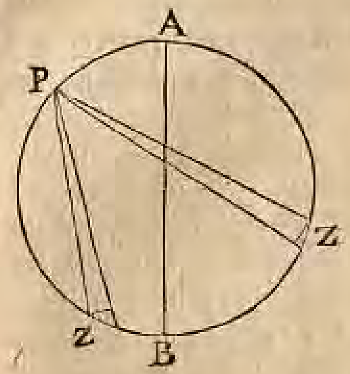
90. tentes & inde ad solidi ipsius oppositam superficiem continuatæ, puta in Z, Z, terminentur illæ Pyramides in eo solido per Bases parallelas Basibus ipsarum sphæræ circumscriptis; Corpusculi in puncto P siti attractio ab omnibus illis Pyramidibus, concipi poterit ut attractio à toto solido, exiguæ enim ejus solidi portiones quæ in extremitate unius cujusque Pyramidis negliguntur sunt ubique totius Pyramidis respectu infinite parvæ.

Attractio autem corpusculi P à singulâ Pyramide erit ubique ut axis PZ ejus Pyramidis; Nam ducantur ubivis in axe, duo puncta infinite proxima, ducanturque per ea superficies duæ, parallelæ Basi Pyramidis, sive, quod idem est, parallelæ superficiei sphæræ circa P descriptæ, exiguum solidum inter eas superficies contentum crescet ut illæ superficies sive ut quadratum portionis axeos abscissæ, sed cum attractio singulæ particulæ decrescat ut quadratum distantiæ à puncto P, sive decrescat ut quadratum abscissæ; ideóque crescat particularum quantitas ut decrescit singulæ particulæ vis, evenit ut attractio ejus solidi ubivis in axe PZ sumpti eadem semper sit; æqualis, erit v. gr. attractioni solidi cujus basis foret portio superficiei sphæ-

ræ

DE MUNDI SYSTEMATE.

90.

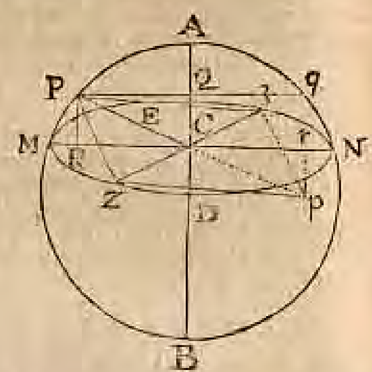


ræ intra Pyramidem contentæ, & altitudo illa quam minima axeos P Z portio assumpta. Hinc attractio totius Pyramidis erit attractio ejus parvi solidi, toties repetita quot sunt axeos P Z portiunculæ; Cum itaque portio superficiei sphæræ intra Pyramides contenta, sit ubivis eadem, ex Const., attractiones singularum Pyramidum erunt ut numerus particularum æqualium in singulo axe P Z assumendarum, sive quod idem est, ut singuli axes P Z.

His positis: sit M D N E unus è circulis genitis in solido proposito per revolutionem ordinatæ C M circa axim A B. Dico quod attractio puncti P ab omnibus Pyramidibus quarum axes in circumferentia circuli M D N E terminantur, (quæ est ut summa omnium axium P Z ad eam circumferentiam terminatorum) est ut linea PC à puncto P ad centrum ejus circuli C ductæ, multiplicata per numerum axium P Z ad circumferentiam M D N E pervenientium: (missis nempe singularum P Z longitudinibus)

Assumatur enim in circumferentia MDNE punctum quodlibet Z, & ducta per centrum C linea $ZC\zeta$, ducatur $P\zeta$, ex demonstratis attractiones Pyramidum ad Z & ζ pervenientium erunt ut P Z ad $P\zeta$; Ducatur ex P in circulum M D N E perpendiculum P R & per R & centrum C ducatur Diameter M R N, sumptaque $Nr = MR$ demittatur perpendiculum rp, sitque $rp = RP$, linea MN, PR & rp sunt in eodem plano (per 6, XI. Elem.) ideoque linea P p secabit lineam M N, & cum Triangula P R C, p r C sint æqualia propter $rp = RP$, angulos rectos, & angulos per verticem oppositos, sitque $Nr = MR$ linea P p transibit per centrum C; erit etiam linea P p in plano Trianguli $ZP\zeta$ cum habeat puncta P & C in eo plano; inde si jungantur lineæ Zp, ζp, tota figura $PZp\zeta$ erit in eodem Plano, & propter æquales P C, p C, Z C, $C\zeta$ & angulos interceptos per verticem oppositos lineæ P Z, $p\zeta$ erunt æquales, ut & lineæ $P\zeta$, p Z, hinc figura $PZp\zeta$ est Parallelogramma cujus P p sive 2 P C est Diagonalis; Quare cum Pyramides trahant secundum directiones P Z, $P\zeta$, viribus quæ sunt ut P Z ad $P\zeta$, vis inde resultans, dirigetur secundum Diagonalem P p, sive 2 P C, eique erit proportionalis.

Quod cum ita sit de omnibus punctis Z in circumferentiâ M D N E sumendis, attractio puncti P ab omnibus paribus Pyramidum in circumferentiâ ejus circuli terminatarum, erit ut 2 P C multiplicata per numerum parium earum Pyramidum;



sive erit ut P C ipsa multiplicata per numerum omnium P Z ad circumferentiam M D N E terminatarum.

Denique ut obtineatur numerus earum linearum P Z ad circumferentiam quamlibet M D N E terminatarum, observandum est, eas lineas egredientes ab Hemisphærio circa P descripto, in ejus superficie signare lineam curvam (duplicis quidem curvaturæ quando P non imminet perpendiculariter centro C, isto enim in casu signarent circulum) & propter æqualitatem distantiæ concursus eorum axium cum superficie Hemisphærii (ex constructione) numerus earum linearum erit ut longitudo ejus lineæ curvæ in superficie Hemisphærii signatæ; huc ergo redit tota quæstio, ut, Dato puncto P ejusque ordinata P Q ad axem solidi rotundi, sumptâque ut libet abscissâ A C, ejus ordinata C M, & circulo M D N E ejus ordinatæ convolutione descripto, inveniatur longitudo curvæ descriptæ in superficie sphæræ (cujus radius P S ad lubitum assumitur) per intersectionem Coni inclinati cujus vertex est P, basis vero M D N E.

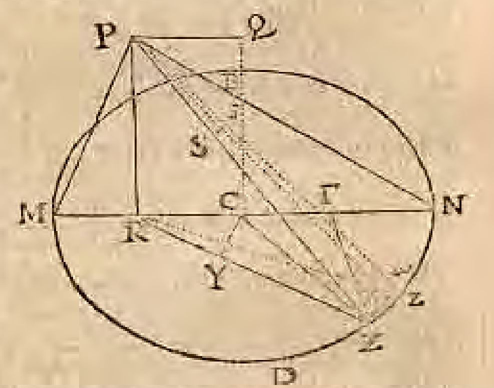
LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

Ut longitudo seu rectificatio ejus curvæ obtineatur. Ducantur à puncto P ad duo puncta proxima peripheriæ MDNE, lineæ PZ, P z; Abscissâ circuli secundum Diametrum à puncto N remotiori à puncto P sumatur, sintque $N\Gamma$ & ΓZ abscissa & ordinata circuli respondentes puncto Z, dicatur $N\Gamma$, x, ΓZ, y, Zz, dv; tota Diameter M N, f, duplum ordinatæ P Q sit g, denique si centro P Radio P S describatur arcus S s ille arcus S s erit elementum curvæ quæsitæ respondens Elemento circuli dv. Ex P, ut prius, demittatur in circulum M D N E perpendiculum P R, erit $RC = PQ = \frac{g}{2}$, ex R ducantur lineæ R Z & R z, & centro C radio R Z describatur arcus Z K ut sit $RK = RZ$, ex centro C ducatur ad Z Radius C Z, & perpendiculum C Y in lineam R Z, Dico 1°. quod Triangulus R C Y est similis Triangulo $RZ\Gamma$, ob angulum in R communem, & rectos Γ & Y, unde est R Z ad $Z\Gamma$ (y) sicut R C ($\frac{g}{2}$) ad C Y quod erit ergo $\frac{gy}{2\,RZ}$; 2°. Triangulus C Z Y est similis Triangulo Z K z, Nam angulus R Z K est rectus per Constr. quoniam Triangulus R Z K est Isosceles, Angulus vero C Z z est etiam rectus per naturam circuli, unde dempto communi C Z K manent æquales anguli C Z Y & R Z z, præterea anguli in Y & K sunt recti: erit ergo Radius C Z ($\frac{f}{2}$) ad C Y ($\frac{gy}{2RZ}$) sicut Z z (dv) ad K Z quod erit ergo $\frac{gy}{RZ \times f}\,dv$.

3°. Ducatur ex P linea P K ea erit æqualis lineæ P Z nam Trianguli P R Z, P R K erunt æquales ob communem P R, æquales per Const. R Z & R K, & angulos in R rectos (per 4. XI. Elem.); hinc si radio P K, centro P describatur arcus $K\omega$, erit $P\omega = PZ$ & arcus $Z\omega$ similis erit elemento quæsito Ss, & Triangulus $Zz\omega$ Rectangulus erit in ω.

90.

Porro, Triangulus $K\omega z$ erit similis triangulo P R z ob angulum communem in z, & Rectos in R & ω, sive similis



erit triangulo PRZ, ideoque fiat ut PZ ad R Z ita K Z sive $\frac{gy}{RZ \times f}\,dv$ ad ωz quod erit itaque $\frac{gy}{PZ \times f}\,dv$.

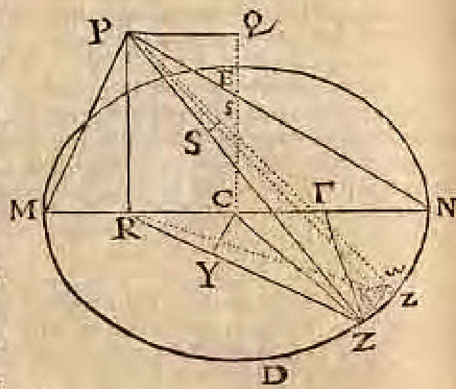
4°. In Triangulo $Zz\omega$, Rectangulo in ω cum Z z sit dv & ωZ sit $\frac{gy}{PZ \times f}\,dv$ erit quadratum $Z\omega$ sive $\overline{Z\omega}^2 = dv^2 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2}\,dv^2$ & cum sit P Z ad P S sicut $Z\omega$ ad S s erit PZ^2 ad PS^2 sicut $\overline{Z\omega}^2$ sive $\overline{1 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2}}\,dv^2$ ad Ss^2 ergo quadratum Elementi curvæ quæsitæ est $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{1 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2}}\,dv^2$. Quod erat Inveniendum.

Ut

DE MUNDI SYSTEMATE.

Ut autem Integretur, primò notandum quod ex Natura circuli Elementum dv sit æquale Elemento $dx \times \frac{f}{2y}$, ideoque qua-

90. dratum Elementi inventum evadet $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g^2}{4 l Z^2}} \times dx^2$: Præterea est $PZ^2 = PR^2 + RZ^2$, & est $RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2$ est autem, ex constructione, $R\Gamma = RN - N\Gamma = \frac{g+f}{2} - x$ ideoque $R\Gamma^2 = \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx - fx + xx$ estque $\Gamma Z^2 = fx - xx$; ideo $(RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2) = \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx$ & $PZ^2 = PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx$; sed est $PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 = PR^2 + RN^2 = PN^2$, ergo $PZ^2 = PN^2 - gx$, & si ad compendium tertia proportionalis ad $2\,PQ$ (sive g) & PN dicatur l ut sit $PN^2 = gl$ fiet $PZ^2 = gl - gx$ sicque, quadratum elementi quæsiti evadet $\frac{PS^2}{gl - gx} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g}{4 \times l - x}} \times dx^2$, sive cum y^2 sit $fx - xx$ erit illud quadratum $\frac{PS^2}{4g \times l - x}\, dx^2 \times \overline{\frac{f^2}{x \times f - x} - \frac{g}{l - x}}$:



Dividatur autem f^2 per $x \times f - x$ fit $\frac{f}{x} + 1 + \frac{x}{f} + \frac{x^2}{f^2} + \frac{x^3}{f^3}$ &c.

Dividatur g per $l - x$ fit . . . $\frac{g}{l} + \frac{gx}{l^2} + \frac{gx^2}{l^3} + \frac{gx^3}{l^4}$ &c.

Differentia serierum fiet $\frac{f}{x} + \frac{l-g}{l} + \frac{l^2 - fg}{l^2 f}x + \frac{l^3 - f^2 g}{l^3 f^2}x^2 + \frac{l^4 - f^3 g}{l^4 f^3}x^3$ &c.

Divid. ea differ. per $l - x$ fit $\frac{f}{lx} + \frac{l+f-g}{l^2} + \frac{l^2 + lf + f^2 - 2fg}{l^3 f}x + \frac{l^3 + l^2 f + lf^2 + f^3 - 3fg}{l^4 f^2}x^2$ &c.

Unde quadratum elementi Sx est $dx^2 \times \frac{PS^2 \times f}{4gl} \times \frac{1}{x} + \frac{l+f-g}{lf} + \frac{l^2 + lf + f^2 - 2fg}{l^2 f^2}x + \frac{l^3 + l^2 f + lf^2 + f^3 - 3fg}{l^3 f^3}x^2$ &c. quæ series ad lubitum continuari potest.

Exprimatur autem curvæ quæsitæ longitudo per hanc seriem cujus coefficientes sunt indeterminati $Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}} + Dx^{\frac{7}{2}} + Ex^{\frac{9}{2}} +$ &c.

ejus fluxio erit $dx \times \frac{1}{2}Ax^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}Bx^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}Cx^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}Dx^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2}Ex^{\frac{7}{2}} +$ &c. cujus quadratum erit $dx^2 \times \frac{1}{4}A^2x^{-1} + \frac{3}{2}AB + \frac{5}{2}ACx + \frac{7}{2}ADx^2 + \frac{9}{2}AEx^3 + \frac{11}{2}AFx^4$

$+ \frac{9}{4}B^2x + \frac{15}{2}BCx^2 + \frac{21}{2}BDx^3 + \frac{27}{2}BEx^4$ &c.

$+ \frac{25}{4}CCx^3 + \frac{35}{2}CDx^4$

Col-

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROB. III.

Collatis verò terminis seriei inventæ cum terminis correspondentibus hujus seriei fictitiæ invenietur $A = \frac{PS\sqrt{f}}{\sqrt{gl}}$

$$B = A \times \frac{l + f - g}{6lf}$$

$$C = A \times \frac{\begin{matrix} 3l^2 + 2lf + 3f^2 \\ + 2lg - 6fg \\ - g^2 \end{matrix}}{2.\,4.\,5\,l^2 f^2} \quad 90.$$

$$D = A \times \frac{\begin{matrix} 10l^3 + 6fl^2 + 6f^2 l + 10f^3 \\ + 2gl^2 + 12fgl - 30f^2 g \\ + 6g^2 l - 10fg^2 \\ - 2g^3 \end{matrix}}{2.\,4.\,4.\,7\,l^3 f^3}$$

$$E = A \times \frac{\begin{matrix} 35l^4 + 20fl^3 + 18f^2 l^2 + 20f^3 l + 35f^4 \\ + 4gl^3 + 12fgl^2 + 60f^2 gl - 140f^3 g \\ - 6g^2 l^2 + 60fg^2 l - 70f^2 g^2 \\ + 20g^3 l - 28fg^3 \\ - 5g^4 \end{matrix}}{2.\,4.\,4.\,4.\,9\,l^4 f^4} \quad \text{\&c.}$$

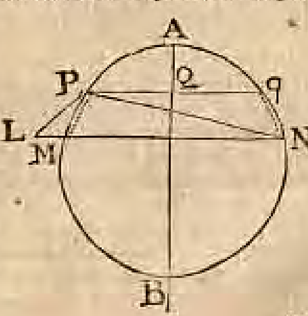
Hinc series quæ exprimit longitudinem curvæ quæsitæ fit

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}}\sqrt{f} \times x^{\frac{1}{2}} + \frac{l+f-g}{2.\,3\,lf}x^{\frac{3}{2}} + \frac{\begin{matrix} 3l^2 + 2lf + 3f^2 \\ + 2lg - 6fg \\ - gg \end{matrix}}{2.\,4.\,5\,l^2 f^2}x^{\frac{5}{2}} + \text{\&c.}$$

Si autem talis sit curva; ut PN sit ubique major quam g scribatur loco x longitudo f, sive Diameter circuli, & habebitur valor dimidii curvæ quæsitæ, quod respondet semicirculo M D N: est ergo ea semi-curva,

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}} \times f \times 1 + \frac{l+f-g}{2.\,3\,l} + \frac{\begin{matrix} 3l^2 + 2lf + 3f^2 \\ + 2lg - 6fg \\ - gg \end{matrix}}{2.\,4.\,5\,l^2} \text{ \&c.}$$

In hoc autem casu quantitas l sive $\frac{PN^2}{g}$ est major quam f, majorem esse quam g ex hypothesi hujus casus sequitur, cum PN supponatur major quam g; majorem autem esse l quam f hinc liquet, ductâ in Trapezio P q N M diagonali PN fiat in P super PN a parte lineæ P M angulus N P L æqualis angulo q, ita ut occurrat P L lineæ N M, dico lineam N L esse longiorem quam NM, nam anguli MPq & q sint æquales, sed angulus N P L est æqualis angulo q ergo angulus NPL cum angulo N P q major est angulo q P M, cadit ergo L ultrà M; sive N L est major N M; est autem N L æquale l nam Trianguli P q N & P N L sunt similes ob angulos q & N P L æquales per const., angulosque N P q & P N L æquales ob parallelas P q, MN, hinc ergo est Pq ad PN ut PN ad N L, sed est P q sive g ad P N ut P N ad l, ergo est N L æqualis l & major quam f.



Hinc

Hinc, ut ista series convergat debent ita disponi termini hujus seriei ut remotiores à primo ponantur ii in quibus crescunt in Numeratore dimensiones quantitatum f aut g, & in Denominatore dimensiones quantitatis l, ideóque hanc habet formam.

90.

$$\frac{PSf}{PN}\times 1$$

$$+\frac{1}{2.3l}\times 1+\overline{f-g}$$

$$+\frac{1}{2.4.5l^2}\times 3l^2+\overline{2fl+2gl}+\overline{3f^2-6fg-g^2}$$

$$+\frac{1}{2.4.4.7l^3}\times 10l^3+\overline{6fl^2+2gl^2}+\overline{6f^2l+12fgl+6g^2l}+\overline{10f^3-30f^2g-10fg^2-2g^3}$$

$$+\frac{1}{2.4.4.4.9l^4}\times 35l^4+\overline{20fl^3+4gl^3}+\overline{18f^2l^2+12fgl^2-6g^2l^2}+\overline{20f^3l+60f^2gl+60fg^2l+20g^3l}+\&c.$$

$$+\frac{1}{2.4.4.4.4.11l^5}\times 126l^5+\overline{70fl^4+10gl^4}+\overline{60f^2l^3+24fgl^3-4g^2l^3}\ \&c.$$

$$+\frac{1}{2.4.4.4.4.4.13l^6}\times 462l^6+\overline{252fl^5+28gl^5}\ \&c.$$

$$+\frac{1}{2.4.4.4.4.4.4.15l^7}\times 1716l^7+\ \&c.$$

&c.

Ut autem hæc forma ad simpliciorem revocetur, notandum quod ubi est $g=0$ tunc $l=\infty$, ideóque omnes termini hujus seriei præter primam columnam evanescunt, quoniam continet altissimam dignitatem quantitatis l; sed ubi $g=0$ tunc Conus PMDNE fit rectus, & curva inscripta sphæræ cujus radius est PS, est circulus cujus Diameter est ad f sicut PS ad PN, unde is Diameter est $\frac{PS\times f}{PN}$; ideoque prima columna seriei quæ eo in casu dimidium curvæ exprimit, continet rationem semi-circuli ad Diametrum 1. Ideo summa tota ejus columnæ $1+\frac{1}{2.3}+\frac{3}{2.4.5}+\frac{10}{2.4.4.7}$ &c. est 1.57079 &c. idque in quocumque valore quantitatis g, siquidem ea quantitas in eâ columnâ eliminatur.

Ad inveniendam summam secundæ columnæ, ea in duas dividatur partes quarum prior multiplicet $\frac{f}{l}$, altera $\frac{g}{l}$ ut habeatur summæ columnæ multiplicatæ per $\frac{f}{l}$ observandum quod singuli coefficientes primæ columnæ (primo termino 1 secluso) sunt ad coefficientes singulos secundæ columnæ ut numeri 1 ad 1, 3 ad 2, 5 ad 3, 7 ad 4, 9 ad 5, 11 ad 6, 13 ad 7 &c. quæ ratio tandem abit in rationem duplam, itaque hi coefficientes secundæ columnæ simul sumpti dimidium efficiunt quantitatis .57079 additâ insuper eâ quantitate quâ primi coefficientes secundæ columnæ excedunt dimidium coefficientium primæ, qui excessus celerrimè convergunt suntque

$$\frac{\frac{1}{2}}{2.3}+\frac{\frac{1}{2}}{2.4.5}+\frac{1}{2.4.4.7}+\frac{\frac{5}{2}}{2.4.4.4.9}+\frac{7}{2.4.4.4.4.11}+\frac{21}{2.4.4.4.4.4.13}+\frac{66}{2.4.4.4.4.4.4.15}\ \&c.$$

qui termini sunt	.03333
	.01250
	.00446
	.00217
	.00124
	.00078
	.00053
	.10613
summa reliquorum	.00112
dimidium .57079	.28539
	.39152

Ut termini reliqui habeantur, fingi potest sequentes terminos decrescere in ratione duorum ultimò inventorum, unde summa omnium terminorum adjiciendorum erit .00112 proximè, hinc ea pars secundæ columnæ est $.39152\frac{f}{l}$ proximè.

Hujus autem primæ partis secundæ columnæ coefficientes sunt ad coefficientes alterius partis ut -1 ad 1, $+1$ ad 1, 3 ad 1, 5 ad 1, 7 ad 1, 9 ad 1 &c., singuli autem erant ad suos excessus supra dimidium termini columnæ primæ ut 2 ad 1, 4 ad 1, 6 ad 1, 8 ad 1, 10 ad 1, 12 ad 1 &c., ergo coefficientes alterius partes istius columnæ sunt ad eos excessus ut 2 ad -1, 4 ad 1, 6 ad 3, 8 ad 5, 10 ad 7, quæ ratio tandem ad æqualitatem desinit; Ergo summa istius columnæ sumatur æqualis differentiolis supra inventis .10613, & insuper quantitatibus quibus inventi termini hujus columnæ excedunt eas differentiolas, quæ sunt 90.

$$\frac{-1\frac{1}{2}}{2.3}+\frac{1\frac{1}{2}}{2.4.5}+\frac{1}{2.4.4.7}+\frac{\frac{3}{2}}{2.4.4.4.9}+\frac{3}{2.4.4.4.4.11}+\frac{7}{2.4.4.4.4.4.13}+\frac{18}{2.4.4.4.4.4.4.15}$$

sive	$-$ .25
	$+$ .03750
	$+$ .00446
	$+$ .00130
	$+$ .00053
	$+$ .00026
	$+$ .00014
	$-$ .20581
sum. reliq.	16
sum. differ.	$+$ .10613
	$-.09952\frac{g}{l}$

Unde summâ terminorum ejus columnæ est $-.09952\frac{g}{l}$ proximè

Termini tertiæ columnæ summati evadunt $+0.1379\frac{f^2}{l^2}-0.0621\frac{fg}{l^2}+0.0057\frac{g^2}{l^2}$

Termini quartæ sunt $+0.07265\frac{f^3}{l^3}-0.07119\frac{f^2g}{l^3}-0.00312\frac{fg^2}{l^3}+0.03353\frac{g^3}{l^3}$

Term. quintæ sunt $+0.04965\frac{f^4}{l^4}-0.00444\frac{f^3g}{l^4}-0.05586\frac{f^2g^2}{l^4}+0.06380\frac{fg^3}{l^4}+0.015\frac{g^4}{l^4}$

T. sextæ sunt $+0.07469\frac{f^5}{l^5}-0.14589\frac{f^4g}{l^5}-0.11563\frac{f^3g^2}{l^5}-0.06938\frac{f^2g^3}{l^5}-0.01376\frac{fg^4}{l^5}-0.00385\frac{g^5}{l^5}$

In hoc casu ubi l est major quam g aut f, ex istis terminis sufficiens convergentia obtinetur, ut pro vero valore curvæ, hi termini imo & pauciores assumi possint reliquis omissis; Quoniam ergo invenimus attractionem puncti P à circulo MDNE esse ut PC ductum in numerum linearum PZ in circumferentia MDNE terminatarum, sive ut PC ductum in curvam quæ in superficie sphæræ intercipitur inter lineas PZ, si in singulo puncto C, axeos AB erigatur ordinata quæ sit ut

DE MUNDI SYSTEMATE.

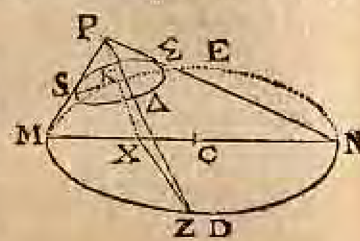
$$\frac{PC}{PN}\times MN\times 1{,}57079+0{,}39125\frac{f}{l}+0{,}1379\frac{f^2}{l^2}+0{,}0726\frac{f^3}{l^3}$$
$$-0{,}09952\frac{g}{l}-0{,}0621\frac{fg}{l^2}-0{,}0722\frac{f^2g}{l^3}\ \&c.$$
90.
$$+0{,}0057-\frac{g^2}{l^3}-0{,}0032\frac{fg^2}{l^3}$$
$$+0{,}03353\frac{g^3}{l^3}$$

& per vertices earum ordinatarum curva ducta intelligatur, exprimet ejus area attractionem puncti P, si modo in hoc valore inserantur quantitates ad curvam revolventem pertinentes; abscissa constans AQ dicatur a, ejus ordinata $PQ=\frac{g}{2}$ sit c, abscissa AC sit x, ordinata CM sit y, erit $PN^2=\overline{x-a}^2+\overline{y+c}^2$, ideóque $l=\frac{\overline{x-a}^2+\overline{y+c}^2}{2c}$, & $PC=\sqrt{\overline{x-a}^2+c^2}$.

Ex his & æquatione curvæ; determinari poterit punctum axeos in quo transibit circulus talis ut attractio cis eum circulum æqualis sit attractioni ultra eum circulum, sive punctum axeos ad quod tendit media directio gravitatis hinc ejus obliquitas ad perpendiculum in curvam obtinebitur.

Sed cum hæc duntaxat valeant cum g sive PQq numquam major est quam PN, generalior alia est solutio, sed cujus calculus paulo prolixior videbitur.

2dus. Casus, si talis sit curva ut incertum sit utrum PN numquam sit minor quam PQq sive g.



Ducatur per punctum P linea quæ angulum NPM in duos angulos æquales dividat, & occurrat lineæ MN in puncto X, erit (per 3. VI. Elem.) PN+PM ad NM ut PN ad NX quod erit ergo $\frac{PN\times f}{PN+PM}$; scribatur is valor loco x in serie quæ exprimit longitudinem curvæ propositæ ea evadet

$$\frac{PS\times f}{\sqrt{PN\times\overline{PN+PM}}}\times 1+\frac{l+f-g}{2.3.\,l\times\overline{PN+PM}}PN+\frac{\begin{matrix}3l^2+2lf+3f^2\\+2lg-6fg\\-gg\end{matrix}}{2.4.5\,l^2\times\overline{PN+PM}^2}PN^2\ \&c.$$

quæ series in omni casu convergit propter quantitatis PN+PM dignitates in denominatore positas quæ quantitas semper major est quam PN, f & g in numeratore positas (per 20. 1i. Elem.), imo si loco l ponatur ejus valor $\frac{PN^2}{g}$ fiatque reductio series evadet

$$\frac{PS\times f}{\sqrt{PN\times\overline{PN+PM}}}\times 1+\frac{PN^2+fg-g^2}{2.3.\,PN\times\overline{PN+PM}}+\frac{\begin{matrix}3PN^4+2PN^2gf+3f^2g^2\\+2PN^2gg-6fg^3\\-g^4\end{matrix}}{2.4.5.\,PN^2\times\overline{PN+PM}^2}\ \&c.$$

Cum

Cum autem in Triangulo PNq, vel in Triangulo PMN, PN+MN sit summa laterum & PN numquam sit minimum latus, demonstrabitur facile quod Rectangulum PN per PM + PN, est majus Rectangulis aut quadratis factis ex reliquis lateribus PN, Pq vel MN, unde in quocumque casu hæc series tam respectu litteralium quantitatum quàm respectu numerorum coefficientium erit convergens, idque satis prompte, siquidem duobus gradibus crescunt dimensiones ab uno termino ad alterum. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

Portio autem curvæ quæsitæ respondens tali abscissæ, est accurate quarta pars totius curvæ quæsitæ, sumptis enim a puncto P secundum lineas PM, PN longitudinibus PS, PZ æqualibus radio sphæræ, ductâque SΣ; & secto Cono PMDNE secundum lineam SΣ per planum perpendiculare Plano PNM sectio erit Ellipsis & SΣ unus ejus Ellipseos axibus; quia verò Triangulus PSΣ est Isosceles & linea PX angulum SPΣ bifariam dividit, ea linea PX secabit axem Ellipseos SΣ in ipso centro K Ellipseos, quoniam autem alter axis KΔ est perpendicularis in axem SΣ, & est in plano ad Planum PNM perpendiculari, erit axis ΔK perpendicularis in lineam PKX ideoque erit Parallelus ordinatæ XZ, & linea PZ transibit per punctum Δ; Ergo unus Ellipseos quadrans intercipietur inter lineas PN, PZ, hoc est respondebit portioni NDZ semicirculi NZDN, alter verò quadrans Ellipseos respondebit reliquæ portioni MZ semi-circuli ejusdem; Jam verò evidens est quod si habeatur Conus rectus cujus basis sit Ellipsis quævis, & ab ejus Vertice ut Centro, radio quovis describatur curva in ejus Coni superficie, portiones ejus curvæ singulis quadrantibus Ellipseos respondentes erunt inter se æquales; Ergo portio curvæ respondens abscissæ $x=\frac{PN}{PN+PM}f$ est accuratè quarta pars totius curvæ quæsitæ. 90.

Ergo ex prius inventis, cum attractio Puncti P à Pyramidibus in peripheriam MDNE desinentibus, exprimi debeat per PC ductam in numerum linearum PZ, quæ à puncto P æqualibus angulis procedentes ad peripheriam MDNE desinunt, is vero numerus linearum PZ sit ut curva quæ intercipitur in superficie sphæræ descriptæ radio quocumque PS inter eas lineas PZ, eaque curva in quatuor æquales quadrantes dividatur, erit etiam is numerus linearum PZ ut unus ex eis quadrantibus, exprimitur vero is quadrans per seriem suprà inventam ergo (posito PS=1) attractio Puncti P à solido est ut

$$\frac{PC\times f}{\sqrt{PN\times\overline{PN+PM}}}\times 1+\frac{PN^2+ff-gg}{2.3.\,PN\times\overline{PN+PM}}+\frac{\begin{matrix}3PN^4+2PN^2gf+3f^2g^2\\+2PN^2gg-6fg^3\\-g^4\end{matrix}}{2.4.5.\,PN^2\times\overline{PN+PM}^2}\ \&c.$$

Hæc series tunc minimùm convergit cum ex solis coefficientibus numericis convergit, cum nempe punctum M coincidit cum puncto P, tunc enim quantitates omnes NM, sive f; Pq sive g, PN & PN+PM sunt inter se æquales & $PC=\frac{g}{2}$ tunc ergo series redit ad $PC\times 1+\frac{1}{2.3}+\frac{3}{2.4.5}+\frac{10}{2.4.4.7}+\frac{35}{2.4.4.4.9}$ &c.

Eo autem in casu, ex ipsâ constructione liquet, portionem curvæ sphæræ inscriptæ esse quadrantem circuli cujus radius est 1, eumque quadrantem exprimi illâ serie; hinc totam hanc seriem æquipollere quantitati $1{,}57079\times PC$.

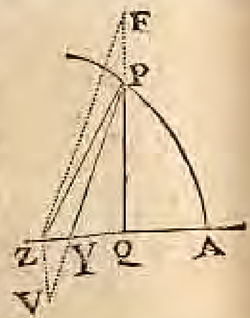
Facilior paulo evadet calculus, si loco summæ laterum PM+PN, adhibeatur quantitas $\frac{fg}{PN-PM}$ ipsi æquipollens, Prolixior tamen est, quàm ut illum applicare sustinuerimus ad ulteriores consequentias.

Dixi ex his viam sterni ad determinationem curvæ quam affectat Meridianus Telluris nam si ex Æquatione generali $y=Ax^n+Bx^{2n}+Cx^{3n}$ &c. & ex serie inventâ determinetur attractio puncti P à quovis circulo, & erigatur in puncto axis quod ejus circuli est centrum ordinata quæ ejus circuli attractionem repræsentet, & intell-

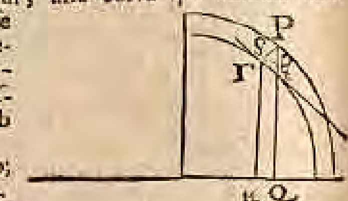
De Mundi Systemate.

intelligatur curva per earum ordinatarum vertices transiens, quæratur ejus curvæ area per vulgatas methodos, habebiturque gravitas puncti P in solidum; quæratur præterea punctum axeos Y in quo si erigeretur ordinata illi curvæ quæ gravitatem puncti P exprimit, ejus curvæ area bifariam divideretur, erit Y punctum axeos ad quod attractio puncti P dirigetur.

90. Pariter ex Æquatione generali curvæ habebitur punctum axeos Z ad quod pertinget perpendiculum in curvæ punctum P, habebuntur ergo intervalla ZY & YQ, ex Z ducatur ZV Parallela PQ quæ concurrat cum PY productâ in V, producatur PQ in F ut fiat PF = ZV, ducaturque FZ, quoniam curva circa axem revolvitur, PF erit directio vis centrifugæ agentis in puncto P, PV directio gravitatis, PZ verò curvæ perpendicularis erit directio media nata ex utriusque vis compositione (ut constat facto cum agatur de tellure ipsâ), sed quia habentur ZY, YQ, PQ & PY habebuntur ZV & VY, ideóque habebitur VP, ergo habebuntur latera & Diagonalis Parallelogrammi FPVZ sive habebuntur rationes vis centrifugæ puncti P, vis ejus gravitatis & vis mediæ PZ ex utrâque resultantis, fiat ergo ut PV ad PZ ita gravitas puncti P ex attractione solidi nata & per aream curvæ inventa ad residuum ejus gravitatis demptâ vi Centrifugâ.



Tandem inscripta intelligatur in curva quæ quæritur, alia curva ipsi omninò similis ita ut earum sit idem centrum, & axes supra se mutuò jaceant, Æquatoris prioris curvæ semi-Diameter dicatur m, & differentia ejus à semi-Diametro alterius, quæ quamminima assumi potest, dicatur dm, abscissa CQ prioris curvæ sit z, erit ejus differentia ab abscissâ correspondenti alterius curvæ $\frac{zdm}{m} = Qn = \Gamma p$; ordinata PQ sit y ejus differentia ab ordinatâ correspondenti erit $\frac{ydm}{m} = Pp$; quoniam Γt potest sumi ut portio tangentis curvæ, triangulum $\Gamma p t$ erit simile Triangulo fluxionali in puncto Γ sive etiam in Puncto P ob similitudinem curvarum & abscissarum erit ergo $: dz : dy = \Gamma p \left(\frac{zdm}{m}\right) : pt = \frac{zdy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ ergo $Pt = Pp + pt = \overline{y + \frac{zdy}{dz}} \times \frac{dm}{m}$ sed si ducatur $P\varrho$ perpendicularis ad curvam in P erit etiam Triang. $P\varrho t$ simile Triang. $\Gamma p t$ ideoque Triang. fluxionali; nam ob similitudinem curvarum, tangens Γt est parallela curvæ in P, ideóque angulus ϱ est rectus, est ergo dv ad dz ut Pt sive $\overline{y + \frac{zdy}{dz}} \times \frac{dm}{m}$ ad $P\varrho$ quod erit ergo $\frac{ydz + zdy}{dv} \times \frac{dm}{m}$ sive deletâ ratione $\frac{dm}{m}$ quæ data est, perpendiculi portio inter duas curvas similes intercepti erit ut $\frac{ydz + zdy}{dv}$, multiplicetur id perpendiculum per ydv, factum erit ut annulus solidus inter curvas interceptus tandem ergo multiplicetur $y^2 dz + zydy$ per valorem gravitatis acceleratricis secundum PZ quæ prius inventa fuit, factum erit ut Pondus fluidi inter curvas similes intercepti in puncto P, sumantur ejus facti fluxiones factâ dz constanti, & nihilo æquentur illæ fluxiones, sic pondera omnium partium inter duas curvas contentarum fient æqualia, & habebitur æquatio fluxionalis curvæ quam Meridianus terræ affectat.



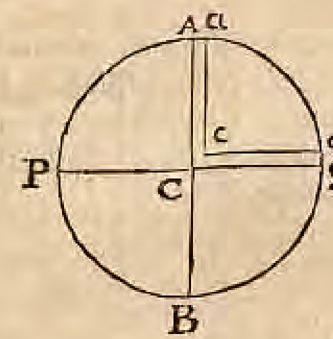
Alia etiam est in hoc Problemate conditio quæ brevius æquationem suppeditare posset, nem-

Liber Tertius. Prop. XX. Prob. IV.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diversis.

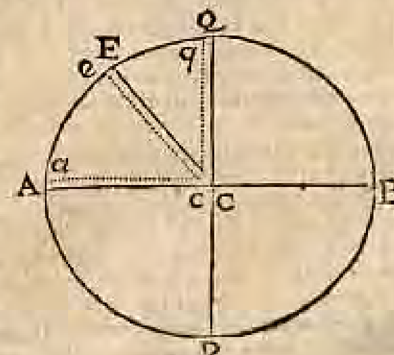
(a) Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aquex



ACQqca æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem

pe (fig. præced.) cum sit PQ ad ZV ut ZY ad YQ, & ZV sit ubique ut vis centrifuga puncti P quæ est semper proportionalis ordinatæ PQ, ratio ZY ad YQ constans esse debet. Bene ergo res se habet si utroque modo eadem obtineatur curva, sin minus, oportet ut inter has hypotheses aliqua sit repugnantia, nempe dari solidum, uniformiter densum, rotans circa axim & in æquilibrio constitutum, in quo media actio inter gravitatem & vim Centrifugam sit perpendicularis ad curvam; Quæ quidem dicta non putentur ut præripiam palmam & laudem illi qui majori patientiâ aut industriâ, determinabit generalissimè Meridiani figuram ex genuinis Newtonianis principiis, nullâ præsuppositâ ad circulum, Ellipsim, aliamve curvam affinitate, sive his calculis ipsis felicius tractatis sive aliis. 90.

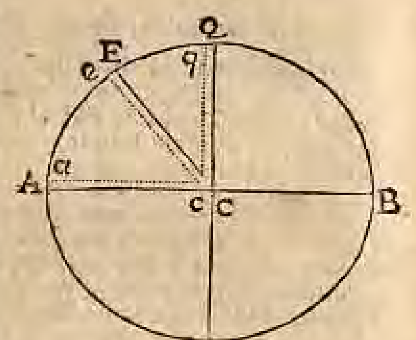
(a) * *Quoniam pondera.* Concipiatur (ut suprà prop. 19.) canalis aquæ plena à polo Qq ad centrum Cc & inde ad æquatorem Aa pergens. Quia oportet fluidum quiescere (ex hyp.) erit fluidum in canalis crure AC in æquilibrio cum fluido in ejusdem canalis crure QC, & portio quælibet fluidi in crure CA consistet in æquilibrio cum simili & similiter positâ fluidi portione in crure CQ (ex demonstratis in prop. præc.) idem quoque simili argumento colligitur de corporibus quibusvis homogeneis etiamsi fluida non sint. Quarè corpora homogenea quæ



 ut pondera totorum, ideóque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciprocè ut crura, id est, reciprocè ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pondera sunt reciprocè ut crura, id est, reciprocè ut distantiæ corporum à centro terræ. Proindè si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie terræ consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut distantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam terræ superficiem regionibus, sunt reciprocè ut distantiæ locorum à centro: & (b) propterea, ex hypothesi quod terra sphærois sit, dantur proportione.

Un-

90. sunt ut A C, Q C in locis A & Q constituta æquè gravia sint versus centrum C. Sed gravitas corporis in A positi quod est ut Q C est ad gravitatem alterius corporis homogenei ibidem constituti quod est ut A C sicut Q C ad A C. Sunt enim corporum homogeneorum in eodem loco consistentium pondera ut ipsamet corpora, ergò corporum homogeneorum in A & Q positorum gravitates sunt ut Q C ad A C. Eodem modo ostendetur gravitatem corporis in loco E, in altera quâcumque canali C E, esse ad gravitatem corporis æqualis & homogenei in loco Q, ut C Q ad C E; fluidum enim in canali A C E quiescere debet sicut in priori canali A C Q (per hyp.) undè, ex æquo, æqualium & homogeneorum corporum in telluris superficie ubivis consistentium gravitates absolutæ sunt ut distantiæ à centro reciprocè.



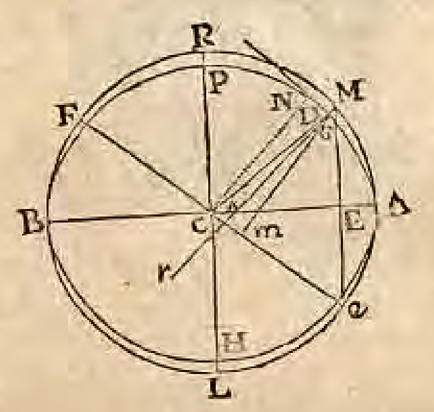
* Gravitatem corporis in E esse ad gravitatem corporis in Q ut C Q ad C E verum est non Mathematicè, sed quam proximè; directio enim gravitatis corporis positi in E non est secundum E C, ita ut ad centrum C tendat, sed est perpendicularis superficiei Q E A (ut ex facie liquet) hinc gravitates in singulis punctis forent reciprocè ut radii osculatores curvæ, verùm ob figuram terræ propè sphæricam id subtilius sectari videtur superfluum, tanto magis quod calculorum consequentiæ cum experimentis sint conferendæ in quibus semper deficiet Mathematica ἀκρίβεια.

91. (b) * *Et propterea.* Ex hypothesi enim quod terra sit sphærois qualem vult Newtonus, hoc consit theorema; quod scilicet *incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos sit quam proximè ut sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perindè est, ut quadratum sinus recti latitudinis.*

Unde tale consit theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos, sit quam proximè ut sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perindè est, ut quadratum sinus recti latitudinis. Et (c) in eâdem circiter ratione augen-

latitudinis. Sit enim A P B A, ellipsis quæ referat meridianum terræ & A R B L A, circulus radio C A, descriptus ad quem Ellipsis A P B A proximè accedit, sitque radius C A semidiameter æquatoris terrestris, erit (ex naturâ ellipsis 247 lib. 1.) $RP : MG = CR : EM$, ideóque $MG = \frac{RP \times EM}{CR}$. Sed propter triangula DMG, EMC, similia, ubi ellipsis ad circulum proximè accedit (tunc enim D G, sumi potest pro rectâ tangente Ellipsim in puncto D, & ea tangens est quam proximè perpendicularis radio D C) est $MG : MD = MC : ME$ ac proindè $MG = \frac{MD \times MC}{ME}$, erit ergò $\frac{RP \times ME}{CR} = \frac{MD \times MC}{ME}$, unde fit $MD = \frac{RP \times ME^2}{CR^2}$. Jam verò ex puncto M, ducatur perpendicularis M m ad rectam F e, erit e m sinus versus arcûs duplicati A M, hoc est, arcûs M e, sive quia A M exhibet latitudinem (10) erit e m, sinus versus latitudinis duplicatæ; sed est $em \times eF = M^2$ (ex proprietate circuli). Quare ob datam e F, est e m ut eM^2, vel etiam ut ME^2 ideóque MD, est ut $\frac{RP \times em}{CR^2}$, vel ob datas $\frac{RP}{CR^2}$, fit MD, ut e m, sive ut ME^2. Quia verò pondera in locis A & D sunt ut distantiæ locorum à centro reciprocè (ex dem.) erit incrementum ponderis in D, ut $\frac{1}{CD} - \frac{1}{CA}$, hoc est, ut $CA - CD$, vel ut $CM - CD$ ideóque ut MD. Quare *incrementum ponderis &c.*

92.



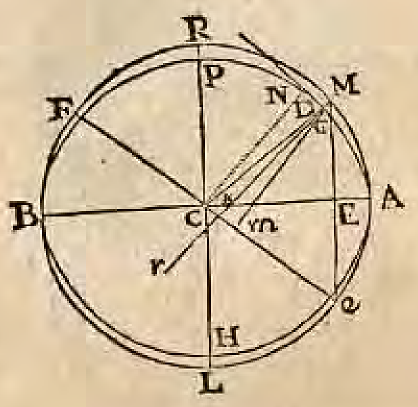
(c) 92. * *Et in eâdem circiter ratione.* Minimus arcus circuli curvam aliquam in dato puncto osculantis pro arcu infinitesimo curvæ in hoc puncto usurpari potest (121. lib. 1.). Sed integri gradus sunt ut minimi arcus similes, arcus autem illi sunt ut radii circulorum curvam osculantium; quare gradus integri erunt ut iidem radii. Erit itaque gradus in loco D, ut radius circuli ellipsim ibidem osculantis, & gradus in loco A, iidem ut radius circuli ellipsim osculantis in eodem puncto A. Jam verò ductâ perpendiculari CN, ad tangentem D N, sumptoque D r, pro radio osculatore in D, erit D r ut Dk^3, sive quia est $CP^2 = CN \times DK$ (ibid.) ob datam CP^2 erit Dk ut $\frac{1}{CN}$, ideóque radius circuli qui est ut Dk^3, erit ut $\frac{1}{CN^3}$, hoc est, radius circuli ellipsim osculantis est

ideo

DE MUNDI SYSTEMATE.

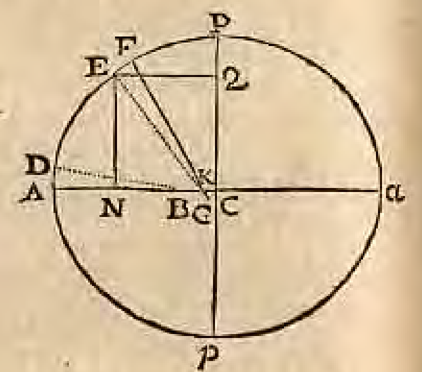
augentur arcus graduum latitudinis in meridiano. Ideóque cum latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit 48^gr. 50′, ea locorum sub æquatore 00 gr. 00′, & ea locorum ad polos 90 gr. & duplorum tore

92.



reciprocè ut cubus perpendiculi ex centro C in tangentem D N demissi. Quarè incrementa graduum in D, pergendo ab æquatore ad polos erunt ut $\frac{1}{CN^3} - \frac{1}{CA^3}$ hoc est, ut $CA^3 - CN^3$, sive ut $CM^3 - CN^3$, vel etiam ut $CM^3 - CD^3$ quoniam differentia rectarum CN, CD admodùm exigua est. Sed est $CM^3 = (CD + DM)^3 = CD^3 + 3CD^2 \times DM + 3DM^2 \times CD + DM^3$, ideóque $CM^3 - CD^3 = 3CD^2 \times DM + 3DM^2 \times CD + DM^3 = 3CD^2 \times DM$, ob quantitates DM^2, DM^3, ferè evanescentes respectu $3CD^2 \times DM$, sunt igitur incrementa graduum ut $3CD^2 \times DM$, sive ut DM, ob rectam CD proximè constantem. Quarè incrementa graduum sunt ut ponderum incrementa.

93. Idem analyticè præstari potest quemadmodum elegantissime, pro more suo, fecit Clariss. D. De Maupertuis in monumentis Paris. an. 1734. & in libro de figurâ terræ. Semiellipsis P A p, referat meridianum sphæroidis cujus est axis Pp, diameter verò secundum æquatorem Aa. Ponatur $CA = 1$, $CP = m$, $CN = x$, $EN = y$ erit (ex naturâ ellipseos per lem.



4. de Conicis) $EN^2 : CP^2 = AN \times Na : AC^2$, ideóque $y^2 = m^2 \times (1 - xx)$ & $y = m\sqrt{1 - xx}$. Sit GE, radius circuli ellipsim osculantis in E, is erit (214. lib. 1.) $= \frac{1}{m}(1 - xx + mmxx)^{\frac{3}{2}}$. Quia verò $EK^2 = \frac{EG \times PC^4}{AC^2}$ (239. lib. 1.) erit $EK = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2}$. Jam sinus anguli latitudinis AKE, dicatur s, posito sinu toto $= 1$, erit $1 : s = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2} : m\sqrt{1 - xx}$, ac proindè $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$ quo valore substituto, loco xx in expressione radii osculatoris, fiet $EG = \left(\frac{mm}{1 - ss + mmss}\right)^{\frac{3}{2}}$. Nunc conferantur simul duo gradus meridiani AD, EF, quorum unus incipiat ab æquatore, alter verò

sinus versi sint 1134, 00000 & 20000, existente radio 10000, & gravitas ad polum sit ad gravitatem sub æquatore ut 230 ad 229. & excessus gravitatis ad polum ad gravitatem sub æ- sinus

LIBER TERTIUS. PROP. XX. PROBL. IV.

verò sumatur ubivis in arcu A P, sumpto AB, pro radio circuli ellipsim osculantis in A, erit (92) $AD : EF = AB : EG$, sed est $AB = \frac{PC^2}{AC}$ (241. lib. 1.) $= mm$, quare si gradus AD dicatur A & gradus EF, dicatur E fiet $A : E = mm : \frac{mm}{(1 - ss + mmss)}^{\frac{3}{2}}$ ac proindè $E = A \times (1 - ss + mmss)^{-\frac{3}{2}}$. Hæc formula exprimit relationem inter primum gradum latitudinis & alium quemlibet gradum, atque inter diametrum & axem.

94. Si quantitas $1 + mm - ss$, evehatur ad dignitatem cujus exponens est $-\frac{3}{2}$ (550. lib. 1) erit $E = A \times (1 - \frac{3}{2}(mm - 1)ss + \frac{15}{8} \times (mm - 1)ss^2 - \&c.)$ vel $A - E = \frac{3}{2}(mm - 1)AS^2 - \frac{15}{8}(mm - 1)^2 AS^4 + \&c.$ Quia verò sphærois terræ ad sphæram proximè accedit, erit ferè $m = 1$, ideóque in superiori formulâ negligi poterunt termini in quibus quantitas $mm - 1$, ad altiorem potestatem evecta occurrit, undè fit pro tellure $2A - 2E = 3(mm - 1) \times ASS$. Si terra ponatur versùs polos compressa erit $1 > m$ & $E > A$, hincque prodit $E - A : ASS = 3 \times (1 - mm) : 2$. Quare iterum patet id quod jam demonstravimus (92) arcus scilicet graduum latitudinis in meridiano augeri in duplicatâ ratione sinûs recti latitudinis.

95. Si gradus AD, non computetur ab ipso æquatore, sed ubivis inter A & E sumatur, sitque S sinus anguli latitudinis, patet (94) fore $BD = \frac{mm}{(1 - SS + mmSS)}^{\frac{3}{2}}$ ideóque $A : E = \frac{mm}{(1 - SS + mmSS)}^{\frac{3}{2}} : \frac{mm}{(1 - ss + mmss)}^{\frac{3}{2}}$, ac proindè $E \times (1 - ss + mmss)^{\frac{3}{2}} = A \times (1 - SS + mmSS)^{\frac{3}{2}}$. Jam verò evectis terminis ut supra ad dignitatem cujus exponens $\frac{1}{2}$, neglectisque quantitatibus evanescentibus (95), fiet $1 - mm = \frac{2(E - A)}{3E \times (ss - SS)}$.

96.

Si gradus unus ab æquatore, alter à polo numeretur, erit $s = 1$, & $S = 0$, ideóque formula præcedens abit in hanc $1 - mm = \frac{2(E - A)}{3E}$.

96. Si loco semidiametrorum CA, CP, & sinus latitudinis ss, in æquatione $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$, (93) substituantur expressiones quælibet indeterminatæ, æquatio præcedens quatuor continebit variabiles, quarum tribus cognitis quarta innotescet. Quare datis semidiametro æquatoris CA, semidiametro paralleli NC vel EQ, x, aut quod idem est, datis gradu æquatoris & gradu paralleli (sunt enim gradus illi ut ipsimet circuli, ideóque ut radii) & simul cognitâ latitudine, cujus sinus s, dabitur axis ellipsoidis. Simili prorsus modo ductâ quâlibet aliâ ordinatâ EQ, quæ sit alterius paralleli semidiameter & mutatâ utcumque latitudine, institui poterit alia æquatio quatuor variabiles continens ac proindè duplex obtinebitur æquatio. Jam verò quia hæc utraque æquatio duas continet indeterminatas communes, nempè semidiametros ellipsis, patet datis duorum parallelorum gradibus, datisque latitudinibus, per vulgares algebræ regulas collatâ simul utrâque æquatione, determinari posse semidiametrorum rationem. Cæterum hæc omnia constructionibus geometricis facilè absolvi possunt, verùm in præsenti materiâ præstat calculum adhibere.

De Mundi Systemate.

quatore ut 1 ad 229: (d) erit excessus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem sub æquatore, ut $1\frac{11334}{20000}$ ad 229, seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. (e) Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & in latitudine *Lutetiæ Parisiorum* longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius (f) ob pondus aëris $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli sub æquatore superabitur à longitudine synchroni penduli Parisiensis, (g) excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo constat tabula sequens.

86. (d) * *Erit excessus gravitatis.* Excessus gravitatis ad polum dicatur E, excessus gravitatis in latitudine Lutetiæ dicatur e, sitque G, gravitas sub æquatore, erit.

$$E : G = 1 : 229$$

$$e : E = 11334 : 20000,$$ ideóque per compositionem rationum & ex æquo $e : G = 1 \times 11334 : 229 \times 20000 = \frac{1 \times 11334}{20000} : 229$, hoc est, excessus gravitatis in latitudine Lutetiæ est ad gravitatem sub æquatore $= \frac{1 \times 11334}{20000} : 229 = 5667 : 2290000$, & propterea addendo 5667 numero 2290000, gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000.

(e) * *Quare cum longitudines pendulorum.* (Cor. 4. Prop. 24. Lib. 2.).

(f) * *Ob pondus aëris.* Corpus oscillans in aere ponderis sui partem amittit æqualem ponderis paris voluminis aeris, quare si idem corpus ponatur moveri in vacuo, paululum augeri debet illius pondus ideoque celeriùs vibrabit & ut ad Isochroneitatem reducatur augeri debebit longitudo penduli eâdem ratione quâ augetur gravitas hinc cum $\frac{1}{11000}$ parte plus ubi pondus in vacuo augeatur tantumdem augeri debet penduli longitudo quæ erit ergo ad $440\frac{1}{2}$ l. ut 11001 ad 11000 invenieturque $440\frac{5}{9}$ (289. lib. 2.). Hinc in latitudine Lutetiæ Parisiorum longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis in vacuo hic ponitur pedum trium Paris. & lin. 8 $\frac{5}{9}$ proximè.

(g) * *Excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum.* Cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, erit 2295667 ad 2290000 ut longitudo penduli in latitudine Lutetiæ, hoc est, ut 3 ped. 8 $\frac{5}{9}$ lin. vel ut $\frac{3965}{9}$ lin. ad quartum proportionalem $\frac{9079850000}{20661003} = 439.468$, qui est penduli longitudo sub æquatore. Hâc autem demptâ ex longitudine penduli in latitudine Lutetiæ ped. 3. & 8 $\frac{5}{9}$ lin., seu lin. 440.555, remanet excessus lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ.

Lati-

Liber Tertius. Prop. XX. Probl. IV.

Latitudo loci.	*Longitudo penduli.*		*Mensura gradus unius in meridiano.*
grad.	*ped.*	*lin.*	*hexapedæ.*
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	59382

Constat autem per hanc tabulam quod graduum inæqualitas tam parva sit, ut in rebus geographicis figura terræ pro sphæ-

 ricâ

DE MUNDI SYSTEMATE. ficâ haberi possit: (h) præsertim si terra paulo densior sit versus planum æquatoris quam versus polos.

Jam vero astronomi aliqui in longinquas regiones ad observationes astronomicas faciendas missi, observarunt quod horologia oscillatoria tardius moverentur prope æquatorem quàm in regionibus nostris. Et primo quidem D. *Richer* hoc observavit anno 1672. in insulâ *Cayennæ*. Nam dum observaret transitum fixarum per meridianum mense *Augusto*, reperit horologium suum tardius moveri quam pro medio motu solis, existente differentiâ 2'. 28'' singulis diebus. Deinde faciendo ut pendulum simplex ad minuta singula secunda per horologium optimum mensurata oscillaret, notavit longitudinem penduli simplicis, & hoc fecit sæpius singulis septimanis per menses decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus penduli cum longitudine penduli Parisiensis (quæ erat trium pedum Parisiensium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem esse, existente differentiâ lineæ unius cum quadrante.

Postea *Halleius* noster circa annum 1677 ad insulam *Sanctæ Helenæ* navigans, reperit horologium suum oscillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, sed differentiam non notavit. Pendulum verò brevius reddidit plusquam octavâ parte digiti, seu lineâ unâ cum semisse. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in imâ parte penduli non sufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interposuit.

Deinde anno 1682. D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis in observatorio regio Parisiensi esse ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in insulâ *Goreâ* eâdem methodo longitudinem penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, existente longitudinum differentiâ lin. 2. Et eodem anno ad insulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Posthac

7 * (h) * *Præsertim si terra.* In eo siquidem casu minui diametrorum differentiam ostendimus (in prop. præc.).

Posthac D. *Couplet* filius anno 1697 mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum solis medium in observatorio regio Parisiensi sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu solis congrueret. Deinde *Ulyssipponem* navigans invenit quod mense *Novembri* proximo horologium tardius iret quàm prius, existente differentiâ 2'. 13'' in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardius ire quam *Parisiis*, existente differentiâ 4'. 12'' in horis 24. Et affirmat pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse *Ulyssipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Parisiis*. (i) Rectius posuisset differentias esse $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2'. 13'', & 4'. 12'' respondent. Crassioribus hujus observationibus minus fidendum est. LIBER TERTIUS. PROP. XX. PROBL. IV.

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes* ad *Americam* denuò navigans determinavit quod in insulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, & quod in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuilleus* invenit in *Porto-belo* in *Americâ* longitudinem penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id est, tribus ferè

(i) * *Rectius posuisset.* Horologium tardius ibat Ulyssiponi quam Parisiis, existente differentiâ 2' 13'', seu 133'', ideóque horologium illud Parisiis conficiens 24. hor. spatio 86400'', Ulyssiponi conficiebat tantum 86400'' − 133'', hoc est, 86267''. Sed est longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$. Quare si longitudo penduli ad minuta secunda Ulyssipone oscillantis dicatur L, erit (cor. 4 prop. 24. lib. 2.) $(86400)^2 : (86267)^2 = \frac{3965}{9} : L$, seu $67184640000 : 29507491312885 = 3965 : L$ ac proinde $L = \frac{29507491312885}{67184640000} = 439\,\frac{13434352885}{67184640000} =$ 96. $439\frac{1}{5}$ lin. circiter. Est autem longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$ seu 440.555, vel $440\frac{1}{2}$, quare differentia pendulorum Parisiis & Ulyssipone ad minuta secunda oscillantium debet esse $440\frac{1}{2} - 439\frac{1}{5} = 1\frac{1}{3}$. Rectius itaque posuisset D. Couplet differentiam esse $1\frac{1}{3}$. Simili computo patet differentiam pendulorum Parisiis & Paraibæ esse $2\frac{5}{9}$.

rè lineis breviorem quàm *Lutetiæ Parisiorum*, sed (k) errante observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem penduli isochroni esse pedum tantum trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est $6^{gr}. 38'$ ad austrum, & ea *Porto-beli* $9^{gr}. 33'$ ad boream, & latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Christophori*, & *Sancti Dominici* sunt respectivè $4^{gr}. 55'$, $14^{gr}. 40'$, $14^{gr}. 00'$, $14^{gr}. 44'$, $12^{gr}. 6'$, $17^{gr}. 19'$, & $19^{gr}. 48'$ ad boream. Et excessus longitudinis penduli Parisiensis supra longitudines pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas sunt paulo majores quam pro tabulâ longitudinum penduli superius computatâ. Et propterea (l) terra aliquanto altior est sub æquatore quam pro superiore calculo, & densior ad centrum quam in fodinis prope superficiem, nisi forte calores in zonâ torridâ longitudinem pendulorum aliquantulum auxerint.

Ob-

92 (k) * *Sed errante observatione.* Latitudo Portobeli est 9°. 33' ad boream, & latitudo Martinicæ est 14°. 44'. Hinc differentia latitudinum est 5°. 11'. Est autem latitudo Lutetiæ 48°. 50', quare differentia latitudinum Lutetiæ & Portobeli est 39°. 17'. Sed præterquam quod observationes Feuillæi à tabulâ Newtonianâ maxime discrepant, secum invicem non satis consentire videntur. Cum enim differentia latitudinum 39°. 17', ex iisdem observationibus, præbuerit longitudinem penduli minorem Portobeli quam Parisiis tribus ferè lineis, differentia latitudinum Martinicæ & Portobeli quæ est 5°. 11' majorem in hisce latitudinibus præbere debuisset penduli differentiam quam $\frac{3}{12}$ lin. qualem invenit Feuillæus. Hunc cæteroquin diligentissimum observatorem non satis hâc in re accuratum fuisse confirmant observationes an. 1735. Portobeli habitæ à Clariss. Viris DD. Godin & Bouguer, quorum prior penduli longitudinem Portobeli invenit 36 poll. 7 lin. $\frac{7}{89}$, posterior verò eamdem longitudinem summo consensu determinavit 36. poll. 7 lin. $\frac{7}{99}$.

(l) 97. *Terra aliquantò altior est.* Materia ad centrum redundans quâ densitas ibi major fit, seorsim à reliquâ tellure uniformiter densâ spectetur, gravitas in terram uniformiter densam erit reciprocè ut distantia à centro (ex demonstratis in prop. 19.). Gravitas autem in materiam redundantem erit reciprocè ut quadratum distantiæ à materiâ illâ quam proximè (prop. 76. lib. 1.) cum igitur in casu terræ uniformiter densæ, illius superficies versùs æquatorem elevetur, versùs polum verò deprimatur, gravitasque ad æquatorem minor sit quam ad polum in ratione distantiæ poli à centro ad æquatoris semidiametrum, ad prædictam autem materiam redundantem circâ centrum gravitas ad æquatorem minor sit quam ad polum in ratione duplicatâ distantiæ poli à centro ad æquatoris semidiametrum, quæ ratio priori ratione simplici minor est, patet in casu telluris versus centrum densioris ex utrâque simul causâ fieri ut gravitas ad æquatorem ex binis prioribus composita minor sit gravitate ad polum in ratione minore quam est ratio distantiæ poli à centro

Observavit utique D. *Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evasit pedis unius cum quartâ parte lineæ. (m) Deinde D. *De la Hire* observavit quod virga ferrea quæ tempore consimili hyberno sex erat pedum longitudinis, ubi soli æstivo exponebatur evasit sex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore casu calor major fuit quam in posteriore, in hoc verò major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad solem æstivum valde incalescunt. At virga penduli in horologio oscillatorio nunquam exponi solet calori solis æstivi, nunquam calorem concipit calori externæ superficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga penduli in horologio tres pedes longa paulo quidem longior erit tempore æstivo quam hyberno, sed excessu quartam partem lineæ unius vix superante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diversis regionibus isochrona sunt diverso calori attribui non potest. Sed neque erroribus astronomorum e *Galliâ* missorum tribuenda est hæc differentia. Nam quamvis eorum observationes non perfectè congruant inter se, tamen errores sunt adeo parvi ut contemni possint.

centro ad æquatoris semidiametrum, & ideò ob minorem hanc gravitatem in æquatore respectu gravitati ad polos, tellus magis ad æquatorem elevabitur quam pro superiori calculo, ac proinde longitudo pendulorum quæ gravitati acceleratrici proportionalis est (cor. 4. prop. 24. lib. 2.) paulo major esse debet quam pro tabulâ longitudinum computatâ in casu terræ uniformiter densæ.

(m) 9.. * *Deinde D. Delahire.* Hisce observationibus adjungi debent instituta à Clariss. Viro D. De Mairan experimenta quæ in monum. Parif. an. 1735. leguntur. Ut caloris Solaris vim exploraret, laminas ferri & cupri à loco clauso ac temperato vel etiam frigescente, ad locum Solaribus radiis apertum transferebat, ibique plurium horarum spatio relinquebat. Deinde laminarum dilatationem circino accuratè capiebat, mensurato prius caloris Solaris incremento ope thermometri Reaumuriani. Observavit ob majorem Solis calorem respectu loci clausi in quo antea suspensum erat thermometrum, ad 15 vel 20 gradus liquorem pervenisse & ferri laminam 3. ped. $8\frac{1}{2}$ lin. longam dilatari invenit $\frac{1}{10}$ vel $\frac{1}{12}$ lin. cuprum flavi coloris majorem quam ferrum à radiis Solaribus patiebatur dilatationem. Experimentum quoque tentavit in aquâ ebulliente; immersit nempe in eâ cuprum flavi coloris & ferrum, eamdem plane in utroque metallo dilatationem fieri observavit; cæterum lamina cuprea tres pedes 8. lin. $\frac{1}{2}$ longa, mense Julio, ascendente thermometro ad altitudinem 22. grad. suprà congelationem, ob aquæ ebullientis calorem dilatabatur $\frac{1}{3}$ lin. circiter. 98.

DE MUNDI SYSTEMATE. possint. Et in hoc concordant omnes, quod isochrona pendula sunt breviora sub æquatore quam in observatorio regio Parisiensi, existente differentiâ non minore quam lineæ unius cum quadrante, non majore quam linearum $2\frac{1}{2}$. Per observationes D. *Richeri* in *Cayenna* factas differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum semisse vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minus accuratas prodiit eadem quasi duarum linearum. Et hæc discrepantia partim ab erroribus observationum, (n) partim à dissimilitudine partium internarum terræ & altitudine montium, & partim à diversis aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Angliâ*, brevior est quam tempore æstivo, sextâ parte lineæ unius, quantum sentio. Ob calores sub æquatore auferatur hæc quantitas de differentiâ lineæ unius cum quadrante à *Richero* observatâ, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum linea $1\frac{87}{1000}$ per theoriam jam ante collecta probe congruit. *Richerus* autem observationes in *Cayennâ* factas, singulis septimanis per menses decem iteravit, & longitudines penduli in virgâ ferreâ ibi notatas cum longitudinibus ejus in *Galliâ* similiter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis observatoribus defuisse videtur. Si hujus observationibus fidendum est, (o) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos excessu milliarium septendecim circiter, ut supra per theoriam prodiit.

98. (n) * *Partim à dissimilitudine.* Quæ de pendulorum longitudinibus dicta sunt in hâc propositione, supponunt homogeneam esse telluris materiam; si vero homogenea non sit ubique, sed aliqua sit in partibus internis terræ dissimilitudo pateт (96) hinc quasdam oriri posse in pendulorum longitudinibus irregularitates. Similem ob causam, ex montium altitudine, vallium cavitate inæqualitates aliquæ nasci poterunt, pro excessu enim vel defectu materiæ augebitur vel minuetur gravitas. Observationum discrepantiam repeti etiam posse à diversis aëris caloribus manifestum est ex observationibus Picarti, La Hirii & ex notâ præcedenti.

(o) * *Terra altior erit.* Si hujus observationibus fidendum est, longitudo penduli sub æquatore superabitur à longitudine penduli synchroni Parisiensis excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ, ideóque longitudo penduli sub æquatore erit 3. ped. $7.\frac{4217}{9000}$ lin. seu 3. ped. 7. 468. lin. proxime, est enim longitudo pen-

LIBER TERTIUS. PROP. XX. PROBL. IV.

penduli Paris. 3. ped. $8\frac{5}{9}$ lin. sed est incrementum ponderis sive incrementum longitudinis penduli pergendo ab æquatore ad polos ut sinus versus latitudinis duplicatæ, ac proinde $\frac{1087}{1000}$ seu 1 lin. $\frac{87}{1000}$ erit ad incrementum longitudinis sub polo ut 11334 ad 10000. Quare incrementum illud est $1\frac{10106}{11334}$, seu $1\frac{919}{1000}$ proxime. Erunt ergo pondera seu pendulorum longitudines sub æquatore & sub polo respective 3. ped. 7.468 lin. & 3. ped. 9.387 lin. hoc est proxime ut in tabulâ Newtonianâ. Sed pondera sunt reciproce ut distantiæ à centro (ex demonstratis in Prop. 19.) ideóque 419468 est ad 441387 ut diameter versus polos est ad diametrum secundum æquatorem, sive ut 229 ad 230 proxime, ideóque positâ semidiametro terræ (ut in Prop. præced.) patet (per notas in eandem Prop.) terram altiorem esse ad æquatorem quam ad polos excessu milliarium septemdecim circiter.

99. Clariss. D. Campbell Londini in latitudine $51^{\circ}\ \frac{10}{2}$ & in Jamaicâ in latitudine 18°. accuratissimis observationibus institutis, invenit longitudinem penduli simplicis ad minuta secundæ Londini oscillantis esse 39.129. poll. angl. idemque pendulum tardius ire in Jamaicâ quam Londini deprehendit, existente differentiâ 2′ 58″ spatio 24. hor. Ex his observationibus, eodem quo hactenus usi sumus computo determinavit longitudinem penduli sub æquatore esse ad longitudinem penduli sub polis ut 39000 ad 39206, unde prodit diameter æquatoris ad diametrum versùs polos in ratione 39206 ad 39000 sivè ut 190 ad 189 ferè; ideóque positâ semidiametro terræ ut in prop. præced. terra altior erit ad æquatorem quam ad polos excessu milliarium 41 circiter. Doctissimi Viri DD. Godin, Bouguer, De la Condamine summâ diligentiâ in latitudine 18° 27′ observationes habuerunt quæ cum observationibus D. Campbell probe congruunt. In id quoque conspirant observationes versùs polum institutæ à Celeberrimo D. De Maupertuis Clarissimisque Sociis ut terram versùs æquatorem magis elatam constituant quam pro theoriâ Newtoni. Idem confirmat accurata graduum terrestrium mensura. Longitudo gradus meridiani qui circulum polarem secat à D. De Maupertuis inventa est 57437,9 hexaped. & longitudinem gradûs in galliâ in 45°. 57100. hexaped. probabiliter assumi posse ostendimus. Hinc gradûs utriusque differentia est 337 hexaped. aut ad minimum 300 hex. sed ex tabulâ Newtonianâ differentia inter 45 gr. & 65. est 240. hexapedarum, crescunt itaque gradus latitudinis pergendo ab æquatore ad polos magis quam juxtà tabulam Newtonianam ac proinde non solum terra est elata sub æquatore (94), sed etiam diametrorum differentia ex observationibus major quam ex ipsa theoriâ colligitur. Consulatur observationum series quam transactionibus Anglicanis an. 1734. inseruit Autor versionis gallicæ. 99.

100. Scholium. Penduli longitudinem Romæ determinare pluribus experimentis tentavimus cum Doctissimis & in observando versatissimis PP. Boscovik & Maire S. J. Mathematicis. Usi sumus methodo illâ accuratissimâ quam sagacissimus naturæ indagator summusque Geometra D. De Mairan tradit in Monum. Acad. Reg. Paris. ad an. 1735., ubi experimenta recenset quæ cum incredibili curâ adversùs omne errorum genus peregit. Paravimus itaquè horologium oscillatorium à Celeber. Graham Londini constructum, nobisque ab Illustrissimo D. Leprotti humanissime commodatum, quod per appulsum fixæ ad telescopium immotum singulis observationum diebus dirigebamus ut tempus Solis medium indicaret. In machinâ quâdam immotâ constituimus plana duo horizontalia, è quorum altero filum pendebat laminis metallicis aptè inter se congruentibus compressum cochlearum ope, alterum ità sensim elevabatur per cochleas ut horizontalem situm servaret, & globum è filo suspensum inferius contingeret. Distantiam puncti suspensionis à puncto illo infimo globi, quo planum horizontale subjectum contingebat, investigabamus ope mensuræ Londinensis bipedalis accuratissimæ, quam cum pluribus aliis consentientem P. Abbas Revillas Clariss. Vir, publicus Profess. Math. & Acad. Londin. Socius exhibuit nobis. Huic mensuræ inserta est altera regula mobilis quam pro arbitrio educere ad altitudinem 4. pedum conficiendam. Hanc igitur inter punctum sus-

De Mundi Systemate.

suspensionis & punctum globi infimum interponebamus perpendiculariter ad plana horizontalia, maxime que cavebamus ne in hâc mensurâ error aliqualis irreperet.
100. Plura idcirco neglexirnus experimenta in quibus filum extendebatur observationis tempore, aliaque rejecimus facta cum filo serico vel cum globo eburneo qui nimiam in aëre resistentiam patiebatur. Sex igitur tantum quæ nobis tutissima visa sunt describemus, facta sunt cum globo cupreo cujus quælibet semidiameter inventa est partium digiti Londinensis millesimarum 603, pondus verò unciarum $4\frac{3}{8}$ seu granorum 2520. Illum suspendebamus e filo ex foliis aloës parato quod gallice dicitur: *fil de pite*, hujusmodi filum $21\frac{1}{2}$ ped. Londin. longum, æquiponderabat granis 5, & propterea pondus fili 44 digit. erat ad pondus globi ut 1 ad 2955, pondus verò 35. digit. ad pondus ejusdem globi ut 1 ad 3715. Hinc per ea quæ D. De Mairan loco citato demonstravit, si distantia puncti suspensionis à centro globi sit 44 digit. Lond. circiter, ex longitudine observatâ seu interceptâ inter punctum suspensionis & punctum infimum globi subtrahenda erit longitudo 0,6027 digit. ut habeatur vera longitudo penduli simplicis pendulo observationis isochroni. Si verò distantia puncti suspensionis à centro globi sit 35 digit. circiter, auferenda erit longitudo 0,6004 digit.

1. Experimentum 13ª. Julii manè.

Longitudo observata	45.145 dig. Lond.
Longit. subtrahenda.	0.6023
Longitudo vera	44.5427.

Numeravimus oscillationes globi 3261 eo tempore quo horologium oscillatorium 3479 absolvit, hoc est, intervallo 3480.69 secundorum temporis medii. Horologium enim tardius movebatur quam pro medio motu Solis & differentia erat 32 secundorum pro horis 24, est igitur $\overline{3480.69}^2$ ad $\overline{3261}^2$ ut 44.5427 ad 39.09736 digit. Lond. quæ est longitudo penduli simplicis ad singula minuta temporis medii oscillantis.

2. Experimentum eâdem die vespere. Longitudo observata 45. 18. digit. Lond. longitudo vera 44.5777. Numerus oscillationum globi 3387. tempore medio 3616.75. secund. undè habetur longitudo penduli simplicis ad singula minuta secunda oscillantis 39.0941 digit. Lond.

3. Experimentum 14ª. Julii. Longitudo observata 36.26. longitudo vera 35.6596 digit. Lond. numerus oscillationum globi 3740 tempore medio 3571.75 secund. longitudo penduli quæsita 39.09827. digit. Lond.

4. Experimentum 16ª. Julii. Longitudo observata 36.97. longitudo vera 36.3696. numerus oscillationum globi 3832 tempore medio 3695.88 secund. longitudo penduli quæsita 39.09703 digit. Lond.

5. Experimentum 19ª. Julii. Longitudo observata 35.185. longitudo vera 34.5846. digit. numerus oscillationum globi 3870 tempore medio 3639.85. secund. penduli quæsita 39.096485.

6. Experimentum 5ª. Augusti. Longitudo observata 45. 427. longitudo vera 44.8247 digit Lond. numerus oscillationum globi 3563 tempore medio 3815.03 secund. longitudo quæsita 39.097872.

Ex his omnibus experimentis invenitur media longitudo penduli 39.09686 digit. Lond. verum si rejiciatur secundum experimentum quod ab aliis quinque inter se probe consentientibus nimis differt; media longitudo prodit 39.0974 digit. Lond. Hoc autem experimentum secundum rejici debere inde etiam concludimus quod sextum maxime accuratum nobis visum sit, nam omnino invariata fuit fili longitudo toto observationis tempore & omnes concursus diligentissime notati inter se congruebant

Pes Londinensis vulgò supponitur esse ad ped. Paris ut 135 ad 144 vel etiam ut 1000 ad 1068, quâ ratione cum primum usi essemus, longe minorem, quam par est, penduli longitudinem inveniebamus. Sed ratio illa in re adeò subtili satis accurata non est. Nam D. Godin. monum. Acad. Reg. Scientiarum ad an. 1735 pag. 508. scribit se cum D. Bouguer observasse pedem Lond. se habere ad ped. Paris. ut $1351\frac{1}{2}$ ad 1440. si hanc adhibeamus rationem, longitudo penduli Romæ erit 3. ped. Paris. 8. lin. $\frac{28}{100}$. Tandem si ratio illa sit numeri 1351 ad 1440 ut quibusdam Mathematicis mensurarum peritissimis videtur, major prodit penduli longitudo nimirum ped. Paris. 3. lin. 8. 3888.

Hæc

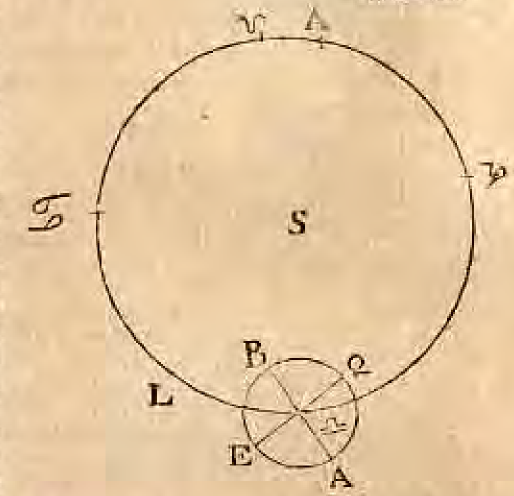
Liber Tertius. Prop. XXI. Theor. XVIII.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

(p) *Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis* (q) *inclinari in eclipticam & bis redire ad positionem priorem.*

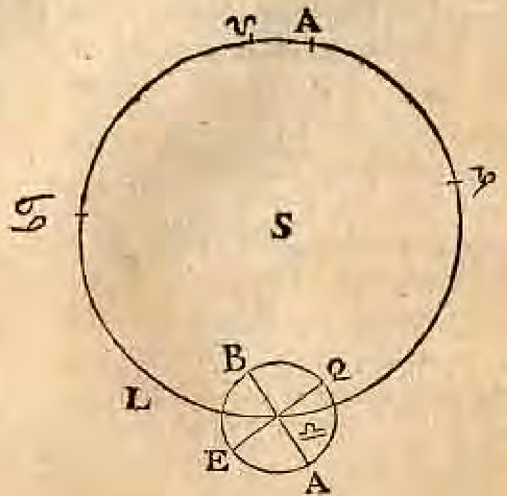
Patet per corol. 20 prop. LXVI. lib. I. Motus tamen iste nutandi

Hæc sunt quæ ad telluris figuram spectant. Hâc de re nova quamplurima an. 1740. & 1741. duplici Dissertatione edidit P. Boscowick S. J. insignis matheseos Professor: maxime autem exoptandum ut ad hujusce quæstionis totiusque matheseos utilitatem salvi & incolumes redeant Clariss. Academici qui ad definiendam telluris figuram nobili ardore laboriosum iter versus æquatorem susceperunt. Simul enim collatis versus polum & versùs æquatorem institutis observationibus, à Doctissimis Viris pro bono Scientiarum in unum conspirantibus certissima de telluris magnitudine & figurâ, gravitatis decremento, aliisque ad Astronomiam, Geographiam & Physicam maxime momentosis speranda sunt.



(p) 101. *Puncta æquinoctialia.* Si terra nullo alio motu præter motum progressivum in suâ orbitâ motumque vertiginis circa axem agitaretur axem suum sibi semper parallelum retineret (cor. 22. prop. 66. lib. 1.) sed ob telluris figuram versus polos depressam & versùs æquatorem oblongatam fit ut axis situs perturbetur. Referat ♈ ♋ ♎ ♑, orbitam telluris circà solem S, sitque A E B Q, ipsa tellus cujus poli A & B æquator E Q. Quoniam (ex prop. præc.) terra est sphærois ad polos A & B, depressa & versùs æquatorem E Q, elata, instar globi annulo inhærentis spectari poterit, annulo enim æquivalet materia redundans in regionibus æquatoris. Quare (per cor. 20. prop. 66.) annuli hujus nodi regredientur, hoc est, tellus digressa à librâ ♎, ubi communis sectio Eclipticæ & æquatoris versùs Solem S, dirigitur, & per ♑ versùs ♈ pergens, ad nodum *A* priùs pertinget quam ad ♈ pervenerit, & tellus ab ♈ per ♋ versùs ♎ progrediens priùs alterum nodum *L* attinget quam ♎ ubi in priori revolutione erat nodus, id est, æquatoris planum productum, per solem priùs transibit 101.
quam telluris centrum ad ♎ pervenerit, sed tunc contingit æquinoctium dum nempè sol in plano æquatoris terrestris versatur (4) illaque puncta pro æquinoctialibus habentur in quibus sol videtur tempore æquinoctiorum. Quarè patet, stellis fixis quiescentibus, puncta æquinoctialia omniaque Eclipticæ puncta quæ à punctis æquinoctialibus numerantur regredi seu in antecedentia moveri. Hic punctorum æquinoctialium regressus pendet ab actione Solis in materiam ad partes æquatoris redundantem, sed & Lunæ etiam non leves vires esse possunt; cum enim Luna in Eclipticæ plano aut non procul ab eo jaceat, ad eundem cum Sole effectum concurret. Sed infrà computabitur motus æquinoctiorum ab utrâque vi, Solis scilicet & Lunæ oriundus.

(q) 102. *Bis inclinari in eclipticam.* In semirevolutione telluris circà solem à nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.



102. ♎ per ♑ ad ♈, actio solis inclinationem æquatoris in eclipticam minuere conatur cum illa actio eam inclinationem augere conetur à ♋ ad ♎, hinc maxima fit inclinatio inter ♎ & ♑ postea minuitur ex Solis actione oriunda (cor. 10. & 18. prop. 66. lib. 1.) sicque inclinatio illa minima, cum terra est inter ♑ & ♈, cum verò tellus inter ♈ & ♋ pervenit, rursus restituitur præcedens inclinatio (ibid.) sicque deinceps simulque cum æquatore telluris axis oscillatur. Axis igitur terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinatur in eclipticam & bis redit ad positionem priorem: Hæc omnia facilè intelliget qui in mentem revocaverit prop. 66. lib. 1. ultimaque ejusdem corollaria.

103. In singulis octantibus inter æquinoctia & solstitia sequentia, inclinatio axis terræ ad eclipticam redit ad priorem magnitudinem pluriumque annorum decursu sensibilior non evadit, at regressus punctorum Eclipticæ continuo fit in antecedentia, nec ad pristinum locum redeunt puncta æquinoctialia, nisi post integrum circulum. Hinc mutatio quæ unius anni spatio insensibilis est, post plurium annorum intervalla notabilis evadit.

104. Cum stellæ fixæ quiescant & retrocedat communis sectio æquatoris & Eclipticæ, necesse est ut mutabilis sit fixarum à punctis æquinoctialibus distantia & stellæ ab iisdem punctis versus orientem quotidie progredi videantur, undè ipsarum longitudines quæ in eclipticâ ab initio arietis sive intersectione vernali eclipticæ & æquatoris computari solent, continuò crescunt & fixæ omnes videntur moveri in consequentia signorum. Hinc fit quod constellationes omnes antiquam sedem mutaverint. Sic constellatio arietis quæ tempore Hipparchi prope intersectionem vernalem Eclipticæ & æquatoris visa fuit, nunc ab eâdem digressa in signo Tauri moratur, sicut & Tauri constellatio in geminorum locum transivit geminique in cancrum promoti sunt ità ut unaquæque constellatio è suo in proximum locum successerit. * Cum autem hic, dum de inclinatione egimus, nec ad motum ipsum nodorum, nec ad Excentricitatem orbitarum quas terra aut Luna describunt nec ad Apsidum motus, nec ad irregularitatem molis terræ attenderimus nec denique ad aliorum Planetarum actiones, quædam etiam Eclipticæ inclinationi mutatio afferri potest, quæ forte perseverabit satis ut sensibilis evadat, inclinationis angulum 1′ centum annis decrescere volebat Louvillæus, cui non repugnant quæ Cassinus in Astronomiæ Elementis, ex variâ Astronomorum æstimatione inclinationis Eclipticæ retulit. Sed de iis plura in posterum erunt dicenda.

PRO-

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, & minores illos in ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per prop. LXV. lib. I. Actione autem solis perturbabuntur eorum motus multimodè, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in lunâ nostrâ notantur. Hæc utique (per corol. 2, 3, 4, & 5. prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad terram, in syzygiis quam in quadraturis, nisi quâtenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per corol. 9. prop. LXVI.) ubi apogæum lunæ in syzygiis versatur, & minima ubi idem in quadraturis consistit; & inde luna in perigæo velocior est & nobis propior, in apogæo autem tardior, & remotior in syzygiis quam in quadraturis. Progreditur insuper apogæum, & regrediuntur nodi, sed motu inæquabili. Et apogæum quidem (per corol. 7. & 8. prop. LXVI.) velocius progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per corol. 2. prop. LXVI.) quiescunt in syzygiis suis & velocissimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major est lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis (per corol. 10. prop LXVI.) quam in syzygiis: & motus medius tardior in perihelio terræ (per corol. 6. prop. LXVI.) quam in ipsius aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam à (a) prioribus astronomis non observatæ

(a) * *A prioribus Astronomis non observatæ.* Inæqualitates illæ quas hic per transennam enumerat Newtonus, æquationesque omnes seu correctiones deinceps com- 104 servatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii apogæi & nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in syzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per corol. 14. prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis solaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per corol. 1, & 2. lem. X. & corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) sed hæc inæqualitas in calculo astronomico ad prosthaphæresin lunæ referri solet, & cum eâ confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales satellitum jovis & saturni à motibus lunaribus derivare.

Ex motibus lunæ nostræ motus analogi lunarum seu satellitum jovis sic derivantur. Motus medius nodorum satellitis extimi jovialis, est ad motum medium nodorum lunæ nostræ, in ratione compositâ ex ratione duplicatâ temporis periodici terræ circa solem ad tempus periodicum jovis circa solem, & ratione simplici temporis periodici satellitis circa jovem ad tempus periodicum lunæ circa terram (per corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) ideoque (b) annis centum conficit nodus iste 8 gr. 24′. in antecedentia. Motus medii nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem corollarium) & inde dantur. Motus au-

104. commodius explicabuntur, & quomodò variatio Lunæ ad prosthaphæresim in calculo Astronomico referri soleat exponetur. Variatio autem dicitur inæqualitas illa quâ fit ut motus Lunæ in primo mensis quadrante, sive pergente Lunâ à conjunctione ad quadraturam proximam retardetur, in secundo acceleretur dum tendit à quadraturâ ad oppositionem, in tertio retardetur rursus & in quarto iterum acceleretur.

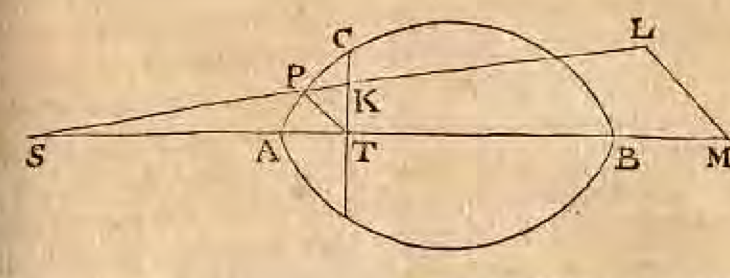
(b) * *Ideóque annis centum.* Tempus periodicum terræ circà solem est dierum 365.2565, tempus periodicum jovis circà solem est dierum 4332.514 (per phæn. 4.) tempus periodicum satellitis circà jovem est

autem augis satellitis cujusque in consequentia est ad motum nodorum ipsius in antecedentia, ut motus apogæi lunæ nostræ ad hujus motum nodorum, (per idem corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob (c) causam quam hic exponere non vacat.

est dierum 16.6880 (per phæn. 2.) & tempus periodicum Lunæ circà terram dierum 27.321. (prop. 17.). Sumptisque Logarithmis, erit

L.	$(365.2565)^2$	= 5.1251956
L.	16.6880	= 1.2224043
	utriusque summa	= 6.3475999
Deindè L.	$(4332.514)^2$	= 7.2734600
L.	27.321	= 1.4364966
	utriusque summa	= 8.7099566
Ab hâc ultimâ subtrahatur summa superior	- -	6.3475999
residuum erit	L.	2.3623567

Cui respondet numerus 230.38. Quarè ex hoc calculo & Analogiâ Newtoni patet motum nodorum satellitis extimi jovis esse partem circiter 230am, motûs nodorum Lunæ, sed est motus annuus nodorum Lunæ 19°. 21′ 21″, ut dicetur postea. Hisce si multiplicetur motus ille annuus per 100 factumque dividatur per 230, prodibit motus nodorum satellitis intervallo annorum centum 8°. 24′. Ab hujus sæculi initio nullum in nodis satellitum jovialium sensibilem motum fuisse observatum testatur Clariss. Cassinus in elem. Astr. 105.



(c) 105. *Ob causam quam hic exponere non vacat.* Referat S Solem, sitque P satelles, putà Luna revolvens circà Planetam primarium T scilicet terram, in ellipseos umbilico positum; erit B apsis summa, A apsis ima, eritque TB distantia maxima & AT distantia minima. Jam verò quò minor est distantia AT, respectu distantiæ TB, eò celerius apsides progrediuntur (per not in cor. 8. prop. 66. lib. 1.). Ea est correctionis causa quam Autor noster non exponit. Cum enim satellites Jovis & Saturni circà suos Planetas primarios describant circulos fere concentricos (phæn. 1. & 2.) Luna verò circà terram in orbitâ ellipticâ revolvatur, & major sit motus nodorum in orbita elliptica quam in circulari, cæteris omnibus manentibus, hinc motus augis cujuscumque satellitis per Analogiam ex motu Augis Lunaris inventus, diminui debet in ratione paulò minore quam 1 ad 2, calculo non absimili illi qui 31a. prop. instituetur.

vacat. (d) Æquationes maximæ nodorum & augis ſatellitis cujuſque ferè ſunt ad æquationes maximas nodorum & augis lunæ reſpectivè, ut motus nodorum & augis ſatellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. (e) Variatio ſatellitis è jove ſpectati, eſt ad variationem lunæ, ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & luna ad ſolem revolvuntur, per idem corollarium; ideóque in ſatellite extimo non ſuperat 5″. 12‴.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum maris ab actionibus ſolis ac lunæ oriri.

Mare ſingulis diebus tam lunaribus quam ſolaribus bis intumeſcere debere ac bis defluere, patet (f) per corol. 19. & 20. prop.

105. (d) * *Æquationes maximæ.* Nam errores angulares in ſingulis revolutionibus geniti, ideóque eorumdem errorum correctiones ſeu æquationes maximæ ſunt ut ſatellitum tempora periodica reſpectivè (per cor. 16. prop. 66. lib. 1.). Sed tempora periodica ſunt ut motus ipſi angulares reſpective (ibid.). Quare in eâdem quoque ratione ſunt æquationes maximæ.

(e) * *Variatio Satellitis è jove ſpectati*, hoc eſt, motus angularis ſatellitis eſt ad motum angularem Lunæ ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & Luna ad Solem revolvuntur, ſivè clariùs in ratione nodorum Lunæ ad motum nodorum annuum & temporis periodici Lunæ ad tempus periodicum ſatellitis (per cor. 16. prop. 66. lib. 1. & not. in idem coroll.). Jam verò motus nodorum Lunæ annuus eſt 69681″, ut poſteà ſtatuitur à Newtono, nodus autem ſatellitis extimi jovialis annis centum conficit 8°. 24′ ideóque motus ejuſdem annuus eſt $302\frac{2}{5}$, tempus periodicum Lunæ eſt dierum 27.321 & ſatellitis extimi dierum 16.688. Sumptis Logarithmis erit

L. - 69.681	= 4.8431144
L. dierum 27.321	= 1.4364966
utriuſque Log. ſumma	= 6.2796110
Deindè L. - $302\frac{2}{5}$	= 2.4805818
Lòg. dier. 16.688	= 1.2224043
utriuſque ſumma	= 3.7029861

Hæc ſubtrahatur à ſummâ ſuperiori 6.2796110 remanet Log. 2.5766249, cui reſpondet numerus 378. ferè. Quare ex Analogiâ Newtoni & calculo colligitur variationem ſatellitis eſſe partem 378^{am}. variationis Lunæ circiter. Sed variationem Lunæ maximam in apogæo Solis deinceps determinat Newtonus 33′ 14″ ſivè 1994″. Quarè pars 378^{a}. eſt 5″ 15‴ ut Newtonus invenit, quamproximè.

(f) * *Per Cor. 19. & 20.* Si fluidum in alveo per ſuperficiem cujuſvis Planetæ excavato contineatur, ſimulque cum Planetâ motu diurno periodico uniformiter revolvatur, partes ſingulæ hujus fluidi per vices acceleratæ & retardatæ in ſyzigiis ſuis, hoc eſt, in meridie & mediâ nocte velo-

prop. LXVI. lib. 1. ut (g) & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulſum luminarium ad meridianum loci minori quam ſex horarum ſpatio ſequi, uti fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei* ut & in maris *Pacifici* littore *Chilenſi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æſtus in horam circiter ſecundam, tertiam vel quartam, incidit, niſi ubi motus ab Oceano profundo per loca vadoſa propagatus uſque ad horam quintam ſextam ſeptimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulſu luminaris utriuſque ad meridianum loci, tam infra horizontem quam ſupra, & per horas diei lunaris intelligo vigeſimas quartas partes temporis quo luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis ſolis vel lunæ ad mare elevandum maxima eſt in ipſo appulſu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impreſſa manet aliquamdiu & per vim novam ſubinde impreſſam augetur, donec mare ad altitudinem maximam aſcenderit, id quod fiet ſpatio horæ unius duarumve ſed ſæpius ad littora ſpatio horarum trium circiter, vel etiam plurium ſi mare ſit vadoſum.

(h) Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernen-

velociores erunt; in quadraturis ſivè horâ ſextâ matutinâ, & veſpertinâ tardiores quam ſuperficies globi contigua, quare fluet in alveo refluetque per vices perpetuò (per cor. 19. & 20.) idem poſteà iterum demonſtrabitur vireſque Solis & Lunæ ſeorſim computabuntur.

(g) * *Aquæ maximam altitudinem.* Rem ità ſe habere patet ex obſervatis æſtibus marinis, ratio autem hæc eſt. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima eſt in ipſo appulſu luminaris ad meridianum & poſteà decreſcit, attamen hujus vis effectus nondum eſt maximus. Omnis enim motus ſemel impreſſus perſeverat uniformiter, donec motu contrario deſtruatur vel ſaltem retardetur. Hinc fit ut fluxus maris per ſex circiter horas antemeridianas auctus & cum motu diurno conſpirans acceleratus, majori celeritate ulterius pergere debeat & aquas magis magiſque attollet, uſquè dum eadem vis motui diurno contraria fluidi curſum paulatim ſiſtat & aquas cogat refluere. Hæc motûs retardatio maximè circà octantes ſive horam tertiam notabilis eſt. Alia non deſunt exempla maximorum effectuum qui poſt cauſas maximas contingunt. Non in ipſis ſolſtitiis æſtivis maximè fervet æſtas, ſicut neque in ipſis ſolſtitiis Hybernis maximè friget hiems; ſed integro circiter menſe poſt ſolſtitia maximus deprehenditur æſtatis Hyemiſque effectus. Indubitatâ quoque conſtat experientiâ ſummum calorem ſecundâ aut tertiâ poſt meridiem horâ fieri. 105.

(h) * *Motus autem bini.* Quemadmodum corpus quodvis duplici vi ſollicitatum in lineis duabus progredi nequit, ſed conjunctis viribus parallelogrammi diagonalem eodem modo deſcribit ac ſi unicâ vi juxtà diagonalis directionem urgeretur

(41.

DE MUNDI SYSTEMATE.

cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur ([i]) fluxus & refluxus maximus. In quadraturis sol attollet aquam ubi luna deprimit, deprimetque ubi luna attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teste, major est effectus lunæ quam solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygias & quadraturas, æstus maximus qui solâ vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, & solâ solari in tertiam solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius est; ideóque in transitu lunæ à syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem in transitu lunæ à quadraturis ad syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantiis à terrâ. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in ([k]) triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis ([l]) paulò majores sint, & in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo; & luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quam antè vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. ([m]) Unde fit ut æstus duos omnino maximi in syzygiis continuis se mutuò non sequantur. Pen-

105. (41. lib. 1.) itâ motus bini quos luminaria hæc duo excitant non cernentur distinctè sed motum quemdam mixtum efficient.

(i) * *Fluxus & refluxus maximus*; utpote è virium summâ tum temporis oriundus.

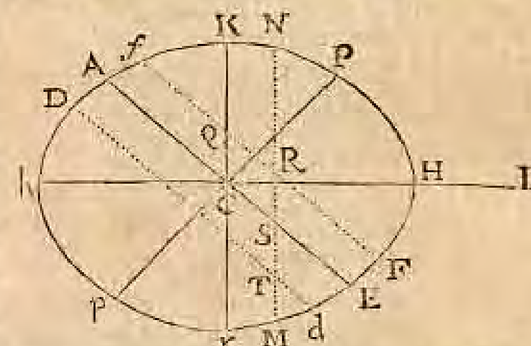
(k) * *In triplicatâ ratione diametrorum* (cor. 14. prop. 66. lib. 1.).

(l) * *Paulò majores sint*, ob majorem virium summam & in quadraturis paulò minores ob minorem virium differentiam quam tempore æstivo.

(m) * *Undè fit ut æstus.* Si enim Luna in syzygiarum altera sit circà perigæum, æstumque maximum conjunctis cum sole viribus tunc temporis excitet, necesse est ut in alterâ syzygia versetur circà apogæum minoresque vires obtineat.

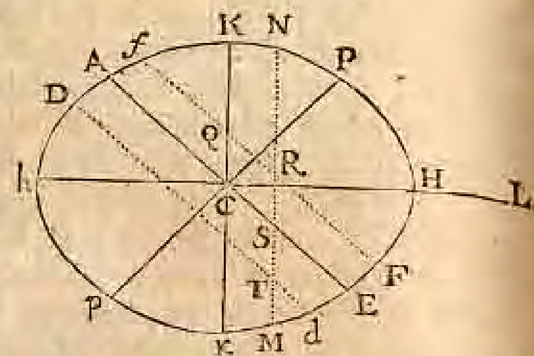
LIBER TERTIUS. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione seu distantiâ ab æquatore. Nam si luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, sine actionis intensione & remissione ideóque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in syzygiis solstitialibus quam in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus quam in quadraturis æquinoctialibus; eo quod lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maximè superat effectum solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygias & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in syzygiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experientia compertum est. Per minorem autem distantiam solis à terrâ, tempore hyberno quam tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpiùs præcedant æquinoctium vernum quam sequantur, & sæpius sequantur autumnale quam præcedant.

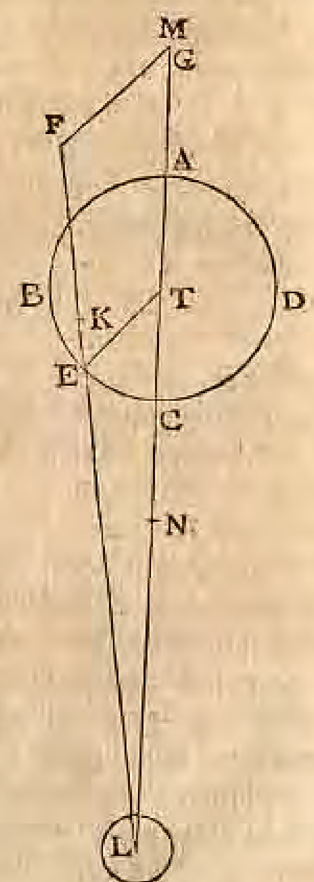


Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Designet $A\,p\,E\,P$ tellurem aquis profundis undique coopertam; C centrum ejus; P, p polos; AE æquatorem; F locum quemvis extra æquatorem; Ff parallelum loci; Dd parallelum ei respondentem ex alterâ parte æquatoris; L locum quem luna tribus ante horis occupabat; H locum telluris ei perpendiculariter subjectum; h locum huic oppositum; K, k loca inde gradibus 90 distantia, CH, Ch maris altitudines maximas mensuratas à centro telluris; & CK, Ck altitudines minimas: & si axibus Hh, Kk describatur ellipsis, deinde ellipseos hujus revolutione circa axem majorem Hh describatur sphærois $HPKhpk$; designabit hæc figuram maris

ris ([n]) quam proximè, & erunt CF, Cf, CD, Cd altitudines maris in locis F, f, D, d. Quinetiam si in præfatâ ellipseos revolutione punctum quodvis N describat circulum NM, secantem parallelos Ff, Dd in locis quibusvis R, T, & æquatorem AE in S; erit CN altitudo maris in locis omni-



106. (n) 106. * *Figuram maris quam proximè.* Circulus centro T descriptus tellurem referat, circulus autem centro L, descriptus exhibeat Lunam. Si nulla esset in tellurem actio, tellus profundis aquis undiquè cooperta & quiescens (per hyp.) in sphæram sese componeret. At singulæ telluris partes gravitant in Lunam estque gravitas in Lunam in ratione duplicatâ distantiarum à centro reciprocè. Jam verò recta L T, exponat gravitatem acceleratricem corporis in centro T positi versùs Lunam, sitque E quælibet fluidi marini particula. Si in rectâ L E productâ sumatur L K æqualis L T, sitque L F ad L K in duplicatâ ratione L K ad L E, recta L F exponet gravitatem corporis in loco E versus Lunam, quæ vis dividitur in vires ut F G & G L (prop. 66. lib. 1.). Si autem à vi illâ quâ corpus in E, locatum urgetur quæ est ut G L, auferatur vis ut T L quâ centrum telluris urgetur versus Lunam relinquentur vires ut F G, G T, quibus corpus E sollicitatur præter vim propriæ gravitatis quâ tendit versus centrum terræ & vim ipsi communem cum centro ipsius terræ. Jam sit C punctum telluris cujus zenith Luna immineat, A verò punctum oppositum, sintque B & D puncta circumposita, sive potius exhibeant circulum horizontis in quo Luna versatur, liquet punctum G à T maxime distare, ubi punctum E est aut in C, aut in A; in priori casu G, transeat in M, in posteriori in N; dum verò punctum E versatur in circulo B D, punctum G ferè coincidit cum T, nullaque partibus in



circulo

bus R, S, T, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujusvis F, affluxus erit maximus in F, horâ tertiâ post appulsum lunæ ad meridianum supra horizontem; postea defluxus maximus in Q horâ tertiâ post occasum lunæ; dein affluxus maximus in f horâ tertiâ post appulsum lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in Q horâ tertiâ post ortum lunæ; & affluxus posterior in f erit minor quam affluxus prior in F. Distinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemisphæricos, unum hemisphærio KHk ad boream vergentem, alterum in hemisphærio opposito Khk; quos igitur fluctum borealem & fluctum australem nominare licet.

circulo B D locatis relinquitur vis præter vim gravitatis propriæ atque vim F G; ipsa verò F G, fit B T aut D T, coeuntibus punctis F & B; quare fluidi particulæ in locis B & D, præter vim gravitatis propriæ urgentur etiam versus centrum T vi ex Lunâ procedente; Particulæ in loco C, versus Lunam magis attrahuntur quam terra integra quæ in centro T, locata fingi potest, particulæ autem in loco A, versus Lunam minus attrahuntur quam terra integra in T, ideóque eodem modo afficiuntur ac si ad partes contrarias urgerentur. At particulæ in circulo B D, magis gravitant versus T; in locis inter A, vel C, & B vel D, intermediis fluidi particulæ utramque conditionem participant; quo viciniores sunt fluidi terrestris partes punctis C & A, eò minus graves sunt, nam actio Lunæ sive vis ut G T, vim propriæ gravitatis versus T, minuit, & quo propiores sunt punctis B & D, eò graviores sunt, eadem enim actio Lunaris sive vis ut F G, gravitatem propriam auget. Quia verò globus A B C D, fluido satis profundo undique coopertus ponitur fluidi autem partes cedunt vi cuicumque illatæ & cedendo facilè moventur inter se, fluidum illud versus A & C positum à fluido versus B & D, posito expelletur, levius scilicet à graviore, attolletur ergò fluidum versus A & C, deprimeturque versus B & D, donec scilicet major fluidi moles & altitudo majorem gravitatem compenset, & ubique constituatur æquilibrium. Quapropter superficies maris sese componet in figuram sphæroidem cujus axis est recta A C, quæ producta per Lunam transibit. Hinc patet figuram maris in sphæroidem oblongam formari debere.

107. 107. Simili argumento patet considerata Solis actione fluidum terrestre componi in sphæroidem oblongam cujus axis productus per Solem transit. Si enim (in figur. præc.) globus L non Lunam sed Solem designet, cætera se habent ut suprà. At in hoc casu minor erit quam in altero axium differentia. Nam fluidi tumor in C hinc oritur quod fluidum magis graviter versus Lunam quam telluris centrum T, tumor autem fluidi in A, inde provenit quod terræ centrum magis quam fluidum versus Lunam gravitet; quare, si hæc elevatio Solis actioni tribuatur, minor erit effectus quamvis actio Solis in terram major sit quam actio Lunæ in eamdem, telluris enim semidiameter T C vel T A ferè evanescit respectu immensæ Solis à terrâ distantiæ, ideóque fluidi in C locati gravitas versus solem erit insensibiliter major gravitate telluris versus eundem, & fluidi in A positi gravitas versus solem erit insensibiliter minor gravitate telluris versus eundem, quare figura sphæroidea inde genita parum intumescet ad vertices C & A, parumque in circulo B D deprimetur, attamen propter immensas Solis licet remotissimi vires, aliquis erit actionis Solaris effectus.

licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuò oppoſiti veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum lunarium duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æſtus autem major, lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum lunæ ad meridianum ſupra horizontem, & lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in (o) tempora ſolſtitiorum; præſertim ſi lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis. Sic experientiâ compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperant veſpertinos & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æſtus, etiam ceſſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proximè poſt quadraturas minuit. Unde fit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multò magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi à ſyzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis, ſint (p) quarti vel etiam quinti à ſyzygiis.

Porro

107. (o) * *In tempora ſolſtitiorum.* Tunc enim in ſyzygiis utrumque luminare ab æquatore maximè declinat, atque fluxuum differentia adhuc augebitur, ſi Lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis; nam præter declinationis Solis maximam, Luna quoque Soli conjuncta quantitate latitudinis maximæ in Boream aut auſtrum magis declinat. Hinc fit fluctus Borealis nobis viciniſſimus & fluctus auſtralis remotiſſimus in eâdem revolutione diurnâ.

(p) * *Sint quarti vel etiam quinti.* In opuſculo de mundi ſyſtemate quædam

occur-

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ob oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſivè advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales à diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu lunæ ad meridianum portus. Si luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquillè ſtagnet. Si luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem

bini

occurrunt obſervationes quæ ad hunc locum pertinent, eas itaque exſcribemus. Fieri etiam poteſt, inquit Autor, ut æſtus omnium maximus ſit quartus vel quintus à ſyzygiis vel tardius adveniat, eò quod retardantur motus marium in tranſitu per loca vadoſa ad littora. Sic enim æſtus accedit ad littus occidentale Hiberniæ horâ tertiâ Lunari, & poſt horam unam & alteram ad portus in littore auſtrali ejuſdem inſulæ ut & ad inſulas Caſſiterides vulgò Sorling dictas. Dein ſucceſſivè ad Falmuthum, Plimuthum Portlandiam inſulam Vectam, Winchelſeiam, Doveriam, oſtium Tameſis & Pontem Londinenſem, conſumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed & Oceani ipſius alveis haud ſatis profundis impeditur æſtuum propagatio, incidit enim æſtus ad inſulas fortunatas & ad Occidentalia marique atlantico expoſita littora Hiberniæ, Galliæ, Hiſpaniæ & Africæ totius uſque ad caput bonæ ſpei in horam tertiam Lunarem, præterquam in locis nonnullis vadoſis ubi æſtus impeditus tardiùs advenit inque freto Gaditano quod motu ex mari mediterraneo propagato citiùs æſtuat; pergendo verò de his littoribus per Oceani latitudinem ad oras Americæ, accedit æſtus primò ad Braſiliæ littora maximè 108.
Orientalia circa horam Lunarem quartam vel quintam; deindè ad oſtium fluvii Amazonum horâ ſextâ, ad inſulas verò a jacentes horâ quartâ; poſteà ad inſulas Bermudas horâ ſeptimâ & ad Floridæ portum S. Auguſtini horâ $7\frac{1}{2}$. Tardius igitur progreditur æſtus per Oceanum quam pro ratione motûs Lunæ; & pernecceſſaria eſt hæcce retardatio ut mare eodem tempore deſcendat inter Braſiliam & novam Franciam, aſcendatque ad inſulas fortunatas & littora Europæ & Africæ & viceverſâ. Namque mare aſcendere nequit in uno loco quin ſimul deſcendat in altero. Lege jam deſcriptâ agitari quoque mare pacificum veriſimile eſt. Namque æſtus altiſſimi in littore Chilienſi & Peruviano incidere dicuntur in horam tertiam Lunarem, ſed quâ velocitate propagantur inde ad littus Orientale Japoniæ & ad inſulas Philippinas cæteraſque regno Sinarum adjacentes nondum reperi.

108. In alveis fluminum pendet influxus & refluxus à fluminum curſu. Nam curſus ille facit aquam tardiùs influere ex mari & in mare citiùs & velocius re-

fluere

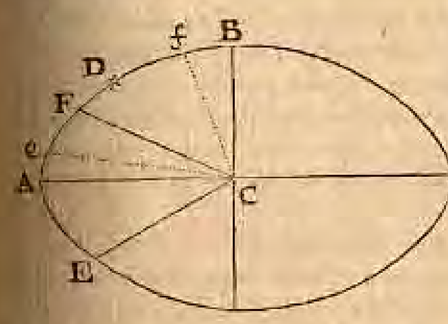
bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio ipſorum, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi luna declinat in polum ſupra horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu lunæ ad meridianum, atque lunæ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* ſub latitudine boreali 20 gr. 50′. *Halleius* ex nautarum obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum lunæ per æquatorem ſequente ſtagnat, dein lunâ ad boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimam vel octavam, dein

109. fluere atquè adeò diutius refluere quam influere, præſertim ſi longe in flumen aſcenditur ubi minor eſt vis maris. Sic in fluvio Avonæ ad tertium lapidem infrà Briſtoliam refert Sturmius aquam horis quinis influere, ſeptenis refluere ſuprà Briſtoliam ut ad Caneſham vel Bathoniam differentia procul dubio major eſt. Pendet etiam hæc differentia à magnitudine fluxûs & refluxûs. Nam prope Luminarium ſyzigias, vehementior maris motus facilius ſuperando reſiſtentiam fluminum faciet aquam citius ac diutius influere, adeóque minuet hanc differentiam; intereà verò dum Luna ad ſyzigias properat, neceſſe eſt ut flumina ob curſus ſuos per magnitudinem æſtuum impeditos magis impleantuur & propterea maris refluxum paulò magis impediant proximè poſt ſyzigias quam proxime antè. Eâ de cauſâ æſtus omnium tardiſſimi non incident in ipſas ſyzigias, ſed paulò præcedent. Dixi æſtus etiam antè ſyzigias retardari vi Solis. Conjungatur cauſa utraque & æſtuum retardatio & major erit & ſyzigias magis præcedet. Quæ omnia ità ſe habere colligo ex tabulis æſtuum quas Flamſteedius ex obſervationibus quampluriinis contruxit.

109. Æſtuum magnitudo non parum etiam pendet à magnitudine marium, ut in opuſculo citato obſervat Clariſſ. Auctor. Sit C centrum terræ, EADB oblonga maris figura, CA ſemiaxis major, CB ſemiaxis minor priori inſiſtens ad angulos rectos. Sumatur D punctum medium inter A & B, ſitque ECF, vel ipſi æqualis eCf angulus ad centrum terræ quem ſubtendit latitudo maris littoribus E, F, vel e, f, terminati; verſetur autem punctum A, in medio inter puncta E, F, & punctum D in medio inter puncta e, f. Si per differentiam altitudinum CA, CB, exponatur quantitas æſtus in mari ſatis profundo terram totam cingente, exceſſus altitudinis CA ſuper altitudinem CE vel CF deſignabit maximam quantitatem æſtus in medio maris EF littoribus E, F terminati, & exceſſus altitudinis Ce ſuper altitudinem Cf,

dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & lunâ declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum lunæ & affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano *Sinenſi* inter continentem & inſulam *Luconiam*, alter à mari *Indico* inter continentem & inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim à mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex à mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum lunæ & marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.



Cf, exponet maximam quantitatem æſtûs ad littora ejuſdem maris. (Nam, differentia inter Diametrum biſecantem angulum datum quem faciunt duæ Diametri Ellipſeos & alterutram ex illis Diametris major eſſe non poteſt ex naturâ Ellipſeos quam ſi illa Diameter biſecans ſit ſemi axis major, & differentia inter illas duas ipſas Diametros angulum datum continentes major eſſe nequit quàm ſi Diameter angulum biſecans faciat angulum cum axe ſemi-rectum). Unde patet æſtus ad littora eſſe propémodum ut maris latitudo EF, arcu quadrantali non major. Hinc fit ut nullus aut ferè nullus obſervetur aquarum motus in maribus non ſatis latè patentibus, niſi cum Oceano ipſo liberè communicent. Si enim nihil aut parum cum Oceano communicent, ut accidit in mari mediterraneo, æſtus quoquè eam ob cauſam minor deprehenditur. Hinc eſt etiam quod propè æquatorem ubi mare inter Africam & Americam anguſtum eſt, æſtus ſint multò minores quam hinc inde in zonis temperatis ubi maria latè patent, & in maris pacifici littoribus ferè ſingulis tam Americanis quam Sinicis & intrà tropicos & extrà. Contingere tamen poteſt ut æſtus qui in Oceano mediocris eſt in fluviis evadat maximus propter tranſitûs anguſtias littorumque ſeorſim coeuntium convergentiam. Hæc de maris æſtu pro præſenti dicta ſint, de hâc Nobiliſſimâ inter Phyſicos quæſtione plurima in decurſu ubi recurret occaſio, adjungemus. Prolixius foret proſequi factas à diligentiſſimis Philoſophis æſtuum obſervationes; legantur quæ huc & illuc tum in tranſact. Angl. tum in Mon. Pariſ. diſperſa inveniuntur, ſed ea præſertim quæ Clariſſ. Viri Halleius num. 226. tranſact. & Caſſinus in Mon. Pariſ. an. 1712. 1713. ſcripta reliquerunt. 109.

EDITOR

EDITOR LECTORI.

Felicius commentari non possumus ea quæ tradit Autor noster de Maris æstu, quam huic Propositioni subjungendo eas Dissertationes quæ Præmio fuère condecoratæ à Celebri Parisiensi Scientiarum Academiâ: Id quidem primum nobis fuerat propositum, ut ea quæ in illis Dissertationibus momentosiora viderentur & ad Newtonianæ Philosophiæ illustrationem pertinerent, brevi compendio comprehensa Notis adjiceremus; verùm truncа ac ingenii nostri vitio detrita exhibere hæc Illustrissimorum Virorum scripta meritò piguit, & non dubitavimus nos meliùs consulturos tùm Lectoribus nostris tùm ipsis eorum scriptorum Authoribus, si qualia sunt edita hìc illa insereremus: cumque Authorum à typothetis absentiâ factum sit ut in Editione Parisinâ plurima irrepserint menda nullo Errorum catalogo correcta, ea, demonstrationibus ac calculis accuratè repetitis, emendavimus, figurasque ad loca quibus respondent aptari curavimus.

Quatuor quidem Dissertationes Parisinis typis fuerunt evulgatæ, quarum prior à Patre Cavallieri Jesuitâ, secunda à Daniele Bernoullio, tertia à . . . Mac-Laurino, quarta à Leonardo Eulero fuere ad Academiam missæ; Prior in eo occupatur ut Cartesianæ hypotheseos circa causam æstus marini vitia & hiatus corrigat & resarciat, quod quidem ingeniosè admodum præstat; tres reliquæ ex Legibus gravitatis aquarum Maris in Solem Lunam & Terram omnes Phænomeni propositi circumstantias explicant & calculis determinant, has ergo tres, omissâ priore, hujus esse loci credidimus.

In Dissertatione Mac-Laurini occurrit solutio syntheticâ Problematis de Figurâ Terræ, quale illud proposueramus in Notis nostris ad Prop. XIX. quodque parum felici successu Analyticè solvere tentaveramus, ex ejus solutione patet Meridianum esse veram Ellipsim in Hypothesi quod terra sit homogenea, cum autem hæc in manus nostras non devenerint nisi cum notæ ad eam Propositionem XIX prælum subiissent, inde factum est ut in iis Notis de illo Problemate ut nondum soluto egerimus: Quæ in his tribus Dissertationibus ingeniosa sunt enumerare longiùs foret, intelligit Lector quæ sint ipsi speranda à tantis Viris & quam facilis, his intellectis & perlectis, futurus sit transitus ad ea quæ sequuntur de Lunæ motu, de præcessione Æquinoctiorum, aliisque; Lectorem itaque rogamus ut nobis vitio non vertat, quod Typographo indulserimus hæc qualia sunt edere, ne, & ipse Lector & Typographus, eam paterentur moram quæ ad condendam Epitomem istarum Dissertationum necessaria fuisset.

TRAI-

TRAITÉ SUR LE FLUX ET REFLUX DE LA MER.

Par Mr. Daniel Bernoully Professeur d'Anatomie & de Botanique à Basle.

Devise, *Deus nobis hæc otia fecit.*

Pour concourir au Prix de 1740.

CHAPITRE PREMIER.

Contenant une Introduction à la Question proposée.

I.

Dans le grand nombre des Systêmes sur le Flux & Reflux de la Mer, qui sont parvenus à notre connoissance depuis l'antiquité la plus reculée, il n'y a plus que ceux des Tourbillons & de l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps céleştes & de la Terre, qui partagent encore les Philosophes de notre tems: l'un & l'autre de ces Systêmes ont eu les plus grands Hommes pour Défenseurs, & ont entraîné des Nations entieres dans leur parti. Il semble donc que tout le mérite qui nous reste à espérer sur cette grande Question, est de bien opter entre ces deux Systêmes, & de bien manier celui qu'on aura choisi pour expliquer tous les Phénomenes qu'on a observés jusqu'ici sur le Flux & Reflux de la Mer, pour en tirer de nouvelles propriétés, & pour donner des uns & des autres les Calculs & les Mesures.

I I.

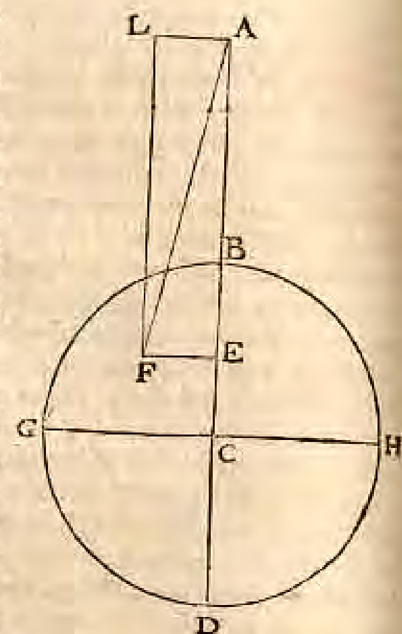
J'ai commencé d'abord par l'idée de Kepler, qu'on nomme avec justice le Pere de la vraie Philosophie. Elle est fondée sur l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps céleſtes & de la Terre : cet incompréhenſible & inconteſtable Principe, que le grand Newton a ſi bien établi, & qu'on ne ſçauroit plus revoquer en doute, ſans faire tort aux ſublimes connoiſſances & aux heureuſes découvertes de notre ſiécle. Après un examen fort ſcrupuleux, j'ai vû que cette Gravitation mutuelle, conſidérée dans les Globes de la Terre, de la Lune & du Soleil, non-ſeulement pouvoit produire tous les Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, mais même qu'elle le devoit neceſſairement, & qu'elle le devoit, ſuivant toutes les loix qu'on a obſervées juſqu'ici. Avec ces heureux ſuccès, j'ai pouſſé mes recherches auſſi loin qu'il m'a été poſſible de les porter. En chemin faiſant, je ſuis tombé ſur les Théoremes de M. Newton, dont je n'avois pû gueres voir la ſource auparavant; mais en même tems j'ai remarqué le peu de chemin qu'on a encore fait dans cette matiere, & même l'inſuffiſance de la Méthode uſitée, lorſqu'elle eſt appliquée à des Queſtions un peu détaillées. J'ai ſuivi une toute autre route; j'ai pouſſé mes recherches bien plus loin, & je ſuis entré dans un détail tel que l'ACADEMIE m'a paru le demander; & je dois dire à l'avantage des Principes que nous adopterons, que j'ai trouvé par-tout un accord merveilleux entre la Théorie & les Obſervations, accord qui doit être d'autant moins ſuſpect, que je n'ai conſulté les Obſervations, qu'après avoir achevé tous mes Calculs, de maniere que je puis dire de bonne foi, d'avoir deviné la pluſpart des Obſervations, ſur leſquelles je n'étois pas trop bien informé, lorſque j'ai entrepris cet Ouvrage.

I I I.

Quant aux Tourbillons, j'avouë qu'il eſt bien difficile d'en demontrer le faux à ceux qui veulent s'obſtiner à les défendre: mais auſſi il n'en eſt pas de la Phyſique, comme de la Géometrie. Dans celle-ci on n'admet, ni ne rejette rien, que ce dont on peut abſolument démontrer la vérité ou la fauſſeté, pendant que dans la Phyſique il faut ſe rapporter ſouvent à un certain inſtinct naturel de ſentir le faux & le vrai, après avoir bien péſé toutes les raiſons de part & d'autre. Quant à moi, je ne trouve point ce caractere de vérité, ni dans l'hypotheſe des Tourbillons, ni dans les conſéquences que l'on en tire. Si nous diſons que le Tourbillon a la même denſité, la même direction & la même viteſſe que la Lune, ce Tourbillon ne ſçauroit faire aucun effet; & ſi au contraire nous ſuppoſons ces trois choſes n'être pas les mêmes de part & d'autre, il me paroît bien clair & bien certain, que l'effet du Tourbillon devroit ſe manifeſter infiniment davantage dans le mouvement de la Lune, que dans celui des Eaux de la Terre. Cependant on ſçait parfaitement bien que la Lune, quoique ſujette à beaucoup d'irrégularités dans ſes mouvemens, n'en a aucune qui puiſſe être attribuée à l'action auſſi ſenſible d'un Tourbillon. Si nous paſſons par deſſus toutes ces différentes difficultés, nous en rencontrerons d'autres également embaraſſantes. C'eſt contre les loix de l'Hydroſtatique, que la Lune, qui nage dans le Tourbillon, puiſſe cauſer des variations dans la compreſſion des parties du Fluide. C'eſt une propriété eſſentielle des Fluides de ſe remettre auſſi-tôt à l'Equilibre, lorſque ſes Parties en ſont forties. Si une colonne de Tourbillon, entre la Lune & la Terre, étoit plus comprimée qu'une autre colonne ſemblable, rien ne ſçauroit empêcher ſes parties de s'échaper de côté juſqu'au retabliſſement de l'Equilibre. Qu'on s'imagine, par exemple, l'air de notre Atmoſphere tout d'un coup extrêmement échauffé; ce changement feroit en même tems hauſſer à proportion le Mercure dans le Barometre, puiſque l'air chaud a plus de reſſort que l'air froid; mais comme rien n'empêche l'air de s'échaper de côté juſqu'à la parfaite conſervation de l'Equilibre, cela fait qu'un tel changement n'en ſçauroit faire aucun ſur le Barometre; auſſi n'obſerve-t-on dans le Barometre aucune variation du jour à la nuit, qui cependant, par un raiſonnement tout-à-fait ſemblable à celui des Tourbillonnaires pour expliquer les Marées, devroit être très-ſenſible. Pareillement ſi les eaux d'une Riviere donnent contre un pieu, on ne remarquera aucune différence dans la ſurface des eaux, que bien près du pieu, & le fond du lit de la Riviere ſera toujours également preſſé. En voilà aſſez & trop ſur cette matiere; car ce ſera toujours aux Sectateurs de Deſcartes de montrer l'effet des Tourbillons ſur l'Océan, avec la même clarté qu'on peut le faire, moyennant le principe de Kepler, principe d'ailleurs qui n'eſt plus conteſté; ſçavoir, que la Terre & tous les Corps céleſtes ont une tendance mutuelle à s'approcher les uns des autres. Ce principe poſé, il eſt facile de faire voir, que la Terre que nous ſuppoſerons devoir être ſans cette tendance parfaitement ronde, en changera continuellement ſa figure, & que c'eſt ce changement de figure qui eſt la cauſe du Flux & Reflux de la Mer: Comme ce changement dans la Figure de la ſurface de la Terre eſt produit de differentes façons, j'en ferai ici un dénombrement, & je tâcherai dans la ſuite d'en donner la meſure.

I V.

Si A eſt le centre de la Lune, ou du Soleil: $BGDH$ la Terre; ſi l'on tire par les centres de la Lune ou du Soleil & de la Terre la droite AD, & qu'on prenne au dedans de la Terre un Point quelconque F, on tirera FE perpendiculaire à BD, avec la droite FA, & on achevera le Rectangle $FLAE$. Chaque point F eſt tiré ou pouſſé vers A, & cette force étant repreſentée par FA, elle ſera conſidérée comme compoſée des deux Laterales FL & FE: cela étant, on voit que la force FE étant appliquée dans chaque point de la Terre, ne ſçauroit que l'allonger au tour de BD: Et comme c'eſt une même raiſon pour tous les Plans qui paſſent par BD, il eſt clair que la Terre formera ainſi un Sphéroïde produit par la rotation d'une Courbe BGD autour de BD.



On remarquera, que cet allongement ne ſçauroit être qu'extrêmement petit. *Premierement*, à cauſe de la petiteſſe des Lignes, FE par rapport à FA. *En ſecond lieu*, à cauſe du peu de rapport qu'il y a entre la péſanteur du Point F vers A, à la péſanteur du même Point vers le centre de la Terre C. Nous verrons dans la ſuite que cet allongement ne peut aller qu'à un petit nombre de pieds, ce qui eſt fort peu conſidérable, par rapport au Diametre de la Terre.

On remarquera encore, que l'allongement total étant imperceptible par rapport au Diametre de la Terre, la différence des allongemens pour l'Hemiſphere ſupérieur GBH, & pour l'inférieur GDH, doit être inſenſible par rapport à l'allongement total; à la rigueur, il faudroit dire, que les forces exprimées par FE, ſont tant ſoit peu plus grandes dans l'Hemiſphere GBH; que dans l'Hemiſphere oppoſé, dont les parties ſont plus éloignées du point A, & qu'ainſi ledit Hemiſphere GBH ſera un peu plus allongé que l'autre Hemiſphere: mais on ſent bien que la différence doit être inſenſible. On peut donc prévoir que les Poles B & D reſteront également éloignés du Point C, & que la Courbe GBH pourra être cenſée la même que GDH. Nous donnerons un Calcul juſte & détaillé de tout cela dans la ſuite de ce Traité. Ve-

nons à une ſeconde conſidération, qui produira le même reſultat, que celle dont nous venons de parler.

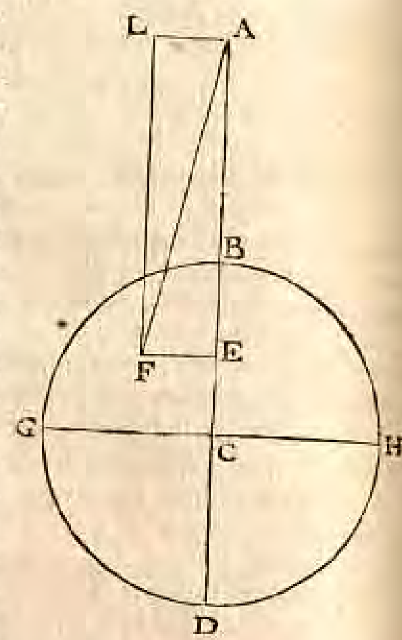
V.

Comme la Terre tâche continuellement à s'approcher du Soleil & de la Lune, il faut qu'il y ait en même tems d'autres forces qui la retiennent; & ce ſont les forces centrifuges de la Terre, qu'elle a par ſon mouvement autour du Soleil, & autour du centre de Gravité (je l'appelle ainſi, pour me conformer à l'uſage) qui eſt entre la Terre & la Lune. Je démontrerai auſſi ci-deſſous, que cette force centrifuge doit être ſuppoſée égale dans toutes les parties de la Terre, & parallele à la Ligne AD, pendant que l'autre force ſe répand inégalement ſur les parties de la Terre. Elle eſt plus grande dans les parties les plus proches de A, & plus petite dans les parties qui en ſont plus éloignées, & cela en raiſon quarrée reciproque des Diſtances. Cette raiſon ſuppoſée, le Calcul fait voir, que pourvû que les Couches concentriques de la Terre autour du Point C, ſoient homogenes, la force moyenne, qui pouſſe les parties de la Terre vers A, eſt précisément celle qui répond au centre de la Terre C; & que c'eſt dans ce centre C, où la force centrifuge eſt préciſément égale à la force centripete. Ainſi chaque partie qui eſt entre C & B, eſt plus pouſſée vers A, qu'elle n'eſt repouſſée; & au contraire chaque partie ſituée entre C & D, eſt moins pouſſée vers A, qu'elle n'eſt repouſſée; de ſorte qu'en s'imaginant deux Canaux communiquans entre eux GH & BD, on voit que chaque goute dans la partie CB, eſt tirée vers A, & que chaque goute dans la partie CD, eſt pouſſée dans un ſens contraire. Cela diminue l'action de la péſanteur vers le centre de la Terre dans le Canal BD, pendant que cette même péſanteur n'eſt pas diminuée dans le Canal GH, d'où il arrivera encore un allongement autour de l'Axe BD, ce que je m'étois propoſé de faire voir.

Le Calcul montre que cette raiſon eſt en ſoi-même de fort peu d'importance; qu'elle ne ſçauroit allonger l'Axe BD conſidérablement. Mais ſon reſultat eſt aſſez comparable avec celui de l'allongement expoſé auparavant. On prévoit d'ailleurs encore que l'allongement produit par cette raiſon, doit être égal dans les Canaux BC & CD, la différence ne pouvant être ſenſible; & ainſi les Points B & D reſteront encore également éloignés du centre C.

V I.

Une troiſiéme raiſon, qui peut allonger davantage l'Axe BD, eſt que par l'allongement même, produit par les deux cauſes précedentes, la la pésanteur terrestre qui fait descendre tous les Corps vers le centre C, est changée. Cette pésanteur peut être considérée comme égale dans les Canaux GC & BC, ou DC à des Distances égales du centre C, tant que la Terre est supposée Sphérique; mais cette Sphéricité ôtée, il est naturel que cette égalité ne pourra plus subsister. Il est aussi vraisemblable que la pésanteur est diminuée dans les Canaux CB & CD, & qu'ainsi l'Axe doit encore être prolongé. Pour calculer cet allongement, nous aurons recours au Systême de M. Newton, qui suppose la pésanteur produite par l'Attraction commune de la matiere en raison quarrée reciproque des Distances. Ce n'est pas que je croye cette hypothese bien démontrée; car la conclusion de la Gravitation mutuelle des Corps du Systême du Monde en raison quarrée reciproque des Distances, qu'on ne sçauroit plus nier, à une semblable attraction universelle de la matiere, de laquelle M. Newton déduit la pésanteur; cette conséquence, dis-je, demande beaucoup d'indulgence. Mais je l'adopterai pour ce sujet, parce que tous les autres Systêmes sur la pésanteur me seroient inutiles: c'est le seul, qui étant du ressort de la Géometrie, donne des mesures assurées & fixes; & il est d'ailleurs digne de l'attention de tous les Géometres & Physiciens.



VII.

Les trois causes que je viens d'exposer, comme pouvant & devant allonger la Terre autour de la Ligne qui passeroit par le centre du Soleil & de la Lune, sont d'une force assez égale; de sorte qu'il faudra tenir compte de toutes, quoique chacune soit si petite, qu'elle ne sçauroit allonger la Terre au delà d'un petit nombre de pieds, & peut-être moins d'un pied. Il sera bon de remarquer ici que ce qui, après le Calcul, exprime lesdits allongemens, est toujours un certain multiple, ou sous-multiple de $\frac{bg}{aG} \times b$, entendant par b le rayon de la Terre, par a la distance du luminaire en question & par $\frac{g}{G}$ la raison qui est entre la pésanteur d'un Corps placé en B vers A, & sa pésanteur vers C, laquelle raison est extrêmement petite.

J'ai jugé à propos d'alleguer ici cette Formule, que le Calcul m'a enseigné, afin que ceux qui voudroient le faire après moi, sçachent d'abord quels termes on peut rejetter, comme inutiles, qui rendent les Calculs extrêmement pénibles, & qui se trouvent au bout du Calcul, n'être d'aucune importance. Ce seroit une chose ridicule, de vouloir faire ici attention à des parties d'une Ligne qui proviendroient, si ladite quantité $\frac{bg}{aG} \times b$ étoit encore multipliée par $\frac{b}{a}$, ou par $\frac{g}{G}$.

VIII.

Notre dessein est d'abord de chercher & d'exprimer analytiquement les allongemens dont nous venons de parler. On peut les trouver par rapport aux deux premieres causes, indépendamment de la Figure de la Terre; mais par rapport à la troisiéme cause exposée au sixiéme Article, il faut supposer la Terre, c'est-à-dire, le Méridien $BGDH$ d'une Figure donnée; & c'est l'hypothese la plus naturelle, de la supposer elliptique, ayant pour Axes les Lignes BD & GH; quelle qu'elle soit, elle n'en sçauroit être sensiblement différente, & si elle l'étoit, cela ne sçauroit produire un changement bien considérable sur le rapport des deux Axes BD & GH, que nous cherchons. Outre cela nous verrons que c'est ici un Problême, qui dépend encore de la loi des changemens dans les Densités des couches de la Terre. M. Newton suppose la Terre par-tout homogene. Il ne l'a fait apparemment, que pour faciliter le Problême, qui est assez difficile dans toute autre hypothese. Mais cette supposition de M. Newton n'a aucune vraisemblance; je dirai même, qu'elle seroit fort peu favorable à notre Systême, comme nous le verrons dans la suite. C'est pourquoi je n'ai pas voulu restreindre si fort la Solution du Problême en question. J'ai cru que je payerois trop cher l'avantage d'applanir les difficultés du Problême, & les peines du Calcul. J'ai donc rendu notre Question infiniment plus générale, pour en tirer tous les Corollaires, & pour choisir ceux qui conviennent le plus à notre sujet, & qui rendront par-là même plus vraisemblables les hypotheses, auxquelles ils appartiennent.

IX.

Voici à present nos hypotheses. Nous considererons la Terre, comme me naturellement ſphérique, & compoſée de couches concentriques: Nous ſuppoſerons ces couches homogenes, chacune dans toute ſon étendue; mais qu'elles ſont de différentes Denſités entre elles, & que la loi des variations de leur Denſité ſoit donnée. Quant à la Sphericité de la Terre, que nous ſuppoſerons, on voit bien qu'il ſeroit ridicule de s'y arrêter, puiſque l'élevation des eaux de l'Océan, cauſée par les deux Luminaires, ne ſçauroit différer ſenſiblement, que la Terre ſoit un peu applanie, ou un peu allongée. La ſuppoſition de l'Homogénéité des couches concentriques, ne doit pas non plus nous faire de la peine, puiſqu'on ne ſçauroit donner aucune raiſon, pourquoi elles devroient être hétérogenes.

CHAPITRE II.

Contenant quelques Lemmes ſur l'Attraction des Corps.

I.

JE prie encore une fois le Lecteur, de ne conſidérer ce Chapitre, que comme hypothétique. Je ne ſuppoſe l'Attraction univerſelle de la matiere, que parce que c'eſt la ſeule hypotheſe, qui admette des Calculs, & qu'elle eſt d'ailleurs aſſez bien fondée, pour mériter l'attention de tous les Philoſophes du monde.

On appelle au reſte Attraction qu'exerce un Corps A ſur un Corps B, la force accéleratrice, que le Corps B acquiert à chaque inſtant, en tombant vers A. On voit donc que l'effet de l'Attraction du Corps A ſur le Corps B, eſt de communiquer à celui-ci une péſanteur, qu'on ſuppoſe proportionnelle à la maſſe du Corps A diviſée par le quarré de la Diſtance; & cette péſanteur doit encore être multipliée par la maſſe du Corps B, pour avoir la force que ce Corps exerce s'il eſt empêché de s'approcher du Corps A.

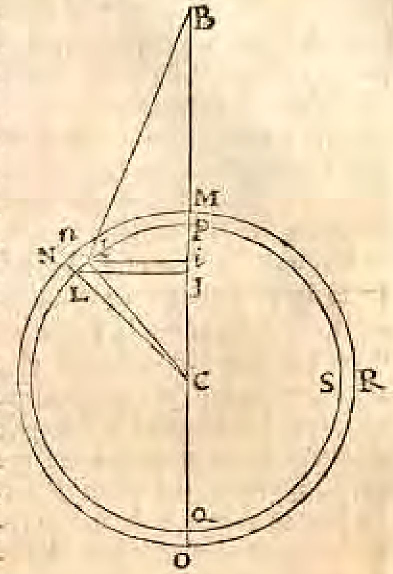
PROBLEME.

II.

Soit une couche ſphérique homogene, infiniment mince, & d'une épaiſſeur égale, compriſe entre les ſurfaces ſphériques $MNOR$ & $PQLS$, trouver l'Attraction, ou la force accéleratrice, que cette couche exercera ſur un Corps placé au point B, pris hors de la ſurface extérieure.

SOLU-

SOLUTION.



Qu'on tire la droite BO par le Point B & le Centre C, dans laquelle on prendra deux Points infiniment proches J & i: on tirera enſuite les deux Perpendiculaires JL & il, & par les Points L & l, on tirera du centre les droites CN & Cn. Soit à préſent $CB = a$; $CJ = x$; $Ji = dx$; $CP = b$; PM ou LN (que nous regardons comme infiniment petite) $= \epsilon$: la Denſité de la matiere de la couche $= m$.

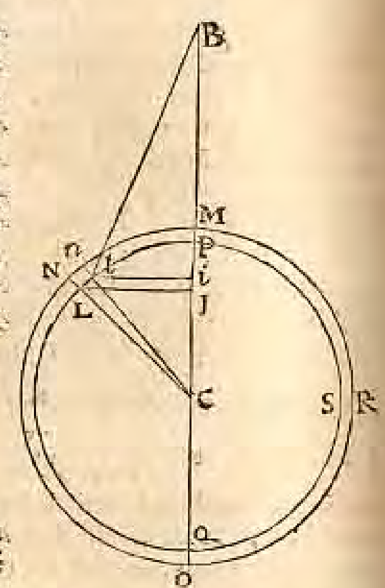
On voit que pendant la revolution autour de l'Axe MO, la petite partie $NLln$ garde toujours une même Diſtance du Point B, & que cette Diſtance ſera $= \sqrt{(aa - 2ax + bb)}$: or, comme il faut toujours diviſer par le Quarré des Diſtances, il faudra pour trouver la force accéleratrice en queſtion d'abord prendre $\frac{1}{aa - 2ax + bb}$, & cette quantité doit être multipliée par la raiſon de Bi à Bl, & on aura $\frac{a - x}{(aa - 2ax + bb)^{\frac{3}{2}}}$: & cette quantité doit encore être multipliée par la Maſſe de l'Anneau, que la partie $NLnl$ forme par ſa revolution, & la Maſſe doit être exprimée par la Denſité m & la capacité de l'Anneau, c'eſt-à-dire (en nommant n la raiſon de la circonférence d'un Cercle à ſon rayon) par $m \times NL \times Ll \times n \times LJ$: ou par $m \times \epsilon \times \frac{bdx}{\sqrt{(bb - xx)}} \times n \times \sqrt{(bb - xx)}$ ou enfin par $nmb\epsilon dx$; de ſorte qu'on a la force accéleratrice abſoluë produite par ledit Anneau $= \frac{nmb\epsilon(a - x)dx}{(aa - 2ax + bb)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'Intégrale exprimera l'Attraction cherchée de toute la couche. Pour trouver cette Intégrale, nous ſuppoſerons $aa - 2ax + bb = yy$, & nous aurons $\int \frac{nmb\epsilon(a - x)dx}{(aa - 2ax + bb)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-nmb\epsilon(aa - bb + yy)dy}{2aayy}$ $= \frac{nmb\epsilon}{2aa} \times \left(\frac{aa - bb - yy}{y} + C\right) = \frac{nmb\epsilon}{2aa} \times \left(\frac{2ax - 2bb}{\sqrt{aa - 2ax + bb}} + C\right)$, entendant par C une Conſtante convenable: pour la trouver il faut remarquer, que l'Intégrale doit être $= o$, lorſque $x = -b$, d'où l'on tire

$\epsilon = \frac{2ab + 2bb}{a + b} = 2b$: substituant cette valeur, on obtient pour l'Intégrale en question $\frac{nmb\epsilon}{aa}\left(\frac{ax - bb}{\sqrt{aa - 2ax + bb}} + b\right)$, & mettant enfin b à la place de x, on obtient la force accéleratrice cherchée $= \frac{2nmbb\epsilon}{aa}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

III.

Comme la quantité de la matiere de toute la couche (pour laquelle nous venons de déterminer la force accéleratrice, qu'elle exerce sur le Corps placé au point B) est $= 2nmbb\epsilon$, nous voyons que cette force accéleratrice est exprimée par la quantité de matiere divisée par le quarré de la Distance du Point B au Centre C, & par conséquent la même, que si cette quantité de matiere étoit concentrée au Centre.



SCHOLIE.

IV.

On remarquera que cette Solution n'a lieu, que lorsque le Point B est placé hors de la couche, parce que dans notre Calcul nous avons supposé, que chaque Anneau formé par la revolution de la partie $NLln$ produit une force accéleratrice du même côté, ce qui n'a plus lieu, lorsque le Point B est placé entre les deux surfaces, ou au-dedans de la surface intérieure. Je ne dirai rien de ces deux cas, dont chacun demande une Solution particuliere, parce que nous n'en aurons pas besoin, & qu'ils ont déja été resolus par l'Auteur de ces Problêmes. Je n'aurois même rien dit du cas que nous venons de résoudre, comme pareillement résolu par M. Newton, si je n'avois pas crû, qu'il étoit convenable de suivre toutes les traces qui nous menent à l'intelligence de notre Question principale : aussi ces précautions sont-elles nécessaires, pour pouvoir toujours exprimer d'une même façon les Quantités constantes ; & ainsi nous nous souviendrons toûjours dans la suite d'exprimer la force accéleratrice d'un Corps infiniment petit, par la Masse divisée par le quarré de la Distance, & de dénoter la Masse par le produit de son étenduë, & de sa Densité.

PROBLEME.

V.

Trouver l'Attraction pour un Corps placé en B, causée par une Sphere solide, composée de couches homogenes ; mais de différentes Densités entre elles.

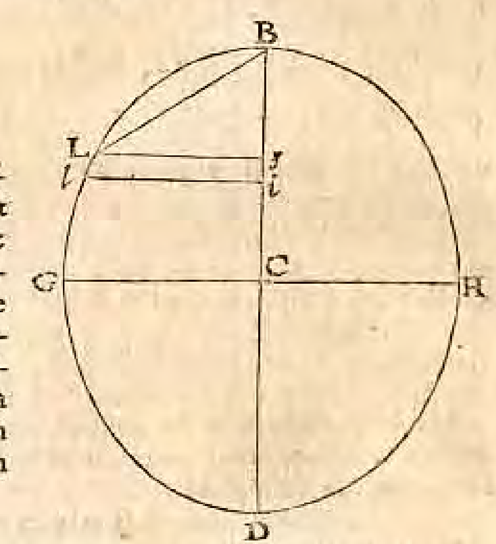
SOLUTION.

Il paroît par le troisiéme Article, qu'on n'a qu'à concevoir la Masse de toute la Sphere ramassée au Centre C, & qu'elle causera la même Attraction, tant que le Point B est hors de la Sphere : nommant donc M la Masse du Globe, ou la somme des Masses de toutes les couches, l'Attraction cherchée sera $= \frac{M}{aa}$. C. Q. F. T.

PROBLEME.

VI.

Soit $BGDH$ une Ellipse presque circulaire, c'est-à-dire, dont la différence des Axes BD & GH soit regardée comme infiniment petite ; & qu'on conçoive cette Ellipse former par sa rotation autour de l'Axe BD, un Sphéroïde homogene. On demande la force accéleratrice, ou l'attraction que ce Sphéroïde produira sur un Corps placé au Pole B.



SOLUTION.

Soit la Densité de la matiere exprimée par μ ; le petit demi Axe $GC = b$; le grand demi Axe $BC = b + \epsilon$; $BJ = x$; $Ji = dx$; on aura la perpendiculaire $LJ = \frac{b + \epsilon}{b} \times \sqrt{2(b + \epsilon)x - xx}$. On voit facilement

ment * que l'Attraction causée par la couche, qui répond au Rectangle $LJil$, est $= n\mu dx - n\mu dx \times \frac{BJ}{BL}$, c'est-à-dire, par $n\mu dx - n\mu dx$: $\sqrt{xx + \frac{bb}{(b+\varepsilon)^2} \times (2bx + 2\varepsilon x - xx)}$ ou par $n\mu dx - (b+\varepsilon)\, n\mu x dx$: $\sqrt{(2b\varepsilon xx + \varepsilon\varepsilon xx + 2b^3 x + 2bb\varepsilon x)}$: Dans cette derniere quantité, nous rejetrons le Terme $\varepsilon\varepsilon xx$, comme devant être comparé aux infiniment petits du second ordre, & nous changerons le Signe radical du Dénominateur en Signe exponentiel de Numerateur; & de cette maniere nous aurons $n\mu dx - (b+\varepsilon)\, n\mu x dx \times (2b^3 x + 2b\varepsilon xx + 2bb\varepsilon x)^{-\frac{1}{2}}$: or on sçait par la formation des suites de M. Newton, que $(2b^3 x + 2b\varepsilon xx + 2bb\varepsilon x)^{-\frac{1}{2}}$ est $= (2b^3 x)^{-\frac{1}{2}} - (2b^3 x)^{-\frac{1}{2}} \times (b\varepsilon xx + bb\varepsilon x)$: substituant donc cette valeur, on obtient $n\mu dx - \frac{(b+\varepsilon) n\mu x dx}{\sqrt{2b^3 x}} + \frac{(b+\varepsilon) n\mu x dx\, (b\varepsilon xx + bb\varepsilon x)}{2b^3 x \sqrt{2b^3 x}}$, qui marque l'action de la couche formée par la rotation du Rectangle $LJil$: à la place de cette quantité, on peut encore, en multipliant les quantités à multiplier, & rejettant les termes affectés de la seconde Dimension de ε, poser $n\mu dx - \frac{n\mu dx\sqrt{x}}{\sqrt{2b}} - \frac{\varepsilon n\mu dx\sqrt{x}}{2b\sqrt{b}} + \frac{\varepsilon n\mu x dx\sqrt{x}}{2bb\sqrt{b}}$, & l'Intégrale de cette quantité (qui doit être $=o$, lorsque $x=o$) est $= n\mu x - \frac{2n\mu x\sqrt{x}}{3\sqrt{2b}} - \frac{\varepsilon n\mu x\sqrt{x}}{3b\sqrt{2b}} + \frac{\varepsilon n\mu xx\sqrt{x}}{5bb\sqrt{2b}}$; & faisant enfin $x = 2b + 2\varepsilon$, on trouve, en rejettant toujours les infiniment petits du second ordre $2n\mu b + 3n\mu\varepsilon - 2n\mu b - 2n\mu\varepsilon - \frac{2}{3}n\mu\varepsilon + \frac{4}{5}n\mu\varepsilon$, ou bien enfin

$$\tfrac{2}{3}n\mu b + \tfrac{2}{15}n\mu\varepsilon,$$

qui marque la force accéleratrice causée par l'action de tout l'Ellipsoïde sur un petit Corps placé au Pole B. C. Q. F. T.

PROBLEME.

VII.

Les hypotheses étant les mêmes, que dans la proposition précedente, trouver la même chose pour un petit Corps placé en G, qui est sous l'Equateur de l'Ellipsoïde.

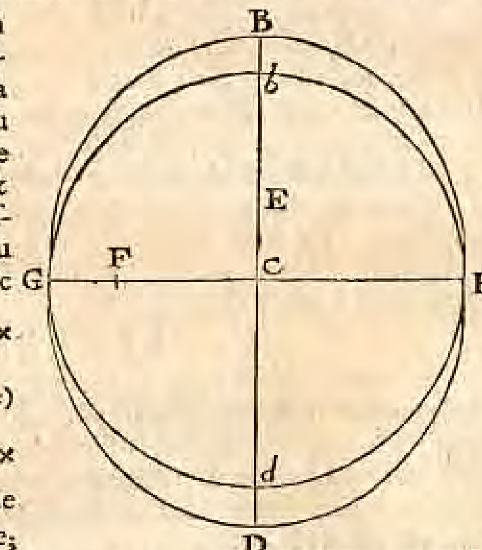
SOLUTION.

Il est facile de démontrer par la Géometrie, que toute Section de l'Ellipsoïde parallele à l'Axe de Rotation BD, fait une Ellipse sembla-

* Ceci se trouve demontré par le Cor. 1. de la Prop. XC. du 1er. Livre de Mr. Newton; on y voit que l'Attraction du point B par le Cercle dont LJ est le Rayon, est $1 - \frac{BJ}{BL}$ qu'il faut multiplier par la Masse du petit Cylindre dont ce Cercle est la Base & dont Ji est la hauteur pour avoir l'Attraction causée par la Couche qui répond au Rectangle $LJil$.

ble à l'Ellipse génératrice $BGDH$. Considérons l'Ellipsoïde comme composée de la Sphere inscrite, ayant pour Diametre le petit Axe GH, & de l'écorce formant un double Menisque: l'action de la Sphere doit être exprimée par $\frac{2}{3}n\mu b$, comme nous avons démontré au 5. §. Car la masse de cette Sphere est $\frac{2}{3}n\mu b^3$, & la distance du Point G au centre est $= b$. Il nous reste donc à chercher quelle action resulte du double Menisque.

Concevons pour cet effet tout l'Ellipsoïde partagé en couches paralleles & perpendiculaires à GH. Soit la distance du centre d'une de ces couches au Point $G = x$; son épaisseur $= dx$; il n'est pas difficile de voir * que la capacité du bord de cette couche (qui fait partie du double Menisque en question) est $= \frac{n\varepsilon}{2b} \times (2bx - xx)\, dx$, & que ce bord étant multiplié par la Densité μ, en donne la quantité de matiere $= \frac{n\mu\varepsilon}{2b} \times (2bx - xx)\, dx$. Or toutes les parties de ce bord infiniment mince, peuvent être censées agir également, & avec une même obliquité sur le Corps placé au point G: on n'a donc qu'à multiplier cette quantité de matiere par la raison de la distance du centre de la couche au Point G à la distance du bord de la couche au même Point G, & diviser par le quarré de cette Distance, pour avoir l'attraction du bord de la couche, qui sera donc $\frac{n\mu\varepsilon}{2b} \times (2bx - xx)\, dx \times \frac{x}{\sqrt{2bx}} \times \frac{1}{2bx}$, ou bien $\frac{n\mu\varepsilon dx}{4bb\sqrt{2b}} \times (2b\sqrt{x} - x\sqrt{x})$ dont l'Intégrale est $= \frac{n\mu\varepsilon}{4bb\sqrt{2bb}} \times (\frac{4}{3}bx\sqrt{x} - \frac{2}{5}xx\sqrt{x})$ puisqu'il ne faut point ajoûter ici de constante;



& pour avoir enfin l'Attraction de tout le double Menisque, il faut mettre $x = 2b$, après quoi on aura simplement $\frac{4}{15}n\mu\varepsilon$. Si on ajoûte

* Car l'aire de l'Ellipse éloignée de G de la quantité x est $\frac{n}{2b} \times b + \varepsilon\,(2bx - xx)$ & l'aire du Cercle inscrit est $\frac{n}{2}(2bx - xx)$. Donc otant cette aire du Cercle de celle de l'Ellipse reste $\frac{n\varepsilon}{2b}(2bx - xx)$ pour l'aire de Menisque.

à cette quantité l'action de la Sphere inscrite, on aura l'attraction cherchée de tout l'Ellipsoïde sur un Corps placé au Point $G = \frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \epsilon$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE. VIII.

On voit par ces deux dernieres Propositions, que les forces accéleratrices au Pole, & sous l'Equateur dans un Ellipsoïde homogene, sont comme $\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \epsilon$ à $\frac{2}{3} n \mu \epsilon + \frac{4}{15} n \mu \epsilon$, ou comme $5b + \epsilon$ à $5b + 2\epsilon$, laquelle raison peut passer pour celle de 1 à $1 + \frac{\epsilon}{5b}$. Je vois que cela est conforme à ce que M. Newton dit à la page 380. * des *Princip. Math. Phil. Nat. Edit.* 2. pour déterminer la Proportion de l'Axe de la Terre au rayon de son Equateur. Quant à son raisonnement, il n'y a peut-être que lui, qui pût y voir clair; car ce grand Homme voyoit à travers d'un voile, ce qu'un autre ne distingue qu'à peine avec un Microscope.

LEMME.

Dans un Sphéroïde elliptique homogene, la force accéleratrice pour un Point quelconque, est à la force accéleratrice pour un autre Point pris dans le même Diametre, comme la distance du premier Point au centre, à la distance pareille du second Point.

† M. Newton a démontré cette Proposition à la 199. page de son Livre, que nous venons de citer: & comme il ne s'agit ici que de la proportion entre les deux forces accéleratrices, sans qu'il soit question de les exprimer analytiquement, il seroit superflu, pour mon dessein, de la démontrer à ma façon.

PROBLEME. X.

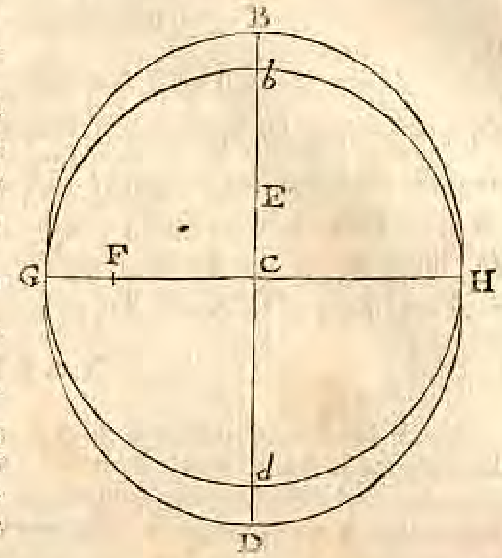
Soit encore le double Menisque, tel que nous l'avons décrit au septieme Article, compris entre la surface de l'Ellipsoïde $GBDH$, & $GbHd$, qui marque la surface de la Sphere inscrite; il s'agit de trouver la force accéleratrice, que ce double Menisque produira au point E, pris dans l'Axe de rotation BD.

SOLUTION.

Nous garderons les dénominations de ci-dessus: or on voit qu'on trouvera l'action du double Menisque, en prenant celle de tout l'Ellipsoïde consideré comme homogene avec les Menisques, & en retranchant celle de la Sphere inscrite. L'action de tout le Sphéroïde est en vertu

* Ceci se raporte à la page 80. & suiv. de ce Volume, & nous avons essayé d'éclaircir cet endroit de M. Newton dans la la Notte (r) & suivantes.

† C'est le Cor. 3. de la Prop. XCI. du Livre 1er. vol. 1er. pag. 519.



des 6 & 9 Articles $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \epsilon) \times \frac{CE}{CB}$, & celle de la Sphere $= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CE}{Cb}$: de là on tire la force accéleratrice, qui convient aux Menisques $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \epsilon) \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CE}{Cb}$. Substituons à la place de $\frac{CE}{Cb}$ cette quantité $\frac{CE}{CB - Bb}$, qui peut être censée égale à $\frac{CE}{CB} + \frac{Bb \times CE}{CB^2}$ (à cause que nous traitons la petite Bb, comme infiniment petite, par rapport à CB) & nous trouverons la force accéleratrice pour les Ménisques $= \frac{2}{15} n \mu \epsilon \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{Bb \times CE}{CB^2} = \frac{2}{15} n \mu \epsilon \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu \epsilon \times \frac{CE}{CB}$ (puisque $\frac{Bb}{CB} = \frac{\epsilon}{b + \epsilon} = \frac{\epsilon}{b}$) $= -\frac{8}{15} n \mu \epsilon \times \frac{CE}{CB}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE. XI.

Le Signe négatif fait voir, que la Gravitation au Point E, causée par l'action des deux Ménisques, se fait vers le Pole B, & non vers le Centre C. Au reste on remarquera, que cette Proposition n'est vraie que pour les Points compris entre C & b, en excluant tous les Points, qui sont au-delà de b; & cela à cause que le Lemme du 9. §. ne sçauroit être appliqué à trouver la force accéleratrice causée par l'action de la Sphere pour le Point E, si ce Point est pris hors de la Sphere inscrite au Sphéroïde. Ainsi par exemple, au point B, la Gravitation causée par les Ménisques, se feroit vers le Centre avec une force accéleratrice $\frac{12}{15} n \mu \epsilon$. Je restreins ces Propositions, quoique ma Méthode suffise pour des solutions beaucoup plus générales; & cela pour ne me point engager dans des longueurs qui nous meneroient au-delà de notre sujet.

PROBLEME. XII.

Trouver la même chose que dans l'Art. X. pour un Point quelconque F, pris dans une Ligne GH perpendiculaire à BD. S o-

SOLUTION.

On obtient encore l'action des Ménisques, en retranchant celle de la Sphere de celle du Sphéroïde. Or celle de la Sphere est $= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CF}{CG}$ & celle du Sphéroïde $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \beta) \times \frac{CF}{CG}$, en vertu des § § 7. & 9. Donc la Gravitation au Point F se fait vers le centre C par la simple action du double Ménisque, & la force accéleratrice y sera $= \frac{4}{15} n \mu \beta \times \frac{CF}{CG}$. C. Q. F. T.

XIII.

Voilà les Propositions qui nous seront nécessaires, pour mesurer les haussemens & baissemens des eaux dans la Mer libre par l'action de l'un des deux Luminaires, entant que ces variations répondent à la relation qui se trouve entre la pésanteur & la figure de la Terre. Ceux qui voudront employer l'analyse pure pour la Solution de nos deux derniers Problêmes, se plongeront dans des Calculs extrêmement pénibles, & verront par là l'avantage de notre Méthode.

CHAPITRE III.

Contenant quelques Considérations Astronomiques & Physiques, préliminaires pour la Détermination du Flux & Reflux de la Mer.

COmme le Flux & Reflux de la Mer dépendent de la Lune & du Soleil, on voit bien que notre sujet demande une exacte Théorie du mouvement de ces deux Luminaires. Quant au mouvement apparent du Soleil, on le connoit avec toute l'exactitude requise ici. Mais on est encore bien éloigné de sçavoir avec la même précision la Théorie de la Lune, qui est cependant d'une plus grande importance. Une idée qui m'est venuë là-dessus, d'employer le principe de la conservation de ce que l'on appelle communément *Forces vives* (principe déja employé sous un autre nom par le grand & incomparable M. Huguens, pour trouver les Loix du choc des Corps parfaitement élastiques, & auquel on est redevable d'une grande partie des connoissances nouvelles dans la Dynamique, tant des Fluides, que des Solides:) Cette idée, dis-je, m'a conduit par un chemin fort abregé, à déterminer beaucoup plus

plus exactement, que l'on n'a fait jusqu'ici, les mouvemens de la Lune, que l'on appelle communément irréguliers, mais qui sont tous sujets aux loix Méchaniques. Je m'étois proposé d'inserer ici ma nouvelle Théorie sur la Lune; mais, comme notre sujet n'est déja que trop étendu, & qu'il demande des discussions assez pénibles, je la differerai à une autre occasion, où je la donnerai en forme d'Addition, si l'Académie trouve ce Traité digne de son attention. Je ne ferai donc ici qu'indiquer en gros les connoissances tirées du Systême du Monde, qui servent à donner un Systême général du Flux & Reflux de la Mer; & quand nous viendrons au détail, nous supposerons les mouvemens de la Lune parfaitement connus.

II.

On sçait que la Lune & la Terre sont un Systême à part: l'un & l'autre de ces Corps tournent autour d'un Point, & font leur revolution dans un même tems, décrivant chacun une Ellipse: l'action du Soleil sur l'un & l'autre Corps, change un peu ces Ellipses, & fait même que la proportion des distances dudit Point aux Centres de la Lune & de la Terre, ne demeure pas exactement la même: mais, comme nous ne prétendons jusqu'ici que d'exposer en gros les choses nécessaires à notre Question, nous ne ferons point d'attention à ces inégalités, & considérerons la Terre & la Lune, comme faisant des Ellipses parfaites & semblables entre elles autour d'un même Point.

III.

Par ladite Revolution, les deux Corps tâchent à s'éloigner l'un de l'autre; & cet effort est contrebalancé par leur Gravitation mutuelle: & comme la Terre fait autant d'effort pour s'approcher de la Lune, que celle-ci en fait pour s'approcher de la Terre, il faut que les forces centrifuges soient aussi égales: d'où il suit que le Point autour duquel ces deux Corps tournent, doit être placé, en sorte que les forces centrifuges soient égales: c'est là la premiere idée. Il vaudroit donc mieux appeller ce Point, *Centre de Forces centrifuges*, ou bien, puisque les vitesses gardent dans notre hypothese une proportion constante, *Centre de Masses*, que *Centre de Gravité*. Il est vrai que ces mots reviennent au même, à prendre celui du Centre de Gravité dans le sens commun: Mais quelle idée y peut-on attacher, lorsque la pésanteur est inégale dans les différentes parties du Corps? Il n'y a aucun Point alors, qu'on puisse nommer tel, quelque définition qu'on donne à ce mot. Quoi qu'il en soit, il est certain que les distances du Point en question aux Centres de la

Terre & de la Lune, sont en raison reciproque des Masses ou Quantités de matiere de ces Corps.

I V.

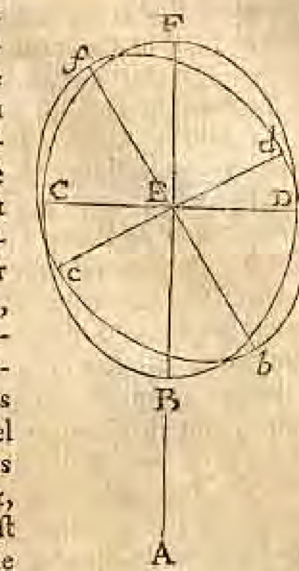
Si la Lune & la Terre étoient des Corps parfaitement homogenes dans toute leur étenduë, ou du moins chacun composé de Couches concentriques parfaitement homogenes, & qu'ils fussent parfaitement sphériques, sans avoir aucun mouvement, imprimé originairement, ou produit par une Cause Physique, autour d'un Axe passant par leur propre Centre de Gravité, il est clair, que toutes les parties des Corps garderoient pendant leur Revolution un Parallélisme; de sorte que les deux Corps vûs du Centre de Gravité commun, paroîtroient faire précisément le tour en sens contraire autour d'un Axe perpendiculaire au plan des Orbites, pendant chaque Revolution des Corps. Cependant cela ne se fait point dans la Lune: car nous sçavons qu'elle nous montre constamment une même face (je ne fais pas encore attention à quelques legers changemens;) & cela est contraire au Parallélisme, que nous venons d'alléguer: quoique ce ne soit pas ici proprement l'endroit pour expliquer ce Phénomene de la Lune, je ne laisserai pas de le faire, pour nous préparer à ce que nous aurons à dire sur la Terre, comme essentiel à notre matiere.

V.

Considérons donc, que la parfaite Homogénéité dans les Couches concentriques de la Lune, aussi bien que sa parfaite Sphéricité, sont moralement impossibles: mais il n'est pas encore expliqué, comment on peut déduire de là, pourquoi la Lune nous montre toujours une même face. Il ne suffit pas de dire que le Centre de Gravité de la Lune pris dans le sens commun, tâche toûjours à s'éloigner, le plus qu'il est possible, du Centre de Revolution. Quelques inégales que fussent les Couches, & quelque irréguliere que fut la Figure, la Lune garderoit toujours le Parallélisme des Faces, s'il n'y avoit pas une autre raison; sçavoir, celle de l'inégalité de pésanteur de ses Parties vers la Terre: les parties ayant d'autant plus de pésanteur, qu'elles sont plus près de la Terre: c'est cette raison, qu'il faut joindre à l'une des deux autres, ou à toutes les deux ensemble; de sorte que quand même la Lune seroit parfaitement homogene, sa seule Figure, jointe à l'inégalité de pésanteur de ses parties vers le Centre de la Terre, pourroit même produire le Phénomene en question.

Soit A le Centre de la Terre: $BCFD$, par exemple, une Ellipse dont l'Axe BF soit le plus grand, & CD le plus petit: que cette Ellipse forme par sa Revolution autour de l'Axe BF, le Corps de la Lu-

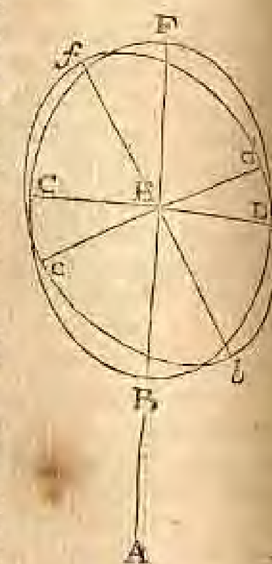
ne. Supposons après cela la Lune homogene & mobile autour de son Centre E, & servons-nous de l'hypothese ordinaire, que la pésanteur de chaque partie de la Lune vers A, soit en raison quarrée reciproque des distances au Point A. Cela étant, je dis, que la Lune montrera constamment au Point A la Face CBD, & que l'Axe FB passera toujours par le Point A, & que la Lune reprendroit cette situation, dès qu'elle en seroit détournée. Comme cette matiere est assez intéressante, tant pour l'Astronomie, que pour la Physique, je l'expliquerai par un exemple, qui rendra fort sensible, tout ce que nous venons de dire. Je dis donc qu'on doit regarder, à cet égard, la Lune, comme un Corps flottant dans un Fluide; car les parties d'un tel Corps, sont pareillement animées de différentes pésanteurs: or on sçait qu'un Corps flottant, qui n'est pas Sphérique, ou qui étant tel, n'est pas homogene, n'est pas indifférent à chaque situation; mais qu'il affecte constamment de certaines situations, qu'il reprend aussi-tôt qu'il en a été détourné. Quelquefois le Corps n'a qu'une seule situation d'Equilibre; d'autres fois plusieurs, suivant la structure du Corps: Mais on se tromperoit toujours, si l'on croyoit, que le Centre de Gravité du Corps tâche à se mettre dans l'endroit le plus bas qu'il est possible; de même qu'on se trompe, en disant, que le Centre de Gravité de la Lune, tâche à s'éloigner, le plus qu'il est possible, du Centre de la Terre. On voit donc assez, que la cause principale de ce que la Lune nous présente toujours une même face, est l'inégalité de pésanteur; & à cette cause, il faudra joindre, ou la non-parfaite Sphéricité, ou la non-parfaite Homogénéité des Couches de la Lune, ou les deux causes à la fois.



V I.

Comme la Question que nous venons d'expliquer, entraîne celle d'une legere nutation de la Lune en Longitude, que les Astronomes ont observée, il ne sera pas hors de propos de faire voir comment cette nutation découle de notre Théorie. Nous avons vû que le Sphéroïde $CBDF$ mobile autour d'un Point E, doit toujours montrer au Point A la Face CBD tant que le Point E reste dans sa place. Supposons à présent, que ce Corps s'éloigne un peu de cette situation, en faisant une rotation infiniment petite autour du Point E, la force qui tend à la remettre dans sa situation naturelle, est de même infiniment petite; ce qui fait voir, que

que le Point *E* faisant sa revolution autour du Point *A*, ce ne sçauroit plus être exactement la Face *CBD*, qui regarde vers *A*, parce qu'à chaque petit mouvement du Point *E*, la Lune fait une petite rotation autour de ce Point, pour garder le Parallélisme, & la force qui tâche à tourner vers le Point *A* la Face *CBD*, étant encore infiniment petite, ne sçauroit s'en acquitter assez-tôt: & ce sera la même chose pendant que le Point *E* parcourt un second Elément, & ainsi de suite, jusqu'à-ce qu'à la fin la Lune se place assez obliquement, pour que la force, qui tâche à mettre la Lune dans sa situation naturelle, soit assez grande, pour réparer, à chaque moment, une nouvelle petite inclinaison, qui survient par la rotation du Point *E* autour du Point *A*. [Cette explication pourra nous servir dans la suite, pour démontrer un des principaux Phénomenes des Marées.] La Lune prendra donc la situation oblique *cbdf*, si sa Revolution autour du Point *A* est supposée se faire de *E* vers *D*. Mais cette situation oblique demeureroit encore la même à l'égard de la Ligne *FA*, sans que la Lune eût aucune nutation, si le Point *E* faisoit sa Revolution autour du Point *A* dans un Cercle parfait, & avec une vitesse constante: c'est donc l'inégalité des distances *AE*, & des vitesses du Point *E*, qui fait que l'obliquité de la situation *fcbd* varie; & c'est cette variation qui fait la nutation de la Lune en Longitude.



VII.

Venons maintenant à la Terre, & examinons quel mouvement elle doit avoir autour du Centre de Gravité, qui est entre elle & la Lune: cette recherche est nécessaire pour notre Question, & elle ne sera plus difficile, après ce que nous avons dit de la Lune dans cette vûë. Nous remarquerons donc, que si la Terre est parfaitement homogene, soit dans toute son étendue, soit seulement dans chacune de ses Couches concentriques; & si elle est en même tems parfaitement sphérique, elle doit conserver parfaitement un Parallélisme dans la situation de ses parties, pendant sa Révolution. Cependant cette parfaite Homogénéïté, est moralement impossible; & la parfaite Sphéricité a été refutée par les Observations les plus exactes. Ce Parallélisme seroit donc alteré, de même qu'il l'est dans la Lune, & la Terre ne manqueroit pas de presenter

senter à la Lune une même face, sans le mouvement journalier de la Terre. Ce mouvement empêche l'action de la Lune; & l'effet de cette action étant, à cause dudit mouvement journalier, tantôt d'un côté de la Terre, tantôt de l'autre, il ne pourroit plus produire qu'une legere nutation journaliere dans l'Axe de la Terre, & quelque petite inégalité dans le mouvement journalier de la Terre. Mais l'une & l'autre doivent être tout-à-fait insensibles, à cause de la grandeur de la Masse de la Terre, de l'extrême petitesse de l'action de la Lune, & de la rapidité du mouvement journalier.

VIII.

On voit donc que la Terre fera sa revolution autour du Centre de Gravité, qui lui est commun avec la Lune, de telle maniere que son Axe gardera constamment une situation parallele. Si nous considérons donc le mouvement journalier de la Terre à part, il est clair que l'autre mouvement doit être supposé se faire d'une maniere à garder un Parallélisme dans toutes les Sections de la Terre. Cela étant, il s'ensuit que chaque point de la Terre fait, à l'égard de cet autre mouvement, une même Ellipse; que chaque partie a une même force centrifuge, & que les Directions des forces centrifuges sont par-tout paralleles entre elles. Et c'est ici le point principal, que je me suis proposé d'établir, & de bien démontrer dans ce Chapitre.

IX.

Ce que nous venons de démontrer du mouvement de la Terre à l'égard de la Lune, doit aussi s'entendre à l'égard du Soleil; en sorte que la force centrifuge des parties de la Terre, par rapport à son Orbite annuelle, doit être censée la même, & leurs directions paralleles entre elles. Mais cette Proposition n'est pas si essentielle à l'égard de l'Orbite annuelle, comme à l'égard de l'Orbite, qui se fait autour du Centre de Gravité, qui est commun à la Terre & à la Lune, à cause de l'extrême petitesse de cette derniere Orbite.

CHAPITRE IV.

Qui expose en gros la Cause des Marées.

I.

APrès avoir expliqué au premier Chapitre trois différentes raisons, qui peuvent allonger la Terre autour des deux Axes, qui passent par les Centres des deux Luminaires, il n'est pas difficile de voir comment on doit déduire de ces allongemens le Flux & Reflux de la Mer, pourvû qu'on ait égard en même tems au mouvement journalier de la Terre. Il est clair que ce mouvement journalier doit faire continuellement changer de place les deux Axes d'Allongement. Mais il faut remarquer ici par avance, que l'action composée des deux Luminaires, peut toujours être considerée comme une action simple, quoi-qu'à la vérité fort irréguliere. Cependant cette considération suffit, pour voir en gros, que la Mer doit en chaque endroit s'élever & se baisser environ deux fois dans un jour. Mais il s'agit de mettre cette cause en tout son jour, d'en développer tous les effets, & de les reduire à leur juste mesure, autant que les circonstances peuvent le permettre.

I I.

La Question qui se présente d'abord, & qui est en même tems la plus importante pour notre sujet, est de trouver la quantité de l'allongement causé par chacun des deux Luminaires. Nous ne considérerons donc qu'un seul Luminaire. Voici, avant toutes choses, les suppositions dont je me servirai dans les Calculs, & que j'ai déja exposées en partie.

I. Nous supposerons que la Terre est naturellement sphérique. Cette hypothese n'est que pour abréger le Calcul, & on voit bien que l'effet des deux Luminaires doit être sensiblement le même sur une Terre ronde, ou un peu applatie, ou un peu allongée.

I I. Que les Couches concentriques de la Terre sont d'une même matiere, ou d'une même densité. Cette supposition est sans doute fort naturelle ; car les inégalités ne peuvent qu'être tout-à-fait insensibles: mais il me semble qu'il n'y a aucune vraisemblance de supposer que la Terre est homogene dans toute son étendue, comme M. Newton l'a fait.

I I I. Que la Terre, que nous supposons sans l'action des Luminaires, ronde, est changée par l'action de l'un des deux Luminaires en Ellipsoïde, dont l'Axe passe par le Centre du Luminaire agissant. C'est l'hypothese de M. Newton; & quoi qu'on ne puisse pas le démontrer pour le Systême des Attractions, elle ne doit pas nous arrêter: car quelle que soit la Figure de la Terre après ce petit changement, on voit assez qu'elle ne sçauroit s'éloigner sensiblement de l'Ellipsoïde. Aussi trouvons-nous cette Figure elliptique dans toutes les hypotheses, qu'on pourroit se former sur la pésanteur, susceptibles d'un Calcul & tant soit peu naturelles. D'ailleurs un petit changement dans cette Figure extérieure de la Terre, n'en sçauroit produire, qui soit sensible, entre l'Axe du Sphéroïde, & le Diametre qui lui est perpendiculaire.

I V. Nous supposerons, que les Luminaires ne sçauroient faire changer de figure toutes les Couches qui composent la Terre jusqu'au Centre. Car vraisemblablement la Terre est, dans sa plus grande partie, solide; & quand même elle seroit toute fluide, sa Masse seroit trop grande, pour être mise toute entiere en mouvement, & pour obéir assez vite à une action aussi petite. Ces reflexions m'ont engagé à considérer la Terre, comme un noyau sphérique, composé de Couches parfaitement sphériques & inaltérables par l'action des deux Luminaires, & inondé d'un Fluide homogene, tel que sont les eaux de la Mer; & à supposer, qu'il n'y a que ce Fluide inondant, qui reçoive des impressions des Luminaires, & que sa profondeur n'est pas sensible par rapport au rayon de la Terre. Cette hypothese est sans contredit la plus naturelle, lorsque la Terre n'est pas supposée homogene dans toute son étenduë, mais, si on la supposoit homogene, comme M. Newton l'a fait, contre toutes les apparences de vérité, notre hypothese n'entre plus en ligne de compte.

V. Enfin nous substituerons à la place des Forces centrifuges, qui empêchent la Terre de tomber vers les Luminaires, un autre force qui agisse de la même façon, afin que nous puissions considérer d'abord la Terre, comme dans un parfait repos, & un entier équilibre dans toutes ses parties. Cette force à substituer, doit être supposée égale dans toutes les parties de la Terre (§. *VIII. Chap. III.*) & parallele à la Ligne qui passe par les Centres de la Terre & du Luminaire, dont il sera question.

I I I.

La Force centrifuge dont nous venons de parler, doit être prise pour notre sujet, précisément telle, qu'elle soit égale à la force totale de l'Attraction du Luminaire, tout comme si la Terre se soutenoit dans sa distance, en décrivant un Cercle parfait; & cela est vrai, quelle que soit la Force centrifuge réelle de la Terre. C'est ici une Proposition, dont on ne sent la vérité, qu'après quelque réflexion; & elle est fondée sur ce que la différence entre la Force centrifuge, telle que nous venons de la la décrire, & la force centrifuge réelle, n'est employée qu'à pousser ou repousser la Terre, & ne sçauroit lui faire changer sa figure, puisque nous avons démontré au VIII. Art. du précedent Chapitre, que chaque partie est poussée également & parallelement.

I V.

La Force centrifuge totale devant être parfaitement égale à la Gravitation totale de la Terre vers le Luminaire, & la premiere Force étant la même dans toutes les Parties, on voit bien qu'on pourroit supposer la Force centrifuge égale à la Gravitation vers le Luminaire, telle qu'elle est au Centre de la Terre. Car la Gravitation qui répond au Centre, peut être censée la moyenne entre toutes les Gravitations du Globe; & cela, quelque relation qu'on suppose entre les Distances & les Gravitations, puisque la différence des distances est insensible, par rapport à la Distance totale; & que par conséquent la Gravitation diminue comme également pour des égales augmentations de Distances, & qu'il se fera ainsi une juste compensation pour l'Hemisphere tourné au Luminaire, & pour l'Hemisphere opposé. Cette Proposition n'est pourtant pas géometriquement vraie; mais la fin du Calcul m'a fait voir, qu'elle peut être censée vraie pour notre sujet: & comme elle abrége fort le Calcul, je l'ai mise ici, pour en faire usage dans la suite.

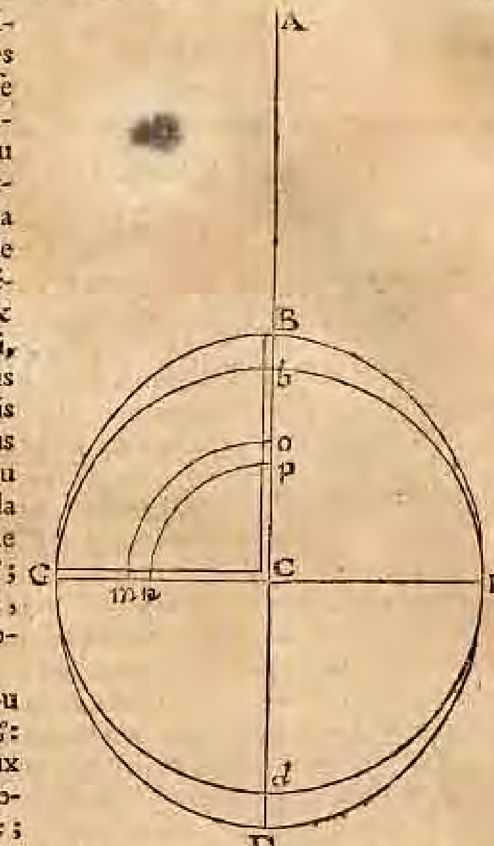
PROBLEME.

V.

Soit A le Centre du Soleil, $BGDH$ la Terre; AD une Ligne tirée par les Centres du Soleil & de la Terre: trouver la différence entre BD & la perpendiculaire GH, qui passe par le Centre C.

SOLUTION.

Qu'on s'imagine deux Canaux BC & GC, communiquans entre eux au Centre C, rempli d'un Fluide de différentes Densités, telles qu'on suppose dans les couches de la Terre. Pour déterminer ces couches, nous considererons la Sphere inscrite $GbHd$, & nous supposerons tout ce noyau immuable pendant la revolution journaliere de la Terre, fondés, à cet égard, sur ce que nous avons dit dans la quatriéme hypothese du II. §. Quand même on feroit attention aux changemens de figure dans les couches près de $GbHd$, cette considération ne sçauroit changer sensiblement le resultat du Calcul, parce que ces changemens de figure



sont tout-à-fait insensibles, & que, selon toutes les apparences, ils ne sçauroient se faire au-delà d'une certaine profondeur assez petite à l'égard du rayon de la Terre. Après cette remarque, nous déduirons la Solution de notre Problême, de ce que le Fluide doit être en équilibre dans les Canaux GC & BC. Pour satisfaire à cette loi, & pour observer un ordre, nous diviserons la Solution en trois parties: dans la premiere, nous chercherons la pression totale du Fluide BC au Point C: dans la seconde, nous ferons la même chose à l'égard du Fluide GC; & enfin nous ferons le Calcul, en faisant les deux pressions totales égales entre elles.

I. Soit $AC = a$; GC, ou $bC = b$; la cherchée $Bb = \beta$: Qu'on tire du Centre C deux quarts de Cercles infiniment proches pn, om; soit Cp ou $Cn = x$; po ou $nm = dx$; la Densité variable en po ou $nm = m$, la Densité uniforme de l'eau (qui couvre le noyau sphérique, & qui forme le double Ménisque) $= \mu$. Soit la Gravitation au Centre C vers le Centre du Soleil $A = g$, & la force centrifuge, qui agit parallelement à BD, sera par-tout $= g$ (§ *VIII. Chap. III.* & §. *IV. Chap. IV.*) qu'on nomme G la Force accéleratrice en G ou b, causée par l'action du Globe $GbHd$, & Q la même force accéleratrice pour les Points p & n. Après toutes ces préparations, on voit que la goute po (dont la Masse doit être exprimée par la Densité m, & par la hauteur dx, c'est-à-dire mdx) est animée par plusieurs Forces accéleratrices: la *premiere* Force accéleratrice est celle qui resulte de l'action du Globe $GbHd$, que nous avons nommé Q: la *seconde* est la Force centrifuge de A vers C, provenant par la revolution de la Terre autour du Point A: nous avons démontré, que cette Force doit être faite $= g$: la *troisiéme* se fait vers A, & provient de la Gravitation vers le Soleil: celle-ci est négative à l'égard du Point C, &

& doit être faite $= -\frac{aa}{(a-x)^2} \times g$: enfin la *quatriéme* provient de l'action du double Ménisque, compris entre $GBHD$ & $GbHd$, & elle est encore négative à l'égard du Point C; elle est $= -\frac{8}{15} n\mu\beta \times \frac{x}{b}$, en vertu des §. §. X. & XI. Chap. II. En multipliant toutes ces pressions accéleratrices de la goute po par sa Masse, on obtient la pression absolue qu'elle exerce sur le Point C; & cette pression absolue sera $\left(Q + g - \frac{aag}{(a-x)^2} - \frac{8n\mu\beta x}{15b}\right) \times m\,dx$.

On remarquera ici en passant, que comme a est censé infiniment plus grand que x, on peut poser $\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 = 1 + \frac{a}{2x}$, & ainsi cette pression devient

$$\left(Q - \frac{2xg}{a} - \frac{8n\mu\beta x}{15b}\right) \times m\,dx.$$

dont l'Intégrale donnera la pression de la Colonne pC; sçavoir;

$$\int Qm\,dx - \int \frac{2gm\,dx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta mx\,dx}{15b},$$

après quoi on aura la pression de toute la Colonne bC, en substituant dans l'Intégrale b à la place de x. A cette pression, il faut encore ajoûter celle de la petite Colonne Bb, dont la gravitation ou pésanteur vers C doit être censée uniforme dans toute sa hauteur, & égale à G: il faut aussi remarquer, que toutes les autres forces qui agissent sur cette petite Colonne Bb peuvent être négligées, comme infiniment inférieures à l'action G, qui exprime proprement la pésanteur près la surface de la Terre vers son centre; ainsi donc la pression de la petite Colonne Bb doit être simplement estimée par sa hauteur β, sa densité μ & sa pésanteur G, ce qui fait $\mu\beta G$. Il resulte enfin de tout cela, que la pression totale de toute la Colonne BC sur le Point C est

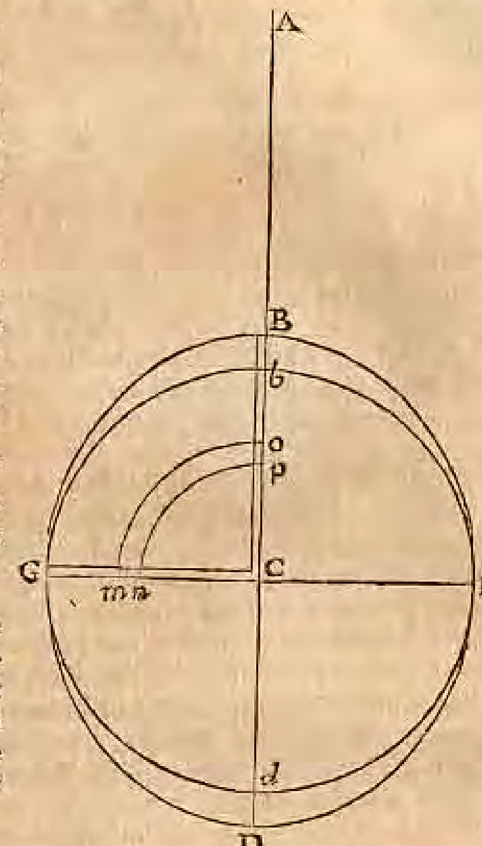
$$\mu\beta G + \int Qm\,dx - \int \frac{2gmx\,dx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta mx\,dx}{15b},$$

en prenant après l'intégration $x = b$.

II. Pour trouver à présent la pression de la Colonne GC, il faut chercher toutes les Forces qui animent la goute mn, dont la Masse est encore $m\,dx$. La *premiere* de ces Forces provient de l'Attraction du Globe $GbHd$, & est encore $= Q$, puisque cette Force est la même en n & en p: la *seconde* Force, provenant de la Force centrifuge des parties de la Terre, entant qu'elle se tourne autour du Point A, est $= 0$, cette Force étant par-tout perpendiculaire à GC (§. *VIII. Chap. III.*) La *troisiéme* Force provient de la Gravitation des Parties de la Terre vers A, cette Gravitation est au Point n vers le Point $A = \frac{aag}{aa+xx}$, & étant

étant décomposée, la Gravitation resultante vers C doit être exprimée par $\frac{aagx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$: dans cette derniere expression on peut rejetter au Dénominateur le terme xx, comme le Calcul me l'a fait voir; ainsi il provient $\frac{gx}{a}$, qui marque la troisiéme force vers C resultante de la Gravitation vers A. La *quatriéme* Force accéleratrice, qui anime la goute mn à descendre vers le centre, provient de l'action du double Ménisque, qui en vertu du XII. §. Ch. II. est $= \frac{4}{15} n\mu\beta \times \frac{x}{b}$. En prenant la somme de toutes ces Forces accéleratrices, la Force totale sera $Q + \frac{gx}{a} + \frac{4n\mu\beta x}{15b}$; cette Force accéleratrice totale doit être multipliée par la petite Masse $m\,dx$; & du produit il faut prendre l'Intégrale, qui marquera la pression qu'exerce la Colonne mC sur le centre C: Cette pression est donc

$$\int Qm\,dx + \int \frac{gmx\,dx}{a} + \int \frac{4n\mu\beta mx\,dx}{15b};$$



& pour avoir la pression, qui réponde à toute la Colonne GC, il faut encore après l'intégration faire $x = b$.

III. Après avoir exprimé analytiquement les valeurs des pressions des Colonnes BC & GC, il ne reste plus pour achever la Solution de notre Problême, qu'à faire une équation entre les deux dites valeurs trouvées dans la premiere & seconde partie. On aura donc

$$\mu G\beta + \int Qm\,dx - \int \frac{2gmx\,dx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta mx\,dx}{15b} = \int Qm\,dx + \int \frac{gmx\,dx}{a} + \int \frac{4n\mu\beta mx\,dx}{15b},$$

& cette équation arrangée donne

$$5\mu Gab\beta - \int 4n\mu a\beta mx\,dx = \int 15gbmx\,dx;$$

& de là on tire la valeur cherchée de β, qui est constante; savoir,

$$\beta = \frac{\int 15gbmx\,dx}{5\mu Gab - \int 4n\mu amx\,dx}. \text{ C. Q. F. T.}$$

CORO-

COROLLAIRE.

VI.

On voit par notre Solution, que généralement Bb doit être égale à Dd; car la valeur de ϵ est la même, soit que l'on prenne x affirmativement, soit négativement. Aussi auroit-il été ridicule de supposer la Courbe $BGDH$ une Ellipse, si les deux parties GBH & GDH n'étoient pas devenues par le Calcul également allongées, & la supposition auroit renfermé une contradiction.

Au reste ces deux petites Lignes ne seroient pas égales à la rigueur. Cette égalité n'est fondée que sur ce que nous avons rejetté plusieurs fois dans notre Solution de certaines petites quantités; mais qu'on pouvoit négliger réellement, comme tout-à-fait insensibles, non-seulement par rapport à la Ligne BC, mais même par rapport à la petite Ligne Bb, qui ne sçauroit être que d'un petit nombre de pieds. Cependant je crois encore nécessaire d'avertir ici, qu'il faut être sur ses gardes, en rejettant dans le Calcul de certains termes; car, comme dans l'équation resultante, plusieurs termes se détruisent, & qu'il n'en reste que des termes d'une fort petite valeur, on ne doit rejetter que des quantités qui sont insensibles, même par rapport aux quantités restantes dans l'équation.

Ce n'est qu'avec une telle précaution, que j'ai négligé dans ma Solution plusieurs termes, & je ne les aurois point négligées, si la fin du Calcul ne m'avoit enseigné, qu'ils peuvent & doivent être négligés.

SCHOLIE.

VII.

Pour avoir une juste idée de notre équation, remarquons que μ signifie la densité de l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, & m la densité quelconque de la couche, dont la distance au centre est égale à x: n exprime la circonference du Cercle, dont le rayon est égal à l'unité: b est le rayon de la Terre: a la distance entre les centres du Soleil & de la Terre: g exprime la force accéleratrice vers le Soleil, d'un Corps placé au centre de la Terre; & enfin G exprime la force accéleratrice, ou la pésanteur des Corps à la surface de la Terre vers son centre.

Or, pour voir que tous les termes de notre équation sont homogenes & comparables entre eux, & en même tems de quelle maniere il faut faire usage de notre équation, il faut remarquer qu'en vertu du III. §. Chap. II. G doit être exprimée par la Masse de toute la Terre, divisée par le quarré de son rayon; c'est-à-dire, qu'il faut suppo-

ser $G = \frac{\int 2nmxxdx}{bb}$, & comme on connoît pour le Soleil le rapport entre g & G, aussi-bien que celui d'entre a & b, on voit qu'on peut enfin exprimer ϵ simplement par b: mais il faut pour cet effet intégrer auparavant les quantités $mxxdx$ & $mxdx$: c'est ce que nous allons faire dans quelques hypotheses particulieres.

VIII.

Soit d'abord la densité de la Terre uniforme, & nommément celle de l'eau de la Mer: c'est ici l'hypothese de M. Newton.

En ce cas m est une constante & égale à μ, & ainsi notre équation finale du V. §. est $\epsilon = \frac{15gbb}{2a(5G - 2n\mu b)}$;

Mais par le VII. §. on obtient $G = \frac{2}{3}n\mu b$, ou bien $2n\mu b = 3G$, & substituant cette valeur pour le second terme du Dénominateur, il provient $\epsilon = \frac{15gb}{4Ga} \times b$.

Nous verrons dans la suite, que cette expression analytique donne précisément la hauteur indiquée par M. Newton (†) simplement en pieds, pouces & lignes, sans en donner le Calcul, ou du moins sans le mettre à la portée, je ne dirai pas de tout le monde, mais uniquement de ceux qui voudroient bien prendre la peine nécessaire pour l'approfondir. Notre Methode comprend donc le cas tout particulier de M. Newton. Mais ce cas donne une si petite quantité, qu'il ne me paroît pas possible d'en

(†) C'est dans le Corollaire de la Prop. XXXVI. du Liv. III.; M. Newton dit que la hauteur de l'eau de la Mer sous le Soleil ou au point opposé au Soleil, surpasse la hauteur de l'eau de la Mer à 90d de ces points de 1pie. $11\frac{1}{8}$ pouc., & c'est à peu près à cela que revient l'expression $\frac{15gb}{4Ga}b$, car (par Cor. 1. Prop. 8. de ce Livre) la gravité à la surface du Soleil est à la gravité à la surface de la Terre comme 10000 à 435. Le Demi-Diamétre du Soleil étant vû de la Terre sous l'Angle de 16′. 4″ ce Diametre est à sa distance du centre de la Terre comme 1 à 214, ainsi la gravité de la Terre sur le Soleil (qui est g) est à la gravité à la surface de la Terre (qui est G) comme $\frac{10000}{214^2}$ à 435; D'où l'on trouve le Log. de $\frac{g}{G} = -4.7002107$. Le Diametre du Soleil étant à celui de la Terre comme 10000 à 109; on aura que le Rayon de la Terre $= b$ est à la distance du Soleil $= a$ comme 1 à $214 \times \frac{10000}{109}$, ainsi le Log. de $\frac{b}{a} = -5.7070265$, & L. $\frac{gb}{Ga} = -8.4072372$. Enfin, reduisant le Rayon de la Terre b en pouces à raison de $1145\frac{1}{2}$ lieuës de 2855 Toises chacune pour le Rayon, son Log. est 8.3718709. Ainsi le Log. de $\frac{gb}{Ga}b = 0.7791081$ dont le nombre est 6.014 dont les $\frac{15}{4}$ sont $22\frac{1}{2}$ pouces, à peu près comme M. Newton a trouvé.

d'en déduire les Phénomenes des Marées, tels que les observations les donnent. C'est ce que je ferai voir plus au long dans la suite. Je n'ai donc jamais pû comprendre, comment M. Newton, & tous ceux de sa Nation, qui ont écrit sur cette matiere, ont pû s'y attacher. On voit par là, combien il est essentiel d'étendre les hypotheses des densités des couches de la Terre. J'ai remarqué que la loi de ces densités contribue beaucoup au haussement & baissement des eaux dans les Marées; qu'on en peut déduire tel effet, qu'on trouvera nécessaire pour l'explication des Phénomenes indiqués par l'expérience; je ferai même voir que cet effet pourroit être infini dans de certaines hypotheses. Mais ce que je souhaite sur-tout que l'on remarque, c'est que les mêmes hypotheses qui donnent plus d'effet aux Luminaires, pour hausser & baisser les eaux dans les Marées, sont d'ailleurs extrêmement vrai-semblables par plusieurs raisons Physiques, toutes très-fortes. Mais venons à d'autres exemples.

I X.

Supposons la Terre creuse en dedans, jusqu'à une distance donnée c depuis le centre, & que la croute (dont l'épaisseur sera $= b - c$, soit encore par-tout d'une densité égale à celle de l'eau de la Mer.

Nous avons en ce cas encore m égale à la constante μ, & ainsi le Calcul se fera comme dans le précedent Article, avec cette restriction, que les intégrales des quantités $mxxdx$, & $mxdx$ doivent être $= o$, lorsque $x = c$: de cette maniere on obtient $\int mxdx = \frac{1}{2}\mu xx - \frac{1}{2}\mu cc$, ou (en faisant $x = b$) $= \frac{1}{2}\mu bb - \frac{1}{2}\mu cc$; substituant cette valeur dans l'équation finale du V §. il vient

$$\epsilon = \frac{15gb(bb-cc)}{10Gab - 4n\mu a(bb-cc)};$$

& (*par le VII.* §.) G est $= \frac{\int 2nmxxdx}{bb} = \frac{2n\mu}{3bb} \times (x^3 - c^3) =$ (puisqu'il faut poser $x = b$) $\frac{2n\mu}{3bb} \times (b^3 - c^3)$: de cette derniere équation, on peut tirer celle-ci $\mu = \frac{3bbG}{2n \times (b^3 - c^3)}$, & enfin $4n\mu a(bb-cc) = \frac{6abbG(bb-cc)}{b^3 - c^3}$ & substituant cette valeur dans le second terme du Dénominateur de notre équation, on a $\epsilon = \frac{15g}{2G} \times \frac{b+x}{a} \times \frac{b^3 - c^3}{2bb + 2bc + 5cc}$.

Cette quantité est la même, que celle du précedent Article, lorsque $c = o$; mais elle devient plus petite, à mesure qu'on suppose la Terre plus creusée, & elle deviendroit tout-à-fait nulle, si on supposoit la Terre presque entierement creuse en forme d'une voute sphérique, dont l'épaisseur fût peu considérable, par rapport au rayon de la Terre. Cette remarque suffit seule, pour refuter le sentiment de ceux qui croyent que la Terre pourroit bien n'être qu'une croute voutée; car il ne pourroit

roit y avoir en ce cas aucun Flux & Reflux de la Mer, au moins dans notre Systême.

X.

Si l'on supposoit la loi des densités des couches de la Terre exprimée par cette équation $m = \frac{x}{b}\mu$, c'est-à-dire, que les densités fussent proportionnelles aux distances des couches au centre, on trouveroit la hauteur

$$\epsilon = \frac{15gb}{7Ga} \times b,$$

& par conséquent beaucoup plus petite, que si la Terre étoit par-tout d'une même densité, sçavoir en raison de 7. à 4. Aussi cette hypothese n'est-elle aucunement vraisemblable, y ayant apparence que les couches plus denses sont plus bas que les couches plus legeres.

X I.

Si la loi des densités est exprimée par $m = \frac{b\mu}{x}$, c'est-à-dire, si l'on suppose les densités, suivre la raison inverse des distances des couches au centre, on trouveroit

$$\epsilon = \frac{15gb}{Ga} \times b,$$

ce qui fait la valeur de ϵ quatre fois plus grande, que dans la supposition de M. Newton, de la parfaite homogeneité de la Terre.

X I I.

Supposons enfin la loi des densités exprimée par $m = \left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{4}{3}}\mu$, il faudra mettre $\frac{3}{2}\mu bb$ pour $\int mxdx$, & l'équation du VI. §. divisée par μ sera

$$\epsilon = \frac{45gb}{10Ga - 12n\mu ab} \times b:$$

mais en vertu du VII. §. on a $G = \int \frac{2nmxxdx}{bb} = \int \frac{2n\mu x^{\frac{2}{3}}dx}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{6n\mu x^{\frac{5}{3}}}{5b^{\frac{2}{3}}}$ = (en faisant $x = b$) $\frac{6}{5}n\mu b$. D'où l'on voit que le Dénominateur de notre équation fondamentale devient $= o$, & par conséquent $\epsilon = \infty$. Ainsi l'élevation des eaux feroit infinie.

X I I I.

J'ai mis cette derniere hypothese, non qu'elle soit possible, puisque la densité ne sçauroit être infinie, comme elle devroit être au centre; mais pour faire voir l'avantage & la supériorité de notre Théorie, puisqu'elle ne met point de bornes à l'élevation des eaux: si les Marées étoient cent ou mille fois plus grandes qu'on ne les observe, nous pourrions

rions lui assigner une cause suffisante. Ayant au reste bien examiné tous les Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, je suis entierement convaincu, que la force assignée par M. Newton ne sçauroit suffire pour les produire: il faut donc dire dans le systême même de ce Philosophe, que les densités de la Terre ne sont pas uniformes, mais qu'elles croissent vers le centre. Cette hypothese n'est-elle pas fort probable d'ailleurs d'elle-même? L'eau est-elle le seul Fluide que nous connoissions? & ne faut-il pas que les Fluides plus pésants, soient plus proches du centre de la Terre? le Mercure est près de quatorze fois plus pésant que l'eau: la grande compression que souffrent les parties proches du centre de la Terre, ne pourroit-elle pas contribuer à rendre la matiere plus compacte & plus dense?

Si nous considérons outre cela, combien les Planetes & la Terre, qui nagent sans doute dans un milieu resistant, quoique extrêmement subtil, conservent leur mouvement, sans en perdre la moindre partie considérable pendant une longue suite de siécles, nous pourrions facilement croire, que tous ces Corps ont beaucoup plus de matiere, que M. Newton ne marque. Enfin de quel côté que j'envisage cette Question, tout me fait croire, que les couches de la Terre augmentent de densité vers le centre.

X I V.

Si, tout le Noyau ou tout le Globe de la Terre restant, l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, changeoit de densité, la quantité ϵ suivroit la raison reciproque des densités des eaux de la Mer. Il suit de là que si la Terre étoit inondée de Mercure, les Marées seroient quatorze fois plus petites, qu'elles ne sont actuellement. Et si au contraire l'air étoit un Fluide homogene pesant, mais sans élasticité, sa hauteur seroit environ de 850 ϵ plus grande à ceux qui ont le Soleil au Zenith, qu'à ceux qui l'auroient à l'Horison. Cela feroit 1700 pieds de différence dans la hauteur de l'Atmosphere, à ne donner que deux pieds de valeur à ϵ; & cette différence en produiroit une sur le Barometre de plus de 20 lignes. D'où vient donc, demandera-t-on, qu'on n'observe point à cet égard aucune variation dans le Barometre? C'est l'élasticité de l'air qui en est la cause: cette élasticité fait que la hauteur du Barometre doit être constamment la même dans toute la surface de la Mer, en faisant abstraction seulement des causes accidentelles & passageres, qui peuvent survenir tout d'un coup, & qui n'agissent sur l'air, que parce que celui-ci ne sçauroit obéir assez promptement, ni se mettre dans un instant dans son état naturel d'équilibre. On remarquera ici qu'il est faux, que la pression du Mercure soit égale à la pression, ou plûtôt au poids de la Colonne d'air verticale couchée dessus, ce que l'on affirme ordinairement: mais

mais la pression du Mercure est égale au poids moyen de toutes les Colonnes d'air verticales, qui environnent la Terre, c'est-à-dire, égale au poids de tout l'Atmosphere (dont la hauteur est considérée comme infiniment petite, par rapport au rayon de la Terre) multiplié par la raison de la base de la Colonne du Mercure à toute la surface de la Terre. Cette Proposition fait voir que la hauteur moyenne du Barometre doit être la même sous l'Equateur & sous le Cercle Polaire, quoique le poids absolu de la Colonne d'air verticale sous l'Equateur pendant les plus grandes chaleurs ne soit pas la moitié si grand que celui d'une pareille Colonne d'air sous le Cercle Polaire en Hyver. On voit de tout ce que nous venons de dire, pourquoi, ni le Soleil, ni la Lune ne changent pas sensiblement la hauteur du Barometre, quoi qu'ils élevent les eaux considérablement. La véritable raison n'en est que l'élasticité de l'air, qui doit faire presser également tous les endroits de la surface de la Terre; & cette seule reflexion démontre entierement l'insuffisance des inégales compressions de la matiere des Tourbillons, pour expliquer les Marées, comme nous avons déja remarqué au III. §. Chap. I.

X V.

Tous les cas particuliers, que nous venons d'examiner, font voir, & il n'est pas difficile de le démontrer généralement par l'équation du V. §. que la quantité ϵ (qui exprime la différence entre la plus grande hauteur de la Mer, & la plus petite, entant qu'elle est produite par la seule action du Soleil) est toujours $= \frac{ngb}{Ga} \times b$: le cofficient n dépend des différentes densités des couches de la Terre, le rapport $\frac{b}{a}$ est connu par les Observations astronomiques: il ne reste donc qu'à voir comment on pourra déterminer la quantité $\frac{g}{G}$: c'est en comparant les effets que les Forces g & G produisent; la premiere, en retenant la Terre dans son Orbite annuelle; la seconde, en retenant la Lune dans celle qu'elle fait autour de la Terre. Si la distance moyenne de la Lune au centre de la Terre est nommée α, la Force centrifuge de la Lune sera $= \frac{bb}{\alpha\alpha} G$, & la force centrifuge de la Terre est $= g$: or la Force centrifuge moyenne de la Terre dans son Orbite, est à la force centrifuge moyenne de la Lune autour de la Terre, ou plutôt autour du centre de Gravité du systême de la Terre & de la Lune, comme la distance du Soleil divisée par le Quarré du tems périodique de la Terre autour du Soleil, est à la distance de la Lune au centre de Gravité commun de la Terre & de la Lune, [M. Newton suppose cette distance $= \frac{39}{40}\alpha$, voyez ses *Princ. Math. Phil. nat. Edit.* 2. *pag.* 430.; il fonde cette supposition sur quelques Phénomenes des Marées,

rées, mais mal choisis à mon avis; elle eſt donc encore fort douteuſe; mais comme elle n'eſt pas de conſéquence pour notre ſujet, je ne laiſſerai pas de l'adopter ici] diviſée par le quarré du tems périodique de la Lune: on a donc, en nommant le tems périodique de la Terre T, & celui de la Lune t, cette Analogie $g : \frac{bb}{\alpha\alpha} G :: \frac{a}{TT} : \frac{39\,\alpha}{40\,tt}$;

ce qui donne $\frac{g}{G} = \frac{40\,abbtt}{39\,\alpha^3 TT}$, & par conſequent

$$\beta = \frac{ngb}{Ga} \times b = \frac{40\,nb^3tt}{39\,\alpha^3 TT} \times b.$$

REMARQUE.

Pour voir que cette Formule s'accorde avec celle de M. Newton pour la ſuppoſition de l'homogenéité de la Terre, nous remarquerons, qu'en ce cas on a $n = \frac{15}{4}$ (§. *VIII.*) & M. Newton ſuppoſe $\frac{b}{\alpha} = \frac{1}{60\frac{1}{4}}$ (*Princip. Mat. Phil. nat. Edit. 2. pag. 430.*) $\frac{tt}{TT} = \frac{1000}{178725}$ (*Princip. Math. pag. 395.*) & enfin $b = 19695539$ pieds après la meſure de M. Caſſini. De tout cela il reſulte

$$\beta = \frac{40.\ 15.\ 1.\ 1000.\ 19695539}{39.\ 4.\ (60\frac{1}{4})^3.\ 178725.} \text{ pieds},$$

cela fait $\beta = 1$ pied 11. pouces & un quart. M. Newton trouve 1 pied 11 pouces & un huitieme. (*Princ. Math. pag. 429.*) La différence me paroît trop petite, pour en rechercher l'origine.

XVI.

Tout ce que nous venons de dire par rapport à l'action du Soleil, doit être entendu auſſi de la Lune, ſans y rien changer; de ſorte que les équations fondamentales des §. §. V. & VII. ſervent également pour la Lune, en entendant par α la diſtance entre les centres de la Terre & de la Lune, & par g la péſanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune. Et comme nous avons dit au XV. §. que quelque hypotheſe qu'on prenne pour exprimer les différentes denſités dans les couches de la Terre, on trouvera toujours

$$\beta = \frac{ngb}{G\alpha} \times b,$$

nous dirons par rapport à la Lune, qu'on trouvera toujours

$$\delta = \frac{n\gamma b}{G\alpha} \times b;$$

prenant

prenant pour δ la différence des hauteurs des eaux à ceux qui ont la Lune au Zenith, & à l'Horiſon, pour α la diſtance entre les centres de la Lune & de la Terre, & pour γ la péſanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune.

XVII.

Ce qui m'a engagé à ne parler d'abord que de l'action du Soleil ſur la Mer, eſt qu'on connoît parfaitement bien la valeur de g pour le Soleil, comme nous avons vû au XV. §. au lieu que la Lune, qui n'a point de Satellites, ne ſçauroit donner immédiatement la Force accéleratrice qu'elle cauſe au centre de la Terre, & que nous avons nommé γ. Je trouve par ma nouvelle Théorie de la Lune, dont j'ai déja fait mention ci-deſſus, plus générale, plus exacte, & ſur-tout infiniment plus facile, que celle de M. Newton, qu'on peut déterminer lad. valeur γ avec toutes les autres qui en dépendent; ſçavoir la Maſſe de la Lune, comparée avec celle de la Terre, & leur commun centre de Gravité, moyennant quelques irrégularités dans les mouvemens de la Lune, pourvû qu'on puiſſe les obſerver aſſez exactement. M. Newton a tâché de déterminer la Force accéleratrice γ, en comparant les effets de la Lune ſur la Mer avec ceux du Soleil; cette Methode ſeroit fort bonne, ſi on ſçavoit bien ſéparer les effets des deux Luminaires. Il a prétendu le faire, en comparant les Marées bâtardes, qui ſuivent les Quadratures, avec les plus grandes Marées, qui ſuivent les Syzygies. Nous verrons ci-deſſous ce que l'on peut trouver à redire à cette Methode, & comment on pourra en ſubſtituer d'autres plus exactes.

XVIII.

Au reſte, il eſt clair que la Lune & le Soleil produiront leurs effets independamment l'une de l'autre: tout ce que le Soleil pourroit contribuer au moins dans la pure Théorie, pour troubler l'action de la Lune, eſt qu'il allonge un peu la Terre: mais il eſt auſſi bien évident, que la Lune changera également la ſurface de la Mer ſur une Terre parfaitement ronde ou allongée d'un petit nombre de pieds: nous avons déja dit la même choſe dans la premiere hypotheſe du ſecond Article.

Voici donc comment il faudroit déterminer la ſurface de la Mer, ſi les deux Luminaires pouvoient produire dans un inſtant tout leur effet, c'eſt-à-dire, ſi l'eau n'avoit point d'inertie, & qu'elle pût prendre incontinent ſa juſte figure; car c'eſt de cette inertie, qu'il faudra tirer dans la ſuite pluſieurs inégalités, & autres Phénomenes, qu'on a obſervés dans les Marées.

Soit

Soit $bgdh$ le Globe de la Terre parfaitement ſpherique, & conſidérons d'abord le Soleil, que nous ſuppoſerons placé dans la Ligne prolongé bd paſſant par le centre de la Terre C: notre Globe ſe changera en Sphéroïde, tel que $BGDH$, les eaux baiſſant autour de gh, & montant autour de b & d. Soit enſuite la Lune dans la Ligne prolongée qp; il eſt clair qu'elle agira ſur le Sphéroïde de la même façon qu'elle feroit ſur le Globe parfait, duquel le Sphéroïde differe d'une quantité tout-à-fait inſenſible: ainſi donc la Lune fera monter

& baiſſer les eaux par deſſus la ſurface du Sphéroïde, tout autant qu'elle feroit à l'égard de la ſurface ſphérique, ſans l'action du Soleil. Il faut donc prendre nq, ou mp, à bB, ou dD en raiſon des Forces lunaire & ſolaire, c'eſt-à-dire, comme $\frac{\gamma}{\alpha}$ à $\frac{g}{a}$, tracer enſuite les courbes $qrps$, telles qu'en prenant un Angle quelconque uCq, égal à un Angle yCB, la perpendiculaire ux interceptée entre les ſurfaces des Sphéroïdes, ait à la perpendiculaire yz, interceptée entre le premier Sphéroïde & le Globe, la raiſon de nq à Bb. Voilà donc une Conſtruction géometrique générale, qui montre à chaque moment, & à chaque endroit, la hauteur de la Mer, & les variations de cette hauteur. Mais elle demande des Calculs longs & pénibles. Nous verrons dans la ſuite, comment on pourra s'y prendre, pour les faire, en commençant par les circonſtances & les hypotheſes les plus ſimples, & en ajoûtant des corrections & équations à faire pour chaque circonſtance changée.

X I X.

Voici donc les cas & les hypotheſes, par leſquelles nous commencerons. Nous ſuppoſerons d'abord, que la Lune fait des Cercles parfaits autour de la Terre, & pareillement la Terre autour du Soleil: que ces Orbites ſont dans le plan de l'Equateur de la Terre: que toute la Terre eſt inondée: que la ſurface de la Mer prend dans un inſtant ſa juſte Figure, tout comme ſi l'eau n'avoit point d'inertie; ni reſiſtances; & enfin qu'il ne faille déterminer les loix des Marées, que ſous l'Equateur. Mais avant de faire les

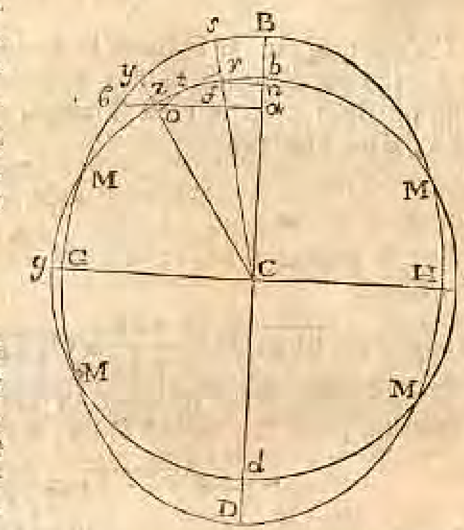
les Calculs, il ſera bon d'expoſer préliminairement quelques Lemmes géometriques.

CHAPITRE V.

Contenant quelques Propoſitions de Géometrie préliminaires pour l'Explication & le Calcul des Marées.

PROBLEME.

Soit, comme ci-devant, le Cercle $bgdh$ & l'Ellipſe preſque circulaire $BGDH$, & ſuppoſons la Sphere & le Sphéroïde, décrits par la rotation du Cercle & de l'Ellipſe autour de l'Axe BD, égaux; trouver le rapport entre les petites Lignes Bb & Gg.



SOLUTION.

Nous ſuppoſerons pour nous ſervir des mêmes expreſſions, que nous avons employées juſqu'ici, $Bb + Gg = \epsilon$; $Gg = x$, & $Bb = \epsilon - x$; Cb ou $Cg = b$; n la circonférence du Cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité. Ceci poſé, on ſçait que la Sphere ſera $= \frac{2}{3} n b^3$: on ſçait auſſi, qu'un Ellipſoïde (dont le grand Axe eſt $= 2A$, & le plus petit Diametre $= 2B$) eſt $= \frac{2}{3} n BBA$; cela donne notre Sphéroïde $= \frac{2}{3} n (b - x)^2 \times (b + \epsilon - x)$ $= \frac{2}{3} n (b^3 - 3bbx + bb\epsilon)$ ſi l'on néglige les infiniment petits du ſecond ordre. Faiſant à préſent par la condition du Problême la Sphere égale au Sphéroïde, on a $\frac{2}{3} nb^3 = \frac{2}{3} n (b^3 - 3bbx + bb\epsilon)$ c'eſt-à-dire, $x = \frac{1}{3}\epsilon$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

I.

Si $Gg = \frac{1}{3}\epsilon$, il faut que Bb ſoit $= \frac{2}{3}\epsilon$, & par conſéquent double de l'autre.

l'autre. Ainsi donc l'eau monte deux fois plus autour de la Ligne, qui passe par le centre de l'un des Luminaires, & celui de la Terre, qu'elle ne descend à la distance de 90 dégrés.

PROBLEME.

III.

Si l'on tire du centre C une droite quelconque Cy, trouver la petite Ligne yz, qui marque la hauteur verticale du Point y pris dans l'Ellipse, par dessus le Pont Z pris dans le Cercle.

SOLUTION.

Qu'on tire par le Point z la droite $\beta\alpha$ perpendiculaire à l'Axe: on voit qu'en conséquence de nos hypotheses, l'Angle βyz doit être pris pour un droit, & le petit Triangle βyz censé semblable au Triangle $C\alpha z$, d'où l'on tire

$$yz = \frac{\alpha z}{Cz} \times \beta z.$$

Soit à present $C\alpha = s$; $z\alpha = \sqrt{bb - ss}$; on aura par la nature de l'Ellipse

$$\alpha\beta = \frac{CG}{CB} \times \sqrt{B\alpha \times \alpha D} = \frac{b - \frac{1}{3}\beta}{b + \frac{2}{3}\beta} \times \sqrt{(b + \frac{2}{3}\beta - s) \times (b + \frac{2}{3}\beta + s)}.$$

Si on change cette quantité en suites, & qu'on rejette toujours les infiniment petits du second ordre, on trouvera enfin

$$\alpha\beta = \sqrt{bb - ss} + \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times \beta.$$

De là on tire $\alpha\beta - \alpha z = \beta z = \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times \beta$, & par consequent

$$yz = \frac{3ss - bb}{3bb} \times \beta. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE I.

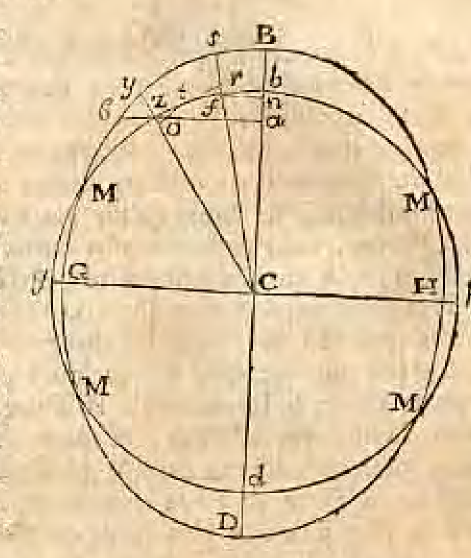
IV.

Pour trouver les Points M, où l'Ellipse coupe le Cercle, on n'a qu'à faire $yz = 0$, ce qui donne $s = b\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773b$, & l'Arc bM de $54^\circ. 44'$.

COROL-

COROLLAIRE II.

V.



Si la Terre tournoit autour d'un Axe perpendiculaire au plan de notre Figure, & que le Cercle $bgdb$ représentât ainsi l'Equateur de la Terre, dans lequel l'un des Luminaires est supposé se trouver: si par cette rotation de la Terre, le Point B est parvenu en y, le Luminaire restant dans l'Axe BD, l'Angle bCZ sera l'Angle horaire, dont le Cosinus est appellé s, le Sinus total b; & on voit que la différence des hauteurs de l'eau avant & après ladite rotation sera représentée par $Bb - yz$, c'est-à-dire par $\frac{2}{3}\beta + \frac{bb - 3ss}{3bb} \times \beta$, ou par $\frac{bb - ss}{bb} \times \beta$, ou enfin (en nommant le Sinus de l'Angle horaire σ) par $\frac{\sigma\sigma}{bb}\beta$. Nous concluerons de là, que les baissemens des eaux sont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute-Mer.

COROLLAIRE III.

VI.

Les variations qui répondent à de petits intervalles de tems égaux, sont pour chaque Point Z, proportionelles aux aires du Triangle $C\alpha z$. Car l'intervalle de tems doit être exprimé simplement par un petit Arc de Cercle, qui est $= \frac{-bds}{\sqrt{bb - ss}}$, en considerant s comme variable; & si nous faisons cette quantité égale à un petit élement de tems dt, nous aurons $\frac{-bds}{\sqrt{bb - ss}} = dt$ & $ds = \frac{-dt\sqrt{bb - ss}}{b}$. Or par le V §. tout le baissement des eaux étant $= \frac{bb - ss}{bb} \times \beta$, sa différentielle sera $= \frac{2\beta s\, dt\sqrt{bb - ss}}{b^3}$; & comme les quantités β, b & dt sont constantes, nous voyons, que les variations verticales des Marées, qui se font en de petits intervalles de tems égaux, sont proportionnelles aux quantités répondantes $s\sqrt{bb - ss}$, ou aux Aires des Triangles $C\alpha z$.

SCHO-

SCHOLIE.

VII.

On voit que ces proprietés tendent à déterminer les haussemens & baissemens d'une même Marée pour chaque moment, & nous verrons dans la suite, combien elles répondent aux Observations. Ces Propositions suffiroient pour ce dessein, si nous ne voulions considérer que ce qui arrive aux Conjonctions & Oppositions des deux Luminaires: mais comme cette restriction ne feroit qu'un cas très-particulier de toute la Théorie des Marées, nous passerons plus outre. Remarquons cependant encore une fois, que chaque Luminaire peut être consideré, comme agissant sur la Mer, indépendamment l'un de l'autre; puisque les petites variations causées par l'un des deux, ne changent pas sensiblement toute la figure de la Terre: une quantité de quelques pieds ne sçauroit être sensible par rapport à tout le Diametre de la Terre. Nous allons donc considérer les deux Luminaires à la fois, & dans une position en longitude quelconque, quoique toujours dans le plan de l'Equateur. Nous considérerons aussi sur la Terre un Point quelconque dans l'Equateur, pour voir combien la Mer doit être plus haute ou plus basse dans ce Point, qu'elle ne seroit sans l'action des Luminaires. C'est ici une Question des plus essentielles pour notre sujet. Souvenons-nous cependant, que β signifie la hauteur de toute la variation des eaux d'une Marée, entant qu'elle est produite par la seule action du Soleil, & δ la même chose pour la Lune.

PROBLEME.

VIII.

Soit $b\beta d\delta$, l'Equateur de la Terre parfaitement circulaire, tel qu'il seroit sans l'action des deux Luminaires: supposons le Soleil dans la Ligne prolongée db, & la Lune dans la Ligne prolongée $\delta\beta$; & soit un point Z donné de position: trouver la hauteur yz, qui marque l'élevation de la Mer pour ledit point Z produit par les deux Luminaires.

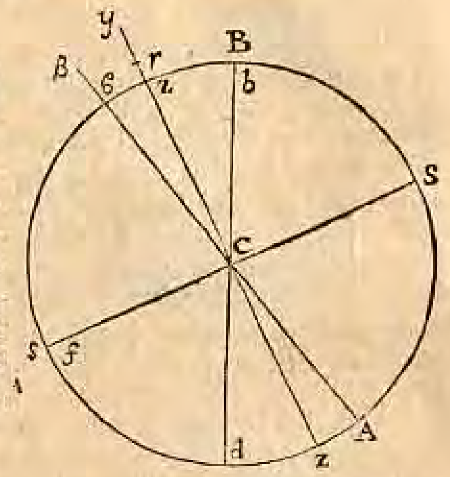
SOLUTION.

Supposons que le Soleil éleve les eaux en b de la hauteur Bb, & la Lune de la hauteur $B\beta$ au Point β. On aura par les précedentes Propositions $Bb = \frac{2}{3}\beta$, & $B\beta = \frac{2}{3}\delta$: qu'on partage la hauteur cherchée yz en deux parties yr, & rz, dont la premiere convienne à l'action de la Lune, & l'autre à l'action du Soleil: soit le Sinus total $= 1$, le Sinus de l'Angle donné $bCz = \frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle βCz pareillement donné $= \frac{\rho}{b}$: de cette maniere, nous aurons en vertu du III. §. $rz = \frac{3ss - bb}{3bb} \times \beta = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta$, & pareillement $yr = \frac{2bb - 3\rho\rho}{3bb} \times \delta$, & par conséquent

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta + \frac{2bb - 3\rho\rho}{3bb} \times \delta. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE.

IX.



On voit par cette Solution la loi qu'il faudroit observer pour construire une Table, qui marquât pour chaque âge de la Lune, & pour chaque moment, les hauteurs des Marées, en supposant le Point z changer continuellement de position, jusqu'à-ce qu'il ait fait le tour: voyons à présent quel est le Point Z, qui marque la plus grande hauteur yz, les Poles b & β étant donnés de position.

LEMME.

X.

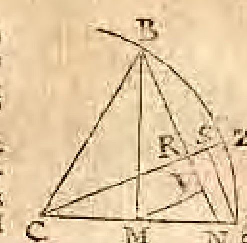
Si le Sinus de l'Angle bCz est appellé, comme ci-dessus, $\frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle βCz, $\frac{\rho}{b}$; le Sinus de la somme de ces deux Angles, c'est-à-dire, le Sinus de l'Angle $bC\beta$, $\frac{m}{b}$; je dis qu'on aura

$$\rho = \frac{m\sqrt{(bb - \sigma\sigma)} - n\sigma}{b}, \text{ * \&}$$

$$\rho^2 = \frac{mmbb + nn\sigma\sigma - mm\sigma\sigma - 2mn\sigma\sqrt{(bb - \sigma\sigma)}}{bb}.$$

 Je

* La lettre n exprime ici $\sqrt{bb - mm}$. La demonstration de ce Lemme est fort simple, le Rayon BC étant b, le Sinus de tout l'Angle BCβ étant $\frac{m}{b}$, on aura BM$=m$, CM$=\sqrt{bb - mm}$; βS$=\sigma$, CS$=\sqrt{bb - \sigma\sigma}$, BR$=\rho$. Prolongez BR en N, & menez MV parallele à CR, les Triangles CβS & BMV seront semblables à cause des Angles droits S & V & des Angles égaux CβZ & MBN; Donc on aura Cβ (b) : CS $(\sqrt{bb - \sigma\sigma})$ = BM (m) : BV $= \frac{m\sqrt{bb - \sigma\sigma}}{b}$; On trouvera de même que Cβ (b) : βS (σ) = CN : NR = CM (n) : RV $= \frac{n\sigma}{b}$; Donc BR(ρ) = BV − RV $= \frac{m\sqrt{bb - \sigma\sigma}}{b} - \frac{n\sigma}{b}$. C. Q. F. T.



Je n'ajoûterai pas la démonstration de ce Lemme: mais il est pourtant bon d'avertir ici, qu'en cherchant la valeur de ϱ, qui marque le Sinus de la différence de deux Angles donnés par leurs Sinus; on tombe facilement dans une autre expression beaucoup plus prolixe, & qui rend le Calcul du Problême, que nous allons exposer, presque impraticable.

PROBLEME.

Trouver les Points Z, où les hauteurs yz soient les plus grandes.

SOLUTION.

La nature de notre Problême demande, que la différentielle de yz, sçavoir $\frac{-2\beta\sigma d\sigma - 2\delta\varrho d\varrho}{3bb}$ (§. *VIII.*) soit $=0$, ou bien $\varrho d\varrho = \frac{-\beta}{\delta}\sigma d\sigma$.

Et si l'on différentie l'équation seconde du précedent Lemme, on trouve, prenant les quantités m, n & b pour constantes, & σ pour variable,

$$\varrho d\varrho = \frac{nn\sigma d\sigma - nm\sigma d\sigma}{bb} + \frac{2mn\sigma\sigma - nmbb}{bb\sqrt{(bb-\sigma\sigma)}}d\sigma.$$

En comparant ces deux valeurs de $\varrho d\varrho$, on trouve une nouvelle équation, à laquelle on pourra donner une telle forme,

$\left(-\frac{\beta}{\delta}bb\sigma + mm\sigma - nn\sigma\right)\sqrt{bb-\sigma\sigma} = 2mn\sigma\sigma - mnbb$: si l'on suppose pour abréger la Formule $\frac{-\beta bb}{\delta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = A$, on trouve après une reduction entiere de l'équation, le Sinus de l'Angle bCz, ou

$$\frac{\sigma}{b} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{A}{2\sqrt{(4+AA)}}\right)}.\quad \text{C. Q. F. T.}$$

SCHOLIE.

XII.

Il ne sera pas difficile de reconnoître dans chaque cas, quel choix on doit faire des Signes ambigus. Mais pour faciliter la chose, & pour en donner une idée d'autant plus distincte, on pourra faire les remarques qui suivent.

1°. Que notre Formule marque en même tems quatre Points z, Z, s & S; que les deux premiers diametralement opposés, marquent que la Mer y est la plus haute, & les deux autres diametralement opposés marquent que la Mer x est la plus basse, & que l'Arc zs est toujours de 90°, ce que l'on connoit de ce que $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}}$, exprimant le Sinus d'un Angle, son Cosinus est exprimé par $\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}\right)}$.

2°. Que

2°. Que l'Angle $bC\beta$ étant aigu, le Point z tombe entre les Points b & β, que si cet Angle est droit, le Point z tombe précisément sur β (en supposant la Force lunaire plus grande que la Force solaire, comme elle l'est sans doute); & enfin, lorsque l'Angle $bc\beta$ est obtus, que le Point z tombe au-delà du Point β, l'Arc bz devenant plus grand que l'Arc $b\beta$, avec cette loi que le Point z s'approche reciproquement du Point d, tout comme il s'étoit éloigné du Point b. Enfin, qu'il y a autant de racines inutiles, qu'il faut rejetter, mais qu'il faudroit adopter, si la Force solaire surpassoit la Force lunaire.

COROLLAIRE I.

XIII.

On trouve le Sinus de l'Angle βCz exprimé par $\frac{\beta}{b}$ de la même façon, que nous avons trouvé le Sinus de l'Angle bCz. On voit même que sans faire le Calcul de nouveau, on n'a qu'à renverser les lettres β & δ dans la valeur de A, indiquée au §. XI. & supposer $-\frac{\delta bb}{\beta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = B$, & on aura $\frac{\varrho}{b} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{(4+BB)}}\right)}$.

COROLLAIRE II.

XIV.

Considérant l'Angle $bC\beta$ comme variable, on voit que l'Angle βCz, qui marque l'Angle horaire entre le moment de la plus haute Marée, & celui du passage de la Lune par le Méridien, peut faire un *maximum*, ou plus grand, puisqu'il est $=0$, tant lorsque l'Angle $bC\beta$ est nul, que lorsqu'il est égal à un droit: nous allons déterminer cet Angle dans la Proposition suivante.

PROBLEME.

XV.

Déterminer l'Angle $bC\beta$ tel que son Angle βCz devienne le plus grand, qu'il est possible.

 SO-

SOLUTION.

Pour déterminer l'Angle en question, il faut faire $d\rho = o$; or ρ étant exprimé par des constantes, & par la variable B (§. *XIII.*) il faut supposer $dB = o$, c'est-à-dire, que la différentielle de la quantité $\frac{-\delta bb}{\epsilon mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$, doit être supposée égale à zero, en considérant les lettres m & n comme variables: substituons pour n sa valeur $\sqrt{bb - mm}$ (§. *X.*) nous aurons

$$B = \frac{-\delta bb + 2\epsilon mm - \epsilon bb}{\epsilon m \sqrt{bb - mm}},$$

dont la différentielle devient nulle, en faisant

$$\frac{m}{b} = \sqrt{\frac{\epsilon + \delta}{2\delta}}.$$

COROLLAIRE.

XVI.

Si ϵ étoit $= \delta$; c'est-à-dire, si les deux Luminaires avoient une force égale, pour mettre la Mer en mouvement, on auroit $m = b$. Mais la Force lunaire étant plus grande que la Force solaire, m devient plus petit que b: cependant l'Angle $bC\epsilon$ ne deviendra jamais moindre que de 45°.

On remarquera aussi, qu'il y a quatre Points, tels que ϵ, dont deux sont autant éloignés du Point b, que les deux autres le sont du Point d; & que dans ces quatre Points, la haute Marée vient alternativement après & avant le passage de la Lune par le Méridien.

Nous allons voir à présent comme on doit appliquer tout ce que nous venons de dire pour trouver l'heure des Marées, & pour faire voir, combien notre Théorie bien ménagée s'accorde là-dessus avec les Observations.

CHAPITRE VI.

Sur l'heure moyenne des Marées pour toutes les Lunaisons.

I.

ON a été de tout tems soigneux à bien remarquer l'heure des hautes & basses Marées, pour établir là-dessus, autant qu'il est possible, des regles pour l'utilité de la Navigation; & quoi qu'il soit impossible de donner des regles générales & exactes, on n'a pas laissé de continuer ces recherches. Mais je ne sçache pas qu'on se soit encore avisé de raisonner là-dessus autrement, que par *induction* sur un grand nombre d'Observations, pendant que c'est ici une matiere, qui dépend beaucoup de la Géometrie pour l'essentiel, & que ce n'est que par rapport à quelques circonstances, qu'on est obligé de recourir aux Observations, pour établir des regles: & cela est si vrai, que la seule Théorie m'a fait voir plusieurs Points, dont je n'étois pas encore instruit par la lecture. Voyons donc avant toutes choses, jusqu'où la Théorie peut aller, pour éclaircir notre sujet: nous nous attacherons encore aux hypotheses marquées au XIX. §. du Chap. IV. que je prie le Lecteur de relire. Nous irons ensuite plus loin, & nous examinerons, quelle correction il faudra employer à l'égard de chaque hypothese; lorsqu'elle est en quelque façon changée.

II.

Il est bon d'avertir ici le Lecteur, lorsque je parlerai des deux Marées qui se suivent, que j'entends deux Marées pareilles, qui se suivent au bout de 24 heures, en sautant la Marée intermediaire; nous éviterons par-là de certaines petites inégalités, qu'on a observées, lorsqu'on a comparé ensemble les deux Marées, qui se font dans un même jour. Si l'on veut comparer ensemble des Marées, qui ont plusieurs jours d'intervalle, nous choisirons celles qui se font pendant que la Lune est au-dessus de l'Horison.

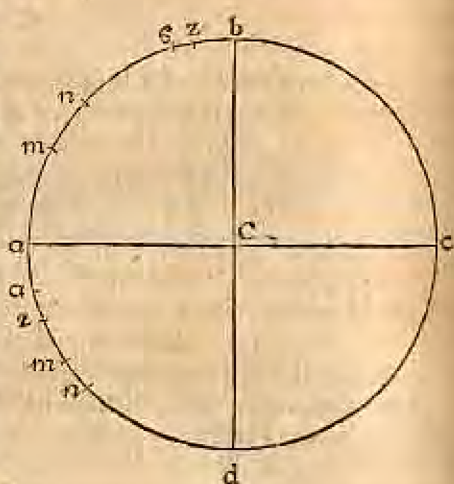
III.

Il est clair, que si la Lune avoit infiniment plus de force que le Soleil, la haute Marée répondroit précisément au passage de la Lune par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre, seroit d'un jour lunaire précis; & si au contraire la Force du Soleil surpassoit infiniment la Force lunaire, la Marée se feroit au moment du passage du Soleil par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre, seroit précisément d'un jour solaire. Mais comme les deux dites Forces sont, suivant toutes les Observations, comparables entre elles, on voit que le vrai tems de la haute Marée doit dépendre du passage par le Méridien de l'un & de l'autre Luminaire: mais il aura toujours plus de rapport avec la Lune, qu'avec le Soleil, parce que la Force lunaire est, sans contredit, plus grande que la Force solaire. Nous verrons dans la suite, qu'il y a quatre situations de la Lune, dans lesquelles l'intervalle de deux Marées, qui se suivent, est précisément d'un jour lunaire; & qu'en deçà,

deçà, ou en delà de ces quatre Points, les Marées doivent nécessairement avancer ou retarder sur le tems du jour lunaire: nous déterminerons ces accélerations & retardemens, qui sont fort inégaux, & nous ajoûterons plusieurs autres Remarques sur cette matiere, qui l'éclairciront plus que toutes les Observations, qu'on a faites jusqu'ici. Il est vrai que ces déterminations dépendent du rapport qu'il y a entre les Forces des deux Luminaires, que ce rapport est encore incertain, & qu'il est même variable: mais j'indiquerai quels sont les moyens les plus sûrs, pour le déterminer d'abord dans de certaines circonstances, & ensuite généralement. Avant que de traiter cette Question, qui est une des plus utiles, & des plus essentielles, nous déterminerons généralement le vrai tems des hautes & basses Marées, en supposant le rapport entre les forces des deux Luminaires connu.

I V.

Soit $badc$ l'Equateur, dans le plan duquel les deux Luminaires sont encore supposés se mouvoir de b vers a, pendant que l'Equateur de la Terre se tourne dans le même sens autour de son Centre C. Prenons dans l'Equateur un Point b, & considérons les Luminaires se trouver dans leur Conjonction au Point b, c'est-à-dire, étant l'un & l'autre dans la Ligne prolongée db; on voit qu'en ce cas la haute Marée doit être dans ce moment-là en b, & précisément à midi.



V.

Voyons à présent ce qui doit arriver un, deux, trois, &c. jours après: supposons pour cet effet, que le Soleil se trouvant encore à midi au Point b, la Lune réponde au Point ϵ: la haute Marée répondra dans ce moment au Point z, & les Arcs bz, ϵz se déterminent par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. il faut donc que le Point b parcoure dans l'Equateur l'Arc bz, pour se trouver dans l'endroit de la plus haute Marée; car on peut négliger les petits Arcs, que les Luminaires parcourent, dans le tems que le Point b de l'Equateur parcourt l'Arc bz. On voit donc, que si l'on veut regler le tems des hautes Marées

Marées après le tems vrai, on doit prendre l'Arc bz pour l'Arc horaire, qui marque l'heure de la haute Marée de ce jour-là.

Cette regle suppose le Point ϵ en repos, pendant le tems qui convient audit Arc horaire bz; mais il est facile de corriger cette supposition: car nous verrons dans la suite, que l'Arc bz est presque égal à l'Arc $b\epsilon$; & cela étant, il est clair, qu'on n'a qu'à substituer des heures lunaires aux heures solaires, qui répondent à l'Arc bz, pour corriger la dite supposition.

V I.

Nous venons de montrer, comment on peut déterminer le vrai tems des hautes Marées, en le rapportant au midi, c'est-à-dire, au passage du Soleil par le Méridien: voici à présent, comment on peut déterminer l'heure des hautes Marées, en la rapportant au passage de la Lune par le Méridien, qu'on connoît par les Ephémerides: on peut le faire immédiatement par le moyen de l'Arc ϵz: nous verrons que le Point z ne sçauroit s'éloigner du Point ϵ au-delà d'environ dix dégrés, qui répond à 40 minutes de tems, pendant lequel cet Arc ne sçauroit varier sensiblement; d'où il suit que ce petit Arc ϵz marquera toujours l'Arc horaire entre le moment du passage de la Lune par le Méridien & le moment de la haute Marée.

V I I.

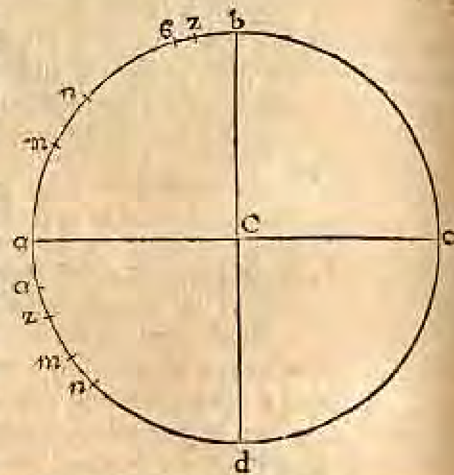
L'Arc ϵz étant tantôt négatif, tantôt affirmatif, comme il paroît par le XIII. Art. du Chap. V. on voit que la haute Marée suivra le passage de la Lune par le Méridien, depuis les Syzygies jusqu'aux Quadratures, & qu'elle le précedera depuis les Quadratures jusqu'aux Syzygies: on voit encore par l'Art. XV. du Chap. V. que l'Arc ϵz fait un *maximum*, lorsque le Sinus de l'Arc $b\epsilon$ est $= \sqrt{\frac{\epsilon+\delta}{2\delta}}$: c'est alors que la haute Marée retarde ou avance le plus sur le passage de la Lune par le Méridien: & comme vers ce tems-là les Points ϵ & z peuvent être censés avoir un mouvement égal, l'intervalle d'une Marée à l'autre, sera alors précisément d'un jour lunaire: & cet intervalle peut être appellé intervalle moyen entre deux Marées qui se suivent: il est de 24. heures $50\frac{1}{2}$ minutes, en prenant 29 jours 12 heures 44 minutes, pour le tems moyen d'une Conjonction à l'autre.

On remarquera encore que l'intervalle d'une Marée à l'autre, est le plus petit dans les Syzygies, & le plus grand dans les Quadratures.

VIII.

VIII.

Pour déterminer analytiquement les propriétés, que nous venons d'indiquer en gros, nous supposerons, que la Lune répondant au Point m, & la haute Marée étant dans ce moment là au Point n, l'Arc mn soit alors le plus grand qu'il est possible. Soit outre cela encore le Sinus total $= 1$, le Sinus de l'Arc $mb = m$, son Cosinus $= n$. Cela étant, nous avons déja dit, & nous le remarquerons encore ici:



1°. Qu'on aura $m = \sqrt{\frac{\epsilon + \delta}{\delta}}$.

2°. Qu'on peut déterminer la grandeur de l'Arc mn par le moyen du XIII. §. Chap. V. où nous avons démontré, que généralement le Sinus de cet Arc est

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}$$

en supposant $B = \frac{-\delta bb}{\epsilon mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Pour appliquer cette regle générale à notre cas particulier, il faut supposer $b = 1$; $m = \sqrt{\frac{\epsilon + \delta}{2\delta}}$, & $n = \sqrt{\frac{\delta - \epsilon}{2\delta}}$: après ces substitutions, on trouve le Sinus de l'Arc mn $= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{\delta\delta - \epsilon\epsilon}}{2\delta}\right)}$; & comme δ est beaucoup plus grand que ϵ, on peut censer le Sinus de l'Arc mn être simplement $= \frac{\epsilon}{2\delta}$.

3°. Qu'on déterminera la grandeur de l'Arc nb, par le moyen du XI. §. du Chap. V. Il est remarquable que cet Arc ne dépend point du rapport, qui est entre la Force lunaire δ, & la Force solaire ϵ; car il est toujours de 45 dégrés.

4°. Que si la Lune est supposée dans un Point quelconque ϵ, les Arcs bz & ϵz peuvent se déterminer par le moyen des XI. & XIII. §. §. du Chap. V. comme nous avons déja dit: mais si l'on suppose le Point ϵ bien près du Point b, nos Formules font voir, qu'on peut censer alors le Sinus de l'Arc $\epsilon z = \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \times m$, & le Sinus du petit Arc $bz = \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \times m$.

Cet-

Cette Formule nous servira à determiner combien les Marées priment vers les Syzygies.

5°. Que si la Lune se trouve en α bien près de a, la haute Marée repondra dans ce moment au Point z au-delà du Point α, & on trouvera par le XIII. Art. du Chap. V. si l'on traite bien l'équation qui y est marquée, le Sinus du petit Arc $\alpha z = \frac{\epsilon}{\delta - \epsilon} \times n$, en prenant pour n le Cosinus de l'Arc $b\alpha$, ou ce qui revient au même, le Sinus du petit Arc $a\alpha$. Cette valeur du petit Arc αz nous servira à déterminer, combien les Marées retardent vers les Quadratures.

Ces deux dernieres Remarques sont fondées sur ce que m ou n, étant comme infiniment petits, les quantités A & B deviennent comme infiniment grandes, & alors on peut substituer simplement $\frac{1}{A}$ & $\frac{1}{B}$ à la place des Quantités

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4 + AA}}\right)} \ \& \ \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}:$$

& après ces substitutions, on trouve les Sinus des petits Arcs, comme nous les avons déterminés.

IX.

Toutes ces propriétés, que nous venons d'établir, sont tout-à-fait conformes aux Observations. Mais pour en sentir toute la force, il faudroit toujours sçavoir le rapport qu'il y a entre les Forces δ & ϵ, & c'est ce que j'ai déja dit, qu'on ne sçauroit déterminer immédiatement par les principes d'Astronomie, faute d'Observations assez justes sur la Lune; il faut donc s'en tenir aux effets Physiques, que la Lune produit sur la Terre, pour en déduire sa force; & je n'en connois point d'autres, que les Marées mêmes: mais il s'en faut servir avec beaucoup de circonspection. Comme c'est ici un point très-essentiel, je n'ai pas voulu manquer de le considérer avec toute l'attention qu'il mérite. Voici mes reflexions là-dessus.

X.

On pourroit déduire le rapport moyen entre les Forces δ & ϵ du rapport des plus hautes Marées, qui se font près des Syzygies, & des plus petites Marées aux Quadratures. Car on voit par le VIII. §. Chap. V. que la hauteur de la plus grande Marée doit être à celle de la plus petite Marée, comme $\delta + \epsilon$ est à $\delta - \epsilon$. Mais les hauteurs des Marées dans les Ports, où l'on fait les Observations, dépendent de tant de circonstances, qu'elles ne peuvent être tout-à-fait proportionelles aux hauteurs des Marées dans la Mer libre; & c'est ce qui fait, qu'on trou-

trouve le rapport moyen entre les plus grandes & les plus petites Marées, assez différent dans différents Ports.

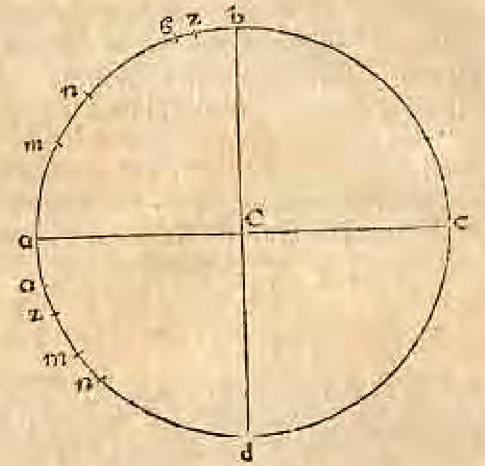
M. Newton, qui a suivi cette Méthode, rapporte une Observation faite par Sturm au-dessous de Bristol, où cet Auteur a trouvé que les hauteurs de la plus grande & de la plus petite Marée, ont été, comme 9 à 5, d'où il faudroit conclure, que $\delta = 3\frac{1}{2} \times \varepsilon$. Cette Observation est bien éloignée de celle que j'ai reçûe dernierement faite à Saint Malo par M. Thouroud. La voici: «Dans les grandissimes Marées, la Mer «s'éleve de 50 pieds en plomb au-dessus du bas de l'eau: dans les Ma«rées bâtardes, elle ne différe que de quinze pieds.» Si j'ai bien compris cette Observation, la plus grande Marée étoit à la plus petite, comme 50 à 15, ou comme 10 à 3; ce qui donneroit $\delta = \frac{13}{7} \times \varepsilon$. Ces deux resultans sont bien différens: il est vrai, que le rapport de δ à ε est variable; mais cette variation ne sçauroit aller si loin; si la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\varepsilon}$ est $= m$, la plus grande valeur de $\frac{\delta}{\varepsilon}$ sera environ $= \frac{3}{2} m$.

Il y a une autre refléxion à faire sur cette Méthode de trouver le rapport entre les Forces des deux Luminaires: c'est que les Marées sont une espece d'Oscillations, qui se ressentent toujours des Oscillations précedentes: cette raison fait que les variations des Marées, ne sçauroient être aussi grandes qu'elles devroient être, suivant les Loix hydrostatiques. Concevons un pendule attaché à une Horloge animée successivement par des poids différens: On sçait, que plus ces poids sont grands, plus les Oscillations du pendule deviennent grandes: mais en changeant les poids, les premieres Oscillations ne prendront pas d'abord leur grandeur naturelle; elles ne s'en approchent que peu à peu. Il n'en est pas de même des durées des Oscillations, lorsque le pendule est successivement animé par différentes pésanteurs. Considérons d'abord un pendule simple animé par la pésanteur ordinaire, & qui fasse ses Oscillations dans deux secondes de tems, & supposons ensuite la pésanteur devenir tout d'un coup quatre fois plus grande; je dis que la premiere Oscillation, qui suivra ce changement, se fera de même que toutes les autres suivantes dans une seconde de tems.

Cette considération me porte à croire, que les Observations sur les durées & sur les intervalles des Marées sont plus sûres pour notre dessein, que les hauteurs des Marées: si cette refléxion est bien fondée, on pourroit faire attention aux Méthodes suivantes, pour trouver le rapport moyen entre δ & ε.

1°. Il faudroit pendant plusieurs mois observer, quel est le plus petit intervalle de deux Marées. Nous avons dit au VI. §. que l'intervalle moyen est d'un jour moyen lunaire, que je suppose de 24 heures 50 minutes: mais il sera moindre dans les Syzygies; quoique plus grand qu'un

jour solaire, ou de 24 heures: supposons ce plus petit intervalle de 24 heures, & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités dans N; &



il faudra prendre dans la Figure ci-dessus un Arc horaire $b\varepsilon$ de 50 minutes de tems: De cet Arc $b\varepsilon$, il faut prendre une partie εz, qui réponde à $(50-N)$ minutes. Or par la IV. Remarque du VII. §. l'Arc εz est à l'Arc $b\varepsilon$, comme $\frac{\varepsilon+\delta}{\varepsilon} \times m$ est à m: d'où nous tirons cette analogie,

$$50-N : 50 :: \varepsilon : \varepsilon+\delta.$$

& cette analogie donne

$$\delta = \frac{N}{50-N} \times \varepsilon.$$

Soit N égal à 35 (c'est ainsi qu'on l'observe à peu près dans les Marées regulieres) & on aura $\delta = \frac{35}{15} \varepsilon$.

2°. On pourroit aussi faire attention aux plus grands intervalles; si ce plus grand intervalle (qui se fait ordinairement après les Quadratures) étoit de 24 heures & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités en M. On trouve par la même Méthode, que nous venons d'indiquer, & par la V. Remarque du VII. §. $\delta = \frac{M}{M-50} \times \varepsilon$.

Soit $M = 85$ minutes (c'est à peu près la valeur que l'on observe) & on trouvera

$$\delta = \frac{85}{35} \times \varepsilon.$$

Voilà les deux Méthodes, que je crois les plus exactes; & la premiere doit l'emporter sur la seconde, parce que les Marées sont plus irrégulieres après les Quadratures, qu'après les Syzygies. Il y a encore plu-

plusieurs autres Méthodes pareilles à celles que je viens d'exposer, & dont j'ai fait en partie le Calcul; mais comme je ne suis pas assez content des Observations, sur lesquelles ces Méthodes sont fondées, je ne les mettrai pas ici. Je me contenterai de dire, qu'après tous les examens que j'ai faits, j'ai trouvé, que pour accorder, autant qu'il est possible, toutes les Observations qui déterminent le rapport entre δ & ϵ, il faut supposer la valeur moyenne de $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$; la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\epsilon} = 2$, & sa plus grande valeur $= 3$. C'est donc sur ces suppositions que nous raisonnerons & calculerons dans la suite; & comme nous ne considerons encore toutes les circonstances variables, que dans leur état moyen, nous ferons dans tout le reste de ce Chapitre $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$.

M. Newton suppose $\frac{\delta}{\epsilon}$ environ $= 4$: mais j'ai déja dit, pourquoi sa Méthode doit indiquer la valeur de $\frac{\delta}{\epsilon}$ plus grande qu'elle n'est: la raison en est, que si les Marées, n'avoient point d'influence les unes sur les autres, comme elles ont, les plus grandes Marées différeroient davantage des plus petites, & par là on trouveroit la valeur de $\frac{\delta}{\epsilon}$ plus petite.

Avant que de finir cette digression sur le rapport entre la force de la Lune, & celle du Soleil, & d'en faire l'application à notre sujet, je ferai ici une reflexion sur les Forces absolues de la Lune & du Soleil. Nous avons fait voir aux §. §. VIII. & XV. du Ch. IV. que dans l'hypothese de l'homogeneïté de la Terre adoptée par M. Newton, le Soleil ne sçauroit faire varier les eaux au-delà de deux pieds, ni par conséquent la Lune au-delà de cinq pieds. Ces deux Forces combinées ensemble pour les Quadratures feroient une Force absolue à faire varier les eaux en pleine Mer de trois pieds de hauteur verticale pendant une Marée. Mais peut-on comprendre, que d'une variation de trois pieds en pleine Mer, il puisse provenir tous les effets des Marés aux Quadratures? Encore est-il très-vraisemblable, que la variation actuelle des eaux differe beaucoup de la variation entiere, que la Théorie indique comme possible: peut-être même, que la variation actuelle est à peine sensible par rapport à l'autre, & cela non-seulement à cause des empêchemens accidentels, tel que le frottement, l'imparfaite fluidité, &c.; mais encore à cause de l'inertie des eaux & du mouvement journalier de la Terre; car on voit bien, que si ce mouvement journalier de la Terre étoit d'une vitesse infinie, les Luminaires ne pourroient avoir aucun effet pour faire varier la Mer, quelque Force qu'ils eussent. Je suis donc entierement persuadé, que les Forces absolues des deux Luminaires sont beaucoup plus grandes, que M. Newton ne les suppose, & tous ses

ses Commentateurs après lui, prenant l'homogeneïté de la Terre, pour une hypothese, sur laquelle ils bâtissent tout leur Systême. Ces reflexions doivent donner beaucoup de poids à tout ce que nous avons dit au Chap. IV. où nous avons démontré, qu'en supposant, que les Densités des Couches de la Terre augmentent depuis la circonférence vers le centre (supposition d'ailleurs extrêmement probable par plusieurs raisons Physiques, dont j'ai exposé une partie au XIII. §. du Chap. IV.) on peut augmenter, tant qu'on veut, les effets de la Lune & du Soleil sur la Terre. Après cet examen sur les Forces, tant relatives, qu'absolues des deux Luminaires, nous allons en faire usage, pour considérer de plus près tout ce qui regarde la durée des Marées, leurs intervalles, & pour faire voir le merveilleux accord entre la Théorie & les Observations.

XI.

Les intervalles de deux Marées qui se suivent, sont les plus petits dans le tems des Syzygies: leur intervalle moyen est alors de 24 heures 35 minutes, & les Marées priment chaque jour de 15 minutes sur le mouvement de la Lune.

XII.

Les intervalles de deux Marées qui se suivent, sont les plus grands dans le tems des Quadratures: ils sont alors de 24 heures 85 minutes, c'est-à-dire, de 25 heures 25 minutes: les Marées retardent de 35 minutes par jour sur le mouvement de la Lune. Cette grande inégalité doit rendre l'heure des Marées plus incertaine & plus irréguliere que dans les Syzygies; & c'est aussi ce que l'on observe: mais ce n'est pas la seule raison.

XIII.

Les Marées répondront précisément au passage de la Lune par le Méridien, tant dans les Quadratures, que dans les Syzygies, si celles-ci se font aussi au moment du passage de la Lune par le Méridien. Mais si les Quadratures & les Syzygies ne se font pas dans le moment du passage de la Lune par le Méridien, il faut des corrections. Dans les Syzygies, il faut une correction de 15 minutes pour un jour entier en vertu du XI. §. & par conséquent $\frac{5}{8}$ de minutes par heure, que la haute Marée avancera sur le passage de la Lune par le Méridien, si les Syzygies se font avant ce même passage; & que la haute Marée retardera sur le passage de la Lune par le Méridien, si les Syzygies se font après ce passage. Dans les Quadratures il faut une correction de 35 minutes par jour, en vertu du §. XII. c'est-à-dire, environ une minute &

& demie par heure, que la haute Marée retardera ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Quadratures ſe font avant ledit paſſage; & qu'elle avancera, ſi les Quadratures ſe font après le paſſage de la Lune par le Méridien. Car près des points b & a, les Arcs εz & $\alpha z'$ peuvent être cenſés proportionnels aux Arcs $b\varepsilon$ & $a\alpha$.

X I V.

Si au lieu de rapporter les hautes Marées aux jours lunaires, on vouloit conſidérer les jours ſolaires, on voit bien qu'il faut dire, que les hautes Marées, au lieu de primer de 15 minutes dans les Syzygies, retardent de 35. minutes dans un jour, ou d'environ une minute & demie par heure; & qu'elles retardent de 85 minutes par jour dans les Quadratures, ce qui fait environ trois minutes & demie par heure: de là nous tirerons cette regle pour les Syzygies.

Il faut ajoûter à l'heure moyenne de la Marée dans les Syzygies une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies auront devancé ladite heure moyenne, & en retrancher une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies retarderont ſur la même heure moyenne.

Et pour les Quadratures nous aurons la regle ſuivante:

Il faut ajoûter, ou retrancher, dans les Quadratures de l'heure moyenne de la Marée, trois minutes & demie par chaque heure, que les Quadratures avanceront ou retarderont ſur la même heure moyenne.

X V.

M. Caſſini, dont les remarques ingénieuſes ſur les Marées m'ont ſervi de guide dans mes recherches, a donné par induction des regles pareilles, avec cette différence que dans les Syzygies, il a mis deux minutes par heure, au lieu d'une minute & demie; & deux minutes & demie dans les Quadratures, au lieu de trois minutes & demie.

X V I.

Enfin nous remarquerons, que l'intervalle moyen de deux Marées qui ſe ſuivent, lequel intervalle eſt de 24 heures lunaires, ou 24 heures 50 minutes, n'eſt pas également éloigné des Syzygies & des Quadratures; mais qu'il eſt beaucoup plus près des Quadratures, que des Syzygies: auſſi pouvoit-on le prévoir facilement; car comme toutes les accélerations depuis le Point b juſqu'au Point m (qui eſt celui, dont il eſt queſtion ici) doivent compenſer tous les retardemens depuis le Point m juſqu'au Point a, & que les accélerations ſont beaucoup plus petites que

que les retardemens, on voit d'abord, que le Point m doit être plus près du Point a, que du Point b. Mais nous déterminerons exactement ce point m par le moyen de la premiere Remarque du VIII. §. où nous avons démontré que le Sinus de l'Arc mb eſt $= \sqrt{\frac{\varepsilon+\delta}{2\delta}} = \sqrt{\frac{7}{10}} = 0{,}8366$ lequel Sinus répond à un Arc de $56^d. 47^m$. L'Arc mb étant donc de $56^d. 47^m$., l'Arc ma ſera de $33^d. 13^m$., & les deux Arcs mb & ma ſont comme 3407 à 1993.

L'Arc nb étant toujours de 45 dégrés (*par la III. Remarque du VIII.* §.) nous avons l'Arc $mn = 11^d. 47^m$.; & cet Arc mn marque le plus grand intervalle poſſible entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée. Cet intervalle eſt donc de 47 minutes de tems: le paſſage de la Lune par le Méridien ſuivra la haute Marée depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & la précédera depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies. Mais le plus grand intervalle de l'un à l'autre (qui ſe fait environ 2 ¼ jours avant & après les Quadratures) ne ſurpaſſe jamais 47 minutes de tems.

X V I I.

Toutes ces Propoſitions depuis le XI. §. juſqu'ici, nous donnent une idée claire des heures des hautes Marées, & de toutes leurs variations pour chaque âge de la Lune. Car, quoi-que nos démonſtrations ſoyent fort hypothetiques, elles n'en méritent pas moins d'attention; je ferai voir dans le Chapitre ſuivant, comment on peut donner des corrections aſſez juſtes à l'égard de toutes les hypotheſes que j'ai expoſées au XIX. §. du Chap. IV. Mais pour donner toute la perfection qui eſt poſſible, à cette matiere, je montrerai plus préciſément, comment on peut trouver l'intervalle entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée, pour tout Arc donné entre les deux Luminaires; après quoi je donnerai une Table, que j'ai pris la peine de calculer de dix en dix dégrés. Il ſera facile après cela moyennant les Ephémerides & des Interpolations, de déterminer l'heure des Marées généralement.

X V I I I.

Soit donc encore le Soleil en b; la Lune dans un Point quelconque m: la haute Marée en n. Soit le Sinus de l'Arc $mb = m$: le Sinus total $= 1$, le Coſinus de l'Arc $mb = n$: qu'on faſſe (§. *XIII. Chap. V.*).

$$B = \frac{-\delta bb}{\varepsilon mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{4mm-7}{2mn}:$$

on

on aura le Sinus de l'Arc mn (qui eſt l'Arc horaire entre le paſſage de la Lune par le Méridien & la haute Marée)

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}.$$

Si l'on change cette Quantité radicale en ſuites, en faiſant attention que B eſt toujours un nombre négatif beaucoup plus grand que l'unité, on verra qu'on peut, ſans aucune erreur ſenſible, ſuppoſer le Sinus de l'Arc horaire $mn=\frac{1}{B}-\frac{3}{2B^3}$, & même ſimplement $=\frac{1}{B}$ près des Syzygies & des Quadratures. Voici à préſent la Table dont je viens de parler.

La *premiere* Colonne marque de dix en dix Dégrés l'Angle compris entre les deux Luminaires vûs du centre de la Terre environ l'heure de la Marée : la *ſeconde* marque le nombre de minutes, qu'il faut retrancher depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & ajoûter depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies à l'heure du paſſage de la Lune par le Méridien, pour trouver l'heure de la Marée; & la *troiſiéme* marque la vraie heure de la haute Marée.

TABLE FONDAMENTALE
pour trouver l'heure moyenne des hautes Marées.

Diſtances entre les deux Luminaires en Dégrés.	*Tems de la haute Mer avant & après le paſſage de la Lune par le Méridien.*	*Heure de la haute Mer.*	
0 Dégrés.	0 Minutes.	0 Heur.	0 Min.
10	$11\frac{1}{2}$ avant.	0	$28\frac{1}{2}$
20	22 avant.	0	58
30	$31\frac{1}{2}$ avant.	1	$28\frac{1}{2}$
40	40 avant.	2	0
50	45 avant.	2	35
60	$46\frac{1}{2}$ avant.	3	$13\frac{1}{2}$
70	$40\frac{1}{2}$ avant.	3	$59\frac{1}{2}$
80	25 avant.	4	55
90	0	6	0
100	25 après.	7	5
110	$40\frac{1}{2}$ après.	8	$0\frac{1}{2}$
120	$46\frac{1}{2}$ après.	8	$46\frac{1}{2}$
130	45 après.	9	25
140	40 après.	10	0
150	$31\frac{1}{2}$ après.	10	$31\frac{1}{2}$
160	22 après.	11	2
170	$11\frac{1}{2}$ après.	11	$31\frac{1}{2}$
180	0	12	0

X I X.

La Table que nous venons de donner, détermine généralement l'heure des hautes Mers pour les hypotheses exposées au X I X. §. Chap. I V. s'il est vrai que la raison moyenne entre les Forces de la Lune & du Soleil, soit comme 5 à 2. Je la crois à-peu-près telle, après avoir bien examiné toutes les Observations qui peuvent la déterminer: cependant, comme ces Observations ne sont ni assez justes, ni en assez grand nombre, pour s'y fier entierement, je ne la donne pas encore pour tout-à-fait exacte: il est pourtant certain, que cette Table ne sçauroit manquer d'avoir toute l'exactitude nécessaire, les Marées étant sujettes à plusieurs irrégularités, dont on ne sçauroit donner aucune mesure, & qui sont de beaucoup plus grande conséquence, que tout ce qu'il y a encore d'incertain dans la Table. Nous allons examiner avec quelles précautions & corrections on doit s'en servir.

CHAPITRE VII.

Qui contient à l'égard de plusieurs Circonstances variables, les Corrections nécessaires pour les Théoremes & pour la Table du Chapitre précedent, & une Explication de plusieurs Observations faites sur les Marées.

I.

Les Vents & les Courants irréguliers contribuent le plus à rendre les Marées incertaines & irrégulieres. Ils accéléreront & augmenteront le Flux, ou le retarderont & le diminueront, selon qu'ils ont une direction commune ou contraire avec le Flux naturel des eaux. Mais on voit bien qu'il faut se contenter de ces effets, & qu'il est difficile & même impossible d'en marquer le détail, ou des mesures précises.

I I.

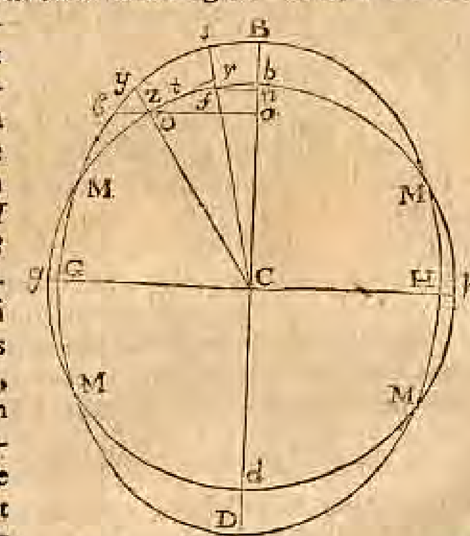
La seconde circonstance qui fait varier les Marées, est la situation du Port, sa profondeur, sa communication avec la Mer libre, la pente de son fonds & des environs, &c. Tout cela fait qu'il est impossible de marquer l'heure absoluë des Marées dans les Ports, ou Bayes, ou Côtes differemment situées. Mais comme toutes circonstances demeurent toujours les mêmes, on peut supposer qu'elles font le même effet sur toutes les Marées; sçachant donc combien la Marée est retardée dans les Syzygies, on la sçaura aussi à-peu-près dans toutes les autres situations

tuations

tuations de la Lune. Cette supposition est la seule ressource qui nous reste: j'avoue même qu'elle doit être fort peu exacte pour les differentes déclinaisons des deux Luminaires à l'égard de l'Equateur: il n'est pas vraisemblable non plus, qu'elle soit également juste pour les grandes Marées dans les Syzygies, & pour les Marées bâtardes dans les Quadratures. Mais avec tout cela, on ne doit pas la rejetter, plusieurs Observations m'ayant fait voir, que moyennant cette correction, le cours des Marées répond assez bien à la Théorie. Il faut donc sçavoir par un grand nombre d'Observations pour chaque endroit l'heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, & ajoûter cette heure au tems marqué dans la seconde & troisiéme Colonne de notre Table: c'est cette heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, que les Mariniers appellent *heure du Port*: elle varient extrêmement dans les différens Ports, comprenant tout le tems & durée d'une Marée.

I I I.

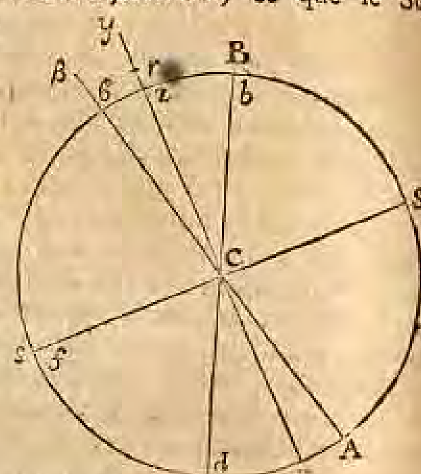
Ce retard de l'heure moyenne des pleines Mers dans les Syzygies, à l'égard du midi, s'observe aussi dans la Mer libre, ou plutôt dans les Isles qui sont en pleine Mer: mais il n'est pas si grand, & vient d'une autre cause, sçavoir de l'inertie des eaux, qui les empêche d'obéir assez promptement, à cause de la vitesse du mouvement journalier de la Terre. On peut appliquer ici tout le raisonnement que nous avons fait au V I. §. du Chap. III. pour expliquer la nutation de la Lune en longitude: On pourroit douter, si cette raison doit faire avancer ou retarder les Marées: Supposons donc, pour nous en éclaircir, que, tant les Luminaires, que la haute Marée, répondent à un même Point dans cette Figure: comme le mouvement des Luminaires n'est pas sensible, par rapport au mouvement journalier de la Terre, nous les considérerons comme demeurant dans la ligne db: l'Equateur de la Terre changera sa figure naturelle $bgdh$ en $BGDH$; & cette figure $BGDH$ tournant autour du Centre C de B vers G, le sommet B viendra quelque tems après en y: cela étant, si les eaux pouvoient se composer dans un instant dans un état d'équilibre, l'élévation Bb devroit se changer en yz, & la force qui devroit produire ce changement, seroit exprimée par $Bb - yz$: mais cette force étant infiniment petite, si l'Angle BCy



Bb 2 est

est infiniment petit, elle ne sçauroit produire tout son effet. On voit par-là, qu'il faut supposer l'Angle BCy d'une grandeur considérable, & considérer ensuite le sommet B comme transporté en y, afin que la différence des pressions soit assez grande, pour conserver le sommet des eaux au Point y, malgré la rotation du Globe. Le vrai sommet étant donc en y, l'Angle BCy sera l'Angle horaire, qui marquera les retardemens réels des hautes Marées sur le passage de la Lune par le Méridien. Là-dessus nous pourrons faire les Remarques qui suivent.

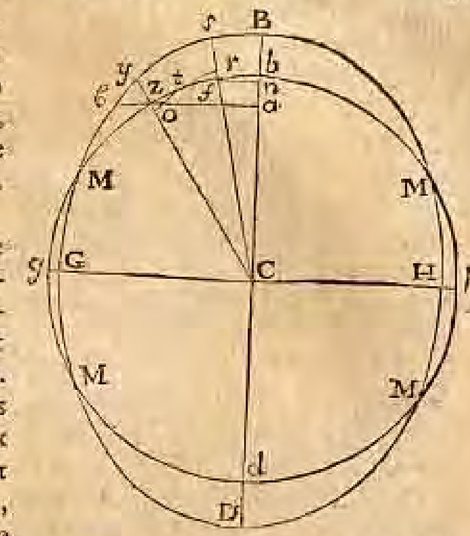
1°. Si les Luminaires ne sont pas en conjonction, & que le Soleil soit en b, & la Lune en ε on pourra considérer la chose, comme si les Luminaires étoient en conjonction, mais dans la Ligne Cz, déterminée de position au VIII. §. du Chap. V. & augmenter toujours l'Angle bCz de l'Angle BCy, dont nous venons de parler : d'où il paroît que l'Angle horaire Bcy doit toujours être ajouté au tems marqué dans la troisiéme Colonne de notre précedente Table : car la hauteur des Marées ne paroît pas devoir changer la chose, puisque les changemens de pression pour un petit tems donné, sont proportionnels aux baissemens des eaux, qui doivent se faire pour conserver le sommet des eaux dans un même Point y.



2°. Si le mouvement journalier de la Terre étoit infiniment lent, l'Angle BCy seroit nul : mais il doit être plus grand, d'autant qu'on suppose le mouvement journalier plus grand & plus prompt ; & la différence des hauteurs entre les hautes & basses Marées, doit diminuer à proportion.

3°. Si la vitesse du mouvement journalier étoit comme infinie, la pleine Mer répondroit presque au Point G; mais aussi la différence des hautes & basses Mers seroit comme nulle. Il me semble après avoir bien considéré la chose, que les hauteurs des Marées dans les Syzygies doivent être censées proportionnelles aux Sinus des Angles GCy dans la Mer libre, & que si la hauteur Bb sans le mouvement journalier de la Terre est $=\varepsilon$, elle sera avec le mouvement journalier de la Terre $=\frac{C\alpha}{Cb}\times\varepsilon$. Or, comme on a observé, que dans la Mer libre la haute Marée suit environ de deux heures le midi dans les Syzygies ; il faut supposer l'Angle

BCy de 30 degrés, & les forces absolues des Luminaires doivent être supposées plus grandes en raison de $\sqrt{3}$ à 2 pour élever les eaux, autant qu'elles le feroient sans le mouvement journalier de la Terre.



IV.

Nous avons encore fait voir, que sans le concours des causes secondes, les plus grandes Marées devroient se faire dans les Syzygies, & les plus petites dans les Quadratures. Cependant on a observé, que les unes & les autres se font un ou deux jours plus tard. Ce retardement est encore produit, sinon pour le tout, au moins en partie, par l'inertie des eaux, qui doivent être mises en mouvement, & qui ne sçauroient obéir assez promptement aux forces qui les sollicitent, pour leur faire suivre les loix que ces forces demanderoient. Il y a peut-être encore une autre cause, & M. Cassini me paroît le soupçonner de même, quoi qu'il ne se serve pas de nos principes, la voici : c'est qu'il se pourroit bien que cette cause, qui nous est encore si cachée, & qui donne une tendance mutuelle aux Corps flottans & composans le systême du monde, que cette cause, dis-je, ne se communiquât pas dans un instant d'un Corps à l'autre, non plus que la lumiere. S'il y avoit, par exemple, un Torrent central de matiere subtile, & d'une étenduë infinie, vers le centre de la Terre, & un semblable vers le centre de la Lune, ces deux Torrens pourroient produire la Gravitation mutuelle de ces deux Corps, & la vitesse du premier pourroit être telle, qu'il fallût un ou deux jours à la matiere, pour parvenir depuis la Lune jusqu'à la Terre : en ce cas on voit bien que l'effet de la force lunaire sur notre Océan, seroit le même, qu'il auroit été un ou deux jours auparavant dans la supposition que la Gravitation se communique dans un instant. Quoi qu'il en soit, comme ce retardement a été observé le même à-peu-près après les Syzygies & après les Quadratures, nous pouvons encore supposer, qu'il est le même, pendant toute la revolution de la Lune, c'est-à-dire, que les Marées sont toujours telles, qu'elles devroient être, sans lesdites causes, un ou deux jours auparavant.

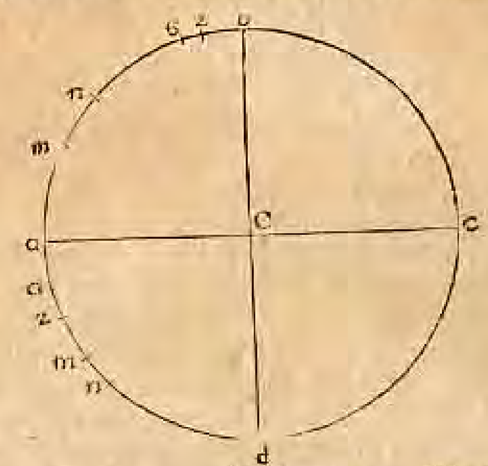
Au reste je n'ai mis ici ce que je viens de dire sur la cause qui pourroit produire la Gravitation mutuelle des Corps du Systême du Monde (Gravitation, qu'il n'est plus permis de revoquer en doute,) que comme un un exemple: je ne prétens pas expliquer ce Phénomene, j'avoue même qu'il m'eſt encore tout-à-fait incompréhenſible: je ne crois pas non plus que l'ACADEMIE en ait voulu demander une explication; je ſouhaiterois donc qu'on remarquât que ceux qui voudroient ſe ſervir d'autres principes, pour expliquer le Flux & Reflux de la Mer, ne le feroient qu'en apparence, & que tout ce qu'ils pourroient alleguer ne ſeroient que des efforts d'expliquer mécaniquement la Gravitation ou l'Attraction mutuelle du Soleil, de la Lune & de la Terre, ſans diſconvenir pour cela de nos principes au fond, leſquels ſont ſûrs, & doivent être conſiderés comme des faits averés par l'expérience.

V.

Je profiterai de cette occaſion, pour parler d'un des principaux Phénomenes, & pour répondre à une objection, qu'on pourroit nous faire là-deſſus, & dont l'éclairciſſement me paroît très-propre pour faire voir l'avantage de notre Méthode & de nos Calculs.

On a déterminé après un nombre infini d'Obſervations, que dans les Syzygies l'heure moyenne de la haute Mer eſt à Breſt à 3 heures 28 minutes, & dans les Quadratures à 8 heures 40 minutes; & que la différence n'eſt que de 5. heures 12. minutes depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures. Cette différence a été obſervée tout-à-fait la même à Dunkerque, & dans d'autres Ports; quoique les heures des Marées ſoient différentes aux divers Ports. C'eſt donc ici une Obſervation qui mérite beaucoup d'attention, comme génerale & bien averée: cependant il eſt certain, que ſans les cauſes ſecondes, que nous avons déja indiquées, la différence entre les heures du Port pour les Syzygies; & pour les Quadratures, devroit être à-peu-près de 6 heures lunaires, c'eſt-à-dire d'environ 6 heures 12 minutes. Voici comment je détermine exactement cet intervalle.

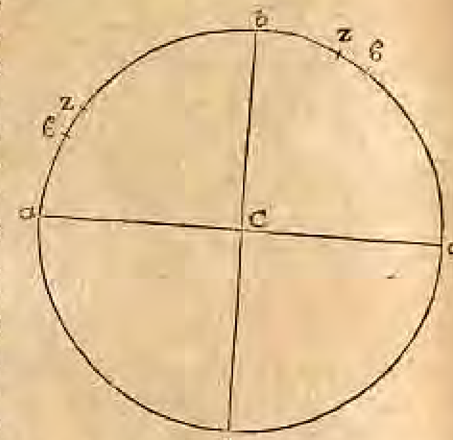
L'heure moyenne de la haute Mer dans les Syzygies, eſt dans la Théorie pure préciſément à midi, puiſqu'il faut conſiderer les Syzygies, comme tombant préciſément ſur l'heure du midi. Si les Syzygies ſe faiſoient plus tard, la haute Mer arriveroit plus tôt & reciproquement; & les accélerations compenſent parfaitement les retardemens après un grand nombre d'obſervations. L'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, doit être de même cenſée celle qui ſe fait, lorſque la Quadrature ſe fait préciſément à midi; car, lorſqu'il eſt queſtion d'un certain jour, il en faut prendre le milieu, c'eſt-à-dire l'heure du midi, afin que les différences ſe détruiſent ou ſe compenſent les unes les autres. Soit donc le Soleil au Zenith b, & la Lune en a à 90 dégrés du Zenith, ou à l'Horiſon: cela étant, on voit que ſi la haute Mer eſt ſuppoſé ſe faire préciſément au moment du paſſage de la Lune par le Méridien, elle doit ſe faire 6 heures lunaires après midi; car le Point b doit faire, par le mouvement journalier de la Terre, l'Arc horaire $b a \alpha$ (ſuppoſant que le paſſage de la Lune par le Méridien, qui a été à l'heure du midi en b, réponde au Point α); mais pour parler plus préciſément, la Lune & le Méridien ſe trouvant en α, la haute Marée répondra au Point z^1, & l'Arc αz ſera égal aux deux tiers du petit Arc $a \alpha$ (§. *XIII. Chap. VI.*) c'eſt donc l'Arc $b \alpha z^1$ qui marque l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures: l'Arc $b a$ eſt



de 90 dégrés; le petit Arc $a \alpha$ eſt d'environ 3. dégrés, & l'Arc αz^1 de 2 dégrés, & par conſéquent l'Arc $b a z^1$ de 95 dégrés, qui donne un tems de 6 heures 20 minutes, qui devroit être *in abſtracto* l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, pendant que celle des Syzygies eſt à midi. D'où vient donc, me demandera-t-on, que, ſuivant les Obſervations, on ne trouve que 5. heures 12 minutes à la place de 6 heures 20. minutes. Je répons que c'eſt cette même anticipation des Syzygies & des Quadratures à l'égard des plus grandes & des plus petites Marées, dont nous avons parlé dans le précedent Article, qui en eſt la cauſe. Il eſt ſi vrai, que c'eſt ici la véritable raiſon, que la quantité de cette anticipation répond parfaitement bien à l'intervalle des heures moyennes des hautes Mers pour les Syzygies & les Quadratures. Nous en pourrons même déterminer plus exactement ladite anticipation, ſur laquelle on eſt encore bien diviſé, les uns la faiſant d'un jour, d'autres de deux, pendant qu'on a déterminé aſſez exactement, & d'un commun accord l'autre Point.

Prenons d'abord le terme de deux jours, comme le plus généralement adopté, en conſidérant que les Marées ſe reglent après les Luminaires, tels qu'ils ont été deux jours auparavant: imaginons-nous les Syzy-

Syzygies se faire en b & les Quadratures en b & a : l'effet des Luminaires sera, en vertu de notre supposition, dans le tems des Syzygies, comme si le Soleil étoit en b, & la Lune en ϵ, en prenant l'Arc $b\epsilon$ d'environ $25\frac{1}{4}$ dégrés; & le même effet dans les Quadratures sera comme si le Soleil étant en b, la Lune se trouvoit en ϵ' environ $64\frac{3}{4}$ dégrés; dans les Syzygies, la haute Mer répond au Point z, & dans les Quadratures au Point z'. C'est donc l'Arc zbz' qui exprime l'Arc horaire



entre l'heure moyenne de la haute Mer des Syzygies & celle des Quadratures (substituant toutefois des heures lunaires à la place des heures ordinaires, à cause du mouvement de la Lune.) Or la Table mise à la fin du précedent Chapitre, fais voir par le moyen des interpolations, que la Lune étant avant les Syzygies à $25\frac{1}{4}$ dégrés du Soleil, l'heure de la haute Mer est à 10 heures 46. minutes du matin; & que la Lune étant après les Syzygies à $64\frac{3}{4}$ dégrés du Soleil, la haute Mer se fait à 3 heures 35 minutes du soir: l'intervalle est donc de 4 heures 49 min. tems lunaire, ou d'environ 5 heures, tems ordinaire. Ce resultat répond déja assez bien à l'Observation, qui le donne de 5. heures 12. minutes.

Mais si au lieu de deux jours on prend $\frac{8}{5}$ jours, ou environ 59 heures, qui répond à-peu près à 20 dégrés de distance de la Lune depuis les Syzygies & les Quadratures, l'heure moyenne de la haute Mer le jour des Syzygies, sera en vertu de la Table, à 11 heures 2 minutes du matin, & le jour des Quadratures, à 3 heures $59\frac{1}{2}$ minutes du soir; & l'intervalle de l'une à l'autre sera de 4. heures $57\frac{1}{2}$ minutes tems lunaire, qui fait à-peu-près 5 heures 8 minutes. Et enfin on trouve une conformité exacte entre les deux points en question, en donnant un jour & demi au retardement d s Marées, c'est-à-dire, en supposant que l'état des Marées est tel qu'il devroit être naturellement, un jour & demi plutôt: c'est alors que l'intervalle de l'heure moyenne de la pleine Mer aux Syzygies à heures pareilles aux Quadratures, devient de 5 heures 12 minutes, tel qu'un grand nombre d'Observations l'a donné: aussi ce terme d'un jour & demi, est-ce celui qui est le plus conforme aux Observations, & en consultant les Tables qui sont dans les Me-

Memoires de l'Académie de l'année 1710. pag. 330. & 332. & prenant la différence moyenne, on trouve fort à-peu-près la même valeur. Toutes ces circonstances, l'explication naturelle de ce Phénomene, sa conformité avec toutes les Observations faites jusqu'ici, & son usage pour déterminer au juste un des points des plus essentiels, qu'on n'a connu encore que par tatonnement, font bien voir la justesse & la supériorité de nos Méthodes. *

VI.

Les autres corrections que l'on doit apporter aux Formules & à la Table du précedent Chapitre, regardent l'hypothese que nous avons faite, pour rendre d'abord la Question & les Calculs plus faciles; sçavoir *que les deux Luminaires font des Cercles parfaits autour de la Terre, & cela dans le plan de l'Equateur.* Cette supposition entraîne celle d'une égalité parfaite dans les distances des Luminaires à la Terre, aussi-bien que dans leur mouvement, & elle fait outre cela leur déclinaison, à l'égard de l'Equateur, nulle. Voyons donc à présent ce que les différentes distances, l'inégalité des vitesses & l'obliquité des orbites peuvent faire sur l'heure des Marées.

VII.

Les différentes distances des deux Luminaires à l'egard de la Terre changent le rapport de leurs forces sur la Mer; & c'est cependant de ce rapport que dépendent presque toutes les Propositions du précedent Chapitre. Nous avons supposé ce rapport pour les distances moyennes de la Lune & du Soleil, comme 5 à 2, fondés sur un grand nombre d'Observations, qui doivent nous confirmer dans cette supposition, à l'égard des variations des distances, après avoir remarqué & démontré la Proposition qui suit:

Les Forces de chaque Luminaire sur la Mer sont en raison reciproque triplée de leurs distances à la Terre.

En voici la Démonstration. Nous avons dit & démontré au Chapitre quatriéme, que la Force de chaque Luminaire est généralement $=\frac{ngb}{Gu}, \times b$ en entendant par n un nombre constant par $\frac{G}{g}$ le rapport de la pésanteur dans la region de la Terre vers le Luminaire à la pésanteur qui se fait vers le centre de la Terre, & par $\frac{b}{a}$ le rapport du rayon de la

* Je vois aprés avoir fini cette Piece, que M. Cassini a deja indiqué ce que nôtre Remarque contient de Physique. Voy. les Mem. de l'Ac. des Sç. de 1714. p. 252.

Terre b à la distance du Luminaire a: or comme les différentes distances ne changent que les quantités G & a, nous voyons que la Force de chaque Luminaire est constamment proportionelle à $\frac{g}{a}$, & la quantité g, qui exprime la pésanteur vers le centre du Luminaire, étant reciproquement proportionnelle aux quarrés des Distances a, il s'ensuit que les Forces de chaque Luminaire sur la Mer, sont en raison reciproque triplée de leurs Distances à la Terre.

M. Newton a déja démontré cette Proposition, qui se confirme aussi par toutes les Observations faites sur les Marées, quand on en fait une juste estime, & une application bien ménagée. La Proposition que nous venons de démontrer, nous enseigne qu'à la place de notre Equation fondamentale $\delta = \frac{5}{2}\beta$, employée dans le Chapitre précedent, il faut se servir de celle-ci plus générale

$$\delta = \frac{5}{2} \times \frac{l^3}{L^3} \times \frac{S^3}{s^3} \times \beta.$$

en dénotant par l & s les distances moyennes de la Lune & du Soleil à la Terre, & par L & S leurs Distances donnees quelconques; & là-dessus on pourra calculer toutes les Questions traitées ci-dessus pour des Distances quelconques entre les Luminaires & la Terre: mais nous ne considérerons que deux cas, 1°. Lorsque la Lune étant dans son Périgée, & la Terre dans son Aphelie, le rapport de δ à β devient le plus grand; & 2°. Lorsque la Lune étant au contraire dans son Apogée, & la Terre dans son Perihelie, le rapport de δ à β devient le plus petit. Nous donnerons 1000 parties à la distance moyenne de la Lune, 1055 à sa plus grande distance, & 945 à sa plus petite distance; & pour le Soleil, nous poserons les pareilles distances être en raison de 1000, 1027 & 983: & nous aurons pour le *premier* cas $\delta = 3{,}115\,\beta$; & dans le *second* cas $\delta = 2{,}022\,\beta$.

Comme il ne s'agit ici que des petites corrections, nous supposerons simplement pour le premier cas $\delta = 3\beta$, & pour le second $\delta = 2\beta$; & afin que nos regles soient d'autant plus faciles dans l'application, nous n'aurons point d'égard aux variations du Soleil, comme n'étant presque d'aucune importance par rapport à celles de la Lune. Disons donc simplement, que dans le Perigée de la Lune, il faut mettre $\delta = 3\beta$, & dans l'Apogée $\delta = 2\beta$. Cela étant, voici les conséquences que nous en tirons.

1°. Un jour & demi après les Syzygies, l'intervalle de deux Marées qui se suivent, est dans le Périgée de 24 heures $27\frac{1}{2}$ minutes; & dans l'Apogée de 24 heures 33 minutes.

2°. Un jour & demi après les Quadratures, le même intervalle est dans le Perigée de 25 heures 15 minutes; & dans l'Apogée de 25 heures

heures 40 minutes. Voyez à l'égard de ces deux Propositions le §. VII. du Chap. VI.

3°. Le plus grand intervalle entre le passage de la Lune par le Méridien & la haute Mer (que nous avons vû au XVI. §. du Chap. VI. devoir se faire environ $2\frac{3}{4}$ jours avant & après les Quadratures, sans nos corrections, mais qui sera réellement environ $1\frac{1}{4}$ jours avant, & $4\frac{1}{4}$ après les Quadratures) est de 39 minutes environ le Perigée de la Lune, & d'une heure environ son Apogée. Ce plus grand intervalle se fait aussi plutôt dans le Perigée, & plus tard dans l'Apogée; la différence est d'environ un demi jour.

4°. Pour calculer la Table pareille à celle de ci-dessus, mais qui serve pour le Perigée & pour l'Apogée de la Lune, nous remarquerons que les Sinus des petits Arcs horaires, qui marquent les intervalles entre le passage de la Lune & la haute Mer sont toujours

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}$$

& qu'à la place de cette quantité, on peut substituer la valeur fort approchante $\frac{1}{B} - \frac{3}{2B^3}$ (§. *XVIII. Chap. VI.*) & même qu'on peut négliger ici, sans le moindre scrupule, le second terme, puisqu'il ne s'agit que de petites corrections. Nous considérerons donc ces petits Arcs horaires, comme reciproquement proportionnels aux quantités B, c'est-à-dire, aux quantités $\frac{-\delta bb}{\beta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Et dans cette derniere quantité, nous pourrons encore rejetter sans peine les deux derniers termes pour notre present dessein, & dire par conséquent, que pour les différentes valeurs de $\frac{\delta}{\beta}$, tout le reste étant égal, les intervalles entre le passage de la Lune, & la haute Marée sont reciproquement proportionnels aux valeurs de $\frac{\delta}{\beta}$, ou directement proportionnels aux valeurs de $\frac{\beta}{\delta}$. D'où il paroît que les nombres de la seconde Colonne de notre précedente Table, doivent être multipliés par la Fraction $\frac{5}{6}$ dans le Perigée, & par $\frac{5}{4}$ dans l'Apogée de la Lune, après quoi les nombres de la troisiéme Colonne se déterminent comme dans la précedente Table. Mais quant aux nombres de la premiere Colonne, il faut les augmenter chacun d'environ 20 dégrés, à cause du retard d'un jour & demi expliqué au long dans ce Chapitre, pendant lequel la Lune change de place à l'égard du Soleil d'environ 19 dégrés, à la place desquels je mettrai un nombre rond de 20 dégrés.

Voici donc à present une Table corrigée à l'égard de toutes les cir- cons-

constances exposées jusqu'ici. La premiere Colonne marque la distance qui est entre le Soleil & la Lune, environ le tems de la haute Mer, ou plutôt ici, environ le passage de la Lune par le Méridien. Les trois Colonnes suivantes marquent le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le Méridien, & la haute Mer pour le Perigée, pour les Distances moyennes & pour l'Apogée de la Lune. Et les trois dernieres marquent les heures absolues des hautes Mers pour les Perigées, les Distances moyennes & les Apogées de la Lune. Et pour se servir de cette Table, il ne faudra plus qu'ajoûter aux nombres des six dernieres Colonnes l'heure moyenne du Port en vertu du III. §. La Table n'a été calculée que de dix en dix dégrés: les interpolations suppléeront avec assez de justesse à telle autre Distance entre les deux Luminaires, que les Ephémérides indiqueront. La même méthode des interpolations peut aussi être employée, lorsque la Lune se trouve à une Distance donnée de son Apogée ou Perigée.

TA-

TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGE'E

pour trouver l'heure des hautes Marées.

Distances entre les Luminaires au moment du passage de la Lune par le Meridien.	*Tems de la haute Mer avant & aprés le passage de la Lune par le Meridien en minutes de tems.*			*Table approchante des heures de la haute Mer, dont on peut se servir au défaut des Ephémérides, qui marquent le passage de la Lune par le Meridien.*		
	Perigée de la Lune.	*Distance moyenne de la Lune.*	*Apogée de la Lune.*	*Perigée de la Lune.* H. M.	*Distance moyenne de la Lune.* H. M.	*Apogée de la Lune.* H. M.
0	18 aprés.	22 aprés.	$27\frac{1}{2}$ aprés.	0 18	0 22	0 $27\frac{1}{2}$
10	$9\frac{1}{2}$ aprés.	$11\frac{1}{2}$ aprés.	14 aprés.	0 $49\frac{1}{2}$	0 $51\frac{1}{2}$	0 54
20	0	0	0	1 20	1 20	1 20
30	$9\frac{1}{2}$ avant.	$11\frac{1}{2}$ avant.	14 avant.	1 $50\frac{1}{2}$	1 $48\frac{1}{2}$	1 46
40	18 avant.	22 avant.	$27\frac{1}{2}$ avant.	2 22	2 18	2 $12\frac{1}{2}$
50	26 avant.	$31\frac{1}{2}$ avant.	$39\frac{1}{2}$ avant.	2 54	2 $48\frac{1}{2}$	2 $40\frac{1}{2}$
60	33 avant.	40 avant.	50 avant.	3 27	3 20	3 10
70	$27\frac{1}{2}$ avant.	45 avant.	56 avant.	4 $2\frac{1}{2}$	3 55	3 44
80	$38\frac{1}{2}$ avant.	$46\frac{1}{2}$ avant.	58 avant.	4 $41\frac{1}{2}$	4 $31\frac{1}{2}$	4 22
90	$33\frac{1}{2}$ avant.	$40\frac{1}{2}$ avant.	$50\frac{1}{2}$ avant.	5 $26\frac{1}{2}$	5 $19\frac{1}{2}$	5 $9\frac{1}{2}$
100	21 avant.	25 avant.	31 avant.	6 19	6 15	6 9
110	0	0	0	7 20	7 20	7 20
120	21 aprés.	25. aprés.	31 aprés.	8 21	8 25	8 31
130	$33\frac{1}{2}$ aprés.	$40\frac{1}{2}$ aprés.	$50\frac{1}{2}$ aprés.	9 $13\frac{1}{2}$	9 $20\frac{1}{2}$	9 $30\frac{1}{2}$
140	[illegible] aprés.	$46\frac{1}{2}$ aprés.	58 aprés.	9 $58\frac{1}{2}$	10 $6\frac{1}{2}$	10 18
150	$37\frac{1}{2}$ aprés.	45 aprés.	56 aprés.	10 $37\frac{1}{2}$	10 45	10 56
160	33 aprés.	40 aprés.	50 aprés.	11 13	11 20	11 30
170	26 aprés.	$31\frac{1}{2}$ aprés.	$39\frac{1}{2}$ aprés.	11 46	11 $51\frac{1}{2}$	11 $59\frac{1}{2}$
180	18 aprés.	22 aprés.	$27\frac{1}{2}$ aprés.	0 18	0 22	0 $27\frac{1}{2}$

Cette Table suppose encore le plan des Orbites de la Lune & du Soleil être le même que celui de l'Equateur de la Terre, ce qu'il faut sur-tout remarquer à l'égard des trois dernieres Colonnes. Mais cette supposition n'a pas beaucoup d'influence sur les autres Colonnes; & les Ephémerides, qui marquent le passage de la Lune par le Méridien, suppléeront aux trois dernieres.

VIII.

Après avoir exposé au long tout ce que les différentes distances des Luminaires, & sur-tout de la Lune à la Terre, peuvent contribuer pour faire varier l'heure des Marées, nous dirons aussi un mot sur l'inégalité du mouvement des Luminaires.

Cette inégalité seroit d'une très-grande importance, s'il falloit construire une Table pour les heures des Marées, sans se rapporter aux Tables & aux Ephémerides: mais elle ne nous est d'aucune conséquence, puisque nous supposons l'heure du passage de la Lune par le Méridien, aussi-bien que l'Arc compris entre les deux Luminaires, connus par les Ephémerides. C'est la raison qui m'a engagé à rapporter l'heure des Marées au passage de la Lune par le Méridien, en donnant une Table, qui marque, combien la premiere avance ou retarde sur l'autre.

IX.

Il nous reste à considérer les inclinaisons des Orbites à l'égard de l'Equateur: pour cet effet il faut concevoir un Cercle qui passe par les centres du Soleil, de la Lune & de la Terre; & c'est proprement ce Cercle que doivent représenter toutes nos Figures, que nous avons considérées jusqu'ici, comme représentant l'Equateur de la Terre. On voit bien après cela, que tous les Points resteront dans ce Cercle aux mêmes endroits; & que les Arcs se conserveront tels, que nous les avons déterminés: mais les Angles horaires formés sur l'Equateur par ses Arcs, en sont changés. On ne sçauroit sans une Théorie parfaite de la Lune déterminer au juste ces Angles horaires, à cause de la variabilité de l'inclinaison de l'Orbite lunaire à l'égard de l'Equateur; mais aussi ce changement n'est-il pas fort considérable, par rapport à l'Arc horaire compris entre le passage de la Lune par le Méridien, & le moment de la haute Mer; nous supposerons, & nous pouvons le faire ici sans aucune erreur sensible, que les Orbites de la Lune & du Soleil sont dans un même plan, ayant chacune une inclinaison avec l'Equateur de $23^d. 30^m$. & nous considérerons là-dessus la Lune dans trois sortes de situation: 1°. Lorsque sa déclinaison, à l'égard de l'Equateur, est nulle; & alors il faut multiplier les nombres de la seconde, troisiéme & quatriéme Colonnes de notre Table par $\frac{92}{100}$, & ce qui proviendra marquera le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le Méridien, & l'heure de la haute Mer. 2°. Lorsque la Lune se trouve dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'Equateur; & alors il faut multiplier lesdits nombres de notre Table par $\frac{100}{92}$. Et enfin 3°. lorsque la Lune se trouve au milieu de ces deux situations; auquel cas il faut se servir de notre Table, sans y apporter aucun changement. Quant aux autres situations de la Lune en longitude, on peut se servir du principe de la proportionalité de la différence des termes. Ces regles sont fondées sur la proportion qu'il y a entre les petits Arcs de l'Ecliptique & de l'Equateur, compris entre deux mêmes Méridiens fort proches l'un de l'autre.

X.

Il suit de tout ce que nous venons de dire, que le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le Méridien & la haute Marée, est environ un jour avant les Quadratures, & quatre jours après les Quadratures, la Lune dans son Apogée & dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'Equateur de la Terre; & que dans le concours de toutes ces circonstances, ledit plus grand intervalle peut aller jusqu'à 63 minutes de tems, que la haute Marée avancera sur le passage de la Lune par le Méridien un jour avant les Quadratures, & qu'elle retardera quatre jours après les Quadratures.

XI.

Voilà mes refléxions sur le tems des Marées; je me flatte qu'elles ont toute la précision qu'on peut esperer sur cette matiere, du moins quant à la Méthode. Toute l'incertitude qui y reste encore, est fondée sur le rapport moyen entre les forces de la Lune & du Soleil, que je crois pourtant avoir fort bien déterminé, puisque tous nos Théoremes conviennent si bien avec les Observations. Un plus grand nombre d'Observations nous donnera peut-être un jour plus de précision là-dessus. Il est vrai que nous n'avons determiné l'heure & les intervalles des Marées, que sous la Ligne Equinoctiale; mais je ne crois pas que la latitude des lieux puisse changer sensiblement les intervalles des Marées: ainsi je n'ai pas jugé nécessaire d'en parler. La latitude des lieux a cependant beaucoup de liaison avec la hauteur des Marées: c'est à quoi nous ferons attention dans la suite.

CHA-

CHAPITRE VIII.

Sur les différentes hauteurs des Marées pour chaque jour de la Lune.

I.

JE me propose à présent d'examiner les diversités des hauteurs des Marées, non d'un endroit à l'autre, mais d'un même endroit, que nous supposerons d'abord pris sous l'Equateur, pour toutes les diverses circonstances qui peuvent se rencontrer. Nous suivrons, pour cet effet, la même Methode que nous avons observée pour déterminer généralement l'heure des Marées, c'est-à-dire, que nous commencerons nos recherches par les cas les plus simples, pour ne pas être arrêtés tout court en voulant surmonter trop de difficultés à la fois : nous nous servirons donc d'abord des mêmes hypotheses que nous avons employées dans le Chap. VI. & que nous avons exposées à la fin du Chap. IV. après quoi nous pousserons nos recherches dans le Chapitre suivant à tous les cas possibles, tout comme nous avons fait dans le Chapitre précedent pour déterminer généralement l'heure des Marées.

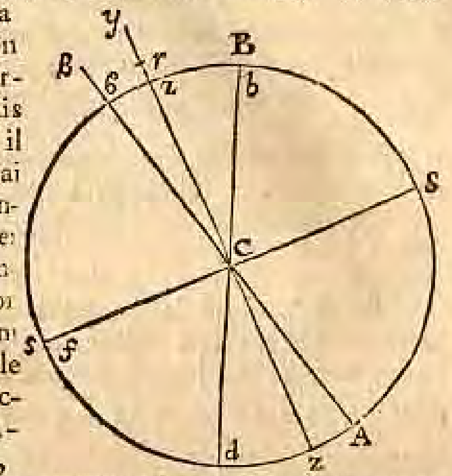
II.

J'entens par hauteur d'une Marée toute la variation de la hauteur verticale des eaux, depuis la haute Mer jusqu'à la basse Mer suivante. Pour trouver cette hauteur, il faut d'abord faire attention aux §. §. XI. XII. & XIII. du Chap. V. qui déterminent l'Equateur, les lieux de la Lune & du Soleil étant donnés, la position des deux points ausquels la Mer est la plus haute & la plus basse; après quoi le VIII. Art. du même Chapitre donnera la hauteur cherchée, en cherchant premierement la hauteur de la haute Mer, & ensuite la hauteur de la basse Mer.

III.

Remarquons d'abord, que les deux points de la Circonférence, qui marquent la haute & la basse Mer, sont éloignés entre eux de 90 dégrés. On le voit par les expressions des §. §. XI. & XIII. & nous l'avons démontré dans la premiere Remarque du §. XII. Chap. V. Supposant donc le Soleil répondre au Point b, la Lune au Point β, & que la haute Mer réponde au Point z, il faut prendre l'Arc zs de 90 dégrés,

grés, & le Point s sera celui qui répond à la basse Mer. Cherchez donc par le VIII. §. du Chap. V. la valeur de yz, qui marque l'élevation des eaux pour le Point z; & ensuite prenez de la même maniere la valeur de sx, qui étant négative, marque la dépression des eaux; cela étant fait, on voit que la somme de yz & de sx marquera la hauteur de la Marée; mais dans l'expression analytique de sx, il faut changer les Signes. Il est vrai que cette Methode suppose, que pendant l'intervalle, depuis la haute Mer jusqu'à la basse Mer, la Lune ne change pas de place; & c'est à quoi on pourroit avoir égard, en augmentant d'environ trois dégrés l'Arc $b\beta$ dans le Calcul de sx: mais ce seroit une exactitude hors de place, & qui augmenteroit beaucoup les peines du Calcul, qui n'est déja que trop embarassé. On pourra même remedier à ce petit défaut, déja insensible par sa nature, en prenant l'Arc $b\beta$, tel qu'il est, non au moment de la haute Marée, ni à celui de la basse Mer, mais au milieu de leur intervalle; & c'est ce que nous supposerons dans la suite.



Soit donc comme dans le V. Chap. le Sinus de l'Arc $b\beta = m$; son Cosinus $= n$; le Sinus de l'Angle $bCz = \sigma$; le Sinus de l'Angle $\beta Cz = \varrho$; le Sinus total $= b$; & nous aurons en vertu du §. VIII. Chap. V.

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta + \frac{2bb - 3\varrho\varrho}{3bb} \times \delta.$$

De là on trouvera sx en vertu du §. XII. Chap. V. en mettant $bb - \sigma\sigma$, & $bb - \varrho\varrho$ à la place de $\sigma\sigma$ & de $\varrho\varrho$: & de cette façon on aura

$$sx = \frac{3\sigma\sigma - bb}{3bb} \times \beta + \frac{3\varrho\varrho - bb}{3bb} \times \delta.$$

Changez à present les Signes dans la valeur de sx, & supposez la hauteur de la Marée $= M$, & vous aurez

$$M = \frac{bb - 2\sigma\sigma}{bb} \times \beta + \frac{bb - 2\varrho\varrho}{bb} \times \delta.$$

Cette derniere expression marque généralement la hauteur des Marées, puisqu'on peut toujours déterminer les valeurs de $\sigma\sigma$ & $\varrho\varrho$ par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. Mais les Calculs ne laissent pas d'être assez pénibles, quoi-que les Formules ne soient pas prolixes. Nous tâcherons

 donc

donc de rendre ces Calculs plus faciles, sans déroger beaucoup à l'exactitude des Formules.

IV.

Voyons donc d'abord ce qui arriveroit, si la Force lunaire étoit infiniment plus grande que la Force solaire. On auroit en ce cas $\varrho = 0$ & $\sigma = m$,

$$M = \beta + \delta - \frac{2mm}{bb} \times \beta,$$

laquelle Formule ne sçauroit manquer d'être assez approchante ; elle donne même la juste valeur pour les Syzygies & pour les Quadratures.

V.

Pour déterminer les hauteurs des Marées plus exactement encore, nous considérerons la valeur de ϱ comme fort petite, au lieu de la supposer tout-à-fait nulle, comme nous l'avons fait dans l'Article précedent : mais nous pourrons supposer hardiment $\varrho = \frac{\beta m n}{\delta}$, & on verra que cette supposition ne sçauroit s'éloigner beaucoup de la vérité, si l'on consulte l'Article VII. du précedent Chapitre vers la fin, & le peu d'erreur qui pourroit s'y trouver, n'est presque d'aucune conséquence pour notre présent sujet. On voit outre cela, que ϱ étant fort petit, on peut supposer cette Analogie

$$\varrho : m - \sigma :: b : n ;$$

puisque cette Analogie seroit exactement vraie, si les quantités ϱ & $m - \sigma$ étoient réellement & infiniment petites : de cette Analogie on tire

$$\sigma = m - \frac{n\varrho}{b} = m - \frac{mnn\beta}{b\delta} ;$$

substituant ces valeurs exposées pour les quantités ϱ & σ, & faisant le Sinus total $b = 1$, on obtient cette Equation,

$$M = \beta + \delta - 2mm\beta + \frac{2m^2n^2\beta\beta}{\delta} - \frac{2m^2n^4\beta^3}{\delta\delta}.$$

De cette maniere il paroit que les Marées décroissent depuis les Syzygies jusqu'aux Quadratures, & qu'elles croissent avec la même loi depuis les Quadratures jusqu'aux Syzygies. Ceux qui voudront essayer la juste Equation du §. III. & cette Equation approchante, sur un même exemple, verront qu'elles ne different gueres.

VI.

Il nous sera facile à présent de calculer & de donner une Table pour les hauteurs des Marées, telle que nous en avons donné une à la fin du Chap. VI. pour les heures des Marées, & pour laquelle nous tâcherons

rons

rons dans le Chapitre suivant de trouver les corrections nécessaires aux différentes circonstances, tout comme nous avons fait à l'égard de ladite Table du VI. Chap. Nous supposerons encore le rapport moyen de δ à β être comme 5 à 2, tant que nous n'avons pas des Observations qui puissent déterminer ce rapport au juste. Nous donnerons mille parties à la hauteur de la plus grande Marée.

La *premiere* Colonne marquera dans cette Table de dix en dix dégrés les Arcs compris entre les deux Luminaires, environ le milieu des Jusans (§. III.) c'est-à-dire, environ trois heures après le passage de la Lune par le Méridien ; la *seconde* Colonne donnera les hauteurs cherchées des Marées, pour les susdites hypotheses ; & la *troisième* en marquera les différences.

T A

TABLE FONDAMENTALE

pour trouver les Hauteurs des Marées, ou les Descentes verticales des eaux pendant les Jusans.

Distance entre les Luminaires en Dégrés.	*HAUTEUR DES MARÉES.*	*DIFFERENCE DES HAUTEURS.*
0 Dégrés.	1000 Parties.	
10	987	− 13
20	949	− 38
30	887	− 62
40	806	− 81
50	715	− 91
60	610	− 105
70	518	− 92
80	453	− 65
90	429	− 24
100	453	+ 24
110	518	+ 65
120	610	+ 92
130	715	+ 105
140	806	+ 91
150	887	+ 81
160	949	+ 62
170	987	+ 38
180	1000	+ 13

VII.

Si on avoit voulu construire cette Table conformément à l'Equation finale du §. III. qui est la vraie Equation, on auroit pu profiter de la Table du VI. Chap. dans laquelle les nombres de la seconde Colonne divisés par 4, donnent les dégrés de l'Arc, dont le Sinus est appellé ρ; après quoi on connoît aussi l'Arc dont le Sinus est appellé σ. Connoissant ainsi par les Tables les quantités ρ & σ, on trouve sans beaucoup de peine la valeur de M du §. III.

VIII.

On voit aussi, que si la distance entre les deux Luminaires est entre deux nombres de la premiere Colonne, on peut sans aucune erreur sensible employer le principe général des Interpolations, de sorte que cette Table peut suffire pour tous les cas.

IX.

On remarquera au reste, qu'il est ici de grande importance d'avoir substitué la vraie valeur pour $\frac{\delta}{\epsilon}$, & qu'un assez petit changement dans cette valeur, a une grande influence sur le rapport des Marées. On ne doit donc encore considérer cette Table, que comme un exemple de nos Formules générales : le Chapitre suivant fera voir les précautions que l'on doit prendre là-dessus.

X.

Nous voyons tant par les Formules que nous avons données pour les hauteurs des Marées, que par la précedente Table, qu'elle est *in abstracto* la nature des variations des Marées. On peut faire là-dessus les Remarques qui suivent.

1°. Que les changemens des Marées sont fort petits, tant aux Syzygies qu'aux Quadratures, & ils seroient infiniment plus petits que les autres, si l'intervalle d'une Marée à l'autre étoit aussi infiniment petit.

2°. Que les plus grands changemens ne se font pas précisément au milieu, mais plus près des Quadratures que des Syzygies : c'est-à-dire, que la plus grande diminution de Marée se fait dans nos suppositions, lorsque la Lune est environ à 60 dégrés (80 avec la correction de 20 dégrés expliquée au Chap. VII.) depuis les Syzygies; le plus grand décroissement se fait donc de la neuviéme à la dixiéme Marée (de la douziéme à la treiziéme avec la correction) : de même le plus grand accroissement se fait à environ 30 dégrés depuis les Quadratures (50 dégrés avec la correction) qui répond au changement de la quatriéme à la cinquiéme Marée (de la septiéme à la huitiéme avec la correction) depuis les Quadratures. Je parle dans cette Remarque de toutes les Marées qui se font, tant celles du matin, que celles du soir, pour rendre leurs intervalles plus petits : on se souviendra cependant de ce que j'ai dit expressément, que je fais abstraction par-tout ailleurs des Marées, qui répondent au passage inférieur de la Lune par le Méridien, lorsqu'il s'agit de comparer les Marées entre elles : car ces deux sortes de Marées ont quelques inégalités entre elles, que je n'ai pas encore considérées.

3°. Que les petits changemens dans les Syzygies, & ceux des Quadratures, comparés entre eux, sont inégaux ; puisque ceux-ci sont environ doubles de ceux-là. Dans l'application de cette Remarque il faudra ajoûter, de part & d'autre, trois Marées, ou environ un jour & demi de tems.

4°. Que le plus grand changement de deux Marées qui se suivent, entre celles qui répondent à la Lune de dessus (dont l'intervalle répond à environ 13 degrés de variation dans la distance de la Lune au Soleil) fait près du quart de la variation totale de la plus grande à la plus petite Marée.

X I.

Je ne doute pas que les Observations ne confirment en gros les Remarques que je viens de faire, & toutes les Regles précedentes. On ne sçauroit plus douter de la Théorie que nous avons adoptée & établie ; & la Théorie posée, les Calculs en sont sûrs. Mais comme nous ne sommes pas encore sûrs des hypotheses secondes, qu'on ne sçauroit éviter, telles que sont le juste rapport entre la force lunaire & solaire, que nous avons supposé comme 5 à 2 ; le retardement des effets de la Lune sur sa position, que nous avons supposé d'un jour & demi, ou de trois Marées, ou de 20 dégrés, que la Lune peut parcourir en longitude pendant ce retardement, &c. nous nous croyons en droit de demander quelque indulgence pour le resultat desdites Remarques & Regles. Cependant comme je n'ai fait aucune supposition sans un mur examen fondé sur les plus justes Observations choisies entre toutes celles qui peuvent les déterminer, j'oserois me flatter d'un assez bon succès, si Messieurs les ACADEMICIENS vouloient se donner la peine de confronter nos Tables, nos Regles & nos Théoremes nouveaux avec les Observations, dont ils ont un grand Trésor : mais ce succès, dont je me flatte par avance, se manifestera davantage, si ils veulent encore faire attention aux corrections que je vais donner dans le Chapitre suivant, à l'égard de diverses circonstances variables, & que nous avons supposées dans ce Chapitre comme constamment les mêmes.

CHAPITRE IX.

Sur les Hauteurs des Marées corrigées, suivant differentes circonstances variables.

I.

NOus suivrons dans cet examen la même route que nous avons tenuë dans le VII. Chap. à l'égard du tems des Marées. Pour commencer donc par l'effet des Vents & des Courants, on voit bien qu'ils peuvent augmenter & diminuer les Marées, & que ces variations ne sont pas d'une nature à pouvoir être aucunement determinées. On pourra pourtant remarquer que lorsque ces causes conservent pendant un tems un peu considérable leur force & leur direction, leur effet consistera plûtôt à hausser ou baisser la Mer elle-même, qu'à augmenter ou diminuer les Marées.

I I.

Les circonstances attachées à chaque Port ou autre endroit en particulier, telles que sont sa situation, la profondeur des eaux, la pente des fonds, la communication avec l'Océan, &c., font extrêmement varier les Marées. Ce sont ces causes qui font que les grandes Marées ne sont que d'un petit nombre de pieds dans de certains endroits de 8 ou 10 pieds dans d'autres, & de 50 à 60 pieds, & au-delà encore dans d'autres endroits. Ce qu'il y a de singulier, est que dans la Mer libre les grandes Marées ne sont que d'environ 8 pieds, pendant qu'elle vont au-delà de 50 pieds dans plusieurs Ports & autres endroits, dont la communication avec la Mer ouverte, est entrecoupée & empêchée de tous côtés ; & qui par conséquent devroient, selon les premieres apparences, avoir les Marées moins grandes. Nous donnerons dans un autre Chapitre la raison hydrostatique de ce Phénomene, pour ne point nous écarter de notre sujet présent. Cela fait d'abord voir, qu'on ne sçauroit rien déterminer sur les grandeurs absoluës des Marées, & que tout ce que la Théorie pourroit encore faire, seroit d'en marquer le rapport : mais l'expérienee nous enseigne encore, que ce rapport même n'est pas constant dans les différens endroits, quoi qu'il soit renfermé dans des bornes plus étroites.

La

La grande Marée sera double de la petite Marée dans un endroit; & elle pourra être triple dans un autre: c'est que les causes qui font varier les hauteurs absoluës des Marées à l'égard de différens endroits, ne gardent pas une proportion tout-à-fait constante. Mais les Marées moyennes entre la plus grande & la plus petite pendant une même revolution de la Lune, peuvent être censées observer les regles que nous leur avons prescrites dans le Chapitre précedent. Il y a même apparence, que les changemens qui dépendent de la différente situation des Luminaires observeront à-peu-près les Loix que nous avons démontrées *in abstracto*. Ces refléxions m'ont déterminé à considérer la plus grande & la plus petite Marée, non telles qu'elles devroient être dans la Théorie pure, mais telles qu'on les observe, lorsque les Luminaires se trouvent à peu près dans l'Equateur, & dans leurs distances moyennes à la Terre, sans qu'aucune cause accidentelle les trouble. Nous avons démontré au III. §. du Chap. VIII. que la hauteur de la grande Marée doit être exprimée par $\delta + \epsilon$, & la hauteur de la petite Marée par $\delta - \epsilon$: mais si l'on suppose la hauteur moyenne réelle de la grande Marée A & de la petite Marée B, il faudra suivant cette correction faire

$$\delta + \epsilon = A, \ \& \ \delta - \epsilon = B:$$

c'est-à dire,

$$\delta = \frac{A+B}{2}, \ \& \ \epsilon = \frac{A-B}{2};$$

& ces valeurs doivent être substituées dans les Equations & Formules du Chapitre précedent. En supposant $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$ comme nous avons fait, on obtient $\frac{A}{B} = \frac{7}{3}$, & si cette raison étoit confirmée par les Observations, il n'y auroit aucun changement à faire. On pourroit se servir de la Table, telle qu'elle est, en donnant toujours 1000 parties à la hauteur de la grande Marée. Mais si $\frac{A}{B}$ avoit réellement une autre valeur considérablement différente de celle que nous venons de lui assigner, il ne faudroit pas négliger la correction que nous venons d'indiquer.

L'on voit aussi après ces considérations, qu'on ne doit pas s'attendre à pouvoir déterminer avec la derniere précision les hauteurs des Marées. Nous pourrons donc sans scrupule, pour rendre nos Propositions plus nettes & plus sensibles, nous servir de l'équation du §. IV. Chap VIII. qui aussi-bien approche beaucoup de la vraie équation de l'Article qui précéde l'autre. Nous supposerons donc la hauteur des Marées toujours exprimée par $\delta + \epsilon - 2\, mm\epsilon$, & employant la correction indiquée, nous aurons à présent

$$M = A - mm\,A + mm\,B, \text{ ou plus simplement,}$$
$$M = nn\,A + mm\,B:$$

C'est

C'est donc de cette derniere équation, que nous nous servirons dans la suite de cette Dissertation.

III.

Cette correction pourra en même tems remédier à un autre inconvenient, qui provient de l'inertie & de la Masse des eaux. Nous avons déja dit ailleurs que les Marées sont une espéce d'oscillations qui tâchent naturellement à se conserver telles qu'elles sont: on sent bien que cette raison doit empêcher les grandes Marées d'atteindre toute leur hauteur, & les petites de diminuer autant qu'elles devroient faire naturellement: qu'elle ne doit pas changer sensiblement la Marée moyenne entre la plus grande & la plus petite, & qu'elle change les autres d'autant plus qu'elles sont plus éloignées de cette Marée moyenne. Et on voit que notre correction satisfait à toutes ces trois conditions.

IV.

Après ladite correction qui regarde immédiatement les hauteurs des Marées, il faut encore employer celle qui regarde les tems, que nous déterminons par les Phases de la Lune, ou par les distances, qui sont entre les Luminaires. Nous avons expliqué au long aux §. §. IV. & V. du Chap. VII. que les Phases de la Lune qui répondent aux Marées en question, ne doivent pas être prises telles qu'elles sont, mais telles qu'elles seroient environ un jour & demi après, c'est-à-dire, que les distances entre les Luminaires doivent être augmentées d'environ 20 dégrés, & moyennant cette correction, la Théorie ne sçauroit manquer de satisfaire au juste aux Observations.

V.

Nous n'avons consideré jusqu'ici les Luminaires, que dans leurs distances moyennes à la Terre, & c'est pour ce cas que nous avons appellé la hauteur de la plus grande Marée A, & celle de la plus petite Marée B. Pour déterminer donc ce que les différentes distances peuvent faire sur les hauteurs des Marées, il faudra se rappeller tout l'Art. VII. du Chap. VII. Nous y avons démontré, que la force lunaire doit être supposée généralement $= \frac{l^3}{L^3} \times \delta$, & la Force solaire $= \frac{s^3}{S^3} \times \epsilon$. Or comme la somme de ces Forces exprime toujours la hauteur de la grande Marée, & que la différence des mêmes Forces exprime la hauteur de la petite Marée, il faudra faire ces deux Analogies:

 $\delta + \epsilon$

$$\delta + \epsilon : \frac{l^3}{L^3} \times \delta + \frac{s^3}{S^3} \times \epsilon :: A : \frac{l^3 S^3 \delta + L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta + \epsilon)} \times A$$

$$\delta - \epsilon : \frac{l^3}{L^3} \times \delta - \frac{s^3}{S^3} \times \epsilon :: B : \frac{l^3 S^3 \delta - L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta - \epsilon)} \times B.$$

La premiere de ces quatriémes proportionnelles marquera donc la hauteur corrigée de la grande Marée, & la seconde, la hauteur corrigée de la petite Marée. Par conséquent l'équation finale du II. §. sera celle-ci après sa correction:

$$M = \frac{l^3 S^3 \delta + L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta + \epsilon)} \times n\,n\,A + \frac{l^3 S^3 \delta - L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta - \epsilon)} \times m\,m\,B.$$

Je m'assure que cette équation donnera toujours les hauteurs des Marées avec toute la justesse qu'on peut attendre sur cette matiere, pour les suppositions ausquelles notre Théorie est encore assujettie. Mais comme il est presque impossible qu'il n'y ait absolument aucune cause étrangére, qui trouble les Marées, nous ne devons pas être trop scrupuleux sur ces corrections, qui sont elles-mêmes médiocres. Ainsi pour rendre nos regles plus sensibles & plus faciles, nous ne ferons point d'attention aux changemens dans les distances du Soleil à la Terre; ces changemens sont beaucoup plus petits que dans la Lune, & ils sont en même tems de beaucoup moindre conséquence: Nous supposons donc S constamment $= s$. Quant à la Lune, nous la considérerons, tout comme nous avons fait au VII. §. du Chap. VII. dans son Perigée, dans sa distance moyenne & dans son Apogée, & nous retiendrons les suppositions que nous avons faites audit Article, pour les distances de la Lune, & pour les conséquences que nous en avons tirées. Nous ferons donc pour le premier cas $\delta = 3\epsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 0{,}8439$: pour le second cas $\delta = \frac{5}{2}\epsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 1{,}000$, & enfin pour le troisiéme $\delta = 2\epsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 1{,}174$. De cette façon nous aurons les trois équations qui suivent, exprimées en nombres décimaux.

1°. Pour le Périgée de la Lune,

$$M = 1{,}138\, n\,n\,A + 1{,}277\, m\,m\,B.$$

2°. Pour les distances moyennes de la Lune,

$$M = n\,n\,A + m\,m\,B.$$

3°. Pour l'Apogée de la Lune

$$M = 0{,}901\, n\,n\,A + 0{,}703\, m\,m\,B.$$

On remarquera dans ces équations, que A marque la hauteur de la grande Marée, & B la hauteur de la petite Marée dans les distances moyennes des Luminaires à la Terre, ces Luminaires étant supposés l'un & l'autre se trouver dans l'Equateur: que m marque le Sinus de l'Arc compris entre les Luminaires diminué de 20 dégrés, & n le Cosinus de cet Arc.

On remarquera après cela, que les grandes Marées sont comprises en vertu de la premiere & de la troisiéme équation dans les termes de 1138 à 901, & les Marées bâtardes dans les termes de 1277 à 703; d'où l'on voit que la différence entre les grandes Marées n'est pas à beaucoup près si grande, qu'elle l'est entre les Marées bâtardes, si on compare cette différence à la hauteur de la Marée qui lui répond. Cela se confirme par l'expérience, & c'est une nouvelle source des irrégularités des petites Marées comparées entre elles, dont nous avons déja parlé ailleurs, & que M. Cassini n'a pas manqué d'observer.

VI.

J'ajoûterai ci-dessous une Table fondée & calculée sur les trois dites équations, mais qui se rapporte aux Quantités A & B, qu'il faut donc connoître par expérience pour le Port ou autre endroit, dont il est question. On pourra déterminer ces Quantités A & B, sur un grand nombre d'Observations, tant des hautes que des petites Marées, en prenant des unes & des autres le milieu Arithmétique.

VII.

On remarquera, quant à la construction de la Table que nous allons donner, que les Arcs compris entre les Luminaires, ont été augmentés de 20 dégrés à l'égard de la Table précédente, dans laquelle on n'a pas eu égard aux causes secondes & aux corrections à faire. Ces 20 dégrés sont déterminés par le retard d'un jour & demi des Marées, par rapport aux Phases de la Lune, expliqué ci-dessus: il est vrai que cet intervalle d'un jour & demi ne demande pas tout-à-fait 20 dégrés de correction: mais comme il faudroit estimer les distances entre les Luminaires, telles qu'elles sont, non au moment de la haute-Mer (qui doit être supposée se faire au moment du passage de la Lune par le Méridién) mais au milieu du Jusan, en vertu du III. §. du Chap. VIII. & que l'intervalle depuis la haute Mer jusqu'au milieu du Jusan, demande encore une correction d'environ un dégré & demi, la somme de ces corrections peut être supposée de 20 dégrés, en estimant les distances des Luminaires au moment du passage de la Lune par le Méridien, que les Ephémérides indiquent.

VIII.

Voici donc à présent la Table. La *premiere* Colonne y marque les distances entre la Lune & le Soleil dans le moment du passage de la Lune par le Méridien: les *trois* autres Colonnes marquent les hauteurs des Marées pour le Périgée de la Lune, pour les distances moyennes de la Lune à la Terre, & pour l'Apogée de la Lune.

TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGE'E pour trouver les Hauteurs des Marées.

Distances entre les Luminaires.	*HAUTEURS des Marées au Périgée de la Lune.*	*Hauteurs des Marées aux Distances moyennes de la Lune à la Terre.*	*HAUTEURS des Marées à l'Apogée de la Lune.*
0 Deg.	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
10	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
20	1,138A+0,000B	1,000A+0,000B	0,901A+0,000B
30	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
40	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
50	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
60	0,668A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
70	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
80	0,284A+0,958B	0,250A+0,750B	0,225A+0,527B
90	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
100	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
110	0,000A+1,277B	0,000A+1,000B	0,000A+0,703B
120	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
130	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
140	0,284A+0,958B	9,250A+0,750B	0,225A+0,527B
150	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
160	0,668A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
170	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
180	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B

I X.

Il nous reste à considérer les déclinaisons des Luminaires & les latitudes des lieux sur la Terre, pour lesquels on cherche la nature des Marées. Nous avons supposé les unes & les autres nulles dans ce Chapitre. Mais cette matiere est si riche & si remarquable par plusieurs propriétés très singulieres, & elle demande d'ailleurs tant d'attention, que j'ai cru devoir la traiter à part. Ce sera donc le sujet du Chapitre suivant.

CHAPITRE X.

Dans lequel on examine toutes les propriétés des Marées, qui dépendent des différentes Déclinaisons des Luminaires & des différentes latitudes des Lieux.

I.

LEs déclinaisons des Luminaires à l'égard de l'Equateur, & les distances des lieux sur la Terre du même Equateur, ont tant de rapport entre elles, qu'on ne sçauroit bien traiter cette matiere, qui est une des plus importantes de notre sujet, sans les considérer les unes & les autres en même tems. Mais pour ne pas rendre la question trop embarrassante dès le commencement, nous ne ferons d'abord attention qu'à la Lune, tout comme si les Marées étoient uniquement produites par l'action lunaire. Nous considérerons aussi la chose d'abord suivant la pure Théorie, & nous verrons ensuite quelles corrections on y pourra employer.

I I.

Ressouvenons-nous de tout ce que nous avons dit dans quelques-uns des premiers Chapitres, & sur-tout dans le cinquiéme, sur le changement de la figure de la Terre produit par l'action de l'un des Luminaires. Nous avons considéré la Terre d'abord comme parfaitement sphérique: nous avons démontré ensuite que cette figure est changée par l'action de l'un des Luminaires en ellipsoïde, dont l'Axe prolongé passe par le centre du Luminaire agissant; & enfin que la rotation diurne de la Terre fait que chaque Point dans la surface de la Terre, doit tantôt se baisser, tantôt s'élever, afin que sa figure ellipsoïde soit conservée; mais nous n'avons calculé ces baissemens & haussemens, que pour les Points

Points pris dans l'Equateur même, dans le plan duquel nous avons supposé en même tems se trouver l'Axe de l'Ellipsoïde. C'est pour ces cas, que nous avons démontré (§. *V. Chap. V.*) *que les baissemens des eaux sont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute Mer*; & l'on remarquera que ces Angles horaires sont proportionnels alors aux Arcs compris entre le Pole de l'Ellipsoïde & le Point en question.

I I I.

Voici à présent comment il faut s'y prendre, pour trouver les mêmes baissemens & haussemens, qui se font pendant le mouvement diurne de la Terre dans un point quelconque, & la Lune ayant aussi une déclinaison quelconque. On voit qu'on aura toujours le même Ellipsoïde, quelle que soit la déclinaison de la Lune; mais qu'il sera obliquement posé à l'égard de l'Equateur: on voit aussi qu'il faut s'imaginer dans ce Sphéroïde allongé une Section parellele à l'Equateur, qui passe par le point en question: cette Section ne sera pas un cercle parfait, & sa circonférence n'aura pas tous ses points également éloignés du centre de l'Ellipsoïde: c'est les différences de ses distances, qui forment la nature des Marées. Il s'agit donc de déterminer ces différences.

I V.

Pour cet effet il faudra commencer par chercher les distances de chaque point du Parallele au *Pole de l'Ellipsoïde* (j'appelle ainsi l'extrémité de l'Ellipsoïde, qui prolongé, passe par le centre de la Lune) & ces distances étant connues, il est facile de trouver la distance du même point au centre de l'Ellipsoïde, & les différences de ces distances. Car si le Cosinus de la distance d'un point pris dans le Parallele au Pole de l'Ellipsoïde étoit ρ, le Sinus total $= 1$, & si le demi Axe de l'Ellipsoïde est nommé $b + \delta$, & le plus petit demi-diametre b, la distance du point pris par le Parallele jusqu'au centre de l'Ellipsoïde sera généralement $= b + \rho\rho\delta$; nous avons démontré cette Proposition au §. V. Chap. V.

V.

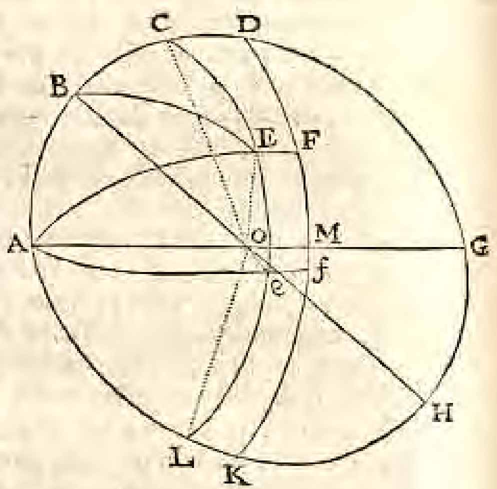
Nous montrerons donc d'abord, comment il faudra déterminer la distance d'un Point quelconque, pris dans un Parallele donné au Pole de l'Ellipsoïde. La voye de la Trigonometrie sphérique ordinaire nous seroit assez inutile ici, puisqu'il nous faut des expressions analytiques, applicables à tous les cas, & traitables aux Calculs. Si l'on vouloit tirer de telles expressions des regles de ladite Trigonometrie, les formules qui en en proviendroient feroient beaucoup trop prolixes. M. Mayers nous a donné là-deffus un beau Mémoire inféré dans les Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences de Petersbourg Tom. 2. p. 12. Il y a dans ce Mémoire au XVIII. §. un Théoreme général, par le moyen duquel on pourra toujours de trois chofes données dans un Triangle fphérique, trouver le refte par des expreffions analytiques extrêmement fimples. Voici le cas que notre fujet demande.

Soit dans un Triangle fpherique, le Sinus total $= 1$; le Sinus d'un des côtés $= S$; le Cofinus du même côté $= C$; le Sinus d'un autre côté $= s$; le Cofinus de cet autre côté $= c$; le Cofinus de l'Angle compris entre les deux côtés donnés $= y$; le Cofinus du troifiéme côté oppofé à l'Angle donné, que j'appellerai q, fera exprimé par cette équation

$$q = Ssy + Cc.$$

V I.

Soit à prefent $ADGK$ le Méridien de la Terre, qui paffe par le centre de la Lune, & que la Lune réponde au point B, qui deviendra ainfi le Pole de l'Ellipfoïde, & la droite BH, qui paffe par le centre O, fon Axe. Soit l'Axe de rotation de la Terre AG, les Poles A & G; DFK l'Equateur; CEL un Parallele, dans lequel nous prendrons un point quelconque E, & qu'on tire enfin par ce point E, & par le Pole A l'Arc AEF.



De cette maniere, l'Arc AB fera le complément de la déclinaifon de la Lune; l'Arc AE fera le complément de la latitude du point E, & l'Arc DF fera l'Arc horaire depuis le paffage du point E par le Méridien, qui paffe par la Lune; de forte qu'on connoît dans le Triangle BAE, les Côtés BA & EA; avec l'Angle compris BAE, & de là on tirera par le moyen du Théoreme expofé au précédent Article, l'Arc BE, qui eft la diftance du Point E au Pole de l'Ellipfoïde.

Nous nommerons donc encore le Sinus total 1, le Sinus du côté $AB = S$; fon Cofinus $= C$; le Sinus du côté $AE = s$, fon Cofinus $= c$; le

le Cofinus de l'Arc DF, qui eft la mefure de l'Angle BAE, $= y$; le Cofinus de l'Arc $BE = q$: nous aurons

$$q = Ssy + Cc.$$

V I I.

Ayant ainfi trouvé l'Arc BE, il eft facile d'exprimer la droite EO, qui eft la diftance du point E jufqu'au centre de l'Ellipfoïde, par le moyen du 4^e. Art. qui nous marque que cette diftance eft toujours égale au plus petit demi-diametre, augmenté par le produit du Quarré du Cofinus de cet Arc trouvé, & de l'excès du demi-Axe BO fur le plus petit demi-diametre: c'eft-à-dire, fi nous retenons les dénominations, dont nous nous fommes fervis depuis le IV. §. jufqu'ici, que nous aurons $EO = b + (Ssy + Cc)^2 \delta$.

C'eft cette équation de laquelle nous devons tirer toutes les variations des Marées, que la déclinaifon de la Lune & la latitude du lieu peuvent produire.

V I I I.

Nous voyons d'abord, que n'y ayant que la lettre y de variable, la quantité EO eft toujours d'autant plus grande, que l'on prend y plus grande. Pour avoir donc la plus grande EO, il faut faire $y = 1$. La haute Mer répond donc encore au paffage de la Lune par le Méridien; & on aura alors la droite $CO = b + (Ss + Cc)^2 \delta$.

I X.

Mais pour trouver la plus petite EO ou eO, il ne faut pas faire $y = 0$; mais $y = -\frac{Cc}{Ss}$ & alors la hauteur eO eft fimplement $= b$. Nous ferons là-deffus les remarques fuivantes:

I. La différence entre la plus grande CO & la plus petite eO, faifant la hauteur de la Marée, entant quelle eft produite par la feule action de la Lune, il s'enfuit que cette hauteur eft $= (Ss + Cc)^2 \delta$. Cette formule nous apprend bien de nouvelles proprietés fur les Marées, & nous fert en même tems à décider plufieurs queftions, fur lefquelles les Auteurs ne font pas encore convenus.

(α) Nous voyons d'abord, que la plus grande Marée fe fait, lorfque la déclinaifon de la Lune eft égale à la latitude du lieu. Cette regle fuppofe toute la Terre inondée; & c'eft à quoi il faut avoir égard, lorfqu'il eft queftion de la hauteur d'un lieu. Ce n'eft pas par exemple immédiatement aux Ports de Picardie, de Flandre, &c. que les eaux font élevées

élevées par la Lune: la cause principale des Marées dans tous ces endroits doit être attribuée plûtôt à l'élevation & descente des eaux, qui se font dans la Mer du Nord, à environ 35 degrés de Latitude Septentrionale, autant que j'en ai pû juger par l'inspection des Cartes Marines. J'avouë pourtant que ce n'est ici qu'une estime fort incertaine; il est impossible de rien dire de positif là-dessus.

On remarquera aussi que je parle ici de la hauteur de la Marée, qui répond au passage supérieur de la Lune par le Méridien: j'appellerai cette Classe de Marées, *Marées de dessus*, & la Classe de celles qui répondent au passage inférieur de la Lune par le Méridien, *Marées de dessous*.

(β) Si la déclinaison de la Lune est nulle, nous aurons $S=1$ & $C=0$, & la hauteur de la Marée de dessus sera $=ss\delta$. Nous voyons de-là, que si la Terre étoit toute inondée, & que les Luminaires restassent dans le plan de l'Equateur, les hauteurs des Marées pour les endroits de différentes latitudes seroient en raison quarrée des Sinus des distances au Pole.

(γ) Si pour nos Païs Septentrionaux, la déclinaison de la Lune devient Méridionale, les Marées de dessus deviennent encore plus petites à cet égard, & cette diminution seroit très-considérable, s'il n'y avoit pas une cause hydrostatique que je marquerai ci-dessous, qui lui est un obstacle; sans la considération de cette cause, on pourroit croire facilement que notre Théorie ne répond pas assez aux Observations.

(δ) Nous éclaircirons cette matiere par un exemple, en supposant la Latitude du lieu de 35 degrés. En ce cas la hauteur des Marées de dessus, tout le reste étant égal, devoit être,

Dans la plus grande Déclinaison Septentrionale de la Lune, ...	$=0{,}963\,\delta$.
Lorsque la Déclinaison de la Lune est nulle .	$=0{,}671\,\delta$.
Dans la plus grande Déclinaison Méridionale de la Lune	$=0{,}265\,\delta$.

La différence de ces Marées est énorme, & surpasse de beaucoup toutes les inégalités qu'on peut soupçonner avoir quelque rapport à la Déclinaison de la Lune. Nous en dirons bientôt la raison.

(ε) Si on supposoit la Latitude telle que Ss fût $=Cc$, ou $Ss=\sqrt{1-SS}\times\sqrt{1-ss}$, ou enfin $s=\sqrt{1-SS}=C$, le point E qui répondroit à la plus petite EO, seroit précisément au point L. En ce cas, il n'y auroit qu'une Marée de dessus dans l'espace d'un jour lunaire, & la Marée de dessous s'évanouiroit entiérement. Cela arriveroit donc, par exemple, si la Lune ayant 20 degrés de Déclinaison Septentrionale, l'élevation du Pole étoit de 70 degrés: mais en même tems la Marée seroit

roit bien petite, puisqu'elle ne monteroit qu'à environ la cinquiéme partie, qu'elle feroit sous l'Equateur.

(ζ) Si s est plus petit que C, la quantité du §. VII. $(Ss+Cc)^2\delta$, ne sçauroit plus devenir égale 0; c'est pourquoi la Mer décroitra alors continuellement depuis le passage supérieur de la Lune par le Méridien, jusqu'à son passage inférieur. Il n'y aura donc plus qu'une Marée par jour depuis le parallele, qui fait $s=C$, jusqu'au Pole; & pour sçavoir la hauteur de ces Marées, il faut dans cette Formule, premierement supposer $y=1$; & ensuite $y=-1$, & prendre la différence des Formules: la hauteur des Marées sera donc dans ces cas $=(Ss+Cc)^2\delta-(-Ss+Cc)^2\delta$, ou bien $=4\,Ss\,Cc\,\delta$. Elle ne sçauroit donc être qu'extrêmement petite.

Nous aurions un grand nombre de refléxions à faire encore sur cette matiere, s'il ne falloit pas se contenir dans de certaines bornes; & quoique tous ces Théoremes ne soient vrais que dans la Théorie, où l'on suppose les eaux être constamment dans leur état d'équilibre, & toute la Terre inondée (car avec ces suppositions, ces Théorêmes seroient exactement vrais) & que diverses circonstances peuvent leur donner quelquefois une toute autre face, ils ne laissent pas d'être très-utiles, pour expliquer en gros un grand nombre de Phénomenes observés sur les Marées, & pour pénétrer à fond cette matiere.

II. Nous avons démontré qu'il n'y a des Marées de dessous, que tant que s est plus grand que C, lorsque la Déclinaison de la Lune est Septentrionale (si cette Déclinaison est Méridionale, il n'y aura point alors de Marées de dessus dans les Païs Septentrionaux.) Nous disposerons donc s plus grand que C, & nous chercherons là-dessus la hauteur de la Marée de dessous, de la même façon que nous l'avons trouvée pour celles de dessus.

Nous avons vû que la hauteur EO est la plus petite possible, lorsqu'on prend $y=-\frac{Cc}{Ss}$, & qu'alors elle devient $=b$; après cela les hauteurs EO croîtront jusqu'au point L, qui fait $y=-1$. La différence de ces hauteurs fera donc la hauteur de la Marée de dessous, qui sera par conséquent $=(-Ss+Cc)^2\delta$, pendant que celle de la Marée de dessus étoit $=(Ss+Cc)^2\delta$. On pourra faire là-dessus les remarques suivantes.

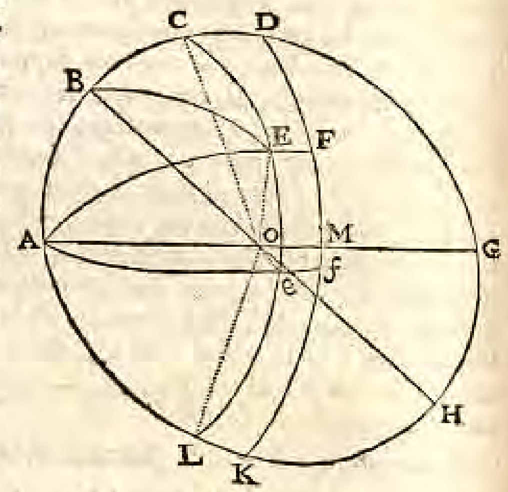
(a) Les Marées de dessus sont égales à celles de dessous, lorsque la déclinaison de la Lune est nulle.

(b) Dans les Païs Septentrionaux, les Marées de dessus sont plus grandes que celles de dessous, lorsque la déclinaison de la Lune est Septentrionale, & plus petites lorsque cette déclinaison est Méridionale, & généra-

généralement les déclinaisons de la Lune étant égales, mais de différens côtés les Marées de dessus deviennent les mêmes qu'étoient celles de dessous, & reciproquement.

(c) La différence des deux Marées d'un même jour lunaire est $= 4\, Cc\, Ss\, \delta$; si l'on applique ces Formules à des cas particuliers, on verra que les Marées de dessus devroient différer considérablement de celles de dessous, s'il n'y avoit pas une autre raison qui doit les rendre à peu près égales. Nous exposerons cette raison ci-dessous, après que nous aurons examiné tout ce que la Théorie dit sur cette matiere *in abstracto.*

III°. Nous voyons aussi que les durées des deux Marées d'un même jour doivent être selon la pure Théorie fort différentes. Voici comme on peut déterminer ces durées. Si dans le Parallele CL on suppose e être le point, la distance duquel au centre de l'Ellipsoïde soit la plus petite & égale à b, & qu'on tire ensuite par ce point un Arc de Méridien Aef, l'Arc Df sera la mesure du tems depuis la haute Mer de dessus jusqu'à la basse Mer suivante, & l'Arc fK la mesure du tems, depuis cette basse Mer jusqu'à la haute Mer de dessous. Or nous avons vû au IX. §. que le Cosinus de l'Arc $Df\,(y)$ est $= -\frac{Cc}{Ss}$, ou bien si DM est de 90 degrés, le Sinus de l'Arc Mf vers le point $K = \frac{Cc}{Ss}$. Là-dessus nous pourrons faire ces remarques.



(1) Dans les Païs Septentrionaux la déclinaison Septentrionale de la Lune rend les Jusans des Marées de dessus plus longs, & les Flots des Marées de dessous plus courts; & la déclinaison Méridionale fait le contraire avec les mêmes mesures; & lorsque la déclinaison est nulle, la durée du Jusan est égale à celle du Flot suivant.

(2) Si la déclinaison de la Lune est égale au Cosinus de la latitude du lieu, le Jusan durera 12 heures lunaires, & il n'y a point de Flot pour l'autre Marée, parce qu'il n'y a point du tout de Marée de dessous.

(3) En général, la différence du tems, entre le Jusan de la Marée de dessus, & le Flot de la Marée de dessous, se détermine par le double

ble de l'Arc horaire Mf, & la différence des durées des deux Marées entieres, est exprimée par le quadruple de l'Arc Mf, dont le Sinus est $= \frac{Cc}{Ss}$. D'où l'on voit que plus la déclinaison de la Lune est grande, plus cette différence est grande aussi.

Soit, par exemple, la latitude du lieu de 35. degrés, la déclinaison de la Lune de 25 degrés, l'Arc Mf sera de 15 degrés, qui répond à une heure lunaire; le Jusan durera donc 7 heures lunaires, & le Flot suivant 5 heures lunaires, & la différence sera de deux heures, & toute la Marée de dessus durera 4 heures plus que celle de dessous.

X.

Voilà donc comme la chose seroit, si la Terre étoit toute inondée, & si les eaux étoient constamment dans une situation d'équilibre parfait. Nous avons exposé toutes les variations des Marées qui sont dues à l'action de la Lune, par rapport aux différentes déclinaisons & latitudes, & par le moyen de nos Remarques on connoit les différences entre les Marées d'un même jour, entre celles qui se font dans différentes Saisons, &c. tant à l'égard des hauteurs des Marées, que de leurs durées. Il est vrai que les deux hypotheses indiquées sont bien éloignées de la vérité, & que cela change extrêmement les mesures des variations; mais je suis pourtant sûr qu'il doit y avoir des variations, & qu'elles seront de la nature que nous avons trouvée.

Quant aux irrégularités de la surface de la Terre, il n'est pas possible d'en deviner les effets, que fort superficiellement, & comme chaque endroit demanderoit à cet égard des reflexions différentes, nous n'entreprendrons point cet examen. Nous ne considérerons donc que ce qui regarde le défaut de l'équilibre des eaux, & les mouvemens reciproques ou oscillatoires qui en résultent.

X I.

La Lune change la surface de la Terre de Sphérique en Ellipsoïdique, & l'Axe de l'Ellipsoïde passe par la Lune. Cet Axe étant différent de l'Axe de Rotation, la figure de la Terre change continuellement, quoique toujours la même à l'égard de l'Axe de l'Ellipsoïde; & s'il n'y avoit pas quelques causes secondes, lesdits changemens consisteroient simplement en ce que chaque goute montât & descendît alternativement & directement vers le centre.

Il est remarquable encore, que si les eaux se mouvoient librement, sans souffrir aucune resistance, ces oscillations augmenteroient continuellement

 à

à l'infini, parce qu'à chaque demi-tour de la Terre, les eaux doivent être censées avoir reçû quelque nouvelle impulsion : c'est une proprieté qu'on peut démontrer par plusieurs exemples semblables, tirés de la Méchanique & de l'Hydrodynamique. Mais le grand nombre de resistences qui s'opposent aux mouvemens des eaux, font que celles-ci prennent bien vîte leur plus grand degré d'oscillations. Ces derniers degrés d'oscillations peuvent cependant être censés proportionnels aux forces que la Lune exerce sous différentes circonstances, pourvû que les changemens qui se font dans la Lune, se fassent assez lentement, pour donner aux eaux le tems qu'il leur faut pour changer leur mouvement. On peut donc dire à cet égard, que les changemens qui se font dans la Lune, par rapport à ses declinaisons doivent produire dans les Marées à peu-près les Phénomenes que nous avons indiqués, & à beaucoup plus forte raison les changemens de déclinaisons dans l'autre Luminaire. Mais les changemens qui sont dûs à la rotation de la Terre sont trop vîtes, pour que les Marées puissent s'y accommoder, car elles tâchent de conserver leur mouvement reciproque comme un Pendule simple. Cette seule raison fait que si les deux Marées d'un même jour doivent être suivant les différens effets de la Lune fort différentes, la plus grande augmente la plus petite, & celle-ci diminue l'autre, de sorte qu'elles sont beaucoup moins inégales qu'elles ne devroient être sans cette raison. Tout ce qu'on peut donc dire à cet égard, est que nos Théorêmes sont vrais, quant à leur nature, mais non pas suivant les mesures que nous en avons données. On peut pourtant, moyennant une autre reflexion, réparer en quelque façon cet inconvenient: c'est en supposant que la plus grande Marée donne à la plus petite, qui est sa compagne, autant qu'elle en perd, & les supposer l'une & l'autre à peu-près égales, ce que l'expérience confirme, & de là on tirera la hauteur absoluë de chacune, en prenant le milieu Arithmétique des deux Marées, qui conviennent à un même jour lunaire. En corrigeant de cette façon les précédentes Propositions, nous aurons les Théorêmes suivans, qui ne sçauroient plus manquer d'être assez conformes aux Observations.

X I I.

La hauteur de la Marée de dessus est $=(Ss+Cc)^2\delta$ (§. *Remarque I.*) & la hauteur de la Marée de dessous $=(-Ss+Cc)^2)\delta$ (§. *IX. Remarque II.*) en prenant donc la moitié de la somme de ces deux hauteurs, nous aurons la hauteur moyenne de la Marée, qui convient aux déclinaisons de la Lune, & latitudes du lieu données, $(SSss+CCcc)\delta$. De cette Formule, que je crois fort juste pour la supposition de l'entiere inondation de la Terre, on pourra tirer les Corollaires suivans.

(I.) Les déclinaisons Septentrionales & Méridionales de la Lune font le même effet sur les Marées, à l'égard de leur hauteur moyenne.

Cette propriété est confirmée par les Observations. Mais il sera toujours vrai, que dans les Païs Septentrionaux la déclinaison Septentrionale de la Lune augmente un peu les Marées de dessus, & diminue celles de dessous; & que la déclinaison Méridionale fait le contraire: & c'est ce que l'expérience confirme aussi. On se souviendra donc que nous parlons de la hauteur moyenne des deux Marées d'un même jour lunaire.

(II.) A la hauteur de 45 degrés la hauteur moyenne de la Marée est $=(\frac{1}{2}SS+\frac{1}{2}CC)\delta=\frac{1}{2}\delta$, & par conséquent constamment la même.

C'est ici une proprieté bien singuliere, que quelles que soient les déclinaisons des Luminaires, les hauteurs moyennes des Marées n'en soient point changées, & cette propriété nous fait voir, pourquoi dans nos Païs on s'apperçoive de si peu de changement dans les Marées, à l'égard desdites déclinaisons.

(III.) Si la latitude du lieu est moins de 45°. la plus grande Marée moyenne se fait lorsque les déclinaisons des Luminaires sont nulles, & les Marées diminuent, si les déclinaisons augmentent.

L'expérience confirme encore cette propriété, & tout le monde convient que dans nos Païs (dont les Marées dépendent de la Mer du Nord, à environ 35 degrés de latitude) les plus grandes Marées, tout le reste étant égal, se font environ les Equinoxes.

Si la latitude du lieu est plus grande de 45 degrés, c'est le contraire.

(IV.) Sous l'Equateur, la hauteur de la Marée est $=SS\delta$, & les variations qui dépendent des différentes déclinaisons de la Lune, y seront le plus sensibles: si la déclinaison est nulle, la hauteur de la Marée y est exprimée par δ; & si la déclinaison est supposée de 15 dégrés (elle peut aller jusqu'à près de 29 degrés) la hauteur de la Marée moyenne sera de 0,82 δ. La différence des hauteurs est de $\frac{18}{100}\delta$.

(V.) Les variations sont moins grandes à cet égard sur les Côtes de la France, baignées par l'Océan, si les Marées y sont causées par la Mer du Nord à la hauteur d'environ 35 degrés, la hauteur de la Marée, la déclinaison de la Lune étant nulle, y sera exprimée par 0,671 δ, & si la Lune avoit 25 degrés de déclinaison, la hauteur moyenne y sera exprimée alors par 0,610 δ. La plus grande Marée est donc à la plus petite à cet égard, comme 671 à 610, & la différence sera comme 61, qui fait l'onziéme partie de la grande Marée.

Nous voyons par ces exemples, que les variations qui dépendent de la déclinaison de la Lune, sont toujours beaucoup plus petites, que celles

les qui dépendent des différentes distances de la Lune, & qui peuvent aller jusqu'au tiers de la grande Marée. C'est pourquoi on a eu beaucoup de peine à s'appercevoir des variations qui répondent aux différentes déclinaisons.

(VI.) Enfin nous remarquerons que cette Formule $(SSss + CCcc)\delta$ pour les hauteurs moyennes des Marées ne doit pas être poussée au-delà du terme des doubles Marées, qui est lorsque la latitude du lieu est égale à la déclinaison de la Lune: car, passé ce terme, nous avons démontré qu'il ne doit y avoir qu'une Marée par jour, dont la hauteur est exprimée par $4SsCc\delta$, en vertu de la Remarque (ζ) de l'Art. IX. Il faudra aussi donner à ce terme une certaine latitude; car il y apparence que ce n'est qu'à une certaine distance depuis ce terme vers l'Equateur, que les Marées commencent à être doubles, & à une autre distance vers le Pole, qu'elles commenceroient à être simples, si la Mer libre s'étendoit jusques-là; & que dans la Zone, qui est entre deux, les Marées seront mêlées de l'une & l'autre espéce avec beaucoup d'irrégularité.

XIII.

Nous venons d'exposer au long, & avec toute la précision possible; le rapport réel des hauteurs des Marées: nous n'avons qu'un mot à dire sur l'heure des hautes Marées. Comme c'est toujours au moment du passage supérieur de la Lune par le Méridien, que la Mer devroit être la plus haute, quelle que soit la déclinaison de la Lune, & la latitude du lieu: nous voyons que si les Marées dépendoient uniquement de la Lune, ces deux sortes de variations ne devroient point apporter de changement à l'heure de la haute Mer; & si l'on veut avoir égard aux forces du Soleil, nous avons déja montré au IX. Art. du Chap. VII. les variations qui peuvent provenir à cet égard.

Mais si la déclinaison de la Lune & la latitude du lieu n'ont pas d'influence directement sur l'heure de la haute Mer, & si elles n'en ont que très-peu, lorsque l'action de la Lune est combinée avec celle du Soleil, il est remarquable, que tant la déclinaison de la Lune, que la latitude du lieu, feroient extrêmement varier l'heure des basses Mers, sans cette cause seconde, que j'ai exposée au long dans le XI. Art. & qui fait que les deux Marées d'un même jour lunaire sont beaucoup moins inégales, qu'elles ne devroient être. Cependant cette raison ne sçauroit rendre les deux Marées tout-à-fait égales, & il sera toujours vrai, ce que j'ai dit dans la Remarque (1) de la III. Partie du §. IX. que c'est tantôt le Jusan d'une Marée, qui surpasse en durée le flot de la Marée suivante, tantôt celui-ci qui surpasse l'autre. C'est une propriété qui n'est point échappée aux Observateurs des Marées; mais on n'avoit pas remar-

remarqué les circonstances de ces inégalités, sçavoir que dans les Païs Septentrionaux, la déclinaison Septentrionale de la Lune rend les Marées de dessus plus longues, & les Marées de dessous plus courtes, & que la déclinaison Méridionale fait le contraire.

On voit donc qu'à cet égard le Jusan peut être différent du flot suivant, mais non pas du flot antécédent; & si l'on remarque quelque différence entre le flot & le Jusan d'une même Marée, ou cette différence sera constante pendant tout le cours de l'année, & alors il faut l'attribuer à la configuration des Côtes; ou elle n'aura point de loix, & ne sera que tout-à-fait accidentelle, & causée par des Vents ou Courants accidentels.

XIV.

Les différences que nous avons exposées dans ce Chapitre entre les deux Marées d'un même jour, tant pour leur hauteur, que pour leur durée, nous donnent un moyen de reconnoître ces deux Classes de Marées, & de distinguer l'une d'avec l'autre, ce qui seroit impossible sans cela sur les Côtes irrégulieres de l'Europe, où nous sçavons que les diverses heures du Port comprennent toute l'étendue d'une Marée, ou d'un demi-jour lunaire.

La Classe des Marées de dessus comprendra celles qui sont plus grandes & plus longues, la déclinaison de la Lune étant Septentrionale, ou qui sont petites & plus courtes, cette déclinaison étant Méridionale, & l'autre Classe sera reciproque.

XV.

Nous avons examiné avec toute l'attention requise les effets des différentes déclinaisons de la Lune, qui sont la source de tant de propriétés très-remarquables des Marées. Il ne nous reste donc plus qu'à considérer encore les déclinaisons du Soleil. Cet examen nous sera très-facile, après celui que nous venons de faire sur la Lune.

Nous nommerons la force du Soleil, sa déclinaison étant nulle, ϵ, comme nous avons fait toujours dans le Corps de ce Traité, & nous retiendrons les dénominations du V. §. Si nous appliquons donc au Soleil tout le raisonnement que nous avons fait sur la Lune, nous voyons qu'on n'a qu'à substituer dans toutes les Formules de ce Chapitre ϵ à la place de δ, pour trouver les variations qui proviennent des différentes déclinaisons du Soleil dans tous les lieux de la Terre, & de cette maniere tout ce que nous avons dit sur la Lune, sera aussi vrai à l'égard du Soleil. Si donc la hauteur de la Marée, entant qu'elle est produite sous l'Equateur par la seule action du Soleil au tems des Equinoxes, est appellée ϵ, la hauteur de la Marée sera pour telle déclinaison du Soleil, &

& telle latitude du lieu entre les deux Cercles Polaires qu'on voudra $= (TTss + EEcc)\epsilon$, entendant par T le Sinus de la diſtance du Soleil au Pole, & par E ſon Coſinus.

XVI.

Pour tirer tout l'avantage, qui eſt poſſible, de nos Méthodes, & leur donner la derniere perfection, nous tâcherons enfin de donner une Formule générale pour tous les cas poſſibles. Souvenons-nous pour cet effet, que nous avons nommé au IX. Chapitre A la hauteur des Marées qui ſe font ſous la Ligne dans les Syzygies (ou plutôt un jour & demi après) les diſtances des Luminaires étant moyennes, & leurs déclinaiſons nulles; & que pour les mêmes circonſtances nous avons nommé B la hauteur des Marées bâtardes: voyons à préſent, comment il faut changer ces Quantités A & B, lorſque les déclinaiſons des Luminaires, & les latitudes des lieux ſont d'une grandeur quelconque.

(I.) Quant à la quantité A, comme elle a été exprimée par la ſomme des forces entieres des deux Luminaires, c'eſt-à-dire, par $\delta + \epsilon$, on voit qu'il faut mettre ici à la place de δ ſa quantité corrigée $(SSss + CCcc)\delta$, & à la place de ϵ ſa quantité corrigée $(TTss + EEcc)\epsilon$, & enſuite faire cette Analogie

$$\delta + \epsilon : A :: (SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\epsilon : \frac{(SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\epsilon}{\delta + \epsilon} A.$$

Cette quatriéme proportionnelle marque la hauteur des Marées dans les Syzygies, lorſque les déclinaiſons des Luminaires, & la latitude du lieu ſont quelconques, & ſi la déclinaiſon de l'un & l'autre Luminaire eſt nulle, cette quantité devient ſimplement $= ssA$. Si l'on nomme donc F la hauteur de la Marée dans les Syzygies, les déclinaiſons des Luminaires étant nulles pour un lieu quelconque, il faut ſuppoſer $ssA = F$, & de cette maniere ladite quatriéme proportionelle devient

$$= \frac{(SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\epsilon}{ss(\delta + \epsilon)} F.$$

C'eſt cette quantité qu'il faut ſubſtituer dans les équations du §. V. Chap. IX. pour A.

(II.) La quantité qu'il faudra ſubſtituer pour B dans ces equations que nous venons de citer, ſe trouve à peu-près de la même façon; il n'y a qu'à prendre au lieu de la ſomme $\delta + \epsilon$ leur différence $\delta - \epsilon$, qui exprimoit la hauteur des Marées bâtardes. Si l'on appelle donc G la hauteur de la Marée dans les Quadratures, les déclinaiſons des Luminaires étant nulles, on trouvera la quantité à ſubſtituer pour

$$B = \frac{(SSss + CCcc)\delta - (TTss + EEcc)\epsilon}{ss(\delta - \epsilon)} \times G.$$

Nous ſubſtituerons encore dans l'équation générale du §. V. Chap. IX. à la place des Lettres S & s (qui y marquent le rapport des diſtances du Soleil à la Terre ſous diverſes circonſtances, & qui ſe trouvent employées dans ce Chapitre dans un autre ſens) ces autres Lettres D & d.

Après ces réflexions préliminaires nous conſidérerons le Problême général des hauteurs des Marées ſous telles circonſtances, qui pourront concourir, & qui ſervira à déterminer ces hauteurs avec toute la préciſion poſſible. Je m'aſſure que tous ceux qui jetteront les yeux ſur cette Solution, verront ſans peine, combien j'ai été attentif à examiner & éplucher toutes les circonſtances qui peuvent faire varier les Marées.

PROBLEME GENERAL.

XVII.

Trouver généralement la hauteur des Marées, en ſuppoſant toutes les circonſtances qui peuvent les faire varier, connuës.

SOLUTION.

Il faut connoître d'abord par Obſervations les quantités F & G, qui marquent les hauteurs moyennes des grandes Marées, & des Marées bâtardes, qui ſe font un jour & demi après les Syzygies & les Quadratures, les déclinaiſons des Luminaires étant nulles, & leurs diſtances à la Terre étant moyennes. Dans la Théorie, deux Obſervations ſuffiſent pour cet effet; mais il vaut mieux dans l'application de nos Méthodes obſerver un grand nombre de fois, comme on a déja fait preſque dans tous les Ports de la France, la hauteur des grandes Marées, & celles des petites Marées, les Luminaires ſe trouvant à peu-près dans l'Equateur, & prendre des unes & des autres le milieu Arithmétique, que j'appelle F pour les grandes Marées, & G pour les petites Marées.

Il faut enſuite connoître le rapport moyen, qu'il y a entre les forces de la Lune & du Soleil. Nous avons donné pluſieurs moyens pour cela dans le corps de cette Diſſertation, & nous nous croyons bien fondés de le ſuppoſer comme 5 à 2. Quoi qu'il en ſoit, nous nommons ce rapport $\delta : \epsilon$.

Il faut après cela faire attention aux Phaſes de la Lune, ou à l'Arc compris entre les deux Luminaires dans le moment du paſſage de la Lune par le Méridien: cet Arc doit être diminué de 20 dégrés (§. *VII. Chap. IX.*) Nous nommons le Sinus de l'Arc réſultant m, & le Coſinus n, & le Sinus total 1.

Il

Il faut auffi connoître les diftances des Luminaires à la Terre : j'appelle d la diftance moyenne du Soleil ; D fa diftance au tems de la Marée cherchée ; l la diftance moyenne de la Lune ; L fa diftance au tems de la Marée cherchée.

Il faut fçavoir encore les déclinaifons des Luminaires à l'égard de l'Equateur : j'appelle S le Sinus de la diftance de la Lune au Pole ; C fon Cofinus ; T le Sinus de la diftance du Soleil au Pole ; E fon Cofinus.

Enfin, il faut faire attention à la latitude du lieu, & à la Remarque (α) du IX. Art. que nous avons faite pour l'eftimation des latitudes. Nous appellons le Sinus de la diftance au Pole s & le Cofinus c. Toutes ces dénominations faites, je dis que la hauteur de la Marée fera

$$\frac{l^3D^3\delta + L^3d^3\varepsilon}{L^3D^3(\delta+\varepsilon)} \times \frac{nn}{ss} \times \frac{(SSss+CCcc)\delta + (TTss+EEcc)\varepsilon}{\delta+\varepsilon} \times F.$$
$$+ \frac{l^3D^3\delta - L^3d^3\varepsilon}{L^3D^3(\delta-\varepsilon)} \times \frac{mm}{ss} \times \frac{(SSss+CCcc)\delta - (TTss+EEcc)\varepsilon}{\delta-\varepsilon} \times G.$$

XVIII.

Je n'ai mis ici cette grande Formule, que pour faire voir toute l'étendue & toute l'exactitude de notre Théorie & de nos Calculs, car les mefures & la Table que nous avons donnés au Chapitre IX. ont affez de précifion dans une Queftion auffi fujette que celle-ci aux variations accidentelles, qui n'admettent aucune détermination.

Je ne dis rien des Marées & de leurs changemens extraordinaires, qui fe font dans la Zone glaciale, pour ne point groffir trop ce Traité, & pour ne point l'embarraffer de chofes fort abftraites & affez difficiles. J'ai d'ailleurs déja expofé en gros & même affez au long ce qui en eft.

Quant enfin à l'heure des hautes Mers, j'ai fait voir qu'elle n'eft point changée par les déclinaifons des Luminaires, ni par la latitude du lieu ; nous avons donc déja donné toute la perfection poffible dans les Chapitres précédens à cette autre grande Queftion. Pour l'heure des baffes Mers, qui dépendent beaucoup des déclinaifons des Luminaires, & de la latitude du lieu, nous en avons fait voir toutes les variations & propriétés dans ce Chapitre.

CHAPITRE XI.

Qui contient l'Explication & Solution de quelques Phénomenes & Queftions, dont on n'a pas eu occafion de parler dans le corps de ce Traité, fur-tout à l'égard des Mers détachées, foit en partie, foit pour le tout, de l'Océan.

I.

SUivant quelle progreffion les eaux montent & defcendent dans une même Marée, par rapport au tems donnés.

Cette Queftion dépend de toutes les circonftances que nous avons confidérées dans ce Traité ; mais les variations à l'égard du changement de ces circonftances, ne font pas varier beaucoup la loi, fuivant laquelle les eaux montent & defcendent ; je ne parlerai donc que du cas le plus fimple, qui eft lorfque la latitude du lieu, & les déclinaifons des Luminaires font nulles, & lorfqu'en même tems les Luminaires font dans leurs Syzygies, ou dans leurs Quadratures. Que l'on exprime donc tout le tems depuis la haute Mer jufqu'à la baffe Mer par un quart de Cercle, dont le rayon eft égal à l'unité : je dis *que les defcentes verticales des eaux depuis la haute Mer doivent être exprimées par les Quarrés des Sinus des Arcs, qui repréfentent les tems donnés.* Si l'on confidére les Marées depuis le commencement du Flot, il faudra dire *que les élévations verticales des eaux, font en raifon quarrée des Sinus, qui répondent aux tems donnés* §. III. Chap. V. Ceux qui voudront rendre cette Propofition plus générale, pourront confulter le §. VIII. Chap. V. & fi on y ajoute enfin les §. §. VI. & VII. du Chap. X. on verra facilement, ce qu'il faudroit faire pour tous les cas poffibles. Mais la loi générale ne différera pas beaucoup de celle que nous venons d'expofer ; & cela d'autant moins que les deux Marées d'un même jour, qui devroient être fouvent fort inégales, ne laiffent pas de fe compofer à une égalité mutuelle par la raifon expofée au long au §. XI. Chap. X. On peut donc fe tenir fans peine à la Regle que nous venons d'établir.

Il s'enfuit de cette Regle, que les baiffemens ou élevations des eaux, qui fe font dans de petits tems égaux, font proportionnels aux produits des Sinus par les Cofinus répondans des Arcs horaires ; de forte que fi on partage tout le tems du Flux ou du Reflux également, les variations également éloignées en deçà & en delà de ce terme, font égales : ces variations font les plus fenfibles au milieu du Flux ou du Reflux, & la variation totale depuis le commencement du Flux ou du Reflux jusqu'au milieu, fait précisément la moitié de toute la variation d'une Marée. On voit enfin que les variations doivent être insensibles au commencement & à la fin de chaque Flux & Reflux.

Toutes ces Propositions sont confirmées entierement par les Observations qu'on a faites sur cette matiere, rapportées par M. Cassini dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1720. pag. 360. Il semble seulement qu'il y a une erreur de quelques minutes dans la détermination de l'heure de la basse Mer, erreur presque inévitable dans cette sorte d'Observations. Mais il faut remarquer, pour voir plus parfaitement l'accord de notre Regle avec les Observations, que tout le tems du Flux & Reflux est de six heures lunaires, pendant que les Observations ont été prises sur des heures solaires.

I I.

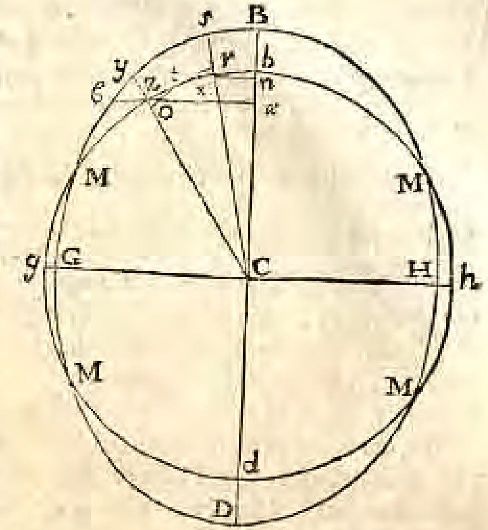
Pourquoi il n'y a point de Marées sensibles dans la Mer Caspienne, ni selon quelques-uns dans la Mer Noire, & pourquoi elles sont très-petites dans la Mer Méditerranée, & de quelle nature sont ces Marées.

On ne sçauroit bien répondre à ces questions, sans considérer auparavant le Problême principal, qui est de sçavoir les Marées, lorsque la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, & c'est un Problême pénible pour le Calcul, & assez délicat pour la Méthode. Pour le rendre d'abord plus simple, nous supposerons les Luminaires en conjonction & dans le plan de l'Equateur, & que c'est aussi sous l'Equateur, que l'on cherche les Marées.

Ressouvenons-nous que sans l'action des Luminaires, l'Equateur seroit parfaitement circulaire, comme $bgdh$, & que les Luminaires se trouvant dans l'Axe DB, cette Figure est changée en l'Ellipse $BGDH$, lorsque toute la Terre est inondée, & que les eaux peuvent couler de tous côtés. Nous avons démontré aussi au III. §. Chap. V. que dans cette supposition, la petite hauteur yz (dont les variations par rapport à ses différentes situations expriment les variations des Marées au point z) est $=\frac{3ss-bb}{3bb}\times c$, dans laquelle Formule on suppose $Cx=s$; $Cb=b$, & la différence entre la plus grande CB & la plus petite $CG=c$.

Supposons à présent que la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, sçavoir celle de zx, & qu'on tire par le centre C & l'extrémité x la droite Cs. Cela posé on voit bien que la surface de la Mer ne peut pas être en ys, comme elle seroit, si toute la terre étoit inondée; car l'espace yCs est plus grand que l'espace zCx, & il faut que cet

cet espace soit constamment le même; puisque la quantité d'eau dans une Mer doit être supposée la même pendant les revolutions de la Terre: mais la surface de l'eau prendra la courbure or, & voici quelle sera la nature de cette courbure or; il faut premierement; que l'espace oCr soit constamment le même que l'espace zCx, & en second lieu, que la courbe or soit semblable à la courbe ys, ou plûtôt la même, puisque toutes les petites lignes, telles que sx, sont incomparablement plus petites que le rayon de la Terre; & ainsi la petite perpendiculaire sr sera égale à la petite perpendiculaire yo, de même que toutes les perpendiculaires comprises entre les termes s & y.



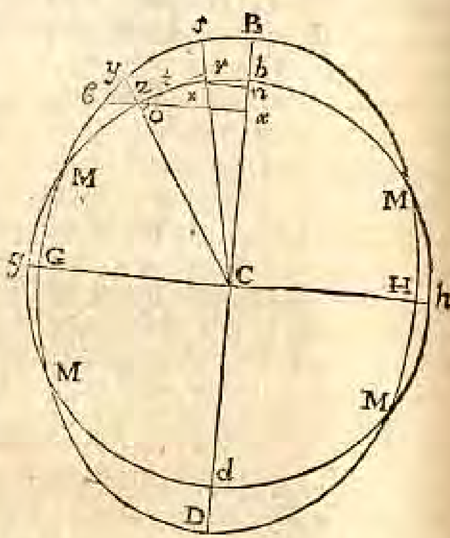
On voit donc déja que ce ne sont plus les sx & yz, dont les variations marquent les variations des Marées pour les points x & z, & que ces variations sont exprimées ici par celles des petites lignes rx & oz. De là on peut conclure par la seule inspection de la Figure, que les Marées doivent être d'autant plus petites, que la Mer est moins étendue en longitude; que ces Marées ne peuvent être que tout-à-fait insensibles dans la Mer Caspienne & dans la Mer Noire, & fort petites dans la Mer Méditerranée, dont la communication avec l'Océan est presque entiérement coupée au Détroit de Gibraltar. On en peut même tirer des propriétés très-singulieres de cette sorte de Marées. 1°. Que la plus haute Mer ne se fait pas ici au moment du passage des deux Luminaires par le Méridien, comme dans l'Océan, ni 6 heures lunaires après, mais au milieu, si la Mer a peu d'étendue en longitude. 2°. Que les Marées sont les plus grandes aux extrémités Orientales & Occidentales z & x, & qu'elles sont incomparablement plus petites au milieu s. 3°. Que la haute Mer dans l'une des extrémités se fait au même moment que la basse Mer dans l'autre extrémité. Voilà en gros les propriétés des Marées dans ces Mers: le Calcul en fera connoître le détail.

Pour ne point ennuyer le Lecteur par une trop longue suite de raisonnemens purement Géometriques, & dans plusieurs circonstances assez compliquées & chargées de Calcul, je ne mettrai ici que le plus précis.

Soit $Bb+Gg=c$, qui marque la variation pour la Mer libre de tous côtés;

côtés : soit l'Arc zx, qui marque l'étendue de la Mer en longitude $= A$. Le rayon de la Terre que nous prenons pour le Sinus total $= 1$; qu'on tire xn perpendiculaire à CB, & soit l'espace $z\alpha nxz = S$. Cela posé, on trouvera d'abord $yzxs = \frac{2}{3}A\epsilon$. Cet espace devant être égal à l'espace $yors$, qui est égal à la petite sr multiplié par A, on en tire $sr = \frac{2}{3}\epsilon - \frac{S}{A}\epsilon$.

Si on suppose après cela $Cn = n$ & $C\alpha = s$, on en aura $sx = nn\epsilon - \frac{1}{3}\epsilon$, & par conséquent $rx = nn\epsilon - \epsilon + \frac{S}{A}\epsilon$, & ce sont les différentes valeurs de rx, en considérant n & S comme variables, qui marquent les différentes hauteurs de la Mer au point x, qui est à l'extrémité occidentale de la Mer.



De cette valeur rx on peut tirer géométriquement toutes les propriétés des Marées, quelque étendue qu'on suppose à la Mer, & tout ce que nous avons trouvé pour le point x, peut être déterminé de la même façon pour tel autre point dans l'Arc zx qu'on voudra ; mais on remarquera surtout une propriété générale, qui est que l'Arc horaire compris entre la haute & la basse Mer, c'est-à-dire l'Arc compris entre la plus grande & la plus petite rx, est toûjours de 90 degrés. Pour le démontrer, il faut supposer la différentielle $rx = 0$, & faire $-dS = \frac{nn - ss}{\sqrt{1-nn}}dn$, à cause de la valeur constante de A, d'où l'on tirera cette équation $2An\sqrt{1-nn} + ss = 0$, qui marque déja la propriété générale que nous venons d'indiquer. Cette propriété donne ensuite la hauteur de la Marée, exprimée par la différence de la plus grande & de la plus petite valeur de $rx = \left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1-nn} - s\sqrt{1-ss}}{A}\right)\epsilon$, & on remarquera que dans toutes ces Formules, s est donnée en n & en constantes, à cause de l'Arc A donné.

Nous appliquerons ces équations générales à deux sortes de cas particuliers ;

premierement, lorsque A est de 90 degrés ; & en second lieu, lorsque cet Arc est fort petit.

I. Si A est de 90 degrés, on aura $s = \sqrt{1-nn}$, & le lieu de la haute ou de la basse Mer, à l'égard du point fixe B sera déterminé par cette Equation

$$-2An\sqrt{1-nn} + 2nn - 1 = 0, \text{ qui donne}$$

$$Cn, \text{ ou } n = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{AA+1}}\right)} = 0{,}9602,$$

qui marque que l'Arc xb est d'environ 16 degrés 13. minut. & que la hauteur de la Marée sera de $0{,}844\epsilon$. Nous voyons donc que si la Mer avoit 90 degrés d'étendue en longitude, la haute Mer se feroit dans les Syzygies 1 heure 5. minutes plus tard que si toute la Terre étoit inondée, & que la hauteur de la Marée seroit de 156 milliémes parties plus petite.

II. Supposons à présent que l'étendue de la Mer en longitude soit très-petite, c'est-à-dire, que A exprime un Arc circulaire fort petit, & soit la corde de cet Arc $= B$: la Géométrie commune donne $s = n - \frac{1}{2}nBB + \frac{1}{2}\sqrt{4BB - 4nnBB + nnB^4 - B^4}$. Et B étant supposée fort petite, on changera la quantité radicale en suite, & l'on négligera les quantités affectées de B^3 (le Calcul fait voir à la fin, qu'il faut retenir les termes affectés de BB) & de cette maniere on trouvera

$$s = n - B\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nBB.$$

On remarquera après cela, que la différence entre l'Arc A & sa corde B, convertie en suite commence par le terme $\frac{1}{4}B^3$, lequel pouvant être négligé pour notre dessein, on mettra A à la place de B, & on aura

$$s = n - A\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nAA.$$

En substituant dans l'équation exposée ci-dessus

$$2An\sqrt{1-nn} - nn + ss = 0$$

la valeur trouvée pour s, & négligeant toujours les termes affectés de A^3 & de A^4, nous aurons simplement $n = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

L'Arc xb est donc pour ce dernier cas de 45 degrés, & la haute Mer, si elle étoit sensible, ne se feroit par conséquent que trois heures lunaires après le passage de la Lune par le Méridien. La hauteur de la Marée étant généralement exprimée, comme nous avons vû ci-dessus, par $\left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1-nn} - s\sqrt{1-ss}}{A}\right) \times \epsilon$, il faudra substituer dans cette expression les valeurs trouvées pour n & s ; ce que faisant avec les mêmes précautions, que nous avons employées en cherchant la valeur de s, on trouvera à la fin simplement la hauteur de la Marée $= A\epsilon$.

Cette expression fait voir que dans les petites Mers, les hauteurs des Marées sont proportionelles aux étendues que ces Mers ont en longitude, & les Marées se trouveront par cette Analogie. Comme le Sinus total est à l'Arc longitudinal, que la Mer renferme, ainsi la hauteur de Marée dans la Mer qui est supposée inonder toute la Terre, exprimée par ϵ, sera à la hauteur de la Marée en question.

Appliquons maintenant tout ce que nous avons trouvé pour en tirer les propriétés des Marées dans la Mer Caspienne. Supposons pour cet effet, que dans les conjonctions & oppositions des Luminaires, la hauteur des Marées grandissimes dans la Mer du Sud (dans laquelle les Marées ne sçauroient manquer d'atteindre presque toute la hauteur, qu'elles auroient, si toute la Terre étoit inondée) est sous l'Equateur de 8 pieds: c'est la hauteur que les Relations de voyages m'ont fait adopter pour la Mer libre, & que je crois qu'on remarquera sur les Côtes escarpées des petites Isles situées près de l'Equateur dans ladite Mer du Sud: Cela étant, j'ai démontré dans la Proposition (II.) du XII. §. du Chapitre précédent, que les grandes Marées ne feront plus que de 4 pieds à la hauteur de 45 degrés, où je suppose le milieu de la Mer Caspienne. Si nous donnons après cela à cette Mer dix degrés d'étendue en longitude, cet Arc fait environ la sixiéme partie du Rayon, & la hauteur des grandissimes Marées devroit être par conséquent aux extrémités Orientale & Occidentale de la Mer Caspienne d'environ huit pouces: mais elles seront nulles au milieu de la Mer. Je suppose cette agitation de la Mer trop petite pour avoir pû être remarquée par les gens qui ont été sur les lieux, & qui sans doute n'ont pas fait un examen fort scrupuleux là-dessus, & qui n'auroient pas manqué de l'attribuer à des causes accidentelles, s'ils avoient remarqué quelque petite élevation & baissement des eaux. J'espére que des Observations plus exactes confirmeront un jour ce que je viens d'indiquer sur les Marées de la Mer Caspienne.

On doit faire le même raisonnement sur la Mer Noire, qui peut être considérée comme détachée de la Mer Méditerranée, à cause du peu de largeur du Détroit qui est entre deux. Il est à remarquer qu'on a observé dans cette Mer des Marées, quoique très-petites.

On voit aussi que les Marées dans la Mer Méditerranée doivent être beaucoup plus petites, que dans l'Océan, sur-tout si l'on fait attention que cette Mer n'est tout-à-fait ouverte que depuis l'Isle de Chypre jusqu'à celle de Sicile.

III.

Comment les Marées peuvent être beaucoup plus grandes sur les Côtes, dans les Bayes, dans les Golfes, &c. que dans la Mer libre de tous côtés.

Pour répondre à cette question, il faut encore faire réflexion à ce que j'ai déja dit, que si les Luminaires restoient à un même lieu, & que le mouvement journalier de la Terre se fit avec une lenteur infinie, les eaux qui inondent la Terre, ne pourroient point manquer d'être dans un parfait équilibre, & les Marées auroient par-tout les hauteurs qu'on leur a prescrites dans cet Ouvrage, sans que la configuration des Côtes ou autres causes semblables les pût déranger, pourvû que l'endroit en question communiquât avec l'Océan: d'ailleurs les eaux ne feroient que monter & descendre verticalement; excepté aux Côtes, qui alternativement sont baignées, & restent à sec, & ausquelles les eaux auroient quelque mouvement horisontal, quoi qu'infiniment lent, & la direction de ce mouvement des eaux dépendroit dans ce cas, aussi bien que dans les autres, de la direction de la pente des Côtes. Mais la vitesse du mouvement journalier de la Terre, qui fait que dans le tems d'un jour tout l'Océan doit faire quatre mouvemens & agitations reciproques, rend ces mouvemens fort sensibles. Comme outre cela la Mer n'inonde pas toute la Terre, & qu'il y a de grands Golfes, Canaux, &c. qui par l'élévation & baissement des eaux, sont tantôt plus tantôt moins pleins, il faut que ceux-ci reçoivent les eaux & les renvoyent alternativement vers des endroits qui s'empliront, pendant que les autres se vuideront, & de là doivent provenir des mouvemens horisontaux, qu'on appelle communément Flux & Reflux. Ce sont ces mouvemens horisontaux, qui se faisant vers des endroits plus serrés, peuvent produire les grandes Marées, qui vont dans de certains endroits au-delà de 60 pieds; c'est aussi cette raison qui rend les Marées plus grandes dans le Golfe de Venise, qu'elles ne sont dans la Mer Méditerranée. C'est ici qu'on peut faire un grand usage de ce que divers Auteurs ont donné sur le mouvement des eaux, & je m'assure qu'en prenant les connoissances qu'on a déja sur cette matiére, on pourroit rendre exactement raison de tous les différens Phénomenes, qui s'observent sur les Marées aux endroits différemment situés. Mais un tel examen demanderoit des volumes, & des années pour les faire.

IV.

Quelle est en gros la nature des Marées au Détroit de Gibraltar.

Les Marées doivent sans doute être beaucoup plus compliquées, & paroître plus irrégulieres au Détroit de Gibraltar, que dans d'autres endroits, parce qu'il s'y fait un concours de deux sortes de Marées, dont l'une vient de l'Océan, & l'autre de la Méditerranée; & on voit facilement, que si les Marées consistoient simplement à élever & baisser les eaux, sans causer des Courans, il y auroit sur ces Côtes quatre Marées par jour, c'est-à-dire, que les eaux monteroient & descendroient quatre fois, parce que les Marées des deux Mers ne se font pas en même tems: mais comme il se forme des Courans reciproques, chaque Courant tâche à se conserver, & de là il se forme des lisieres, qui ont chacune des mouvemens différens: celles qui sont sur les Côtes de chaque côté, paroissent devoir être attribuées aux Marées de la Méditerranée, & deux autres qui les touchent, aux Marées de l'Océan: on remarque même au milieu une cinquiéme lisiere, dont le mouvement n'est pas si irrégulier que celui des quatre autres, & qui ne fait voir presque aucun rapport avec la Lune: il semble que ce Courant ne doit sa source, qu'à un défaut d'équilibre entre les deux Mers.

Je dirai à cette occasion, qu'il peut arriver de même, que les Marées sont formées dans un certain Port par le mouvement des eaux, qui viennent de deux différens côtés & à divers tems: il semble qu'il faut tirer de là qu'il peut y avoir des endroits où le Flot dure constamment plus long-tems que le Jusan, & qu'il y en a d'autres où il arrive le contraire. Cette même cause peut encore produire plusieurs sortes de Phénomenes particuliers à de certains endroits.

V.

Pourquoi les petites Marées sont beaucoup plus inégales, par rapport à leur grandeur, que les grandes Marées.

Nous avons déja vû que les petites Marées qui suivent les Quadratures, doivent être fort susceptibles de plusieurs irrégularités, tant par rapport au moment de la haute & basse Mer, que par rapport à la hauteur de la Marée.

Il me semble qu'on doit outre cela remarquer les grandes inégalités qui régnent parmi les petites Marées, quoique tout-à-fait régulieres, pouvant sous diverses circonstances croître jusqu'au double, pendant que les grandes Marées ne croissent que d'environ un quart. Pour rendre raison de cette Observation qu'on a faite, il faut se ressouvenir des circonstances essentielles & fondées dans la nature des Marées, qui peuvent les rendre, tantôt plus grandes, tantôt plus petites dans un même lieu, quoique l'âge de la Lune ne différe point.

Nous avons vû que ce sont les diverses distances des Luminaires à la Terre,

Terre, & leurs différentes déclinaisons, qui peuvent encore changer les hauteurs des Marées, lorsque l'âge de la Lune, & la latitude du lieu sont les mêmes. Le calcul nous a enseigné aussi, que l'effet de la diversité des déclinaisons des Luminaires est beaucoup plus petit que celui de la diversité des distances: comme donc la diversité des distances est beaucoup plus grande dans la Lune, que dans le Soleil, & que le Soleil a en même tems beaucoup moins de force que la Lune, on peut pour estimer en gros les variations des petites Marées, & les variations des grandes Marées, simplement faire attention aux distances de la Lune: nous avons trouvé que la diversité des distances peut faire varier l'action de la Lune depuis 2 à 3, l'action du Soleil que nous considérons comme constante, étant exprimée par l'unité. Cela étant, & les hauteurs des petites Marées étant aussi proportionnelles aux différences des actions des deux Luminaires, nous voyons que les hauteurs de ces petites Marées doivent être contenues dans les termes de $2-1$, & $3-1$, ou 1 & 2, pendant que les hauteurs des grandes Marées, qui sont proportionnelles aux sommes des actions des Luminaires, seront renfermées dans les termes de $2+1$ & $3+1$, c'est-à-dire, de 3 & 4.

Lesdits termes sont confirmés par les Observations, comme par exemple, par celles qui sont exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1713. pag. 287. & 288. Nous voyons de cette raison, que les variations absoluës doivent être à peu-près les mêmes dans les petites Marées & dans les grandes Marées, & c'est ce que les Observations citées confirment aussi; & comme ces variations sont par conséquent plus sensibles dans les petites Marées que dans les grandes Marées, il faudra peut-être se servir plûtôt des premieres, que des autres, pour examiner par des Observations ce que les diverses circonstances peuvent contribuer pour faire varier les hauteurs des Marées.

VI.

Pourquoi les Marées étant montées plus haut, & ayant inondé plus de terrain pendant le Flot, descendent en même tems davantage, & laissent plus de terrain à sec pendant le Jusan, & quelle proportion il y a entre les montées & descentes.

Nous voyons la premiere Question indiquée, comme fort remarquable dans les Mémoires de l'Academie des Sciences de 1712. pag. 94. La raison en est que les Marées font une espece de mouvement oscillatoire, ou de balancement; car il y a dans ces balancemens un point d'équilibre, qui doit passer pour fixe, & au-dessus duquel l'eau doit être censée s'élever dans la haute Mer, & se baisser dans la basse Mer. On pourroit croire d'abord que les élévations & descentes de l'eau à l'égard

gard du point fixe, sont constamment proportionnelles, & en ce cas notre Problême seroit résolu dans toute son étendue avec beaucoup de facilité. Mais il y a une toute autre proportion bien plus variable & bien plus compliquée, que nous allons rechercher, d'autant que ce n'est pas proprement la hauteur des Marées dans le sens que nous lui avons donné jusqu'ici, qu'il importe davantage de connoître dans la Navigation pour l'entrée & sortie des Vaisseaux dans les Ports ou les Rades: il s'y agit plutôt de connoître la hauteur absolue des eaux, lorsqu'elles sont arrivées à leur plus grande ou leur plus petite hauteur; & pour cet effet, il faut sçavoir dans chaque Marée, tant l'élévation des eaux à l'égard du point fixe, que leur baissement: jusqu'ici nous n'avons déterminé que la somme de ces variations sous le nom de hauteur de la Marée.

Voyons d'abord comment il faudra déterminer le point fixe: il est vrai qu'il est en quelque façon arbitraire, cependant il paroît le plus convenable de le placer là, où atteindroit la surface de la Mer, si les Marées étoient nulles. Un tel point doit être considéré comme demeurant constamment à la même hauteur; car les causes qui peuvent le hausser ou le baisser, telles que sont les Vents, les Courans inégaux, &c. ne sont que passageres & purement accidentelles. Il s'agit donc à présent de sçavoir, combien les eaux montent au-dessus de ce point fixe dans la haute Mer, & combien elles descendent au-dessous du même point dans la basse Mer. Cette Question dépend de toutes les circonstances qui concourent pour former la hauteur absolue des Marées, & que nous avons examinées au long avec tout le soin possible. Ce seroit donc se jetter de nouveau dans les mêmes difficultés, si nous voulions traiter la présente Question avec la même rigueur, & aussi scrupuleusement, que nous avons fait l'autre; c'est pourquoi nous ne considérerons que les circonstances fondamentales & principales, qui sont que la Terre est toute inondée, que les Luminaires sont dans le plan de l'Equateur, & que la latitude du lieu est nulle, faisant abstraction de toutes les causes secondes: ceux qui voudront ensuite une Solution plus exacte, n'auront qu'à consulter les Chapitres VIII. & IX. pour y arriver.

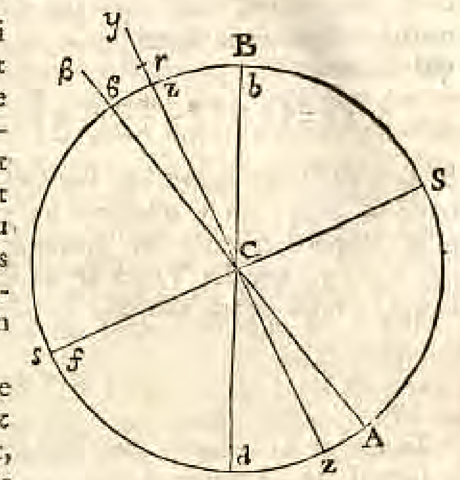
Soit donc encore (comme nous avons supposé au Chap. V., $b\beta s\delta b$ l'Equateur, & que b marque le lieu du Soleil, β celui de la Lune, & z le point de la plus grande élévation des eaux, exprimée par yz; si l'on prend un Arc de 40 degrés zs, le point s marquera l'endroit du plus grand baissement des eaux, exprimé par sx: nous avons démontré là-dessus au VIII. §. du Chap. V. qu'on a généralement

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta + \frac{2bb - 3\rho\rho}{3bb} \times \delta.$$

dans laquelle équation b marque le Sinus total, σ le Sinus de l'Angle bCz,

βCz, déterminé au §. XI. Chap. V. ρ le Sinus de l'Angle βCz, exprimé au §. XIII. Chap. V. β la hauteur des Marées entant qu'elles seroient produites par la seule action de la Lune. Nous avons démontré pareillement au III. §. Chap. VIII. qu'en regardant sx comme positive, de négative qu'elle est par rapport à yz, on a généralement

$$sx = \frac{bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta + \frac{bb - 3\rho\rho}{3bb} \times \delta.$$



Or comme les points z & s, qui sont de niveau, marquent le point fixe dans le sens que nous venons de lui donner, on voit que ces quantités yz & sx marquent précisément l'élévation des eaux au dessus du point fixe, & leur baissement au-dessous du même point, tels que nous sommes proposés de les déterminer. Des valeurs que nous venons de trouver, on pourra tirer les Corollaires suivans.

(a) La différence entre chaque élévation au-dessus du point fixe, & la descente au-dessous du même point, est toujours $= \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\delta$: d'où nous voyons déja que l'une croissant ou diminuant, l'autre doit croître ou diminuer aussi, qui est le Phénomene observé par M. Cassini. Cette différence fait *environ* le tiers de la plus grande hauteur de Marée: je dis *environ*, parce que les quantités β & δ sont variables, quoique leurs variations soient beaucoup plus petites que celles qui résultent des différens âges de la Lune, & à cet égard on peut dire que la différence dont il s'agit ici, est presque constante.

(b) Dans les Syzygies (ou plûtôt un jour & demi après) les quantités ρ & σ doivent être supposées $= 0$, & ainsi on a $yz = \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\delta$, & $sx = \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\delta$: la montée est donc dans les grandes Marées toujours double de la descente. Cette propriété servira à déterminer commodément le point fixe dans chaque Port, & elle le donne de 5. pieds 3 pouces plus haut pour Brest, qu'il n'a été choisi par les Observateurs, si on la compare avec l'Observation, qui est au milieu de la page 94. des Mém. de l'Acad. des Scienc. de 1712.

(c) Dans les Quadratures (ou un jour & demi après) il faut faire $\rho = 0$, & $\sigma = b$, ce qui donne $yz = \frac{2}{3}\delta - \frac{1}{3}\beta$, & $sx = \frac{1}{3}\delta - \frac{2}{3}\beta$: d'où l'on voit que la montée & descente des eaux à l'égard de notre point fixe, ont une raison variable dans les petites Marées, qui dépend du rap-

rapport qui se trouve alors entre la force lunaire δ, & la force solaire ϵ. Nous avons supposé dans cet Ouvrage ce rapport moyen comme 5 à 2, & ce rapport posé, il faut dire que dans les petites Marées, l'élévation des eaux au-dessus de notre point fixe, est 8 fois plus grande que leur baissement au-dessous du même point. Dans les Marées minimes nous avons supposé $\delta = 2\,\epsilon$, & dans les plus grandes des petites Marées $\delta = 3\,\epsilon$.

(*d*) Nous avons fait voir, que le point z n'est jamais éloigné beaucoup du point ϵ, cela étant & faisant le Sinus de l'Angle $bc\epsilon$ (qui marque l'âge de la Lune) $= m$, on pourra supposer $\rho = 0$ & $\sigma = m$, ce qui donne

$$yz = \tfrac{2}{3}\,\epsilon + \tfrac{2}{3}\,\delta - \frac{mm}{bb}\,\epsilon, \ \& \ sx = \tfrac{1}{3}\,\epsilon + \tfrac{1}{3}\,\delta - \frac{mm}{bb}\,\epsilon.$$

Si l'on applique toutes ces Regles aux Observations faites en différens tems & lieux, on y trouvera un grand accord, si l'on choisit bien la juste proportion entre les quantités δ & ϵ. Mais on remarquera dans cet examen, que les Vents & les Courans peuvent faire varier le point fixe que nous avons adopté.

CONCLUSION.

Je finirai ce discours par quelques refléxions sur notre Théorie. Elle suppose avant toutes choses une pesanteur vers les centres du Soleil & de la Lune, pareille à celle qui se fait vers le centre de la Terre, & que cette pesanteur s'étend au-delà de la région de la Terre. C'est le seul principe qui nous soit absolument nécessaire, & il n'y a personne qui le conteste. La rondeur des Luminaires prouve suffisamment la pesanteur qui se fait vers le centre; & quelle raison pourroit-on avoir pour donner des limites à cette pesanteur? Aussi a-t-elle été reconnue depuis les siécles les plus reculés; mais on n'en a connu toute l'évidence & toutes les loix, que depuis la Philosophie immortelle de M. NEWTON. Les premieres conséquences que nous avons tirées de ce principe pour l'explication des Marées, sont purement Géométriques. Nous pouvons donc être assurés de connoître la vraie cause des Marées, quoique nous en ignorions encore la cause premiere, qui est la cause générale & physique de la pesanteur. S'il y avoit quelqu'un qui eût deviné cette premiere cause, il mériteroit d'autant plus la préférence, que son Systême renfermeroit nécessairement la vraie cause universelle de la pesanteur: cette conséquence sera la pierre de touche pour prouver la vérité d'un tel Systême sur les Marées. Il en est de ceci, comme si l'on demandoit, par exemple, pourquoi la surface de l'eau dans un reservoir se met toujours horisontalement: on voit qu'on ne sçauroit en dire

re la premiere cause, sans qu'elle renferme la vraie Théorie sur la pesanteur & sur la fluidité, qui seules peuvent être la vraie cause du Phénomene en question. Cette seule refléxion m'a fait quitter quelques conjectures qui se présentoient à mon esprit sur la cause matérielle des Marées, quoi qu'elles me parussent d'ailleurs assez plausibles. Je n'ai fait au reste en employant ce principe, que ce que Kepler a déja fait. M. Newton est allé beaucoup plus loin sur cette matiere, après avoir démontré auparavant que la pesanteur vers chaque corps dans le Systême du monde diminue en raison quarrée reciproque des distances: d'où il a tiré plusieurs nouvelles propriétés sur les Marées, lesquelles s'accordant avec les Observations, pourroient confirmer davantage son principe sur la diminution de la pesanteur, s'il avoit besoin d'autres preuves. Ce principe n'a pourtant pas beaucoup d'influence, si je me souviens bien, sur les variations des Marées, qui dépendent des Phases de la Lune, des declinaisons des Luminaires & de la latitude des lieux, soit à l'égard des hauteurs des Marées, soit à l'égard des Marées. Il ne sert principalement qu'à déterminer au juste les variations qui dépendent des différentes distances des Luminaires à la Terre, & que les Observations n'ont pû déterminer avec assez de précision; il n'y en a cependant aucune qui lui soit contraire, & plusieurs Observations bien détaillées, sont tout-à-fait conformes aux résultats que ce principe donne. On remarquera enfin que ce que j'ai dit sur la pesanteur terrestre, que j'ai considérée comme formée par l'attraction universelle de la matiere, n'a absolument aucun rapport avec aucune variation des Marées; ces Marées pourront subsister telles qu'elles sont, quelle que soit la nature de la pesanteur à cet égard: tout cet examen ne nous a servi que par rapport à la question, quelle devroit être la hauteur absolue de la hauteur des Marées, sans le concours d'une infinité de causes secondes, qui peuvent augmenter & diminuer ces hauteurs absolues, de sorte que quel qu'eût été le résultat de ces recherches, notre Théorie n'en eût pû souffrir aucune atteinte. J'espére avec tout cela, qu'on n'aura pas trouvé ces recherches inutiles à l'égard de plusieurs circonstances qui en ont été éclaircies, outre que nos déterminations donnent, en choisissant les hypotheses les plus vraisemblables, des nombres tels que la nature de la chose paroît exiger. Nous pouvons donc être tout-à-fait surs de n'avoir rien admis d'essentiel dans toutes nos recherches, qui ne soit au-dessus de toute contestation.

Quant à l'application de nos principes, à l'usage que j'en ai fait, & au succès de mon travail, ce n'est pas à moi à faire cet examen, sur-tout ne pouvant le faire, sans entrer dans un certain parallele avec un aussi grand Homme qu'étoit M. Newton. Si j'ai eu quelques succès, je dois avouer à l'honneur de ce sçavant Philosophe, que c'est lui

lui qui nous a mis en état de raiſonner ſolidement ſur ces ſortes de matieres; & ſi j'oſe me flatter de quelque mérite, c'eſt celui d'avoir traité notre ſujet avec une attention & une exactitude conforme aux grande vûës de L'ACADEMIE, & au reſpect qu'on doit à cet illuſtre Corps.

DE CAUSA PHYSICA FLUXUS ET REFLUXUS MARIS.

A D. D. MAC-LAURIN *Mathematicorum Profeſſore, è Societate Academiæ Edimburgenſis.*

OPINIONUM COMMENTA DELET DIES, NATURÆ JUDICIA CONFIRMAT.

SECTIO I.

PHÆNOMENA.

PHILOSOPHI motum Maris triplicem olim agnoverunt *; diurnum, menſtruum & annuum; motu diurno Mare bis ſingulis diebus intumeſcit defluitque, menſtruo æſtus in Syzygiis Luminarium augentur, in Quadraturis minuuntur, annuo denique æſtus hyeme quàm æſtate fiunt majores: verùm Phænomena hæc ſunt paulò accuratiùs proponenda.

I. Motus Maris diurnus abſolvitur horis circiter ſolaribus 24 minutiſque primis 48, intervallo ſcilicet temporis quo Luna motu apparente à Meridiano loci cujuſvis digreſſa ad eundem revertitur. Hinc altitudo Maris maxima contingit Lunâ appellente ad datum ſitum reſpectu Meridiani loci dati; verùm hora ſolaris in quam incidit æſtus ſingulis diebus retardatur, eodem ferè intervallo quo Lunæ appulſus ad Meridianum loci. Atque hic motus adeò accuratè ad motum Lunæ componitur, ut ſecundùm Obſervationes à celeb. D. Caſſini allatas, ratio ſit habenda horæ in quam incidit vera conjunctio vel oppoſitio Solis, & æquatio à motu

* Plin. Lib. 2. Cap. 99.

motu Lunæ desumpta adhibenda, ut tempus quo Mare ad maximam as-
furget altitudinem die Novilunii vel Plenilunii accuratiùs definiatur. In
æstuariis autem diversi existunt æstus tempore, ut loquitur Plinius, non
ratione discordes. Duo æstus qui singulis diebus producuntur, non sunt
semper æquales; matutini enim majores sunt vespertinis tempore hyber-
no, minores tempore æstivo, præsertim in Syzygiis Luminarium. (a).

II. De motu Maris menstruo tria præcipuè sunt observanda. 1. Æs-
tus fiunt maximi singulis mensibus paulò post Syzygias Solis & Lunæ,
decrescunt in transitu Lunæ ad Quadraturas, & sunt paulò post mini-
mi. Differentia tanta est, ut ascensus totius aquæ maximus sit ad mini-
mum ejusdem mensis, secundùm quasdam Observationes, ut 9 ad 5;
& in nonnullis casibus differentia observatur adhuc major. 2. Æstus
sunt majores, cæteris paribus, quò minor est distantia Lunæ à Terra, id-
que in majori ratione quàm inversa duplicata distantiarum, ut ex variis
Observationibus colligitur. Ex. gr. anno 1713. ascensus aquæ in Portu
Bristonico, (b) referente eodem Cl. viro, 26°. Febr. fuit pedum 22
digitorum 5. & Martii 13°. pedum 18. digit. 2. Declinatio Lunæ in
utroque casu ferè eadem; in priori distantia Lunæ partium 953, in
posteriori partium 1032, quarum distantia mediocris est 1000. Est au-
tem quadratum numeri 1032 ad quadratum numeri 953, ut 22. pedes
5 digit. ad 19 pedes $1\frac{2}{5}$ digitos; ascensus autem aquæ in posteriori ca-
su fuit tantùm 18. ped. cum 2. digitis. 3. Æstus sunt, cæteris paribus,
majores, cùm Luna versatur in Circulo æquinoctiali, & minuuntur cres-
cente Lunæ declinatione ab hoc Circulo.

III. Æstus fiunt, cæteris paribus, majores, quò minor est distan-
tia Solis à Terra; adeòque majores hyeme cæteris paribus, quàm æsta-
te. Differentia verò longè minor est quàm quæ ex diversis Lunæ dis-
tantiis oritur. Ex. gr. distantiæ Lunæ perigeæ fuerunt æquales Junii
19. 1711. & Decemb. 28. 1712. ascensus aquæ priore die pedum 18
digit. 4, posteriori pedum 19 digit. 2; declinatio autem Lunæ fuit pau-
lò minor in hac quàm in illa Observatione. (c).

Porrò in diversis locis æstus sunt diversi, pro varia locorum latitudi-
ne, eorumque situ respectu Oceani unde propagantur, pro ipsius Ocea-
ni amplitudine, & littorum fretorumque indole, aliisque variis de causis.

SECTIO II.

Principia.

Phænomenis æstus Maris insignioribus breviter recensitis, progredimur
ad

(a) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.
(b) *Ibid.* (c) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.

ad Principia, unde horum ratio est reddenda. Liceat tamen præfari no-
bilissimam quidem, sed simul difficilimam esse hanc Philosophiæ partem,
quæ Phænomenorum causas investigat & explicat. Ea est Naturæ sub-
tilitas, ut non sit mirum causas primarias, solertiam Philosophorum ple-
rumque effugere. Qui omnium Phænomenorum rationes, exponere, in-
tegramque causarum seriem nobis exhibere in se susceperunt; illi certè
magnis suis ausis hucusque exciderunt. Philosophiam quidem perfectis-
simam viri clarissimi sibi proposuerunt exstruendam, qualem tamen hu-
manæ sorti competere fas est dubitare. Præstat igitur tantorum virorum
successu minùs felici edoctos, ipsius naturæ vestigia cautè & lentè sequi.
Quòd si Phænomena ad generalia quædam Principia reducere possimus,
horumque vires calculo subjicere, hisce gradibus aliquam veræ Philoso-
phiæ partem assequemur; quæ quidem manca seu imperfecta erit, si ip-
sorum Principiorum causæ lateant: tanta tamen inest rerum naturæ ve-
nustas, ut ea pars longè præstet Subtilissimis virorum acutissimorum com-
mentis.

Motus Maris cuivis vel leviter perpendenti manifestum est Lumina-
rium, Lunæ præsertim, motibus affines esse & analogos. Eadem est
periodus motûs Maris diurni ac Lunæ ad Meridianum loci, eadem mo-
tûs menstrui ac Lunæ ad Solem; utriusque Luminaris vis in motu Ma-
ris generando hinc elucet, quòd æstus sint majores quò minores utrius-
que distantiæ à Terra; adeò ut nullus sit dubitandi locus, motum Ma-
ris esse aliquâ ratione ad motum Lunæ & Solis compositum. Quales
autem dicemus illas esse vires quæ à Luna & Sole propagatæ (aut ab
his aliquo modo pendentes) aquam bis singulis diebus tollunt & depri-
munt; quæ in Syzygiis Luminarium conspirant, Quadraturis pugnant;
in minoribus utriusque distantiis augentur, in majoribus minuuntur; quæ
in minori Lunæ declinatione fortiores, in majori debiliores sunt; & non-
nunquam majorem motum cient cùm Sol & Luna infra Horizontem
deprimuntur, quàm cùm in Meridiano superiori ambo dominantur. Fue-
runt Viri celeberrimi qui æstum Maris pressione quâdam Lunæ cieri putarunt.
Verùm causam & mensuram hujus pressionis non ostenderunt, nec quo
pacto motus Maris varii hinc oriri possint satis clarè indicarunt, multò
minùs motus illos (hoc principio posito) ad Calculum revocare docue-
runt.

Sagacissimus Keplerus Mare versùs Lunam gravitare, æstumque Maris
hinc cieri olim monuit. Newtonus, postquàm leges gravitatis detexis-
set, invenit æquilibrium Maris non tam turbari ipsius gravitate versùs
Lunam, quàm ex inæqualitate vis quâ particulæ Maris tendunt ad Lu-
nam & Solem pro diversis suis distantiis ab horum centris, primusque
motum Maris ad certas Leges, & ad Calculum revocare docuit. Fa-
tendum quidem est gravitatis causam ignotam esse vel saltem obscuram;

Corpora tamen non sunt ideò minùs gravia. Sint qui afferant Corpora nullo impulsu aut vi externâ, sed vi quâdam innatâ se mutuò appetere; verùm non æquum est horum somnia veritati afficere. Alii statim confugiant ad immediatum supremi Auctoris imperium, ast neque horum nimia festinatio probanda est, neque illorum fastidium qui tot naturæ testimoniis non attendunt quoniam causa gravitatis est obscura. Vis gravitatis est nobis adeò familiaris, ejusque mensura adeò pro comperto habetur, ut hâc ad alias vires æstimandas ferè semper utamur; quam in Cœlis, non minùs quàm in Terris dominari, & secundùm certam legem augeri & minui demonstravit vir eximius tanta cum evidentia ut majorem frustra desideres in ardua & difficili hâc Philosophiæ parte, quæ de rerum causis agit.

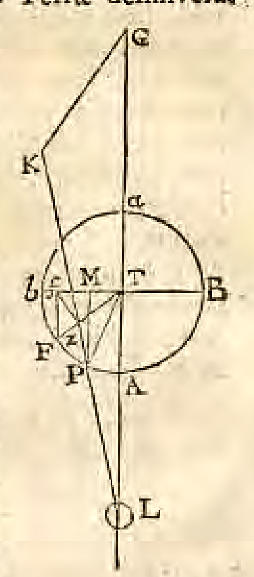
Newtonus argumento singulari ostendit, Lunam urgeri versùs centrum Terræ vi quæ (habitâ ratione distantiarum) cum gravitate Corporum terrestrium planè congruit; quali Terram versùs Lunam pariter urgeri æquo jure censendum est. Cùm Corpus aliquod versùs aliud pellitur, inde quidem haud sequitur hoc versùs illud simul urgeri. Verùm quid de gravitate Corporum cœlestium sentiendum sit, ex iis quæ comperta sunt de gravitate Corporum terrestrium (aliisque viribus similibus) optimè dignoscitur; cùm per hanc ad illam agnoscendam ducamur, sintque Phænomena omninò similia. Mons gravitat in Terram, & si Terra non urgeret montem vi æquali & contraria, Terra à monte pulsa pergeret cum motu accelerato in infinitum. Porrò status cujusvis systematis Corporum (i. e. motus centri gravitatis) necessariò turbatur ab omni actione cui non æqualis & contraria est aliqua reactio, ita ut vix quidquam perenne aut constans dici possit in systemate si hæc lex locum non habeat. Cumque Terræ partes ita semper in se mutuò agant, ut motus centri gravitatis Terræ nullâtenus turbetur à mutuis Corporum aut agentium quorumcunque conflictibus, sive intra sive extra superficiem sitorum; eademque lex obtineat in viribus magneticis, electricis aliisque, teste experientiâ, jure concludit Newtonus Lunam non tantùm in Terram, sed hanc quoque in illam gravitare, & utramque circa commune centrum gravitatis moveri, dum hoc centrum circa totius systematis centrum gravitatis (a) continuò revolvitur.

Gravitatem, cæteris paribus, proportionalem esse quantitati materiæ solidæ Corporis, accuratissima docent experimenta, idemque, è calculo gravitatis Corporum cœlestium comprobatur; quin gravitatem quoque sequi

(a) Suspicari licet aliquam obliquitatis Eclipticæ variationem, de qua sermo est apud Astronomos, ex motu Solis circa centrum systematis oriri: indicio erit hanc esse Phænomeni causam, si constiterit illam variationem analogiam servare cum motu Jovis Planetarum maximi.

sequi rationem materiæ Corporis versùs quod dirigitur, ex principio memorato aliisque argumentis colligitur. Similis est ratio aliarum virium quæ in naturâ dominantur. Lucis radii ex. gr. magis refringuntur, cæteris paribus, quò densiora sunt Corpora quæ subintrant. Terræ partes versùs se mutuò gravitant, non versùs illud punctum fictum quod centrum Terræ appellamus; quod cùm rationi & analogiæ naturæ sit maximè consentaneum, tum pulcherrimè confirmatur accuratissimis experimentis quæ in Boreali Europæ parte nuper instituerunt viri clarissimi ex Academia Regia Parisiensi. Causa gravitatis (quæcumque demum sit) latè dominatur; cumque sit diversa in diversis distantiis, non est mirandum, ejus vim pendere quoque à magnitudine illius Corporis, versùs quod alia impellit. Fatemur vim hanc Corpori centrali impropriè tribui; expedit quidem brevitatis gratiâ sic loqui, id autem sensu vulgari non Philosophico est intelligendum.

Hæc breviter tantùm hìc attingimus. Newtonus postquàm definivisset vim Solis ad aquas turbandas ex differentiâ diametri Æquatoris & Axis Terræ (quam approximatione quâdam suâ investigaverat) per regulam auream quærit breviter ascensum aquæ ex vi Solis oriundum. Verùm quamvis elevatio aquæ quæ sic prodit parùm à verâ differat, cùm tamen Problemata hæc sint diversi generis, quorum priùs pendet à Quadraturâ circuli, posterius autem à Quadraturâ Hyperbolæ seu Logarithmis, ut posteà videbimus; sitque dubitandi locus an à priori ad posteriorem elevationem determinandam, transitus adeò brevis sit omni ex parte legitimus, vel etiam an Methodus quâ figuram Terræ definiverat sit satis accurata; cúmque vires subtilissimæ motum Maris producant, quæ nullos alios sensibiles edunt effectus, adeò ut levissima quæque in hac disquisitione alicujus momenti esse possint; propterea existimavi me facturum operæ prætium, si aliam aperirem viam quâ calculus in hisce Problematibus ex genuinis principiis accuratissimè institui poterit.



Repetenda imprimis sunt pauca ex Newtono, postea viam diversam sequemur. Sit L Luna, T centrum Terræ, $B b$ planum rectæ $L T$ perpendiculare, P particula quævis Terræ; sitque $P M$ perpendicularis in planum $B b$. Repræsentet $L T$ gravitatem Terræ mediocrem vel particulæ in centro T positæ versùs Lunam, sumatur $L K$ ad $L T$, ut est $L T^2$ ad $L P^2$, eritque recta $L K$ mensura gravitatis particulæ P in Lunam. Ducatur $K G$ rectæ $P T$ parallela, occurratque $L T$ productæ, si opus est, in G, & resolvetur vis $L K$ in vires $K G$ & $L G$, quarum prior urget par-

ticulam

riculam P versùs centrum Terræ eſtque ferè æqualis ipſi PT; poſterioris pars TL omnibus particulis communis, & ſibi ſemper parallela, motum aquæ non turbat; altera verò pars TG eſt quàm proximè æqualis ipſi $3\,PM$: * Imprimis igitur quærendum eſt quænam debeat eſſe figura Terræ fluidæ cujus particulæ versùs ſe mutuò gravitant viribus in inversâ diſtantiarum ratione, duplicatâ decreſcentibus, quæque ſimul agitantur duabus viribus extraneis, quarum altera versùs centrum T dirigitur, eſtque ſemper ut PT diſtantia particulæ à centro, altera agit in rectâ ipſi TL parallela eſtque ad priorem ut $3\,PM$ ad PT. Oſtendemus autem Sectione ſequenti figuram hujus Fluidi eſſe accuratè Sphæroidem quæ gignitur revolutione Ellipſeos circà Axem tranſverſum, ſi Terra ſupponatur uniformiter denſa; atque hinc calculum motûs Maris ex motibus cœleſtibus deducere conabimur.

Obſervandum autem alias cauſas conſpirare ad motus Maris producendos cum inæquali gravitate partium Terræ versùs Lunam & Solem. Motus Terræ diurnus circa Axem ſuum variis modis æſtum Maris afficere videtur, præter illum à Newtono memoratum, quo æſtus ad horam lunarem ſecundam aut tertiam retardatur. 1. Æſtus fit paulò major ob vim centrifugam & figuram ſphæroïdicam, ex motu Terræ oriundam, cùm hæc vis paulò major evadat in partibus Maris altioribus quàm in depreſſioribus. 2. Cùm Maris æſtus fertur vel à Meridie versùs Septentrionem, vel contrà à Septentrione versùs Meridiem, incidit in aquas, quæ diversâ velocitate circa Axem Terræ revolvuntur, atque hinc motus novos cieri neceſſe eſt, ut poſtea dicemus. Porrò ſecundùm Theoriam gravitatis, vis quâ particulæ Maris urgentur versùs Terram ſolidam, (quæ aquâ longè denſior eſt) ſuperat vim quâ versùs aquam urgentur. Vires illæ ſunt quidem exiguæ; cùm autem vires quibus Luna & Sol in aquas agunt, in experimentis pendulorum & ſtaticis nullos producant effectus ſenſibiles, tantos autem motus in aquis Oceani generent, ſuſpicari licet vires tantillas ad aquæ motus augendos aliquâ ex parte conducere.

* Vis hæc paulò major eſt ſi particula P ſit in parte Terræ Lunæ obverſa, minor ſi in parte Lunæ averſâ, unde meritò habetur æqualis ipſi $3\,PM$.

SECTIO

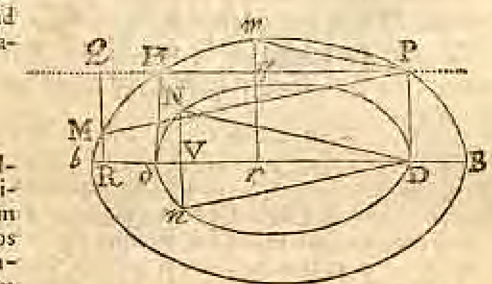
SECTIO III.

De Figurâ quam Terra fluida æqualiter denſa indueret ex inæquali particularum gravitate, versùs Lunam aut Solem.

Expoſitis Phænomenis æſtus Maris & principiis generalibus unde celeberrimi Phænomeni ratio petenda videtur, progredimur nunc ad figuram determinandam quam Terra fluida viribus Lunæ vel Solis, ſuprà explicatis, agitata aſſumeret; præmittenda autem ſunt quædam Lemmata quibus hæc diſquiſitio aliàs difficillima facilè perfici poterit.

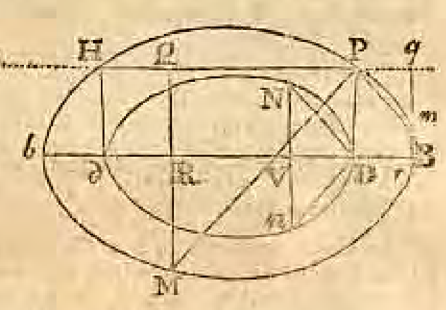
(†) LEMMA I.

(†) Hoc Lemma ad demonſtrandum Corol. 4^{um}. proponitur, quod Corollarium ad Propoſitionem ſequentem reducitur quæ facillimè Analyticè demonſtrari poteſt.



THEOREMA.

A Puncto quovis Ellipſeos, ducantur ad Ellipſim tres lineæ P H, P M, P m, prior quidem P H ſit axi parallela reliquæ P M, P m faciant cum ipſa æquales quolvis angulos M P H, m P H; à punctis P, H, M & m ducantur perpendiculares ad P H & ad axim P D, H d, Q M R, m q r & ſuper D d deſcribatur Ellipſis ſimilis priori, ducanturque à puncto D ad eam Ellipſim lineæ D N, D n lineis P m, P M parallelæ, denique ducatur N n quæ ſecet axim in V dico quod 2 D V = P Q + P q = D R + D r, ſi puncta Q & q cadant ab eâdem parte puncti P, vel quod 2 D V = P Q − P q = D R − D r ſi puncta Q & q cadant ad partes diverſas puncti P.

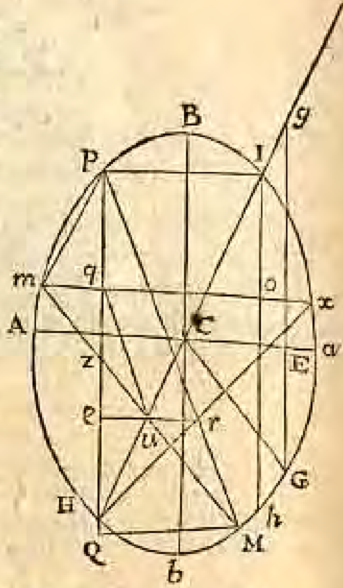


Primo quoniam ex conſtructione, lineæ D N, D n æquales faciunt angulos cum axe D d, facilè deducitur lineam N V n eſſe axi perpendicularem ideoque ſi Radius ſit ad Tangentem anguli Q P M, ut 1 ad t, & D V dicatur z, erit N V $= tz$; & pariter ſi P Q aut P q vel eorum æquales D R aut D r dicantur x, M Q vel m q dicentur, tx.

Axis major ſit ad minorem in utrâque Ellipſi ut a ad b dicaturque B D f, D b $= g$, D P $= h$, & D d $= g - f = l$ erit per naturam Ellipſeos $a^2 : b^2 = fg : h^2$, & pariter erit $a^2 : b^2 = z \times \overline{l-z} : t^2 z^2 = l-z : t^2 z$, hinc $a^2 : \frac{b^2}{t^2} = l-z : z$ & Componendo $\frac{t^2 a^2 + b^2}{t^2} : \frac{b^2}{t^2} = a^2 t^2 + b^2 : b^2 = l : z = \frac{b^2 l}{a^2 t^2 + b^2} = $ D V.

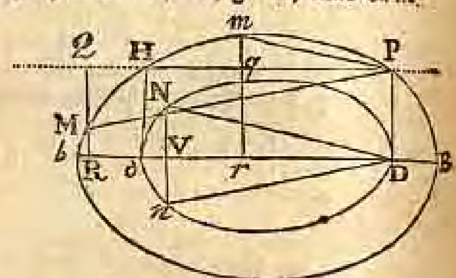
In primo autem caſu in quo Q & q ſunt ab eadem parte puncti P erit R M $= h - tx$

Sit $Abab$ Ellipsis, C centrum, HI diameter quævis, Mm ordinata ad diametrum HI in puncto u, ex H & M ducantur rectæ HP & mx parallelæ, duabus quibusvis diametris conjugatis; & sibi mutuò occurentes in q; jungantur qu & PM, atque hæ rectæ erunt sibi mutuò parallelæ.

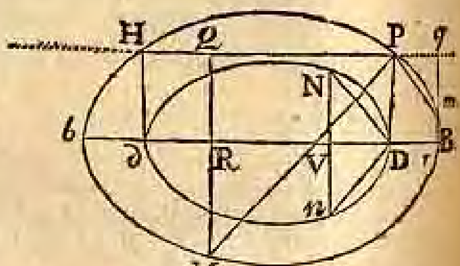


Occurrat recta HP, ordinatæ Mm in z, & rectæ MQ (quæ parallela sit ipsi mq) in Q. Sint CG, CA & CB semidiametri respectivè parallelæ rectis Mm, mx & HP. Ducatur GE parallela ipsi CB & producatur donec occurrat semidiametro CI in g. Ex natura Ellipseos Rectangulum $Mz \times zm : Hz \times zP :: CG^2 : CB^2$; & ob parallelas CG & Mm, erit $qz : zm :: GE : CG$. Unde $Mz \times qz : Hz \times zP ::$

vel $tx - h$ & r m $= h + tx$, & B R aut B r, $f + x$; & R b aut r b, $g - x$; hinc ex naturâ Ellipseos erit $a^2 : b^2 = \overline{f \mp x} \times \overline{g - x} : \overline{h \mp tx}^2$ $= fg + gx - fx - xx : h^2 \mp 2htx + t^2x^2$ $= lx - x^2 : \mp 2htx + t^2x^2$ (demptis ex utroque termino respectivè terminis $fg : h^2$ qui sunt in eàdem ratione, & posito l loco $g - f$) $= l - x : \mp 2ht + t^2x$, atque hinc habetur $a^2t^2x \mp 2a^2ht = b^2l - b^2x$ & transpositione factâ reductisque terminis, fit $x = \frac{b^2l \pm 2a^2ht}{a^2t^2 + b^2}$. Quare si sumatur summa duarum linearum D R, D r, quæ per singulos valores x exprimuntur erit D R + D r $=$ P Q + P q $= \frac{2b^2l}{a^2t^2 + b^2}$ duplum valoris D V prius inventi.



In altero verò casu in quo Q & q hinc inde à puncto P cadunt, erit R M $= tx - h$, & r m $= h - tx$, erit B R $= f + x$ & B r $= f - x$, R b $= g - x$ & r b $= g + x$. Unde ex natura Ellipseos erit $a^2 : b^2 = f \pm x \times g \mp x : h^2 - 2htx + t^2x^2$ $= fg \pm gx \mp fx - x^2 : h^2 - 2htx + t^2x^2$ $= \pm lx - x^2 : 2htx + t^2x^2$ (demptis terminis fg; h^2 & adhibito l loco $g - f$) $= \pm l - x : -2ht + t^2x$, hincque obtinetur $a^2t^2x - 2hta^2 = \pm b^2l - b^2x$ & transpositione factâ reductisque terminis fit $x = \frac{\pm b^2l + 2hta^2}{a^2t^2 + b^2}$. Quare si sumatur differentia duorum D R, D r quæ per singulos valores x exprimuntur erit D R − D r $=$ P Q − P q $= \frac{2b^2l}{a^2t^2 + b^2}$ duplum valoris D V prius inventi, ergo 2 D V $=$ P Q $\mp$ P q prout Q & q sunt ab eàdem vel à diversâ parte puncti P. Q. E. D.

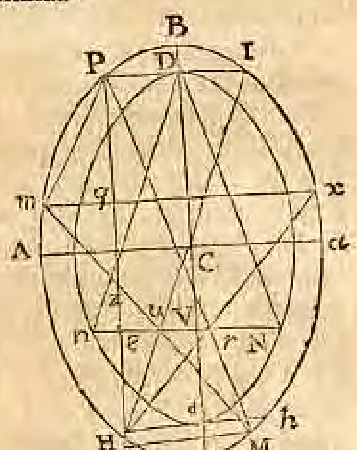


$CG \times GE : CB^2$. Verùm $Hz \times zP : zu \times zP :: Hz : zu :: Gg : CG$. Quare ex æquo $Mz \times zq : zu \times zP :: Gg \times GE : CB^2$. Est autem Rectangulum sub Gg & GE æquale quadrato ex semidiametro CB per notam proprietatem ellipseos, cùm CI sit conjugata semidiametro CG, & CB ipsi CA. Proinde $Mz \times zq = zu \times zP$, & $zq : zu :: zP : zM$, adeóque qu parallela rectæ PM. q. e. d.

Cor. 1. Recta PQ dividitur harmonicè in q & z vel $PQ : Pq :: Qz : qz$. Quippe ducatur ue parallela ipsi mx, occurratque rectæ HP in e, tum erit $Pz : qz :: PM : qu$ (ob parallelas PM, qu) $:: PQ : qe$. Unde $Pq : qz :: Pe : qe :: qe : ez :: Pe + qe : qe + ez ::$ (quoniam Qe, eq sunt æquales) $PQ : Qz$.

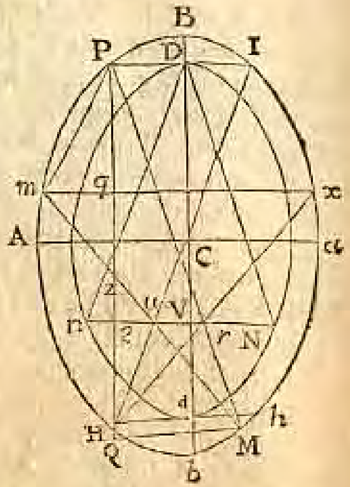
Cor. 2. Occurrat recta mx Ellipsi in x, jungatur Hx quæ occurrat rectæ PM in r, juncta ur erit parellela mx. Quippe sit Ih parallela rectæ HP & occurrat ipsi mx in o; tum ox erit æqualis rectæ qm & $Io : ox :: Pq : qm :: PQ : QM$; adeóque Ix erit parallela ipsi PM. Verùm cùm IH sit diameter Ellipseos & ad x punctum in Ellipsi situm ductæ sint rectæ Ix, Hx ab extremitatibus diametri IH, erunt hæ parallelæ duabus diametris conjugatis, ex naturâ Ellipseos. Quare cùm ex punctis H & M eductæ sint duæ rectæ Hx & PM respectivè parallelæ duabus diametris conjugatis, quæ sibi mutuò occurrunt in r, juncta ur erit parallela rectæ xm per hoc Lemma.

Cor. 3. Sit recta HP nunc parallela Axi Ellipseos, eritque Angulus HPM æqualis Angulo HPm, quoniam $QM : qm :: Qz : qz :: PQ : Pq$ per Cor. 1. Ducantur porrò Hb & PI parallelæ alteri Axi Aa & occurrant Axi Bb in D & d; super Axem Dd describatur Ellipsis similis Ellipsi $ABab$ & similiter posita cui occurrat recta ur producta in N & n; occurrat ur Axi Dd in V, eritque VN vel Vn æqualis rectæ er, & si jungantur Dn, DN erunt hæ rectæ respectivè parallelæ rectis PM, Pm. Nam $Pe : er :: Pq : qm$ & $He : er :: Hq : qx$, unde $He \times Pe : er^2 :: Hq \times qP : mq \times qx :: CB^2 : CA^2$. Sed Rectangulum $DV \times Vd : VN^2 :: CB^2 : CA^2$; $dV = He$, $DV = Pe$, adeóque $DV \times Vd = He \times Pe$, unde $VN^2 = er^2$, & $VN = er$, PM parallela rectæ DN & Pm rectæ Dn.



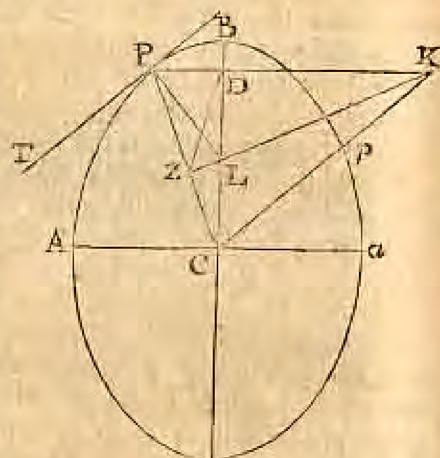
Cor. 4. Hinc sequitur conversè quod si Nn sit ordinata ab interiori Ellipsi ad Axem Dd & DP perpendicularis Axi Dd occurrat Ellipsi exteriori in P; jungantur DN & Dn hisque parallelæ PM, Pm

occurrant Ellipsi exteriori in M & m; ducatur PH parallela Axi Dd, in quam sint perpendiculares MQ & mq, tum $PQ + Pq$ (vel $2Pe$) erit æqualis $2DV$ punctis Q & q cadentibus ad easdem partes puncti P, & $PQ - Pq = 2DV$ cum Q & q sunt ad contrarias partes puncti P.



LEMMA II.

Recta PL perpendicularis Ellipsi $ABab$ in P, occurrat Axi Bb in L, & ex puncto L sit LZ perpendicularis in semidiametrum CP, eritque Rectangulum CPZ contentum sub semidiametro CP & interceptâ PZ æquale quadrato ex semiaxi CA.



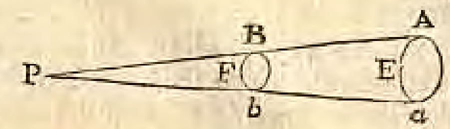
Sit Cp semidiameter conjugata ipsi CP, ducatur PD perpendicularis in Axem Bb & producatur donec occurrat semidiametro Cp in K, jungatur KZ, sitque PT tangens Ellipseos in puncto P. Ob Angulos rectos LDP, LZP, LPT circulus transibit per quatuor puncta L, D, P, & Z, & continget rectam PT in P, adeóque Angulus PDZ æqualis erit Angulo CPT vel PCK. Proinde circulus transibit per quatuor puncta C, K, D & Z; Angulus CZK æqualis erit recto CDK, KZ transibit per punctum L & ex naturâ circuli $CP \times PZ = DP \times PK = CA^2$. q. e. d. (a)

LEM-

(a) Proprietates his in hoc & præcedenti Lemmate demonstratæ analogicè facilè ad hyperbolam transferuntur.

LEMMA III.

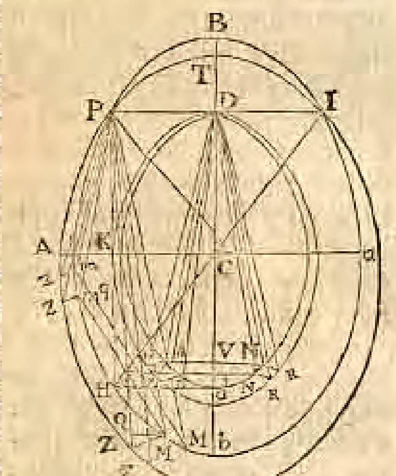
Ponamus particulas corporum versùs se mutuò gravitare viribus decrescentibus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum à se invicem, sintque $PAEa$, $PBFb$ similes pyramides vel coni ex materiâ hujusmodi homogeneâ compositi, eritque gravitas particulæ P in solidum $PAEa$ ad gravitatem ejusdem particulæ in solidum $PBFb$ ut PA ad PB, vel ut homologa quævis latera horum solidorum.



Gravitas enim particulæ P in superficiem quamvis $AEaA$ puncto P concentricam est ut superficies hæc directè & quadratum radii PA inversè, adeóque est semper eadem in quâvis distantiâ PA. Quare gravitas particulæ P versùs totum solidum $PAEa$ erit ad gravitatem ejusdem particulæ versùs totum solidum $PBFb$ ut PA ad PB.

COR. 1. Hinc gravitates quibus particulæ similiter sitæ respectu solidorum similium & homogeneorum versùs hæc solida urgentur, sunt ut distantiæ particularum à punctis similiter sitis in ipsis solidis, vel ut latera quævis solidorum homologa. Quippe hæc solida resolvi possunt in similes conos vel pyramides, vel similia horum frustra, quæ vertices habebunt in particulis gravitantibus.

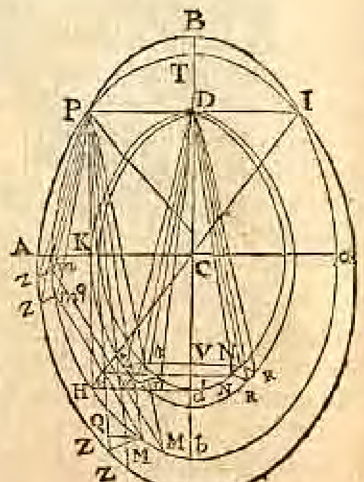
COR. 2. Hinc etiam facilè sequitur (*) quòd si annulus ellipticus, figuris similibus $DBab$, $DndN$ terminatus, circà Axem alterutrum revolvatur, gravitatem particulæ intra solidum sic genitum sitæ, vel in interiori ejus superficie positæ, versùs hoc solidum evanescere; quoniam si recta quævis Ellipsibus hisce similibus & similiter positis occurrat, æqualia semper erunt rectæ segmenta extrema quæ ab Ellipsibus intercipiuntur (ut facilè ostenditur ex naturâ harum figurarum) adeóque vires æquales & oppositæ in hoc casu se mutuò destruent. Hinc verò sequitur quòd si $ABab$ sit Sphærois genita motu Ellipseos circà alterutrum Axem, sintque B & D particulæ quævis in eodem semidiametro sitæ, gravitatem particulæ B versùs Sphæroidem fore ad gravitatem particulæ D ut distantia CB ad distantiam CD, per Corollarium præcedens.



 LEM-

(*) Vid. Newt. Lib. I. Prop. XCI. Cor. 3.

Lemma IV.



Sit $ABab$ Sphærois genita motu ſemiellipſeos ABa circà Axem Aa, P particula quævis in ſuperficie ſolidi, ſit PK Axi normalis in K; & PD Axi parallela occurrat plano Bb (quod Axi ſupponitur normale) in D. Reſolvatur vis quâ particula P gravitat versùs Sphæroidem in duas vires, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem, eritque prior æqualis vi quâ particula K in Axi ſita tendit ad centrum ſolidi, poſterior autem æqualis vi quâ particula D urgetur versùs idem centrum.

Producatur PK donec rursùs occurrat Ellipſi generatrici in H, ducatur Hd parallela Axi Aa quæ occurrat Axi Bb in d, concipiamus ſolidum $DndN$ ſimile ipſi $BAba$ & ſimiliter poſitum deſcribi ſuper Axem Dd. Horum ſolidorum Sectiones ab eodem plano reſectæ erunt ſemper Ellipſes ſimiles & ſimiliter poſitæ, uti notum eſt & facilè oſtenditur. Sint igitur $BAba$, $DndN$ hujuſmodi figuræ à plano $PAbIBP$, quod ſemper tranſire ponatur per datam rectam PDI reſectæ ex ſimilibus hiſce ſolidis. Contineat planum $PzZIT$ cum plano priori Angulum quàmminimum & faciat Sectiones ſimiles $PzZIT$, $DrRD$ & ſimiliter poſitas in prædictorum ſolidorum ſuperficiebus. Hiſce poſitis, imprimis oſtendemus vim quâ particula P urgetur versùs duo fruſta quæ planis PbI, PZI & planis PBI, PTI continentur, ſi reducatur ad directionem PK, æqualem fore vi quâ particula D urgetur versùs fruſtum planis $DnND$, $DrRD$ terminatum.

Sint enim Nn, $N'n'$ duæ ordinatæ ex interiori Ellipſi ad Axem Dd; ſint (a) PM, Pm, PM' & Pm' reſpectivè parallelæ rectis DN, Dn, DN' & Dn'; ſint porrò plana DNR, $DN'R'$, Dnr, $Dn'r'$, PMZ, $PM'Z'$, Pmz, $Pm'z'$ plano $PbIB$ perpendicularia quæ alteri plano, $PzZIT$ occurrant in rectis DR, DR', Dr, Dr', PZ, PZ', Pz, Pz', reſpectivè. His poſitis, quoniam Anguli NDN' & MPM', nDn' & mPm',

(a) In hac Figura deſcribenda rectas NR, $N'R'$, &c. non duximus ſecundùm regulas perſpectivæ, ſed eâ ratione quâ faciliime dignoſci poſſint.

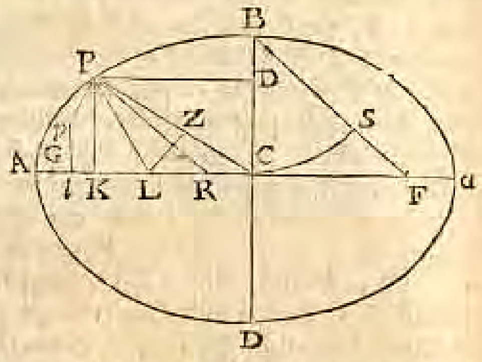
mPm', ponuntur ſemper æquales; & rectæ PM & DN, Pm & Dn, æqualiter ſemper inclinantur ad PI communem planorum Sectionem; ſi Angulus NDN' & inclinatio planorum $PbTB$, $PZIT$ ad ſe invicem continuò minui ſupponantur donec evaneſcant, erunt gravitates particulæ D, in Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$ & particulæ P in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ ultimo in ratione rectarum DN, Dn, PM & Pm reſpectivè per Lemma 3. Eædemque vires ſecundùm rectas Axi Aa, perpendiculares æſtimatæ erunt ut rectæ DV, DV, PQ, Pq reſpectivè. Unde cùm $PQ \mp Pq = 2DV$ per Corol. 4. Lem. 1. ſequitur vim quâ particula P urgetur versùs Axem Aa, gravitate ſuâ in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ æqualem eſſe vi, quâ particula D urgetur gravitate ſuâ versùs Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$. Quare ſi plana DNR, PMZ ſibi mutuò ſemper parallela & plano $PbIB$ perpendicularia moveantur ſemper circà puncta D & P (rectis ſcilicet DN, PM procedentibus ſemper in plano $PbIB$, & rectis DR, Pz in plano $PZIT$) erunt vires quibus particula P urgetur versùs Axem ex gravitate ſuâ in fruſta motu planorum PMZ, Pmz ſic deſcripta; æquales ſemper viribus, quibus particula D urgetur versùs eundem Axem gravitate ſuâ in fruſta motu planorum DNR, Dnr deſcripta; unde ſequitur particulam P urgeri eâdem vi ſecundùm rectam PK, gravitate ſuâ in fruſtra planis PbI, PzI, & planis PBI, PTI contenta, quâ particula D tendit versùs fruſtra planis $DnND$, $DrRD$ terminata. Proinde cùm hæ vires ſecundùm rectas Axi totius ſolidi perpendiculares æſtimatæ ſint etiam æquales, & par ſit ratio virium quibus particulæ P & D urgentur versùs fruſta quævis alia ſimiliter ex ſolidis reſecta, ſequitur particulam P æqualiter urgeri versùs Axem gravitate ſuâ in ſolidum exterius, & particulam D gravitate ſuâ in ſolidum ſimile interius, vel etiam in ſolidum exterius, cùm hæ vires ſint eædem per Corol. 2. Lem. 3.

Simili planè ratione colligitur vim, quâ particula P urgetur ſecundùm rectam Axi Parallelam æqualem eſſe vi, quâ particula K in Axe ſita urgetur versùs centrum ſolidi.

Cor. 1. Particulæ igitur quævis Sphæroidis æqualiter ab Axe vel Æquatore ſolidi diſtantes æqualiter versùs Axem vel Æquatorem urgentur. Vireſque quibus particulæ quævis urgentur versùs Axem ſunt ut illarum diſtantiæ ab Axe, & vires quibus urgentur versùs planum Æquatoris, ſunt ad ſe invicem, ut illarum diſtantiæ ab hoc plano.

Cor.

Cor. 2. Repræsentet A vim quâ Sphærois urget particulam in Axis termino A sitam, B vim quâ idem solidum urget particulam B in circumferentia circuli medii inter A & a positam; sumatur KR ad KC, ut $\frac{A}{CA}$ est ad $\frac{B}{CB}$, jungatur PR, & particula P tendet versùs Sphæroidem in recta PR, vi quæ huic rectæ semper est proportionalis. Vis enim quâ particula D urgetur versùs centrum solidi, est ad B, ut CD ad CB, per Cor. 2. Lem. 3. Similiter vis quâ particula K urgetur versùs solidi centrum est ad A, ut CK ad CA. Quare per Lemma 4. vis quâ particula P urgetur secundùm rectam PK Axi normalem est ad vim, quâ urgetur secundùm rectam PD Axi parallelam, ut $\frac{PK \times B}{CB}$ ad $\frac{CK \times A}{CA}$; adeóque ut $PK \times KC$ ad $CK \times KR$. i. e. ut PL ad KR ex constructione. Quare particula P urgetur secundùm rectam PR, his viribus conjunctis, & vis composita est ad B, ut PR ad BC. Quo verò pacto vires A & B computari possint postea ostendemus.



PROPOSITIO I.

Theorema Fundamentale.

Constet Sphærois $ABab$ materia fluida, cujus particulæ versùs se mutuò urgeantur viribus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum decrescentibus; agantque simul duæ vires extraneæ in singulas Fluidi particulas, quarum altera tendat versùs centrum Sphæroidis, sitque semper proportionalis distantiis particularum ab hoc centro; altera agat secundùm rectas Axis solidi Parallelas, sitque semper proportionalis distantiis particularum à plano Bb Axi normali; & si semiaxes CA, CB Ellipseos generatricis sint inversæ proportionales viribus totis, quæ agunt in particulas æquales in extremis Axium punctis A & B sitas, erit totum Fluidum in æquilibrio.

Ut hæc Propositio nostra primaria clarissimè demonstretur, ostendemus imprimis vim compositam ex gravitate particulæ cujusvis P & duabus viribus extraneis, semper agere in rectâ PL, quæ est ad superficiem Sphæroidis semper normalis. 2. Fluidum in rectâ quâvis PC à superficie ad centrum ductâ, ejusdem ubique esse ponderis. 3. Fluidum in canalibus

canalibus quibusvis à superficie ad datam quamvis particulam intra solidum ductis, eâdem semper vi particulam illam urgere.

1. Vires totæ quæ agunt in particulas A & B dicantur M & N, quæ ex hypothesi sunt in ratione Axium CB & CA. Resolvatur vis prior extranea quæ agit secundùm rectam PC in vires duas, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem; eruntque hæ vires semper ut rectæ PK & KC. Unde cùm vis quâ gravitas particulæ P urget eam secundùm rectam PK sit etiam ut PK, per Lemma superius, sequitur vim totam quâ particula P urgetur secundùm rectam PK, esse ad N, ut PK ad CB. Vires tres agunt in particulam P secundùm rectam PD Axi parallelam, particulæ scilicet gravitas & duæ vires extraneæ, quæ singulæ variantur in ratione rectæ PD vel KC; adeóque vis ex his tribus resultans erit ad M ut CK ad CA. Vis igitur quâ particula P urgetur secundùm rectam PK est ad vim quâ urgetur secundùm rectam PD ut $\frac{N \times PK}{CB}$ ad $\frac{M \times KC}{CA}$ sive (cùm $M:N::CB:CA$) ut $PK \times CA^2$ ad $CK \times CB^2$. i. e. (quoniam si PL Ellipsi generatrici perpendicularis occurrat Axi Aa in L, erit KC ad KL, ut CA^2 ad CB^2, ex notâ Ellipsis proprietate) ut $PK \times KC$ ad $KC \times KL$, adeóque ut PK ad KL. Unde vis composita particulam urget in recta PL, quæ ad superficiem Fluidi ponitur perpendicularis; estque semper ut recta hæc PL, cùm vires secundùm rectas PK sint semper ut PK.

2. Sit LZ normalis in semidiametrum CP, & vis quâ particula P urgetur versùs centrum, erit ut recta PZ per vulgaria Mechanicæ Principia, & pondus Fluidi in rectâ PC ut rectangulum $CP \times PZ$, quod semper est æquale quadrato ex semiaxi CB per Lemma II. Centrum igitur æqualiter undique urgetur, estque Fluidum in æquilibrio in C.

3. Sit p particula quævis in solido ubicunque sita, Pp recta quævis à superficie ad particulam p ducta; sint PK, pl normales in Axem Aa, & vis quâ particula p urgetur pondere Fluidi in rectâ quâvis Pp secundùm hanc rectam, facili calculo quem brevitatis gratiâ omitto, invenietur æqualis $\frac{N}{2CB} \times \overline{PK^2 - pl^2} - \frac{M}{2CA} \times \overline{Cl^2 - CK^2} =$ (cùm $M:N::CB:CA$) $\frac{M \times CA^2 \times PK^2 + M \times CK^2 \times CB^2 - M \times CA^2 \times pl^2}{2CB^2 \times CA} - \frac{M \times CB^2 \times Cl^2}{2CB^2 \times CA}$ $=$ (cùm $PK^2 : CA^2 - CK^2 :: CB^2 : CA^2$, & si CG sit semiaxis Ellipseos per p ductæ similis Ellipsi $ABab$, & similiter sitæ, $pl^2 : CG^2 - Cl^2 :: CB^2 : CA^2$) $\frac{M \times CA - M \times CG}{2}$ adeóque cùm hæc quantitas à situ puncti P non pendeat, vis hæc est semper eadem, si detur locus particulæ p; quæ proinde cùm undique æqualiter urgeatur, Fluidum erit ubique in æquilibrio.

Cor.

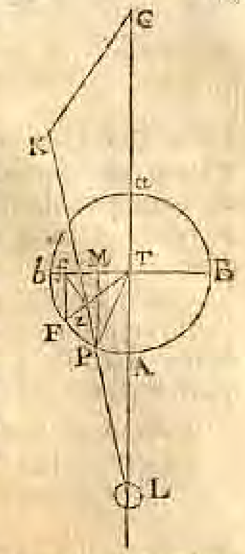
COR. I. Sit ut in Cor. 2. Lemmatis IV. A vis gravitatis in Sphæroidem in loco A, B vis gravitatis in eandem in loco B, V vis KG in mediocri suâ quantitate in superiore Sectione expositâ, quâ Luna vel Sol aquam Sphæroidis deprimit in distantia d, quæ ponitur mediocris inter CA & CB. Sit $CA=a$, $CB=b$, eritque vis N, quâ particula B versùs C urgetur, æqualis $B+\frac{bV}{d}$, & $M=A+\frac{aV}{d}-\frac{3aV}{d}=A-\frac{2aV}{d}$. Unde per hanc Propositionem si $a:b::B+\frac{bV}{d}:A-\frac{2aV}{d}$, erit Fluidum in æquilibrio. Atque hinc ex datis A, B & V in terminis a & b species figuræ innotescet. Est $Aa-Bb=\frac{2a^2V}{d}+\frac{b^2V}{d}$.

COR. 2. Cùm vis V (sive ex inæquali gravitate particularum versùs Lunam, vel versùs Solem oriatur) sit exigua admodum respectu virium A & B, & differentia inter a & b admodum parva, ducatur $a=d+x$ & $b=d-x$, eritque $Bd-Bx+V\times\frac{\overline{d-x}^2}{d}=Ad+Ax-2V\times\frac{\overline{d+x}^2}{d}$, & neglectis terminis ubi xx reperitur $Bd-Bx+Vd-2Vx=Ad+Ax-2Vd-4Vx$, unde $Bd-Ad+3Vd=Ax+Bx-2Vx$; adeóque $x:d::B-A+3V:B+A-2V$; & differentia altitudinis aquæ in A & B (seu $2x$) ad semidiametrum mediocrem d ut $2B-2A+6V$ ad $B+A-2V$, vel quàm proximè ut $B-A+3V$ ad gravitatem versùs Sphæroidem mediocrem.

COR. 3. In præcedentibus Corollariis supposuimus $d=\frac{1}{2}CA+\frac{1}{2}CB$; verùm si d denotet aliam quamvis distantiam ubi vis KG ponatur æqualis ipsi V, sitque $e=\frac{1}{2}CA+\frac{1}{2}CB$, erit $x:e::B-A+\frac{3eV}{d}:B+A-\frac{2eV}{d}$.

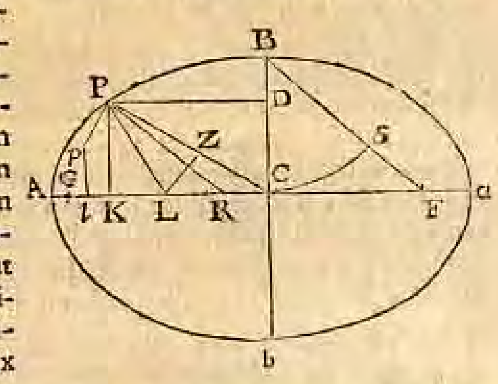
COR. 4. Per vim V in his Corollariis intelleximus vim vel Solis vel Lunæ, & figuram consideravimus, quam Terra fluida homogenea indueret si hæ vires seorsùm in eam agerent. Sit nunc Luna Soli conjuncta vel opposita, & simul agant in Terram. In hoc casu vires Luminarium conspirant ad aquam tollendam in A & a, eamque deprimendam in B & b, & easdem ubique servant leges. Unde erit etiam in hoc casu fluidum in æquilibrio, si vis tota quæ agit in loco A, sit ad vim totam quæ agit in loco B ut CB ad CA; adeóque si V nunc designet summam virium, quibus Sol & Luna aquam deprimit in rectis Tb, TB ad mediocrem distantiam fluidum erit in æquilibrio, si $b:a::A-\frac{2aV}{d}:B+\frac{bV}{d}$, vel x ad d ut $B-A+3V$ ad $B+A-2V$ quàm proximè, ut priùs.

COR. 5. Sit nunc Luna in recta Aa, Sol in recta Bb, & quoniam

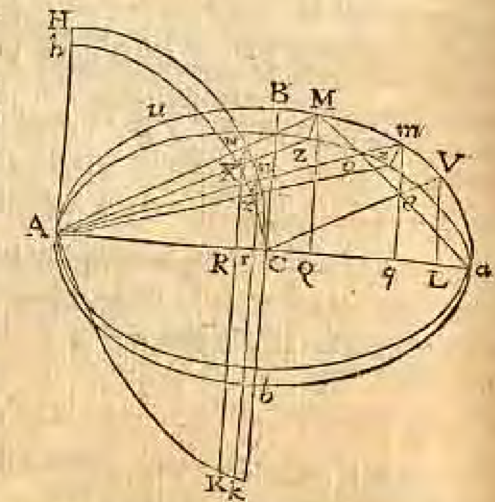


niam Lunæ vis potior est, Axis transversus figuræ generatricis transeat per Lunam, conjugatus per Solem; & si vis tota quæ agit in loco A sit ad vim totam quæ agit in loco B ut CB ad CA erit Sphærois fluida in æquilibrio etiam in hoc casu. Sit s vis quâ Sol deprimit aquam in rectis TA, Ta ad mediocrem à centro C distantiam, l vis quâ Luna aquam deprimit in rectis TB, Tb ad æqualem distantiam; eritque vis tota quæ agit in loco A æqualis $A-\frac{2al}{d}-\frac{as}{d}$, vis tota quæ agit in loco B æqualis $B+\frac{bl}{d}-\frac{2bs}{d}$. Unde colligitur ut in Corol. 2. $x:d::B-A+3l-3s:B+A-2l-2s::$ (si $l-s$ nunc dicatur V) $B-A+3V.\ B+A-2V$, ut priùs.

SCHOL. Eâdem planè ratione ostenditur quòd si $BabA$ sit Sphærois fluida oblata genita motu semiellipsis BAb circa Axem minorem Bb; & vertatur hæc Sphærois circa eundem Axem tali motu ut gravitas versùs Sphæroidem hanc in Polo A sit ad excessum quo gravitas in loco B superat vim centrifugam in B ex motu Sphæroidis circa Axem oriundam ut CB ad CA, Fluidum fore ubique in æquilibrio. Unde sequitur figuram Terræ, quâtenus ex vi centrifugâ à motu diurno oriunda immutatur, esse Sphæroidem oblatam qualis gignitur motu semiellipsis Bab circa Axem minorem (si materia Terræ pro æqualiter densa habeatur) semidiametrum Æquatoris esse ad semiaxem ut gravitas sub Polis in Terram est ad excessum gravitatis supra vim centrifugam sub Æquatore, corpus in loco quovis P tendere versùs Terram vi quæ est semper ut recta PL perpendicularis Ellipsi generatrici & Axi majori occurrens in L, & mensuram denique gradus in Meridiano esse semper ut cubus ejusdem rectæ PL. Hæc omnia accuratè demonstrantur ex hac Propositione; quæ quamvis in disquisitione de figurâ Terræ eximii usus sint, hic obiter tantum monere convenit.



Lemma V.



Sit figura quævis ABa: describatur circulus CNH centro A, radio quovis dato AC; ex A educatur recta quævis AM occurrens figuræ ABa in M, & circulo in N; sint MQ & NR perpendiculares in Axem datum Aa sit KR semper æqualis abcissæ AQ, & vis quâ particula A urgetur versùs solidum motu figuræ ABa circa Axem Aa genitum erit ut area quam generat ordinata KR directè & radius AC inversè.

Occurrat alia recta ex A educta figuræ in m & circulo in n, sintque mq & nr normales in Axem Aa. Sit $AZza$ alia Sectio solidi per Axem, cui occurrant plana AMz, Amz ipsi AMa normalia in rectis AZ, Az, quæ circulum radio AC in plano $AZza$ descriptum secent in X & x; denique arcus Mo circularis centro A descriptus occurrat Am in o. His positis, minuatur angulus contentus planis AMa, AZa, & simul angulus MAm donec evanescant, & ultima ratio vis quâ particula A tendit ad Piramidem $AMZzm$ ad vim quâ urgetur versùs Piramidem $ANXxn$ erit rectæ AM ad AN, vel AQ ad AR, per Lem. II. vis hujus Piramidis est ut vis superficiei $NXxn$ in rectam AN, adeóque ut $\frac{NX \times Nn}{AN^2} \times AN = \frac{NX \times Nn}{AN}$, vel ut $\frac{NR \times Nn}{AN}$ (quoniam NX est ut NR) i. e. ut Rr; ejusdemque vis ad directionem Axis reducta ut $Rr \times \frac{AR}{AN}$; quare vis Piramidis $AMZzm$ ad eandem directionem reducta $Rr \times \frac{AQ}{AC} = \frac{Rr \times KR}{AC}$. Vis igitur quâ particula A urgetur versùs frustum solidi planis AMa, Aza contenti, est ut area quam generat ordinata KR directè & radius AC inversè; cúmque solidum sit rotundum, motu scilicet figuræ circa Axem Aa genitum, par erit ratio vis quâ particula urgetur versùs integrum solidum.

Cor. Vis quâ particula A urgetur in solidum est ad vim quâ urgetur versùs Sphæram super diametrum Aa descriptam ut area quam gene-

generat ordinata KR ad $\frac{2}{3}\ CA^2$. Quippe si AMa sit circulus; erit AQ ad Aa ut AQ^2 ad AM^2, vel AR^2 ad AN^2. Unde in hoc casu erit $KR = \frac{2AR^2}{AC}$, & area ARK (quam generat ordinata KR) $= \frac{2AR^3}{3AC}$, adeóque area tota motu ordinatæ RK genita erit $\frac{2}{3}\ CA^2$.

PROPOSITIO II.

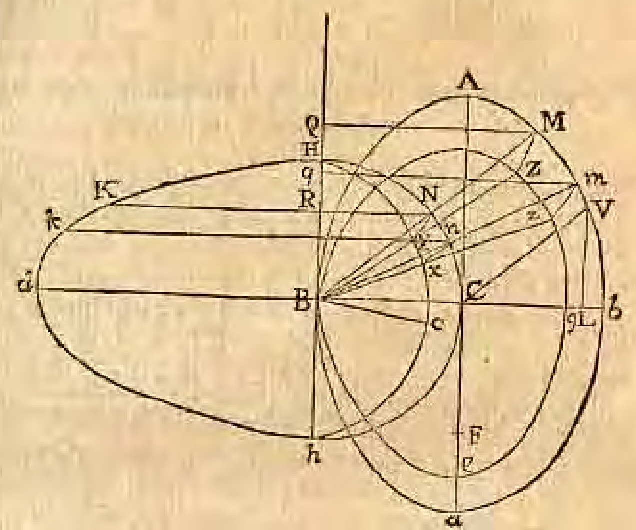
Problema.

Invenire gravitatem particulæ A in extremitate Axis transversi sitæ versus Sphæroidem oblongam.

Cæteris manentibus ut in Lemmate præcedenti sit AMa Ellipsis; Aa Axis transversus, C centrum, Bb Axis conjugatus, F focus; educatur recta quævis AM ex A Ellipsi occurrens in M, cui parellela CV occurrat Ellipsi in V; unde ducatur ordinata ad Axem VL, juncta aM rectæ CV occurrat in e, eritque $AM = 2\,Ce$: cúmque $AQ : CL :: AM\ (2\,Ce) : CV :: 2\,CL : Ca$, erunt $\frac{1}{2}\,AQ$, CL & CA continuè proportionales. Sit $CA = a$, $CB = b$, $CF = c$, $AR = x$, $CL = l$, cúmque $AR^2 : NR^2 :: CL^2 : VL^2$ erit $x^2 : a^2 - x^2 :: l^2 : \overline{a^2 - l^2} \times \frac{b^2}{a^2}$; adeóque $l^2 = \frac{a^2 b^2 x^2}{a^4 - c^2 x^2}$ & AQ vel $KR = \frac{2ab^2x^2}{a^4 - c^2x^2}$, area $ARK = \int \frac{2ab^2x^2 dx}{a^4 - c^2x^2} =$ (si $z : x :: c : a$) $\int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{z^2 dz}{a^2 - z^2}$. Quare sit a quantitas cujus Logarithmus evanescit, sive systematis Logarithmici modulus, l Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, eritque $ARK = \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$. Unde vis quâ particula A gravitat versùs solidum genitum motu segmenti elliptici $AUMA$ circa Axem Aa, erit ad vim quâ eadem particula gravitat versùs solidum genitum motu segmenti circularis ex circulo supra diametrum Aa descripti eadem recta AM abscissi circa eundem Axem ut $\frac{2a^2b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$ ad $\frac{2x^3}{3a}$; & si L sit Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ (vel $\frac{a}{b} \times \overline{a+c}$) erit vis quâ particula A tendit versùs totam Sphæroidem ad vim quâ tendit versùs totam Sphæram ut $3\,b^2 \times \overline{L - c}$ ad c^3.

Schol. Eâdem ratione invenitur gravitas particulæ in Polo sitæ versùs Sphæroidem oblatam, quærendo aream cujus ordinata est $\frac{2b^2a^2}{c^3} \times \frac{z^2}{b^2 + z^2}$. Sit $BAba$ Sphærois oblata motu Ellipsis BAb circa Axem minorem genita, centro B, radio BC describatur. Arcus circuli CS, rectæ BF occurrens in S, eritque gravitas in hanc Sphæroidem in Polo B ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram super diametrum Bb descriptam ut $3\,CA^2 \times \overline{CF-CS}$ ad CF^3. Methodus verò quâ gravitas particulæ in Æquatore sitæ versùs Sphæroidem oblongam vel oblatam computatur, est minùs obvia, facilis tamen evadit ope sequentis Lemmatis.

Lemma VI.



Duo plana $BMbaB$, $BZgeB$ se mutuò secent in recta HBb, communi figurarum tangente, auferantque ex solido frustum $BMbaBzgeB$; sint semicirculi HCb, Hcb sectiones horum planorum & superficiei Sphæræ centro B, radio BC descriptæ. Ex puncto B educatur recta quævis BM in priori plano figuræ $BMba$ occurrens in M, & semicirculo HCb in N; sintque MQ & NR normales in Hb, & ordinata KR semper æqualis rectæ MQ. His positis, si angulus CBc planis hisce contentus minuatur in infinitum, erit gravitas particulæ B versùs frustum $BMbaBZgeB$ ultimò ad gravitatem ejusdem particulæ versùs frustum Sphæræ semicirculis HBb, Hcb contentum, ut area $HKdb$ genita motu ordinatæ KR ad semicirculum HCb.

Sit m punctum in figurâ BMB, ipsi M quàm proximùm jungatur Bm quæ circulo HCb occurrat in n; sitque nr normalis in Hb. Ad hæc sint plana BMZ, Bmz perpendicularia plano $BMba$, secentque planum alterum $BZge$ in rectis BZ, Bz circumferentiæ Hcb occurrentibus in X & x. His positis, vis quâ particula B gravitat in Pyramidem $BMZzm$ erit ad vim quâ eadem particula gravitat in Pyramidem $BNXxn$ ultimò ut recta BM ad BN, vel Ma ad NR per Lem. III. Gravitas autem in hanc Pyramidem est ut $\frac{NX \times Nn}{BN^2} \times BN$, vel (quoniam NX est ut NR) ut $\frac{NR \times Nn}{BC}$ i. e. ut Rr; atque hæc gravitas agit secundùm rectam Bb vi quæ est $\frac{Br \times RN}{BC}$; unde gravitas in Pyramidem $BMZzm$ agit secundùm rectam Bb vi quæ est ut $\frac{Rr \times MQ}{BC}$, vel $\frac{Rr \times KR}{BC}$. Proinde ultima ratio virium quibus particula B urgetur versùs integra frusta solidi & Sphæræ BC, est ratio areæ $HKdb$ (quam generat ordinata KR) ad semicirculum HCb.

Cor. Gravitas in frustum planis $BMba$, $BZge$ terminatum, est ad gravitatem in frustum Sphæricum contentum circulis super diametros Bb, Bg descriptis, ut area $HKdb$ ad $\frac{8}{3}\,CB^2$. Sit enim $BMBb$ circulus, eritque MQ ad Bb, ut RN^2 ad BC^2, & $KR = \frac{2RN^2}{CB} = 2BC^2 - \frac{2BR^2}{CB}$, & area $HKdB = \frac{4}{3}\,CB^2$ adeóque area tota $HKdb = \frac{8}{3}\,CB^2$.

PROPOSITIO III.

Problema.

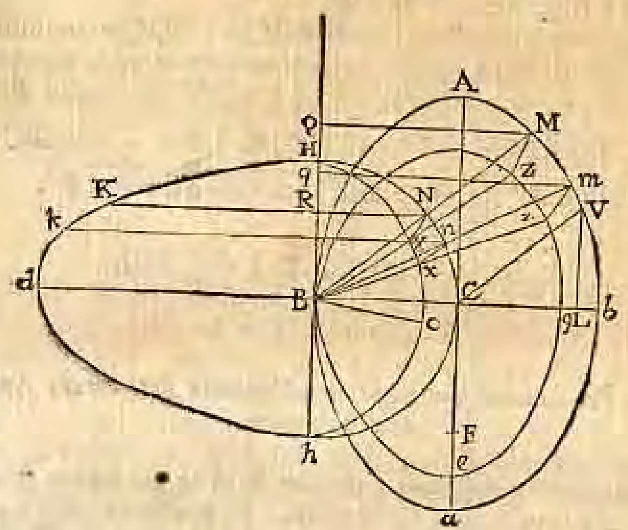
Invenire gravitatem particulæ in Æquatore sitæ versùs Sphæroidem oblongam.

Per Æquatorem intelligimus circulum ab Axe conjugato genitum dum figura circa alterum Axem revolvitur. Repræsentet $BMba$ in figura præcedentis Lemmatis, Sectionem quamvis Sphæroidis Æquatoris plano normalem, eritque hæc figura semper similis Sectioni per Polos solidi, seu figuræ cujus revolutione solidum genitum esse supponimus. Hujus demonstrationem ut facilem & ab aliis traditam brevitatis gratiâ omitto. Sit igitur CA Sectionis hujus semiaxis transversus, CB semiaxis conjugatus, F focus; sit $CB=b$, $CA=a$, $CF=c$, $BR=x$; CV semidiameter parallela rectæ BM, VL ordinata ad Axem Bb, $CL=l$. Tunc $CB : CL :: CL : \frac{1}{2}MQ$ ut in Proposit. præcedenti, & $MQ = \frac{2l^2}{b}$. Verùm $NR^2 : BR^2 :: CL^2 : VL^2$ i. e. $b^2 - x^2 : x^2 :: l^2 : \overline{b^2 - l^2} \times \frac{a^2}{b^2}$, vel $a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} : x^2 :: l^2 : b^2 - l^2$, & $l^2 = \frac{a^2b^2 \times \overline{b^2-x^2}}{a^2b^2 - c^2x^2} =$ (si $z : x :: c : b$) $\frac{b^2a^2}{c^2} \times \frac{c^2-z^2}{a^2-z^2}$, & $KR = MQ = \frac{2l^2}{b} = \frac{2a^2b}{c^2} \times \frac{c^2-z^2}{a^2-z^2}$, & area $BdKR$

æqua-

æqualis $\int \frac{2a^2b^2dz}{c^3} \times \frac{c^2-z^2}{a^2-z^2} = \frac{2a^2b^2z}{c^3} - \int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2dz}{a^2-z^2}$. Sit igitur l (ut in priore Propositione) Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, & area $BdKR$ erit $\frac{2a^2b^2z}{c^3} - \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2l}{a^2} = \frac{2b^2}{c^3} \times \overline{a^2-b^2l}$.

Supponantur nunc $x=b$, adeóque $z=c$; sitque L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, ut priùs, eritque area tota $HKdh$, motu ordinatæ KR genita, æqualis $\frac{4b^2}{c^3} \times \overline{a^2-b^2L}$. Quare gravitas particulæ B



versùs frustum planis ellipticis $BMba$, $BZge$ terminatum erit ultimò ad gravitatem in frustum iisdem planis contentum à Sphæra centro C radio CB descripta resectum, ut a^2c-b^2L ad $\frac{2}{3}c^3$ per Cor. Lem. VI. Sit circulus $BPpb$ Æquator Sphæroidis, BP & Bp duæ quævis chordæ hujus circuli; Sectiones Sphæroidis circulo BPb perpendiculares erunt Ellipses similes Sectioni quæ per Polos solidi transit, quarum BP & Bp erunt Axes transversi; Sectiones autem Sphæræ super diametrum Bb descriptæ per eadem plana erunt circuli quorum diametri erunt chordæ BP, Bp. Proinde eadem semper erit ratio gravitatis particulæ B in frustra elliptica & sphærica his planis terminata; eritque gravitas versùs integram Sphæroidem ad gravitatem versùs Sphæram, ut a^2c-b^2L ad $\frac{2}{3}c^3$, a denotante semiaxem transversum figuræ cujus

jus motu gignitur solidum, b semiaxem conjugatum, c distantiam foci à centro, & L, Logarithmum ipsius $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ vel $a \times \frac{a+c}{b}$. q. e. f.

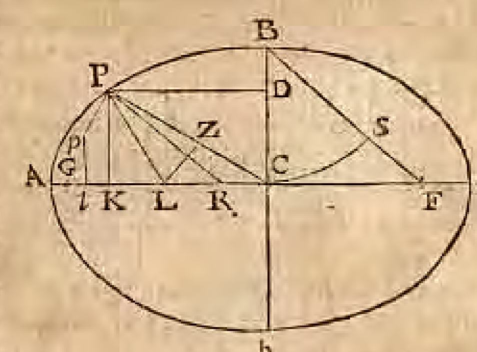
COR. Eadem semper est ratio gravitatis versùs frustum quodvis Sphæroidis & frustum Sphæræ eodem plano ad Æquatorem normali abscissum ab eâdem parte plani; vel gravitas in portionem à Sphæroide hoc plano abscissam est ad gravitatem in integram Sphæroidem, ut gravitas in frustum Sphæræ eodem Plano ex eâdem parte abscissum ad gravitatem in integram Sphæram.

SCHOL. Eâdem ratione si $BAba$ sit Sphærois oblata motu figuræ BAb circa Axem minorem Bb genita, erit gravitas in Sphæroidem hanc in loco A ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C radio CA descriptam, ut $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$ ad $\frac{2}{3}CF^3$.

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

Ex datis viribus quibus Terræ particulæ gravitant versùs Solem & Lunam, invenire figuram quam Terra indueret in Syzygiis vel Quadraturis Solis & Lunæ in hypothesi quòd Terra constet ex Fluido homogeneo, & circa Axem suum non movetur.



Gravitas in loco A versùs Sphæroidem oblongam motu figuræ ABa circa Axem transversam Aa genitam, est ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C radio CA descriptam, ut $3b^2 \times \overline{L-c}$ ad c^3 per Prop. II. Hæc autem gravitas est ad gravitatem in B versùs Sphæram centro C radio CB descriptam, ut CA ad CB (per Cor. 1. Lem. III.) quæ est ad gravitatem in loco B versùs Sphæroidem ut $\frac{2}{3}C^3$ ad a^2c-b^2L per Prop. IV. Componantur hæ rationes, eritque gravitas in loco A versùs Sphæroidem ad gravitatem in loco B versùs eandem, ut $2ab \times \overline{L-c}$ ad a^2c-b^2L. Designet A gravitatem in loco A, B gravitatem in loco B, V summam virium quibus Luminaria conjuncta vel opposita aquam deprimunt in rectis

TB, Tb perpendicularibus rectæ Aa quæ per Terræ & Luminarium centra transire supponitur, ut in Cor. 4. Prop. I. vel differentiam earumdem virium in Lunæ Quadraturis, ut in Cor. 5. ejusdem Prop. & per ea quæ demonstrantur Cor. 1. Prop. I. erit $Aa - Bb = \frac{2a^2V + b^2V}{d}$. Adeóque $Aa - bA \times \frac{a^2c - b^2L}{2ab \times \overline{L-c}} = \frac{2a^2V + b^2V}{d}$, & $V : A :: 2a^2L + b^2L - 3a^2c : \frac{2a}{d} \times \overline{2a^2 + b^2} \times \overline{L-c}$. Atque ex datâ ratione V ad A vel ad B, vel $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ (quæ pro G gravitate mediocri in circumferentiâ $ABab$ haberi potest) habebimus æquationem unde species figuræ & differentia semiaxium seu ascensus aquæ computari possunt.

Est autem L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, adeóque æqualis $c + \frac{c^3}{3a^2} + \frac{c^5}{5a^4} + \frac{c^7}{7a^6}$, &c. per Methodos notissimas, adeóque $L - c = \frac{c^3}{3a^2} + \frac{c^5}{5a^4} + \frac{c^7}{7a^6}$, &c. Unde est V ad A, ut $\frac{2c^2}{15a^2} + \frac{4c^4}{35a^4} + \frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{\overline{L-c} \times ad}{c^3 \times \overline{2a^2 + b^2}}$, & V ad $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ vel G, ut $\frac{2c^2}{15a^2} + \frac{4c^4}{35a^4} + \frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{2a^2 + b^2}{2bdc^3} \times \overline{2abL - b^2L + a^2c - 2abc}$.

Verùm si V sit admodum exigua respectu gravitatis G (ut in præsenti casu) erit differentia semidiametrorum CA, CB ad semidiametrum mediocrem quàm proximè ut $15V$ ad $8G$, vel paulò accuratiùs ut $15V$ ad $8G - 57\frac{5}{14} \times V$. Sit enim ut in Cor. 2. Prop. I. $a = d + x$, $b = d - x$, adeóque $c^2 = a^2 - b^2 = 4dx$, eritque $A : B :: 2ab \times \overline{L-c} : a^2c^2 - b^2L :: \frac{b}{3} + \frac{bc^2}{5a^2} + \frac{bc^4}{7a^4}$ &c $: \frac{a}{3} + \frac{ac^2}{15a^2} + \frac{ac^4}{35a^4}$, &c. i. e. ut $\frac{d-x}{3} + \frac{4dx \times \overline{d-x}}{5 \times \overline{d+x}^2} + \frac{16d^2x^2 \times \overline{d-x}}{7 \times \overline{d+x}^4}$, &c. ad $\frac{d+x}{3} + \frac{4dx \times \overline{d+x}}{15 \times \overline{d+x}^2} + \frac{16d^2x^2 \times \overline{d+x}}{35 \times \overline{d+x}^4}$, &c. adeóque (neglectis terminis, quos plures dimensiones ipsius x ingrediuntur) ut $\frac{1}{3}d + \frac{17}{15}x : \frac{1}{3}d + \frac{29}{15}x$. Proinde erit $B - A$ ad $B + A$ $(= 2G :: x : 5d + 18x$, & $B - A : G :: 2x : 5d + 18x$. Sed per Cor. 2. Prop. I. est x ad d ut $B - A + 3V$ ad $B + A - 2V$, adeóque substituendo valores quantitatum $B - A$ & $B + A$, erit $x : d :: \frac{2Gx}{5d + 18x} + 3V : 2G - 2V$. Unde $2Gx - 2Va = \frac{2Gdx + 15Vd + 54Vx}{5d + 18x}$, & $10Gdx - 10dVx + 36Gxx - 36Vxx = 2Gdx + 15Vd + 54Vx$, & terminis omissis ubi reperi-

-reperitur xx, erit $8Gdx - 64Vx = 15Vd$ atque $x : d :: 15V : 8G - 64V$, & $2x$ ad d ut $15V$ ad $4G - 32V$. Ascensus igitur totius aquæ i. e. differentia semidiametrorum CA, CB (vel $2x$) est ad semidiametrum mediocrem, ut $15V$ ad $8G$ quàm proximè; facile autem erit rationem hanc exhibere magis accuratè, quoties usus id postulabit, assumendo plures terminos valoris Logarithmi L, & calculum prosequendo; prodit autem hoc pacto x ad d magis accuratè, ut $15V$ ad $8G - 57\frac{5}{14} \times V$.

COR. $B - A$ est æqualis $\frac{3V}{4}$; & $B - G = \frac{3V}{8}$ quàm proximè. Quippe $B - A : G :: 2x : 5d :: 30V : 40G$, adeóque $B - A : V :: 3 : 4$.

SCHOL. Eâdem ratione patebit gravitatem versùs Sphæroidem oblatam in Polo B fore ad gravitatem in Æquatore in loco quovis A, ut $2CB \times CA \times \overline{CF - CS}$ ad $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$.

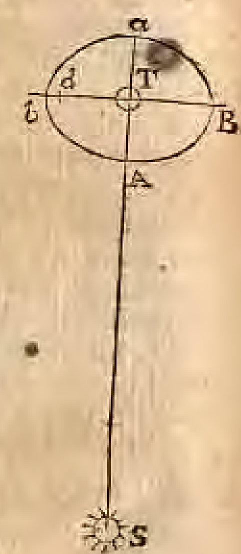
PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

Invenire vim V quæ oritur ex inæquali gravitate partium Terræ versùs Solem, & definire ascensum aquæ hinc oriundum.

Sit ☉ Sol, T Terra, $ABab$ orbita lunaris neglectâ excentricitate, B & b Quadraturæ. Designet S tempus periodicum Terræ circa Solem, L tempus periodicum Lunæ circa Terram, l tempus quo Luna circa Terram revolveretur in circulo ad distantiam mediocrem Td $(= \frac{1}{2}CA + \frac{1}{2}CB)$ si motus Lunæ gravitate suâ versùs Solem nullâtenus turbaretur, & solâ gravitate versùs Terram in orbitâ retineretur. Designet porrò K gravitatem mediocrem Lunæ vel Terræ versùs Solem, g gravitatem Lunæ versùs Terram in mediocri suâ distantiâ, v vim quam actio Solis huic gravitati adjiceret in Quadraturis ad eandem distantiam. His positis, erit $v : K :: dT : ST$; atque $K : g :: \frac{ST}{SS} : \frac{dT}{ll}$ ex vulgari doctrina virium centripetarum; unde $V : g :: ll : SS$: cúmque ll sit paulò minùs quàm LL, quoniam Luna nonnihil distrahitur à Terrâ gravitate suâ in Solem, patet vim v esse ad g in paulò minori ratione quàm LL ad SS. Hanc autem rationem vis v ad g nemo hactenus (quantùm novi)

novi) accuratè definivit; ea tamen propior videtur esse rationi LL ad $SS+2LL$ vel saltem rationi LL ad $SS+\frac{1}{2}LL$ quàm rationi LL ad SS. Argumenta verò quibus id colligitur hîc omittenda censeo, moniti Academiæ illustrissimæ memor, cùm in hâc disquisitione parvi sit momenti quænam harum rationum adhibeatur. Supponamus igitur cum Newtono $v:g::LL:SS::$ (per computos Astronomicos periodorum Solis ac Lunæ) $1:178{,}725$. Vis V quæ in Terræ superficie vi v respondet, est ad v, ut Terræ semidiameter mediocris ad distantiam Lunæ mediocrem vel ut 1 ad $60\frac{1}{2}$. Vis autem g agit secundùm rectas, quæ in centro gravitatis Terræ ac Lunæ concurrunt, cujus ratione habitâ ex incremento gravitatis in descensu ad superficiem Terræ patebit vim V esse ad G (quâ gravitas mediocris in superficie Terræ designatur ut suprà) ut 1 ad 38604600. Unde cùm per Cor. 2. Prop. III. sit $x:d::15V:8G-57\frac{5}{14}V$ erit in hoc casu $x:d::1:20589116$. Cúmque semidiameter Terræ mediocris sit pedum 19615800; hinc sequitur totum aquæ ascensum ex vi Solis oriundum fore pedis unius Parisiensis cum $\frac{90545}{100000}$ partibus pedis, i. e. pedis unius cum digitis decem, & $\frac{8654}{10000}$ partibus digiti; quem suo more breviter deprehendit Newtonus esse pedis unius digitorum undecim cum $\frac{1}{30}$ parte digiti, quæ altitudo à nostrâ differt tantùm sexta parte unius digiti.



Verùm in hoc calculo Terra supponitur esse Sphærica, nisi quatenus à vi Solis Mare elevatur. Sed si ascensum aquæ maximum quæramus, ponendum est Solem in circulo æquinoctiali versari, figuramque $ABab$ in hoc plano constitui, & augenda est vis V in ratione semidiametri mediocris ad semidiametrum Terræ maximum, & minuenda est vis G donec evadat æqualis gravitati sub Æquatore: i. e. Si figuram Terræ eam esse supponamus quam definivit Newtonus, augenda erit vis V in ratione 459 ad 460, & minuenda est G in eadem ferè ratione, quoniam vires gravitatis in superficie Terræ sunt inversè ut distantiæ locorum à centro; cúmque distantia d sit augenda in eâdem ratione, erit ascensus aquæ in Æquatore augendus in ratione triplicata semidiametri mediocris ad maximam, adeóque erit pedis unius digitorum undecim cum 60ma circiter parte digiti. Terra autem altior est sub Æquatore quàm prodiit calculo Newtoniano ex hypothesi quòd Terra sit uniformiter densa à superficie usque ad centrum; ut colligitur ex variis pendulorum Observationibus, & præsertim ex mensurâ gradus meridia-

meridiani quam viri clarissimi nuper definiverunt accuratissimè sub Circulo Polari.

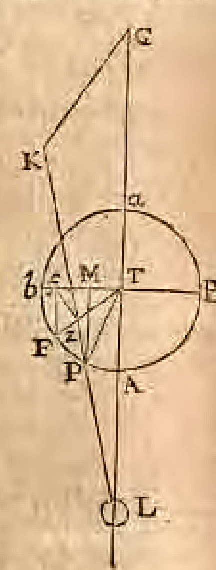
SCHOL. 1. Si gravitatem posuissemus æqualem in A & B, & ejusdem vis in totâ circumferentiâ $ABab$, prodiisset x æqualis tantùm $\frac{3Vd}{2G}$, & ascensus aquæ (seu $2x$) pedis unius digitorum sex cum tertiâ circiter parte digiti. Quippe in hâc hypothesi prodiisset CA ad CB, ut $G+V$ ad $G-2V$, adeóque x ad d, ut $\frac{3V}{2}$ ad G quàm proximè. Atque hinc apparet utilitas præcedentium Propositionum, cùm ascensus aquæ secundùm hanc minùs accuratam hypothesim minor sit ascensu quem in hâc Propositione definivimus, differentiâ $\frac{3Vd}{4G}$, quartâ scilicet parte ascensus illius.

SCHOL. 2. Ex hac doctrina patet Satellites Jovis Soli & sibi mutuò conjunctos vel oppositos in Oceano Joviali (si ullus sit) ingentes motus excitare debere, modò non sint Lunâ nostrâ multò minores; cùm diameter Jovis ad distantiam cujusque Satellitis multò majorem habeat rationem quàm diameter Terræ ad distantiam Lunæ. Verisimile est mutationes macularum Jovis ab Astronomis observatas hinc aliquâ saltem ex parte ortum ducere; quòd si hæ mutationes eam analogiam servare deprehendantur cum aspectibus Satellitum, quam hæc doctrina postulat, indicio erit veram earum causam hinc esse petendam. Ex hâc doctrinâ licet quoque conjicere non absque utilitate, motus Satellitum circa Axes suos & circa primarios ita compositos esse ut idem Hemisphærium suis primariis semper ostendant, secundùm sententiam celeb. Astronomorum. Verisimile enim est motus Maris nimios in Satellitibus cieri deberi, si cum aliâ quâvis velocitate circa Axes suos revolverentur; aquis autem in his agitandis (si quæ sint) sufficere possunt æstus ex variis Satellitum distantiis à suis primariis oriundis.

SECTIO IV.

De motu Maris quâtenus ex motu Telluris diurno aliisve de causis immutatur.

Ostendimus in Sectione præcedenti Terram fluidam versùs Solem vel Lunam inæqualiter gravem Sphæroidis oblongæ figuram induere debere; cujus Axis transversus per centrum Luminaris transiret, si Terra non revolveretur circa Axem suum motu diurno; & ascensum aquæ in hypothesi Terræ quiescentis ex vi Solis oriundum definivimus. Verùm ob motum Terræ diversa est ratio æstus Maris. Hinc enim aqua nunquam fit in æquilibrio, sed perpetuis motibus agitatur. Supponamus Solem & Lunam conjunctos vel oppositos versari in plano Æquatoris $ABab$; sit Aa diameter quæ per illorum centra transit, Bb huic perpendicularis. Dum aquæ moles revolvitur motu diurno, augentur vires quibus ascensus ejus promovetur in transitu aquæ à locis b & b ad A & a, & in his locis evadunt maximæ; ascensus tamen aquæ prorogari videtur, postquàm hæ vires minui cœperunt usque ferè ad loca ubi hæ vires æquipollent viribus quibus deprimitur infra altitudinem quam naturaliter obtineret, si nullâ vi extraneâ motus aquæ perturbaretur; adeò ut motus aquæ considerari possit tanquam libratorius, & tantundem ferè ascendat viribus quibus elevatur decrescentibus, quàm iisdem crescentibus. Cùmque vis centrifuga ex motu diurno orta sit multò minor gravitate, situs loci F ubi prædictæ vires æquipollent sub Æquatore, dum aqua transit à loco b ad locum A, sic ferè definiri posse videtur. Ex puncto F sit Ff normalis in Bb, & fz in TF. Designet V summam virium quibus Sol & Luna aquam deprimunt in rectis TB, Tb ut suprà, & vis quâ aqua tollitur in F erit $\frac{3V \times Fz}{d} = \frac{3V \times Ff^2}{d \times TF}$. Supponamus F esse locum aquæ ubi altitudo aquæ fit minima, ut TF haberi possit pro semiaxe conjugato figuræ $ABab$, dicatur gravitas in extremitate hujus Axis B, & gravitas mediocris in hac figura G, ut suprà; & vis quâ aqua deprimitur infra situm naturalem in loco F erit $B - A + \frac{V \times TF}{d}$. Ponantur hæ vires æquales, cùmque TF sit quàm proximè æqualis distantiæ d, sitque $B - G = \frac{3V}{8}$ per Cor. Prop. IV. erit $\frac{3V}{8} + V = \frac{3V \times Ff^2}{d^2}$, seu $TF^2 : Ff^2 :: 3 : 1 + \frac{3}{8} :: 24 : 11$. unde angulus FTb erit graduum 42 minutorum 37, inciditque ferè in punctum medium inter b & A. Hunc verò calculum ut accuratum non proponimus.



PROPO-

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

Motum Maris ex vi Solis oriundum, & motum lunarem in orbitâ quàm proximè circulari inter se comparare, & hinc ascensum aquæ æstimare.

Astronomis notissimum est Lunæ distantiam mediocrem in Syzygiis minorem esse distantiâ mediocri in Quadraturis. Clarif. Halleyus ex Observationibus colligit distantiam priorem esse ad posteriorem ut $44\frac{5}{6}$ ad $45\frac{1}{2}$. Newtonus Methodo quâdam suâ harum rationem invenit esse eam 69 ad 70: Princip. Prop. 28. Lib. 3. Clarissimus Auctor Tractatûs de Motibus Lunæ secundùm Theoriam gravitatis, in hac doctrina optimè versatus, colligit eam esse numeri 69 ad 70, ratione non habitâ decrementi gravitatis dum Luna transit à Syzygiis ad Quadraturas. Ut motus Maris ex vi Solis oriundus (qualis suprà definitur Prop. V.) cum motu Lunæ conferatur, supponamus orbem Lunarem aquâ compleri & quæramus ascensum hujus aquæ per Prop. IV. & V. In Prop. V. erat vis v ad g, ut 1 ad 178,725; quare in hoc casu foret $x : d :: 15v : 8g - 57\frac{5}{14} \times v :: 1 : 91,496$: adeóque semiaxis figuræ ad semiaxem conjugatum (vel $d + x$ ad $d - x$) ut 46.248 ad 45,248; quæ ferè congruit cum ratione distantiarum Lunæ in Quadraturis & Syzygiis quam Halleyus ex Observationibus deducit; adeò ut figura orbitæ Lunaris specie vix diversa sit ab ea quam Globus aqueus quiescens Lunæ orbitam complens ex vi Solis indueret; forent tamen positione diversæ, siquidem illius Axis minor Solem respiciat, hujus Axis major versùs Solem dirigeretur. Ratio numeri 59 ad 60 (quarum semidifferentia est ad semisummam ut $3v$ ad g quàm proximè) probè congruit cum ratione semiaxium figuræ quam aqua ex vi Solis indueret, si vis gravitatis eadem esset per totam circumferentiam $ABab$, ut ostendimus in Schol. 1. Prop. V. Ascensus autem aquæ Prop. V. definitus congruit cum eâ quam ex Observationibus colligit Halleyus; unde suspicari licet differentiam diametrorum orbitæ lunaris paulò fieri majorem ex decremento gravitatis Lunæ in Terram dum transit à Syzygiis ad Quadraturas, simili ferè ratione quâ ascensus aquæ prodiit in hâc propositione major propter excessum gravitatis aquæ in Terram in loco B supra ipsius gravitatem in loco A aliisque à centro distantiis. Verùm quicquid sit judicandum de ratione diametrorum orbitæ Lunaris, ex his colligere licet ascensum aquæ Prop. V. definitum majorem vix evadere propter motum Terræ diurnum circa Axem suum. Supponamus enim hunc mo-

tum

tum augeri donec vis centrifuga ex hoc motu oriunda fiat æqualis gravitati, & particulæ Maris revolvantur ad morem Satellitum in orbitis quàm proximè circularibus Terram contingentibus. Hæ orbitæ erunt ellipticæ, quarum Axes minores productæ transibunt per Solem. Et si semiaxium differentia sit ad semidiametrum mediocrem ut $3V$ ad G (secundùm ea quæ de motibus lunaribus tradit vir acutissimus) erit minor ascensu aquæ suprà definito Prop. V. in qua invenimus $2x$ esse ad d ut $15V$ ad $4G$. Quòd si quæramus horum semiaxium differentiam ex figura orbitæ lunaris quâtenus ex Observationibus innotescit secundùm clariss. Halleyum, parum admodum superabit ascensum aquæ suprà definitum. Nec mirum si non accuratè conveniant, cùm gravitas Lunæ versùs Terram sequatur rationem inversam duplicatam distantiarum, gravitas aquæ major quoque sit in majori distantiâ, sed non in eâdem ratione. Cùm hæc Phænomena sint analoga, & sibi mutuò aliquam lucem afferant, hæc de iis inter se collatis memorare videbatur operæ prætium. Supponimus tamen hîc aquæ motum in eodem circulo Æquatori parallelo perseverare, vel latitudinem eandem in singulis revolutionibus servare, & variationem ascensus aquæ quæ ex figurâ Sphæroidicâ Terræ provenit non consideramus.

PROPOSITIO VII.

Motus aquæ turbatur ex inæquali velocitate, quâ corpora circa Axem Terræ motu diurno deferuntur.

Quippe si aquæ moles feratur æstu, vel aliâ de causâ, ad majorem vel minorem ab Æquatore distantiam, incidet in aquam diversâ velocitate circa Axem Terræ latam; unde illius motum turbari necesse est. Differentia velocitatum quibus corpora, exempli gratiâ, in loco 50gr. ab Æquatore dissito, & in loco 36 tantùm milliaria magis versùs Septentrionem vergente, major est quàm quâ 7 milliaria singulis horis describeretur, ut facili calculo patebit. Cùmque motus Maris tantus nonnunquam sit ut æstus 6 milliaria, vel etiam plura singulis horis describat, effectus qui hinc oriri possunt non sunt contemnendi.

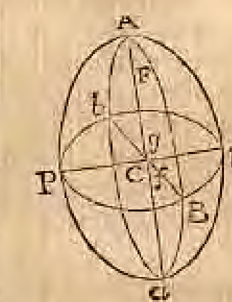
Si aqua deferatur à Meridie versùs Septentrionem motu generali æstus, vel aliâ quâvis de causâ, cursus aquæ hinc paulatim deflectet versùs Orientem, quoniam aqua priùs ferebatur motu diurno versùs hanc plagam majori velocitate quàm est ea quæ convenit loco magis versùs Boream sito. Contrà si aqua à Septentrione versùs Meridiem deferatur, cursus aquæ ob similem causam versùs Occidentem deflectet. Atque hinc varia motus Maris Phænomena oriri suspicamur. Hinc forsitan, exempli gratiâ, Montes glaciales quæ ex Oceano Boreali digrediuntur, frequen-

frequentiùs conspiciuntur in Occidentali quàm Orientali Oceani Atlantici plagâ. Quin & majores æstus hinc cieri posse in pluribus locis quàm qui ex calculo virium Solis & Lunæ prodeunt, habitâ ratione latitudinis, verisimile est. Eandem causam ad ventos præsertim vehementiores propagandos, & nonnunquam augendos vel minuendos, aliaque tum Aëris tum Maris Phænomena producenda conducere suspicamur. Sed hæc nunc sigillatim prosequi non licet.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

Invenire variationem ascensus aquæ in Prop. V. definiti, quæ ex figurâ Terræ Sphæroidicâ provenit.



Sint $PApa$, $PBpb$ Sectiones Terræ per Polos P & p, quarum prior transeat per loca A & a, ubi altitudo aquæ in Æquatore viribus Solis & Lunæ fit maxima, posterior per loca B & b ubi fit minima; sint hæ Sectiones ellipticæ, F focus figuræ $PApa$, f focus Sectionis $PBpb$, & g focus Sectionis $ABab$. Et si omnes Sectiones solidi per rectam Aa transeuntes supponantur ellipticæ calculo inito ope Lemmatis V. invenimus gravitatem in loco A versùs solidum hoc fore ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C super diametrum Aa descriptam ut $1 + \frac{3CF^2 + 3Cg^2}{10CA^2} + \frac{9CF^4 + 6CF^2 \times Cg^2 + 9Cg^4}{56CA^4}$, &c. ad $\frac{CA^2}{CB \times CP}$; & si gravitas in loco B, definiatur simili calculo, ope ejusdem Lemmatis & Schol. Prop. II. constabit ratio gravitatis in A ad gravitatem in B, & per Cor. 2. Prop. I. innotescet semidiametrorum CA & CB differentia sive ascensus aquæ. Verùm calculum utpotè prolixum omittimus, cùm sit exigui usus. Hâc Propositione ostendere tantùm volui Geometriam nobis non defuturam in Problemate celeberrimo accuratissimè tractando. Verùm restat præcipuus in hac disquisitione nodus, de quo pauca sunt addenda.

PROPOSITIO IX.

Problema

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Hæc ex motibus cœlestibus colligi nequit, si verò conferetur ascensus aquæ in Syzygiis Luminarium, qui ex summâ virium Solis & Lunæ generatur, cum ejusdem ascensu in Quadraturis, qui ex earundem differentia oritur, ex vi Solis per Prop. V. datâ, invenietur vis Lunæ. Hanc quærit Newtonus ex Observationibus à Sam. Sturmio ante ostium Fluvii Avonæ institutis, ex quibus colligit ascensum aquæ in Syzygiis æquinoctialibus esse ad ascensum aquæ in Quadraturis iisdem, ut 9. ad 5. Dein post varios calculos concludit vim Lunæ esse ad vim Solis, ut 4.481 ; ad 1, & ascensum aquæ ex utrâque vi oriundum in distantiis Luminarium mediocribus fore pedum 50 cum semisse. Harum virium rationem ex Observationibus à celeb. Cassini in loco suprà citato allatis quæsivimus. Verùm cùm præter generales causas jam memoratas quarum aliquæ ad calculum vix revocari possunt, aliæ variæ ex locorum situ, vadorum indole, ventorum vi & plagâ pendentes æstus Maris nunc majores, nunc minores reddant, non est mirum si vires Lunæ quæ prodeunt ex Observationibus in locis diversis, vel in eodem loco diversis tempestatibus institutis non planè consentiant. Computis igitur quos de motu Maris ex vi Lunæ oriundo instituimus recensendis impræsentiarum non immorabimur. Postquam verò Observationes aliquæ circa æstus Maris ad littora Americæ & Indiæ Orientalis quas expectamus, ad manus pervenerint, de hisce forsan certiùs judicemus. Observamus tantùm æstus in minori ratione decrescere videri quàm duplicatâ Sinus complementi declinationis; quin & reliquæ æstus leges generales ex motu aquæ reciproco perturbantur. Sed veremur ne tædium pariat, si repetamus quæ ab aliis jamdudum tradita sunt. Æstus anomali à locorum & Marium situ plerumque pendere videntur. Observandum tamen ex Theoriâ gravitatis sequi, unicum tantùm æstum spatio 24. horarum contingere nonnunquam debere in locis ultra 62 gradum latitudinis, si reciprocatio motus aquæ id permitteret. *

Quòd si analysis diversarum causarum quæ ad æstus Phænomena producenda conferunt accurata institui posset, id certè ad uberiorem scientiam

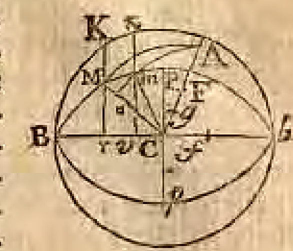
* Sit enim Lunæ declinatio 18 gr. & loci ultra 62 gr. versùs eandem plagam: & manifestum est Lunam semel tantùm 24 horarum spatio loci hujus horizontem attingere.

tiam virium & motuum systematis Mundi non parum conferret. Hinc enim situs centri gravitatis Lunæ & Terræ, & quæ ad æquinoctiorum præcessionem aliaque Phænomena naturæ insignia spectant, certiùs innotescerent. Quas ob causas ascensus aquæ quantitatem, quousque ex motibus cœlestibus eam assequi licet, accuratè definiendam & demonstrandam, positis legibus gravitatis quæ ex Observationibus deducuntur (de cujus causâ hìc non est disserendi locus) putavimus. Cogitata autem hæc qualiacunque judicio Illustrissimæ Academiæ Regiæ, quam omni honore & reverentiâ semper prosequimur, lubenter submittimus.

ANNOTANDA IN DISSERTATIONEM de Causa Physica Fluxus & Refluxus Maris, cui præfigitur Sententia, Opinionum commenta delet dies, Naturæ judicia confirmat.

I. In Prop. IV. invenitur $x=\frac{15Vd}{8G}$ quàm proximè, qui valor ipsius x est satis accuratus, nec ullâ correctione indiget præsertim in calculo Prop. V. Est autem magis accuratè x ad d ut $15V$ ad $8G-\frac{88}{7}V$ non ut $15V$ ad $8G-\frac{803}{14}V$ sive $8G-57\frac{5}{14}V$ ut lapsu quodam calami aut calculi scripseram ad finem Prop. IV. qui quidem est exigui momenti, & argumenta Propositionum sequentium non immutat. Calculi autem summam hîc adjiciam. Inveneram in Prop. IV. esse B ad A, ut $\frac{1}{3}+\frac{c^2}{15a^2}+\frac{c^4}{35a^4}$, &c. ad $\frac{b}{a}\times\overline{\frac{1}{3}+\frac{c^2}{3a^2}+\frac{c^4}{7a^4}}$, &c. adeóque (substituendo loco $\frac{b}{a}$ ipsius valorem $\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$, sive $1-\frac{c^2}{2a^2}-\frac{c^4}{8a^4}$, &c. ut $\frac{1}{3}+\frac{c^2}{15a^2}+\frac{c^4}{35a^4}$, &c. ad $\frac{1}{3}+\frac{c^2}{30a^2}+\frac{c^4}{840a^4}$; &c. unde $B-A$ est ad G (seu $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$) ut $\frac{c^2}{10a^2}+\frac{23c^4}{24\times35a^4}$, &c. ad $1+\frac{3c^2}{20a^2}+\frac{25c^4}{8\times70a^4}$, &c. Est autem $c^2=4dx$, & $a^2=d^2+2dx+x^2$ ex iis quæ in Propositione supponuntur; unde $\frac{c^2}{4a^2}=\frac{x}{d}-\frac{2x^2}{d^2}+\frac{3x^3}{d^3}$, &c. & substituendo loco $\frac{c^2}{a^2}$ ejus valorem $\frac{4x}{d}-\frac{8x^2}{d^2}$, &c. prodibit $B-A$ ad G, ut $14dx+18x^2$ ad $35d^2+21dx+17x^2$ quàm proximè. Cúmque sit $\overline{B-A}\times d+3Vd=2Gx-2Vx-\frac{3Vx^2}{d}$ per Corol. Prop. I. substituatur valor ipsius $\overline{B-A}$, & negligantur termini quos ingreditur Vx^2 (quoniam V est admodum parva respectu G) eritque $3\times35Vd^2=56Gdx-133Vdx+24Gx^2$ & $x=\frac{3\times35Vd^2}{56dG-133Vd+24Gx}$, quòd si in denominatore pro x scribatur valor vero propinquus $\frac{15Vd}{8G}$ prodibit valor magis accuratus $\frac{3\times35Vd}{56G-88V}$, eritque $x:d::15V:8G-\frac{88}{7}V$ quàm proximè. Diversâ paulò ratione prodit $x=\frac{15Vd}{8G}+\frac{165VVd}{56GG}$, &c. quam seriem producere non est difficile, si operæ pretium videbitur. In Prop. VI. quæsivimus figuram aquæ

aquæ orbem lunarem complentis ex actione Solis oriundam. Hâc correctione adhibitâ, & cæteris retentis ut priùs, Axis minor figuræ ad majorem ut 46.742 ad 47.742, quæ parùm differt à ratione quàm in eâ Propositione exhibuimus.



II. Series quam exhibuimus in Prop. VIII. deducitur per Lem. V. & Prop. II. Sit $CA=a$. $CB=b$. $CP=e$. $CF=c$. $Cf=f$. $Cg=g$. Sint ACM, ACm Sectiones quævis solidi per rectam AC (quæ normalis est plano $BPbp$) transeuntes. Arcus mu centro C radio Cm descriptus, occurrat rectæ CM in u, & occurrant ordinatæ MV, mv Axi Bb in V & v, & circulo BKb in K & k. Sit $CA^2-CM^2=x^2$, seu x distantia foci à centro in figura ACM, sit L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, & ultima ratio gravitatis particulæ A in frustum planis ACM, ACm terminatum ad gravitatem in frustum Sphæræ centro C radio CA descriptæ iisdem planis contentum, erit ea $3CM^2\times\overline{L-x}$ ad x^3 per Prop. II. Gravitas igitur particulæ A in solidum erit ut $\int\frac{3CM^2\times\overline{L-x}}{x^3}\times\frac{mu}{CM}=\int\frac{3CM\times mu}{x^3}\times\overline{L-x}=\int\frac{3CK\times Kk\times CP}{CK\times x^3}\times\overline{L-x}=\int\frac{3e\times Kk}{x^3}\times\overline{L-x}$. Sit $CV=u$. Eritque $u^2+\overline{b^2-u^2}\times\frac{c^2}{b^2}=CM^2=a^2-x^2$. Unde $c^2+\frac{b^2-c^2}{b^2}u^2=a^2-x^2$. $u^2=\overline{a^2-c^2-x^2}\times\frac{b^2}{b^2-c^2}=\overline{c^2-x^2}\times\frac{b^2}{f^2}$. Adeóque $KV^2=b^2-u^2=b^2-\frac{b^2}{f^2}\times\overline{c^2-x^2}=b^2\times\frac{f^2+x^2-c^2}{f^2}=\frac{b^2}{f^2}\times\overline{x^2-g^2}$. Est autem $Kk:Vv::CK:KV$. Adeóque $Kk=\frac{bdv}{KV}=\frac{b^2}{f}\times\frac{-xdx}{\sqrt{c^2-x^2}\times\frac{b}{f}\sqrt{x^2-g^2}}=\frac{-bxdx}{\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}$. Quare gravitas particulæ A versus solidum erit ut $\int\frac{-3ebxdx}{x^3\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}\times\overline{L-x}$. Verùm $L-x=\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^5}{5a^4}$, &c. Quare gravitas illa erit $\int\frac{-3ebxdx}{3a^2\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}+\int\frac{-3ebx^3dx}{5a^4\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}$, &c. Sit $z^2=x^2-g^2$, & prior summa erit $\int\frac{-ebdz}{a^2\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$, secunda erit $\int\frac{-ebx^2dz}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}}=\int\frac{-ebdz\times\overline{z^2+g^2}}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$. Quæ cum subsequentibus summis ad circulares Ar-

Arcus facilè reducuntur. Atque hinc ratio gravitatis particulæ A verſùs hoc ſolidum ad gravitatem verſùs Sphæram ſuper ſemidiametrum CA conſtructam, erit qualis in Propoſitione aſſignatur, terminis ſeriei citiſſimè decreſcentibus, ſi CF, Cf & Cg ſint admodum parvæ. Si evaneſcat g, hæc ſeries dabit gravitatem verſùs Sphæroidem in Æquatore; quæ tamen elegantiùs inveſtigatur in Prop. III.

III. In Prop. IX. obſervavimus poſt Newtonum vim Lunæ ad Mare movendum cum vi Solis poſſe conferri, æſtus in Syzygiis & Quadraturis comparando; eadem ratio obtineri poſſet conferendo æſtus qui contingunt in Syzygiis Luminarium in diverſis diſtantiis Lunæ à Terra, ſi æſtus eſſent accuratè proportionales viribus quibus producuntur. Deſignet L vim Lunæ mediocrem, S vim Solis mediocrem, X & x duas diverſas diſtantias Lunæ à Terra in Syzygiis æquinoctialibus, Z & z diſtantias Solis à Terra in iiſdem Syzygiis, d & D mediocres utriuſque diſtantias; & ſi Lunæ declinatio nulla ſit, atque eſſent ut vires Luminarium, ſeu ut $\frac{Ld^3}{X^3}+\frac{SD^3}{Z^3}$ & $\frac{Ld^3}{x^3}+\frac{SD^3}{z^3}$, hinc comparando æſtus ratio L ad S detegeretur. Sit enim aſcenſus aquæ in priori caſu ad aſcenſum in poſteriori ut m ad n, eritque L ad S ut $\frac{mD^3}{z^3}-\frac{nD^3}{Z^3}$ ad $\frac{nd^3}{X^3}-\frac{md^3}{x^3}$.

INQUI-

INQUISITIO PHYSICA IN CAUSAM FLUXUS AC REFLUXUS MARIS.

A. D. D. Euler, *Mathematicarum Profeſſore; è Societate Academiæ Imperialis Sancti-Petersburgenſis.*

Cur nunc declivi nudentur littora Ponto,
Adverſis tumeat nunc Maris unda fretis;
Dum veſtro monitu naturam conſulo rerum:
Quàm procul à Terris abdita cauſa latet!
In Solem Lunamque feror. Si plauditis auſo;
Sidera ſublimi vertice ſumma petam.

CAPUT PRIMUM.

De Causâ Fluxus ac Refluxus Maris in genere.

§. I. Omnem mutationem, quæ in corporibus evenit, vel ab ipſa motûs conſervatione proficiſci, vel à viribus motum generantibus, hoc quidem tempore, quo qualitates occultæ cauſæque imaginariæ penitùs ſunt exploſæ, nullâ indiget probatione. Hoc autem diſcrimen quovis oblato Phænomeno diligentiſſimè conſiderari oportet, ne tam motus conſervationi ejuſmodi effectus tribuatur, qui ſine viribus oriri nequit, quàm vires inveſtigentur, quæ motum ſuâ naturâ conſervandum producant. Quo quidem in negotio, ſi debita attentio adhibeatur, errori vix ullus relinquitur locus: cùm ex legibus naturæ ſatis ſuperque conſtet, cujuſmodi motus vel per ſe conſerventur, vel viribus externis debeantur. Corpus ſcilicet in motu poſi-

tum

tum propriâ vi hunc motum uniformiter in directum retinet: atque corpus, quod circa axem convenientem per centrum gravitatis transeuntem motum rotatorium semel est consecutum, eodem motu rotari perpetuò suâ sponte perget: neque hujusmodi motuum caussam in ullâ re aliâ, nisi in ipsâ corporum naturâ, quæri oportet. Quocirca si hujus generis Phænomenon fuerit propositum, alia caussa investigari non potest, nisi quæ à principio tales motus procreaverit.

§. 2. Hujus generis foret quæstio, si quæreretur caussa motûs vertiginis Planetarum ac Solis; hîc enim sufficeret eam caussam assignasse, quæ initio hos motus produxisset, cùm Sol æquè ac Planetæ talem motum semel consecuti eundem propriâ vi perpetuò conservare debeant, neque ad hoc Phænomenon explicandum vis ulla externa etiam nunc durans requiratur. Longè aliter se res habet, si motus proponatur neque uniformis, neque in directum procedens, cujusmodi est motus Planetarum periodicus circa Solem: hoc enim casu minimè sufficit ea vis, quæ initio Planetas ad istiusmodi motus impulerit, sed perpetuò novæ virium actiones requiruntur, à quibus tam celeritas quàm directio continuò immutetur: quæ vires, quàm primùm cessarent, subitò Planetæ orbitas suas desererent, atque in directum motu æquabili avolarent. Quòd si igitur Phænomenon quodcunque naturæ proponatur, antè omnia sollicitè est inquirendum, ad quodnam genus id pertineat, atque utrum caussa in viribus externis sit quærenda, an in ipso subjecto corpore? Quinetiam sæpenumerò usu venire potest, ut effectus utriusque generis in eodem Phænomeno multùm sint inter se permixti; quo casu summo studio ii à se invicem discerni antè debebunt, quàm caussarum investigatio suscipiatur.

§. 3. His ritè perpensis explicatio Galilei, quam in suis Dialogis de æstu Maris assignare est conatus, mox concidit; putavit enim Fluxum ac Refluxum Maris tantùm à motibus Terræ rotatorio circa axem & periodico circa Solem oriri, neque aliis viribus tribui oportere, nisi quæ hos motus cùm producant, tùm conservent. Namque si ponamus Terram solo motu diurno esse præditam, iste motus Mare aliter non afficiet, nisi id sub Æquatore attollendo, ex quo figura Terræ sphæroidica compressa nascitur, motus verò reciprocus in Mari omninò nullus hinc generari poterit. Quòd si autem Terræ insuper motum æquabilem in directum tribuamus, priora Phænomena nullo modo afficientur, sed prorsùs eadem manebunt, quemadmodum ex principiis mechanicis clarissimè perspici licet, quibus constat motum uniformem in directum omnibus partibus Systematis cujuscunque corporum æqualiter impressum nullam omninò mutationem in motu & situ partium relativo inferre. Abeat nunc motus iste æquabilis Terræ in directum impressus in circularem vel ellipticum per vires quibus Terra perpetuò ad Solem urgetur; ac ne hoc

hoc quidem casu ullus motus reciprocus in Mari produci poterit; quod cùm per se est perspicuum, tùm etiam ab ipso Galileo non statuitur: ipse enim non tàm ex mixtione motûs vertiginis & periodici æstum Maris proficisci est arbitratus, quàm ex motu quocunque progressivo sive rectilineo sive curvilineo, si is cum motu rotatorio combinetur.

§. 4. Quanquàm autem motus Terræ periodicus circa Solem cum motu rotatorio circa axem conjunctus nullum in Mari motum reciprocum generare valet, tamen Mare, quod si motus esset æquabilis in directum in quiete persisteret, aliquantùm turbari debebit. Quòd si autem ad vim quâ Terra in orbitâ suâ continetur attendamus, non difficulter mutationem, quam Mare ab ea patietur, colligere poterimus. Nam cùm partes Terræ à Sole remotiores minori vi, propiores verò majori sollicitentur, illæ ad majus tempus periodicum, hæ verò ad minus absolvendum cogentur, ex quo partibus Terræ fluidis, ut potè mobilibus, motus ab Oriente versùs Occidentem secundùm eccliptícam inducetur hancque vetam esse caussam existimo ac præcipuam cur tàm Oceanus quàm aer sub Æquatore perpetuò habeat Fluxum ab ortu versùs occasum. Possem etiam ex eodem principio clarè ostendere tàm Maris, si omninò liberum esset, quàm aeris celeritatem tantam fore, quâ tempore viginti-quatuor horarum spatium circiter viginti graduum absolvatur; sed cùm hæc inquisitio ad præsentem quæstionem propriè non pertineat, atque inclyta Academia fortassè aliâ occasione quæstiones hùc spectantes sit propositura, uberiorem explicationem hujus insignis Phænomeni eò usquè differendam esse censemus; hoc quidem tempore tantùm indicasse contenti, motum Terræ periodicum conjunctim cum motu diurno Mari motum aliquem imprimere posse, sed neutiquam motum reciprocum, uti Galileus est arbitratus.

§. 5. Uti in omnibus omninò quæstionibus physicis multò facilius est, quæ non sit caussa Phænomeni cujuspiam oblati, quàm quæ sit, ostendere; ita etiam præsens quæstio de Fluxu ac Refluxu Maris est comparata, ut non difficulter caussas falsò assignatas possimus refellere. Ac primò quidem post eversam Galilei sententiam, explicatio æstûs Maris Cartesiana pressioni Lunæ innixa tot tantisque laborat difficultatibus, ut omninò subsistere nequeat. Præterquàm enim quòd istiusmodi pressio aliundè probari nequeat, atque ad hoc solum Phænomenon explicandum gratuitò assumatur, observationibus etiam minimè satisfacit. In aperto enim ac libero Oceano aquam mox post transitum Lunæ per Meridianum elevari observamus, cùm secundùm Cartesii sententiam eodem tempore deprimi deberet; neque prætereà hoc modo satis distinctè explicatur, cur Luna sub Terra latens eundem ferè effectum exerat, ac si super Horizonte versetur. Deinde hoc idem negotium non feliciori successu aggressus est Wallisius caussam in communi centro gravitatis Terræ & Lunæ quæ-

quærens, cujus explicatio mox satis dilucidè est subversa. Superest denique Newtoni theoria, quæ nemine contradicente Phænomenis multò magis est consentanea: at in ea id ipsum quod hoc loco quæritur, causa scilicet physica, non assignatur, sed potiùs ad qualitates occultas referri videtur; interim tamen ne hæc quidem theoria satis est evoluta, ut de ejus sive consensu sive dissensu cum observationibus judicium satis tutum ferri queat.

§. 6. Cùm igitur dubium sit nullum, quin Fluxûs ac Refluxûs Maris causa in viribus externis & realibus sit posita, quæ si cessarent, simul æstus Maris mox evanesceret, ubi lateant hæ vires & quomodo sint comparatæ potissimùm nobis erit explicandum, hoc enim est id ipsum, quod celeberrima Academia Scientiarum Regia in quæstione proposita requirit. Neque verò vires tantummodò indicasse sufficiet, verùm prætereà id maximè erit monstrandum, quomodo istæ vires agant, atque hos ipsos effectus, quos observamus, non verò alios producant; in hoc enim totius quæstionis cardo, explicationis scilicet confirmatio, vertitur. Quoniam autem plerumque pluribus viribus excogitandis idem Phænomenon explicari potest, studium adhibendum est summum in hac indagatione, ne ad vires inanes atque imaginarias delabamur, quæ in mundo neque sunt neque locum habere possunt. Parum enim scientiæ naturali consulunt, qui quovis Phænomeno oblato sibi pro arbitrio mundi structuram peculiarem effingunt, neque sunt solliciti, utrùm ea compages cum aliis Phænomenis consistere queat, an verò secùs. Quòd si enim jam aliundè constet existere in mundo ejusmodi vires, quæ oblato effectui producendo sint pares, frustrà omne studium in conquisitione virium novarum collocabitur.

§. 7. Quoniam autem ad causam cujusque Phænomeni detegendam, ad singulas circumstantias sedulò attendere necesse est, ante omnia mirificum consensum æstûs Maris cum motu Lunæ contemplari conveniet. Non solùm enim insignis harmonia inter æstum Maris ac Lunæ motum diurnum deprehenditur, sed etiam revolutio synodica respectu Solis ingentem affert varietatem. Omnes denique observationes abundè declarant rationem Fluxûs & Refluxûs Maris à situ cùm Lunæ tum etiam Solis conjunctim pendere: ex quo statim prono ratiocinio consequitur, vires illas æstum Maris producentes, quæcunque etiam sint, cùm Lunam potissimùm, tùm verò etiam Solem respicere debere. Quamobrem imprimis nobis erit inquirendum, utrum ejusmodi vires Solem & Lunam respicientes, quæ in aquis talem effectum, qualis est æstus Maris, producere queant, jure ac ratione statui possint, an secùs. Ac si pluribus modis istiusmodi vires animo concipere liceat, diligenter erit dispiciendum, quænam cum aliis Phænomenis consistere possint nec ne. Quantumvis enim explicatio quæpiam cum Phænomenis conspiret, nisi virium, quæ

quæ assumuntur, existentia aliundè comprobetur, labili ea omninò innititur fundamento. Quòd si autem contrà, effectus ejusmodi viribus tribuatur quas in mundo reverà existere alia Phænomena clarè docuerunt, atque summus explicationis cum experientiâ consensus deprehendatur, dubium erit nullum quin ista explicatio sit genuina & sola vera.

§. 8. Quamvis autem certis viribus Lunæ ac Soli tribuendis Phænomenon æstûs Maris commodè explicari posset, tamen ob hanc solam causam istiusmodi vires statuere nimis audax videtur: quamobrem imprimis erit dispiciendum, num aliæ rationes ejusmodi vires non solùm admittant, sed etiam actu existere manifestò indicent. Perlustremus igitur vires, quas jam aliundè in mundo vigere novimus, sciscitemurque paucis an ad motum reciprocum Oceano inducendum sint idoneæ: tales enim vires si in mundo jam extent, omnis labor in aliis inquirendis impensus irritus foret ac ridiculus. Ac primò quidem si Solem spectamus, motus Terræ annuus omninò declarat Terram perpetuò versùs Solem urgeri & quasi attrahi, idque fortiùs in minori distantia, debiliùs verò in majori; atque adeò hanc Solis vim in Terram rationem tenere reciprocam duplicatam distantiarum: ex quo spontè sequitur non solùm universam Terram, sed etiam singulas ejus partes perpetuò versùs Solem urgeri. Tota quidem Terra æquè fortiter ad Solem sollicitatur, ac si omnis materia in ejus centro esset congesta; interim tamen partes circa superficiem sitæ vel magis vel minùs ad Solem allicientur, quàm totum Terræ corpus, prouti vel minùs vel magis sint remotæ à Sole, quàm centrum Terræ. Hinc igitur fit, ut hæc eadem vis ad Solem tendens aquam modò magis modò minus trahat, ex quâ alternâ actione motus reciprocus in Fluidis necessariò oriri debet. Quocircà ista Solis vis in præsenti negotio neutiquam negligi poterit, cùm ea, si fortè sola causam æstûs Maris non constituit, certè effectum aliarum virium necessariò afficere ac turbare debeat.

§. 9. Quemadmodùm autem Terra cum omnibus suis partibus versùs Solem sollicitatur, ita eorum sententia non multùm à veritate abhorrere videtur, qui in Lunâ similem vim collocant. Observationes quidem hujusmodi vim in Lunâ non demonstrant sicuti in Sole; cùm motus Terræ in orbitâ suâ à Luna omninò non affici deprehendatur: sed si docuerimus eandem vim ad Lunam respicientem, quæ æstui Maris producendo sit par, in motu Terræ nullam sensibilem anomaliam producere valere, audacia, quæ fortè in talis vis admissione consistere videbatur, multùm mitigabitur. Hujusmodi autem vis existentia aliis rationibus, nullo ad æstum Maris habito respectu, satis clarè evinci potest; quia enim nullum est dubium, quin Luna ad Terram constanter feratur, ob æqualitatem actionis & reactionis Terram quoque versùs Lunam pelli necesse est. Namque si ponamus Sole penitùs sublato, Terræ ac Lu-

Lunæ omnem motum ſubitò adimi, Luna utique ad Terram accedet; nemo autem non concedet, probè perpenſis principiis mechanicis, Terram intereà non prorſùs eſſe quieturam, ſed Lunæ obviam ituram, curſumque in communi gravitatis centro contingere: hoc autem evenire non poterit, niſi Terra actu ad Lunam ſollicitetur. Deindè in ipsâ Lunâ gravitatem dari ſimilem huic, quam in Terrâ ſentimus, negari non poteſt; niſi enim talis vis in Lunâ vigeret, partes Lunæ fluidæ, cùm ob gravitatem in Terram, tùm ob motum Lunæ circa proprium axem, etſi ſit admodùm lentus, & tempori periodico æqualis, jam dudùm avolaſſent, parteſque ſolidæ conſiſtentiam ſuam amiſiſſent. Pluribus deniquè aliis rationibus ex naturâ vorticum petitis, magis confirmari poſſet tale corpus mundanum, cujuſmodi eſt Luna, ſubſiſtere non poſſe, niſi vortice ſit cinctum, quo gravitas in id generetur. Quòd ſi autem gravitationem versùs Lunam concedamus, cur ejus actionem non ad nos uſquè admittamus, nulla omninò ratio ſuadet: quin potiùs ejuſmodi vim ſimilem ſtatui conveniet, reliquis in mundo deprehenſis, quæ quaſi in infinitum porriguntur, atque inverſam duplicatam tenent diſtantiarum rationem.

§. 10. His expoſitis manifeſtum eſt, & quaſi experientiâ convictum, Terram cum ſingulis ſuis partibus tam versùs Lunam quàm versùs Solem perpetuò ſollicitari, atque utramque vim proportionalem eſſe reciprocè quadratis diſtantiarum. Hæ igitur vires, cùm actu exiſtant, conſtanterque effectum ſuum exerant, in præſenti negotio, quo in cauſam æſtûs Maris inquirimus, præteriri omninò nequeunt; niſi dilucidè antè ſit probatum, eas non ſolùm Fluxum ac Refluxum non generare, ſed ne quidem quicquam efficere. Si enim iſtæ vires ullum duntaxat motum reciprocum Mari inducere valeant, quantumvis is etiam ſit exiguus, atque adeò æſtui Maris fortaſſè contrarius, earum tamen ratio neceſſariò erit habenda, cùm ſine illis vera cauſa, quæcumque ſit, neque inveſtigari neque cognoſci poſſit. Neque præterea ſanæ rationis præcepta permittunt alias vires excogitare, in iiſque cauſam æſtûs Maris collocare, antequam evidenter ſit demonſtratum, binas iſtas vires Solem Lunamque ſpectantes, quas non gratuitò aſſumſimus, ſed ex certiſſimis Phænomenis in mundo exiſtere novimus, ad Fluxum ac Refluxum Maris producendum non eſſe ſufficientes. In ſequentibus autem capitibus clariſſimè ſumus oſtenſuri, ab his duabus viribus non ſolùm in Oceano motum reciprocum generari debere, ſed etiam eum ipſum, qui æſtus marini nomine inſigniri ſolet: atque hanc ob rem firmiter jam affirmamus veram Fluxûs ac Refluxûs cauſam in ſolis illis duabus viribus, quarum altera ad Solem eſt directa, altera ad Lunam, eſſe poſitam; hocque ſimul omnium eorum ſententias funditùs evertimus, qui vel aliis omninò viribus idem Phænomenon adſcribere, vel cum his ipſis alias vires conjungere conantur.

§. 11.

§. 11. Quæſtio igitur de cauſa Fluxûs ac Refluxûs Maris, prouti ea ab Illuſtriſſimâ Academiâ Regiâ eſt propoſita, ad hanc deducitur quæſtionem, ut binarum illarum virium, quibus ſingulæ Terræ partes cùm ad Solem tùm ad Lunam perpetuò urgentur, idque in diſtantiarum ratione reciprocâ duplicatâ, cauſa aſſignetur Phyſica. Ex quo tractationem noſtram bipartitam eſſe oportebit. Primò ſcilicet ex principiis Mechanicis dilucidè erit oſtendendum, à binis illis viribus Solem Lunamque reſpicientibus cùm Fluxum ac Refluxum Maris generatim oriri debere, tùm etiam hoc modo ſingula Phænomena diſtinctè explicari poſſe: hac enim parte abſolutâ nullum ſupererit dubium, quin origo æſtûs Maris his ipſis viribus, quas actu jam in mundo exiſtere docuimus, debeatur. Deinde verò harum virium cauſa Phyſica indicari debet, cùm id ſit præcipuum, quod Inclyta Academia requirit. Quod quidem ad illam partem attinet, in ejus explicatione minimè hæſitamus; & clariſſimis certiſſimiſque demonſtrationibus evincere pollicemur, per iſtas vires omnia omninò æſtûs Maris Phænomena abſolutiſſimè explicari poſſe; quâ in re nulli dubitationi ullus relinquetur locus, cùm tota ad Geometriam & Mechanicam ſublimiorem pertineat, calculoque analytico ſit ſubjecta. Altera verò pars, in ſcientiam naturalem imprimis incurrens, majori difficultati videtur obnoxia, nec tantæ evidentiæ capax; verùm cùm iſta res occaſione plurium quæſtionum ab Academiâ Celeberrima antehac propoſitarum jam tanto ſtudio ſit inveſtigata atque abſoluta, eam non minori certitudine expedire confidimus.

§. 12. Exploſis hoc ſaltem tempore qualitatibus occultis miſsâque Anglorum quorumdam renovatâ attractione, quæ cum ſaniori philoſophandi modo nullatenùs conſiſtere poteſt, omnium virium quæ quidem in mundo obſervantur, duplex ſtatuendus eſt fons atque origo. Nempe cùm viribus tribuatur vel motûs generatio vel immutatio, iſte effectus ſemper vel ab alliſione corporum, vel à vi centrifugâ proficiſcitur, quarum actionum utraque facultati, quâ omnia corpora ſunt prædita in ſtatu ſuo ſive quietis ſive motûs æquabilis in directum perſeverandi, debetur. Ob hanc enim ipſam facultatem corpus in motu poſitum alia corpora, quæ vel ipſius motui directè ſunt oppoſita, vel ejus directionem mutare cogunt, ad motum ſollicitat; atque priori caſu regulæ colliſionis corporum, poſteriori verò vis centrifugæ indoles & proprietates oriuntur ac demonſtrantur. Cùm igitur omnia corpora terreſtria tam versùs Solem, quàm versùs Lunam perpetuò ſollicitentur, cauſa hujus ſollicitationis continuo appulſui materiæ cujuſdam ſubtilis, vel vi centrifugæ ſimilis materiæ tribui debebit. Priori igitur caſu materiam ſubtilem ſtatui opporteret, quæ conſtanter ſummâ rapiditate cùm ad Solem tùm ad Lunam ferretur: hujuſmodi verò hypotheſis ob maximas difficultates, quibus eſt involuta, admitti minimè poteſt. Primò enim perpetuò novis viribus

ribus esset opus, quæ materiam subtilem indesinenter versùs Solem Lunamque pellerent, quâ quidem re quæstio non majorem lucem assequeretur. Deinde talis motus per se diu consistere non posset, propter perpetuum materiæ subtilis ad eadem loca affluxum nullumque refluxum, ut taceamus alia maxima incommoda cum istiusmodi positione permixta.

§. 13. Exclusâ igitur materiæ subtilis continuâ allisione, tanquam ad vires cùm ad Solem tùm Lunam tendentes producendas minimè idonea, alia harum virium causa non relinquitur, nisi quæ in vi centrifugâ consistat. Quemadmodum autem materia subtilis in gyrum acta ac vorticem formans non solùm animo concipi, sed etiam in mundo persistere queat, jam satis superque est expositum, cùm in dissertationibus, quæ cùm quæstio de causâ gravitationis agitaretur, laudes Illustrissimæ Academiæ merebantur, tùm etiam in aliis operibus; quibus in locis simul dilucidè est ostensum, quomodo ejusmodi vortices comparatos esse oporteat, ut vires centrifugæ fiant quadratis distantiarum à centro vorticis reciprocè proportionales. Quæ res cùm meo quidem judicio jam tam plana sit facta, ut vix quicquam ad præsens institutum attinens adjici queat, vorticum ulteriori examini sine ullâ hæsitatione supersedemus; idque eò magis, quòd Celeberrima Academia ejusmodi amplam atque adeò jam confectam digressionem postulare haud videatur. Quoniam enim quæstio de causa gravitatis cùm versùs Terram tùm etiam versùs Solem & Planetas jam satis est investigata ac diremta; nunc quidem, si cujuscunque Phænomeni causa eò fuerit perducta, ibidem acquiescendum videtur, neque actum agendo denuò in causâ gravitatis investigandâ nimiùm immorari conveniret. Denique in præsenti negotio sufficere posset, si æstûs Maris causa adhuc tantis tenebris obvoluta ad alia maximè aperta Phænomena reducatur, quorum causa non solùm habetur probabilis, sed etiam quæ sola sit veritati consentanea, cujusmodi est gravitatio tàm versùs Solem quàm Lunam.

§. 14. Causam igitur Fluxûs ac Refluxûs Maris proximam in binis vorticibus materiæ cujusdam subtilis collocamus, quorum alter circa Solem alter verò circa Lunam ita circumagatur, ut in utroque vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum à centro vorticis; quæ lex vis centrifugæ obtinebitur, si materiæ subtilis vorticem constituentis celeritas statuatur tenere rationem reciprocam subduplicatam distantiarum à centro vorticis. Quæcunque igitur corpora in istiusmodi vortice posita ad ejus centrum pellentur vi acceleratrice, quæ pariter ac vis centrifuga quadratis distantiarum reciprocè est proportionalis. Vis absoluta autem quâ corpus quodpiam in datâ distantiâ à centro vorticis collocatum eò urgetur, pendet à celeritate materiæ subtilis absolutâ. Ac primò quidem quod ad vorticem circa Solem rotatum attinet, ejus vis absoluta ex tem-

tempore Terræ periodico cum distantia ejusdem à Sole comparato tanta colligitur, ut corpus, cujus distantia à centro Solis æqualis est semidiametro Terræ, eò sollicitetur vi, quæ sit 227512 vicibus major, quàm est gravitas naturalis in superficie Terræ. Metiemur autem hanc ipsam vim absolutam cujusque vorticis, per vim, quam idem vortex exerit in distantiâ à suo centro semidiametro Terræ æquali: ex quo si vis gravitatis terrestris designetur per 1. erit vis absoluta Solis = 227512, cujus numeri loco brevitatis gratiâ utemur litterâ S. Simili modo vim vorticis Lunam cingentis absolutam indicabimus litterâ L, cujus valorem Newtonus rectè cùm ex ipso Fluxu ac Refluxu Maris, tùm etiam ex præcessione Æquinoctiorum constituisse videtur circiter $\frac{1}{48}$. Quare si, positâ Terræ semidiametro = 1, corporis cujusdam à centro Solis vel Lunæ distantia fuerit x, erit vis, quâ id corpus vel ad Solem sollicitatur vel ad Lunam, vel $= \frac{L}{xx}$ vel $= \frac{S}{xx}$, uti ex indole horum vorticum prona consequentia fluit. In his quidem litterarum S & L determinationibus assumsimus mediam Solis à Terra distantiam 20620 semidiametrorum Terræ, quæ ex parallaxi horizontali 10″ sequitur, Lunæ verò à Terra distantiam mediam 60 semid. Terræ; interim tamen vires ad Mare movendum hinc ortæ ab his hypothesibus non pendent, uti sequentibus patebit.

§. 15. Quoniam igitur æstum Maris per binas vires, quarum altera Solem respicit, altera Lunam, sumus expositurі, facilè videri possemus eandem omninò explicationem suscipere, quam Newtonus dedit in suis Principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis. Primùm autem notandum est, quòd si Newtonus veram causam hujus Phænomeni assignasset, summoperè absurdum atque absonum foret, novitatis studio aliam causam, quæ certò falsa futura esset, excogitare. Deinde verò Newtonus ne vestigium quidem reliquit, ex quo causa harum virium attractivarum, quas Soli Lunæque tribuit, colligi posset, sed potiùs de causæ Physicæ inventione, qualem Academia Regia potissimum requirit, desperasse videtur; id quod ejus asseclæ apertè testantur, qui attractionem omnibus corporibus propriam esse, neque ulli causæ externæ deberi firmiter asserunt, atque adeò ad qualitates occultas confugiunt. Denique Newtonus deductionem & expositionem omnium Phænomenorum ad æstum Maris pertinentium minimè perfecit, sed quasi tantum adumbravit; plena enim explicatio tot tamque difficilium Problematum solutionem postulat, quæ Newtonus non est aggressus: cùm enim hujus quæstionis enodatio amplissimos calculos requirat, ipse analysin vitans pleraque tantum obiter indicasse contentus fuit; ob quem defectum plurimis adhuc dubiis circa ipsius explicationem locus est relictus. Neque enim in his viribus veram æstûs Maris causam contineri antè certum esse potest, quàm absoluto cal-

calculo perfectus consensus Phænomenorum cum Theoriâ fuerit declaratus.

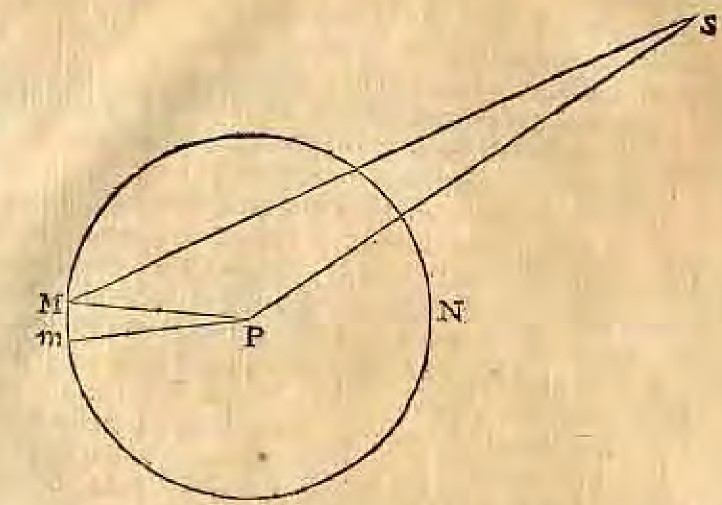
CAPUT SECUNDUM.

De viribus Solis & Lunæ ad Mare movendum.

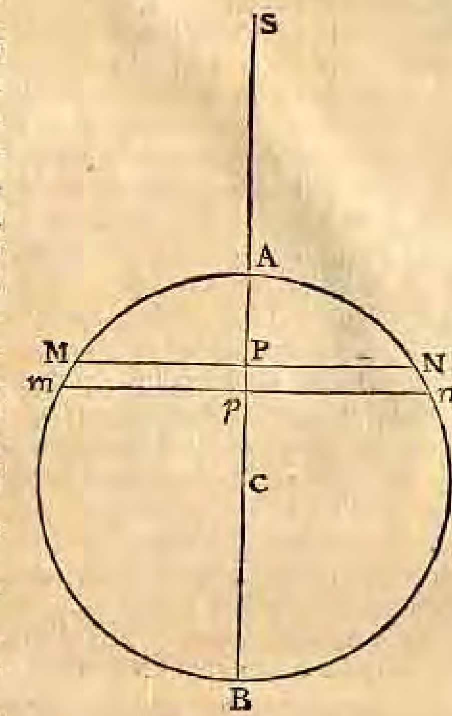
§. 16. EFFECTUS, quos vires cùm Solis tùm Lunæ antè stabilitæ in Terram exerunt, ad duo genera sunt referendi: quorum alterum eos complectitur effectus quos Sol ac Luna in universam Terram tamquam unum corpus consideratam exercet; alterum verò eos, quos singulæ Terræ partes à viribus Solis ac Lunæ patiuntur. Ad effectus prioris generis investigandos, omnis Terræ materia tanquam in unico puncto, centro scilicet gravitatis, collecta consideratur, ac tàm ex motu insito quàm viribus sollicitantibus motus Terræ progressivus in suâ orbitâ determinari solet. Ex hocque principio innotuit vim hanc Solis efficere, ut Terra circa Solem in orbitâ ellipticâ circumferatur, vim Lunæ autem tam esse debilem, ut vix ac ne vix quidem ullam sensibilem perturbationem in motu Terræ annuo producere valeat. Contrà autem docebitur, vim Lunæ ad partes Terræ inter se commovendas ac Mare agitandum multò esse fortiorem vi Solis; ex quo plerisque primo intuitu summè paradoxon videatur, quòd vis Lunæ in priori casu respectu vis Solis evanescat, cùm tamen eadem casu posteriori multum excedat vim Solis. Sed mox, cùm effectus utriusque generis diligentiùs evolvemus & perpendemus, satis dilucidè patebit, eos inter se maximè discrepare, atque à vi, quæ in universam Terram minimum exerat effectum, maximam tamen agitationem partium Terræ inter se oriri posse & vicissim.

§. 17. Ad illum autem harum virium effectum, qui in commotione partium Terræ inter se consistit, dijudicandum, ante omnia probè notari oportet, si singulæ Terræ partes viribus æqualibus & in directionibus inter se parallelis sollicitentur, eo casu nullam omnino commotionem partium oriri, etiamsi sint maximè fluidæ nulloque vinculo invicem connexæ, sed totum virium effectum in integro tantum corpore movendo consumtum iri; perindè ac si totum Terræ corpus vel in unico puncto esset conflatum, vel ex materiâ firmissimè inter se connexâ constaret. Ex quo manifestum est partes Terræ saltem fluidas, quæ viribus cedere queant, inter se commoveri non posse, nisi à viribus dissimilibus urgeantur: atque hanc ob rem non magnitudo virium partes Terræ sollicitantium, sed potiùs dissimilitudo, quâ cùm quantitatis tùm directionis ratione inter se discrepant, eum effectum, quo situs partium mutuus perturbetur, producit. Ita vis Solis, etsi est maxima, tamen ob insignem distantiam partes Terræ ferè æqualiter afficit, contrà verò vis Lunæ ob propinquitatem admodùm inæqualiter: unde à Luna multò major agitatio Oceani resultat, quàm à Sole, quamvis ea vis, quæ ad Solem tendit, insigniter major sit alterâ Lunam respiciente. Atque hoc pacto dubium antè allatum funditùs tollitur, hocque adhuc planius fiet, si utriusque vis effectus ad calculum revocabimus.

§. 18. Ad inæqualitatem igitur virium quibus singulæ Terræ partes vel à Sole vel à Luna sollicitantur, definiendam, ante omnia vim, quâ universa Terra, si in suo centro gravitatis esset concentrata, afficeretur, determinari oportet, hæcque est ea ipsa vis, quæ Terræ motum progressivum in sua orbita respicit & turbat; deindè dispiciendum est, quantùm vires, quibus singulæ Terræ partes urgentur, tàm rationе quantitatis quàm directionis ab illâ vi totali discrepent. Quòd si enim nulla deprehendatur differentia, partes quoque singulæ situm suum relativum inter se retinebunt; at quò major erit differentia inter vires illas singulas partes sollicitantes, eò magis eæ inter se commovebuntur, situm relativum permutabunt. In hac autem investigatione, simul gravitatis naturalis, quâ omnia corpora versùs centrum Terræ tendunt, ratio est habenda; hæc enim vis in causa est, quòd quantumvis vires Solis & Lunæ in diversis Terræ regionibus sint inæquales, æquilibrii tamen status detur, in quo partes tandem singulæ conquiescant, neque perpetuò inter se agitari pergant. Atque hanc ob rem singulæ Terræ partes à tribus viribus sollicitatæ considerari debebunt, primò scilicet à propriâ gravitate, quâ directè deorsum nituntur; tùm verò à vi, quâ ad Solem urgentur, ac tertiò à vi versùs Lunam directâ; hæque tres vires, cujusmodi Phænomena quovis tempore in partibus Terræ fluidis gignant, erit investigandum.



§. 19. Quò igitur vim totalem, quâ Terra vel à Sole vel à Luna urgetur, definiamus, consideremus primùm peripheriam circuli MN tanquam ex materiâ homogeneâ conflatam, cujus centro P verticaliter immineat Sol vel Luna in S, ita ut recta PS ad planum circuli MN sit perpendicularis. Sit circuli hujus radius $PM=y$, & distantia $SP=x$, ac vis sive Solis sive Lunæ absoluta $= S$. His positis elementum peripheriæ Mm pelletur ad S in directione MS vi acceleratrice $= \frac{S}{MS^2} = \frac{S}{xx+yy}$, positâ cùm vi gravitatis naturalis in superficie Terræ $= 1$, tùm etiam semidiametro Terræ $= 1$: atque hanc ob rem elementum Mm versùs S nitetur vi $= \frac{S\times Mm}{xx+yy}$. Resolvatur hæc vis in binas laterales, quarum alterius directio cadat in MP, alterius verò sit parallela directioni PS; atque evidens erit vires omnes MP per totam peripheriam se mutuò destruere, alterarum verò mediam directionem cadere in PS, ac vim his omnibus æquivalentem iisdem conjunctim sumtis fore æqualem. Trahetur autem elementum Mm in directione ipsi PS parallela vi $= \frac{Sx\times Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde positâ ratione radii ad peripheriam $= 1:\pi$ tota circuli MN peripheria, quæ erit $= \pi y$, urgebitur seu quasi gravitabit versùs S in ipsâ directione PS vi $= \frac{\pi Sxy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. Vis autem acceleratrix quâ hæc peripheria circuli versùs S sollicitabitur, prodibit, si vis motrix inventa dividatur per massam movendam, quæ est $= \pi y$, eritque $= \frac{Sx}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$.



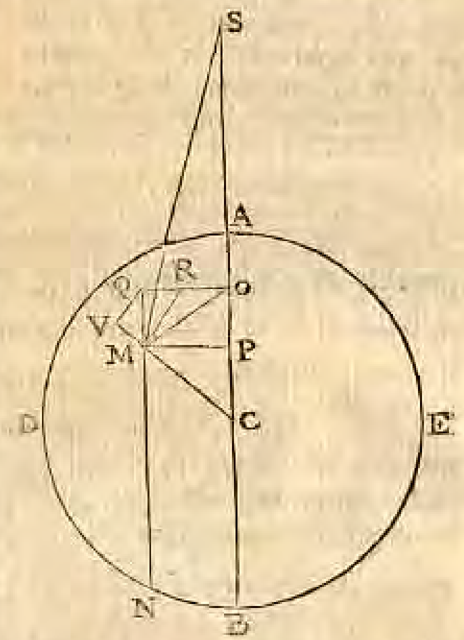
§. 20. Hoc præmisso, contemplemur superficiem sphæricam genitam conversione circuli AMB circa diametrum AB; sitque semidiameter $AC=BC=r$; erit ipsa superficies $= 2\pi rr$. Jam attrahatur hæc superficies ad Solem Lunamve in S, existente distantiâ $SC=a$; atque ad vim totalem seu conatum quo integra superficies ad S tendet, inveniendum, concipiatur annulus genitus conversione elementi Mm circa diametrum AB, quæ protensa per S transeat. Positis igitur $SP=x$, $PM=y$, erit per §. præc. conatus hujus annuli in directione $PS = \frac{\pi Sxy.Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. At posito $Pp=dx$, erit $Mm=\frac{rdx}{y}$, & $xx+yy=2ax-aa+rr$, unde annulli conatus versùs S erit $= \frac{\pi Srxdx}{(2ax-aa+rr)^{\frac{3}{2}}}$, cujus integrale est $= C+\frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$, ex quo conatus portionis superficiei sphæricæ conversione arcus AM ortæ prodibit $= \frac{\pi Srr}{aa}+\frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$. Quare si ponatur $SP=SB$ seu $x=a+r$, emerget conatus totius superficiei sphæricæ $= \frac{2\pi Srr}{aa}$: hincque cùm ipsa superficies sit $= 2\pi rr$, erit vis acceleratrix quâ superficies sphærica actu versùs S tendet $= \frac{S}{aa}$, ideoque tanta, quanta foret, si tota superficies in centro C esset collecta.

§. 21. Cùm igitur superficies sphærica perinde ad Solem sive Lunam in S sollicitetur, ac si tota in ipso centro esset conflata, hæc proprietas ad omnes superficies sphæricas, ex quibus integra Sphæra composita concipi potest, patebit, dummodo singulæ hæ superficies ex materiâ homogeneâ constent, sive quod eodem redit, ipsa Sphæra in iisdem à centro distantiis sit æquè densa. Hanc ob rem ejusmodi Sphæra quoque perinde ad S in directione PS urgebitur, ac si tota ipsius materia in centro C esset concentrata; hæcque proprietas non solùm in ejusmodi Sphæras competit, quæ totæ ex materiâ uniformi sunt confectæ, sed etiam ut jam indicavimus, in tales, quæ ex materiâ constant difformi, dummodo in æqualibus à centro distantiis, materia circumquaque sit homogenea seu saltem ejusdem densitatis. Cùm igitur Terram sibi repræsentare liceat tanquam Sphæram, si non ex uniformi materiâ conflatam, tamen sine ullo errore ita comparatam, ut in æqualibus circa centrum intervallis materiam æquè densam includat, Terra quoque universa tàm à Sole quàm à Lunâ æquè sollicitabitur, ac si omnis ejus materia in centro esset collecta. Quanquam enim nunc quidem accuratissimis ab Illustrissimâ Academiâ Regiâ institutis passim mensuris satis est demonstratum, Terræ figuram ad polos esse compressam, tamen tantilla à perfectâ Sphærâ aberratio, in aliis quidem negotiis maximi momenti, in hoc instituto tutò negligi potest. Parique ratione, etiamsi Terra in æqualibus à centro distantiis non sit æquè densa, tamen differentia certè non est tanta, ut error sensibilis inde sit metuendus.

§. 22. Ut igitur vires inveniantur, quæ tendant ad situm partium Terræ relativum immutandum, definienda est vis acceleratrix, quâ centrum Terræ sive ad Solem sive ad Lunam urgeatur: quâ cognitâ, si comperiantur omnes Terræ partes æqualibus viribus acceleratricibus & in directionibus parallelis ugeri, nulla omnino sitûs mutatio, nullaque proinde Maris agitatio orietur. Sed Terra in se spectata omnium partium situm mutuum invariatum conservabit. At si vires, quibus singulæ partes à Sole aut Lunâ urgentur, discrepent à vi centrum Terræ afficiente, tàm ratione quantitatis quàm directionis, tum nisi firmissimè inter se sint connexæ in situ suo mutuo perturbari debebunt. Hocque casu aquæ, quæ ob fluiditatem vi etiam minimæ cedunt, sensibiliter agitabuntur, atque affluendo defluendoque aliis locis elevabuntur, aliis deprimentur. Cùm autem iste motus, qui in singulis Terræ partibus generatur, à differentiâ inter vires centrum Terræ & ipsas partes sollicitantes proficiscatur, propria vis, quâ quæque particula agitabitur, innotescet, si à vi acceleratrice illam particulam sollicitante auferatur vis acceleratrix, quam centrum Terræ patitur: hæcque subtractio ita instituitur, ut cuique particulæ præter vim actu eam sollicitantem alia vis æqualis illi, quam centrum perpetitur, in directione contrariâ applicata concipiatur: tum enim vis quæ ex compositione harum duarum oritur, erit vera vis particulam illam de loco suo deflectens.

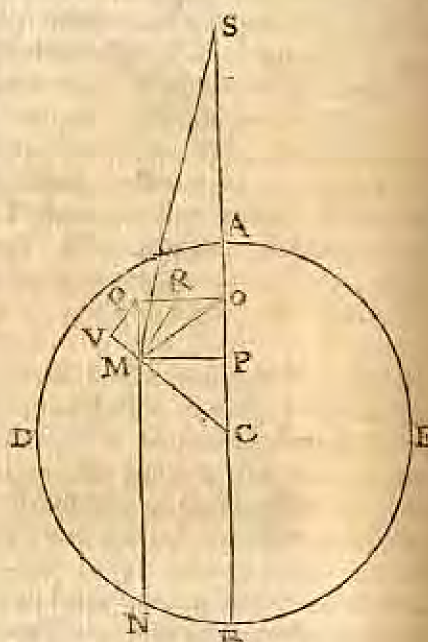
§. 23. Consentanea est hæc reductio principiis Mechanicis, quibus statuitur motum relativum in systemate quotcunque corporum & à quibuscunque viribus sollicitatorum manere invariatum, si non solùm toti systemati motus æquabilis in directum simul imprimatur, sed etiam singulis partibus vires æquales quarum directiones sint inter se parallelæ, applicentur. Nostro igitur casu motus intestinus partium Terræ non turbabitur

babitur, si singulis particulis vires æquales in directionibus parallelis applicemus ut fecimus; quòd si autem istæ vires æquales sint illi, quâ tota Terra seu centrum sollicitatur, & contrariæ, hoc ipso Terræ motum curvilineum & inæquabilem, quippe qui ab iisdem viribus oritur, adimemus. Quare si insuper toti Terræ motum æqualem & contrarium illi, quo actu fertur, impressum concipiamus, obtinebimus totam Terram quiescentem, atque etiam nunc partes perinde agitabuntur & inter se commovebuntur, ac si nullas istiusmodi mutationes intulissemus. Quilibet autem facilè percipiet, quantum ex hâc reductione subsidium assequamur; multò enim facilius erit mutationes, quæ in ipsâ Terrâ accidunt, percipere atque explicare, si centrum Terræ constituatur immotum, quàm si totalis motus singularum partium motibus esset permixtus. Hanc ob rem istâ reductione quâ centrum Terræ in quietem redigitur, perpetuò utemur, quò Phænomena æstûs Maris, prouti in Terrâ immotâ sentiri debent, eliciamus; quippe qui est casus naturalis, ad quem omnes observationes sunt accommodatæ, omnes verò theoriæ accommodari debent.



§. 24. Concipiatur nunc Terra tota tanquam globus $ADBE$ urgeri ad Solem Lunamve in S existentem cujus vis absoluta seu ea, quam in distantia à centro suo S semidiametro Terræ æquali exerit, sit $=S$, distantia verò centri Terræ C ab S seu CS ponatur $=a$; eritque vis acceleratrix, quâ tota Terra tanquam in C collecta sollicitabitur in directione $CS, = \frac{S}{aa}$. Contemplemur jam particulam Terræ quamcunque M cujus situs ita sit definitus, ut sit $CP = x$ & $PM = y$, existente MP normali ad CS; hinc igitur habebitur $SP = a - x$ & $SM = \sqrt{((a-x)^2 + y^2)}$. Vis igitur acceleratrix, quâ particula M versùs S pelletur, erit $= \frac{S}{(a-x)^2 + y^2}$; à quâ cùm auferri debeat vis, quâ tota Terra versùs S nititur, concipienda est particulæ M applicata vis $= \frac{S}{aa}$ in directione MN ipsi CS parallela & opposita; quæ duæ vires particulam M æquè afficient ac si universa Terra quiesceret vel uniformiter in directum moveretur, qui casus ab illo non differt. Ex his igitur ambabus viribus conatus innotescet, quo particula M à vi ad S directa de loco suo recedere annitetur: ad ipsum autem motum definiendum insuper vis gravitatis erit respicienda: & quia hæc particula non est libera, sed quaquaversùs materiâ terrestri circumdata, investigari oportet, quantum ista materia effectum viribus sollicitantibus concedat.

§. 25. Quoniam autem in hoc capite nobis nondum est propositum in ipsum effectum ab his viribus oriundum inquirere, sed tantum conatum evolvere atque explorare; diligentiùs perpendemus, cujusmodi vires ex combinatione harum potentiarum particulam M sollicitantium resultent. Hunc in finem resolvatur vis MS in duas laterales, quarum alterius directio parallela sit ipsi CS, altera verò in MP cadat: ex quo reperietur vis illa particulam M in directione MQ urgens $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; altera verò vis in directione MP trahens $= \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cùm autem particula M insuper trahatur in directione MN vi $= \frac{aa}{S}$, tres istæ vires à Sole Lunave in S existente reducentur ad duas, quarum altera in directione MQ urgens erit $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$, altera verò directionem habens $MP = \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Quare si rectæ MQ & MP his viribus proportionales capiantur, & rectangulum $MQOP$ compleatur exprimet diagonalis MO tàm directionem quàm quantitatem vis ex tribus præcedentibus ortæ: erit autem anguli OMP tangens $= \frac{a-x}{y} - \frac{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 y}$; quo cognito, si fiat ut MP ad MO ita $\frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ad quartam, hæc ipsa quarta proportionalis erit vis particulam M in directione MO sollicitans, quæ oritur à vi ad S tendente.

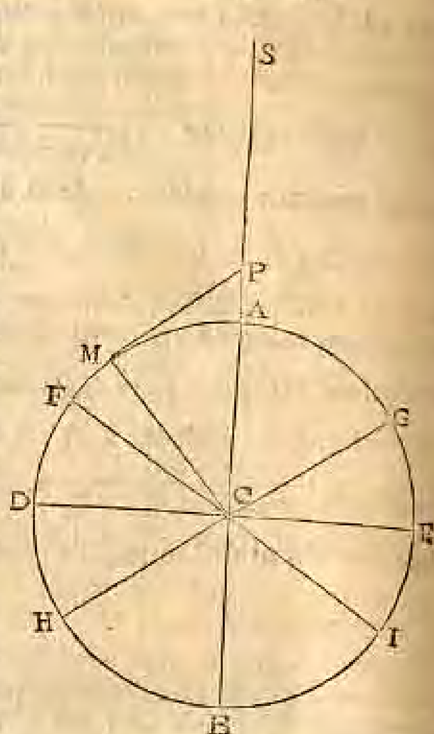


§. 26. Ut autem istæ vires faciliùs cum gravitate naturali, cujus directio est MC, conjungi queant, resolvantur eæ in binas, quarum altera in ipsam directionem MC cadat, alteriùs verò directio sit MR normalis ad MC. Ad hoc commodissimè præstandum, resolvatur vis MS primùm in duas, quarum altera ut antè directionem habeat ipsi CS parallelam, alteriùs verò directio in ipsam MC incidat. Cùm igitur sit $MC = \surd(x^2+y^2)$ erit prior vis $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, posterior verò $= \frac{S\surd(x^2+y^2)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ quâ vis gravitatis augebitur. At si à priori auferatur vis $= \frac{S}{aa}$, remanebit vis particulam M in directione MQ sollicitans $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$. Jam ex Q in CM productam demittatur perpendiculum QV, eritque ob similitudinem triangulorum QVM & MPC vis gravitati contraria secundùm directionem MV agens ex vi MQ orta $= \frac{Sax}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\surd(x^2+y^2)} - \frac{Sx}{a^2\surd(x^2+y^2)}$, unde omninò particula M à vi ad S tendente versùs C urgebitur vi $= \frac{Sx}{a^2\surd(x^2+y^2)} - \frac{S(ax-xx-yy)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\surd x^2+y^2)}$. Præterea verò eadem particula M in directione MR ad MC normali sollicitabitur vi $= \frac{Say}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\surd(x^2+y^2)} - \frac{Sy}{a^2\surd(x^2+y^2)}$.

§. 27. Tametsi istæ expressiones tantoperè sint compositæ, ut parum ex iis ad usum deduci posse videatur, tamen si consideremus distantiam Lunæ à Terra, multò magis autem distantiam Solis, vehementer excedere quantitatem Terræ, ac propterea quantitates x & y respectu quantitatis a exiguas admodum esse; per approximationem satis commodas formulas ex iis derivare licebit. Cùm enim sit proximè $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = (a^2-2ax+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3} + \frac{3(2ax-xx-yy)}{2a^5} + \frac{15(2ax-xx-yy)^2}{8a^7}$, loco $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ satis tutò substitui poterit $\frac{1}{a^3} + \frac{3x}{a^4} + \frac{3(4xx-yy)}{2a^5}$. Ex his autem obtinebitur vis, quâ particula M præter gravitatem à vi Solis sive Lunæ in S existentis ad centrum Terræ C in directione MC urgetur, $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\surd(x^2+y^2)} + \frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\surd(x^2+y^2)}$. Præterea autem eadem particula M sollicitabitur in directione MR ad MC normali, vi $= \frac{3Sxy}{a^3\surd(x^2+y^2)} + \frac{3Sy(4xx+yy)}{2a^4\surd(x^2+y^2)} = \frac{3Sy}{a^3\surd(x^2+y^2)}\left(x + \frac{4xx-yy}{2a}\right)$. Atque cùm in his formulis termini primi posteriores multis vicibus excedant, rem crassiùs inspiciendo, particula M à vi Solis Lunæve secundùm MC urgebitur vi $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\surd(x^2+y^2)}$, in directione verò MR vi $= \frac{3Sxy}{a^3\surd(x^2+y^2)}$.

§. 28.

§. 28. Ex his igitur postremis formulis intelligitur ab actione Solis sive Lunæ in S existentis gravitatem particulæ M augeri si ejus situs respectu rectæ SC ita fuerit comparatus, ut sit $yy > 2xx$ hoc est tangens anguli $MCP > \sqrt{2}$ posito sinu toto $= 1$, contrà verò gravitatem diminui, si fuerit $yy < 2xx$. Quare cùm angulus cujus tangens est $= \sqrt{2}$ contineat $54^{\circ}, 45'$ circiter, si concipiatur circulus Terræ maximus quicunque $ADBE$, cujus planum per punctum S transeat, in eoque ducantur rectæ FCI & GCH, quæ cum rectâ SAB angulos constituant $54^{\circ}\ 45'$; tùm omnes Terræ particulæ in spatiis FCH & GCI sitæ gravitatis naturalis augmentum accipient, reliquæ verò particulæ in spatiis FCG & HCI positæ decrementum gravitatis patientur. Atque hinc, quâcumque Terræ particulâ propositâ, definiri poterit, quantùm ejus gravitas à Sole Lunâve in S existente vel augeatur vel diminuatur. Altera verò vis, quâ particula M in directione horizontali MR urgetur, (*vide figuram ad pag. 298.*) affirmativa erit, in eamque plagam, quæ in figura repræsentatur, verget, si quantitates x & y ambæ fuerint vel affirmativæ vel negativæ: contrariumque eveniet, si earum altera sit affirmativa, altera negativa. Quare si particula M sita fuerit vel in quadrante ACD vel ACE, tum vis horizontalis ad rectam CA tendet; contrà verò hæc vis ad radium CB dirigetur, si particula M sit vel in quadrante BCD vel BCE constituta. Ex quibus perspicitur effectus vel Solis vel Lunæ in ambo hemisphæria, superius scilicet DAE & inferius DBE, inter se esse ferè similes; quæ similitudo quoque in ipso æstu Maris observatur.



§. 29. Ponamus nunc particulam M in ipsâ Terræ superficie esse constitutam, eritque $\sqrt{(x^2+y^2)} = 1$ ob Terræ semidiametrum $= 1$. Quare si particula M fuerit posita in M, existente anguli ACM sinu $= y$ & cosinu $= x$, ejus gravitas naturalis acceleratrix à Sole Lunâve in S augebitur vi $= \frac{S(y^2 - 2xx)}{a^3}$, secùndum horizontem autem in directione MR urgebitur vi $= \frac{3Sxy}{a^3}$. Gravitas igitur maximè augebitur, si particula M posita fuerit in D vel E, quibus in locis punctum S in horizonte apparet; ibi verò gravitatis augmentum erit $= \frac{S}{a^3}$. In punctis autem A & B, quæ punctum S vel in suo zenith vel nadir positum habent, maximum deprehendetur gravitatis decrementum, quod scilicet erit $= \frac{2S}{a^3}$: ita ut maximum gravitatis decrementum duplò majus sit quàm maximum incrementum. Vis autem horizontalis $\frac{3Sxy}{a^3}$ maxima evadet, si angulus ACM fuerit semirectus, id quod accidit in iis Terræ regionibus, in quibus punctum S conspicitur vel 45° gradibus supra horizontem elevatum, vel tantundem sub horizonte depressum lateet: his igitur casibus ob $xy = \frac{1}{2}$ fiet vis horizontalis $= \frac{3S}{2a^3}$. Hujus ergo vis effectus in hoc consistet, ut directio gravitatis mutetur, atque versùs rectam SC inclinetur angulo cujus tangens est $= \frac{3S}{2a^3}$, existente sinu toto $= 1$, quia gravitatem unitate designamus.

§. 30. Hæ itaque vires si satis essent magnæ, in ponderibus utique sentiri deberent, ac prior quidem gravitatem naturalem vel augens vel diminuens in oscillationibus pendulorum animadverti deberet, eorum motum vel accelerando vel retardando; posterior verò vis situm pendulorum quiescentium verticalem de hoc situ deflecteret, atque ad horizontem inclinatum efficeret. Quoniam autem hujusmodi perturbationes non observamus, operæ pretium erit dilucidè monstrare vires illas tam esse exiguas, ut hi effectus sensus nostros omninò effugiant. Primùm igitur cùm pro Sole sit $S = 227512$ atque $a = 20620$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{38333570}$; pro Luna autem quia est $S = \frac{1}{40}$ & $a = 60$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{8640000}$; ex quo vis Lunæ plus quàm quater major est vi Solis, ceteris paribus; atque si Solis & Lunæ vires prorsùs conspirent, erit ex iis conjunctim $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{7057700}$ seu proximè $= \frac{1}{7000000}$. Hinc maxima gravitatis diminutio, quæ quidem oriri poterit, erit $= \frac{1}{3500000}$, maximum verò incrementum $= \frac{1}{7000000}$; unde numerus oscillationum ejusdem penduli eodem tempore editarum, illo casu erit ut $\sqrt{(1 - \frac{1}{3500000})}$ seu $1 - \frac{1}{7000000}$, hoc verò casu ut $\sqrt{(1 + \frac{1}{7000000})}$ seu $1 + \frac{1}{14000000}$. Numeri ergo oscillationum ab eodem pendulo eodem tempore absolutarum, cùm gravitas maximè est diminuta,

& cùm maximè eſt aucta, tenebunt rationem ut 13999998 ad 14000001, hoc eſt ut 4666666 ad 4666667; ex quo ſatis perſpicitur differentiam hanc minimè percipi poſſe. Similis autem omninò eſt ratio alterius Phænomeni declinationis ſcilicet à ſitu verticali comparata, quæ nunquam ad $5'''$ exſurgere poteſt.

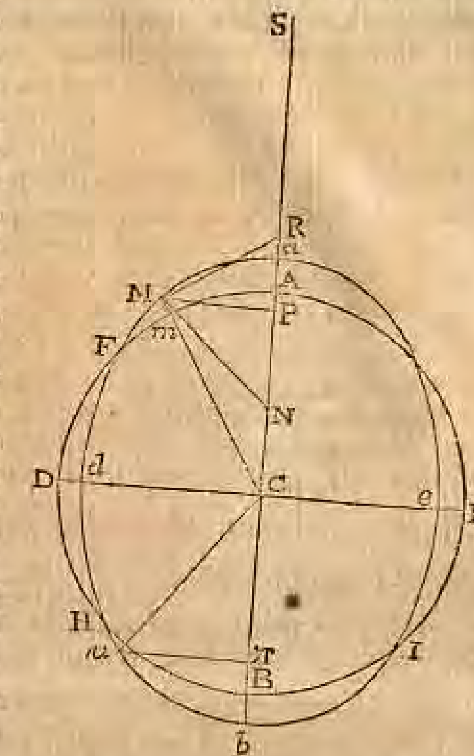
CAPUT TERTIUM.

De Figurâ, quam vires cùm Solis tùm Lunæ Terræ inducere conantur.

§. 31. Cum igitur in capite præcedente vires tàm à Sole quàm à Lunâ oriundas determinaverimus, quibus ſingulæ Terræ particulæ ad ſitum relativum cùm inter ſe tùm reſpectu centri, quod in hoc negotio tanquam quieſcens conſideratur, immutandum ſollicitantur; ordo requireret, ut jam in ipſum motum, quo ſingulæ particulæ inter ſe commoveri debeant, inquireremus. Verùm cùm hæc inveſtigatio ſit altioris indaginis, atque opus habeat principiis mechanicis ad motum partium inter ſe reſpicientibus, qualia vix uſquam adhuc reperiuntur; in hoc capite rem ſecundùm principia ſtatica ulterius perſequi pergamus, ac figuram determinemus, quam vires Solis & Lunæ cùm ſeorſim tùm etiam conjunctim inducere conantur. Hunc in finem Terram undequaque materiâ fluidâ ſeu aquâ cinctam contemplabimur, quò ſollicitationibus obedire ac figuram iis convenientem actu inducere queat. In hoc ſcilicet negotio Solem & Lunam pariter ac ipſam Terram quieſcentes concipimus, ita ut inter ſe perpetuò eundem ſitum relativum conſervent, quo pacto Terræ ab actionibus Solis ac Lunæ figura permanens mox induetur, quam tamdiu retinebit, quoad idem ſitus relativus duret. Perſpicuum autem eſt cognitionem hujus figuræ magno futuram eſſe adjumento ad ejuſdem figuræ tranſmutationem definiendam, ſi tàm Soli quàm Lunæ motus tribuatur.

§. 32. Conſideremus igitur primùm Terram in ſtatu ſuo naturali, in quem ſe ſola vi gravitatis compoſuit; in quo, cùm habitura ſit figuram ſphæricam, repræſentet circulus $ADBE$ ſeu potiùs globus ejus rotatione ortus Terram, quam præterea undique aquâ circumfuſam ponimus. Verſetur jam Sol vel Luna in S, à cujus vi cùm gravitas naturalis tam in A quàm in B diminuatur, in D verò & E augeatur, manifeſtum eſt Terram ſeu potiùs aquam illi circumfuſam elevatum iri in A & B, contrà verò in D & E deprimi, idque eouſque, quoad ſollicitationes à Sole Lunâve in S oriundæ cum vi gravitatis ad æquilibrium fuerint redactæ.

Sit



Sit itaque curva $adbe$ ea figura, quæ circa axem ab rotata generet Terræ formam, quam à vi ad S directâ tandem recipiet, atque cùm aquæ nunc ponantur in æquilibrio conſtitutæ, neceſſe eſt ut directio media omnium ſollicitationum, quibus ſingulæ Terræ particulæ in ſupremâ ſuperficie ſitæ urgentur, ad ipſam ſuperficiem ſit normalis. Quare ſi particulam quamcunque M ſpectemus; ea primùm à gravitate naturali in directione MC urgetur deorſùm, idque vi, quam conſtanter ponimus $= 1$; quippe quæ eſt ipſa gravitas in ſuperficie Terræ, eò quòd elevatio vel depreſſio particulæ diſtantiam ejus à centro Terræ, à quâ variatio gravitatis pendet, ſenſibiliter non immutet. Deinde verò eadem particula M à vi in S exiſtente ſollicitatur duplici vi, quarum alterius directio in ipſam MC incidit, alterius verò in MR normalem ad MC. Quocirca trium harum virium mediam directionem incidere oportet in rectam MN normalem ad curvam aMd, quo ipſo natura hujus curvæ determinabitur.

§. 33. Dubium hîc ſubnaſci poſſet, quod cùm ad præſens inſtitutum omnium virium, quibus ſingulæ particulæ ſollicitantur, ratio haberi debeat, eam hîc negligamus, quæ à vi centrifugâ motûs Terræ diurni oritur, quippe quæ non ſolùm non eſt infinitè parva, ſed multis vicibus major, quàm vires quæ vel à Sole vel Lunâ reſultant: ſed quia hæc vis conſtantem producit effectum, Terræ ſcilicet figuram ſphæroidicam ad polos compreſſam, mutationem, quæ in Fluxu ac Refluxu Maris obſervatur, ſenſibiliter afficere nequit. Deinde quamvis hîc figuram Terræ ſphæricam ponamus, tamen in aberrationem præcipuè ab hac figurâ tam à Sole quàm Lunâ oriundam inquirimus: manifeſtum autem eſt, quantum figura aquæ ob vires Solis Lunæve à ſphæricâ recedat, tantundem aquæ figuram admiſſo motu diurno Terræ à figurâ ſphæroidicâ eſſe diſcrepaturam. Quâpropter in hoc negotio ſufficere poteſt, ſi, Terrâ inſtar ſphæræ perfectæ conſideratâ, definiamus quantam differen-

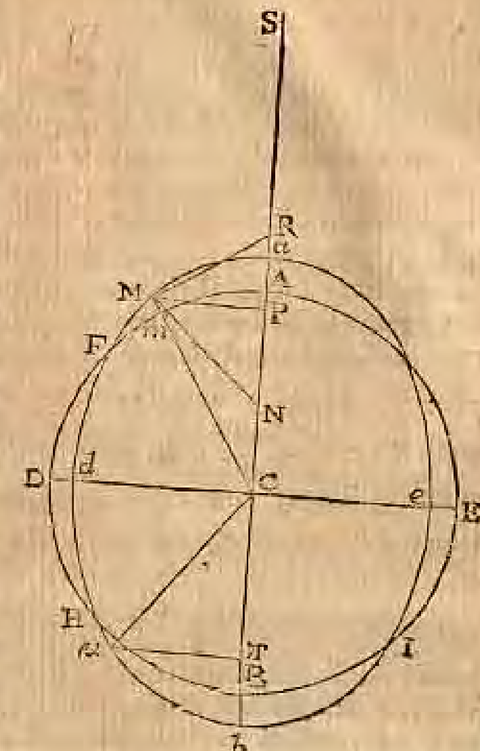
tiam

tiam in aquæ figurâ vires cùm Solis tùm Lunæ producant: hac enim determinatâ, si Terræ motus vertiginis restituatur, perspicuum erit totam figuram sub æquatore intumescere, sub polis autem subsidere; ita tamen ut ubique eadem vel elevatio vel depressio aquæ à viribus Solis Lunæve maneat. Namque si ulla etiam varietas in æstu Maris à motu vertiginis Terræ proficiscatur, ea calculo monstrante nusquam major esse potest parte $\frac{1}{289}$ æstûs totalis; tantilla autem differentia notari non meretur, neque ob eam causam operæ pretium est tam complicatos & abstrusos calculos inire, ad quos perveniretur, si Terræ figura naturalis à sphæricâ diversa poneretur, atque insuper vis centrifuga à motu vertiginis Terræ in computum duceretur.

§. 34. Ad curvam igitur $aMdb$, cui ea quæ ex alterâ parte axis ab similis est & æqualis, determinandam, ponatur vis absoluta sive Solis sive Lunæ in S existentis $= S$, distantia $CS = a$, ac ducta semiordinata MP vocetur $CP = x$, & $PM = y$. Ex præcedenti igitur capite habebitur vis, quâ punctum M vel à Sole vel Lunâ versùs C urgebitur $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$, insuper autem idem punctum M sollicitabitur in directione MR normali ad MC vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx-yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$. Præter has verò vires punctum M gravitate naturali deorsum pellitur vi $= 1$ secundùm directionem MC, ita ut punctum M ab omnibus his viribus conjunctim in directione MC deorsum urgeatur vi $= 1 + \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$ ubi ob 1 sequens terminus tutò negligi potest, & in directione MR vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$; quarum duarum virium si MN ponatur media directio, prodibit per regulas compositionis motus anguli CMN tangens $= \frac{3Sy(2ax+4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}+2Sa(yy-2xx)}$, quæ divisione actu institutâ, iisque terminis neglectis in quorum denominatoribus a plures quàm quatuor obtinet dimensiones, abit in hanc expressionem $\frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, quæ est ea ipsa formula, quâ vis MR exprimebatur. Quocirca angulus CMN prorsùs non pendet ab auctâ minutâve gravitate, sed tantùm à vi horizontali singulis particulis in Terræ superficie sitis impressâ.

§. 35. Quoniam verò hæc ipsa media directio MN debet esse ad curvam aMd in puncto M normalis, erit subnormalis $PN = -\frac{ydy}{dx}$ & $CN = \frac{xdx+ydy}{dx}$. Cùm igitur sit anguli MNP tangens $= \frac{-dx}{dy}$ & anguli MCP tangens $= \frac{y}{x}$, erit horum angulorum differentiæ, hoc est anguli CMN tangens $= \frac{ydy+xdx}{ydx-xdy}$, quæ superiori expressioni, quâ hæc

hæc eadem tangens designabatur, æqualis posita pro curvâ quæsitâ $aMdb$ sequentem præbebit æquationem $\frac{ydy+xdx}{ydx-xdy} = \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, ad quam integrandam ponimus $\sqrt{(xx+yy)} = z = MC$, & anguli MCA cosinum $\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = u$, unde fiet $x = uz$ & $y = z\sqrt{(1-uu)}$, atque $ydx - xdy = \frac{zzdu}{\sqrt{(1-uu)}}$, itemque $xdx + ydy = zdz$. Hac autem factâ substitutione, æquatio inventa abit in hanc $\frac{dz}{zz} = \frac{3Sudu}{a^3} + \frac{3Szdu(5uu-1)}{2a^4}$, cujus postremus terminus, qui ob parvitatem præ reliquis ferè evanescit, si abesset, foret integrale $\frac{1}{c} - \frac{1}{z} = \frac{3Suu}{2a^3}$ seu $z = c + \frac{3Sccuu}{2a^3}$ proximè. Ponamus itaque completum integrale esse $z = c + \frac{3Sc^2u^2}{2a^3} + \frac{3Sc^3V}{2a^4}$, ac factâ applicatione reperietur $V = \frac{5u^3-3u}{3}$, ita ut habeatur $z = c + \frac{3Sccuu}{2a^3} + \frac{Sc^3u(5uu-3)}{2a^4}$, quod autem integrale proximè tantùm satisfacit; at mox aliâ viâ aperietur verum ipsius z valorem per u commodiùs & propiùs definiendi.



§. 36. Cùm autem soliditas sphæroidis, quod generatur ex conversione curvæ adb circa axem ab, æqualis esse debeat soliditati Sphæræ radio $CA = 1$ descriptæ, hinc constans quantitas c quæ per integrationem est ingressa, definietur: id quod commodissimè præstabitur, si utraque sphæroidis semissis, superior scilicet versùs S directa, atque inferior seorsim investigetur. Quoniam igitur pro semissi superiori est $CP = x = zu = cu + \frac{3Sccu^3}{2a^3} + \frac{Sc^3u^2(5uu-3)}{2a^4}$ & $MP^2 = y^2 = z^2(1-uu) = (1-uu)\left(cc + \frac{3Sc^3u^2}{a^3} + \frac{Sc^4u(5uu-3)}{a^4}\right)$, erit $\int yydx$, cui soliditas genita conversione spatii $dCPM$ est proportionalis, $= c^3u - \frac{c^3u^3}{3} + \frac{5Sc^4u^3}{2a^3}$

 −3Sc

$-\frac{3Sc^4u^5}{2a^3}-\frac{3Sc^5u^2}{a^4}+\frac{21Sc^5u^4}{4a^4}-\frac{5Sc^5u^6}{2a^4}$. Posito igitur $u=1$, prodibit superioris semissis ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{a^3}-\frac{Sc^5}{4a^4}$. Simili modo cùm pro inferiori semissi sit $Cac=z=c+\frac{3Sc^2u^2}{2a^3}-\frac{Sc^3u(5u^2-3)}{2a^4}$, erit ejus soliditas ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{a^3}+\frac{Sc^5}{4a^4}$; ex quibus totius sphæroidis soliditas erit ut $\frac{4}{3}c^3+\frac{2Sc^4}{a^3}$. Quare cùm Sphæræ radio $=1$ descriptæ soliditas pari modo definita, sit ut $\frac{4}{3}$, fiet $1=c^3+\frac{3Sc^4}{2a^3}$; hincque $c=1-\frac{S}{2a^3}$. Quamobrem pro curvâ quæsitâ habebitur, hoc valore loco c substituto, ista æquatio $z=1+\frac{S(3u^2-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$; ex quâ natura istius curvæ luculenter cognoscitur.

§. 37. Hinc igitur perspicitur à Sole vel Lunâ in S existente aquam, cujus superficies antè erat in A, attolli in a, ita ut sit elevatio $Aa=\frac{S}{a^3}+\frac{S}{a^4}$; atque in regione oppositâ B, aquam pariter elevari per spatium $Bb=\frac{S}{a^3}-\frac{S}{a^4}$: unde patet aquas in A & B, ad eandem ferè altitudinem elevari, cùm excessus superioris elevationis super inferiorem sit tantum $\frac{2S}{a^4}$, quod discrimen respectu totius elevationis vix est sensibile. Contrà verò in regionibus lateralibus D & E, aqua circumquaque æqualiter deprimetur, & quidem per intervallum $Dd=Ee=\frac{S}{2a^3}$; ex quo ista depressio duplo minor est, quàm elevatio quæ in A & B accidit. In punctis præterea F, G, H & I, quæ à cardinalibus A & B distant angulo $54^\circ\ 45'$, quippe pro quo est $3uu-1=0$, neque elevabitur aqua neque deprimetur, sed naturalem tenebit altitudinem. In loco autem Terræ quocumque M cognoscetur aquæ vel elevatio vel depressio ex angulo ACM, cujus cosinus u est sinus altitudinis sub quâ Sol vel Luna in S existens super horizonte conspicitur ab observatore in M constituto; hoc enim in loco aqua elevata erit supra naturalem altitudinem intervallo $=\frac{S(3uu-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$: quæ expressio si sit negativa, Maris depressionem indicat. Hìc autem annotare non est opus, quòd si punctum S sub horizonte lateat, tùm sinus depressionis maneat quidem u, sed negativè accipi debeat.

§. 38. Definiamus igitur primùm cùm elevationem tùm depressionem, quæ à solâ vi Solis ubique terrarum produci deberet, si uti ponimus, omnia in statu æquilibrii essent constituta. Quoniam itaque est $S=227512$ atque $a=20620$ semid. Terræ, si una Terræ semidiameter assumatur 19695539

19695539 pedum Paris. erit $\frac{S}{a^3}=0{,}5072$ ped. seu pauxillum excedet semipedem: valor autem $\frac{S}{a^4}$ omnino erit quantitas evanescens & imperceptibilis. Hanc ob rem in regionibus sub Sole verticaliter sitis, quæ habeant Solem vel in Zenith vel Nadir, aqua ultra altitudinem naturalem attolletur ad semipedem cum pollicis parte decimâ circiter; depressio autem maxima cadet in loca, quæ Solem in horizonte conspiciunt; ubi aqua ad quadrantem pedis tantum deprimetur; ex quo totum discrimen, quod à Sole in altitudine aquæ naturali oritur, ad tres quartas pedis partes circiter assurget. Iste Solis effectus autem distantiæ tantum mediocri Solis à Terra est tribuendus: quòd si enim Sol versetur vel in apogæo, vel perigæo, ejus effectus vel diminui vel augeri debebit in ratione reciprocâ triplicatâ distantiarum Solis à Terra, quia pendet à valore $\frac{S}{a^3}$. Cùm igitur orbitæ Terræ excentricitas sit $=\frac{163}{10000}$, erit intervallum Aa vel Bb, dum Sol in perigæo versatur, $=0{,}5332$ ped. sin autem Sol in apogæo sit constitutus, $=0{,}4825$ pedum; quorum differentia ad vicesimam pedis partem ascendit: valor autem medius est $=0{,}5072$, quem pro mediocri distantiâ Solis à Terra invenimus.

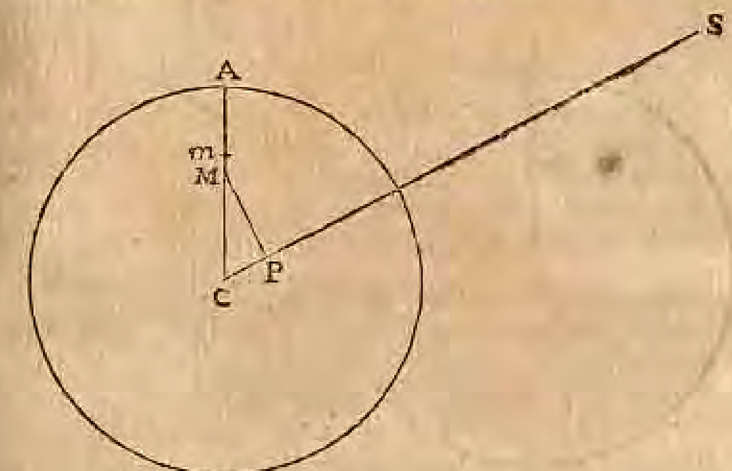
§. 39. Problema hoc, quod hucusque dedimus solutum, quodque maximi est momenti ad effectus cùm Solis tùm Lunæ in Mari elevando & deprimendo definiendos, Newtonus ne attigit quidem, sed aliam viam secutus, non solùm indirectam sed etiam erroneam, invenit Mare à solâ vi Solis ad altitudinem duorum ferè pedum elevari debere; cùm tamen tam eandem vim Soli absoluram quàm eandem distantiam à Terra assumsisset, quibus nos sumus usi. Conclusit autem hunc enormem effectum ex comparatione vis Solis seu valoris $\frac{S}{a^3}$ cum vi Terræ centrifugâ à motu diurno ortâ, quâ Terra sub æquatore extenditur ac crassior redditur quàm sub polis; atque assumit elevationem aquæ à vi Solis ortam eandem tenere debere rationem ad incrementum Terræ sub æquatore à vi centrifuga factum, quàm teneat vis Solis ad vim centrifugam. Sed præterquam quòd hoc ratiocinium nimis infirmo superstructum fundamento, nostrâ viâ directâ, quâ sumus usi, statim evertitur: ex ipsâ enim rei naturâ, nullis precariis assumtis principiis, elevationem aquarum à vi Solis oriundam directè & luculenter determinavimus; ac si ullum etiam dubium ob integrationem per approximationes tantum institutum restaret, id mox tolletur, cùm infrà idem problema aliâ methodo prorsus diversâ sumus resoluturi, congruentemque solutionem exhibituri.

§. 40. Quamvis autem iste Solis effectus in Mari tam elevando quàm deprimendo non adeò certus & planus esse videatur ob parallaxin Solis,

Solis, quam 10″ assumsimus, nondum accuratissimè definitam; à quâ tam distantia Solis à Terra a, quàm æstimatio vis absolutæ S, pendet: tamen si rem attentiùs perpendamus, comperiemus expressionem $\frac{S}{a^3}$ perpetuò eundem retinere valorem, quæcumque Soli parallaxis tribuatur: mutatâ enim parallaxi, valor litteræ S præcisè in eadem ratione, in quâ cubus distantiæ a^3, mutabitur. Per leges enim motûs firmissimè stabilitas patebit quantitatem $\frac{S}{a^3}$ à solo tempore periodico Terræ circa Solem determinari, cujus quantitas accuratissimè est definita. Quod ut clarius appareat, consideremus planetam quemcunque circa Solem in orbitâ ellipticâ revolventem, cujus semiaxis transversus seu distantia à Sole media sit $= a$, vis autem Solis absoluta $= S$, erit tempus periodicum semper ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; quòd si igitur tempus periodicum sit $= t$, erit t ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$ & $\frac{S}{a^3}$ uti $\frac{1}{tt}$. Ad valorem autem fractionis $\frac{S}{a^3}$ absolutè inveniendum, exprimatur a in semidiametris Terræ, atque in minutis secundis dato tempore periodico t, erit semper $t = \frac{5064\frac{1}{2}\, a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; ex quo prodit $\frac{S}{a^3} = \frac{5064\frac{1}{2} \times 5064\frac{1}{2}}{tt}$, positâ unitate cùm pro gravitate naturali, tùm pro unâ Terræ semidiametro. At si tempus Terræ periodicum seu annus sidereus in minutis secundis exponatur, fiet $t = 31558164$, atque $\frac{S}{a^3} = 0{,}50723$ ped. positâ semidiametro Terræ per observationes exactissimas 19695539 ped. Paris. Reg. omnino uti antè invenimus.

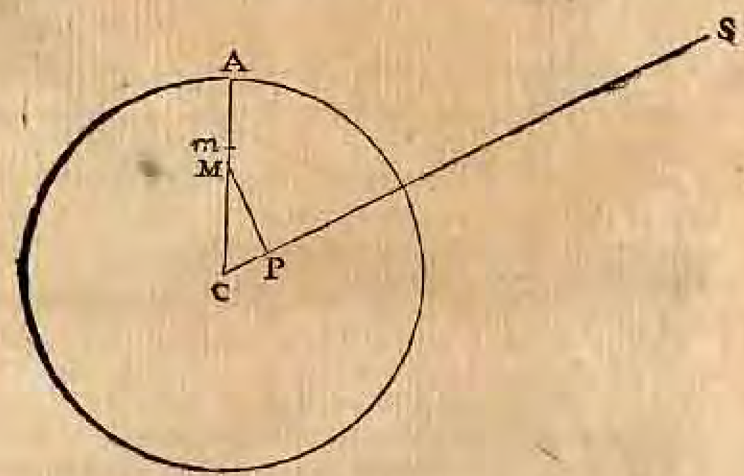
§. 41. Simili modo ex superiori æquatione elevatio aquæ à vi Lunæ oriunda determinabitur; positâ enim vi Lunæ absolutâ $= L$, poni oportet $S = L$, ejusque valor proximè erit $= \frac{1}{40}$, quem à Newtono repertum tantisper retinebimus, quoad verus valor per alia Phænomena accuratiùs definiatur. Quoniam itaque Lunæ à Terrâ mediocris distantia est $= 60\frac{1}{2}$ semid. Terræ, erit $\frac{S}{a^3} = L \times 88{,}94$ ped. $= 2{,}223$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}47 = 0{,}037$ ped. Cùm autem Lunæ excentricitas sit quasi $\frac{550}{10000}$, erit dum Luna in perigæo versatur $\frac{S}{a^3} = L \times 104{,}44$ ped. $= 2{,}611$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}82 = 0{,}045$ pedum. At si Luna fuerit in apogæo, prodibit $\frac{S}{a^3} = L \times 75{,}74$ ped. $= 1{,}893$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}19 = 0{,}030$ pedum. Ex his igitur si Luna à Terrâ mediocriter distet, erit aquæ elevatio $Aa = L \times 90{,}41$ ped. $= 2{,}260$ ped. elevatio autem $Bb = L \times 87{,}47$ ped. $= 2{,}187$ pedum: ac depressio ad latera $Dd = Ee = L \times 44{,}47$ pedum $= 1{,}112$ ped. Pro perigæo verò Lunæ fiet $Aa = L \times 106{,}26$ ped. $= 2{,}656$ pedum; $Bb = L.\,102{,}62$ ped. $= 2{,}565$ pedum; atque $Dd = Ee = L.\,52{,}22 = 1{,}305$ pedum. Pro apogæo denique Lunæ habebitur $Aa = L.\,76{,}93$ ped. $= 1{,}923$ pedum, & $Bb = L.\,74{,}55$ ped. $= 1{,}864$ pedum, atque $Dd = Ee = L.\,37{,}87$ ped. $= 0{,}947$ pedum.

§. 42. Tametsi autem hac methodo non difficulter tam elevatio Maris quàm depressio quæ vel à Sole vel Lunâ seorsum gignitur, sit determinata, si quidem omnia ad statum quietis redacta concipiantur; tamen nimiùm foret difficile ejusdem methodi ope easdem res definire, si Sol & Luna conjunctim agant. Quamobrem aliam methodum exponamus, cujus usus pro utroque casu æquè pateat; quæ cùm à priori penitùs sit diversa, simul ea, quæ jam sunt eruta atque à Newtonianis diversa deprehensa, maximè confirmabit. Petita verò est hæc altera methodus ex eâ æquilibrii proprietate, quâ requiritur, ut omnes columnæ



aqueæ à superficie Terræ ad centrum pertingentes sint inter se æquiponderantes. Existente igitur vel Sole vel Lunâ in S, cujus vis absoluta ponatur $= S$, & distantia $SC = a$, sit AC columna aquea à superficie Terræ A ad centrum C usque pertingens, quæ altitudo AC sit $= b$. Ponatur anguli ACS cosinus $= u$, qui simul erit sinus altitudinis sub quâ punctum S à spectatore in A constituto super horizonte elevatum conspicitur; sumaturque intervallum quodcunque $CM = z$, & consideretur totius columnæ elementum $Mm = dz$. Hoc igitur elementum primò à gravitate deorsum versùs C urgebitur, cujus effectus, cùm intra Terram pro variis distantiis non satis constet, ponatur dignitati cuicunque distantiarum à centro putà ipsi z^n proportionalis: mox enim planum fiet exponentem n nil omnino determinationes esse turbaturum. Urgebitur ergo go elementum Mm versùs centrum C vi $= z^n dz$; ex quo totius columnæ AC nisus deorsum à gravitate oriundus, erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1}$.

§. 43. Præterea autem elementum $Mm = dz$ à vi S sollicitabitur duplici modo, altero deorsum in directione MC, altero in directione ad illam MC normali, quæ posterior vis, cùm pondus columnæ nequaquam afficiat, tutò negligetur, solaque prior considerabitur. Demisso autem ex M in CS perpendiculo MP, positisque $CP = x$ & $PM = y$, erit $\sqrt{(x^2+y^2)} = z$, & $x = uz$ atque $y = z\sqrt{(1-uu)}$. At ex §. 27. vis, quâ particulâ Mm deorsum sollicitatur, est $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{Sz(1-3uu)}{a^3} + \frac{3Suz^2(3-5uu)}{2a^4}$. Quæ expressio per dz multiplicata,



tumque integrata facto $z = h$, præbebit totius columnæ AC nisum à vi S oriundum $= \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$. Quocirca totus columnæ AC nisus deorsum tendens erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; qui cùm in omnibus columnis debeat esse idem, æquabitur conatui, quo columna æqualis semidiametro Terræ 1 in statu naturali à solâ gravitate deorsum nititur, quæ vis est $= \frac{1}{n+1}$. Hinc igitur sequens emergit æquatio, $1 = h^{n+1} + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; ex quâ elicitur $h = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$, quæ est ea ipsa expressio, quam suprà §. 36. alterâ methodo invenimus.

§. 44.

§. 44. Agant nunc vires ambæ ad Solem Lunamque directæ conjunctim; ac primò quidem designet S Solis vim absolutam, a ejus distantiam à Terra, & u sinum anguli, quo Sol suprà horizontem est elevatus. Deinde sit simili modo pro Luna L ejus vis absoluta, b ejus distantia à Terrâ, atque v sinus altitudinis Lunæ super horizonte. Ex his igitur columna aquea $AC = h$ tam vi propriæ gravitatis quàm à viribus Solis ac Lunæ conjunctim in centrum C urgebitur vi $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv)}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$, quæ æqualis esse debebit vi $\frac{1}{n+1}$. Ex hac autem æquatione resultat $h = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$. Quocirca aqua in A supra situm naturalem, quem à solâ gravitate sollicitata obtineret, à viribus Solis ac Lunæ conjunctim sollicitantibus, elevabitur per intervallum $= \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ex quâ expressione status aquæ vel elevationis vel depressionis ubique terrarum cognoscetur.

§. 45. Hanc posteriorem viam secuti, non solùm actiones Solis ac Lunæ commodè conjungere potuimus, sed etiam nunc nobis licebit motûs vertiginis Terræ, & vis centrifugæ inde ortæ, rationem habere; id quod methodo priore opus fuisset insuperabile. Ponamus enim altitudinem columnæ naturalem AC, quam habitura esset à vi gravitatis & vi centrifugâ simul, seu quod eodem redit, in figurâ Terræ sphæroidicâ compressâ, esse $= f$, altitudinem autem quam habebit accedentibus viribus Solis ac Lunæ esse $= h$; atque manifestum est quantitates f & h quàm minimè ab 1 discrepare. Cùm igitur utriusque columnæ f & h idem debeat esse nisus deorsùm, columnæ autem f in quam sola gravitas & vis centrifuga agunt nisus sit $= \frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff$, denotante α quantitatem à vi centrifugâ in A pendentem, columnæ verò h nisus sit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} - \alpha h^2 + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5v^2)}{2b^4}$; erit æqualitate factâ $f^{n+1} - (n+1)\alpha ff = h^{n+1} - (n+1)\alpha h^2 + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Lh^2(3-1vv)}{2b^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$. Ponatur $h = f + s$, erit ob α quantitatem vehementer parvam, a verò & b maximas, $0 = f^n s + \frac{Sf^2(1-uu)}{2a^3} + \frac{Lf^2(1-3vv)}{2b^3} - 2\alpha fs + \frac{Sfs(1-3uu)}{a^3} + \frac{Lfs(1-3vv)}{b^3} + \frac{Sf^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lf^3v(3-5vv}{2a^4}$, neglectis terminis in qui-

quibus s plures obtinet dimensiones, ob summam ipsius s parvitatem respectu ipsius f. Hinc itaque fiet $s = \dfrac{\frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Sfu(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lfv(5vv-3)}{2b^4}}{f^{n-2} - \frac{2\alpha}{f} + \frac{S(1-3uu)}{a^3 f} + \frac{L(1-3vv)}{b^3 f}}$.

Quòd si porrò ponatur semiaxis Terræ per polos transiens $= 1$, erit ob æquilibrium $\frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff = \frac{1}{n+1}$ & $f = 1 + \alpha$, ex quo denominator præcedentis fractionis ab unitate quàm minimè discrepabit; sub ipso enim æquatore est $\alpha = \frac{1}{578}$, ubi quidem est maximum: unde omnino ut antè elevatio aquæ à viribus Solis ac Lunæ orta supra altitudinem naturalem $s = \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$; discrimen enim quod revera aderit, sensus omnino effugiet, pendebitque simul à valore exponentis n.

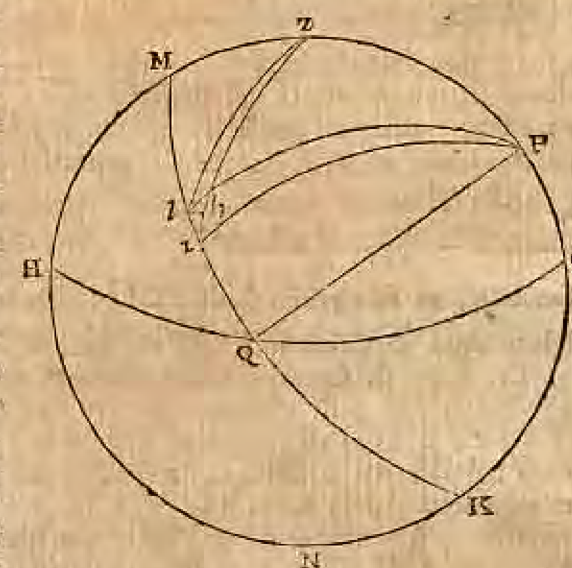
CAPUT QUARTUM.

De Fluxu ac Refluxu Maris si aqua omni inertiâ careret.

§. 46. QUÆ in capite præcedente sunt tradita respiciunt hypothesin assumtam, quâ Solem ac Lunam respectu Terræ perpetuò eundem situm tenere posuimus; ibique præcipuè statum æquilibrii, ad quem Oceanus à viribus Solis & Lunæ perducatur, determinavimus. Longè aliter autem se res habet, si tam Luna & Sol quàm Terra in motum collocentur, quo casu ob perpetuam situs relativi mutationem nunquam æquilibrium adesse poterit; cùm enim tempore opus sit, quo data vis datum corpus ad motum perducat, duplici modo status oceani assignatus à vero discrepabit. Namque primò aqua quovis momento in eum æquilibrii situm, quem vires sollicitantes intendunt, pervenire non poterit, sed tantum ad eum appropinquabit continuò; deinde etiamsi in ipsum æquilibrii situm perveniat, in eo tamen non acquiescet, sed motu jam concepto ulteriùs feretur, uti ex naturâ motûs abundè constat. Hujus autem utriusque aberrationis ratio in inertiâ aquæ est posita, quâ fit ut aqua nec subitò in eum situm se conferat, in quo cum viribus datur æquilibrium, nec cùm hunc æquilibrii situm attigerit, ibi quiescat. Quocirca ne difficultatum multitudine obruamur, aquam omni inertiâ carentem assumamus, hoc est istius indolis, ut non solùm quovis momento se in statum æquilibrii subitò recipiat, sed ibi etiam omnem motum insitum deponendo permaneat, quamdiu iste situs viribus sol-

sollicitantibus conveniat. Hâc itaque factâ hypothesi, perspicuum est aquam quovis temporis momento in eo ipso statu fore constitutam, qui secundùm præcepta capitis præcedentis positioni cùm Solis tùm Lunæ respondeat.

§. 47. Ut igitur in hâc hypothesi, quâ Mare vis inertiæ expers ponimus, pro quovis loco ad quodvis tempus statum Maris quàm commodissimè definiamus, primùm solam Lunam considerabimus, cùm in eâ præcipua æstûs Maris causa contineatur, atque tam Fluxus quam Refluxus Maris à transitu Lunæ per meridianum computari soleat: quòd si enim Lunæ effectus innotuerit, non solùm Solis effectus quoque mutatis mutandis colligetur, sed etiam effectus, qui ab ambobus luminaribus simul agentibus proficiscitur. Propositus igitur sit Terræ locus quicunque, cujus in cœlo Zenith sit Z, horizon HQO & P polus borealis, ita ut arcus PO sit hujus loci elevatio poli, & circulus $PZHNO$ meridianus. Sit porrò MLK parallelus æquatori, in quo Luna jam motu diurno circumferatur, atque hoc momento reperiatur Luna in L; eritque tempus, quo Luna vel ex L ad meridianum M appellet, vel vicissim à meridiano ad L pertigit, ut angulus MPL, sive hoc tempus se habebit ad tempus unius revolutionis Lunæ, quod est 24. horarum 48′, uti se habet angulus MPL ad quatuor rectos. Sit igitur



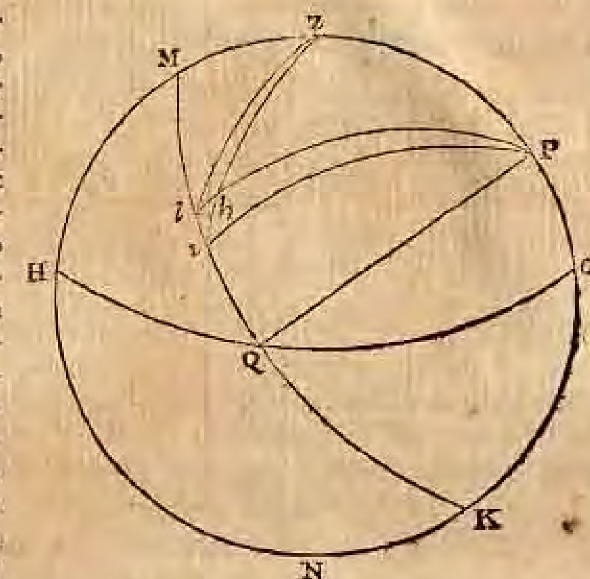
anguli MPL cosinus $= t$; sinus elevationis poli PO seu sinus arcûs $PZ = p$, cosinus $= P$, ac sinus declinationis Lunæ borealis $= Q$, qui idem est sinus distantiæ Lunæ à polo PL, hujus verò ipsius arcûs sinus sit $= q$, cui simul cosinus declinationis Lunæ æquatur, atque ob sinum totum constanter positum $= 1$, erit $Q^2 + q^2 = 1$. Cùm jam in triangulo sphærico ZPL dentur arcus PZ & PL cum angulo ZPL, reperietur per Trigonometriam sphæricam arcûs ZL cosinus $= tpq + PQ$, qui simul est sinus altitudinis Lunæ supra horizontem, quem antè posuimus $= v$. Ex quibus erit $v = tpq + PQ$, & $3vv - 1 = 3(tpq + PQ)^2 - 1$, atque $5vv - 3 = 5$

 (tpq

$(tpq+PQ)^2-3$; qui valores in formulis præcedentis capitis ſubſtituti præbebunt ſtatum Maris, hoc eſt vel elevationem vel depreſſionem, pro loco propoſito ad tempus aſſignatum.

§. 48. Quòd ſi ergo Lunæ vis abſoluta ponatur $=L$, ejuſque à Terra diſtantia $=b$, erit intervallum, quo aqua ſupra ſtatum naturalem elevabitur, $=\frac{L(3(tpq+PQ)^2-1)}{2b^3}+\frac{L(tpq+PQ)(5(tpq+PQ)^2-3)}{2b^4}$, quæ expreſſio ſi ſit negativa, indicat aquam infra ſtatum naturalem eſſe depreſſam. Ponamus Lunam horizonte ſeu versùs auſtrum per meridianum tranſire, quo caſu erit $t=1$; hoc igitur tempore aqua ſupra ſtatum naturalem erit elevata intervallo $=\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}+\frac{L(pq+PQ)(5(pq+PQ)^2-3)}{2b^4}$. Contrà verò dum Luna ſub horizonte vel versùs boream ad meridianum appellit, fiet elevatio aquæ ſupra ſtatum naturalem per intervallum $=\frac{L(3P^2Q^2-1)}{2b^3}+\frac{LPQ(5P^2Q^2-3)}{2b^4}$; quæ expreſſio ſemper eſt negativa, ideoque indicat aquam infra ſtatum naturalem conſiſtere. Namque cùm P ubique ſit minor unitate niſi ſub ipſis polis, ac declinatio Lunæ nunquam ad 30° aſſurgere poſſit, ex quo $Q<\frac{1}{2}$ & $QQ<\frac{1}{4}$, erit $3P^2Q^2$ perpetuò unitate minor; ideoque illa expreſſio negativa.

§. 49. De ratione autem elevationis aquæ in genere judicare licebit ex formulâ $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}+\frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ſeu cùm poſterior terminus vix ſit ſenſibilis, ex ſolo priore $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}$. Ex hâc autem expreſſione intelligitur aquæ elevationem à ſolâ elongatione Lunæ ab horizonte pendere, ſive Luna ſit ſuper ſive ſub horizonte, retinet enim $3vv-1$ eundem valorem ſive v ſit affirmativum ſive negativum. Deinde quia ſit $3vv-1=0$ ſi Luna ab horizonte diſtet arcu $35^\circ\ 16'$, tum aqua in ipſo ſtatu naturali erit conſtituta, neque elevata neque depreſſa. Elevabitur ergo aqua, cùm Luna ultra $35^\circ\ 16'$ vel ſupra vel infra horizontem verſetur, è contrario autem deprimetur quando Lunæ ab horizonte diſtantia minor eſt quàm $35^\circ.\ 16'$. Omnino autem aqua maximè erit depreſſa dum Luna ipſum horizontem occupat, hocque tempore infra ſitum naturalem ſubſidet intervallo $\frac{L}{2b^3}=1,111$ pedum (§. 41.); atque de hoc ſitu elevabitur recedente Lunâ ab horizonte ſive ſuper ſive ſub Terra. Hinc iis in regionibus, in quibus Luna oritur & occidit, tempore 24. hor. 48′ Mare bis maximè erit depreſſa, biſque elevata; ſtatus ſcilicet depreſſionis incidet in appulſus Lunæ ad horizontem, ſtatus autem elevationis in appulſus Lunæ ad meridianum. At quibus in regionibus Luna nec oritur nec occidit, quoniam ibi Luna altero appulſu ad meridianum maximè, altero minimè ab horizonte diſtat, ſpatio 24 h. 48′ aqua ſemel tantum elevabitur, ſemelque deprimetur: ſub ipſis autem polis æſtus Maris omnino erit nullus, diurnus ſcilicet; nam variatio declinationis ſola ſtatum Maris turbabit.



§. 50. Cùm igitur ſub polis Terræ nullus ſit Fluxus ac Refluxus Maris, ſed aqua tantum aliquantulum aſcendat deſcendatque, prout Luna vel magis ab æquatore recedit vel ad eum accedit; videamus etiam quomodo æſtus Maris in aliis Terræ regionibus ſecundùm noſtram hypotheſin debeat eſſe comparatus. Conſiderabimus autem præcipuè tres regiones, quarum prima poſita ſit ſub ipſo æquatore, ſecunda habeat elevationem poli 30 graduum, tertia verò 60 graduum. Quia igitur in his omnibus regionibus Luna oritur atque occidit; maxima depreſſio aquæ ubique erit eadem, ſcilicet per intervallum $\frac{L}{2b^3}$ infra ſitum naturalem, eaque continget bis, quando nimirum Luna in ipſo horizonte verſatur. Ab hoc itaque ſtatu maximæ depreſſionis elevationes Maris indicabimus & computabimus, ſpatiis aſſignandis, per quæ aqua attolletur dum Luna vel ſupra horizontem in M vel infra in K ad meridianum appellit, itemque dum ab utroque meridiano æqualiter diſtat, qui locus ſit L exiſtente angulo MPL recto. Præterea tres quoque Lunæ ſitus in ſuâ orbitâ contemplabimur, quorum primus ſit, cùm Luna in ipſo æquatore verſatur, ſecundus cùm Luna habet declinationem borealem 20 graduum, tertius verò cùm Luna declinationem habet auſtralem pariter 20 graduum. Denique in tabellâ ſequente adſcripſimus quantitatem anguli MPQ, ex quo tempus tam ortûs quàm occaſûs Lunæ, quo aqua maximè eſt depreſſa, atque elevatio exiſtit nulla, innoteſcit.

In

In locis ſub Æquatore ſitis, eſt elevatio Maris, dum Luna verſatur in

	M	*L*	*K*	*ang. MPQ.*
☽ *Declinatio* 0°	$\frac{3L}{2b^3}+\frac{2L}{2b^4}$	0	$\frac{3L}{2b^3}-\frac{2L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{2,649\,L}{2b^3}+\frac{1,549\,L}{2b^4}$	0	$\frac{2,649\,L}{2b^3}-\frac{1,549\,L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. auſtr.* 20°	$\frac{2,649\,L}{2b^3}+\frac{1,549\,L}{2b^4}$	0	$\frac{2,649\,L}{2b^3}-\frac{1,549\,L}{2b^4}$	90°, 0′

Sub elevatione Poli 30°, erit Maris elevatio

☽ *Declinatio* 0°	$\frac{2,250\,L}{2b^3}+\frac{1,082\,L}{2b^4}$	0	$\frac{2,250\,L}{2b^3}-\frac{1,082\,L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{2,909\,L}{2b^3}+\frac{1,880\,L}{2b^4}$	$\frac{0,087\,L}{2b^3}-\frac{0,156\,L}{2b^4}$	$\frac{1,239\,L}{2b^3}-\frac{0,154\,L}{2b^4}$	102°, 8′
☽ *Decl. auſtr.* 20°	$\frac{1,239\,L}{2b^3}+\frac{0,154\,L}{2b^4}$	$\frac{0,087\,L}{2b^3}+\frac{0,156\,L}{2b^4}$	$\frac{2,909\,L}{2b^3}-\frac{1,880\,L}{2b^4}$	77°, 52′

Sub elevatione Poli 60°, erit Maris elevatio

☽ *Declinatio* 0°	$\frac{0,740\,L}{2b^3}-\frac{0,125\,L}{2b^4}$	0	$\frac{0,740\,L}{2b^3}+\frac{0,125\,L}{2b^4}$	90°, 0′
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{1,760\,L}{2b^3}+\frac{0,582\,L}{2b^4}$	$\frac{0,263\,L}{2b^3}-\frac{0,514\,L}{2b^4}$	$\frac{0,092\,L}{2b^3}+\frac{0,158\,L}{2b^4}$	129°, 5′
☽ *Decl. auſtr.* 20°	$\frac{0,092\,L}{2b^3}-\frac{0,158\,L}{2b^4}$	$\frac{0,263\,L}{2b^3}+\frac{0,514\,L}{2b^4}$	$\frac{1,760\,L}{2b^3}-\frac{0,582\,L}{2b^4}$	50°, 55′

§. 51. Si quis jam ex hâc tabulâ elevationem Maris ſupra ſtatum maximæ depreſſionis in menſuris cognitis definire voluerit, is loco fractionum $\frac{L}{b^3}$ & $\frac{L}{b^4}$ earum valores in pedibus Pariſinis ex §. 41. ſubſtituat, habitâ ratione diſtantiæ Lunæ à Terrâ, prout ibidem eſt expoſitum. Conſequuntur autem ex hac tabulâ multa egregia conſectaria, quæ verò nondum ſummo cum rigore ad experientiam examinari poſſunt, etiamſi jam inſignis convenientia deprehendatur. Aquam enim adhuc omnis inertiæ expertem ponimus, perſpicuum autem eſt, ſi aquæ inertia tribuatur, tum diverſa omnino Phænomena oriri oportere. Quòd ſi igitur hi aſſignati effectus jam cum obſervationibus planè conſentirent, id potiùs theoriam everteret quàm confirmaret, cùm aquam extra ſtatum ſuum naturalem

turalem ſimus contemplati. Interim tamen ſatis tutò jam ſtatus Maris ſub ipſis polis poterit definiri, qui etſi ad experientiam examinari non poteſt, tamen ipsâ ratione confirmabitur. Ac primò quidem ſub polis nulla erit Maris mutatio diurna, cùm Luna per totum diem eandem teneat ab horizonte diſtantiam, id quod ipſa quoque ratio dictat, quia ibi non datur meridianus, à cujus appulſu æſtus Maris alibi æſtimari ſolet. Dabitur tamen his locis mutatio menſtrua, atque aqua maximè erit humilis cùm Luna in ipſo æquatore verſatur, quo quippe tempore perpetuò horizontem occupabit. Hinc porrò aqua ſenſim elevabitur prout Lunæ declinatio ſive versùs boream ſive versùs auſtrum augetur, donec tandem ſi declinatio ſit maxima, per ſpatium 10 pollicum tantum elevetur; quæ mutatio cùm ſit perquàm lenta, ab inertia aquæ vix turbabitur.

§. 52. Ex his verò iiſdem formulis effectus à Sole oriundus non difficulter colligetur; tantum enim quantitates S & a, loco L & ſubſtitui oportet, quo facto effectus Solis circiter quater minor reperietur quàm is qui à Lunâ oritur. Seorſim autem cùm Solis tùm Lunæ effectibus definitis, per conjunctionem ſimplicem effectus, quem ambo luminaria conjunctim producunt, determinabitur. Ponamus itaque primùm Solem Lunamque in conjunctione verſari, id quod fit tempore novilunii; tum igitur neglectâ Lunæ latitudine, Sol & Luna in eodem eclipticæ loco verſabuntur, atque ſimul ad meridianum æquè ac ad horizontem appellent. Quocirca manentibus ſuperioribus denominationibus, erit quoque Solis declinationis ſinus $= Q$, coſinus $= q$, ac pro angulo MPL cujus coſinus eſt $= t$, erit ſinus altitudinis Solis pariter uti Lunæ $= tpq + PQ$. Ex quo dum ambo luminaria per meridianum versùs auſtrum tranſeunt, aquæ elevatio, quæ tum erit maxima, altitudinem naturalem ſuperabit intervallo $= \left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right)\left(3(pq+PQ)^2-1\right)+\frac{L(pq+PQ)}{2b^4}\left(5(pq+PQ)^2-3\right)$, neglecto altero termino à vi Solis oriundo, cùm ſenſus omnino effugiat. At dum ambo luminaria infra horizontem ad meridianum pertingunt, erit elevatio aquæ $= \left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right)\left(3(PQ-pq)^2-1\right)+\frac{L(PQ-pq)}{2b^4}\left(5(PQ-pq)^2-3\right)$. Maxima denique aquæ depreſſio incidet, quando luminaria vel oriuntur vel occidunt, eaque minor erit quàm altitudo aquæ naturalis intervallo $= \frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}$. Cùm igitur $\frac{S}{2a^3}$ ſit circiter ſubquadruplum ipſius $\frac{L}{2b^3}$, in novilunio omnes effectus Lunæ ſuprà recenſiti, quartâ ſui parte augebuntur.

§. 53. In plenilunio omnia eodem ſe habere modo deprehenduntur, quo in novilunio, quia enim tum Sol & Luna in oppoſitione verſantur, erit declinatio Solis æqualis & contraria declinationi Lunæ, unde quidem pro Sole fit $-Q$, quod in novilunio erat $+Q$; at cùm Sol ſecun-

dùm

dùm aſcenſionem rectam à Lunâ diſtet 180°, erit hoc caſu $-r$, quod antè erat $+r$, ex quo pro plenilunio habetur ſinus altitudinis Solis $= -rpq - PQ$, qui pro novilunio erat $= rpq + PQ$, ex quo quadratum hujus ſinûs utroque caſu eſt idem, ideoque etiam eadem Phænomena in novilunio atque plenilunio. Deinde etiam hoc tempore aqua maximè deprimetur, cùm luminaria ambo in horizonte verſantur, tumque aqua humilior erit quàm in ſtatu naturali intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Ex hoc itaque ſitu donec Luna ad meridianum ſupra Terram appellit, aqua elevabitur per intervallum $= 3(PQ+pq)^2 \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, tantoque iterum ſubſidet uſque ad Lunæ obitum; tum verò rurſus elevabitur uſque ad appulſum Lunæ ad meridianum infra horizontem, idque per ſpatium $3(PQ-pq)^2 \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, neglecto termino ſequente quippe ferè inſenſibili. Cùm igitur ſint $PQ+pq$ & $PQ-pq$ ſinus diſtantiæ Lunæ ab horizonte dum in meridiano verſatur, erunt ſpatia per quæ aqua tempore pleniluniorum ac noviluniorum ſupra ſtatum maximè depreſſum elevatur, in ratione duplicatâ ſinuum diſtantiarum Lunæ ab horizonte, dum per meridianum tranſit. Niſi ergo vel Luna in ipſo æquatore exiſtat, vel Terræ locus ſub æquatore ſit ſitus, Fluxus Maris diurni ac nocturni erunt inæquales; luminaribus autem in æquatore extantibus, utraque aquæ elevatio fiet per ſpatium $= 3pp\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$.

§. 54. Ut nunc in effectus, quos Sol & Luna in quadraturis ſiti conjunctim producunt, inquiramus; ponamus, ne calculus nimium fiat prolixus, Solem in ipſo æquatore verſari, quoniam tum plerumque minimus æſtus obſervatur. Hoc itaque caſu Solis declinatio erit nulla, Lunæ verò maxima, quam neglectâ latitudine aſſumamus 23° 29′, cujus ſinus ſit $= Q$, coſinus $= q$, poſitâ hac declinatione boreali. Jam ponamus Lunam in meridiano in M verſari, quo tempore Sol erit in horizonte; unde cùm aqua ſupra ſtatum naturalem elevetur à Lunâ intervallo $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}$, à Sole verò deprimatur intervallo $\frac{S}{2a^3}$, ab utrâque vi conjunctim elevabitur per ſpatium $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^2}$: at dum Luna ſub horizonte ad meridianum appellit, aqua elevabitur per ſpatium $\frac{L(3(PQ-pq)^2-1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$. Sumatur inter has ambas elevationes inæquales more ſolito medium, eritque elevatio aquæ mediâ hac quadraturâ eveniens $= \frac{L(3p^2q^2+3P^2Q^2-1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$. Refluxus verò continget, cùm Luna horizontem attinget, quo tempore Sol in meridiano proximè verſabitur, ex quo depreſſio totalis aquæ in Refluxu infra ſtatum naturalem proximè erit $= \frac{L}{2b^3} - \frac{S(3pp-1)}{2a^3}$: quare à Fluxu uſque ad ſubſequentem Refluxum aqua ſubſidet per intervallum $= \frac{3L(p^2q^2+P^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$.

§. 55. Quamvis motus Maris hoc modo aſſignatus ab inertiâ aquæ multum immutetur, tamen quia eandem ferè mutationem tam majoribus æſtibus quàm minoribus infert, ſatis tutò aſſumere poſſe videmur ſpatia, per quæ aqua circa æquinoctia cùm tempore plenilunii ſive novilunii, tùm etiam tempore quadraturarum actu aſcendit, expreſſionibus inventis eſſe proportionalia. Quamobrem ſi in dato Terræ loco ex pluribus obſervationibus determinetur ſpatium medium, per quod Mare à Refluxu ad Fluxum aſcendit, tempore æquinoctiorum, tam in pleniluniis noviluniiſve quàm in quadraturis, eorum ratio ad eam quæ ex formulis conſequitur, proximè accedere debebit. Atque hinc ex definitâ hac ratione per obſervationes ratio poterit inveniri inter vires Solis & Lunæ abſolutas S & L, quæ eſt ipſa via quâ Newtonus eſt uſus ad vim Lunæ abſolutam definiendam, cùm vis Solis ſit cognita: quod negotium, cùm à Newtono non ſatis accuratè ſit pertractatum, nos id ex iſtis principiis expediemus. Exprimat igitur $m:n$ rationem intervallorum eorum, per quæ Oceanus in dato Terræ loco, cum in ſyzygiis luminarium quàm quadraturis tempore æquinoctiorum, aſcendendo deſcendendoque oſcillatur; eritque $m:n = 3pp\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right) : \frac{3L(p^2q^2+P^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$; ex quâ elicitur iſta proportio $m\left(q^2 + \frac{P^2Q^2}{p^2}\right) - n : m+n = \frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3}$; ex quâ cùm data ſit vis à Sole orta $\frac{S}{a^3}$, deducitur vis à Lunâ oriundâ $\frac{L}{b^3}$ ſaltem proximè. Inſtituamus calculum pro obſervationibus in Portu Gratiæ (*Havre de Graces*) factis, ex quibus diligenter inter ſe collatis pro ratione $m:n$ prodit iſta 17 : 11. Cùm igitur hujus loci elevatio poli ſit circiter 50°, erit $P = $ ſin. 50°, & $Q = $ ſin. 23°, 29′; hincque $qq + \frac{P^2Q^2}{pp} = 1,0668$: ex quo prodibit $\frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3} = 7,1356 : 28$; ita ut vis Lunæ $\frac{L}{b^3}$ ſit ferè quadrupla vis Solis $\frac{S}{a^3}$, ut jam Newtonus ex aliis obſervationibus concluſit: atque hanc ob rem ipſius determinationem vis Lunæ abſolutæ L retinuimus.

§. 56. Si hæc, quæ de combinatione virium Lunam Solemque reſpicientibus ſunt allata, attentiùs conſiderentur, mox patebit maximos æſtus menſtruos in novilunia ac plenilunia incidere debere; his enim temporibus tam elevatio aquæ quàm depreſſio à Luna oriunda à vi Solis maximè adjuvatur, cùm eodem tempore, quo Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, ſimul quoque Solis vis aquam maximè vel elevet vel deprimat. In quadraturis autem hæ duæ vires ferè perpetuò diſſentiunt,

sentiunt, ac dum Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, eodem tempore Sol contrarium exerit effectum, aquamque maximè vel deprimit vel elevat, ex quo minimum discrimen inter quemque Fluxum ac subsequentem Refluxum observabitur, æstusque erunt minimi. Quamobrem circa alias Lunæ phases æstus Maris medium teneat inter maximum minimumque necesse est, quia tum vires Solis ac Lunæ nec omninò conspirant, nec sibi invicem adversantur. Per totum autem annum quibus noviluniis pleniluniisque maximus eveniat æstus, quibusque quadraturis minimus æstus respondeat, absolutè sine respectu ad situm loci habito definiri nequit. Sub æquatore quidem ubi Luna, cùm est in æquatore, maximâ vi gaudet, dubium est nullum, quin æstus maximi in æquinoctia incidat, quando ambo luminaria in æquatore sunt posita, quæ eadem proprietas etiam in loca ab æquatore non multum dissita competit: at in locis ab æquatore magis remotis æstus Maris, cùm Luna maximam habet declinationem, dantur quidem majores ex Tabula §. 50, verùm æstus mox subsequentes multo sunt minores. Quòd si autem inter binos æstus à Lunâ oriundos consequentes medium capiatur, patebit in regionibus 30°. ab æquatore remotis, quibus æstus est $\frac{2,250}{2b^3}L$ si Lunæ declinatio sit nulla, æstum Maris medium, cùm Luna habet declinationem 20 graduum, fore $= \frac{2,074}{2b^3}L$, ideoque adhuc minorem quàm cùm Luna æquatorem tenet. Contrà verò sub elevatione poli 60 graduum, est æstus Maris, Lunâ versante in æquatore, $= \frac{0,740}{2b^3}L$, æstus autem medius, cùm Lunæ declinatio est 20°, est $= \frac{0,926}{2b^3}L$, ideoque major. Ex quo consequitur in regionibus polis vicinioribus æstus maximos, non in æquinoctia, sed potius circa solstitia, incidere debere, quâ quidem in re theoria nostra per experientiam mirificè confirmatur.

CAPUT QUINTUM.

De tempore Fluxûs ac Refluxûs Maris in eâdem hypothesi.

§. 57. QUANQUAM in præcedenti capite, quo in quantitatem æstûs Maris præcipuè inquisivimus, etiam tempora, quibus tam Fluxus quàm Refluxus eveniat, jam indicavimus; tamen in hoc capite istud argumentum fusiùs atque ad observationes accommodatè persequemur. Observationes enim, quæ circa æstum Maris instituì solent, ad tria genera commodissimè referuntur; ad quorum primum pertinet Maris cùm elevatio maxima tùm maxima depressio, atque indicatur quantum quovis æstu aqua cùm ascendat tùm descendat. Ad secundum observationum genus numerari convenit eas, quæ ad tempus respiciunt, quibusque definitur, quonam temporis momento ubivis terrarum aqua cùm summam teneat altitudinem tùm minimam. Tertium denique genus observationum ad ipsum motum Maris reciprocum spectat, iisque determinatur quantâ celeritate quovis temporis momento alterna Maris elevatio ac depressio absolvatur, sive momentanea mutatio, dum Mare à Fluxu ad Refluxum transit & vicissim, investigatur. Quibus tribus rebus cùm observationes convenientissimè instituantur, iisdem theoria atque explicatio phænomenorum commodissimè tractabitur. Ac primæ quidem & tertiæ parti pro nostrâ hypothesi in præcedentibus capitibus abundè satisfactum videtur.

§. 58. Quoniam autem à Maris inertiâ aliisque circumstantiis Maris motum turbantibus omnes cogitationes adhuc abstrahimus, manifestum est ubique terrarum, si sola Lunæ vis Mare agitaret, aquam maximè elevari debere cùm Luna ab horizonte longissimè fuerit remota, hoc est iis ipsis momentis quibus Luna per meridianum dati loci tam supra quàm infra Terram transit: sunt enim elevationes aquæ in duplicatâ ratione sinuum distantiarum Lunæ ab horizonte, ex quo simul successiva Maris commotio cognoscitur. Excipiuntur autem hinc, ut jam notavimus, loca polis Terræ proxima, quibus Luna vel non oritur vel non occidit; ibi enim altero Lunæ ad meridianum appulsu aqua debet esse summa, altero ima. Verùm de his locis non admodum erimus solliciti; cùm tam observationes sufficientes, quibus theoria probetur, deficiant, quàm ipse Maris motus indicatus rationi sit consentaneus, neque confirmatione indigeat. In Terræ locis ergo à polis satis remotis seu extra circulos polares sitis, quibus Luna intervallo 24 h. 48′ tam oritur quàm obit, elevabitur Mare eodem temporis intervallo bis, totiesque deprimetur; atque utraque maxima Maris altitudo continget, cùm Luna ad meridianum illius loci pervenit, minima verò cùm Luna horizontem attingit. Hinc igitur temporis intervallum inter binos aquæ Fluxus seu summas elevationes interjectum constanter erit 12 h. 24′, ab anomaliis Lunæ mentem abstrahendo; at tempus summæ depressionis, cùm respondeat appulsui Lunæ ad horizontem, inter binas elevationes æqualiter non interjacebit, sed alteri elevationi eò erit propiùs, quò major fuerit cùm loci propositi elevatio poli tum Lunæ declinatio, hoc est quò majus fuerit discrimen inter ortum obitumve Lunæ & circulum horarium sextum.

§. 59. Sed conjungamus cum Lunâ vim Solis, ut nostræ conclusiones magis ad observationes perducantur. Ac primò quidem manifestum est tempore tam novilunii quàm plenilunii aquam maximè fore elevatam, quando Luna per meridianum loci transit, quippe quo momento etiam Sol

Sol ad eundem meridianum appellit, si quidem syzygia ipso meridie vel mediâ nocte celebratur. Quamobrem si novilunium pleniluniumve in ipsum meridiem incidat; ipso quoque meridiei momento maxima habebitur aquæ elevatio; pariterque si id eveniat mediâ nocte, eodem ipso momento aqua maximam obtinebit elevationem. Verùm si conjunctio vel oppositio luminarium meridiem vel præcedat vel sequatur, tum Fluxus non in ipsum meridiem incidet, sed vel tardiùs vel citiùs veniet, quia Luna his casibus tanquam primaria æstûs causa vel post vel ante meridiem ad meridianum pertingit. Atque hinc eo die, in quem sive plenilunium sive novilunium incidit, facilè poterit definiri acceleratio vel retardatio Fluxûs respectu meridiei. Ponamus enim novilunium seu plenilunium celebrari n horis ante meridiem, unde cùm motus Lunæ medius à Sole diurnus sit 12°. circiter, ipso meridie Luna à meridiano jam distabit angulo horario $\frac{n}{2}$ grad. versùs ortum, ex quo Luna post meridiem demum per meridianum transibit, elapsis $\frac{n}{30}$ horis seu $2n$ minutis primis. Sin autem novilunium pleniluniumve accidat n horis post meridiem, tum Maris maxima elevatio $2n$ minutis ante meridiem eveniet. Hæc autem momenta accuratissimè cognoscentur, si ad singulos dies transitus Lunæ per meridianum computentur; ac præterea tam ortus quàm occasus notetur, quippe quibus momentis maxima aquæ depressio respondet; majorem autem hujusmodi tabula afferet utilitatem, si insuper quovis die distantia Lunæ à Terrâ inducetur, quippe à quâ Lunæ effectus præcipuè pendet.

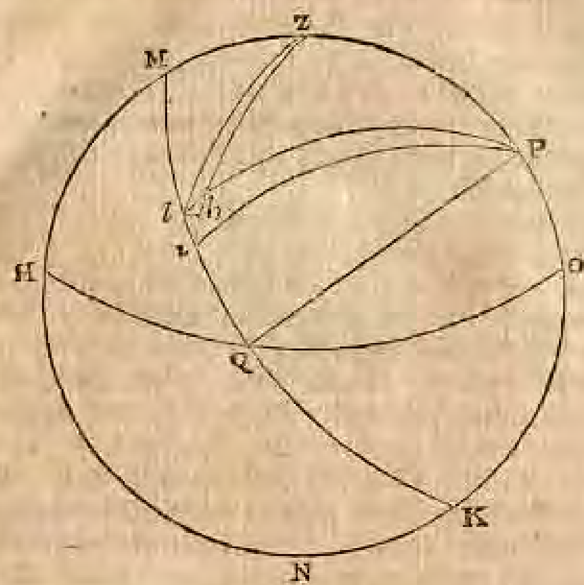
§. 60. Congruunt hæc jam apprimè cum observationibus, quibus constat, diebus novilunii vel plenilunii æstum Maris accelerari si novilunium pleniluniumve post meridiem accidat, contrà verò retardari. Quamvis enim ob aquæ inertiam maxima Maris elevatio non respondeat appulsui Lunæ ad meridianum, sed tardiùs eveniat, uti post docebitur, tamen similibus casibus æqualiter retardabitur; pro termino igitur fixo, si ad observationes respiciatur, non sumi debet momentum meridiei, sed id momentum, quo si Lunæ cum Sole conjunctio vel oppositio in ipsum meridiem incidit, summa aquæ elevatio observatur. Hoc igitur momento notato, uti ab iis qui hujusmodi observationes instituunt fieri solet, si plenilunium noviluniumve vel ante vel post meridiem incidat, summa Maris elevatio vel tardiùs vel citiùs continget: & quidem syzygia vera n horis vel ante meridiem eveniat vel post, tum Fluxus $2n$ minutis vel tardiùs vel citiùs observari debebit. Atque hæc est ea ipsa regula quam Celeb. Cassini in Mem. Academiæ Regiæ pro An. 1710, ex quamplurimis observationibus inter se comparatis derivavit; jubet scilicet numerum horarum, quibus conjunctio sive oppositio luminarium verum meridiem

diem

diem vel præcedit vel sequitur, duplicari, totidemque minuta prima ad tempus medium notatum, quo Fluxus evenire solet, vel addi vel ab eo subtrahi, quo verum Fluxus momentum obtineatur. Quoniam autem hæc correctio nititur motu Lunæ medio, perspicuum est eam correctione ulteriori opus habere à vero Lunæ motu petitâ, quæ verò plerumque erit insensibilis, cùm summa aquæ elevatio non subitò adsit, sed per tempus satis notabile duret.

§. 61. Nisi autem luminaria proxima sint vel conjunctioni vel oppositioni, maxima Maris elevatio non in ipsum Lunæ transitum per meridianum incidet. Quoniam enim Luna dum prope meridianum versatur, per aliquod tempus eandem altitudinem conservat, tantisper etiam Mare eandem elevationem retinebit; & hanc ob rem si Sol interea sensibiliter vel ab horizonte recedat, vel ad eundem accedat, vis Solis ad Mare elevandum vel crescet sensibiliter, vel decrescet; ex quo dum Luna prope meridianum existit, fieri potest, ut tamen mare etiamnum elevetur, vel adeò jam deprimatur à Sole. Ex his igitur perspicuum est summam Maris altitudinem tardiùs seu post transitum Lunæ per meridianum accidere debere, si eo tempore Sol ab horizonte accedat, id quod evenit diebus novilunium & plenilunium præcedentibus. Contrà autem si Luna post Solem per meridianum transeat, idque vel ante Solis ortum vel ante occasum; tum, quia Mare in transitu Lunæ per meridianum à vi Solis deprimitur, maximam habuit altitudinem ante appulsum Lunæ ad meridianum, id quod contingit diebus novilunium pleniluniumve sequentibus. Quando autem Sol ipsum horizontem occupat, dum Luna in meridiano versatur, tum etiamsi distantia Solis ab horizonte perquam sit mutabilis, tamen cùm elevationis vis quadrato sinûs altitudinis Solis sit proportionalis, quod omnino evanescit, etiam hoc casu maxima aquæ elevatio in ipsum Lunæ per meridianum transitum incidet, hicque casus circa quadraturas luminarium locum habet.

§. 62. Ut



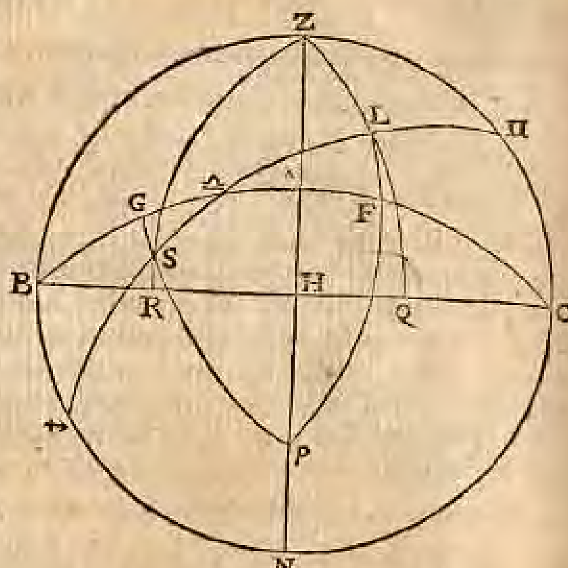
§. 62. Ut igitur innoteſcat, quantum vires cùm Solis tùm Lunæ ad Mare elevandum dato tempore vel creſcant vel decreſcant, dum ab horizonte aliquantillum vel recedunt, vel ad eundem accedunt, ponamus Solem Lunamve in L verſari, atque inde ad punctum meridiani M progredi. Tempuſculo ergo per angulum $LPl = d\theta$ repræſentato progredietur Luna vel Sol ex L in l atque ab horizonte removebitur intervallo Lh: ad quod inveniendum ſit ut antè anguli MPL coſinus $= t$, & ſinus $= T$, eritque ipſe angulus $LPl = d\theta = \frac{\sqrt{(1-tt)}}{+dt} = \frac{dt}{T}$, ex quo orietur anguli MPl coſinus $= t + dt = t + Td\theta$. Si jam ponatur ſinus elevationis poli $= P$, ſinus declinationis borealis puncti $L = Q$, nam ſi declinatio ſit auſtralis, ſinus Q ſumi debet negativè, coſinus verò reſpondentes ſint p & q, reperietur ſinus altitudinis L ſupra horizontem $= v = tpq + PQ$: punctique l ſinus altitudinis $v + dv = tpq + PQ + Tpqd\theta$. Quocirca ſi Luna ponatur in L, cùm ejus vis ad Mare attollendum ſit $= \frac{L(3vv-1)}{2b^3}$, erit hujus vis incrementum tempuſculo $d\theta$ ortum $= \frac{3Lvdv}{b^3} = \frac{3L(tpq+PQ)Tpqd\theta}{b^3}$. At ſi Sol ponatur in L, ejus vis ad Mare elevandum tempuſculo $d\theta$ capiet incrementum $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$. Quamvis autem pro Sole & Lunâ eidem angulo $d\theta$ non æqualia tempora reſpondeant, tamen quia ea proximè ad rationem æqualitatis accedunt,

dunt, ſunt enim ut 24 ad $24\frac{1}{4}$ ſeu ut 32 ad 33, ſine ſenſibili errore pro æqualibus haberi poterunt. Interim tamen ſi res accuratè definiri debeat, & vis Solis incrementum angulo $d\theta$ acquiſitum ſit $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, erit vis Lunæ incrementum eodem tempuſculo acceptum $= \frac{32L(tpq+PQ)Tpqd\theta}{11b^3}$. Ex his intelligitur hæc incrementa tribus caſibus evaneſcere, quorum primus evenit ſub polis, quia ibi eſt $p = 0$; ſecundus, ſi punctum L in meridiano ſit ſitum, tum enim ſit $T = 0$; tertius denique locum habet, ſi punctum L in horizonte exiſtat, ubi eſt $tpq + PQ = 0$.

§. 63. Ponamus nunc Solem in L verſari ac Lunam per meridianum jam tranſiiſſe, hocque momento maximè aquam eſſe elevatam; jam enim oſtendimus dum Sol ab horizonte recedit, aquam ſummam incidere poſt tranſitum Lunæ per meridianum. Hoc ergo momento neceſſe eſt, ut decrementum vis Lunæ, quod tempuſculo $d\theta$ patitur, æquale ſit incremento vis Solis eodem tempore accepto. Sit igitur anguli horarii ad polum ſumti quo Luna jam à meridiano receſſit, coſinus $= n$, ſinus $= N$, atque ſit Lunæ declinationis borealis ſinus $= R$, coſinus $= r$, ex quibus orietur decrementum vis Lunæ tempuſculo $d\theta$ ortum $= \frac{3L(npr+PR)Nprd\theta}{b^3}$, quod cùm æquale eſſe debeat incremento vis Solis eodem tempuſculo nato $= \frac{3S(tpp+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, denotante Q ſinum declinationis borealis Solis, & q ejus coſinum, habebitur hæc æquatio $\frac{L(npr+PR)Nr}{b^3} = \frac{S(tpq+PQ)Tq}{a^3}$, neglectâ fractione $\frac{32}{33}$, per quam incrementum vis Lunæ multiplicari deberet. Quoniam autem Luna à meridiano non procul diſtabit, poni poterit $n = 1$, atque cùm ſit proximè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, obtinebitur iſte valor $N = \frac{Tq(tpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$; qui in tempus converſus dabit temporis ſpatium, quo aqua poſt tranſitum Lunæ per meridianum maximam altitudinem attingit. Sub æquatore ergo erit $N = \frac{Ttqq}{4rr}$, ob $P = 0$ & $p = 1$; quare ſi declinationes Luminarium vel negligantur vel æquales aſſumantur, ita ut ſit $qq = rr$, fiet $N = \frac{Tt}{4}$, cujus expreſſionis valor extat maximus ſi angulus MPL ſit 45°, quo caſu erit $N = \frac{1}{8}$, & angulus reſpondens $= 7°,11'$, qui indicat aquam ſummam 30 minutis poſt tranſitum Lunæ per meridianum contingere debere: totidemque minutis aqua ante tranſitum Lunæ per meridianum maximè erit elevata, ſi Sol tum verſùs occaſum verſetur angulo $MPL =$ ſemirecto. Quamobrem ſi Luna ad meridianum appellat horâ nonâ ſive matutinâ ſive pomeridianâ, Fluxus demum poſt ſemihoram eveniet; at ſi horâ tertiâ appellat Luna ad meridianum, aqua ſumma 30' antè obſervabitur

vabitur: in aliis verò Terræ regionibus ista aberratio magis est irregularis; interim tamen satis prope ex formulâ datâ per solam æstimationem potest definiri.

§. 64. Quòd si autem hanc rem curatiùs investigare velimus, amborum Luminarium declinationes non pro arbitrio fingere licet, pendent enim à se mutuò maximè ob angulum horarium MPL inter ea interjectum datum: ut igitur pro datâ Lunæ phasi aberrationem maximæ aquæ elevationis à transitu Lunæ per meridianum determinemus, repræsentet nobis circulus $ZBNC$ verticalem primarium, BC horizontem, ZN meridianum per dati loci Zenith Z & Nadir N ductum, atque Æquator sit BAC, polus australis p, & ecliptica ♊ ♎ ♐. Constitutus nunc sit Sol in S & Luna in L, quæ modò per meridianum transierit, quo tempore ponimus aquam maximè esse elevatam. Ponamus porrò longitudinis Solis ab æquinoctio verno computatæ sinum esse $=F$, cosinum $=f$; Lunæ verò longitudinis sinum esse $=G$, cosinum $=g$; sitque inclinationis eclipticæ B ♎ ♐ sinus $=M$, cosinus $=m$. Ex his definientur declinationes cùm Solis tùm Lunæ, quarum sinus antè erant positi Q & R; erit scilicet $Q=FM$, $R=GM$; hincque $q=\sqrt{(1-F^2M^2)}$ & $r=\sqrt{(1-G^2M^2)}$. Deinde angulus SpL æqualis est angulo cujus tangens est $\frac{mF}{f}$ demto angulo cujus tangens est $\frac{mG}{g}$; hujus verò ejusdem anguli ob angulos SpZ & LpZ datos, quorum sinus sunt positi T & N, tangens quoque est $\frac{nT+Nt}{nt-NT}$, quæ tangens propter sinum N valde parvum proximè est $=\frac{T}{t}+\frac{N}{tt}$. Ponatur autem K pro sinu anguli qui excessus est anguli habentis tangentem $=\frac{mF}{f}$ super angulum cujus tangens est $\frac{mG}{g}$, & k pro cosinu, reperietur $T=K-Nk$ & $t=k+NK$ scripto 1 pro n: quibus valoribus substitutis prodibit $N=$



$\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)rq^2+kPQq}$ ex æquatione $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$, paragr. præced.

§. 65. Ponamus nunc Lunam in quadraturis versari ac primò quidem in primo post novilunium quadrante, ita ut arcus LS futurus sit $90°$., erit $G=f$, & $g=-F$, unde $Q=MF$ & $R=Mf$, ex quibus prodibit $K=$ sin. (Atang. $\frac{mF}{f}$ – Atang. $\frac{-mf}{F}$) atque k ejusdem anguli cosinui æquabitur. Quare his tempestatibus aqua maximè elevata post transitum Lunæ per Meridianum, intervallo temporis quod in arcum æquatoris conversum dabit angulum cujus sinus erit $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)rq^2+kPQq}$. Pro posteriore verò quadraturâ post novilunium, erit $G=-f$ & $g=F$; unde erit $Q=MF$ & $R=-Mf$, ex quibus fit ut antè $K=$ sin. (Atang. $\frac{mF}{f}$ – Atang. $\frac{-mf}{F}$) & $k=$ cosinui respondenti. Ne autem hic signa $+$ & $-$ calculum confundant, notari convenit K esse sinum arcûs, qui restat, si ascensio recta Lunæ subtrahatur ab ascensione rectâ Solis; atque k esse ejusdem arcûs cosinum. Ponamus exempli causâ Solem in initio Arietis versari, erit longitudo Solis $=0°$, seu $360°$, & longitudo Lunæ $=$ vel $90°$ vel $270°$, unde fiet $F=0$, $f=1$, $G=\mp 1$, & $g=0$, atque $Q=0$. Præterea ascensio recta Solis est $360°$, & ascensio recta Lunæ vel $90°$ vel $270°$; utroque casu ergo fit $k=0$, unde etiam prodit $N=0$; quod idem evenit, si Sol versetur in initio Libræ. In utroque igitur æquinoctio, dum Luna in quadraturis versatur, aqua maximè erit elevata eo ipso momento, quo Luna ad meridianum appellit.

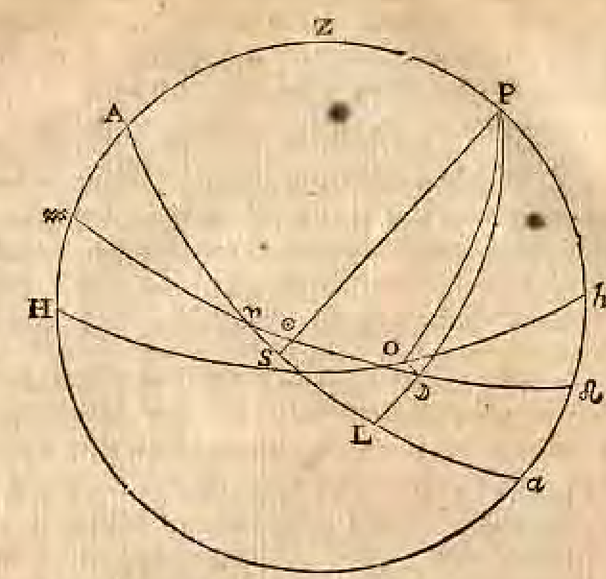
§. 66. Sit porrò Sol in solstitio æstivo, Luna verò in ultimo quadrante, erit longitudo Solis $90°$, Lunæ verò $=0°$, unde fit $F=1$, $f=0$; $G=0$, $g=1$, indeque $Q=M$ & $R=0$; itemque $q=m$ & $r=1$. Solis verò ascensio recta habebitur $90°$, Lunæ verò $=0°$, ex quo $K=1$ & $k=0$. Hinc ergo fit $N=\frac{mMP}{(4-m^2)p}$. Pro primâ autem quadraturâ est longitudo Lunæ $180°$, unde $G=0$, $g=-1$, at ut antè $F=1$, $f=0$; ergo $Q=M$, $R=0$, itemque $q=m$ & $r=1$. Cùm igitur Lunæ ascensio recta sit $180°$, erit $K=$ sin. $-90°=-1$, & $k=0$, ex quibus fit $N=\frac{-mMP}{(4-m^2)p}$. Quoniam autem est $4>m^2$, dum Sol in solstitio æstivo versatur maxima aquæ elevatio in ultimâ quadraturâ continget post Lunæ transitum per meridianum supra Terram, priore verò quadraturâ ante hunc transitum, hæcque æquatio eò erit major, quò major fuerit elevatio poli; sub æquatore enim omnino evanescit. Sit poli elevatio $45°$, fietque his regionibus $N=\pm\frac{Mm}{4-m^2}$; quare cùm sit M sinus $23°,29'$, prodibit $N=$

sinui

finui anguli $6^\circ, 33'$, qui in tempus converfus dat $26'$. In primâ igitur quadraturâ totidem minutis ante tranfitum Lunæ per meridianum aqua maximè erit elevata, in ultimâ verò quadraturâ tot minutis poft tranfitum. Contrarium evenit fi vel Luna fub Terra ad meridianum appellat, vel Sol in folftitio hyemali verfetur. Ex his igitur formulis, fi tabulæ adhibeantur, non erit difficile pro quovis loco Terræ ad quodvis tempus definire, quantum maxima aquæ elevatio tranfitum Lunæ per meridianum vel præcedere vel fequi debeat; cujufmodi fupputationes maximam etiam afferent utilitatem, quando etiam inertiæ aquæ ratio habebitur.

§. 67. Quoniam igitur fatis eft expofitum, quo momento Mare maximè fit elevatum, maximam quoque Maris depreffionem definire aggrediamur. Ac primò quidem manifeftum eft, fi fola Luna Mare agitaret, tum minimam aquæ altitudinem obfervatum iri, eo ipfo momento, quo Luna in horizonte verfetur: atque hinc perfpicuum eft, idem ufu venire debere, fi Sol eodem momento quoque in horizonte exiftat, id quod accidit cùm noviluniis tùm pleniluniis. Præterea verò etiam ima aqua refpondebit fitui Lunæ in horizonte, fi eo tempore Sol meridianum occupet, quia tum vis Solis per notabile temporis intervallum neque augetur nec diminuitur, etiamfi tum aqua non tantum deprimatur, quàm circa novilunia ac plenilunia. Ponamus igitur, quò reliquos cafus evolvamus, dum Luna horizontem occupat, Solem ab horizonte removeri; hoc ergo cafu aqua jam elevabitur, ex quo neceffe eft imam aquam ante adventum Lunæ ad horizontem extitiffe, contrà verò fi dum Luna in horizonte verfatur, Sol ad horizontem appropinquet, aqua tardiùs fcilicet poft appulfum Lunæ ad horizontem continget. Ponamus itaque Lunam ante ortum fub horizonte Hh in ☽ adhuc verfari, Solemque in ☉ effe pofitum, unde ad meridianum PZH progrediatur, hocque ipfo momento aquam maximè effe depreffam. Neceffe igitur eft, ut decrementum momentaneum vis Lunæ ad Mare movendum æquale fit incremento momentaneo vis Solis. Ad hanc æqualitatem declarandam fit anguli ☽PO ad polum fumti, diftantiam Lunæ à fuo ortu O indicantis, finus $= V$ & cofinus $= v$, qui ob angulum ☽PO valde parvum tutò finui toti 1 æqualis concipi poteft. Invento ergo angulo hoc ☽PO feu arcu æquatoris illi refpondente, eoque in tempus converfo, conftabit quanto temporis intervallo ima aqua appulfum Lunæ ad horizontem præcedat: idem verò calculus tam ad Lunæ occafum quàm ad acceffionem Solis ad horizontem facilè accommodabitur.

§. 68. Pofitis nunc $A\Upsilon a$ æquatore ac ♒Υ♌ ecliptica, fit elevationis poli Ph finus $= P$, cofinus $= p$; finus declinationis Lunæ borealis

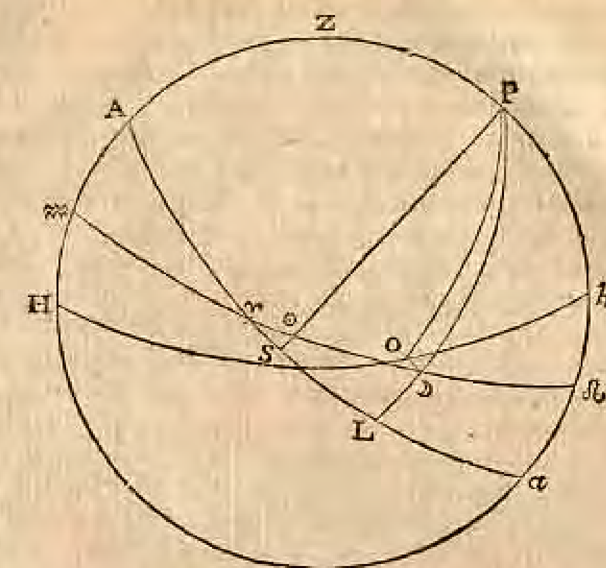


☽$L = R$, cofinus $= r$; ex quibus fiet anguli APO cofinus $= \frac{-PR}{pr}$, quia Lunæ, cùm in horizontem O pervenit, altitudo evanefcit. Cùm igitur anguli APO finus fit $= \frac{\sqrt{(p^2r^2 - P^2R^2)}}{pr} = \frac{\sqrt{(1 - P^2 - R^2)}}{pr} = \frac{\sqrt{(pp - RR)}}{pr}$, erit anguli AP☽ finus $= \frac{v\sqrt{(pp - RR)} - VPR}{pr}$, & cofinus $= \frac{-vPR - V\sqrt{(pp - RR)}}{pr}$, unde emergit decrementum momentaneum vis Lunæ $=$ $\frac{3LV\sqrt{(pp - RR)}\,(\sqrt{(pp - RR)} - VPR)\,d\theta}{b^3} = \frac{3LV(pp - RR)\,d\theta}{b^3}$, ob $v = 1$ & V valde exiguum. Sit porrò Solis declinationis borealis ☉S finus $= Q$ & cofinus $= q$, atque anguli AP☉ finus $= T$, cofinus $= t$, erit vis Solis incrementum momentaneum $= \frac{3S(tpq + PQ)\,Tpq\,d\theta}{a^3}$, quod illi vis Lunæ decremento æquale eft ponendum, fiquidem Maris altitudo hoc tempore eft minima. Quare cùm fit ferè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, ifta habebitur æquatio $4V(pp - RR) = Tpq(tpq + PQ)$, quæ præbet $V = \frac{Tpq(tpq + PQ)}{4(pp - RR)}$: cùm igitur hoc pacto innotefcat angulus OP☽, is in tempus converfus dabit temporis fpatium, quo fumma Maris depreffio ante ortum Lunæ contingit. At fi punctum O defignet Lunæ occafum, idem angulus præbebit tempus poft Lunæ occafum, quo Mare maximè deprimetur. Intelligitur ex for-

formulâ inventâ quibus casibus ima aqua in ipsum appulsum Lunæ ad horizontem incidat; hoc scilicet primò evenit, si $T=0$, hoc est si Sol in meridiano versetur, deinde si $tpq+PQ=0$, id est si Sol quoque horizontem occupet; quos binos casus jam notavimus.

§. 69. Sit locus noster Terræ sub æquatore situs, seu elevatio poli nulla, erit $P=0$, & $p=1$, unde efficitur $V=\frac{Ttqq}{4(1-kk)}=\frac{Ttqq}{4rr}$; in quâ formulâ cùm q & r denotent cosinus declinationum Solis ac Lunæ, non multum inter se discrepabunt; ponamus enim alteram declinationem esse maximam, alteram verò minimam seu $=0$, erit tamen cosinuum ratio minor quàm $1:\sqrt{\frac{5}{4}}$, ex quo fractio $\frac{qq}{rr}$ semper intra hos limites $\frac{4}{5}$ & $\frac{5}{4}$ continebitur. Quòd si ergo hanc ab æqualitate aberrationem negligamus, id quod tutò facere possumus, quia rem tantùm prope definire conamur, habebitur $V=\frac{Tt}{4}=\frac{2Tt}{8}$. Denotat autem $2Tt$ sinum dupli anguli horarii quo Sol à meridiano distat, & hanc ob rem ad momentum maximæ depressionis aquæ assignandum, videndum est quâ diei horâ Luna ad horizontem appellat, hujusque temporis vel à meridie vel mediâ nocte intervallum capiatur, atque in arcum æquatoris convertatur. Hujus deinde arcûs vel anguli sumatur duplum, hujusque dupli sinus, cujus pars octava præbebit sinum anguli, qui in tempus conversus dabit temporis intervallum, quo ima aqua Lunæ appulsum ad horizontem vel præcedit vel sequitur; id quod ex notatis circumstantiis discernere licet. Sic si Luna horâ 9 matutinâ adoriatur, erit tempus usque ad meridiem 3 horarum, angulusque respondens $45°$, cujus dupli sinus est ipse sinus totus, cujus pars octava fit sinus anguli $7°, 11'$, cui tempus respondet ferè 30 minutorum, tantum itaque ima aqua ortum Lunæ præcedet.

§. 70. Ut hæc ad datum Lunæ cum Sole aspectum accommodari queant, ponamus longitudinis Solis ♈ ☉ sinum esse $=F$, cosinum $=f$ longitudinis verò Lunæ ♈ ☽ sinum esse $=G$, cosinum $=g$; atque inclinationis eclipticæ ♌ ♈ α sinum $=M$, cosinum $=m$. His positis erit $Q=MF$, & $R=MG$; atque ascensionis rectæ Solis ♈ S tangens reperietur $=\frac{mF}{f}$, Lunæ verò ascensionis rectæ ♈ L tangens $=\frac{mG}{g}$. Subtrahatur ascensio recta Solis ab ascensione rectâ Lunæ, & differentiæ sinus fit $=K$, cosinus $=k$. Cùm igitur anguli ☉ P ☽ fit sinus $=K$ & cosinus $=k$, aguli verò AP ☽ sinus $=\frac{\sqrt{(pp-RR)}-vPR}{pr}$ ob $v=1$, & cosinus $=\frac{-PR-V\sqrt{(pp-RR)}}{pr}$, erit anguli AP ☉ sinus $=T=\frac{(k+KV)\sqrt{(pp-RR)}-kPRV+KPR}{pr}$ & cosinus $t=\frac{(K-kV)\sqrt{(pp-RR)}-KPRV-kPR}{tr}$; quibus



bus valoribus substitutis, simulque sinu V tanquam valde parvo considerato, reperietur sinus $V=\frac{(KPR+k\sqrt{(pp-RR)})\,q\,(Kq\sqrt{(pp-RR)}-kPRq+PQr)}{4rr(pp-RR)}$. Sub æquatore autem, quo fit $P=0$, $V=\frac{Kkqq}{4rr}$: ex quo pro æquatore regula superior à distantiâ Solis à meridiano petita simul ad differentiam ascensionalem Solis & Lunæ potest accommodari, ita ut maneat invariata. Sed ad præsens institutum, quo tantum veritatem causæ Fluxûs ac Refluxûs Maris exhibitæ declarare annitimur, non opus est hæc pluribus persequi, quippe quæ potissimum ad accuratissimas æstûs marini tabulas supputandas pertinent, quæ res in propositâ quæstione Illustrissimæ Academiæ non contineri videtur.

CAPUT SEXTUM.

De vero æstu Maris, quatenus à Terris non turbatur.

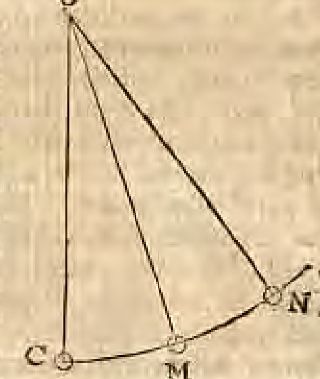
§. 71. QUÆ hactenus ex viribus Solis ac Lunæ circa æstum Maris fusiùs deduximus, eâ hypothesi nituntur assumtâ, quâ aquam inertiæ expertem posuimus: quamobrem non est mirandum si plerique effectus assignati cum Phænomenis minùs congruant, atque adeo

adeo pugnare videantur; quòd ſi enim inter ſe prorſus convenirent, theoria non ſolùm non eo conſenſu confirmaretur, ſed potiùs omnino ſubverteretur, cùm quilibet facilè agnoſcat ob aquæ inertiam determinationibus exhibitis ingentem mutationem inferri debere. Quæ autem ex deductis concluſionibus maximè ab experientiâ diſſentiunt, potiſſimum quantitatem elevationis aquæ ac temporis momentum, quo tam ſumma Maris elevatio quàm ima depreſſio contingere ſolet, reſpiciunt. Nuſquam enim ubi quidem Mare eſt liberum atque apertum, tam exiguum diſcrimen inter Fluxum ac Refluxum in aquæ altitudine obſervatur, quale in præcedentibus definivimus, quatuor ſcilicet pedum tantum; quæ elevatio inſuper tamen maxima eſt deprehenſa, ac tum ſolùm oriunda, quando tam regio prope æquatorem eſt ſita, quàm vires luminarium inter ſe maximè conſpirant. Experientiâ namque conſtat, plerîſque in locis, ſi æſtus contingat maximus, aquam non ſolùm ad altitudinem duplo majorem, ſed etiam quadruplam, imò nonnullis in locis adeo decuplam attolli; quanquam hæc enormis elevatio non ſoli inertiæ aquæ, ſed maximam partem vicino continenti ac littorum ſitui eſt tribuenda, uti in ſequenti capite clariſſimè monſtrabitur. Deinde etiam quod ad tempus attinet, nuſquam illis ipſis momentis, quæ aſſignavimus, Fluxus ac Refluxus unquam contingunt, nec etiam tempeſtatibus hìc definitis Fluxus maximi vel minimi, ſed ubique tardiùs evenire conſtanter obſervantur; cujus quidem retardationis cauſa in ipsâ aquæ inertiâ poſita eſſe primâ etiam fronte perſpicitur.

§. 72. Quantumvis autem agitatio Maris in præcedentibus capitibus determinata ab obſervationibus diſſentiat, tamen complures circumſtantiæ ſeſe jam præbuerunt experientiæ tantopere conſentaneæ, ut ampliùs dubitare omnino nequeamus, quin in viribus Solem Lunamque reſpicientibus, quas non temerè aſſumſimus, ſed aliunde exiſtere demonſtravimus, vera & genuina æſtûs Maris cauſa contineatur. Hanc ob rem jam meritò ſuſpicari licet, diſſenſiones quæ inter theoriam noſtram, quatenus eam aſſumtæ hypotheſi ſuperſtruximus, & experientiam intercedunt, ab aquæ inertiâ aliiſque circumſtantiis, quarum nullam adhuc rationem habuimus, proficiſci. Quocirca ſi omnia inertiæ ratione habitâ ad obſervationes propiùs accedant, id quidem noſtræ theoriæ maximum afferet firmamentum, atque ſimul omnes alias cauſas, quæ præter has, vel ſunt prolatæ vel proferri poſſunt, excludet, irritaſque reddet. Cùm igitur conſenſum hujus theoriæ cum Phænomenis, mox ſimus evidentiſſimè oſtenſuri, quæſtioni ab Inclytâ Academiâ propoſitæ ex aſſe ſatisfeciſſe jure nobis videbimur: cùm non ſolum nullas vires imaginarias effinxerimus, ſed etiam virium Lunam Solemque reſpicientium exiſtentiam aliunde dilucidè evicerimus. Neque verò in hoc negotio cum pleriſque Anglorum ad qualitates occultas ſumus delapſi, verùm potius cauſam iſtarum

rum virium modo rationali & legibus motûs conſentaneo in vorticibus conſtituimus, quorum formam atque indolem luculenter explicare poſſemus; idque feciſſemus, niſi ab aliis cùm jam ſatis eſſet expoſitum, tùm etiam ab Illuſtriſſimâ Academiâ in præſente quæſtione non requiri videatur.

§. 73. Dum igitur hactenus aquæ omnem inertiam cogitatione ademimus, ipſi ejuſmodi qualitatem affinximus, quâ viribus ſollicitantibus ſubitò obſequeretur, ſeque in inſtanti in eum ſtatum reciperet, in quo cum viribus in æquilibrio conſiſteret; hocque pacto aquam non ſolùm ſubitò omnis motûs capacem poſuimus, ſed etiam ita comparatam, ut quovis momento omnem priſtinum motum amittat. Longè aliter autem res ſe habet, ſi inertiæ ratio in computum ducatur; hæc enim efficit ut primò aqua non ſubitò ſe ad eum ſitum componat, quem vires intendunt, ſed pedetentim per omnes gradus medios ad eum accedat; deinde verò eadem inertia in cauſa eſt, quòd aqua, cùm in ſtatum æquilibrii pervenerit, ibi non acquieſcat, ſed ob motum inſitum ultrà progrediatur, quoad omnem motum à potentiis renitentibus amittat. Ex quo perſpicuum eſt, admiſsâ inertiâ aquæ, à potentiis ſollicitantibus motum omninò diverſum actu imprimi debere ab eo, quem reciperet, ſi inertiâ privata eſſet; cujus diſcriminis ratio exemplo corporis penduli commodè ob oculos poni poteſt. Ponamus enim corpus pendulum OC ob gravitatem ſitum tenens verticalem, à vi quâpiam in latus ſecundùm directionem CM ſollicitari. Si nunc hoc pendulum inertiâ careret, ſeu ejuſmodi eſſet indolis, cujus aquam hactenus ſumus contemplati, tum ſubitò ſitum OM acciperet, in quo hæc vis cum gravitate æquilibrium teneret. At cùm pendulum inertiâ præditum conſideratur, poſt aliquod demum tempus elapſum ad ſitum OM perveniet: ac deinde quia motu accelerato eò pertingit, ibi non quieſcet, ſed ultrà excurret, putà in N uſque, ita ut ſpatium CN ferè ſit duplo majus ſpatio CM, prouti calculus clarè indicat. Propter inertiam igitur pendulum primùm tardiùs vi ſollicitanti obtemperat; atque à ſitu æquilibrii recedit; deinde verò etiam magis recedit, majoremque excurſionem conficit, quàm ſi inertiâ careret; quæ ſunt eæ ipſæ duæ res, in quibus theoria antè expoſita ab experientiâ maximè diſſentire deprehenſa eſt.

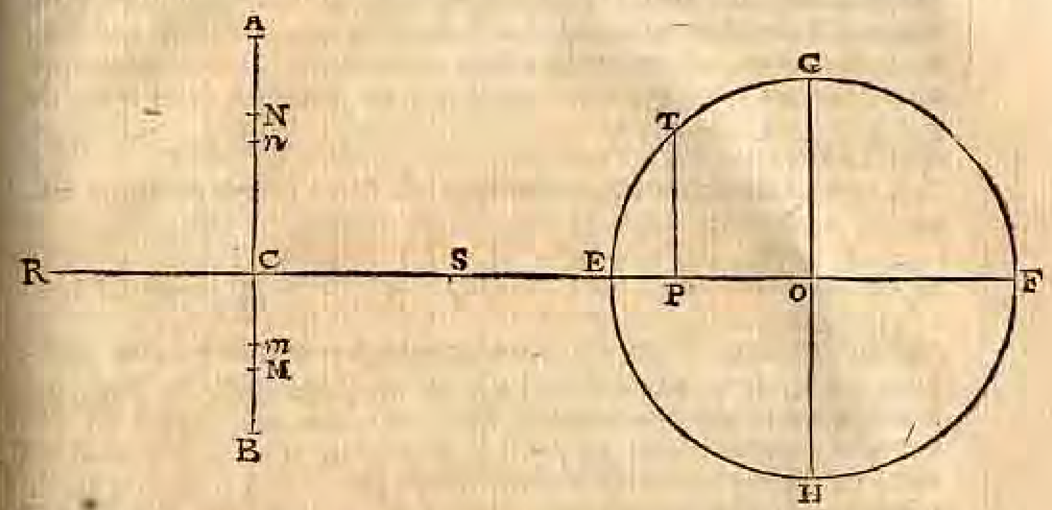


§. 74. Si nunc iſtud penduli exemplum ad noſtrum caſum æſtûs Maris transferamus, primò ingens ſimilitudo in ſitu penduli verticali ac ſta-

 tu

tu Maris naturali, quem obtinet remotis potentiis externis, obſervatur: Nam quemadmodum pendulum, ſi in quamcunque plagam de ſitu verticali declinetur, propriâ vi gravitatis ſe in eundem recipit, ita etiam aqua, ſi ex ſitu ſuo æquilibrii depellatur, vi gravitatis ſe ad eundem componit, ac præterea pariter ac pendulum oſcillationes peragit, cujuſmodi oſcillationum caſus in aqua obſervati paſſim inveniuntur expoſiti. Deinde etiam ſimili modo, quo pendulum, Mare quò magis ex ſitu ſuo naturali fuerit deturbatum, eò majorem habebit vim ſeſe in ſitum æquilibrii reſtituendi. Quòd ſi igitur Mare à viribus externis, Solis ſcilicet ac Lunæ, mox elevetur mox deprimatur, neceſſe eſt ut inde motus oſcillatorius ſeu reciprocus oriatur æſtui Maris omnino ſimilis, qui autem per leges motûs difficulter definiri queat accuratè quidem; nam vero proximè, hoc non adeo erit difficile. Duæ autem ſunt res, quæ abſolutam ac perfectam totius motûs determinationem ſummoperè reddunt difficilem, quarum altera phyſicam ſpectat, atque in ipsâ fluidorum naturâ conſiſtit, quorum motus difficulter ad calculum revocatur, præcipuè ſi quæſtio ſit de ampliſſimo Oceano, qui aliis in locis elevetur, aliis verò deprimatur. Altera autem difficultas in ipsâ analyſi eſt poſita, eò quòd iſte motus Maris reciprocus prorſus ſit diverſus ab omnibus oſcillationibus à Mathematicis adhuc conſideratis: vires enim Lunæ ac Solis Mare ſollicitantes neque à ſitu corporis oſcillantis, neque ab ejus celeritate pendent, uti id uſu venit in omnibus oſcillationum caſibus etiam nunc expoſitis, ſed eæ vires à ſitu luminarium reſpectu Terræ, ideoque à tempore determinantur, cujuſmodi oſcillationes nemo adhuc, quantum quidem conſtat, calculo ſubjecit.

§. 75. Quod quidem ad priorem difficultatem phyſicam attinet, res hoc quidem tempore ferè deſperata videtur; quamquam enim ab aliquo tempore theoria motûs aquarum ingentia ſit aſſecuta incrementa, tamen ea potiſſimum motum aquarum in vaſis & tubis fluentium reſpiciunt, neque vix ullum commodum inde ad motum Oceani definiendum derivari poteſt. Quamobrem in hoc negotio aliud quicquam præſtare non licet, niſi ut hypotheſibus effingendis, quæ à veritate quàm minimè abludant, tota quæſtio ad conſiderationes purè geometricas & analyticas revocetur: alteram autem difficultatem mathematicam, etiamſi difficillimis integrationibus ſit involuta, tamen feliciter ſuperare confidimus. Conſidero ſcilicet ſuperficiem aquæ RS, quæ hoc in ſitu æquilibrium teneat cum reliqua aqua, remotis viribus externis; his verò accedentibus alternis vicibus attollatur in A, deprimaturque in B. Quòd ſi igitur aqua in M uſque ſit depreſſa, atque externæ vires Solis ac Lunæ ſubitò ceſſarent, tum vi gravitatis propriæ conaretur ſeſe elevare uſque in ſitum RS naturalem, iſteque conatus eò erit major, quò majus fuerit ſpatium CM quo à ſitu naturali diſtat. A veritate itaque non multum recedemus,



mus, ſi hanc vim ipſi ſpatio MC ponamus proportionalem: quamobrem poſito ſpatio $MC = s$, erit vis, quæ aquæ ſuperficiem in M uſque depreſſam attollet $= \frac{s}{g}$, quæ hypotheſis ad veritatem eò propiùs accedit, quòd ſponte indicat, ſi aquæ ſuperficies ſupra C jam ſit elevata, tum vim fieri negativam, adeoque aquam deprimere. Præterea verò eadem hypotheſis confirmatur pluribus phænomenis aquæ niſum reſpicientibus, ita ut de ejus veritate ampliùs nullum dubium ſuperſit.

§. 76. Ponamus jam aquam in M conſtitutam urgeri à ſolâ Lunâ, atque ut calculus per ſe moleſtus minus habeat difficultatis, ſit locus C ſub ipſo æquatore ſitus, Lunæque declinatio nulla, ex quo Luna in circulo maximo per loci zenith tranſeunte æquatore ſcilicet circumferetur: ſit $EGFH$ iſte circulus, cujus radius ponatur $= 1$, atque EF repræſentet horizontem, & G zenith. Poſitis his, ſit Luna in T dum Maris ſuperficies verſatur in M, ita ut $PT = y$ exprimat ſinum altitudinis Lunæ ſuper horizonte; unde vis Lunæ Mare attollens erit $= \frac{L(3yy-1)}{2b^3} = \frac{3yy-1}{h}$, poſito brevitatis gratiâ h pro $\frac{2b^3}{L}$. Hanc ob rem ergo ſuperficies Maris in M duplici vi attolletur, ſcilicet vi $= \frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}$. Quòd ſi ergo ponamus aquam in M jam habere motum ſurſum directum, cujus celeritas tanta ſit quanta acquiritur lapſu gravis ex altitudine v, atque ſpatium $Mm = -ds$ tempuſculo infinitè parvo abſolvatur, habebitur per principia motûs $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{2yy-1}{h}\right)$. Ponamus porrò tempus ab ortu lunæ in E

jam

jam elapſum, quod arcui ET eſt proportionale, eſſe $= z$, quæ littera ipſum arcum ET ſimul denotet, erit $y = \text{ſin.}\, z$ ſcilicet ſinui arcûs z, hoc enim modo ſinus ac coſinus arcuum ſumus indicaturi: unde orietur $1 - 2yy = \text{coſ.}\, 2z$, atque $3yy - 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,\text{coſ.}\, 2z$, hincque $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h}\,\text{coſ.}\, 2z.\right)$.

§. 77. Cùm igitur elementum temporis ſit $= dz$, erit ex naturâ motûs $dz = -\frac{ds}{\sqrt{v}}$, atque $v = \frac{ds^2}{dz^2}$; unde ſumto elemento dz pro conſtante, fiet $dv = \frac{2\,ds\,dds}{dz^2} = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h}\,\text{coſ.}\, 2z\right)$, atque $2dds + \frac{s\,dz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3\,\text{coſ.}\, 2z)}{2h} = 0$, quæ æquatio duas tantum continet variabiles s & z, & propterea ſi debito modo integretur, indicabit ſitum ſeu ſtatum aquæ ad quodvis tempus. Quoniam autem hæc æquatio eſt differentialis ſecundi gradûs, atque inſuper arcus & ſinus arcuum continet, facilè intelligitur ejus integrationem minus eſſe obviam; interim tamen cùm alterius variabilis s plus unâ dimenſione nuſquam adſit, ea per methodos mihi familiares tractari poterit. Soleo autem, quoties ejuſmodi occurrunt, initio eos terminos in quibus altera variabilis s omnino non ineſt, rejicere; unde hæc conſideranda venit æquatio $2dds + \frac{s\,dz^2}{g} = 0$, quæ per ds multiplicata fit integrabilis, exiſtente integrali $ds^2 + \frac{ss\,dz^2}{2g} = c\,dz^2$ ob dz conſtans. Hinc porrò elicitur $dz = \frac{ds\sqrt{2g}}{\sqrt{(2cg - ss)}}$, atque $\frac{z}{\sqrt{2g}} =$ arcui cujus ſinus eſt $\frac{1}{\sqrt{2cg}}$, ex quo obtinetur $s = \sqrt{2cg}.\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}$. Cognito autem hoc valore, idonea naſcitur ſubſtitutio facienda pro æquatione propoſitâ $2dds + \frac{s\,dz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3\,\text{coſ.}\, 2z)}{2h} = 0$; fiat enim $s = u\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}$, erit $ds = du\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{u\,dz}{\sqrt{2g}}\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}$, atque $dds = ddu\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{2\,du\,dz}{\sqrt{2g}}\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{u\,dz^2}{2g}\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}$. Quibus valoribus ſubſtitutis emerget iſta æquatio $2ddu\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4\,du\,dz}{\sqrt{2g}}\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz^2(1 - 3\,\text{coſ.}\, 2z)}{2h} = 0$, in quâ hoc commodè accidit, ut ipſa variabilis u non inſit, ſed tantùm ejus differentialia.

§. 78. Quòd ſi ergo ponatur $du = p\,dz$, erit $ddu = dp\,dz$, & æquatio noſtra tranſibit in ſequentem differentialem primi gradûs tantum, $2dp\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4p\,dz}{\sqrt{2g}}\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz(1 - 3\,\text{coſ.}\, 2z)}{2h} = 0$: quæ integrabilis reddi invenitur, ſi multiplicetur per quantitatem quampiam ex z & conſtantibus compoſitam, eò quòd p plures unâ dimenſiones habet nuſquam. Ad integrationem autem abſolvendam notandum eſt hujus æquationis $dp + pZ\,dz = \Sigma\,dz$, in quâ Z & Σ functiones quaſcunque ipſius z denotent, integrale eſſe $e^{\int Z\,dz}p = \int e^{\int Z\,dz}\Sigma\,dz$. Reductâ autem noſtrâ æquatione ad hanc formam, habetur $dp + \frac{2p\,dz\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}.\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{dz(3\,\text{coſ.}\, 2z - 1)}{4h\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}}$, ideoque $Z\,dz = \frac{2\,dz\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}.\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{2\,\text{diff.}\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}}$; atque hinc $\int Z\,dz = 2\,\text{log. ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}$; & $e^{\int Z\,dz} = \left(\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2$. Ex his ſequitur integrale noſtræ æquationis $p\left(\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2 = \frac{1}{4h}\int dz\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}(3\,\text{coſ.}\, 2z - 1) = \frac{3}{4h}\int dz\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\,\text{coſ.}\, 2z - \frac{1}{4h}\int dz\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}$, ad quas integrationes perficiendas notetur eſſe $\int dz\,\text{ſin.}\,\alpha z = C - \frac{1}{\alpha}\,\text{coſ.}\,\alpha z$, atque $\int dz\,\text{ſin.}\,\alpha z.\,\text{coſ.}\,\varepsilon z = C - \frac{\varepsilon\,\text{ſin.}\,\alpha z.\,\text{ſin.}\,\varepsilon z - \alpha\,\text{coſ.}\,\alpha z.\,\text{coſ.}\,\varepsilon z}{\alpha^2 - \varepsilon^2}$: ex his itaque conficietur $p\left(\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2 = C + \frac{\sqrt{2g}}{4h}\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{\left(2\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}.\,\text{ſin.}\, 2z + \frac{1}{\sqrt{2g}}\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}.\,\text{coſ.}\, 2z\right).3}{\left(\frac{1}{2g} - 4\right)4h}$ atque $p = \frac{C}{\left(\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2} + \frac{\sqrt{2g}.\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left[\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} - \frac{\left(4g\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\,\text{ſin.}\, 2z + \sqrt{2g}.\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\,\text{coſ.}\, 2z\right).3}{4h(1 - 8g)\left[\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}$.

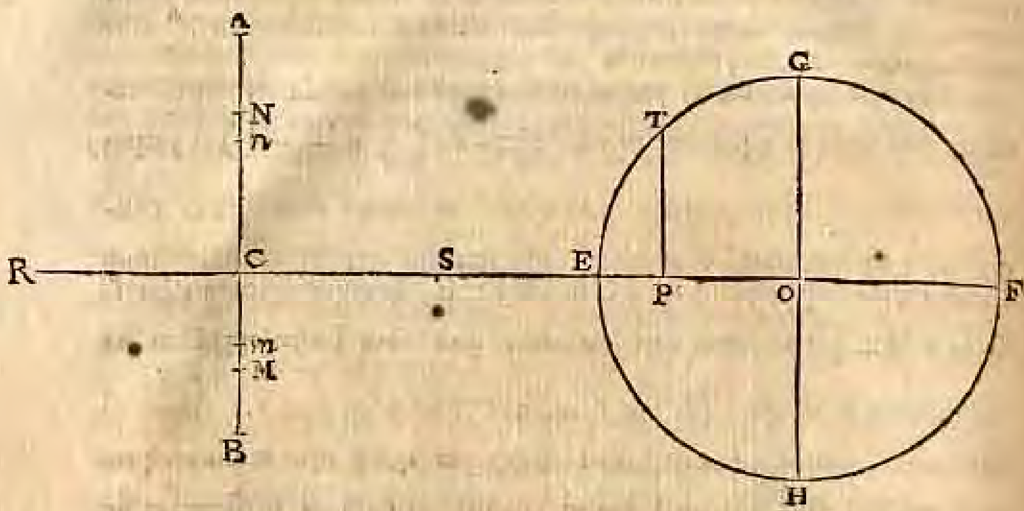
§. 59. Cùm autem poſuiſſemus $du = p\,dz$, erit $u = \int p\,dz = \int\frac{C\,dz}{\left[\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} + \int\frac{dz\sqrt{2g}.\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left[\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} - \frac{3}{4h}\int dz\,\frac{\left[4g\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\,\text{ſin.}\, 2z + \sqrt{2g}.\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\,\text{coſ.}\, 2z\right]}{(1 - 8g)\left[\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}$. Hæ autem formulæ omnes ſunt abſolutè integrabiles, prodibitque $u = D - \frac{C\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}} - \frac{g}{2h\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}} + \frac{3g\,\text{coſ.}\, 2z}{2h(1 - 8g)\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}}$; ex quo tandem reſultat $s = u\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} = D\,\text{ſin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + C\,\text{coſ.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{g}{2h} + \frac{3g\,\text{coſ.}\, 2z}{2h(1 - 8g)}$, quæ eſt æquatio generalis ad quodvis tempus z ſtatum aquæ, ſeu diſtantiam ejus

ejus ſupremæ ſuperficiei à C indicans, ubi conſtantes C & D ex dato Maris ſtatu ad datum tempus definiri oportet. Quòd ſi igitur ponamus motum aquæ jam ad uniformitatem eſſe deductum, ita ut aqua omnibus diebus, quando Luna in T verſatur in eodem loco M verſetur, neceſſe erit ut valor ipſius s maneat idem, etſi arcus z integrâ peripheriâ 2π vel ejus multiplo augeatur. At poſito $z + 2\pi$ loco z, terminus coſ. $2z$ manet quidem invariatus, at D ſin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + C$ coſ. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$ fit $= D$ ſin. $\frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}} + C$ coſ. $\frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}}$, quæ æqualitas adeſſe non poteſt niſi vel $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ſit numerus integer, vel C & $D = 0$. Cùm itaque g determinari non liceat, quia jam eſt datum, ponendum erit $C = 0$ & $D = 0$, ita ut iſta habeatur æquatio $s = \frac{-g}{2h} + \frac{3g\,cof.\,2z}{2h(1-8g)}$, ex quâ facillimè ad quodvis tempus ſtatus Maris cognoſcetur: valores ſcilicet affirmativi ipſius s dabunt ſitum aquæ infra ſitum naturalem C, negativi verò ſupra C.

§. 80. Cognito autem ſpatio s per tempus z, celeritas quoque Maris quâ in M aſcendit reperietur ex æquatione $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ erit enim $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{3g\,fin.\,2z}{h(1-8g)}$, quæ expreſſio ipſi celeritati, quâ aquæ ſuperficies, dum in M verſatur, elevatur, eſt proportionalis: hæc ergo celeritas aquæ ſemper eſt ut ſinus dupli arcûs ET, vel etiam ut ſinus dupli temporis, quo Luna à tranſitu per meridianum abeſt, tempore ſcilicet in arcum æquatoris converſo. Hinc igitur celeritas aquæ erit nulla ſi Luna fuerit vel in E vel in G vel in F vel in H; hoc eſt, vel in horizonte vel in meridiano: quare cùm his temporibus aqua vel maximè ſit elevata vel maximè depreſſa, unâ Lunæ revolutione aqua bis elevabitur, biſque deprimetur, ideoque bini Fluxus binique Refluxus contingent. Aqua quidem maximè erit depreſſa iis ipſis momentis, quibus Luna ad horizontem appellit, tum enim fit coſ. $2z = 1$; atque ſpatium CB erit $= s = \frac{g(1+4g)}{2(1-8g)}$; at maxima elevatio incidet in ipſos Lunæ tranſitus per meridianum, quibus eſt coſ $2z = -1$: ac tum altitudo CA erit $= -s = \frac{g(2-4g)}{h(1-8h)}$. Quanquam autem hæc momenta cum experientiâ non ſatis conveniunt, tamen ea hypotheſi aſſumtæ planè congruunt, quâ poſuimus Lunam ſolam agere, ac perpetuò in ipſo æquatore verſari, ex quo æſtus ſe tandem ad ſummam regularitatem componat neceſſe eſt. Quòd ſi enim Lunæ declinatio ponatur variabilis, atque Sol inſuper agat, æſtus jam formati perpetuò turbabuntur; ex quo ob æquabilitatem continuò ſublatam effectus tardiores neceſſariò conſequi debebunt. Præterea quoque nullam adhuc motûs Maris horizontalis habuimus rationem, cùm enim aqua ad æſtum formandum motu horizontali progredi debeat, perſpicuum eſt hinc retardationem in æſtu oriri oportere.

§. 81. Si aqua, uti in præcedentibus capitibus poſuimus, inertiâ careret, tum foret ex æquatione primâ $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$ perpetuò $s = \frac{g(1-3yy)}{h}$, quia aqua tum quovis momento cum viribus ſollicitantibus in æquilibrio conſiſteret. Maxima igitur depreſſio etiam tum Lunæ horizontali reſponderet, cùm eſt $y = 0$, foretque ſpatium depreſſionis $CM = \frac{g}{h}$; maxima verò elevatio, quæ circa Lunæ appulſum ad meridianum continget, fiet per ſpatium $CN = \frac{2g}{h}$ ob $y = 1$. Quare ſi aqua inertiâ careret, foret ſpatium MN, per quod aqua motu reciproco agitaretur, $= \frac{3g}{h}$; inertiâ autem admiſsâ agitationes perficientur in ſpatio majore $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}$; cujus exceſſus ſuper ſpatium MN erit $= \frac{24gg}{h(1-8g)}$. Quantitas itaque æſtûs pendet à valore litteræ g, qui quidem ſemper eſt affirmativus; nam ſi foret $g = 0$, quod evenit ſi gravitatis vis eſſet infinitè magna reſpectu virium Lunæ & Solis, tum etiam nullus æſtus oriretur; deinde quò magis $8g$ ad 1 accedit, eò major prodibit æſtus, qui adeo in infinitum excreſcere poſſet ſi foret $8g = 1$; hoc quippe caſu vis Lunæ gravitatem ſuperaret, omneſque aquas ad Lunam attraheret; quod autem fieri non poteſt, multo minus autem eſſe poteſt $8g > 1$, quod tamen ſi eveniret, maxima elevatio appulſui Lunæ ad horizontem, maximaque depreſſio Lunæ meridianum occupanti reſponderet.

§. 82. Cùm igitur aqua, ſi inertiâ careret, agitetur per ſpatium $MN = \frac{3g}{h}$, ſuprà autem §. 41. eâdem hâc hypotheſi, quâ tam locus quàm Luna in æquatore ponitur, aquam elevari ſupra libellam per ſpatium 2,260 pedum, infra eam verò deprimi ſpatio 1,112 pedum, erit $\frac{3g}{h} = 3{,}372$ pedum, ideoque $\frac{g}{h} = 1{,}124$ pedum $= 1\frac{1}{8}$ pedum. Quoniam verò valor ipſius g cum unitate comparatur, ideo venit, quod tempus per ipſum arcum circuli cujus radius eſt $= 1$ expreſſimus: hinc itaque valor ipſius g reſpectu unitatis definietur tempore eodem modo expreſſo, quo aqua in M uſque depreſſa ſolâ vi gravitatis ſe in C reſtitueret, quod



tempus ex circumstantiis facilè poterit æstimari: prodibit autem per calculum tempus hujus restitutionis $= \frac{\pi}{2}\sqrt{2g}$, denotante π semiperipheriam circuli radium $= 1$ habentis, seu tempus duodecim horarum Lunarium. Quòd si igitur restitutio ponatur actu fieri tempore $\frac{12}{n}$ horarum, erit $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi\sqrt{2g}}{2}$ & $g = \frac{2}{nn}$, ex quo perspicuum est, quò citiùs aqua se propriâ suâ vi restituere valeat, eò minùs excessurum esse spatium AB spatium MN. Cùm autem de hâc restitutione non satis tutò judicare queamus, præstabit ex observationibus rationem spatii AB ad MN proximè assumere. Si enim ponamus esse $AB = 2\,MN$, erit $\frac{3}{1-8g} = 6$, erit $g = \frac{1}{16}$; sin autem sit $AB = 3\,MN$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 9$ & $g = \frac{1}{12}$: at posito $AB = 4\,MN$, erit $g = \frac{3}{32}$. Quoniam igitur aqua ob inertiam ferè duplo majus spatium absolvere poni potest, assumamus $g = \frac{2}{36}$ seu $n = 6$, ita ut aqua propriâ vi gravitatis tempore circiter 2 horarum in statum naturalem se restituere valeat. Posito autem $g = \frac{1}{18}$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 5,4$; spatiumque $AB = 6$ ped. proximè. Ne autem tractatio nimis fiat specialis, retineamus litteram n, cujus valorem esse circiter 6 vel 5 notasse sufficiet, qui valor satis propè ad æstimationem accedit: ita ut sit $g = \frac{2}{nn}$ & $AB = \frac{3nn}{nn-16} \cdot \frac{10}{9}$ pedum: unde satis patet n necessariò esse debere > 4, eritque adeo vel 5 vel 6.

§. 83.

§. 83. Tentemus nunc idem hoc problema in sensu latiori, ac ponamus regionis C elevationis poli sinum esse $= P$, cosinum $= p$; Lunæ verò declinationis borealis sinum esse $= Q$, cosinum $= q$; Lunamque super Terra jam per meridianum transiisse, ab eoque distare angulo horario $= z$, ita ut z ut antè tam tempus quàm arcum circuli radii $= 1$ designet; quòd si nunc arcûs z cosinus ponatur $= t$, erit sinus altitudinis Lunæ super horizonte $= tpq + PQ$; ideoque vis Lunæ Mare elevans $= \frac{L}{2b^3}(3(tpq+PQ)-1) = \frac{3p^2q^2tt + 6pqPQt + 3P^2Q^2 - 1}{h}$, posito ut antè $\frac{L}{2b^3} = \frac{1}{h}$. Quoniam verò est $t = \text{cos.}\, z$ erit $2tt - 1 = \text{cos.}\, 2z$ & $tt = \frac{1+\text{cos.}\, 2z}{2}$, ex quo vis Lunæ ad Mare elevandum habebitur $= \frac{3p^2q^2\,\text{cos.}\, 2z}{2h} + \frac{6pqPQ\,\text{cos.}\, z}{h} + \frac{3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2}{2h}$. Ponamus nunc superficiem aquæ in M versari, existente $CM = s$, & celeritatem ejus quâ actu ascendit debitam esse altitudini v, erit $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \text{vi Lunæ}\right)$, cùm verò sit $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ seu $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} =$ ipsi celeritati ascensûs erit $v = \frac{2ds\,dds}{dz}$, posito dz constante: hinc igitur emerget ista æquatio $2dds + dz^2\left(\frac{s}{g} + \frac{3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2}{2h} + \frac{6pqPQ\,\text{cos.}\, z}{h} + \frac{3p^2q^2\,\text{cos.}\, 2z}{2h}\right)$ relationem inter tempus z & statum Maris s continens.

§. 84. Quòd si nunc hæc æquatio eodem modo tractetur, quo superior, ea pariter bis integrari posse deprehendetur, integrationibus autem singulis debito modo absolutis, & constantibus ita determinatis ut motus aquæ fiat uniformis, reperietur $s = \frac{-g(3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2)}{2h} - \frac{6gpqPQ\,\text{cos.}\, z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\,\text{cos.}\, 2z}{2h(1-8g)}$ ac celeritas ascensûs $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{-6gpqPQ\,\text{sin.}\, z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\,\text{sin.}\, 2z}{h(1-8g)}$. Cùm autem sit $\text{sin.}\, 2z = 2\,\text{sin.}\, z\,\text{cos.}\, z$, celeritas duobus casibus evanescit, quorum primus est si $\text{sin.}\, z = 0$, alter si $\text{cos.}\, z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)}$; illi casus dabunt aquam summam, hi verò imam. Hinc igitur patet aquam summam contingere debere iis ipsis momentis, quibus Luna per meridianum transit, imam verò non tum, cùm Luna horizontem attingit; namque Luna horizontem attingit, si est $\text{cos.}\, z = \frac{-PQ}{pq}$, aqua verò est ima si est $\text{cos.}\, z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)} = \frac{-5PQ}{8pq}$ posito $g = \frac{1}{18}$. Hìc autem idem est notandum quod suprà, scilicet nos posuisse motum aquæ esse uniformem seu quotidie sui similem, Lunamque in ecliptica locum tenere fixum, seu saltem suam declinationem non variare. Quoniam verò ob variabiriabilitatem declinationis Lunæ, itemque ob actionem Solis, iſte motus perpetuò turbatur, atque inſuper motûs Maris horizontalis nulla adhuc habita eſt ratio, facilè intelligitur, tàm Fluxus quàm Refluxus tardiùs venire debere, quàm quidem ex his formulis ſequitur.

§. 85. Bini ergo unâ Lunæ revolutione contingent Fluxus, alter ſi Luna ſuper horizonte ad meridianum appellit, alter ſi ſub Terra; priori caſu eſt coſ. $z = 1$, & coſ. $2z = 1$, hoc itaque tempore Mare ſupra libellam C elevabitur per ſpatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} + \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$. Dum autem Luna ſub horizonte meridianum attingit, tum aqua elevabitur per ſpatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3p^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$, propter coſ. $z = -1$ ac coſ. $2z = 1$ hoc caſu: harum igitur altitudinum differentia eſt $= \frac{12pqPQ}{h(1-2g)}$: atque Mare in tranſitu Lunæ per meridianum ſupra horizontem altiùs elevatur, ſi declinatio Lunæ ſit borealis; contrà verò ſi declinatio fuerit auſtralis, major Maris elevatio reſpondebit appulſui Lunæ ad meridianum infra horizontem. Lunâ verò in ipſo æquatore verſante, ambo Fluxus inter ſe erunt æquales. Ratione autem elevationis poli, horum binorum Fluxuum ſucceſſivorum inæqualitas erit maxima ſub elevatione poli 45°, pro his enim regionibus fit pP maximum; atque in aliis regionibus eò minor erit inæqualitas, quò magis fuerint à latitudine 45° remotæ. Mare autem maximè deprimetur, ſi fuerit coſ. $z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)}$; quo valore ſubſtituto, reperietur aqua infra libellam C ſubſidere per ſpatium $= \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$; omnino igitur aqua in æſtu movebitur per ſpatium $= \frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, quorum ſignorum ambiguorum ſuperius $+$ valet ſi Luna ſuper horizonte, alterum verò $-$ ſi Luna ſub horizonte in Fluxu meridianum attingit.

§. 86. Si aqua inertiâ careret, tum ſuperiore Lunæ tranſitu per meridianum elevaretur ſupra libellam C per ſpatium $= \frac{3(pq+PQ)^2-1}{h}g$, inferiori verò tranſitu per meridianum elevaretur ad altitudinem $\frac{3(pq-PQ)^2-1}{h}g$, quarum altitudinum diſcrimen eſt $= \frac{12gpqPQ}{h}$; ita ut diſcrimen admiſsâ inertiâ majus ſit parte circiter octava, quàm idem diſcrimen ſi inertia tollatur. Maximè autem deprimetur aqua ſublatâ inertiâ, ſi fuerit coſ. $z = \frac{-PQ}{pq}$, tumque infra libellam erit conſtituta intervallo $= \frac{g}{h}$; ex quo ſpatium,

ſpatium, per quod æſtus Maris fit ſublatâ inertiâ, prodit $= \frac{3p^2q^2+3P^2Q^2 \pm 6pqPQ}{h}g$; cùm igitur idem ſpatium conceſsâ inertiâ, ſit $\frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6grpPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, erit exceſſus hujus ſpatii ſuper illud $= \frac{24g^2p^2q^2}{h(1-8g)} - \frac{12g^2P^2Q^2(1+g)}{h(1-2g)^2} \pm \frac{12g^2pqPQ}{h(1-2g)}$. Fieri ergo poteſt ut ſpatium, in quo æſtus Maris continetur, majus ſit ſublatâ inertiâ, quàm ſi ea aquæ tribuatur, id quod eveniet ſi $\frac{P^2Q^2(1+g)}{(1-2g)^2} > \frac{2p^2q^2}{1-8g}$ vel $\frac{PQ}{pq} > \frac{(1-2g)\sqrt{2}}{\sqrt{(1+g)(1-8g)}}$, hoc eſt $\frac{PQ}{pq} > \sqrt{\frac{256}{95}}$, poſito $g = \frac{1}{18}$; quod verò ſi evenit, Luna ne quidem horizontem in curſu diurno attingit, ac propterea aquam non deprimit. Ex quo ſequitur æſtum ubique ab inertiâ aquæ augeri: erit autem ad uſum magis accommodatè ſpatium AB, per quod Mare agitatur, ita expreſſum ut ſit $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq \pm \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, ubi ſignorum ambiguorum ſuperius tranſitum Lunæ per meridianum ſuper horizonte, inferius verò ſub horizonte reſpicit.

§. 87. Cùm ſit $\frac{3g}{h} = 3{,}372$ pedum, Lunâ mediocrem à Terrâ diſtantiam tenente, atque g ſit circiter $\frac{2}{25}$ vel $\frac{1}{18}$; erit poſito $g = \frac{2}{25}$ ſpatium $AB = \frac{25}{9}\left(pq \pm \frac{3}{7}PQ\right)^2 \cdot 3{,}372$ ped. at facto $g = \frac{1}{18}$ erit ſpatium $AB = \frac{9}{5}\left(pq \pm \frac{5}{8}PQ\right)^2 \cdot 3{,}372$ ped. Ex his colligitur æſtum fore maximum pro eadem elevatione poli, ſi fuerit tangens declinationis Lunæ $= \frac{3}{7}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{2}{25}$, vel $= \frac{5}{8}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{1}{18}$: horum autem caſuum prior veritati magis videtur conſentaneus, atque hanc ob rem valorem $g = \frac{2}{25}$ retineamus: hinc igitur ſequitur ſub æquatore æſtum fore maximum ſi Luna nullam habeat declinationem, atque ſimul pro quaque regione declinatio Lunæ poterit aſſignari, cui maximus æſtus reſpondeat: uti ex adjecto laterculo apparet:

Elevatio Poli.	Declinatio ☽		Elevatio Poli.	Declinatio ☽		Elevatio Poli.	Declinatio ☽
0°.	0°,	0′	30°.	13°,	54′	60°.	——
5°.	2°,	8′	35°.	16°,	42′	65°.	——
10°.	4°,	19′	40°.	19°,	46′	70°.	——
15°.	6°,	33′	45°.	23°,	11′	75°.	——
20°.	8°,	52′	50°.	27°,	3′	80°.	——
25°.	11°,	18′	55°	maxima.		85°.	——

In locis ergo ultra 45°. ab æquatore remotis æſtus erit maximus, ſi Luna maximam obtineat declinationem, ſi quidem fuerit $g = \frac{2}{25}$: ac ſi per obſervationes conſtet cuinam Lunæ declinationi maximus æſtus reſpondeat, tum inde valor litteræ g innoteſcet: quoniam autem ſub elevatione poli 50°. æſtus maximi nondum maximæ declinationi reſpondere obſervantur, ponamus id evenire ſub elevatione poli 60°, reperietur $\frac{1-8g}{1-2g} = \frac{1}{4}$ atque $g = \frac{1}{10}$, unde ipſius g tutò hi limites conſtitui poſſe videntur $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{18}$; ex hâc verò hypotheſi valor $\frac{1}{10}$ multo propiùs ad veritatem accedit; interim tamen etiamnum nil definimus, ſed obſervationes hunc in finem ſollicitè inſtitutas expectamus.

§. 88. Quòd ſi autem ponamus $g = \frac{1}{10}$, tum bini æſtus ſucceſſivi, dum Luna in maximâ declinatione verſatur, eò magis ad æqualitatem perducentur, quò ipſo theoria ad experientiam propiùs accedit; cùm enim ſit horum binorum æſtuum major ad minorem uti $\left(pq + \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$ ad $\left(pq - \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)$, hæc ratio eò propiùs ad æqualitatem accedet, quò minor fuerit fractio $\frac{1-8g}{1-2g}$, ſit autem hæc fractio $= \frac{1}{4}$ ſi ponatur $g = \frac{1}{10}$. Hâc itaque hypotheſi erit quantitas æſtûs majoris $= (pq + \frac{1}{4}PQ)^2 . 16, 86$ ped. minoris verò $= (pq - \frac{1}{4}PQ)^2 . 16, 86$ ped. At inter hos binos æſtus aqua humillima non medium interjacet, ſed minori eſt vicinior, neque tamen tantâ inæqualitate binos Fluxus dirimit, quàm fieret, ſi ima aqua Lunæ horizontali reſponderet. Si enim tempus medium inter binos Fluxus ponatur z, erit coſ. $z = 0$, at temporis, quo Refluxus Fluxum majorem inſequitur, coſinus eſt $= \frac{-PQ}{4pq}$, ejuſque ergo intervalli à tempore medio ſinus eſt $= \frac{PQ}{4pq}$, quæ expreſſio adeo ſub elevatione poli 60°, pro maxima Lunæ declinatione 28°, tantum ſit $= 13°$, unde Refluxus

fluxus à tempore inter Fluxus medio circiter 54′ aberrabit: minor verò erit aberratio, quò propiùs cùm regio Terræ tùm Luna ad æquatorem verſentur, id quod cum experientiâ mirificè convenit. Quoniam autem hæc ex valore ipſius g aſſumto conſequuntur, imprimis notari oportet, litteram g non poſſe abſolutè determinari, ſed ejus quantitatem, quippe quæ mobilitatem totius Oceani ſpectat, cùm ab extenſione tùm etiam profunditate Maris pendere; ex quo variis in locis hæc eadem littera g, varias ſignificationes ſortietur.

§. 89. Ex ſolutione horum duorum problematum, quæ quidem in ſe ſpectata non ſolum ſunt attentione digna, ſed etiam cùm analyſin tùm etiam motûs ſcientiam amplificant, quamvis ea caſum propoſitum non penitus exhauriant, tamen motus in præcedentibus capitibus definitus multò magis cum experientiâ conciliatur, id quod theoriæ noſtræ jam inſigne addit firmamentum. Simili autem modo vis à Sole profecta cum inertiâ aquæ poteſt conjungi, atque æſtus Maris definiri, quâtenus à ſolâ vi Solis oritur, quibus duobus effectibus conjungendis judicare licebit, quantus æſtus quovis tempore & quovis loco debeat evenire. In hoc quidem capite cogitationes adhuc ab omnibus obſtaculis à Terrâ & littoribus oriundis prorſus abſtrahimus, atque univerſam Terram undiquaque aquâ circumfuſam ponimus; ex quo regulas hinc natas præcipuè ejuſmodi obſervationibus, quæ in ampliſſimo Oceano apud exiguas inſulas ſunt inſtitutæ, conferri conveniet. Quoniam autem nondum motûs aquæ progreſſivi, quo alternativè ad loca, in quibus Fluxus & Refluxus accidit, progreditur & recedit, rationem habuimus, neceſſe eſt ut etiam hunc motum & Phænomena inde orta contemplemur. Ac primò quidem facilè intelligitur, cùm ob inertiam aquæ tùm etiam alia impedimenta motui oppoſita, aquam tam tardiùs elevari quàm deprimi oportere, quàm ex allatis hactenus conſequitur: unde Fluxus non ad tranſitus Lunæ per meridianum contingent, ſed aliquanto ſeriùs evenient, omnino uti experientia teſtatur.

§. 90. Hæc autem retardatio præciſè ad calculum revocari non poteſt, quia à motu aquæ ejuſque profunditate plurimum pendeat, prouti etiam videmus in diverſis locis eam vehementer eſſe diverſam, atque aliis locis Fluxum contingere poſt Lunæ culminationem tribus horis nondum elapſis, aliis verò locis plus quàm duodecim horis tardiùs venire, quæ quidem inſignis retardatio terrarum poſitioni eſt adſcribenda; interim tamen hinc ſufficienter conſtat motum Maris admodum poſſe impediri. Pro eodem verò loco ſatis luculenter perſpicitur, quò major atque altior Fluxus evenire debeat, eò tardiùs eundem accidere oportere. Quòd ſi enim æſtus contingat infinitè parvus, dubium eſt nullum, quin is ſtato tempore adveniat, cùm impedimentis hoc caſu ne locus quidem concedatur agendi; unde dilucidè ſequitur æſtus eò tardiùs advenire debere, quò

 ſint

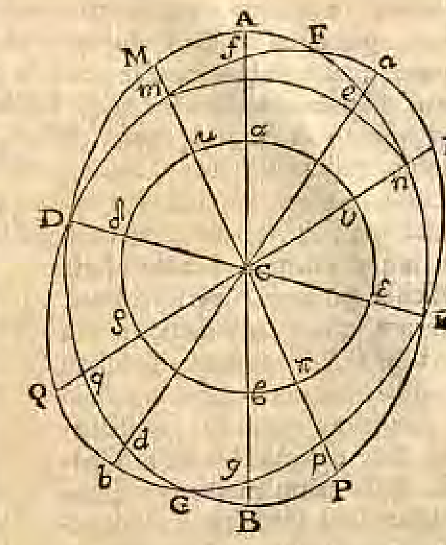
ſint majores. Atque hoc ipſum experientia confirmat, quâ conſtat æſtus majores, qui circa novilunia ac plenilunia contingunt, tardiùs inſequi tranſitum Lunæ per meridianum, quàm æſtus minores, qui circa quadraturas contingunt. Cùm enim Luna in quadraturis circiter 6 horis tardiùs reſpectu Solis per meridianum tranſeat, quàm in ſyzygiis, æſtus tamen non 6 horis tardiùs, ſed tantum circiter 5 $\frac{1}{4}$ horis tardiùs accidit. Videtur verò etiam calculus, qui pro utraque vi Solis ac Lunæ conjunctim inſtitui poteſt ſimili modo, quo pro ſolâ vi Lunæ fecimus, ejuſmodi retardationem majorem in ſyzygiis quàm in quadraturis indicare, etiamſi eum ob ſummas difficultates ad finem perducere non valuerimus; interim tamen ſatis planum eſt præcipuam ejus cauſam in ipsâ naturâ aquæ eſſe quærendam. Hæc autem allata ratio retardationis à Flamſtedio maximè probatur, quippe qui obſervavit maximam retardationem non tam ſyzygiis luminarium, neque minimam quadraturis reſpondere, ſed iis tempeſtatibus, quibus æſtus ſoleant eſſe maximi & minimi, id quod demum poſt ſyzygias & quadraturas contingit.

§. 91. Ad hanc autem Fluxuum à ſyzygiis ad quadraturas accelerationem, reſpectu tranſitûs Lunæ per meridianum, ac retardationem à quadraturis ad ſyzygias, plurimùm quoque vis Solis conferre videtur. Suprà enim jam indicavimus poſt ſyzygias Fluxum tranſitum Lunæ per meridianum antecedere debere, ob Solem tum jam versùs horizontem declinantem; unde etiam, ſtabilitâ inertiâ, diebus novilunia ac plenilunia ſequentibus æſtus Maris citiùs inſequi debet tranſitum Lunæ per meridianum, quàm in ipſis ſyzygiis, id quod etiam obſervationes mirificè confirmant; inter Fluxum enim quintum & ſextum poſt ſyzygias retardatio reſpectu Solis tantum 17 minut. deprehenditur, cùm tamen Luna 24′ retardetur. Hanc ob rem à Sole determinatur æſtus ad actionem virium magis exactè ſequendam, quæ determinatio cùm duret uſque ad quadraturas, mirum non eſt, quòd æſtus tùm reſpectu Lunæ citiùs contingant, magiſque ad calculum accedant. Contrarium evenit in progreſſu à quadraturis ad ſyzygias, quo tempore æſtus à Sole continuò retardantur; hocque neceſſariò efficitur, ut tandem in ipſis ſyzygiis Fluxus tardiùs inſequatur Lunæ culminationem quàm in quadraturis. Hanc autem rationem cum magnitudine æſtûs conjungendam eſſe putamus ad hæc phænomena perfectè explicanda, ſæpiſſimè enim in hâc quæſtione plures cauſæ ad eundem effectum producendum concurrunt; hoc autem eſt id ipſum quod calculus ille ſummoperè implicatus & moleſtus quaſi per tranſennam oſtendere viſus eſt.

§. 92. Quò autem tam de his Phænomenis quàm reliquis certiùs & ſolidiùs judicare queamus, ipſum motum progreſſivum, quem aqua ab æſtu recipit, inveſtigabimus. Cùm enim aqua eodem loco nunc elevetur nunc ſubſidat, neceſſe eſt ut priori caſu aqua aliunde affluat, poſteriori

riori

riori verò ab eodem loco defluat, unde nomina Fluxûs ac Refluxûs originem traxerunt. Repræſentet igitur tempore quocunque figura $ADBE$ ſtatum aquæ totam Terram ambientis, ita ut in locis A & B aqua maximè ſit elevata, in locis verò mediis ab A & B æquidiſtantibus, maximè depreſſa. Poſt aliquod tempus transferatur æſtus ſummus ex A & B in a & b, ſitque $aDbE$ figura aquæ Terram circumdantis: hoc igitur tempore neceſſe eſt, ut à parte oceani DF defluxerit aquæ copia $FAMDmf$, in partem verò FE tantundem aquæ affluxerit, portio ſcilicet $FaNEne$: ſimili modo portio EG decrevit copiâ aquæ $EPBGgp$, portioque GD augmentum accepit $GbQDqd$.

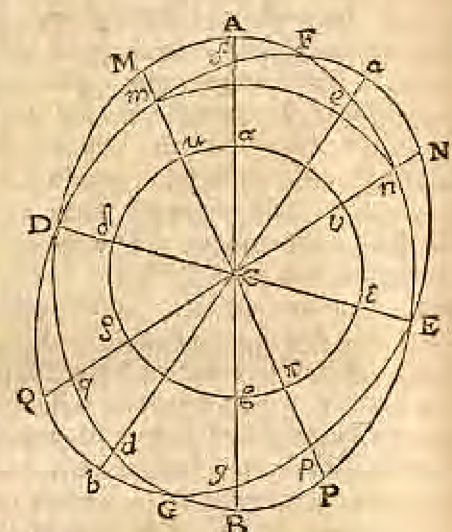


Si nunc ponamus portionem FMm tranſire in locum FNn, ac portionem EPp in ENn deferri, ſatis clarè motum aquæ progreſſivum intelligere licebit. Cùm enim motus aquæ ſummæ A fiat ab ortu in occaſum, aqua quæ circa A versùs orientem ſcilicet ab M ad N uſque eſt ſita, in occaſum movebitur; ſimiliterque ea quæ huic è diametro eſt oppoſita & ſpatium PQ occupat. Contrà verò reliqua aqua in MQ & NP contenta in ortum promovebitur. Verùm celeritas ubique non erit eadem; in punctis enim M, N, P & Q quippe limitibus inter motus versùs ortum & obitum, celeritas erit nulla, deinde ab M uſque ad F creſcet ubique ita ut incrementa celeritatis in punctis mediis ut A ſint differentiis Af proportionalia: ab F verò uſque ad N celeritas decreſcere debet, & decrementum celeritatis in e erit ut ae; ſimilique modo comparatus erit motus in reliquis portionibus figuræ propoſitæ.

§. 93. Si hæc diligentiùs proſequamur ac punctum a ipſi A proximum ponamus, reperiemus in loco quocunque M fore intervallum Mm ſinui dupli anguli MCA proportionale. Quare ſi anguli ACM ſinus ponatur $= x$, coſinus $= y$, ac celeritas quam aqua in M habet, versùs occaſum $= u$ erit du ut $2xy$. Cùm autem elementum arcûs AM ſit ut $\frac{dx}{g}$; nam figuram inſtar circuli conſiderari licet: erit du ut $2x\,dx$, atque u proportionale erit ipſi $2xx - 1$ ejuſmodi adjecta conſtante, ut ubi Mm eſt maximum, ibi celeritas evaneſcat. Hanc ob rem erit celeritas in loco

quo-

quocunque M, quam aqua versùs occidentem habebit, uti coſinus dupli anguli MCA. Maxima igitur aquæ celeritas versùs occidentem erit in iis locis, in quibus aqua maximè eſt elevata; huicque celeritati æqualis eſt ea, quâ aqua in locis ubi maximè eſt depreſſa, versùs orientem promovetur; ſi quidem hæc in circulo fieri concipiamus, nam in ſphæra motus aliquantum diverſus erit, ſed tamen hinc intelligi poterit. At in locis quæ ab A & B 45 grad. diſtant, ob coſinum dupli anguli $= 0$, aqua omnino nullum habebit motum horizontalem. Ex his igitur non ſolum motus aquæ progreſſivus cognoſcitur, quo alterna elevatio ac depreſſio producitur, ſed etiam luculenter perturbationes, quæ à Terris, littoribus atque etiam à fundo Maris proficiſci poſſunt, perſpiciuntur. Ceterum quanquam ſectio noſtra plana $ADBE$ æquatorem ſolum denotare videtur, tamen eadem ad parallelum quemvis ſignificandum ſatis commodè adhiberi poteſt: quin etiam motus pro ſphæra hinc ſatis diſtinctè colligi poterit, operæ enim pretium non judicamus, per ſolidorum introductionem hanc rem cognitu tantò difficiliorem reddere.

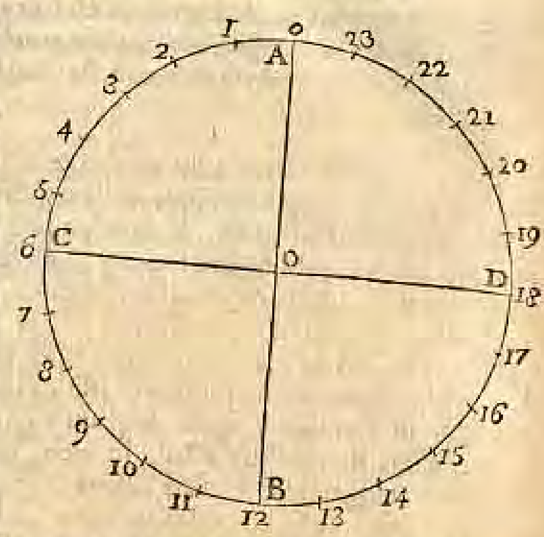


§. 94. Eò minus autem hujus accuratæ inquiſitioni inſiſtemus, quòd celeritas progreſſiva inſuper à profunditate maris pendeat. Quòd ſi enim ponamus mn jam eſſe Maris fundum, ita ut profunditas Maris in M major non eſſet quàm Mm, tum iſti aquæ tantus motus ineſſe deberet, quo ea, dum Fluxus ex A in a tranſit, ex ſitu $nFMm$ in ſitum $mFNn$ transferri poſſet. Hic autem motus quamvis ſit difformis & per totam maſſam inæquabilis, tamen ſi tota tranſlatio ſpectetur, totus motus ex ſpatio à centro gravitatis interea percurſo eſt æſtimandus. Hoc igitur caſu, quo Terræ ſuperficiem ſolidam ad mn uſque pertingere ponimus, reperietur centrum gravitatis maſſæ $nFMm$ ferè æquè celeriter promoveri debere ac punctum A, ex quo ejus celeritas tanta eſſe deberet, quâ tempore unius horæ ſpatium ferè 15 graduum percurrere poſſet, quæ celeritas undique foret enormis ac ſtupenda. At ſi Mari profunditatem majorem tribuamus, ſcilicet ad $\mu\nu$ uſque, tum illa celeritas multò fiet minor, decreſcet namque in eadem ratione in qua profunditas creſcit. Cùm igitur celeritas Maris, quæ antè in ſe ſpectata inventa

inventa eſt coſinui dupli anguli MCA proportionalis, eò fiat minor, quo majorem Mare habeat profunditatem, tenebit ea in quoque loco rationem compoſitam ex ratione directâ coſinus dupli anguli MCA atque ex inversâ profunditatis.

§. 95. Datur autem alius modus celeritatem Maris horizontalem, poſitâ ſcilicet ubique profunditate eâdem, determinandi, qui tamen ad diverſas profunditates patet, ſi cum ratione inveniendâ conjungamus reciprocum profunditatum uti fecimus; deduciturque hic modus ex motu Maris verticali, quo modò aſcendit modò deſcendit, qui jam ſuprà eſt definitus. Primò enim manifeſtum eſt, ſi Mare ubique eâdem celeritate, (poſitâ profunditate ubique æquali) in eandem plagam promoveretur, tum etiam altitudinem manſuram eſſe eandem ubique, neque ullam mutationem in elevatione aquæ orturam eſſe. At ſi aqua motu inæquabili progrediatur, manifeſtum eſt iis in locis, ubi celeritas diminuitur, aquam turgeſcere atque adeo elevari debere, quoniam plus aquæ affluit quàm defluit; contrà verò ubi celeritas aquæ creſcat, ibi aquam ſubſidere oportere. Quare cùm elevatio & depreſſio Maris à motûs progreſſivi horizontalis inæqualitate pendeat, licebit pro quovis loco hanc inæqualitatem definire, ex motu aſcensûs & deſcensûs cognito. Cùm enim celeritas aſcensûs ſit decremento celeritatis progreſſivæ æqualis, celeritas deſcensûs verò incremento celeritatis progreſſivæ, ex dato motu verticali ratio motûs horizontalis definiri poterit. Invenimus autem ſuprà §. 84, ſi Luna à meridiano versùs occaſum jam receſſit angulo z, hoc eſt cùm regio propoſita ab eâ, in quâ aqua eſt ſumma, versùs orientem ſecundùm longitudinem diſtet angulo z, fore celeritatem quâ aqua aſcendit $= \frac{-6gpqPQ\, ſin.\, z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\, ſin.\, 2z}{h(1-8g)}$. Quare cùm huic celeritati aſcensûs proportionale ſit decrementum motûs horizontalis, erit ipſa celeritas horizontalis versùs occaſum ut $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{6gpqPQ\, coſ.\, z}{h(1-2g)} + \frac{3gp^2q^2\, coſ.\, 2z}{2h(1-8g)}$; hujus enim differentiale negativè ſumtum & per dz diviſum dat ipſam celeritatem aſcensûs. Quoniam autem hæc expreſſio ſimul exhibet ſpatium, quo Mare ſupra libellam elevatur, erit celeritas Maris in quovis loco versùs occidentem proportionalis elevationi ſupra libellam, & inverse profunditati Maris, quæ eſt vera regula pro motu Maris, tam verticali quàm horizontali, definiendo; atque ita priori modo inſufficienti ſuperſedere potuiſſemus.

§. 96. Conſideremus ergo motum, quo aqua tàm verticaliter quàm horizontaliter promovetur à Fluxu uſque ad Refluxum, indeque ad ſequentem Fluxum, idque ſub æquatore, dum Luna pariter in æquatore verſatur: erit itaque celeritas aſcensûs ut ut $-$ ſin. $2z$, celeritas autem horizontalis verſùs occaſum ut 15 coſ. $2z + 1$ poſito $g = \frac{1}{10}$, cui expreſſioni ſimul altitudo aquæ ſupra libellam eſt proportionalis. Quòd ſi ergo ſuperficies Terræ ſeu perimeter æquatoris in 24 partes æquales dividatur, atque in locis A & B aqua ſit maximè elevata, in C & D verò minimè, numeri 1, 2, 3, &c. deſignabunt ea Terræ loca in quibus ante unam vel duas vel tres vel &c. horas lunares aqua maximè fuit elevata, tribuendo uni horæ Lunari 62 minuta. In Tabulâ ergo annexâ exhibetur motus tam verticalis, quàm horizontalis, ad ſingulas horas poſt Fluxum elapſas.



Horæ poſt Fluxum.	*Celeritas Maris verticalis.*	*Celeritas Maris horizontalis.*
0	0,000 deſcendit.	1,067 in occaſum.
1	0,500 deſcendit.	0,927 in occaſum.
2	0,860 deſcendit.	0,567 in occaſum.
3	1,000 deſcendit.	0,067 in occaſum.
4	0,860 deſcendit.	0,432 in ortum.
5	0,500 deſcendit.	0,792 in ortum.
6	0,000 aſcendit.	0,932 in ortum.
7	0,500 aſcendit.	0,792 in ortum.
8	0,860 aſcendit.	0,432 in ortum.
9	1,000 aſcendit.	0,067 in occaſum.
10	0,860 aſcendit.	0,567 in occaſum.
11	0,500 aſcendit.	0,927 in occaſum.
12	0,000 deſcendit.	1,067 in occaſum.

Facilè autem intelligitur pro regionibus ab æquatore remotis, præcipuè ſi Luna habeat declinationem, tum utrumque motum magis fore irregularem, atque mox aſcenſum citiùs abſolvi mox verò deſcenſum; totus autem motus faciliùs ex ipſis formulis datis cognoſcetur. Hìc denique profunditatem ubique eandem poſuimus; quòd ſi enim eſſet diverſa;

ſa, motus horizontalis ſimul rationem inverſam profunditatis tenebit.

§. 97. Denique antequam hoc caput finiamus, notari oportet, neque maximos æſtus iis ipſis temporibus evenire poſſe, quibus vires Solis & Lunæ maximè vigent, nec minimos æſtus tum, cùm vis à Luna & Sole nata eſt debiliſſima, ſed aliquanto tardiùs. Æſtûs enim magnitudo non ſolum à quantitate virium ſollicitantium pendet, uti id uſuveniret, ſi aqua inertiâ careret, ſed inſuper à motu jam antè concepto. Quòd ſi enim antè Mare omnino quieviſſet, tum primus certè æſtus oriundus admodum futurus eſſet exilis, etiamſi vires ſollicitantes eſſent maximæ; ſequentes verò æſtus continuò creſcerent, donec tandem poſt tempus infinitum magnitudinem aſſignatam obtinerent, ſi quidem vires ſollicitantes idem robur perpetuò ſervarent: atque hoc idem evenire debet, ſi æſtus præcedentes tantum fuerint minores, quàm is qui viribus ſollicitantibus convenit. Quare cùm æſtus novilunia ac plenilunia præcedentes ſint minores, ii quidem his temporibus ab auctis viribus augebuntur, non verò ſubitò totam ſuam quantitatem conſequentur, atque hanc ob rem æſtus etiamnum poſt ſyzygias augmenta accipient, donec ob tum ſecutura virium decrementa, æſtus iterum decreſcere incipiant. Ita tempore noviluniorum & pleniluniorum non tam ipſi æſtus quàm incrementa eorum cenſenda ſunt maxima, quatenus ſcilicet æſtus præcedentes maximè deficiunt, ab iis qui ſequi deberent; ex quo manifeſtum eſt non illos æſtus, qui in ipſis ſyzygiis luminarium contingunt, eſſe maximos, ſed ſequentes eſſe majores. Hocque idem intelligendum eſt de æſtibus minimis, qui non in ipſas quadraturas incidunt, ſed tardiùs ſequuntur: unde ratio luculenter perſpicitur, cur æſtus tàm maximi quàm minimi non ipſis ſyzygiarum & quadraturarum tempeſtatibus reſpondeant, ſed ſeriùs obſerventur, tertii ſcilicet demum vel quarti poſt hæc tempora.

CAPUT SEPTIMUM.

Explicatio præcipuorum Phænomenorum circa Æſtum Maris obſervatorum.

§. 98. IN præcedentibus capitibus fuſiùs expoſuimus effectus, qui in Mari à viribus illis duabus, quarum altera versùs Lunam eſt directa, altera versùs Solem, produci debent; eoſque cùm per calculum analyticum, tùm per ſolida ratiocinia ita determinavimus, ut de eorum exiſtentiâ dubitari omnino non liceat, ſi quidem illæ vires admittantur. At verò iſtas vires in mundo exiſtere non ſolum per alia phænomena evidentissimè probavimus, sed etiam earum causam physicam assignavimus, quam in binis vorticibus, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam sit constitutus, posuimus, quippe quæ est unica ratio cùm gravitatem tùm etiam vires, quibus planetæ in suis orbitis circa Solem continentur, explicandi. Quin etiam hæc ipsa phænomena internam vorticum structuram & indolem commonstrarunt; ob eaque vortices ita comparatos esse statuimus, ut vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum à centris eorumdem. Quare cùm in his viribus nihil gratuitò assumserimus, si effectus ex iis oriundi cum phænomenis æstûs Maris conveniant, certissimè nobis persuadere poterimus, in assignatis viribus veram æstûs Maris causam contineri; absonumque omninò fore, si causam æstûs Maris in aliis viribus imaginariis anquirere vellemus. Quamobrem in hoc capite constituimus omnes effectus, qui in superioribus capitibus sparsim sunt eruti, conjunctim & ordine proponere, summumque eorum consensum cum experientiâ declarare. Quoniam autem nondum impedimentorum à littoribus terrisque oriundorum rationem habuimus, facilè intelligitur, hinc excludi adhuc debere ejusmodi anomalias æstûs Maris, quæ evidentissimè à Terris contingentibus ortum habeant, cujusmodi sunt æstus vel vehementer enormes vel vix sensibiles, uti in Mari Mediterraneo, vel insignes retardationes eorum, quibus rebus explicandis sequens caput ultimum destinavimus: ita in hoc capite tantum ea æstûs Maris phænomena explicanda suscipimus, quæ in portubus amplissimum Oceanum respicientibus vel insulis observari solent in Oceano sitis.

§. 99. Si omnes proprietates, quibus Fluxus ac Refluxus Maris præditus esse observatur, distinctè enumerare atque exponere velimus, deprehendemus eas ad tres classes revocari debere. Ad primam scilicet classem referenda sunt phænomena, quæ in uno æstu in se spectato conspiciuntur, cùm ratione temporis tùm etiam ratione quantitatis; hæcque phænomena commodissimè sub varietatibus diurnis comprehendi possunt, quâtenus ea se offerunt observatori, qui per integrum tantum diem observationes instituit, neque ea cum aliis phænomenis aliis temporibus occurrentibus comparat. Secunda classis complectitur varietates menstruas, quæ sese observatori per integrum mensem æstum Maris contemplanti offerunt, quorsum pertinent æstus maximi minimique, item retardationes modò majores modò minores. Tertia denique classis comprehendit varietates annuas ac plusquam annuas, quæ sequuntur vel varias Lunæ à Terra distantias, vel Solis; vel etiam luminarium declinationem. Hanc ob rem phænomena uniuscujusque classis recensebimus, atque quomodo singula cum theoriâ traditâ congruant, ostendemus. Hìc verò, ut jam est monitum, à perturbationibus quæ à Terris ac littoribus provenire possunt, animum prorsus abstinemus, eas sequenti capiti reservantes. Multò minùs

nùs verò ad ventum hìc respicimus, quo æstus Maris cùm ratione magnitudinis tùm temporis plurimum affici observatur; sed tantùm ejusmodi phænomena explicare hìc conabimur, quæ memoratis perturbationibus minimè sint obnoxia.

§. 100. Quod igitur ad primam classem attinet, præcipuum Phænomenum in hoc consistit, quòd ubique in amplissimo Oceano quotidie bini Maris Fluxus seu elevationes, binique Refluxus seu depressiones observentur, atque tempus inter binos Fluxus successivos circiter 12. h. 24'. deprehendatur. Huic verò Phænomeno, si ulli alii, per theoriam nostram plenissimè est satisfactum, ubi ostendimus maximam aquæ elevationem deberi transitui Lunæ per meridianum tam supra quàm infra Terram: ex quo cùm Luna unâ revolutione diurnâ bis ad ejusdem loci meridianum appellat intervallo temporis circiter 12. hor. 24', necessariò sequitur unâ revolutione Lunæ circa Terram binos Fluxus tanto tempore à se invicem dissitos oriri debere, quemadmodum hoc ipsum calculus tam pro hypothesi aquæ inertiâ carentis, quàm admissâ inertiâ, clarissimè indicavit. Simul autem ex iisdem determinationibus intelligitur sub ipsis polis nullum omnino æstum dari diurnum, in regionibus verò à polis non procul remotis, ubi luminaria vel non oriuntur vel non occidunt; quotidie unum tantum Fluxum unicumque Refluxum contingere debere; quæ consequentia theoriæ, etsi observationibus nondum satis est comprobata, tamen quia ex iisdem principiis sequitur quæ institutis observationibus satisfaciant, nulli ampliùs dubio subjecta videtur. In locis autem æquatori propioribus, quibus quotidie bini Fluxus totidemque Refluxus eveniunt, momentum, quo aqua maximè deprimitur non satis exactè medium interjacere observatur inter Fluxuum momenta, sed mox priori mox posteriori est propius, quod Phænomenum cum nostrâ theoriâ apprimè congruit; ostendimus enim momentum Refluxûs non exactè tempori medio inter Fluxus respondere, nisi vel locus situs sit sub æquatore, vel Lunæ declinatio fuerit nulla, sed modò priori modò posteriori Fluxui esse propius.

§. 101. Secundum Phænomenum huc redit, ut ubique locorum Fluxus post transitum Lunæ per meridianum venire observetur, idque aliquot horarum spatio, in portubus versùs apertum Oceanum patentibus. Nam in regionibus quæ cum Oceano non liberrimè communicantur, sed ad quas aqua juxta littora deferri debet, multo tardiùs æstus advenit, quæ retardatio si ferè ad 12 horas ascendit, in causa esse solet, ut hujusmodi in locis Fluxus ante transitum Lunæ per meridianum venire videatur. Ita ad Portum Gratiæ videri posset Fluxus 3 horis Lunæ culminationem antecedere, cùm tamen, re benè consideratâ, à præcedente culminatione oriatur, atque adeo eam 9 ferè horis demum sequatur, uti apparebit si æstuum momenta, quæ successivè ad littora Britanniæ minoris

 &

& Normanniæ obſervantur continuóque magis retardantur, attentiùs inſpiciantur. Deberet quidem ubique Fluxus in ipſos Lunæ tranſitus per meridianum incidere, imò quandoque ob Solem præcedere, non ſolum demtâ inertiâ, ſed etiam eâ poſitâ, ſi tantum aquæ motus verticalis ſpectetur; at ſi etiam motûs horizontalis ratio habeatur, tum dilucidè oſtendimus Fluxum perpetuò retardari, ac demum poſt Lunæ tranſitum per meridianum evenire debere. Tempus quidem hujus retardationis, cùm ſit admodum variabile pluribuſque circumſtantiis ſubjectum, non definimus, interim tamen id ex §. 82. colligi poterit, remotis externis impedimentis: cùm enim invenerimus aquam propriâ vi gravitatis ſeſe in ſitum æquilibrii recipere tempore $\frac{12}{n}$ horarum, ac numerum n eſſe circiter 5 vel 6, manifeſtum eſt tanto etiam tempore opus eſſe, quo aqua eum ſitum quem vires intendunt, induat, ex quo Fluxus circiter 2 horas vel 2½ hor. poſt tranſitum Lunæ per meridianum contingere debebit, id quod cum obſervationibus in Oceano libero inſtitutis egregiè convenit; hancque idcirco præcipuam hujus retardationis cauſam meritò aſſignamus.

§. 102. Tertium Phænomenon ſuppeditat æſtûs magnitudo, quæ autem tam diverſis locis quàm diverſis tempeſtatibus maximè eſt mutabilis. Interim tamen exceptis enormibus illis æſtubus, qui nonnullis in portubus obſervari ſolent, reliqui cum noſtrâ Theoriâ egregiè conſentiunt; inertiâ enim ſublatâ, invenimus ſub æquatore maximum æſtum fore per ſpatium circiter 4 pedum, ab inertia autem hoc intervallum augeri ita ut duplo, vel triplo, vel etiam quadruplo & plus fiat majus, prout valor ipſius g (vid. §. 82.) minor fuerit vel major, quippe qui à facultate Oceani ſeſe propriâ ſuâ vi in ſtatum æquilibrii reſtituendi pendet; ex quo ſub æquatore ſpatium per quod maximus æſtus agitatur ad 8., 12, 16 & plures pedes exſurgere poteſt. In regionibus autem ab æquatore remotis invenimus magnitudinem æſtûs tenere rationem duplicatam coſinuum elevationis poli, unde ſub elevatione poli 45°., magnitudo æſtûs circiter duplo erit minor quàm ſub ipſo æquatore; cujus veritas in locis à littoribus aliquot milliaria remotis per experientiam eximiè comprobatur. Deprehenditur enim ubique in locis à littoribus remotis æſtus multò minor quàm ad littora; cujus diſcriminis cauſa in ſequenti capite dilucidè indicabitur. Quinetiam in medio Mari plerumque æſtus adhuc minor obſervatur, quàm hæc regula requirit; id autem oſtendetur à non ſatis amplâ Oceani extenſione ſecundùm longitudinem proficiſci, quemadmodum in Oceano Atlantico qui verſùs Occidentem littoribus Americæ; verſùs Orientem verò, littoribus Africæ & Europæ terminatur, quæ amplitudo non eſt ſatis magna, ut integram æſtûs quantitatem ſuſcipere queat.

§. 103.

§. 103. Quartum Phænomenon varietates menſtruas reſpicit, atque oſtendit æſtus, qui circa plenilunia & novilunia contingunt, inter reliquos ejuſdem menſis eſſe maximos, æſtus verò circa quadraturas luminarium minimos; quæ inæqualitas cum theoriâ noſtrâ ad amuſſim quadrat. Cùm enim æſtus Maris non ſolum ab eâ vi, quæ vortici Lunam ambienti competit, oriatur, ſed etiam à vi Solem ſpectante pendeat, quæ, ceteris paribus circiter quadruplo minor eſt vi Lunæ, manifeſtum eſt æſtum Maris maximum eſſe debere, ſi ambæ vires inter ſe conſpirent, atque aquam ſimul vel elevent vel deprimant, id quod accidere oſtendimus tam pleniluniis quàm noviluniis. Deinde ſimili modo, quoniam iſtæ vires inter ſe maximè diſcrepant in quadraturis, quibus temporibus dum aqua à Lunâ maximè elevatur, ſimul à Sole maximè deprimitur ac viciſſim, perſpicuum eſt iiſdem temporibus æſtum minimum eſſe debere. Præterea verò ipſum diſcrimen cum theoriâ exactè convenit; in pluribus enim portubus æſtus maximos & minimos ad calculum revocavimus, atque ex relatione eorum relationem inter vires Lunæ ac Solis inveſtigavimus; hincque perpetuò eandem ferè rationem inter vires Solis ac Lunæ abſolutas elicuimus, quemadmodum id fecit Newtonus ex obſervationibus Briſtolii & Plymouthi, nos verò in Portu Gratiæ inſtitutis, concluſionibus mirificè inter ſe congruentibus: qualis conſenſus profectò expectari non poſſet, ſi theoria veritati non eſſet conſentanea. Neque etiam aliæ theoriæ adhuc productæ, cujuſmodi ſunt Galilæi, Walliſii atque Carteſii, qui cauſam in preſſione Lunæ collocavit, huic phænomeno perfectè ſatisfaciunt, ſed potiùs prorsùs evertuntur.

§. 104. Quintum Phænomenon in hoc conſiſtat, quòd unius menſis intervallo maximi æſtus non ſint ii, qui novilunia ac plenilunia proximè inſequuntur, ſed ſequentes tertii ſcilicet circiter vel quarti, ſimilique intervallo æſtus minimi demum poſt quadraturas contingunt. Hujus autem Phænomeni ratio in §. 97. fuſiùs eſt expoſita, ubi oſtendimus, cùm æſtus ante ſyzygias incidentes eſſent minores, maximam vim à Sole & Lunâ ortam non ſubitò æſtum maximum producere valere, ſed tantùm Mare ad eum ſtatum ſolicitare. Cùm igitur poſt ſyzygias vis æſtum efficiens ſenſibiliter non decreſcat, æſtus etiamnum poſt hoc tempus incrementa capiet, atque ideo demum poſt ſyzygias fiet maximus; ſimiliſque eſt ratio diminutionis æſtuum, quæ etiamnum poſt quadraturas contingere debet, ita ut æſtus minimi demum poſt quadraturas eveniant. Hujuſmodi autem retardationes effectuum à viribus in mundo exiſtentibus provenientium quotidie abundè experimur: ob ſimilem enim rationem ſingulis diebus maximum calorem non in ipſo meridie ſentimus, etiamſi hoc tempore vis Solis calefaciens ſine dubio ſit maxima, ſed demum aliquot horis poſt meridiem, atque propter eandem cauſam neque ſolſtitii æſtivi momento maximus calor annuus ſentitur, neque tempore ſolſtitii hyberni frigus ſummum, ſed utrumque notabiliter tardiùs.

§. 105.

§. 105. Sextum Phænomenon in hoc ponimus, quòd momenta Fluxuum tempore syzygiarum multo strictiùs ordinem tenere observantur, quàm circa quadraturas. Hic verò ante omnia animadvertendum est præcipuam sensibilem anomaliam in momentis æstuum inde originem trahere, quòd hæc momenta ex tempore solari atque à vero meridie seu transitu Solis per meridianum soleant computari, cùm ea potiùs à transitu Lunæ per meridianum pendeant. Quòd si autem ad has observationes tempus lunare à transitu Lunæ per meridianum computandum adhibeatur, irregularitates apparentes maximam partem evanescent, hoc verò multo magis in fluxubus circa syzygias quàm quadraturas: in quadraturis enim quoniam, dum Luna per meridianum transit, Sol non semper in horizonte versatur, sed vel ad horizontem demum accedit vel jam ab eo recedit, necesse est ut illo casu Fluxus citiùs, hoc verò tardiùs contingat: quod discrimen cùm partim ab elevatione poli partim à declinatione luminarium pendeat, momenta Fluxuum in quadraturis magis irregularia reddit: interim tamen habitâ harum circumstantiarum ratione satis propè definiri potest. Circa tempora Fluxuum autem, qui in noviluniis ac pleniluniis incidunt, hæc sola correctio seu reductio ad transitum Lunæ per meridianum omnem ferè anomaliam tollit, quorsum spectat regula à celeb. Cassino in Mem. 1710. tradita, quâ pro totidem horis, quibus plenilunium seu novilunium vel ante meridiem vel post incidit, totidem bina minuta ad tempus Fluxûs medium vel addere vel ab eo subtrahere jubet, quippe quæ ex motu Lunæ est petita. Interim tamen hâc correctione adhibitâ aliqua anomalia superesse deprehenditur, cujus autem ratio ex nostrâ theoriâ sponte sequitur. Quando enim syzygia ante meridiem celebratur, tum dum Luna per meridianum transit, Sol jam ante eum est transgressus, atque ideo jam horizonti appropinquat, ex quo necesse est ut Fluxus citiùs eveniat, quàm prima regula sola adhibita indicat. Atque etiam idem in tabulis Fluxuum Dunkerquæ & in Portu Gratiæ observatorum, Mem. 1710. insertis, manifestò conspicitur: quando enim novilunium pleniluniumve pluribus horis ante meridiem accidit, tum Fluxus citiùs advenisse observatur, quàm calculus Cassinianus indicabat; contrà verò tardiùs si syzygiæ demum pluribus horis post meridiem inciderint, cujus majoris retardationis causa in Sole tum adhuc ab horizonte recedente est quærenda.

§. 106. Septimum Phænomenon suppeditat diversa retardatio Fluxuum in syzygiis luminarium & quadraturis respectu appulsûs Lunæ ad meridianum; tardiùs scilicet ubique locorum Fluxus, qui in syzygiis contingunt, insequuntur culminationem Lunæ, quàm ii, qui circa quadraturas veniunt. Hujus autem Phænomeni duplex causa potest assignari, quarum prima à solâ quantitate æstuum petitur, quia enim æstus syzygiarum multò sunt majores quàm æstus quadraturarum, consentaneum videtur illos tardiùs venire quàm hos. Altera verò causa quæ hoc Phænomenon multò distinctiùs explicat, nullique dubio locum relinquit, nostræ theoriæ omnino est propria, priorique longè est præferenda. Ponamus enim t esse tempus, quo in noviluniis ac pleniluniis Fluxus post appulsum Lunæ ad meridianum venire solet; sequentibus igitur diebus hoc tempus t continuò diminuetur, quia tum Sol, dum Luna in meridiano versatur, Mare jam deprimit; quæ diminutio cùm duret ferè usque ad quadraturas, necesse est ut his temporibus Fluxus multò citiùs post culminationem Lunæ sequantur, viribusque sollicitantibus magis obtemperent, uti hoc fusiùs §. 91. explicavimus, unde tempus retardationis in quadraturis tantum erit $t - \theta$. Post quadraturas autem Sol exerit contrarium effectum, atque adventum Fluxûs continuò magis retardat, idque æquali modo, quo antè acceleraverat, ex quo usque ad sequentem syzygiam intervallum $t - \theta$ iterum ad t usque augebitur. Hujusque Phænomeni solius explicatio sufficere posset ad veritatem theoriæ nostræ evincendam, cùm id omnibus aliis theoriis explicatu sit insuperabile; neque à nemine adhuc saltem probabilis ejus causa sit assignata.

§. 107. Octavum Phænomenon petamus ex inæqualitate duorum Fluxuum sese immediatè insequentium, quorum alter transitui Lunæ superiori per meridianum respondet, alter inferiori, quæ inæqualitas maximè observatur in regionibus ab æquatore multum remotis, ac tum cum Lunæ declinatio est maxima. Theoria quidem declarat Lunam, etiamsi in ipso æquatore versetur, tamen majori vi gaudere ad Mare movendum, quandò super horizonte meridianum attingit, quàm infra horizontem; at discrimen sub æquatore tam est exiguum, ut vix in sensus occurrere queat, integrum enim digitum non attingit (§. 41.); atque in regionibus ab æquatore remotis fit multò minus. Vera igitur hujus Phænomeni ratio in altitudine Lunæ meridianâ seu distantiâ ab horizonte continetur; hinc enim sequitur quò major fuerit differentia inter distantias Lunæ ab horizonte, dum per meridianum transit tum super horizonte tum sub horizonte, eò majorem esse debere differentiam inter binos Fluxus successivos, ex quo perspicuum est illam differentiam versùs polos continuò crescere debere, si quidem Luna habeat declinationem. Quòd si ergo Luna habuerit declinationem borealem, tum in regionibus septentrionalibus Fluxus erit major qui transitum Lunæ per meridianum superiorem sequitur, alter verò sequens, qui transitui inferiori respondet, minor. Contrà autem si Lunæ declinatio fuerit australis, appulsui Lunæ ad meridianum superiori Fluxus succedet minor, inferiori verò major; hancque differentiam Flamstedius observavit diligenter, nullumque est dubium, quin ea per copiosissimas observationes, quas Academia Celeberrima Regia Parisina collegit, omnino confirmetur. In hoc autem negotio indoles Fluxuum probè est inspicienda, quoniam aliquibus in por-

portibus tantopere retardantur, ut sequentibus Lunæ transitibus per meridianum sint propiores, quàm illi, cui suam originem debent; ita Dunkerquæ circa syzygias Fluxus circiter meridie observari solet, neque verò illi ipsi transitui Lunæ per meridianum est tribuendus qui eodem tempore fit, sed præcedenti, prouti successiva retardationis incrementa ad littora Galliæ & Belgii borealia evidentissimè testantur. Quare si verbi gratiâ Dunkerquæ quis hujusmodi observationes perlustrare voluerit, is quemque Fluxum non cum transitu Lunæ per meridianum proximo comparet, sed cum eo qui propemodum 12 horis antè contigit; alioquin enim contraria Phænomena esset deprehensurus.

§. 108. Commodus hìc nobis præbetur locus explicandi transitum à binis æstubus, qui quotidie in regionibus extra circulos polares sitis eveniunt, ad singulos æstus, qui secundùm theoriam nostram in regionibus polaribus contingere debent. Quoniam enim theoria nostra monstrat, in zonis temperatis & torridâ quotidie duos Fluxus observari debere, in zonis frigidis autem unum tantum, transitio subitanea à binario ad unitatem maximè mirabilis ac paradoxa videri posset. Sed quia si Fluxus bini successivi inter se sunt inæquales, Refluxus aquæ seu maxima depressio Fluxui minori est vicinior, bini æstus quoque successivi ratione temporis inter se erunt inæquales, si quidem voce æstûs intelligamus motum aquæ à summâ elevatione ad imam depressionem usque, ac vicissim. Quò magis itaque ab æquatore versùs polos recedatur, eò major deprehendetur inter binos æstus successivos inæqualitas, cùm ratione magnitudinis tùm temporis, major enim diutiùs durabit quàm minor, ambo verò simul ubique absolventur tempore 12 horarum, cum 24' circiter: quòd si itaque in eas regiones usque perveniatur, in quibus Luna utrâque vice vel super horizonte vel sub horizonte meridianum attingit, æstus minor omnino evanescet, solusque major supererit, qui tempus 12 h. 24'. adimplebit. Ex quibus perspicuum est, si Luna habeat declinationem, inæqualitatem binorum æstuum successivorum ad polos accedendo continuò fieri majorem, atque tandem minorem omnino evanescere debere, quod cùm evenit, bini æstus in unum coalescunt.

§. 109. Explicatis anomaliis æstûs Maris menstruis, pervenimus ad anomalias annuas vel plusquam annuas, ac nonum quidem Phænomenon desumimus ex variatione æstûs, quæ à diversis Lunæ à Terra distantiis proficiscitur. Observantur enim æstus ubique majores ceteris paribus, in iisdem scilicet luminarium aspectibus iisdemque declinationibus, si Luna in suo perigæo versetur, minores verò, Lunâ in apogæo existente. Egregiè autem hæc conveniunt cum nostrâ theoriâ, quâ demonstravimus Lunæ vires ad Mare movendum decrescere in triplicatâ ratione distantiarum Lunæ à Terra: quòd si igitur Luna versetur in perigæo Fluxus debebunt esse majores, quàm si Luna apogæum occupat. Præterea etiam tabula

tabula quam Celeb. Cassini in Mem. 1713. pro diversis Lunæ à Terrâ distantiis ex plurimis observationibus Brestiæ institutis collegit, satis accuratè cum theoriâ nostrâ conspirat, etiamsi enim pro Luna perigæa minorem elevationem aquæ tribuat, quàm ista ratio requireret, tamen discrimen valde est exiguum: quin etiam facilè concedetur Lunam perigæam totum suum effectum non tam citò consequi posse, quem consequeretur, si Luna perpetuò in perigæo versaretur. Aliter autem Luna apogæa est comparata, quæ ad diminuendum æstum Maris tendit, cùm enim Mare ob inertiam & impedimenta ipsum ad diminutionem æstûs sit proclive, sine ullâ resistentiâ Luna in apogæo constituta effectum suum exeret. Huc etiam pertinet, quod pariter Celeb. Cassini se observasse testatur, similem differentiam etsi multò minorem à variis Solis à Terrâ distantiis produci, id quod nostræ theoriæ non solum est consentaneum, sed inde etiam ipsa quantitas hujus differentiæ potest definiri.

§. 110. Denique decimum Phænomenon sese nobis contemplandum offert, quo vulgò statui solet æstus tam noviluniorum quàm pleniluniorum, qui contingunt circa æquinoctia, cæteris esse majores, etiamsi observationes hanc regulam non penitùs confirment; quamobrem videamus quomodo æstus cæteris paribus comparatus esse debeat pro diversis Lunæ declinationibus. Ac primò quidem ex nostrâ theoriâ (§. 87.) æstus dum Luna in æquatore versatur, maximos esse non posse, nisi in locis sub ipso æquatore sitis; atque eodem loco tabellam adjecimus, ex quâ patet, cuinam Lunæ declinationi maximi æstus respondeant. Ita pro elevatione poli 50°, æstus maximi incidunt Lunæ declinationi 27°, si quidem g ponatur $= \frac{1}{25}$; at posito $g = \frac{1}{10}$, quod probabilius videtur, prodit Lunæ declinatio maximum æstum producens circiter 16°, id quod mirificè convenit cum observationibus ad Littora Galliæ Septentrionalia institutis, quibus constat maximos syzygiarum æstus mensibus Novembri & Februario accidere solere, quibus temporibus Luna ferè assignatam obtinet declinationem. At quod fortè illi regulæ, quâ Lunæ in æquatore versanti maximi æstus adscribi solet, ansam præbuisse videtur, est modus æstuum quantitates definiendi peculiaris ac satis perversus; cùm enim crederent plerique observatores causis alienis tribuendam esse inæqualitatem, quæ inter binos æstus successivos intercedat, veram aquæ elevationem accuratiùs definire sunt arbitrari, si sumerent medium inter binos Fluxus successivos. Quòd si autem hoc modo quique æstus æstimentur, tum utique maximi æstus in æquinoctia incidere observabuntur, id quod etiam nostræ theoriæ maximè est conforme, exceptis tantum regionibus polis vicinioribus. Cùm enim positis sinu elevationis poli $= P$, cosinu $= p$, sinu declinationis Lunæ $= Q$, cosinu $= q$, major æstus fiat per spatium $\frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq+\frac{PQ(1-8g)^2}{1-2g}\right)$, minor verò per spatium =

$\frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq-\frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, §. 86.) erit per hunc æstum Maris mensurandi modum quantitas æstûs $= \frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right) = \frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2-p^2Q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right)$; ex quâ expressione perspicitur maximos æstus ubique, si quidem modo recensito mensurentur, Lunæ in ipso æquatore degenti respondere, nisi sit $\frac{(1-8g)^2P^2}{(1-2g)^2} > p^2$, hoc est nisi tangens elevationis poli major sit quàm $\frac{1-2g}{1-8g}$: his scilicet regionibus etiam Luna declinans ab æquatore majores æstus producet. At si ponatur $g=\frac{2}{25}$, prodit elevatio poli, ubi regula prolata fallere incipit, 66°; sin autem ponatur $g=\frac{1}{18}$, fit elevatio poli major quàm 58°; at posito $g=\frac{1}{10}$, provenit poli elevatio 76°. Cùm igitur in locis polis tam vicinis observationes institui non soleant, satis tutò affirmare licet, maximos æstus menstruos accidere circa æquinoctia, si quidem quantitas æstûs quotidie mensuretur per medium arithmeticum inter spatia, quæ duo æstus successivi conficiunt.

§. 111. Quid nunc aliud de theoriâ nostrâ sit sentiendum, nisi eam veram & genuinam æstûs Maris causam, qualis ab Illustrissima Academia Regia in propositâ quæstione desideratur, in se complecti, non videmus? Non solum enim omnia Phænomena, quæ in æstu Maris observantur, clarè & distinctè explicavimus, sed etiam existentiam actualem earum virium, quibus hos effectus adscribimus evidentissimè demonstravimus; ex quo efficitur causam à nobis assignatam, non tantum omnibus Phænomenis satisfacere, sed etiam esse unicam quæ cum verâ consistere queat. Quòd si enim quispiam alias vires excogitet, quibus æquè omnia Phænomena explicare posset, etiamsi hoc fieri posse minimè concedamus, ejus certè explicatio subitò concideret & everteretur à viribus nostræ theoriæ, quas aliunde in mundo existere abundè constat; quoniam ab illis viribus imaginariis hisque realibus conjunctim effectus duplicatus consequi deberet, quem experientia aversatur. Nunc igitur nobis summo jure asserere posse videmur, veram æstûs Maris causam in duobus vorticibus esse positam, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam agitetur, atque uterque ejus sit indolis, ut vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum à centris utriusque vorticis: quæ proprietas obtinetur, si celeritas materiæ subtilis gyrantis in quoque vortice teneat rationem reciprocam subduplicatam distantiarum. Neque verò hi duo vortices ad libitum sunt excogitati, sed ille qui Solem circumdat est is ipse, qui omnes planetas in suis orbitis continet; alter verò Lunam circumdans, etsi ejus vis nisi in æstu Maris non sentitur, tamen sine ullâ hæsitatione admitti potest, cùm certò constet Ter-

Terram, Jovem ac Saturnum similibus vorticibus esse cinctos, unde ejusmodi vortices nulli omnino corpori mundano denegari posse videntur. Parciùs quidem hîc materiam de vorticibus tractavimus, etiamsi in illis veram æstûs Maris causam ponamus; hoc autem de industriâ fecimus, cùm hoc argumentum jam toties sit tractatum ac ferè exhaustum; neque nobis persuadere possimus, si hâc occasione doctrinam de vorticibus etiam meliùs, quam etiamnum à quoquam est factum, expediremus, ob eam rem præmium nobis tributum iri.

CAPUT OCTAVUM.

De Æstûs Maris perturbatione à Terris ac littoribus oriundâ.

§. 112. PERVENIMUS tandem ad ultimam nostræ disquisitionis partem, quæ præcipua est, in quâ Theoriam expositam ad statum telluris, in quo reverâ reperitur, debito modo accommodabimus. Hactenus enim, quò ardua ista disquisitio facilior redderetur, ab omnibus circumstantiis externis quibus effectus à viribus Solis ac Lunæ oriundis vel turbari vel determinatu difficiliores reddi possent, cogitationem abstraximus. Primò scilicet non solum totam Terram ex aquâ constatam posuimus, sed etiam inertiam aquæ mente sustulimus, ut eò pauciores res in computum ducendæ superessent. Deinde inertiæ quidem habuimus rationem, ac præcedentes determinationes debito modo correximus; verùm totam Terram aquâ undiquaque circumfusam assumsimus, seu etiamnum anomalias à Terris neglexinus. Nunc itaque nostra theoria eò est perducta, ut nihil ampliùs adjicere necesse foret, si quidem æstus Maris à Terris littoribusque sensibiliter non afficeretur; nisi fortè anomaliæ quædam à ventis oriundæ commemorari deberent, quæ autem motu aquæ perspecto facilè adjudicantur, atque ad omnes theorias æquè pertinent. Quamobrem ultimum hoc caput destinavimus explicationi Phænomenorum quorumdam singularium, quorum causa non tam in ipsâ aquâ viribusque eam sollicitantibus, quàm in Terrâ continenti littoribusque est quærenda: hac enim parte absolutâ nihil ampliùs restare videtur, quod vel ad Theoriæ nostræ confirmationem, vel ad omnium Phænomenorum adæquatam explicationem desiderari queat. Quamvis enim Illustrissima Academia totum hoc argumentum non penitùs exhauriri jubeat, cùm adhuc nonnullas quæstiones de eodem in posterum proponere constituisset, tamen quia hoc tempore vera causa physica desideratur, veritatem nostræ theoriæ non satis confirmari arbitramur, nisi ejus convenientiam cum omnibus Phænomenis dilucidè ostenderemus, cùm si vel uni-

unicum Phænomenon refragaretur, eo ipso tota theoria subverteretur; quam ob causam prolixitatem nostræ tractationis, atque transgressionem limitum præscriptorum nobis sine difficultate condonatum iri confidimus.

§. 113. Primùm autem perspicuum est motum Maris horizontalem quo vel versùs orientem vel occidentem progreditur, ob Terram interpositam non solum perturbari, verùm etiam quandoque prorsus impediri debere. Suprà enim ostendimus, si tota Terra aquâ esset circumfusa, tum ubique ad Fluxum formandum aquam ab oriente advehi debere, ante refluxum autem versùs ortum defluere. Quòd si ergo Oceanus versùs orientem Terris terminetur, fieri omnino nequit tempore Fluxûs ad hæc littora aqua ab oriente affluat, quo ipso cursus aquæ naturalis penitùs impedietur. Quoniam autem vires Solis ac Lunæ nihilominùs his in regionibus Mare attollere conantur, effectum consequi non poterunt, nisi aqua ab Occidente afferatur: sic quando ad littora Europæ aqua à viribus Solis ac Lunæ elevatur, aqua ab Occidente eò deferatur necesse est, ab iis scilicet regionibus, ubi aqua eodem tempore deprimetur; quod idem fieri debet ad littora Africæ & Americæ occidentalia. Contrà verò ad littora Asiæ & Americæ orientalia aqua naturali motu feretur, atque in Fluxu ab oriente adveniet, in Refluxu verò versùs orientem recedet. Vires namque Solis ac Lunæ motum aquæ horizontalem non per se determinant, sed eâtenus tantum, quâtenus aliis in locis aquam attollunt, aliis verò eodem tempore deprimunt; atque aqua ob propriam gravitatem eum seligit motum, quo facillimè à locis quibus deprimitur, ad loca quibus attollitur promoveatur: quamobrem iste motus maximè à Terris oceanum includentibus determinetur necesse est. Hinc igitur perspectâ positione littorum cujusvis Maris facilè definiri poterit, à quanam plagâ aqua in Fluxu venire, quorsumque in Refluxu decedere debeat, si modò elevationes & depressiones aquæ per totum Mare attentè considerentur: tota enim hæc quæstio pertinebit ad hydrostaticam.

§. 114. Cùm igitur ad littora Europæ aqua elevari nequeat, nisi affluxus ab occidente fiat copiosus, ad littora quæ versùs occidentem respiciunt aqua directè ab occidente adveniet, quæ autem littora ad aliam plagam sunt disposita, aquæ cursus versùs orientem directus inflectetur juxta littora, priusquam eò pertingat, omnino uti inspectio mapparum docebit. Quoniam verò iste aquæ juxta littora Fluxus tantam celeritatem, quantam habet Luna, recipere nequit, necesse est, ut Fluxus ad littora magis ad orientem sita tardiùs advehatur. Hæc autem versùs littora orientaliora retardatio maximè perspicua est in portubus Galliæ, Belgii, Angliæ & Hiberniæ; cùm enim ad ostia fluviorum Garumnæ & Ligeris, quæ versùs Oceanum amplissimum patent, tempore pleniluniorum

niorum ac noviluniorum Fluxus adveniunt horâ tertiâ pomeridianâ, quæ retardatio naturalis censeri potest, neque littoribus adhuc turbata; hinc aqua demum ad littora Britanniæ minoris ac Normanniæ progreditur; atque idcirco his in regionibus Fluxus tardiùs evenire observantur. Sic ad Portum S. Malo tempore syzygiarum Fluxus demum horâ sextâ sequitur, ad ostia verò Sequanæ usque ad horam nonam retardatur: atque ita porro retardatio augetur, donec tandem in freto Gallico Dunkerquæ & Ostendæ mediâ nocte incidat. Ex hac verò retardatione innotescit celeritas aquæ, quâ juxta littora progreditur, eaque tanta deprehenditur quâ unâ horâ spatium circiter (†) 8. milliarium conficiat. Denique aqua tantam fere viam absolvere debet usque ad Dublinum, quantam ad fretum Gallicum, ex quo Fluxus etiam Dublini horâ circiter decimâ pomeridianâ observari solet. Atque simili modo retardatio Fluxuum ad littora aliarum regionum sine ullâ difficultate explicari poterit.

§. 115. Quod autem ad quantitatem æstûs Maris ad littora attinet; facilè intelligitur æstum Maris ad littora majorem esse debere, quàm in medio mari. Primò enim aqua cum impetu ad littora allidit, ex quo allapsu solo jam intumescentia oriri debet. Deinde quoniam aqua eâdem celeritate, quam habebat Oceano, ubi maxima est profunditas, progredi conatur, ad littora locaque vadosa vehementer inturgescet, tantum enim fere aquæ ad littora affertur, quantum sufficeret ad spatium, quod Terra occupat, inundandum. Tertiò iste aquæ affluxus in finibus vadosis multò adhuc magis increscere debet, eò quòd aqua his in locis jam multum appulsa ad latera diffluere nequit, si quidem sinus directè versùs eam plagam pateat, unde aqua advehitur. Ex his igitur non solum ratio patet, cur aqua fere ubique ad littora ad multo majorem altitudinem elevetur, quàm in medio Mari, sed etiam cur Bristolii tam enormis Fluxus circa syzygias luminarium observetur; cùm enim in hâc regione littus sit valdè sinuosum ac vadosum, aqua maximâ vi appellitur, neque ob sinuositatem tam citò diffluere potest. Atque ex his principiis non erit difficile rationem inconsuetorum æstuum, qui passim in variis portubus animadvertuntur, indicare atque explicare; quamobrem hujus generis Phænomenis explicandis diutiùs non immoramur, cùm consideratio littorum & Fluxûs aquæ eò sponte quasi manuducat.

§. 116. Quamvis autem tam Affluxus aquæ ex Oceano Atlantico, quàm Refluxus per fretum Galliam ab Anglia dirimens, ingenti fiat celerita-

(†) Ita legitur in exemplari Parisino, procul dubio mendosè, sed locum restituere non sumus ausi; ab ostio Garumnæ ad Dublinum quingenta circiter Italica milliaria numerantur via rectissima, quæ horis 7 à fluxu percurruntur qui ideo 70 milliaria singulis horis ad minimum emetiretur, unde 80 milliaria pro 8 milliaribus scribenda conjectamus.

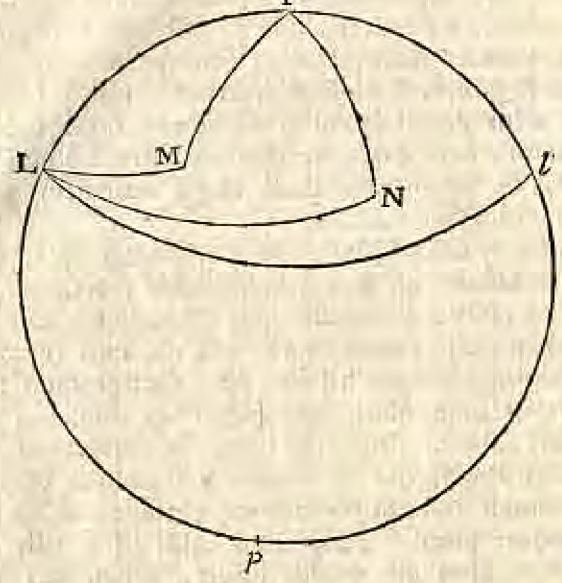
leritate, tamen cùm versus Belgium fœderatum Mare mox vehementer dilatetur, ab isto alterno Fluxu ac Refluxu altitudo Maris in Oceano Germanico sensibiliter mutari nequit. Atque hanc ob causam statui oportet, in hoc Mari æstum proficisci maximam partem ab affluxu & refluxu aquæ circa Scotiam, ubi communicatio hujus Maris cum Oceano Atlantico multo major patet; quam sententiam magnopere confirmat ingens æstuum retardatio ad littora Belgii & Angliæ orientalia observata, ad Ostia scilicet Thamisis pertingit Fluxus elapsis jam duodecim horis post transitum Lunæ per meridianum, atque Londinum usque tribus ferè horis tardiùs defertur; quod Phænomenon consistere non posset si aqua per fretum Gallicum solùm moveretur, cùm jam in ipso freto duodecim horis retardetur Fluxus. Interim tamen negari non potest quin communicatio Maris Germanici cum Oceano Atlantico per fretum Gallicum æstum quoadmmodo afficiat, atque Fluxum qui circa Scotiam advehitur vel adjuvet vel turbet, prout hi ambo motus ad Mare elevandum ac deprimendum vel magis inter se conspirent vel minus. Simul autem hinc intelligitur æstum Maris ex Oceano Atlantico neque cum Mari Mediterraneo neque cum Mari Baltico communicari posse, cùm intervallo sex horarum per freta Herculea & Oresundica tantum aquæ in hæc maria neque affluere queat neque inde refluere, ut sensibilis mutatio in altitudine aquæ oriri queat. Quamobrem in istiusmodi maribus quæ à vasto Oceano tantum angustis fretis separantur, æstus omnino nullus contingere potest, nisi forte talia maria Terris inclusa ipsa tam sint ampla, ut vires Solis ac Lunæ æstum peculiarem in iis producere queant; quâ de re mox videbimus.

§. 117. Quemadmodum autem vidimus in Mari Germanico duplicem æstum, quorum alter, qui quidem longè est minor, per fretum Gallicum, alter circa Scotiam advehitur ex eodem Oceano Atlantico: ita propter singularem littorum quorumdam situm mirabilia Phænomena in æstu Maris evenire possunt. Quòd si enim littus quodpiam ita fuerit comparatum, ut æstus in id duplici viâ vel ex eodem Oceano, vel ex diversis communicetur, ratione temporis, quo bini isti æstus adveniunt insignes discrepantiæ oriri poterunt. Nam si per utramque viam Fluxus eodem tempore advehatur, atque adeo simul Refluxus congruant, æstus multo majores existere debebunt. Sin autem eo tempore, quo per alteram viam Fluxus advenit, ex alterâ viâ Refluxus incidat, tum æstus omnino destruetur si quidem per utramque viam aqua æquali vel affluat vel defluat. Ad hoc verò non sufficit ambæ viæ sint æquales, sed etiam requiritur ut bini æstus successivi sint æquales, id quod evenit si Luna vel non habeat declinationem, vel littus in æquatore fuerit positum. Quòd si autem eadem duplici communicatione positâ, tam Luna habeat declinationem, quàm littus notabiliter ab æquatore sit motum, tum ob inæ-

inæqualitatem binorum æstuum sese insequentium, Fluxus majores ex alterâ viâ advenientes, superabunt Refluxus minores eodem tempore per alteram viam factos, atque hoc modo in tali littore singulis diebus non bini Fluxus, sed unus tantum accidet; hancque rationem allegat Newtonus æstûs illius singularis Tunquini observati, ubi si Luna in æquatore versatur nullus æstus deprehenditur, sin autem Luna habeat declinationem unicus tantum unâ Lunæ revolutione circa Terram. Nos autem mox hujus mirabilis Phænomeni aliam magis naturalem nostræque theoriæ conformem indicabimus causam.

§. 118. Hactenus æstum Maris, quemadmodum in amplissimo Oceano à viribus ad Lunam ac Solem tendentibus producatur, atque vario littorum situ cùm ratione quantitatis tùm retardationis diversimodè turbetur, sumus contemplati, neque necesse esse duximus ventorum Marisque cursuum propriorum rationem habere, cùm satis pronum sit perspicere, quomodo his rebus æstus Maris tam augeri vel diminui, quàm accelerari vel retardari debeat. Superest igitur ut exponamus, quomodo in satis amplo tractu Maris, qui ab Oceano vel omnino est sejunctus, vel per angustum tantum canalem conjunctus, peculiaris æstus à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Perspicuum enim est si talis tractus secundùm longitudinem ultra 90 gradus pateat, æstum pari modo generari debere, ac in amplissimo Oceano, qui totam tellurem ambire ponitur. Nam quoniam extensio tanta est, ut vires Lunæ & Solis in eo tractu simul maximam ac minimam aquæ altitudinem inducere queant, necesse est etiam, ut aqua alio in loco tantum elevetur, inque alio tantum deprimatur, quantum fieret, si iste tractus omnino non esset terminatus. At si iste tractus tam fuerit parvus ut singulæ partes æqualibus fere viribus simul vel attollantur vel deprimantur, nulla sensibilis mutatio oriri poterit. Aqua enim uno in loco attolli nequit nisi in alio subsidat & contrà, si quidem eadem aquæ copia in eo tractu perpetuò conservetur. Atque hæc est ratio ut in Mari Baltico, Caspio, Nigro, aliisque minoribus lacubus nullus omnino æstus deprehendatur.

§. 119. Quòd si autem istiusmodi Maris tractus tantum spatium occupet, ut vires attollentes & deprimentes in extremitatibus sensibiliter differant, tum necesse est ut non solum aqua in altero extremo elevetur in alteroque deprimatur, sed etiam ut differentia inter aquæ altitudines tanta sit, quanta in aperto Oceano eidem virium differentiæ respondet. Quamobrem definiri conveniet, quanta in diversis Terræ locis eodem tempore in altitudinibus aquæ à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Ne autem calculus nimium fiat prolixus, solam Lunæ vim in computum ducemus, quippe quæ vim Solis multum excedit; & quoniam effectu Lunæ cognito facile est Solis effectum æstimando vel adjicere vel auferre.



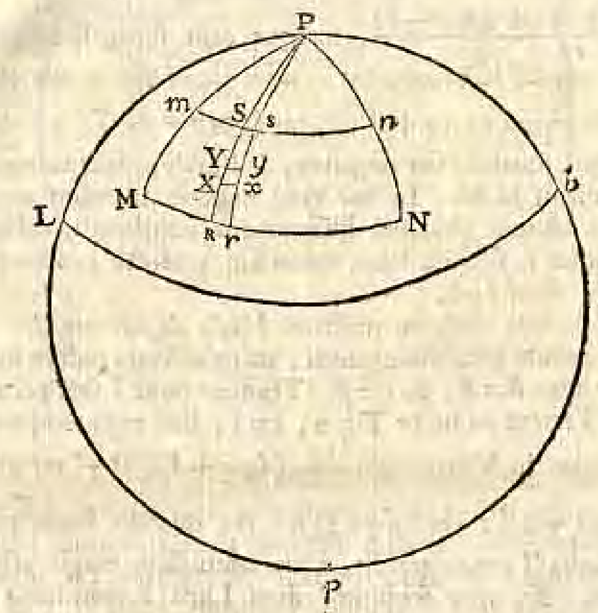
Repræſentet ergo $PLpl$ ſuperficiem Terræ cujus poli ſint P & p, atque M & N ſint duo termini in eodem Maris tractu aſſumti, in quibus quantum Maris altitudo quovis tempore differat, ſit inveſtigandum. Repræſentet porro Ll parallelum, in quo Luna moveatur hoc tempore, ſitque Luna in L; atque exprimet angulus LPM tempus, quod poſt Lunæ tranſitum per meridianum termini M eſt præterlapſum, angulus verò LPN tempus poſt tranſitum Lunæ per meridianum alterius termini N. Ductis autem circulis maximis PM & PN, erit arcus PM complementum latitudinis loci M, arcus PN verò loci N; angulus verò MPN dabit differentiam longitudinis locorum M & N; quæ proinde omnia ponuntur cognita.

§. 120. Ducantur jam ex loco Lunæ L ad terminos M & N circuli maximi LM & LN, exhibebuntque iſti arcus complementa altitudinum, quibus hoc tempore Luna in locis M & N ſupra horizontem elevata conſpicitur. Ponatur arcûs PL ſinus $= q$, coſinus $= Q$, erit Q ſinus declinationis borealis Lunæ, ſi quidem Q habeat valorem affirmativum, ac P polum borealem denotet. Deinde ponatur arcûs PM ſinus $= p$, coſinus $= P$, erit P ſinus elevationis poli pro loco M; ſimilique modo ſit arcûs PN ſinus $= r$ & coſinus $= R$, ita ut R ſit ſinus elevationis poli loci N: denique ſit anguli MPN ſinus $= M$ & coſinus $= m$, anguli verò LPM ſinus $= T$, coſinus $= t$; unde erit anguli LPN coſinus $= mt - MT$.

Ex his per trigonometriam ſphæricam reperietur ſinus altitudinis Lunæ ſupra horizontem loci M ſeu coſinus arcûs $LM = tpq + QP$: pro loco N verò erit altitudinis Lunæ ſinus $= (mt - MT)\,qr + QR$. Quare ſi, ut ſuprà, vis abſoluta ad Lunam urgens ponatur $= L$ & diſtantia Lunæ à Terra $= b$, erit altitudo ad quam aqua in M elevari deberet $= \frac{L(3(tpq + PQ)^2 - 1)}{2b^3}$, & altitudo ad quam aqua in N elevari deberet $= \frac{L(3((mt - MT)qr + QR)^2 - 1)}{2b^3}$, utroque caſu ſupra libellam naturalem. Si ergo illa expreſſio hanc excedat, aqua in M altiùs erit elevata quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((tpq + PQ)^2 - ((mt - MT)qr + QR)^2)$, hæcque expreſſio, quando fiet negativa, indicabit, quantò aqua in N altiùs conſiſtat quàm in M. In hoc verò negotio inertiam aquæ negligimus, quoniam tantum proximè Phænomena hujuſmodi caſibus oriunda indicare annitimur; ſi enim hanc materiam perfectè evolvere vellemus, integro tractatu foret opus.

§. 121. Ponamus tractum noſtrum Maris ab oriente N versùs occidentem M ſub eodem parallelo extendi, ita ut elevatio poli in locis M & N ſit eadem; erit adeo $R = P$, & $r = p$. Tranſeat nunc Luna per meridianum loci M ſupra Terram ita ut ſit $T = 0$, $t = 1$; hoc ergo tempore magis erit elevata in M quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((pq + PQ)^2 - (mpq + PQ)^2) = \frac{3L}{2b^3}(M^2p^2q^2 + 2(1 - m)pqPQ)$. At quando Luna per meridianum loci N ſupra Terram tranſit, aqua tantundem magis erit elevata in N quàm in M. Ex quo ſequitur, dum Luna à meridiano loci N ad meridianum loci M progreditur, aquam in M ſenſim elevari per ſpatium $\frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq + 2(1 - m)PQ)$ interea verò in N tantundem ſubſidere. Sin autem Luna infra Terram à meridiano loci N ad meridianum loci M progrediatur, aqua in M elevabitur interea per ſpatium $= \frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq - 2(1 - m)PQ)$, per tantumque ſpatium aqua in N ſubſidet. Ponamus nunc angulum LPM eſſe 90 graduum, ſeu quæſtionem inſtitui, cùm Luna jam ante ſex horas meridianum loci M ſit tranſgreſſa, atque obtinebitur differentia inter aquæ altitudines in locis M & $N = \frac{3L}{2b^3}(P^2Q^2 - (PQ - Mpq)) = \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ - M^2pq)$. Sex autem horis, antequam Luna ad meridianum loci M appellit, aqua in N magis erit elevata quàm in M intervallo $= \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ + M^2pq)$. Sequuntur hæc ſi inertia aquæ negligatur; at inertiâ admiſsâ ex præcedentibus ſatis clarum eſt, cùm has differentias majores eſſe debere, tùm tempora mutationum tardiùs ſequi debere.

§. 122. Quoniam verò in hoc Maris tractu perpetuò eadem aquæ quantitas contineri debet, necesse ut quantùm aquæ unâ parte supra libellam attollatur, tantundem ea in reliquâ parte infra libellam deprimatur. Quò igitur hinc altitudinem Maris quovis loco exactè determinemus, ponamus tractum nostrum secundùm longitudinem terminari binis



meridianis PM & PN, secundùm latitudinem verò binis parallelis MN & mn, positâque Lunâ in L sit sinus $PL = q$, cosinus $= Q$; sinus $LPM = T$, cosinus $= t$. Porro sit sinus arcus $PM = p$, cosinus $= P$, sinus $Pm = r$, cosinus $= R$, atque anguli MPN sinus $= M$ & cosinus $= m$. Præterea sit elevatio in M dum Luna in L versatur, supra libellam $= \alpha$, ita ut hoc loco suprema aquæ superficies à centro Terræ distet intervallo $= 1 + \alpha$, unde cùm sinus altitudinis Lunæ in M sit $= tpq + PQ$, erit gravitatio totius columnæ aqueæ ab M ad centrum Terræ $=$ $\frac{(1+\alpha)^{n+1}}{n+1} + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3} = \frac{1}{1+n} + \alpha + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3}$, prouti suprà §. §. 43. & 44. demonstravimus. Consideretur jam locus quicunque X in nostro tractu, in quo aqua supra libellam sit elevata spatio $= \varphi$; ac ducto per hunc locum meridiano PR, sit anguli LPR sinus $= X$, cosinus $= x$; arcûs PX sinus $= z$ & cosinus $= Z$, unde gravitatio columnæ aqueæ ex X ad centrum Terræ pertingentis erit $=$

1

$\frac{1}{1+n} + \varphi + \frac{L(1-3(xqz+QZ)^2)}{2b^3}$. Cùm igitur hæc gravitatio æqualis esse debeat illi, orietur $\varphi = \alpha + \frac{3L}{2b^3}((xqz+QZ)^2 - (tpq+PQ)^2)$; ex quâ formulâ si modò constaret elevatio aquæ in M, simul innotesceret elevatio vel depressio in quovis loco X.

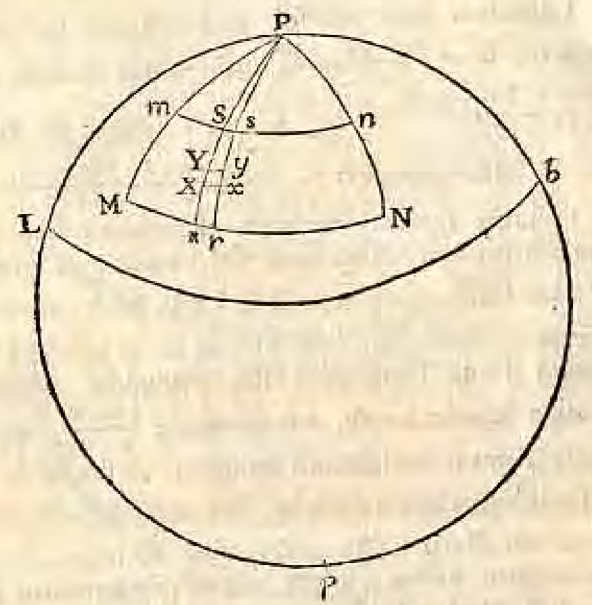
§. 123. Cùm ergo in X aqua supra libellam elevetur spatio φ; in elemento tractûs infinitè parvo $XYyx$, plus inerit aquæ, quàm in statu naturali, & quidem quantitas $XY . Xx . \varphi$, cujus elementi integrale per totum tractum sumtum debet esse $= 0$, ex quo valor ipsius α innotescet. Erit autem angulus $RPr = \frac{dY}{x}$, hincque arculus $Xx = \frac{z\,dX}{x}$, at elementum $XY = \frac{dZ}{z}$, ex quo infinitè parvum rectangulum $XYyx = \frac{dX\,dZ}{x}$, in quo ergo excessus aquæ supra statum naturalem est $= \frac{\varphi\,dX\,dZ}{x} = \frac{dX}{x}(\alpha\,dZ + \frac{3L\,dZ}{2b^3}((xqz+QZ)^2 - (tpq+PQ)^2))$, quæ formula bis debet integrari. Ponatur primò X constans, & integratione absolutâ reperietur in elemento $RSsr$ excessus aquæ supra statum naturalem $= \frac{dX}{x}(\alpha(R-P) + \frac{3L}{2b^3}(q^2x^2(R-P) - \frac{x^2q^2}{3}(R^3-P^3) - \frac{2xQq}{3}(r^3-p^3) + \frac{Q^2}{3}(R^3-P^3) - (tpq+PQ)^2(R-P)))$. Integretur hæc formula denuo ut integrale ad totum tractum $MNnm$ extendatur, prodibitque incrementum aquæ, quod toti tractui accessisse oporteret, $= \alpha(R-P)\,A\,\text{sin.}\,M + \frac{3L}{2b^3}(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(Mm(1-2TT) - 2M^2Tt) + \frac{2Qq(r^3-p^3)}{3}(T - Mt - mT) + \frac{q^2(R-P)}{2}A\,\text{sin.}\,M + \frac{(3Q^2-1)(R^3-P^3)}{6}A\,\text{sin.}\,M - (tpq+PQ)^2(R-P)\,A\,\text{sin.}\,M)$, quæ adeo quantitas debet esse $= 0$: unde oritur $\alpha = \frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3} + \frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)\,A\,\text{sin.}\,M}(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(2M^2Tt - Mm(1-2TT)) + \frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T - Mt - mT))$.

§. 124. Cognitâ igitur verâ elevatione aquæ in M supra libellam; quam antè posuimus $= \alpha$, hinc intelligetur vera aquæ elevatio supra libellam in loco quocunque X. Ponatur enim sinus anguli $MPX = S$ & cosinus $= s$, erit sin. $LPR = X = Ts + tS$ & $x = ts - TS$, manentibusque arcûs PX sinu $= z$ & cosinu $= Z$, erit elevatio aquæ in $X = \varphi = \alpha + \frac{3L}{2b^3}((ts-TS)qz + QZ)^2 - \frac{3L}{2b^3}(tpq+PQ)^2$; quare loco α valore invento substituto, reperietur aqua in X supra libellam attolli actu per spa-

spatium $= \frac{3L}{2b^3}((ts-TS)qz+QZ)^2 + \frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)A\,\text{sin}.\,M}\left(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(2M^2Tt-Mm(1-2TT)) + \frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T-Mt-mT)\right)$. Quòd si ergo ponatur tractus noster ita augeri ut totam tellurem ambiat, orietur casus jam suprà tractatus; quoniam enim fit $MN = 360°$, seu A sin. $M = 2\pi$ denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $M = 0$ & $m = 1$: præterea verò quia M in polum australem p, m verò in borealem P incidit, erit $p = 0$, $P = -1$, $r = 0$ & $R = +1$: si hi valores substituantur, prodibit elevatio aquæ in $X = \frac{L}{2b^3}(3((ts-TS)qz+QZ)^2-1)$, quæ, expressio, quia $ts-TS$ denotat cosinum anguli LPX atque $(ts-TS)qz+QZ$ sinum altitudinis Lunæ supra horizontem in X, cum superioribus formulis exactissimè convenit: si quidem terminus $\frac{L}{b^4}$ negligatur. Hæc verò eadem ipsa expressio quoque emergit, si tantum alterum hemisphærium vel boreale vel australe ponatur aquâ totum circumfusum, manent enim omnia ut antè, nisi quòd fiat $p = 1$ & $P = 0$: utroque enim casu fit $R^2+PR+P^2 = 1$; ultimusque terminus ob $M = 0$ utroque casu evanescit.

§. 125. Ponamus nunc tractum Maris secundùm longitudinem MN usque ad 180 gradus extendi, erit $M = 0$ & $m = -1$ & A sin. $M = \pi$; denotat enim A sin. M semper arcum circuli, qui mensura est anguli MPN: hinc si brevitatis gratiâ ponatur sinus anguli, quo Luna in X supra horizontem elevata apparet, $= v$, erit aquæ elevatio in X supra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{L(1-3QQ)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lqq}{4b^3} + \frac{2LTQq(p^3-r^3)}{(R-P)b^3\pi}$. Ponamus porro integrum hemisphærium $LPlp$ aquâ esse circumfusum, fiet $p = 0$, $P = -1$, $r = 0$ & $R = 1$; unde elevatio aquæ in X erit $= \frac{L(3v^2-1)}{2b^3}$, omnino ac si tota Terra aquâ cincta esset, uti in præcedentibus capitibus posuimus, vel quod eodem redit, dummodo omnis aqua super Terra mutuam habeat communicationem satis amplam. Quòd si autem tractus noster Maris tantum ad æquatorem usque porrigatur à polo P, ita ut quartam superficiei terrestris partem solum obtegat, tum erit $p = 1$, $P = 0$, $r = 0$ & $R = 1$, hoc itaque casu aqua in X elevabitur ad altitudinem $= \frac{L(3v^2-1)}{2b^3} + \frac{2LTQq}{\pi b^3}$: ex quo perspicitur hoc casu elevationem in X majorem, quàm si tota Terra aquâ esset circumdata, si expressio TQq habeat valorem affirmativum, minorem verò si TQq habeat valorem negativum. Sed limites huic quæstioni præscripti non permittunt hinc plura consectaria deducere, cùm debita evolutio satis amplum tractatum requirat;

quirat; neque theoria ulteriori confirmatione indigeat. Quocirca coronidis loco duos tantum casus evolvemus, quorum altero latitudo tractûs ponetur infinitè parva, altero verò longitudo: quippe qui ad phænomena quædam singularia explicanda inservire poterunt.

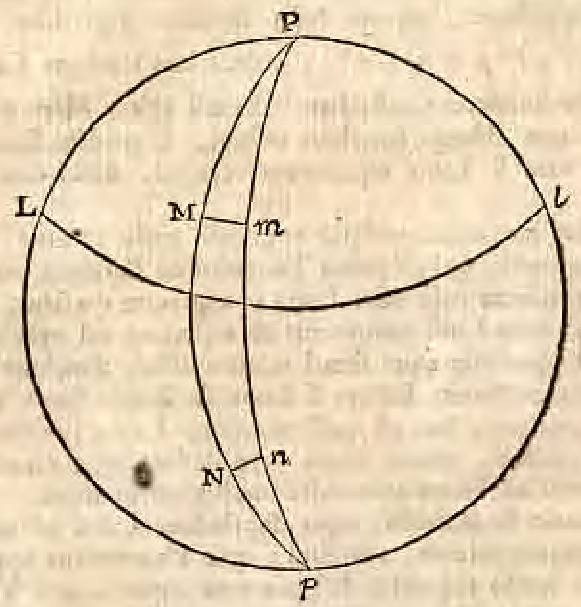


§. 126. Ponamus igitur latitudinem Mm infinitè esse parvam, seu $R = P$ & $r = p$, reperietur aquæ in X elevatio supra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{3L(P^2-q^2-3P^2Q^2)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,\text{sin}.\,M}\left(\frac{pq}{2}(2M^2Tt-Mm(1-2TT)) + 2PQ(T-Mt-mT)\right)$. Consideremus autem elevationem in M, ubi cùm sit $v = tpq+PQ$, erit ea $= \frac{3Lpq(2ttpq+4tPQ-pq)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{sin}.\,M}(pq(2M^2Tt-Mm(1-2TT))+4PQ(T-Mt-mT))$. Transeat nunc Luna per meridianum loci M supra Terram, erit $T = 0$, & $t = 1$, atque elevatio in M prodibit $= \frac{3Lpq(pq+4PQ)}{4b^3} - \frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{sin}.\,M}(Mmpq + 4MPQ)$; at si per eundem meridianum infra Terram transeat, erit aquæ elevatio $= \frac{3Lpq(pq-4PQ)}{4b^3} - \frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{sin}.\,M}(Mmpq - 4MPQ)$. Quòd si autem Luna versùs ortum à meridiano distet angulo horario 90 graduum, seu circiter 6 horis ante appulsum Lunæ ad meridianum in M superioperiorem, erit $T = -1$ & $t = 0$, unde elevatio erit $= \frac{-3Lp^2q^2}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,\text{sin.}\,M}$ $(pqMm - 2PQ(1-m))$; sex verò horis post transitum Lunæ per meridianum loci M versùs occasum, erit altitudo aquæ in M supra libellam $= \frac{-3Lp^2q^2}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3\,A\,\text{sin.}\,M}\,(2pqMm - 2PQ(1+m))$.

§. 127. Tribuamus huic tractui longitudinem 90 graduum, ut sit $M = 1$, $m = 0$, & $A\,\text{sin.}\,M = \frac{\pi}{2}$, unde oritur elevatio aquæ in $M = \frac{3Lpq(2ttpq + 4tPQ - pq)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2\pi b^3}\,(2pqTt + 4PQ(T-t))$. Quæ si etiam declinatio Lunæ ponatur $= 0$, fiet $= \frac{3Lp^2q^2(2tt-1)}{4b^3} + \frac{3Lp^2q^2Tt}{\pi b^3}$ existente $q = 1$, unde apparet maximam elevationem non accidere cùm Luna per meridianum loci M transit, sed tardiùs, & quidem si dupli anguli LPM sinus fuerit $= \frac{2}{\pi}$, hoc est ferè unâ horâ post transitum Lunæ per meridianum, hoc igitur casu Fluxus in M unâ ferè horâ tardiùs observetur, quàm si tota Terra aquâ esset circumfusa. Dum autem Luna per meridianum superius transit, erit elevatio $= \frac{3Lpp}{4b^3}$, quæ etiam valet si Luna infra Terram meridianum attingat; at sex horis vel antè vel post, quando Luna in horizonte versatur, erit aquæ depressio $= \frac{-3Lpp}{4b^3}$. Unde intelligitur in tali Maris tractu pariter quotidie binos Fluxus totidemque Refluxus accidere debere, atque æstum propemodum fore similem æstui generali, nisi quòd majoribus anomaliis sit obnoxius, præcipuè si Luna habeat declinationem.

§. 128. Hinc explicari potest ratio æstûs, qui in Mari Mediterraneo observatur, & qui in ipso hoc Mari generatur. Cùm enim longitudo hujus Maris ne 60 quidem gradus attingat, æstus erunt multò minores; decrescunt enim si cùm longitudo diminuatur, tum elevatio poli augeatur. Quòd si ergo in his formulis angulus MPN ponatur fere 60 graduum, atque elevatio poli debita introducatur, reperientur quidem æstus bini quotidie evenire debere, qui autem futuri sint multò minores, quàm in medio Mari, & pluribus anomaliis subjecti, quas quidem omnes ex formulis definire licebit. Quoniam ergo tam exigui æstus à ventis & cursu aquæ, qui in hoc Mari notabilis deprehenditur, vehementer turbantur, ad pleraque Littora hujus Maris vix usquam æstus regularis observabitur. Excipi autem debet Mare Adriaticum, quod cùm sinum formet amplum, advenientem aquam meliùs colliget, atque elevationem multò sensibiliorem pariet, à quo æstus Maris Venetiis observatus originem habet. Tametsi enim Mare Mediterraneum non solum,

lum satis amplam habeat latitudinem, sed etiam vehementer inæqualem; tamen ejusmodi marium æstus admodum exquisitè ex præsenti casu, quo latitudinem omnino negligimus, colligi potest, quia extensio Maris in longitudinem præcipuam causam æstuum binorum singulis diebus evenientium continet, neque extensio latitudinis multum conferat.



§. 129. Ponamus nunc tractûs nostri Maris longitudinem evanescere, totumque tractum in eodem meridiano Pp ab M usque ad N extendi, ita ut sit $M = 0$, $m = 1$; sinus autem elevationis poli in M sit $= P$, cosinus $= p$, in N verò sit sinus elevationis poli $= R$, cosinus $= r$. Ex his si Luna in L versetur, ob $A\,\text{sin.}\,M = M$, erit in M elevatio aquæ supra libellam $= \frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3} + \frac{L(1-3Q^2)(P^2+PR+RR)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{L}{4b^3}$ $(q^2(3 - P^2 - PR - RR)(2TT-1) - \frac{4Qqt(p^3-r^3)}{R-P}) = \frac{L}{2b^3}((ttqq - QQ)$ $(R^2 + PR - 2P^2) + \frac{2Qqt(3PpR + r^3 - 3P^2p - p^3)}{R-P})$. Quòd si nunc ponatur alter terminus N ultra æquatorem versùs austrum situs, ita ut sinus elevationis poli australis in N duplò major sit quàm sinus elevationis borealis in M, seu $R = -2P$ & $r = \sqrt{(1-4P^2)}$, erit $R^2 + PR - 2P^2 = 0$, atque elevatio aquæ in M supra libellam erit $= \frac{LQqt}{3b^3P}$

$(9P^2p+p^3-r^3)$. Ex hâc igitur formulâ sequitur, si Lunæ declinatio sit nulla seu $Q=0$, tum nullum omnino æstum in M observari debere. Quòd si autem Luna habeat borealem, tum ad transitum Lunæ per meridianum superiorem aquam attolli ad spatium $=\frac{LQq}{2b^3p}(9P^2p+p^3-r^3)$; at dum Luna in alterutro circulo horario sexto versetur, tum aquam ad libellam naturalem fore constitutam; Lunâ autem infra horizontem ad meridianum appellente, aquam infra libellam depressum iri per spatium $=\frac{LQq}{2b^3p}(9P^2p+p^3-r^3)$; contrarium denique fore æstum, si Luna habeat declinationem australem. In tali igitur Maris tractu quotidie semel tantum aqua affluet, semelque refluet, si quidem Luna habeat declinationem; nam si Luna æquatorem occupat, æstus omnino erit nullus.

§. 130. Ex hoc casu aptissimè explicari posse videtur Phænomenon illud æstûs singularis, qui in portu Tunquini ad Batsham observatur, ubi omninò ut in præsente casu dum Luna in æquatore versatur, Mare nullum æstum sentit, at dum Luna removetur ab æquatore vel versùs boream vel versùs austrum, quotidie aqua semel tantum affluit semelque refluit, prorsus ut calculus monstravit; scilicet si Lunæ declinatio fuerit borealis, aqua versùs Lunæ occasum, hoc est post transitum Lunæ per meridianum super horizonte, affluit, versùs ortum verò defluit, quæ retardatio ab inertiâ aquæ & motu ad littora provenire intelligitur ut suprà. Contrà verò si Lunæ declinatio sit australis, aqua deprimitur Lunâ ad occasum inclinante, Lunâ autem oriente, attollitur: quæ Phænomena apprimè conveniunt cum casu modò exposito. Est præterea elevatio poli Tunquini 20°, 50′, borealis, atque Mare utrinque cùm peninsulis tùm insulis ab utroque Oceano Pacifico & Indico fere prorsus separatur, saltem ut libera communicatio non adsit: præterea hic idem Maris tractus, qui versùs boream ad littora regni Tunquini terminatur extenditur ultra æquatorem ad gradus circiter 45, cujus latitudinis sinus circiter duplo major est, quàm sinus latitudinis borealis 20°, 51′: Quocirca ex his circumstantiis per nostram Theoriam eadem ipsa singularia Phænomena æstûs Maris observari debent, quæ actu observantur: atque hoc modo si ullum adhuc dubium circa nostram theoriam reliquum fuisset, id resolutione hujus mirabilis Phænomeni funditùs sublatum iri confidimus.

FINIS I. Part. TOMI III.

HIST
NATU

TOM III

12