

Campus Irapuato-Salamanca División de Ingenierías

«2024, Año de Felipe Carrillo Puerto, Benemérito del Proletariado, Revolucionario y Defensor del Mayab.» «2024, 200 años de Grandeza: Guanajuato como Entidad Federativa, Libre y Soberana.» «2024, a 200 años de la instalación del Primer Congreso Constituyente de Guanajuato.» «30 años de autonomía universitaria, un legado de responsabilidad y libertad»

Asunto: Notificación de Dictamen de Modalidad de Titulación.

#### JORGE MANUEL BARRIOS SÁNCHEZ ESTUDIANTE DEL DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA P R E S E N T E

Una vez concluido el análisis y discusión sobre la propuesta del proyecto titulado "*Diseño y* desarrollo de control avanzado para un proceso industrial en dinámica de sistemas en un entorno de dinámica de sistemas.", bajo la revisión del Asesor(es): Dr. *Roberto Baeza Serrato y Dr. Marco Bianchetti*, el Comité Académico del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, acordó la siguiente resolución:

Con fundamento en las fracciones primera a cuarta del Artículo 77 y 78 del Reglamento Académico, el comité acordó **POR UNANIMIDAD DE VOTOS AUTORIZAR SU MODALIDAD DE TITULACIÓN POR TRABAJO DE TESIS** designando el siguiente jurado:

Presidente:	Dr. Carlos Rodríguez Doñate
Secretario:	Dr. Roberto Baeza Serrato
Vocal1:	Dr. Misael López Ramírez
Vocal 2:	Dr. José Alfredo Jiménez García
Vocal 3:	Dra. Daniela Kristell Calvo Ramos

Se extiende la presente notificación de la resolución el día 17 de octubre del 2024.

A T E N T A M E N T E "LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"	
(Jan)	UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO Campus Irapuato - Salamanca DIVISIÓN DE INGENIERÍAS
DR. JOSE AMPARO ANDRADE LUCIO	
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE INGENIERÍAS D	DEL CIS
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO	

C.c.p. Archivo

División de Ingenierías – Campus Irapuato-Salamanca Domicilio conocido. Comunidad de Palo Blanco. Carretera Salamanca-Valle de Santiago km. 3.5 + 1.8. Salamanca, Gto., C P. 36885. Tel 464 6479940. <u>www.ugto.mx</u>

WUNIRIA, Gto., a B de 01 del 2025

#### MTRO, JUAN SIGFRIDO LÓPEZ CUSTODIO COORDINADOR DE ASUNTOS ESCOLARES PRESENTE .-

Por medio de la presente, se otorga autorización para proceder a los trámites de impresión, empastado de tesis y titulación al alumno(a) JUROJE MANUEL BARRIOS SANCILE? del Programa de Doctorado en CIENCIAS DE LA ENGENIERIA y cuyo número de NUA es: 147866 del cual soy director. El título de la tesis es: DISENO Y DESARROLLO DE CONTROL AVANZADO PARA UN PILOCOO INDUSTRIAL EN DINAMICA DE SISTEMAS (N'UN ENTORNO DE DINAMICA DE SISTEMAS

Hago constar que he revisado dicho trabajo y he tenído comunicación con los sinodales asignados para la revisión de la tesis, por lo que no hay impedimento alguno para fijar la fecha de examen de titulación.

Dr. Roberto Baeza Servato

ATENTAMENTE

Dr. Roberto Baera Serrato NOMBRE Y FIRMA

**DIRECTOR DE TESIS** 

20 PER REMINIE

NOMBRE Y FIRMA VOCAL

Dra. Daniela Fristell Calus Panus

NOMBRE Y FIRMA VOCAL

Dr. José Alfredo Jiménez García

NOMBRE Y FIRMA VOCAL

Pr Callos Roduras Doroth PRESIDENTE

Jalas Rodogse P.

NOMBRE Y FIRMA

DIRECTOR DE TESIS SECRETARIO



# UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

TEMA DE TESIS

Diseño y desarrollo de control avanzado para un proceso industrial en dinámica de sistemas en un entorno de dinámica de sistemas

## TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

> PRESENTA MAT. JORGE MANUEL BARRIOS SANCHEZ

> > **DIRECTOR DE TESIS**

DR. ROBERTO BAEZA SERRATO.

**CODIRECTOR DE TESIS** 

**DR. MARCO BIANCHETTI** 

YURIRIA, GUANAJUATO

Enero, 2025

# Agradecimientos

Quiero comenzar expresando mi más profundo agradecimiento a mis padres, quienes me dieron la vida y siempre han estado a mi lado, brindándome su amor incondicional y apoyo constante en cada paso que he dado. Gracias por ser mi fuente de fuerza, por enseñarme los valores que me han permitido llegar hasta aquí y por ser mi gran apoyo a lo largo de toda mi vida.

A mis abuelitos, por su amor incondicional, sus sabias enseñanzas y su apoyo siempre presente. Me han mostrado el verdadero valor de la familia y la importancia de nunca rendirse, incluso cuando las dificultades parecen insuperables. Su influencia ha sido fundamental en mi crecimiento personal y académico.

A mis compañeras de vida, Annet y Khalito, quiero agradecerles profundamente por su paciencia, comprensión y por estar siempre conmigo durante todo el proceso del doctorado y, en general, a lo largo de mi vida. Sin su apoyo, este camino habría sido mucho más difícil. Su presencia y su ánimo me han dado la motivación necesaria para continuar.

Un agradecimiento especial al Dr. Roberto Baeza Serrato, mi asesor de tesis tanto de maestría como de doctorado. Gracias a él, descubrí el fascinante mundo de la dinámica de sistemas, un campo que me ha apasionado y me ha guiado a lo largo de estos años. Agradezco sinceramente todas las enseñanzas que me ha brindado, no solo en el ámbito académico, sino también en el personal. Su dedicación, orientación y paciencia fueron clave para que pudiera avanzar en mi investigación y en mi formación profesional. Además, agradezco al CONACYT por otorgarme la beca doctoral durante estos cuatro años, lo que me permitió concentrarme en mis estudios y proyectos de investigación sin preocupaciones económicas.

Quiero agradecer también al Dr. Leonardo Martínez, quien me introdujo al mundo del cálculo fraccionario y me brindó su apoyo tanto como académico como amigo. Su guía y sus enseñanzas me han permitido ampliar mis horizontes y abordar problemas desde una perspectiva distinta. Además, siempre me ofreció su ayuda incondicional cuando más lo necesitaba, lo cual valoro profundamente.

A Adán, por su apoyo constante y por estar siempre dispuesto a ayudarme en cualquier momento, ya sea en lo personal o en lo académico. A mis hermanos y a mi primo Alejandro, por ser una fuente constante de apoyo y por estar siempre a mi lado, no solo en los momentos felices, sino también en los más desafiantes. Su apoyo ha sido invaluable a lo largo de este proceso. No quiero dejar de agradecer al Coordinador del Doctorado, Dr. Luis Manuel Ledesma, por ser una persona incondicional durante todo este proceso. Su apoyo y sus palabras de aliento me ayudaron a seguir adelante, y siempre fue una gran fuente de motivación. Su dedicación a los estudiantes y su profesionalismo son realmente admirables.

Finalmente, agradezco a todos mis compañeros y amigos que de alguna u otra manera contribuyeron a este logro. Gracias por los momentos compartidos, por las conversaciones, por el aprendizaje mutuo y por ser parte de este proceso tan importante en mi vida. También, agradezco a México y a la Universidad de Guanajuato por brindarme la oportunidad de formar parte de esta institución, la cual me ha dado tanto a nivel académico y personal, permitiéndome crecer como profesional y como ser humano.

Gracias a todos por ser parte de este viaje. Sin cada uno de ustedes, este logro no habría sido posible.

Jorge Manuel Barrios Sánchez

# Índice general

Ín	dice	general	4
Ín	dice	de figuras	8
Ín	dice	de cuadros	11
Re	esum	en	12
1.	Mai	rco de Referencia	<b>14</b>
	1.1.	Introducción	14
	1.2.	Antecedentes	15
	1.3.	Definición del Problema	20
	1.4.	Objetivos	20
		1.4.1. Objetivos Generales	20
		1.4.2. Objetivos Específicos	21
	1.5.	Hipótesis de Investigación	21
<b>2</b> .	Maı	rco Teórico	<b>22</b>
	EТА	PA I - Modelos de Simulación de Dinámica de Sistemas	23
	2.1.	Dinámica de Sistemas	23
		2.1.1. Bucle de Reforzamiento Positivo	24
		2.1.2. Bucle de Balanceo Negativo	24
	2.2.	Modelos Fundamentales de Dinámica de Sistemas	25
		2.2.1. Modelo Exponencial	25
		2.2.2. Modelo de Búsqueda de una Meta	26
		2.2.3. Modelo de Oscilación	27
		2.2.4. Crecimiento en forma de S	28
		$2.2.5.  \text{Overshot}  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  \dots  $	29
	2.3.	Ejemplo de un Modelo de Simulación	30
		2.3.1. Modelo de Análisis de Sensibilidad	31
	2.4.	Sistemas de control	32
	2.5.	Función de transferencia	36
		2.5.1 Función de transferencia en lazo abierto	36

		2.5.2. Función de transferencia en lazo cerrado
	2.6.	ETAPA III: Espacio de Estados y Control de Ackerman
		2.6.1. Matriz de Estado (A)
		2.6.2. Matriz de Entrada (B)
		2.6.3. Matriz de Salida (C)
		2.6.4. Matriz de Transmisión Directa (D)
	2.7.	ETAPA IV: Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias
		2.7.1. Cálculo Fraccionario
		2.7.2. Aplicaciones del Cálculo Fraccionario
		2.7.3. Función Mittag-Leffler
		2.7.4. Derivada de Caputo
	2.8.	ETAPA V: Cálculo Conformable
8.	Met	adología
	D	
<b>1</b> .	Res	
	4.1.	
	4.2.	Etapa II. Funcion Matematica (Funcion de transferencia)
	4.0	4.2.1. Diagrama de Bloques del Proceso de Tejido
	4.3.	Diagrama de Forrester - Proceso de Hilvanado
		4.3.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Hilvanado
		4.3.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Hilvanado
	4.4.	Diagrama de Forrester - Proceso de Planchado
		4.4.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Planchado
		4.4.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Planchado
	4.5.	Diagrama de Forrester - Proceso de Corte
		4.5.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Corte
		4.5.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Corte
	4.6.	Diagrama de Forrester - Proceso de Confección
		4.6.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Confección
		4.6.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Confección
	4.7.	Diagrama de Forrester - Proceso de Acabado
		4.7.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Acabado
		4.7.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Acabado
	4.8.	Diagrama de Forrester - Proceso de Empaquetado
		4.8.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Empaquetado
		4.8.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Empaquetado
	4.9.	Análisis de las Funciones de Transferencia para los Modelos de Dinámica
		de Sistemas (SD) en el Proceso Textil
	4.10.	Etapa III. Técnica de Control Moderno
		4.10.1. Vector de Estado y de Salida
		4.10.2. Matrices de Estado: A, B, C, D
		4.10.3. Matriz de Transferencia

	4.10.4. Parámetros Deseados en el Sistema de Control	72
4.11	Control Ackerman	74
	4.11.1. Gráfico Control Ackerman	76
4.12	Etapa IV - Cálculo Fraccionario (Derivada de Caputo)	77
	4.12.1. Análisis de Eficiencia y Control en un Proceso Textil mediante	
	Derivadas Fraccionarias	77
	4.12.2. Modelo de Dinámica de Sistemas	78
	4.12.3. Sistema de Ecuaciones Diferenciales	79
	4.12.4. Solución de la Ecuación Diferencial Ordinaria	80
	4.12.5. Metodología OEE	80
	4.12.6. Factor de Disponibilidad	80
	4.12.7. Factor de Calidad	81
	4 12.8 Factor de Bendimiento	82
413	Resultados y Análisis del Modelo de Orden Fraccionario mediante el	02
1.10	Operador de Caputo	83
	4 13 1 Solución del Modelo de Orden Fraccionario por Caputo	83
	4.13.2 Demostración Matemática de las Funciones Fraccionarias	86
	4.13.3. Simulación de Diversos Escenarios	88
	4.13.4. Simulación de Eficiencias en el Departamento de Tejido	88
	4.13.5. Simulación de Eficiencias en el Departamento de Hilvanado	01
	4.13.6. Validación en Compo	02
5.1.	Resultados: Caso de estudio de la capacidad instalada fotovoltaica	<b>96</b>
	5.1.1. Datos	96
	5.1.2. Capacidad fotovoltaica instalada $(2015-2023)$	96
	5.1.3. Irradiación Solar en México	96
5.2.	Metodología: Modelado de la Capacidad Fotovoltaica	98
	5.2.1. Fase 1: Modelado y Simulación del Crecimiento Exponencial (2015-	
	$2030) \ldots \ldots$	98
	5.2.2. Fase 2: Modelado y Simulación del Crecimiento Sigmoidal (2015-	
	$2030) \ldots \ldots$	98
	5.2.3. Fase 3: Integración de Modelos y Análisis de Sensibilidad a través	
	del Cálculo Fraccionario (2015-2030)	99
	5.2.4. Modelado y Simulación del Crecimiento Exponencial	100
	5.2.5. Desarrollo del Modelo de Dinámica de Sistemas en Vensim	100
	5.2.6. Definición del Modelo de Ecuación Diferencial	101
	5.2.7. Solución Analítica del Modelo	103
	5.2.8. Solución del Modelo Fraccionario utilizando Cálculo Conformable	104
	5.2.9. Análisis de Sensibilidad y Simulación de Escenarios: Comparación	
	de Errores con Datos Históricos	104
5.3.	Transición a un Modelo de Crecimiento Logístico	106

		5.3.2.	Definición del Modelo de Ecuación Diferencial	107
		5.3.3.	Solución Logística Fraccional Conformable	109
	5.4.	Fase 3:	: Integración de Modelos y Análisis de Sensibilidad mediante Cálcu-	
		lo Frac	ccional $(2015-2030)$	111
		5.4.1.	Integración de Modelos	111
		5.4.2.	Transición y Análisis de Sensibilidad	112
6.	6. Conclusiones		115	
Bi	Bibliografía 11			
	6.1.	Anexo	: Carátulas de los Papers Publicados y en Proceso de Aceptación	124

# Índice de figuras

2.1.	Bucle de retroalimentación positiva
2.2.	Bucle de retroalimentación negativa
2.3.	Modelo exponencial en dinámica de sistemas
2.4.	Estructura de búsqueda de un objetivo
2.5.	Comportamiento de búsqueda de un objetivo en dinámica de sistemas. 27
2.6.	Estructura de modelo de oscilación
2.7.	Gráfica del modelo de simulación
2.8.	Modelo de crecimiento en forma de S
2.9.	Gráfica del modelo de simulación
2.10.	Comportamiento de overshot
2.11.	Estructura de un modelo de overshoot
2.12.	Diagrama de Forrester del modelo de simulación de catástrofe 31
2.13.	Análisis de sensibilidad en el modelo de simulación de catástrofe 31
2.14.	Elemento de un diagrama de bloques
2.15.	Punto de suma en un diagrama de bloques
2.16.	Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado
2.17.	Sistema en lazo cerrado con retroalimentación
3.1.	Metodología propuesta para el trabajo de investigación
4.1.	Diagrama de Forrester para $n = 1$ variable de estado
4.2.	Diagrama de bloques de una variable de estado
4.3.	Comparación entre las salidas simuladas del modelo en MATLAB (a) y
	Vensim (b)
4.4.	Diagrama de polos y ceros del proceso de tejido
4.5.	Diagrama de Forrester para el proceso de hilvanado con dos variables de
	estado
4.6.	Diagrama de bloques para el proceso de hilvanado con dos variables de ostado.
17	Process de salida del hilvanado con diagramas de bloques y Forrester 51
4.1. 18	Diagrama do polos y coros para ol proceso do hilvanado con dos variables
4.0.	de estade
	ue estado

4.9.	Diagrama de Forrester para el proceso de planchado con tres variables	5
1 10		90
4.10.	Diagrama de bloques de $n = 3$ para el proceso de planchado con variables de estado.	$5^{2}$
4.11.	Comparación del proceso de planchado ante una entrada escalón: (a)	
	salida simulada en MATLAB y (b) diagrama de Forrester en Vensim.	$5^{2}$
4.12.	Diagrama de polos y ceros para el proceso de planchado con tres variables	
	de estado.	5!
4.13.	Diagrama de Forrester para el proceso de corte con $n = 4, \ldots, \ldots$	5
4.14.	Diagrama de bloques del proceso de corte. con $n = 4$	5'
4.15.	Comparación de las salidas del proceso de corte en Matlab y Vensim.	5
4.16	Diagrama de polos y ceros del proceso de corte con $n = 4$ variables de	0
1.101	estado	58
4.17	Diagrama de Forrester del proceso de confección $n = 5$	59
4 18	Diagrama de bloques para el proceso de confección con $n = 5$	6
4 19	Comparación de resultados: a) MATLAB b) Vensim	6
4 20	Diagrama de polos y ceros del proceso de confección con $n = 5$ variables	0.
1.20.	de estado	6
4 21	Diagrama de Forrester del proceso de acabado con seis variables de estado	6
4.221.	Diagrama de bloques del proceso de acabado con seis variables de estado.	6
4 23	Salida ante una entrada escalón con diagrama de bloques y con el dia-	00
1.20.	orama de Forrester en Vensim	6
$4\ 24$	Diagrama de polos y ceros con $n = 6$ variables de estado	64
4 25	Diagrama de Forrester del proceso de empaquetado $n = 7$	6!
4.26	Diagrama de bloques del proceso de empaquetado, $n = 7$	6
4.20	Salida de la función de tranfenrencia ante una entrada escalón vs el	0
1.21.	diagrama de forrester en Vensim	6'
4 28	Diagrama de polos y ceros con siete variables de estado	6
4 29	Modelo de Forrester con 3 variables de estado	7
4.30	Control por espacio de estados con la fórmula de Ackerman	7
4 31	Control por espacio de estados compensación	7(
4.32	Matriz de transferencia vs Control óptimo	7
4.33	Diagrama de Forrester del caso de estudio	7
4 34	Simulación 1 del proceso de Tejido con una meta de 100 piezas	8
4 35	Simulación 2 del proceso de Tejido con una meta de 70 piezas	9
4.36	Simulación 3 del proceso de Tejido con una meta de 50 piezas	g
4.37	Simulación 1 del proceso de Hilvanado	- Q'
4.38	Simulación 2 del proceso de Hilvanado	0
4.00. 4.20	Simulación 3 del proceso de Hilvanado	0
4.00.	Validación de eficiencias en el departamento de Tejido	0.
4.40.	Validación de eficiencias en el departamento de Hilvanado	9' 0.
4.41.		9

5.1.	Capacidad fotovoltaica instalada en México (2015-2023). Fuente: Statis-	
	ta, INEGI	97
5.2.	Mapa de irradiación solar en México. Fuente: INEGI	97
5.3.	Modelo de Dinámica de Sistemas para el Despliegue de Capacidad Foto-	
	voltaica en México.	101
5.4.	Análisis de los valores de $\alpha$ de 2015 a 2023 $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	105
5.5.	Proyecciones para la capacidad fotovoltaica de 2023 a 2030	106
5.6.	Modelo de Vensim para el Crecimiento de la Capacidad Fotovoltaica	107
5.7.	Crecimiento de la Capacidad Fotovoltaica utilizando el Modelo de Euler	
	(2015-2023)	112
5.8.	Crecimiento de la Capacidad Fotovoltaica utilizando el Modelo Sigmoidal	
	(2023-2030)	113
5.9.	Modelado del Crecimiento de la Capacidad Fotovoltaica en México (2015-	
	$2030) \ldots \ldots$	114

# Índice de cuadros

4.1.	Tiempos de ciclo del proceso de fabricación textil	45
4.2.	Variables de estado y notaciones del modelo textil	46
4.3.	Funciones de Transferencia del Proceso Textil	69
4.4.	Datos de variables auxiliares y notación de variables de estado	70
4.5.	Variables del diagrama de Forrester	79
4.6.	Disponibilidad del Departamento de Tejido.	81
4.7.	Disponibilidad del Departamento de Hilvanado.	81
4.8.	Calidad del Departamento de Tejido.	81
4.9.	Calidad del Departamento de Hilvanado	82
4.10.	Rendimiento del Departamento de Tejido.	82
4.11.	Rendimiento del Departamento de Hilvanado.	82
4.12.	Cálculo de la metodología OEE en los departamentos	82
4.13.	Variación de parámetros para diferentes simulaciones del Departamento	
	de Tejido	89
4.14.	Variación de parámetros para diferentes simulaciones del Departamento	
	de Hilvanado.	91
5.1.	Errores porcentuales promedio para diferentes valores de $\alpha$ de 2015 a 2023	105
5.2.	Errores Promedio Porcentuales para Diferentes Valores de Alpha (2015-	
	2023)	111

# Resumen

Esta investigación doctoral aborda la mejora del análisis matemático de los modelos de simulación en Dinámica de Sistemas (SD), un área fundamental para la representación y el control de sistemas complejos. Los modelos tradicionales de SD, a pesar de su amplia aplicación, presentan limitaciones en su formalización matemática, lo que restringe la precisión del análisis y la eficacia en el control de estos sistemas. El problema central de la tesis radica en estas limitaciones, las cuales impiden un aprovechamiento óptimo de los modelos en diversos escenarios de simulación, especialmente cuando se enfrentan a sistemas no lineales y dinámicas complejas. En este contexto, el objetivo principal de la tesis es desarrollar una metodología avanzada y rigurosa que integre técnicas innovadoras, como el control moderno, el cálculo fraccionario y el cálculo conformable, con el fin de mejorar la representación matemática de estos modelos y fortalecer su capacidad de análisis y control.

La investigación se organiza en cinco etapas sucesivas que abordan diferentes aspectos del proceso de modelado, análisis y control de sistemas dinámicos. La primera etapa consiste en un análisis detallado de los modelos tradicionales de SD, con el fin de identificar las limitaciones en su estructura matemática y proponer áreas de mejora que puedan formalizar de manera más precisa los modelos utilizados. En la segunda etapa, se procede a la obtención de la función de transferencia de los modelos de SD, lo cual permite representar de forma más clara y comprensible los comportamientos dinámicos del sistema bajo distintas condiciones de entrada y salida. Esta representación matemática facilita la predicción del comportamiento del sistema y ofrece una base sólida para el análisis de estabilidad y control.

En la tercera etapa, se incorpora el control moderno mediante el espacio de estados y la técnica de Ackermann, lo que mejora la capacidad de ajustar y estabilizar los modelos de SD, permitiendo un enfoque de control más preciso y eficiente en tiempo real. La cuarta etapa se centra en la aplicación del cálculo fraccionario, una herramienta matemática que permite modelar fenómenos dinámicos de sistemas complejos con mayor flexibilidad, especialmente aquellos con memoria o que exhiben comportamientos no lineales. Esta etapa profundiza en la utilización de derivadas fraccionarias, como la derivada de Caputo, para describir más fielmente las dinámicas involucradas.

Finalmente, en la quinta etapa, se integran los modelos fraccionarios con el cálculo conformable, una extensión matemática que permite abordar fenómenos aún más complejos, como los que involucran efectos no locales o no singulares. Esta integración mejora el análisis de sistemas dinámicos, brindando una metodología robusta para modelar fenómenos de gran complejidad, lo que tiene un impacto positivo en la toma de decisiones en entornos industriales específicos, tales como el modelado de procesos productivos o la optimización de recursos.

A través de estas cinco etapas, la tesis proporciona una contribución significativa al estado del arte en Dinámica de Sistemas, presentando una metodología innovadora que mejora la capacidad de análisis y control de los modelos de simulación. Esta metodología tiene aplicaciones potenciales en una amplia gama de campos industriales, donde los sistemas dinámicos juegan un papel crucial en la toma de decisiones y la optimización de procesos.

# Capítulo 1

# Marco de Referencia

# 1.1. Introducción

La investigación propuesta se estructura en cinco etapas cruciales. Inicialmente, en la primera fase, se realiza un análisis detallado de los modelos de simulación en Dinámica de Sistemas (SD, por sus siglas en inglés), que son la razón fundamental de la presente investigación. La dinámica de sistemas es una metodología para analizar y modelar el comportamiento dinámico de sistemas en función del tiempo. No obstante, estos modelos presentan ciertas limitaciones en cuanto al análisis matemático, lo cual señala una clara área de oportunidad en la formalidad de los modelos matemáticos.

En la segunda etapa de esta tesis doctoral, se emprende una exploración profunda con el objetivo de describir y encontrar la función de transferencia que vincule el modelo matemático de simulación con distintos tipos de entradas. Además, se busca explicar el comportamiento de los modelos de dinámica de sistemas mediante la función de transferencia y su representación en el dominio del tiempo.

La tercera etapa se centra en el análisis del control moderno a través del espacio de estados. Este enfoque no solo busca obtener una matriz de transferencia como representación matemática del modelo de simulación, sino que también incorpora la técnica de Ackermann para lograr un control en lazo cerrado del sistema simulado. Este paso marca un avance significativo en la comprensión, análisis e integración de modelos matemáticos de Dinámica de Sistemas para una mejor toma de decisiones.

En las siguientes secciones, se profundizará en las etapas cuatro y cinco de esta investigación, completando así el panorama integral de la mejora propuesta para el análisis y la aplicación de modelos de simulación en Dinámica de Sistemas.

En la cuarta fase de esta investigación, se realiza un estudio adicional a los modelos de Dinámica de Sistemas mediante el cálculo fraccionario, con el objetivo de obtener modelos matemáticos más robustos. Esta rama matemática extiende las definiciones tradicionales de derivadas e integrales a exponentes no enteros, proporcionando un análisis más profundo de los modelos de simulación. En esta etapa, se examina la derivada de Caputo y se resuelven ecuaciones a través de teorías relacionadas con el cálculo fraccionario. Este enfoque no solo amplía la comprensión matemática, sino que también

permite calcular funciones en el tiempo fraccionario, otorgando mayor flexibilidad en la toma de decisiones, tanto en modelos de Dinámica de Sistemas como en procesos textiles, que es la aplicación específica de esta tesis doctoral.

La quinta y última etapa se sumerge en el estudio del cálculo conformable, aprovechando las propiedades del cálculo convencional. Al generar ecuaciones en el tiempo fraccionario, se logra una robustez significativa en el campo de la Dinámica de Sistemas. Con esta tesis doctoral, se busca aportar un análisis más matemático y riguroso a los modelos de Dinámica de Sistemas. Esta metodología, basada en el cálculo conformable, se establece como una herramienta valiosa y práctica para enriquecer el estado del arte en este campo, ofreciendo una perspectiva novedosa y útil para futuras investigaciones. En conjunto, estas cinco etapas representan un avance integral y significativo en la comprensión y aplicación de modelos de simulación en la Dinámica de Sistemas.

### **1.2.** Antecedentes

La Dinámica de Sistemas (SD, por sus siglas en inglés) es una técnica para construir modelos de simulación que se basa en la idea fundamental de que la estructura de las relaciones causales entre los elementos de un sistema constituye la principal causa de su comportamiento. La SD asume además que esta estructura de relaciones forma una red de bucles de retroalimentación que incluye relaciones no lineales y retrasos. El principal resultado de un modelo es obtener las trayectorias temporales de todas sus variables durante el período de simulación definido [1].

La SD se basa en el uso de dos tipos de diagramas, los Diagramas Causales y los Diagramas de Forrester, los cuales tienen su origen en la Teoría General de Sistemas y son, de hecho, como las dos caras de una misma moneda. El Diagrama Causal es, en general, un paso preliminar para la construcción de un Diagrama de Forrester, que sirve para simular el modelo en el ordenador. Esto nos permite verificar la coherencia de nuestras hipótesis, analizar el comportamiento del sistema y, finalmente, simular diferentes políticas, de modo que los resultados del modelo ayuden a resolver mejor el problema que se está analizando [2].

La SD se encarga de estudiar la retroalimentación de los datos del sistema y los medios mediante los cuales se utilizan los modelos para el establecimiento y abordaje de problemas. Esta técnica permite representar la estructura de la organización y observar cómo interactúan sus variables para simular y modelar problemas complejos [3]. Gran parte del arte de modelado de SD implica descubrir y representar los procesos de retroalimentación que, junto con las estructuras de acumulación, los flujos, las variables auxiliares, los retardos temporales y las no linealidades, determinan la dinámica de un sistema. La complejidad de los comportamientos dinámicos suele surgir de la interacción (retroalimentación) entre los componentes del sistema, más que de la complejidad de los propios componentes. Todos los comportamientos dinámicos se originan en la interacción de dos tipos de bucles de retroalimentación: los bucles positivos (o de refuerzo propio) y los bucles negativos (o de corrección propia) [4].

Los bucles positivos tienden a reforzar o amplificar cualquier cosa que esté sucediendo en el sistema, mientras que los bucles negativos contrarrestan y se oponen al cambio [5]. La Dinámica de Sistemas es, entonces, una teoría que analiza sistemas dinámicos basándose en modelos de simulación. Para evaluar los diferentes escenarios y comportamientos de los modelos de simulación, generalmente se utiliza la técnica de análisis de sensibilidad. En SD, el análisis de sensibilidad permite evaluar cómo los cambios en los parámetros de un modelo afectan a las variables de interés y su comportamiento a lo largo del tiempo [6]. Esta técnica es fundamental como herramienta de validación en modelos de dinámica de sistemas, ya que evalúa el impacto de cambios en los valores de las variables del modelo sobre los resultados obtenidos.

Actualmente, existen aplicaciones importantes de SD en los sectores ambiental, empresarial, social y científico, donde los modelos de simulación de SD tienen un gran impacto tanto a nivel industrial como académico, como se menciona en [7–22].

Los modelos de SD desarrollados en los campos de la energía, medicina, agricultura, desarrollo de la población, industria 4.0 y sostenibilidad son de gran valor. El SD es una metodología sistemática para modelar y analizar sistemas complejos y para entender cómo las interacciones entre sus componentes conducen a un comportamiento dinámico. A través del uso de modelos de simulación, el SD permite identificar patrones y tendencias a largo plazo, así como entender cómo diferentes acciones y decisiones pueden afectar el comportamiento de un sistema [23].

El análisis de sensibilidad es una técnica utilizada en diversos campos, como la economía, la ingeniería y la ciencia, para evaluar el impacto de los cambios en los valores de las variables de un modelo sobre los resultados obtenidos. El análisis de sensibilidad puede proporcionar información valiosa [24]

En general, el análisis de sensibilidad se utiliza como herramienta de validación en modelos de dinámica de sistemas. Esta técnica evalúa el impacto de los cambios en los valores de las variables del modelo sobre los resultados obtenidos. Sin embargo, al aplicar esta técnica a los modelos de Forrester, se pueden identificar ciertas limitaciones o áreas de oportunidad. Una limitación es la dificultad para determinar el rango apropiado de variación de los parámetros, especialmente cuando los datos de entrada son limitados o inciertos. Un rango inadecuado puede llevar a conclusiones incorrectas sobre la importancia de los parámetros [25, 26]

Además, el enfoque tradicional del análisis de sensibilidad implica variar los datos empíricamente, mediante pruebas y errores, lo que puede ser un proceso costoso e ineficiente. es por esto que existe un área de oportunidad en la formalidad matematica de los modelos. Por ejemplo, explicaciones de la formalidad matematica en modelos de dinamica de sistemas se expresan en términos de retroalimentación de bucle dominante [27, 28]. De los trabajos mas relevantes en la busqueda de la formalidad matematica tenemos a los trabajos presentados por [29–32] en donde utilizan la técnica de Análisis de Elasticidad de Eigenvalores (EEA), que evalúa cómo la estructura del sistema afecta los modos de comportamiento y la sensibilidad de los eigenvalores. Esta técnica permite analizar la dinámica interna del sistema al observar cómo los cambios en los parámetros afectan su comportamiento, proporcionando información útil sobre la sensibilidad y estabilidad del sistema.

La técnica de Análisis de Elasticidad de Eigenloops (LEEA) implementada por [33] muestra que es posible expresar el polinomio característico de la matriz del sistema A en términos de las ganancias de los lazos, lo que él denominó un conjunto de lazos independientes. Esta técnica permite calcular las elasticidades del lazo, lo cual es una gran contribución al estado del arte en dinámica de sistemas. Sin embargo, el método basado en eigenvalores solo analiza la dinámica interna, sin garantizar cómo responderá el sistema ante diferentes entradas y perturbaciones.

La técnica (LEEA) implementada en [34] muestra que es posible expresar la característica polinomial de la matriz del sistema A (es decir, el polinomio cuyos ceros son los autovalores de A) en términos de las ganancias de los lazos, en lo que el autor llamó un conjunto de lazos independientes. Además, demostró que un sistema completamente conectado con N enlaces y n variables tiene un total de n + 1 lazos independientes, y proporcionó un procedimiento para construir este conjunto y calcular las elasticidades de los lazos, lo que fue un gran aporte al estado del arte en la formalidad de la dinámica de sistemas; sin embargo, el método de autovalores solo analiza la dinámica interna, y sus resultados no tienen ninguna certeza sobre cómo se comportará el sistema con diferentes entradas y perturbaciones que pueda experimentar el sistema en estudio. La técnica de autovalores se utiliza para determinar los polos de una matriz dada. Por otro lado, al tener la representación espacio-estado de un sistema, se puede calcular tanto la matriz de transferencia como los polos del sistema. Además, la representación en espacio de estados permite obtener resultados para múltiples entradas y el cálculo del control utilizando técnicas de control modernas.

En comparación con el enfoque de calcular solo polos mediante la técnica de valores propios, el método de espacio de estados ofrece varias ventajas significativas. Al obtener la matriz de transferencia, se obtiene una descripción completa del sistema que incluye tanto los polos como los ceros, lo que permite un análisis más completo y preciso del comportamiento del sistema. Además, la representación en espacio de estados es más flexible y versátil, ya que puede manejar sistemas con múltiples entradas y salidas. Mediante el uso del método de espacio de estados, se puede aplicar una amplia gama de técnicas de control modernas para diseñar controladores eficaces y lograr los objetivos deseados en términos de rendimiento y estabilidad del sistema. Esto proporciona un mayor grado de control y optimización en comparación con el enfoque basado en polos del sistema.

Otra contribución relevante en la búsqueda de formalidad en dinámica de sistemas se presenta en [35]. En dicho trabajo se realiza un análisis de la trayectoria general de una variable de estado en lugar de centrarse solo en un modo de comportamiento específico. Se enfatiza que esta trayectoria general está determinada por una combinación lineal de los productos de los componentes de los vectores propios y los modos de comportamiento asociados a dichos vectores propios. El estudio señala que los cambios en los vectores propios están relacionados con transitorios de corto plazo en la respuesta de la variable de estado, mientras que los vectores propios están vinculados a comportamientos de largo plazo. Esta contribución representa un avance significativo en la formalidad de los modelos matemáticos al considerar las diferentes dinámicas que afectan a la variable de estado.

Sin embargo, una limitación importante del modelo matemático propuesto es la falta de control sobre los valores deseados del sistema. La ausencia de un mecanismo para influir en los valores propios y alcanzar las metas planteadas por la organización, así como la proyección de nuevas metas, es una limitación que debe tomarse en cuenta. Además, es importante mencionar que este enfoque no permite la búsqueda del valor óptimo del sistema, como se logra en la técnica de espacio de estados con el uso de Ackermann. La integración de estas técnicas permite una optimización más precisa y efectiva de los parámetros del sistema para alcanzar los objetivos deseados.

Existe una escases en trabajos en la formalidad matematica de la DS, lo cual es una oportunidad significativa en la formalidad de los modelos de simulación en dinámica de sistemas.

Esta brecha motiva la presente tesis doctoral, cuyo objetivo es explorar y analizar en detalle los modelos matemáticos mediante la aplicación de la función de transferencia, técnicas de control modernas y el cálculo fraccionario. Así, se busca una comprensión más profunda que permita una toma de decisiones más informada en diversas áreas de conocimiento donde se implementa la metodología de los modelos de Forrester.

Como se ha visto en investigaciones anteriores, los eigenvectores y eigenvalores son conceptos importantes en SD, ya que se utilizan para analizar y comprender el comportamiento de los sistemas dinámicos. En SD, un sistema dinámico puede ser representado por una ecuación matricial:

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

Los eigenvalores son valores de la matriz que satisfacen esta ecuación, representando modos de comportamiento fundamentales para el análisis de sistemas dinámicos [36].

donde A es la matriz del sistema,  $\lambda$  es el eigenvalor y v es el eigenvector correspondiente. Los eigenvalores se utilizan para determinar la estabilidad a largo plazo y el comportamiento del sistema. Si todos los eigenvalores son negativos, el sistema es estable y tiende a converger hacia un estado estacionario. Sin embargo, si uno o más eigenvalores son positivos, el sistema es inestable y puede presentar comportamientos oscilatorios o caóticos [37]. Los eigenvectores, por su parte, representan las direcciones en las que la matriz del sistema no cambia significativamente cuando se multiplica por el eigenvector, siendo útiles para analizar el comportamiento e interacciones de las distintas variables del sistema. En resumen, los eigenvectores y los eigenvalores son conceptos fundamentales en la dinámica de sistemas, ya que ayudan a analizar y comprender el comportamiento de sistemas dinámicos complejos [38,39].

El enfoque presentado por [40] integra modelos de simulación y teoría de sistemas dinámicos, donde las ecuaciones diferenciales se simplifican a un modelo lineal diferencial invariante en el tiempo. Mediante el análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio en el modelo de simulación y utilizando la técnica de sistemas dinámicos de Filippov, se analizan diferentes regiones del modelo y se presenta una nueva alternativa para el análisis de sensibilidad. Este enfoque representa una alternativa interesante al análisis de sensibilidad tradicional o al método de prueba y error. Asimismo, el enfoque propuesto tiene un objetivo similar al proporcionar una alternativa diferente al análisis de sensibilidad convencional a través del control óptimo en modelos de simulación [41].

La dinámica de sistemas y la ingeniería de control son disciplinas interrelacionadas que se emplean para analizar y modelar sistemas complejos en diversas áreas de la ingeniería y la ciencia. La dinámica de sistemas se centra en estudiar sistemas complejos y su evolución y comportamiento en el tiempo, mientras que la ingeniería de control se enfoca en el diseño e implementación de sistemas de control que regulen dicho comportamiento. Se aplican técnicas de teoría de control en múltiples áreas como la ingeniería eléctrica, mecánica, aeroespacial y robótica. En esta investigación doctoral se emplean ambas disciplinas para modelar y analizar un sistema de fabricación textil, con el objetivo de diseñar sistemas de control que regulen su comportamiento y maximicen la eficiencia del sistema.

En esta investigación, exploraremos la posibilidad de diseñar la dinámica del sistema a través de la retroalimentación de estados. La ley de control por retroalimentación se desarrollará paso a paso utilizando una única metodología: la técnica de ganancia de Ackermann. Uno de los principales desafíos en el diseño de sistemas de control es crear controladores que modifiquen la dinámica del sistema mediante cambios en los valores propios de la matriz que representa la dinámica en circuito cerrado. Con la técnica de Ackermann se calculan las ganancias necesarias para alcanzar el control óptimo deseado, y finalmente se compara el modelo matemático inicial con el control óptimo logrado. Esta técnica tiene un impacto relevante en aplicaciones organizacionales como herramienta adicional en la toma de decisiones orientadas al cumplimiento de objetivos.

Además de las técnicas de control, se realiza un análisis del modelo matemático mediante ecuaciones diferenciales fraccionarias. Al introducir el uso de estas ecuaciones en modelos de dinámica de sistemas, se obtiene un mayor grado de libertad y una herramienta matemática más robusta para abordar problemas en una amplia variedad de campos. Las ecuaciones diferenciales fraccionarias permiten capturar de manera más precisa y detallada las complejas interacciones presentes en los sistemas dinámicos, lo cual puede llevar a un entendimiento más profundo y a soluciones más efectivas en diversas aplicaciones. Este enfoque promete enriquecer el campo de la dinámica de sistemas al ofrecer una herramienta matemática más robusta y versátil para la modelización y el análisis de dichos sistemas. En donde Capitulo 1 Y 2 se centran en la integración de la ingeniería de control y los modelos de DS, en el Capitulo 3 la inclusión del espacio de estados y el control de Ackerman, mientras en el Capitulo 4 Y 5 , es la formalidad matemática por medio de nuevos estimadores en diferentes campos del saber y como metodos de estimación.

## 1.3. Definición del Problema

En los últimos años, los modelos de simulación en Dinámica de Sistemas (SD) han sido utilizados ampliamente para representar y analizar sistemas complejos en diversas disciplinas, como la ingeniería, la economía y la biología. Estos modelos son esenciales para comprender las interacciones dinámicas de los sistemas y tomar decisiones informadas en contextos donde las soluciones experimentales o empíricas no son viables. Sin embargo, a pesar de su relevancia y aplicabilidad, los modelos matemáticos que sustentan la simulación de estos sistemas presentan limitaciones significativas que afectan su precisión y capacidad de control.

El problema principal que esta investigación busca abordar radica en las deficiencias en la formalización matemática de los modelos de SD. En muchos casos, las representaciones matemáticas existentes no son lo suficientemente robustas para capturar la complejidad de los sistemas reales, especialmente cuando se trata de fenómenos no lineales, efectos de memoria o dinámicas complejas. Estas limitaciones restringen las aplicaciones de los modelos de SD, ya que los resultados obtenidos a partir de ellos pueden ser imprecisos, dificultando la toma de decisiones y el diseño de controles adecuados.

Las técnicas tradicionales de análisis y control de estos modelos, como la teoría clásica de control, a menudo no son capaces de abordar de manera efectiva estas complejidades. Además, la falta de herramientas adecuadas para modelar ciertos comportamientos, como los derivados fraccionarios o el cálculo de sistemas con memoria, impide un análisis más preciso y flexible. Por lo tanto, el problema central de esta tesis es la necesidad de mejorar el análisis matemático y la capacidad de control de los modelos de simulación en Dinámica de Sistemas, utilizando técnicas más avanzadas y adecuadas a los desafíos que presentan los sistemas dinámicos reales.

El objetivo de esta investigación es desarrollar una metodología avanzada que permita superar estas limitaciones, mediante la integración de técnicas de control moderno, cálculo fraccionario y cálculo conformable. Estas herramientas ofrecen una representación más precisa y flexible, lo que facilitará la simulación, el análisis y el control de sistemas complejos de manera más eficiente.

Este enfoque tiene el potencial de contribuir significativamente al estado del arte en el campo de la Dinámica de Sistemas, ofreciendo una metodología que puede ser aplicada a una amplia gama de sistemas industriales, científicos y tecnológicos.

## 1.4. Objetivos

#### 1.4.1. Objetivos Generales

1. Desarrollar una metodología avanzada y rigurosa que permita un análisis matemático mejorado de los modelos de simulación en Dinámica de Sistemas, integrando técnicas de control moderno, cálculo fraccionario y conformable, con el fin de la representación matematica y la toma de decisiones en aplicaciones de Dinámica de Sistemas.

### 1.4.2. Objetivos Específicos

- 1. Analizar detalladamente los modelos de simulación en Dinámica de Sistemas, identificando y documentando las limitaciones actuales en su estructura matemática y áreas de oportunidad para formalizar y mejorar su precisión.
- 2. Desarrollar una representación mediante la función de transferencia y su análisis en el dominio del tiempo, que permita modelar y describir los comportamientos de los sistemas de simulación en función de distintas entradas, proporcionando una comprensión más profunda de la dinámica de estos sistemas.
- 3. Incorporar el control en el espacio de estados y la técnica de Ackermann en los modelos de simulación, para establecer un enfoque de control moderno en lazo cerrado que mejore la capacidad de ajuste y estabilidad de los sistemas simulados en Dinámica de Sistemas.
- 4. Aplicar el cálculo fraccionario para modelar sistemas dinámicos complejos, explorando la derivada de Caputo y otras herramientas del cálculo fraccionario para ofrecer un mayor grado de libertad y una mayor precisión en el modelado de sistemas de simulación.
- 5. Integrar el cálculo conformable para robustecer el análisis de sistemas dinámicos, proporcionando una extensión matemática que permita abordar y modelar fenómenos de mayor complejidad en Dinámica de Sistemas, beneficiando la toma de decisiones y mejorando la aplicabilidad de los modelos en entornos industriales específicos.

# 1.5. Hipótesis de Investigación

La incorporación de técnicas avanzadas, como el cálculo fraccionario, el cálculo conformable y el control en espacio de estados mediante la técnica de Ackermann, permite mejorar la precisión matemática y la capacidad de ajuste de los modelos de simulación en Dinámica de Sistemas.

# Capítulo 2 Marco Teórico

Este capítulo establece el marco conceptual y teórico necesario para fundamentar la metodología propuesta en esta investigación, proporcionando los significados y bases de los conceptos clave, sustentados en la literatura especializada. El propósito de este proyecto es desarrollar una propuesta metodológica robusta para caracterizar y mejorar los modelos de simulación en Dinámica de Sistemas (SD) mediante el uso de herramientas matemáticas avanzadas y técnicas de control. Con este fin, se requiere un enfoque integral que incluya:

1. Modelos de Simulación en Dinámica de Sistemas: Comprender la estructura y el comportamiento de los sistemas dinámicos, con un enfoque en los métodos que permiten la representación de sus procesos y la evaluación de sus dinámicas en función del tiempo. Estos modelos constituyen la base de análisis sobre la cual se desarrollarán las mejoras metodológicas de esta investigación.

2. Función de Transferencia y Espacio de Estados: Analizar la función de transferencia como una herramienta fundamental para relacionar las variables de entrada y salida en modelos de sistemas lineales. Asimismo, la representación en espacio de estados proporciona un marco matemático que facilita el análisis de sistemas de mayor complejidad, permitiendo describirlos mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales y ofreciendo una visión más amplia y detallada del sistema.

3. Técnica de Control de Ackermann: Aplicar el método de diseño de control de Ackermann para modificar y controlar la dinámica de un sistema mediante la realimentación de estados. Esta técnica se utilizará para implementar control óptimo en lazo cerrado, ajustando las propiedades del sistema a fin de lograr un comportamiento específico y estable, que cumpla con los objetivos deseados en el modelo simulado.

4. Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias: Introducir el cálculo fraccionario como una herramienta para modelar fenómenos que no se pueden describir adecuadamente con las derivadas enteras convencionales. Las ecuaciones diferenciales fraccionarias permiten capturar comportamientos complejos e interacciones prolongadas entre variables, ofreciendo una mayor precisión en el modelado de sistemas dinámicos.

5. Cálculo Conformable: Explorar el cálculo conformable como una extensión de las herramientas de cálculo fraccionario. Esta técnica proporciona una forma adicional de abordar la modelización de sistemas dinámicos, permitiendo una representación matemática más flexible y adaptable a la variabilidad de los fenómenos reales. Su aplicación promete enriquecer las aproximaciones a los sistemas simulados, mejorando la precisión y adaptabilidad de los modelos.

Para la realización de esta tesis de investigación, es esencial un conocimiento sólido en áreas de Dinámica de Sistemas, ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferenciales fraccionarias y sistemas de control. En este capítulo, se presentan los fundamentos teóricos de cada uno de estos dominios para ofrecer una comprensión más completa y profunda de la propuesta metodológica y los avances que se pretenden lograr en el análisis de modelos de simulación en sistemas complejos. Estos conocimientos no solo constituyen el marco teórico necesario, sino que también respaldan la implementación de las técnicas avanzadas y el desarrollo del análisis exhaustivo propuesto en esta investigación doctoral.

# ETAPA I - Modelos de Simulación de Dinámica de Sistemas

### 2.1. Dinámica de Sistemas

La Dinámica de Sistemas fue desarrollada en los años cincuenta en el MIT (Massachusetts Institute of Technology) por el ingeniero Jay Wright Forrester. Sus trabajos cristalizaron en sus tres obras más trascendentes: *Industrial Dynamics*, que analiza diversos sistemas comerciales y de gestión como el control de inventarios, la logística y la toma de decisiones; *Urban Dynamics* que estudia los problemas de la sociedad urbana, como el hacinamiento y el deterioro de las ciudades; y *World Dynamics* que se dirige a problemas como el crecimiento demográfico y la contaminación a escala global. En 1970, en el I Informe al Club de Roma se presenta el Modelo del Mundo, coordinado por el matrimonio Meadows utilizando Dinámica de Sistemas. Estos trabajos y su discusión popularizaron la Dinámica de Sistemas a nivel internacional. El primer libro de Forrester, *Industrial Dynamics*, sigue siendo una declaración elemental de la filosofía y metodología de la disciplina [42].

El objetivo básico de la dinámica de sistemas está orientado a comprender las causas estructurales que producen los comportamientos del sistema y evaluar cómo diferentes acciones que se llevan a cabo sobre diversas partes del sistema acentúan o atenúan las tendencias implícitas en el comportamiento del modelo, a partir de un conocimiento más detallado sobre cada uno de los elementos que componen el sistema [43]. La dinámica de sistemas no pretende predecir detalladamente el futuro, sino, más bien, ser una herramienta para enriquecer el conocimiento del mundo real a través del análisis de sistemas complejos y poder evaluar la relación e impacto de las diferentes variables sobre el sistema que se esté evaluando; en términos prácticos, daría elementos de apoyo para el proceso de toma de decisiones [44]. En la toma de decisiones, existen limitaciones en la comprensión de los componentes y sus relaciones; los modelos de simulación constituyen una herramienta esencial para la toma de decisiones, debido a que permiten explicar el comportamiento, funcionamiento, características y las respuestas de sistemas de producción y sistemas en general en diversas situaciones que suelen presentarse en la vida diaria [45].

La Dinámica de Sistemas es una metodología para el estudio y manejo de sistemas de realimentación complejos. Una de las características de esta disciplina es el uso del computador para realizar sus simulaciones, lo que ofrece la posibilidad de estudiar el comportamiento y las consecuencias de las múltiples interacciones de los elementos de un sistema a través del tiempo [46].

En la dinámica de sistemas, se reconocen dos bucles fundamentales que desempeñan un papel crucial en el comportamiento de los sistemas: el bucle de refuerzo (o de reforzamiento) y el bucle de balanceo (o de equilibrio).

#### 2.1.1. Bucle de Reforzamiento Positivo

El bucle de refuerzo, también conocido como bucle de retroalimentación positiva, consiste en un proceso en el cual una salida o resultado de un sistema influye directamente en las entradas o variables que lo generan. Este tipo de retroalimentación tiende a amplificar cualquier cambio inicial, lo que puede llevar a un crecimiento o amplificación exponencial de la variable en el sistema, generando resultados inestables en casos extremos [47].



Figura 2.1: Bucle de retroalimentación positiva.

#### 2.1.2. Bucle de Balanceo Negativo

El bucle de balanceo, también conocido como bucle de retroalimentación negativa, se refiere a un proceso en el cual una salida del sistema actúa para contrarrestar o reducir cualquier desviación o cambio en las entradas o variables del sistema. En este caso, la retroalimentación negativa busca mantener el sistema en equilibrio o estabilidad, ya que cualquier desviación del estado deseado activa mecanismos de corrección que contrarrestan el cambio y restauran el equilibrio [48]. Ver Figura 2.2



Figura 2.2: Bucle de retroalimentación negativa.

# 2.2. Modelos Fundamentales de Dinámica de Sistemas

Los modelos de comportamiento fundamentales son el crecimiento exponencial, la búsqueda de objetivos y la oscilación. Cada uno de estos es generado por una estructura de retroalimentación simple: el crecimiento surge de la retroalimentación positiva, la búsqueda de objetivos surge de la retroalimentación negativa, y la oscilación surge de la retroalimentación negativa con demoras en el ciclo. Otros modos comunes de comportamiento, incluido el crecimiento en forma de S, el crecimiento en forma de S con exceso y la oscilación, y el exceso y colapso, surgen de interacciones no lineales de las estructuras fundamentales de retroalimentación [48].

#### 2.2.1. Modelo Exponencial

El crecimiento exponencial se produce mediante la retroalimentación positiva, donde el aumento de una variable incrementa aún más su valor, conduciendo a un crecimiento acelerado. Ejemplos típicos incluyen el crecimiento de poblaciones o el interés compuesto, donde el estado actual afecta el incremento neto y crea un ciclo de crecimiento continuo.



Figura 2.3: Modelo exponencial en dinámica de sistemas.

#### 2.2.2. Modelo de Búsqueda de una Meta

Los bucles de retroalimentación negativa buscan equilibrar el estado del sistema, alineándolo con un objetivo. Estas estructuras contrarrestan las perturbaciones que alejan el sistema de su estado deseado, siendo fundamentales en el control de sistemas.



Figura 2.4: Estructura de búsqueda de un objetivo.

En la siguiente gráfica se ilustra el comportamiento típico de búsqueda de objetivos en un sistema dinámico, mostrando cómo la variable del sistema se ajusta a medida que el tiempo avanza y se acerca al valor objetivo.



Figura 2.5: Comportamiento de búsqueda de un objetivo en dinámica de sistemas.

#### 2.2.3. Modelo de Oscilación

La oscilación es un modo de comportamiento observado en sistemas dinámicos. Al igual que la búsqueda de objetivos, se basa en retroalimentación negativa, pero con demoras en el ciclo, lo que produce un comportamiento oscilatorio.



Figura 2.6: Estructura de modelo de oscilación.

La siguiente gráfica ilustra la estructura típica de un modelo de oscilación, donde la variable de la población oscila alrededor de un valor objetivo debido a los ciclos de retroalimentación negativa con demoras.



Figura 2.7: Gráfica del modelo de simulación.

### 2.2.4. Crecimiento en forma de S

Este comportamiento, comúnmente observado en sistemas dinámicos, muestra un crecimiento inicial exponencial que se ralentiza gradualmente hasta alcanzar un equilibrio, formando una curva en "S".



Figura 2.8: Modelo de crecimiento en forma de S.

La siguiente gráfica ilustra la estructura típica de un modelo de Forma S,



Figura 2.9: Gráfica del modelo de simulación.

### 2.2.5. Overshot

Cuando hay demoras en los bucles de retroalimentación negativa, el sistema puede sobrepasar su capacidad de carga antes de estabilizarse, lo que conduce a un patrón de sobrepaso y oscilación.



Figura 2.10: Comportamiento de overshot.

Este tipo de comportamiento puede observarse en una variedad de contextos, como

el control de poblaciones, la gestión de recursos o en modelos económicos, donde una acción o intervención inicial puede resultar en un exceso que luego debe corregirse. El overshoot puede ser particularmente problemático si no se gestiona adecuadamente, ya que puede causar inestabilidad o comportamientos no deseados en el sistema.

A continuación, se presenta una gráfica que ilustra el modelo de overshoot, donde una variable ajusta su valor hacia un objetivo, pero primero lo sobrepasa antes de estabilizarse.



Figura 2.11: Estructura de un modelo de overshoot.

## 2.3. Ejemplo de un Modelo de Simulación

En este ejemplo se analiza la dinámica poblacional de una región ficticia llamada Tierra de los Bosques. Tras una catástrofe, se utiliza un modelo de simulación para predecir el tiempo necesario para que la población recupere su tamaño inicial, teniendo en cuenta constantes demográficas.



Figura 2.12: Diagrama de Forrester del modelo de simulación de catástrofe.

#### 2.3.1. Modelo de Análisis de Sensibilidad

Para comprender la sensibilidad del modelo a variaciones en sus parámetros, se realiza un análisis mediante el Método de Monte Carlo. Este método permite simular cambios aleatorios en los parámetros y evaluar su impacto en el modelo, obteniendo así un entendimiento de la robustez del sistema ante variabilidad en los datos [50].



Figura 2.13: Análisis de sensibilidad en el modelo de simulación de catástrofe.

# ETAPA II - Ingeniería de Control

## 2.4. Sistemas de control

Los sistemas de control están compuestos por un conjunto de elementos que actúan e interactúan entre sí para monitorear y controlar una variable física del sistema. Se clasifican en dos tipos:

- Lazo abierto: sistemas que siguen únicamente una consigna sin tener en cuenta una referencia.
- Lazo cerrado: sistemas que buscan la referencia actual de una variable específica para, con base en ella, llegar a un valor objetivo o consigna.

Para visualizar las funciones de cada componente en la ingeniería de control, suele usarse una representación denominada *diagrama de bloques*. En esta sección, primero se define qué es un diagrama de bloques y luego se abordan los aspectos introductorios de los sistemas de control automático [51].

#### 2.4.1 Diagramas de bloques

Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones que realiza cada componente y del flujo de señales entre ellos. En estos diagramas, las variables del sistema se enlazan mediante bloques funcionales, donde cada bloque representa una operación matemática que transforma la señal de entrada en la señal de salida. Las funciones de transferencia de los componentes se colocan en sus respectivos bloques y se conectan con flechas que indican la dirección del flujo de señales, denotando la naturaleza unilateral del sistema. La **figura 2.14** muestra un elemento de un diagrama de bloques.



Figura 2.14: Elemento de un diagrama de bloques.

Es importante que las dimensiones de la señal de salida de cada bloque sean el resultado de multiplicar las dimensiones de la señal de entrada por las de la función de transferencia del bloque. La ventaja de los diagramas de bloques es la claridad que ofrecen para evaluar la contribución de cada componente al desempeño general del sistema [52].

#### 2.4.2 Punto de suma

En un diagrama de bloques, un círculo con una cruz ,indica una operación de suma. El signo en cada flecha determina si la señal debe sumarse o restarse, y todas las cantidades deben tener dimensiones compatibles.



Figura 2.15: Punto de suma en un diagrama de bloques.

#### 2.4.3 Punto de ramificación

Un punto de ramificación permite que la señal de un bloque se divida para ir a otros bloques o puntos de suma en el sistema.

#### 2.4.4 Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado

La figura 2.16 presenta un ejemplo de un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado. Aquí, la salida C(s) se retroalimenta al punto de suma, donde se compara con la entrada de referencia R(s). La estructura en lazo cerrado se indica claramente.


Figura 2.16: Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado.

La señal de salida necesita convertirse a una señal compatible con la entrada, lo cual se logra mediante el elemento de retroalimentación, cuya función de transferencia es H(s), como se observa en la **figura 2.17**.



Figura 2.17: Sistema en lazo cerrado con retroalimentación.

## 2.5. Función de transferencia

#### 2.5.1. Función de transferencia en lazo abierto

La relación entre la salida C(s) y la señal de error E(s) se denomina función de transferencia de la trayectoria directa, y se representa como:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s) \tag{2.5.1}$$

#### 2.5.2. Función de transferencia en lazo cerrado

Si la función de transferencia de la trayectoria de retroalimentación H(s) es la unidad, la función de transferencia en lazo cerrado y la de la trayectoria directa son idénticas. En el sistema de la **la figura 2.17**, la salida C(s) y la entrada R(s) están relacionadas mediante:

$$C(s) = G(s) [R(s) - H(s)C(s)] = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}R(s)$$
(2.5.2)

Por lo tanto, la función de transferencia en lazo cerrado se define como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$
(2.5.3)

Esta ecuación muestra que la salida del sistema en lazo cerrado depende tanto de la función de transferencia en lazo cerrado como de la naturaleza de la entrada .

# 2.6. ETAPA III: Espacio de Estados y Control de Ackerman

La representación en espacio de estados es una técnica utilizada en el análisis y diseño de sistemas dinámicos. Esta técnica se basa en la descripción de un sistema en términos de sus variables de estado, entradas y salidas [53]. En general, un sistema dinámico puede ser representado en espacio de estados mediante las siguientes matrices:

#### 2.6.1. Matriz de Estado (A)

Esta matriz representa la dinámica del sistema en términos de sus variables de estado. La matriz A es una matriz cuadrada de orden n, donde n es el número de variables de estado del sistema. Los elementos en la matriz A determinan cómo las variables de estado cambian a lo largo del tiempo. En otras palabras, la matriz A describe cómo las variables de estado se relacionan entre sí a lo largo del tiempo.

#### 2.6.2. Matriz de Entrada (B)

Esta matriz representa cómo las entradas afectan al sistema. La matriz B es una matriz de dimensiones  $n \times m$ , donde n es el número de variables de estado del sistema y m es el número de entradas.

#### 2.6.3. Matriz de Salida (C)

Esta matriz representa cómo las salidas del sistema se relacionan con las variables de estado. La matriz C es una matriz de dimensiones  $p \times n$ , donde p es el número de salidas del sistema y n es el número de variables de estado.

#### 2.6.4. Matriz de Transmisión Directa (D)

Esta matriz representa cualquier influencia directa que las entradas puedan tener en las salidas del sistema. La matriz D es una matriz de dimensiones  $p \times m$ . Si no hay influencia directa, la matriz D es igual a cero. Ver ecuaciones (2.6.1) y (2.6.2). Estas matrices en la representación en espacio de estados proporcionan una descripción compacta y matemáticamente formal del comportamiento de un sistema dinámico, lo que facilita su análisis y diseño. En donde  $\dot{x}$  es la ecuación de estados y y es el vector de salida, que representa las observaciones o mediciones del sistema [54–56].

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.6.1}$$

$$y = Cx \tag{2.6.2}$$

La matriz de transferencia proporciona información importante sobre el comportamiento del sistema, como la estabilidad, la respuesta transitoria y la respuesta en estado estacionario. En la teoría de control, una de las desventajas más comunes es diseñar controladores para sistemas que puedan funcionar de manera efectiva incluso cuando se enfrentan a diferentes tipos de variables e irregularidades. Permite analizar y diseñar sistemas de control, identificar polos y ceros del sistema, y realizar simulaciones y predicciones del comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones.La matriz de transferencia con referencia se define como la transformada de Laplace de la relación entre la salida y la entrada de referencia, con condiciones iniciales nulas. Ver ecuación (2.6.3).

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D (2.6.3)$$

Siendo  $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$  los coeficientes de la ecuación característica deseada. De esta manera, podemos calcular directamente la matriz de retroalimentación de estado para controlar diferentes sistemas o casos de estudio, lo cual es una contribución relevante en el campo de la dinámica de sistemas (SD) [57]. Otro parámetro importante en la búsqueda del control mediante el método de Ackerman es la ecuación característica deseada del sistema, que determina la velocidad o la lentitud deseada en la respuesta de las variables de estado y del sistema en general. Ver ecuación (2.6.4).

$$\phi(A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n \tag{2.6.4}$$

A partir de las dos ecuaciones matriciales descritas, mediante la fórmula de Ackerman se calcula el vector de ganancias, donde A representa la matriz interna del sistema y C representa la matriz de controlabilidad del sistema. Ver ecuación (2.6.5).

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} C^{-1} \phi(A)$$
 (2.6.5)

# 2.7. ETAPA IV: Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias

#### 2.7.1. Cálculo Fraccionario

El cálculo fraccionario (CF) es una disciplina que se encarga del estudio de los operadores de integración y derivación de orden fraccionario, es decir, operadores de orden no entero. Su origen se remonta a los orígenes mismos del cálculo convencional, cuando se propusieron las primeras notaciones para las derivadas [58]. A lo largo de los años, han aparecido diferentes definiciones de derivada fraccionaria, algunas basadas en la generalización de la definición de límite de la derivación: como la definición de Lacroix, la derivada Grünwald-Letnikov (DGL) [59], y en los últimos años la derivada conformable [76]. Otras se basan en la generalización de la integración múltiple y las propiedades de semigrupo, como la integral fraccionaria Riemann-Liouville (IRL), las derivadas Riemann-Liouville (DRL), la derivada de Caputo [61], la derivada Caputo-Fabrizio (DCF) propuesta en 2015 [62], y la derivada Atangana-Baleanu (AB) del año 2016 [63].

#### 2.7.2. Aplicaciones del Cálculo Fraccionario

En la actualidad, el CF se aplica en una gran cantidad de áreas del conocimiento, por ejemplo: en el análisis de modelos viscoelásticos [64], el estudio de modelos viscoelásticos [65], modelos fraccionarios de difusión anómala [66], análisis de circuitos eléctricos de orden fraccionario [67], procesamiento de imágenes médicas [68, 69], además del estudio del rol de las vacunas en el control de la propagación del COVID-19 y modelos fraccionarios del comportamiento del COVID-19 al aplicar vacunas [70].

#### 2.7.3. Función Mittag-Leffler

Así como la función exponencial juega un rol fundamental en la solución de muchas ecuaciones diferenciales de orden entero, la función Mittag-Leffler (ML) definida en

1903 [71] aparece de manera consistente en la solución de las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Está definida por la siguiente expresión:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$
(2.7.1)

donde  $\alpha, z \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha$  es un parámetro arbitrario, z es una variable que puede ser compleja o real, y  $\Gamma(\cdot)$  es la función Gamma que extiende las propiedades de la función factorial.

Consideremos las transformadas de Laplace de las siguientes funciones, donde las ecuaciones (2.7.2) y (2.7.3) están en términos de la función ML:

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \tag{2.7.2}$$

$$\mathcal{L}\{E_{\alpha}(\omega t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+\omega)}$$
(2.7.3)

$$\mathcal{L}\left[1 - E_{\alpha}(\omega t^{\alpha})\right] = \frac{\omega}{s(s^{\alpha} + \omega)}$$
(2.7.4)

Donde  $\omega \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ , con  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  [72,73].

#### 2.7.4. Derivada de Caputo

La derivada fraccionaria de Caputo se propuso en 1971 [74], como una forma de evitar las condiciones iniciales de orden fraccionario de la derivada Riemann-Liouville (DRL) y se define como sigue:

**Definición 1:** Sea f(t) una función continua en (a, b). La derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$  se define como:

$${}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau$$
(2.7.5)

donde  $a \in \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n,$  y  $f \in H^n(a,b), b > a.$ Y su transformada de Laplace está dada por:

$$\mathcal{L}\left\{{}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t)\right\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0)$$
(2.7.6)

donde  $\mathcal{L}{f(t)} = F(s)$ , y  $f^{(m)}(0) = \left(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right)_{t=0}$  para  $m \in [0, n]$ . Para n = 1, la transformada de Laplace está dada por:

$$\mathcal{L}\left\{{}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t)\right\} = s^{\alpha}F(s) - s^{\alpha-1}f(0)$$
(2.7.7)

# 2.8. ETAPA V: Cálculo Conformable

En las definiciones anteriores de Caputo, se daba un fenómeno interesante: los datos obtenidos en instantes anteriores o en una posición anterior influían en los datos futuros. Esto se conoce como efecto de memoria. En cambio, en [75] se describe una nueva definición de derivada de orden arbitrario que funciona de una manera distinta, es decir, los datos presentes y pasados no influyen en la información futura. Por lo tanto, se considera una derivada local. Esta derivada se llama Derivada Conformable.

Dada  $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$  una función, entonces, la derivada fraccionaria conformable de orden  $\alpha$  se define por la ecuación:

$$T_{\alpha}(f)(t) = \frac{d^{\alpha}f(t)}{dt^{\alpha}} = f^{\alpha}(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}$$
(2.8.1)

para todo t > 0 y  $0 < \alpha < 1$ . Esta expresión puede interpretarse como una generalización de la definición fundamental de la derivada. Cuando  $\alpha = 1$ , se obtiene la derivada convencional:

$$f'(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t+\epsilon) - f(t)}{\epsilon}$$
(2.8.2)

Si f es  $\alpha$ -diferenciable en (0, a), con a > 0, y lím<sub>t $\rightarrow 0^+$ </sub>  $f^{\alpha}(t)$  existe, entonces tenemos:

$$f^{\alpha}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{\alpha}(t)$$
 (2.8.3)

Las propiedades más importantes de la derivada fraccionaria conformable son dadas en el siguiente teorema [76], [77], [78], [79], [80] :

**Teorema:** Dada  $\alpha \in (0, 1]$  y dadas f y  $g \alpha$ -diferenciables en el punto t > 0, entonces se cumple lo siguiente:

- 1.  $T_{\alpha}(af + bg) = aT_{\alpha}(f) + bT_{\alpha}(g)$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- 2.  $T_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha}$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ .
- 3.  $T_{\alpha}(\lambda) = 0$ , para toda función constante  $f(t) = \lambda$ .
- 4.  $T_{\alpha}(fg) = fT_{\alpha}(g) + gT_{\alpha}(f).$

5. 
$$T_{\alpha}(f/g) = \frac{gT_{\alpha}(f) - fT_{\alpha}(g)}{g^2}$$

6.  $T_{\alpha}(f)(t) = t^{n+1-\alpha} \frac{d^{n+1}f}{dt^{n+1}}$ , para  $\alpha \in [n, n+1]$ . Si f(t) es (n+1)-diferenciable en t > 0.

# Capítulo 3 Metodología

La presente investigación propone una metodología integral para el modelado, análisis y control de sistemas dinámicos, con aplicaciones específicas en procesos industriales como el textil y la energía fotovoltaica. La metodología combina herramientas tradicionales de dinámica de sistemas con enfoques avanzados como el cálculo fraccionario y el cálculo conformable, buscando mejorar la precisión de los modelos y optimizar el control de procesos complejos. A través de varias etapas, se desarrollan modelos matemáticos representativos de los sistemas estudiados, se analizan sus comportamientos dinámicos y se implementan estrategias de control modernas para lograr una gestión más eficiente y precisa de los procesos. En este contexto, se detallan las etapas que estructuran la propuesta metodológica, desde el modelado básico hasta la implementación de técnicas avanzadas de control y simulación.



Figura 3.1: Metodología propuesta para el trabajo de investigación.

La metodología propuesta en esta tesis doctoral se estructura en cinco etapas principales, cada una enfocada en diferentes aspectos del proceso de modelado, análisis y control de sistemas dinámicos, aplicados a casos de estudio específicos. A continuación se describen detalladamente las etapas:

1. Etapa 1: Modelado y Simulación en Dinámica de Sistemas Tradicional. En esta etapa, se presenta un modelo de simulación de un proceso textil como caso de estudio. El modelo se desarrolla utilizando las herramientas tradicionales de dinámica de sistemas, con el objetivo de analizar y simular el comportamiento del proceso bajo condiciones convencionales. Se busca obtener una representación adecuada del sistema textil y comprender su evolución en el tiempo.

#### 2. Etapa 2: Análisis y Obtención de la Función de Transferencia.

En la segunda etapa, se toma como caso de estudio un proceso textil con siete fases. A partir de este modelo, se identifican las ecuaciones diferenciales del modelo de Forrester correspondiente a cada fase del proceso. Estas ecuaciones se transforman en diagramas de bloques de ingeniería de control, lo cual permite analizar el sistema y obtener la función de transferencia de cada una de las variables de estado del proceso. Esta fase proporciona una representación matemática del sistema y facilita el análisis de su comportamiento dinámico.

#### 3. Etapa 3: Implementación del Control Óptimo.

Para la tercera etapa, el caso de estudio se enfoca en un proceso textil con tres variables de estado. En esta fase, se implementa la técnica de espacio de estados y el control de Ackermann para optimizar el control del sistema. El objetivo es diseñar un controlador que permita mejorar la eficiencia del proceso y asegurar su estabilidad en el tiempo.

#### 4. Etapa 4: Aplicación del Cálculo Fraccionario.

En esta fase, se toma como caso de estudio un proceso textil real, con dos variables de estado. Se obtiene una metodología OEE (Overall Equipment Efficiency) para medir las eficiencias del proceso. Se identifican las ecuaciones diferenciales del modelo y se transforman en una función fraccionaria que describe el proceso de manera más realista, mediante el uso de un bucle de Balcaneo fraccionario. Este modelo fraccionario ofrece una representación más precisa de la dinámica del proceso, teniendo en cuenta los efectos de memoria y otros aspectos complejos no lineales.

5. Etapa 5: Integración de Modelos Fraccionarios y Cálculo Conformable. La última etapa presenta un caso de estudio sobre la capacidad instalada fotovoltaica en México, utilizando datos reales. En este caso, se realiza una integración de modelos fraccionarios mediante el cálculo conformable. Esta integración se lleva a cabo por períodos, lo que permite obtener un estimador preciso del comportamiento del sistema. El uso del cálculo conformable ofrece ventajas en la modelización de sistemas complejos, especialmente cuando se consideran efectos no locales y no singulares en la dinámica del sistema.

# Capítulo 4 Resultados

Este capítulo detalla los resultados obtenidos en cinco etapas de desarrollo y análisis, cada una diseñada para fortalecer los modelos matemáticos mediante Dinámica de Sistemas, con aplicaciones que incluyen también Ingeniería de Control y Cálculo Fraccional. La intención de estas etapas es generar herramientas robustas que puedan apoyar la toma de decisiones en contextos reales y aportar al estado del arte de la Dinámica de Sistemas. Los estudios se enfocan en aplicaciones prácticas en la industria textil y el sector energético, explorando la aplicabilidad de estos modelos para la resolución de problemas industriales y la proyección de escenarios estratégicos. A continuación, se describen las cinco etapas:

• Etapa I: Modelado Base en Dinámica de Sistemas para la Industria Textil

En esta primera etapa, se desarrolla un modelo de Dinámica de Sistemas que representa la dinámica de la cadena de producción en la industria textil, integrando siete variables de estado y los principales procesos de manufactura. Esta fase se centra en la construcción del modelo a partir de principios básicos de Dinámica de Sistemas, sin profundizar en el análisis matemático. Su objetivo es sentar las bases para el análisis de interacciones y el comportamiento general del sistema.

- Etapa II: Análisis matemático sobre el Modelo de Dinámica de Sistemas Partiendo del modelo de la Etapa I, en la segunda etapa se incorpora el análisis de Ingeniería de Control, obteniendo la función de transferencia en el tiempo para estudiar la respuesta temporal del sistema. Este análisis permite evaluar la estabilidad y sensibilidad del sistema, robusteciendo el modelo inicial y brindando información valiosa para el control de procesos en aplicaciones reales.
- Etapa III: Modelo de Dinámica de Sistemas para Tres Departamentos de Manufactura y Análisis de Control Ackermann

La tercera etapa aborda un modelo específico de tres departamentos de manufactura textil. Se profundiza en el análisis de Ingeniería de Control, explorando la interacción entre estos departamentos. Este modelo optimiza la precisión en la representación operativa y permite implementar mejoras en el control de procesos de manufactura textil.

- Etapa IV: Bucle de Balanceo Fraccional y evaluación de eficiencia mediante OEE y Cálculo Fraccional en una Empresa Textil de Guanajuato En esta etapa, se aplican los principios de Dinámica de Sistemas a datos reales de una empresa textil en Guanajuato, enfocándose en dos procesos de manufactura. Además, se utiliza la metodología de Efectividad Global del Equipo (OEE) y se incorpora el cálculo fraccional para evaluar la eficiencia operativa de manera precisa. Este enfoque proporciona un modelo robusto para la optimización de procesos y la toma de decisiones basada en datos reales.
- Etapa V: Análisis de Escenarios y Estimación de Capacidad Solar en México mediante Cálculo Fraccional

En esta última etapa, se aplica el modelo de Dinámica de Sistemas en el análisis de la capacidad solar instalada en México, usando datos de irradiancia y capacidad fotovoltaica en MW. El cálculo fraccional permite simular múltiples escenarios de generación energética, logrando una mayor precisión y aplicabilidad del modelo para el planeamiento y las políticas energéticas.

Estas cinco etapas representan una contribución al estado del arte en Dinámica de Sistemas al enriquecer la capacidad de modelado de fenómenos complejos. Los resultados obtenidos demuestran cómo el uso de estos modelos puede apoyar la toma de decisiones estratégicas en sectores clave, optimizar procesos industriales y anticipar el comportamiento de sistemas energéticos en diversos escenarios.

## 4.1. Etapa 1.

Los resultados del modelo de simulación del proceso textil con sus siete fases proporcionan valiosa información sobre el comportamiento y desempeño del sistema. Estos resultados representan el resultado de simular y analizar el flujo de trabajo completo del proceso textil, desde la recepción de la materia prima hasta la obtención del producto final. Ver Cuadro 4.1

Variable de Estado	Tiempo de ciclo	Capacidad por departamento	Tiempo de establecimiento
Tejido	40	72	480
Hilvanado	3	320	108
Planchado	4	240	144
Corte	3	640	54
Confección	7	414	84
Terminado	2	480	72
Empaque	2	480	72

Cuadro 4.1: Tiempos de ciclo del proceso de fabricación textil.

Se identifica una restricción con la variable de condición de la tela, la cual tiene una capacidad de 72 piezas durante los 480 minutos que se toman como referencia. La entrada del proceso será de las 72 piezas a fabricar. Las notaciones de las variables de estado y la representación de las ecuaciones diferenciales se pueden mostrar en la Tabla 4.2, que son útiles para los diagramas de Forrester y de bloques. Ver Cuadro 4.2.

Variable de Estado	k	Ecuación Diferencial
Tejido	0.009541	$\frac{da}{dt} = k_1(X_{d1} - a)$
Hilvanado	0.12	$\frac{db}{dt} = k_2(X_{d2} - b) - \frac{da}{dt}$
Planchado	0.12	$\frac{dc}{dt} = k_3(X_{d3} - c) - \frac{db}{dt}$
Corte	0.45	$\frac{dd}{dt} = k_4(X_{d4} - d) - \frac{dc}{dt}$
Confección	0.45	$\frac{de}{dt} = k_5(X_{d5} - e) - \frac{dd}{dt}$
Terminado	0.5	$\frac{df}{dt} = k_6(X_{d6} - f) - \frac{de}{dt}$
Empaque	0.55	$\frac{dg}{dt} = k_7(X_{d7} - g) - \frac{df}{dt}$

Cuadro 4.2: Variables de estado y notaciones del modelo textil.

# 4.2. Etapa II. Función Matemática (Función de transferencia)

La identificación de cada una de las variables de estado relacionadas en el proceso de manufactura se realiza, comenzando con una variable de estado para el proceso de tejido. El ciclo DS utilizado en el diagrama de Forrester de esta aplicación es el ciclo de ajuste, que busca evocar el comportamiento de búsqueda de un objetivo (ver Figura 4.1).



Figura 4.1: Diagrama de Forrester para n = 1 variable de estado.

La ecuación diferencial del sistema se identifica a partir del diagrama de Forrester, donde  $Xd_1$  representa la meta del sistema y la variable de estado depende de un flujo proporcional. Esto nos da la ecuación:

$$\frac{da}{dt} = k_1(X_{d1} - a) \tag{4.2.1}$$

Cabe señalar que la característica transitoria se conoce a partir de los modelos de simulación de Forrester, basados en la metodología de dinámica de sistemas. Esta característica transitoria se calcula mediante métodos numéricos por simulación en el programa Stella, utilizando por ejemplo los métodos de Euler y Newton-Raphson.

Más adelante, en la investigación propuesta, el diagrama de Forrester se transforma en diagramas de bloques para obtener la respectiva función de transferencia, y se verifica la estabilidad del sistema a través de los polos y ceros obtenidos por la función de transferencia.

#### 4.2.1. Diagrama de Bloques del Proceso de Tejido

La transformación del diagrama de Forrester al diagrama de bloques se realiza a partir de la identificación de la ecuación diferencial que modela el diagrama de Forrester. La transformación al dominio de Laplace se efectúa para n = 1. El valor de k determina la rapidez con que el sistema alcanza la meta. El modelo del diagrama de bloques es el siguiente. El sistema para una variable de estado funciona al realizar la comparación de la meta del sistema menos la salida del mismo; esa diferencia entre lo real y lo deseado se multiplica por k, o el factor que realiza el ajuste periodo a periodo y compara lo real con lo deseado, hasta que lo real es igual a la meta deseada y el error es cero. Ver Figura 4.2.



Figura 4.2: Diagrama de bloques de una variable de estado.

Para la reducción del diagrama de bloques, se utiliza la herramienta MATLAB Simulink, donde se diseña el diagrama de bloques y se introducen los parámetros de ky  $Xd_1$ , obteniéndose así la función de transferencia del sistema:

$$H_a(s) = \frac{1}{Ts+1}$$
(4.2.2)  
$$T = \frac{1}{0,009541}$$

donde



Figura 4.3: Comparación entre las salidas simuladas del modelo en MATLAB (a) y Vensim (b).

Para el sistema de primer orden representado por la función de transferencia obtenida, se obtiene un coeficiente positivo, lo cual indica que el sistema es estable, y al igualar el denominador de la función, se obtiene un polo real ubicado en el semiplano izquierdo negativo. Ver Figura 4.4.



Figura 4.4: Diagrama de polos y ceros del proceso de tejido.

El tiempo de establecimiento para alcanzar la meta en un 98% consiste en cuatro veces el valor de T. Para este sistema, el tiempo de establecimiento es de 419.28 minutos.

Para calcular el valor en el estado estacionario, se establece s = 0 en la función de transferencia, obteniendo que el valor final es uno, dado que se trata de una función matemática de primer orden.

### 4.3. Diagrama de Forrester - Proceso de Hilvanado

Se presenta el diagrama de Forrester para dos variables de estado, donde hay seis variables auxiliares, dos variables de flujo y dos variables de stock o de estado. Existen dos bucles de retroalimentación de tipo rolling loop"; la variable a no se ve afectada por el comportamiento de b, mientras que la variable b se ve directamente afectada por la variable de estado a, siempre y cuando a alcance su meta más rápido. Ver Figura 4.5.



Figura 4.5: Diagrama de Forrester para el proceso de hilvanado con dos variables de estado.

A continuación, se identifican las dos ecuaciones diferenciales necesarias para construir el diagrama de bloques y derivar la función de transferencia correspondiente. Las tasas netas de producción se obtienen de manera sencilla, calculando la diferencia entre la tasa de entrada y la tasa de salida. La ecuación diferencial para la primera variable de estado ya se determinó en la operación anterior como se muestra en la Ecuación *Primera*. Para la segunda variable de estado, la ecuación diferencial que describe la tasa de cambio de velocidad se presenta en la Ecuación Segunda.

$$\frac{db}{dt} = k_2(X_{d2} - b) - k_1(X_{d1} - a)$$
(4.3.1)

#### 4.3.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Hilvanado

Se propone resolver el sistema de ecuaciones diferenciales mediante la técnica de diagramas de bloques, que es una técnica de ingeniería de control. Se utiliza el software Simulink para obtener la función de transferencia, como se observa en la Figura 4.6. Las dos variables de estado están en el diagrama de bloques, donde claramente la variable de estado b también depende del flujo de a.



Figura 4.6: Diagrama de bloques para el proceso de hilvanado con dos variables de estado.

Para la solución de dos variables de estado, resulta muy útil emplear las herramientas de MATLAB Simulink, donde los polos del sistema de la función de transferencia son iguales al número de variables de estado. La función de transferencia del sistema se presenta en la Ecuación (4.3.2).

$$H_b(s) = \frac{0,1104s + 0,001145}{s^2 + 0,1295s + 0,01145}$$
(4.3.2)

A partir de la función de transferencia obtenida y con una entrada escalón de amplitud 72, se simula el comportamiento del proceso de hilvanado y se compara con la simulación obtenida del diagrama de Forrester. Ver Figura 4.7.



Figura 4.7: Proceso de salida del hilvanado con diagramas de bloques y Forrester

Al comparar los valores obtenidos de la salida del sistema con una entrada de 72, o meta de 72 en Stella, se obtienen salidas idénticas, lo que valida la transformación realizada del modelo de Dinámica de Sistemas al diagrama de bloques basado en ingeniería de control.

#### 4.3.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Hilvanado

Tenemos las ecuaciones características del numerador y denominador de la función de transferencia para las dos variables de estado, extraídas del diagrama de polos y ceros para n = 2.

Los polos o valores propios son: -0.12 y -0.0095 Los ceros son: -0.0104

Se obtienen dos polos reales y un cero real, cuya representación en el diagrama de polos y ceros se puede ver en la Figura 4.8.



Figura 4.8: Diagrama de polos y ceros para el proceso de hilvanado con dos variables de estado.

Los polos resultantes en el semiplano izquierdo del diagrama se encuentran en la línea real, lo cual confirma el comportamiento sin sobresaltos de la salida ante una entrada escalón de amplitud 72. Se puede concluir que, dados los valores propios del sistema, éste es estable para las dos variables de estado.

# 4.4. Diagrama de Forrester - Proceso de Planchado

El diagrama de Forrester se presenta para tres variables de estado, con nueve variables auxiliares, tres variables de flujo y tres variables de stock o estado. Una de las principales diferencias entre tener tres variables de estado en lugar de dos, es que la variable de estado c está directamente limitada por la variable de estado b, la cual a su vez está limitada por la variable de estado a. Por lo tanto, el modelo matemático se vuelve más robusto; se necesitaría un sistema de tres ecuaciones diferenciales para obtener su salida para una entrada dada, es decir, se requiere la solución de b y a para obtener c. Véase la Figura 4.9.



Figura 4.9: Diagrama de Forrester para el proceso de planchado con tres variables de estado.

A continuación, se identifican las tres ecuaciones diferenciales necesarias para la construcción del diagrama de bloques y la obtención de la función de transferencia correspondiente. Las tasas netas de producción se determinan restando la tasa de entrada menos la tasa de producción. Las ecuaciones diferenciales para las primeras dos variables de estado fueron determinadas en operaciones anteriores, como se muestra en las Ecuaciones (4.2.1) y (4.3.1). La ecuación diferencial que describe la tasa de cambio de velocidad para la tercera variable de estado se presenta en la Ecuación (4.4.1).

$$\frac{dc}{dt} = k_3(Xd_3 - c) - k_2(Xd_2 - b(t))$$
(4.4.1)

#### 4.4.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Planchado

El sistema de ecuaciones diferenciales se resuelve a través de la técnica de diagrama de bloques, que es una técnica de ingeniería de control. Se utiliza la herramienta MATLAB Simulink para obtener la función de transferencia. Como se puede ver en la Figura 4.10, en las tres variables de estado del diagrama de bloques aparece la variable de estado c, la cual también depende del flujo de b y a.



Figura 4.10: Diagrama de bloques de n = 3 para el proceso de planchado con variables de estado.

Con la ayuda de MATLAB y Simulink, se obtiene la función de transferencia del sistema para n = 3. Dado que los valores de  $k_2$  y  $k_3$  son idénticos, se realizó un ligero aumento en el valor de  $k_3$  para evitar la cancelación de un cero en el polinomio del numerador. La función de transferencia obtenida se muestra en la Ecuación (4.4.2).

$$H_c(s) = \frac{0,001\,s^2 + 0,1338\,s + 0,0001385}{s^3 + 0,2505\,s^2 + 0,01682\,s + 0,0001385} \tag{4.4.2}$$

A partir de la función de transferencia, y con una entrada escalón de amplitud 72 y una meta de 72, se obtienen las siguientes gráficas, que alcanzan la meta en aproximadamente 144 minutos. Véase la Figura 4.11



(a) Respuesta del proceso de planchado en MATLAB.

(b) Diagrama de Forrester del proceso en Vensim.

Figura 4.11: Comparación del proceso de planchado ante una entrada escalón: (a) salida simulada en MATLAB y (b) diagrama de Forrester en Vensim.

#### 4.4.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Planchado

La función de transferencia tiene un numerador de segundo grado, mientras que el denominador es de tercer grado. Los valores de k son diferentes entre las variables de estado b y c, por lo que el grado del numerador es n - 1 con respecto al denominador.

Los valores propios (autovalores) y autovectores de la función de transferencia son:

- Polos: -0,121, -0,12 y -0,0095
- Ceros: -0,0104

Se obtienen tres polos reales, de los cuales dos son repetidos y un cero real. Véase la Figura 4.12.



Figura 4.12: Diagrama de polos y ceros para el proceso de planchado con tres variables de estado.

Los polos resultantes en el semiplano izquierdo del diagrama indican que, para n = 3, el sistema es estable con los polos y ceros encontrados. Dado que los polos del sistema son reales, se espera un comportamiento estable en el caso de múltiples entradas al sistema.

## 4.5. Diagrama de Forrester - Proceso de Corte

El diagrama de Forrester se presenta para cuatro variables de estado, con 12 variables auxiliares, cuatro variables de flujo y cuatro variables de stock o estado. La variable de estado d está directamente limitada por la variable de estado c, la cual a su vez está limitada por la variable de estado b, y esta última también está limitada por la variable de estado a. Por lo tanto, el modelo matemático se vuelve más robusto; se necesitaría un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales para obtener su salida. Véase la Figura 4.13.



Figura 4.13: Diagrama de Forrester para el proceso de corte con n = 4.

A continuación, se identifican las cuatro ecuaciones diferenciales necesarias para la construcción del diagrama de bloques y la obtención de la función de transferencia correspondiente. Las tasas netas de producción se determinan restando la tasa de entrada menos la tasa de producción. Las ecuaciones diferenciales para las primeras tres variables de estado se determinaron en operaciones anteriores, como se muestra en las Ecuaciones (4.2.1), (4.3.1) y (4.4.1). La ecuación diferencial que describe la tasa de cambio de velocidad para la cuarta variable de estado se presenta en la Ecuación (4.5.1).

$$\frac{dd}{dt} = k_4(Xd_4 - d) - k_3(Xd_3 - c) \tag{4.5.1}$$

## 4.5.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Corte

Se propone resolver el sistema de ecuaciones diferenciales a través de la técnica de diagrama de bloques, que se basa en la ingeniería de control. Se utiliza la herramienta de simulación Simulink de MATLAB para obtener la función de transferencia. Como se puede observar en la Figura 4.14, en el diagrama de bloques se representan las cuatro variables de estado, donde claramente la variable de estado d también depende del flujo de las tres variables de estado anteriores.



Figura 4.14: Diagrama de bloques del proceso de corte, con n = 4.

Con la ayuda de MATLAB y Simulink, se obtiene la función de transferencia del sistema diseñando el diagrama de bloques en cascada y reemplazando los valores de  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $Xd_1$ ,  $Xd_2$ ,  $Xd_3$  y  $Xd_4$  para obtener la función de transferencia en la Ecuación (4.5.2).

$$H_d(s) = \frac{0.33\,s^3 + 0.08235\,s^2 + 0.007098\,s + 6.182 \times 10^{-5}}{s^4 + 0.6995\,s^3 + 0.129\,s^2 + 0.007648\,s + 6.183 \times 10^{-5}} \tag{4.5.2}$$

La función de transferencia tiene un numerador de tercer grado, mientras que el denominador es de cuarto grado. Los valores de k son diferentes entre las variables de estado c y d, por lo que el grado del numerador es n - 1 con respecto al denominador. Véase la Figura 4.15.



(a) Salida del proceso de corte en Matlab.(b) Salida del proceso de corte en Vensim.Figura 4.15: Comparación de las salidas del proceso de corte en Matlab y Vensim.

Al comparar las gráficas obtenidas mediante la salida del sistema con una entrada

de 72, el tiempo aproximado para alcanzar la meta en Stella y en el diagrama de bloques es de 54 minutos.

#### 4.5.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Corte

Las ecuaciones características del numerador y denominador de la función de transferencia muestran que al analizar los polos y ceros, se obtendrán cuatro polos y tres ceros.

Los valores propios (autovalores) y autovectores de la función de transferencia son:

- Polos: -0,45, -0,12, -0,12, -0,0095
- Ceros: -0.1199 + 0.6921i, -0.1199 0.0629i, y -0.0098

Se obtienen cuatro polos reales y dos ceros imaginarios conjugados, además de un cero real. El resultado muestra los polos en el semiplano izquierdo del diagrama, lo cual permite concluir que para n = 4, el sistema es estable con los polos y ceros encontrados. No existen oscilaciones en el sistema, ya que las raíces conjugadas corresponden a los ceros y no a los polos, los cuales influyen directamente en el comportamiento de la salida del sistema. Véase la Figura 4.16.



Figura 4.16: Diagrama de polos y ceros del proceso de corte con n = 4 variables de estado.

# 4.6. Diagrama de Forrester - Proceso de Confección

En este proceso, se consideran 15 variables auxiliares, cinco variables de flujo y cinco variables de stock o estado. La complejidad de obtener una quinta variable de estado es considerable, al punto que se requiere de software especializado debido al número de ecuaciones diferenciales necesarias para su resolución. En MATLAB, al intentar resolver el caso de estudio en función del tiempo, no se pudo obtener una solución adecuada. Por otro lado, existen cinco bucles de balance, donde la quinta variable de estado se ve afectada por todo el sistema, con una rápida disminución en el tiempo de inactividad del proceso. Véase la Figura 4.17.



Figura 4.17: Diagrama de Forrester del proceso de confección, n = 5.

Se identifican las cinco ecuaciones diferenciales necesarias para construir el diagrama de bloques y obtener la función de transferencia respectiva. Las ecuaciones diferenciales para las primeras cuatro variables de estado se determinaron en operaciones previas, como se muestra en las Ecuaciones (4.2.1), (4.3.1), (4.4.1) y (4.5.1). La ecuación diferencial que describe la tasa de cambio de velocidad para la quinta variable de estado se presenta en la Ecuación (4.6.1).

$$\frac{de}{dt} = k_5(Xd_5 - e) - k_4(Xd_4 - d(t))$$
(4.6.1)

#### 4.6.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Confección

Se propone resolver el sistema de cinco ecuaciones diferenciales mediante la técnica de diagrama de bloques, la cual está basada en la ingeniería de control. La herramienta de simulación Simulink de MATLAB se utiliza para obtener la función de transferencia. Como se observa en la Figura 4.18, el diagrama de bloques incluye las cinco variables de estado, donde puede verse que la variable de estado e también depende del flujo de las cuatro variables de estado anteriores.



Figura 4.18: Diagrama de bloques para el proceso de confección, con n = 5.

Con la ayuda del software MATLAB y Simulink, se obtiene la función de transferencia del sistema para n = 5. Dado que los valores de  $k_4$  y  $k_5$  son idénticos, se realizó un leve incremento en el valor de  $k_5$  para evitar la cancelación de un cero en el polinomio del numerador. La función de transferencia obtenida se muestra en la Ecuación (4.6.2).

$$H_e(s) = \frac{0,001\,s^4 + 0,1488\,s^3 + 0,03728\,s^2 + 0,003221\,s + 2,805 \times 10^{-5}}{s^5 + 1,151\,s^4 + 0,4448\,s^3 + 0,06661\,s^2 + 0,003531\,s + 2,805 \times 10^{-5}}$$
(4.6.2)

La entrada escalón con una amplitud de 72 piezas se define en el proceso y se grafica para comparar los resultados obtenidos en Stella y en el diagrama de bloques, representando así la meta del sistema. Se observa que el tiempo de asentamiento en ambas gráficas es aproximadamente de 84 unidades, y la diferencia en el error cuadrático medio entre los datos de ambos resultados es menor al 0.001 %, siendo el error prácticamente el número de cifras significativas que maneja el software Vensim. Véase la Figura 4.19.



(a) Respuesta a una entrada escalón de amplitud 72, con el software MATLAB.

(b) Diagrama de Forrester, con el software Vensim.

80

Figura 4.19: Comparación de resultados: a) MATLAB, b) Vensim.

#### 4.6.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Confección

Cuando el polinomio se iguala a cero y se determinan las raíces del numerador y del denominador, se obtienen tres ceros y cinco polos. Esto se debe a que las variables de estado cuarta y quinta tienen el mismo valor de k; es decir, en el inicio del proceso de la quinta variable de estado, no inicia la acumulación debido a que lo que ingresa y sale de las variables de flujo ed5 y ed4 es igual.

- Polos: -0,451, -0,45, -0,12, -0,12, y -0,0095
- Ceros: -0,1199 + 0,0692i, -0,1199 0,0692i, y -0,0098

Los cinco polos resultantes en el eje real, dos ceros imaginarios conjugados y un cero en el eje real, están todos en el plano izquierdo del diagrama de polos, resultando en un sistema estable para las cinco variables de estado, donde los polos del sistema son iguales al valor de k asignado en el diagrama de Forrester. Véase la Figura 4.20.



Figura 4.20: Diagrama de polos y ceros del proceso de confección con n = 5 variables de estado.

## 4.7. Diagrama de Forrester - Proceso de Acabado

Este proceso considera 18 variables auxiliares, seis variables de flujo y seis variables de stock. La complejidad para obtener una sexta variable de estado es tal que no puede resolverse incluso mediante software especializado debido al número de ecuaciones diferenciales necesarias. En MATLAB, al intentar determinar la solución en función del tiempo, no se obtuvo un resultado adecuado. Por otro lado, existen seis bucles de balance en los cuales la sexta variable de estado se ve afectada por el sistema completo, observándose una rápida disminución en el proceso durante el tiempo de inactividad. Véase la Figura 4.21.



Figura 4.21: Diagrama de Forrester del proceso de acabado con seis variables de estado.

Luego, se identifican las seis ecuaciones diferenciales necesarias para la construcción del diagrama de bloques y la obtención de la función de transferencia correspondiente. Es importante señalar que las tasas netas de producción se determinan como la tasa de entrada menos la tasa de producción. Las primeras cinco ecuaciones diferenciales fueron determinadas en operaciones previas en las Ecuaciones (4.2.1), (4.3.1), (4.4.1), (4.5.1) y (4.6.1). La tasa de desarrollo para la sexta variable de estado se muestra en la Ecuación (4.7.1).

$$\frac{df}{dt} = k_6(Xd_6 - f) - k_5(Xd_5 - e(t)) \tag{4.7.1}$$

#### 4.7.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Acabado

Se propone resolver el sistema de ecuaciones diferenciales mediante la técnica de diagrama de bloques. Con el uso de Simulink, se obtiene la función de transferencia. Como se muestra en la Figura 4.22, el diagrama de bloques incluye las seis variables de estado, donde claramente la variable f depende del flujo de las cinco variables anteriores.



Figura 4.22: Diagrama de bloques del proceso de acabado, n = 6.

Con la ayuda del software MATLAB y Simulink, se ingresan los parámetros de ky Xd para cada una de las seis variables de estado, se definen las entradas y salidas del sistema, y se obtiene la función de transferencia del sistema en la Ecuación (4.7.2), donde se observa un polinomio de quinto grado en el numerador y de sexto grado en el denominador.

$$H_f(s) = \frac{0.05\,s^5 + 0.05748\,s^4 + 0.08901\,s^3 + 0.01996\,s^2 + 0.0016134\,s + 1.391 \times 10^{-5}}{s^6 + 1.65\,s^5 + 1.019\,s^4 + 0.2876\,s^3 + 0.03635\,s^2 + 0.001779\,s + 1.391 \times 10^{-5}} \tag{4.7.2}$$

Al obtener la función de transferencia, se puede observar el comportamiento ante múltiples entradas; sin embargo, la entrada escalón del estudio de caso está definida en 72 y se puede comparar con el resultado obtenido en el software Stella. Se encuentra que el tiempo de establecimiento de ambas gráficas es aproximadamente de 72 minutos, y la diferencia se encuentra en los decimales. Véase la Figura 4.23.



(b) Salida del diagrama de Forrester

Figura 4.23: Salida ante una entrada escalón con diagrama de bloques y con el diagrama de Forrester en Vensim

#### 4.7.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Acabado

Para el proceso de acabado, con seis variables de estado, se igualan los numeradores y denominadores para encontrar sus raíces características, las cuales, en este caso, presentan un polo más que ceros.

- Polos: -0,5, -0,45, -0,45, -0,12, -0,12 y -0,0095
- Ceros: -0,4510 + 1,1544i, -0,4510 1,1544i, 0,1189 + 0,0666i, -0,1189 0,0666i, y 0,0098

Existen cuatro ceros imaginarios conjugados y un cero en el eje real. Mientras que los polos presentan seis valores en el eje real, es importante prestar atención al polo -0,009541, ya que está muy cercano al eje imaginario y puede provocar que el proceso entre en una estabilidad marginal. Véase la Figura 4.24.



Figura 4.24: Diagrama de polos y ceros con n = 6 variables de estado.

# 4.8. Diagrama de Forrester - Proceso de Empaquetado

El diagrama de Forrester se presenta para siete variables de estado, donde existen 21 variables auxiliares, siete variables de flujo y siete variables de stock o estado. Para las siete variables de estado, es necesario tener la función en el tiempo de las seis variables de estado anteriores; en esencia, esto corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, que deben resolverse en cascada. Véase la Figura 4.25.



Figura 4.25: Diagrama de Forrester del proceso de empaquetado, n = 7.

Para el enfoque con siete variables de estado, se identifica que se deben tener siete ecuaciones diferenciales para la formulación del diagrama de bloques, (4.2.1), (4.3.1), (4.4.1), (4.5.1), (4.6.1), (4.7.1) y la Ecuación (4.8.1) correspondiente al flujo de la variable de estado en el proceso de empaquetado.

$$\frac{dg}{dt} = k_7 (Xd_7 - g) - k_6 (Xd_6 - f(t))$$
(4.8.1)

#### 4.8.1. Diagrama de Bloques - Proceso de Empaquetado

Se propone resolver el sistema de siete ecuaciones diferenciales a través de la técnica de diagrama de bloques, una técnica de ingeniería de control para la obtención de la función de transferencia del proceso de empaquetado. Como se observa en la Figura 4.26, existen siete variables de estado en el diagrama de bloques, donde claramente la variable de estado g también depende de todo el proceso.



Figura 4.26: Diagrama de bloques del proceso de empaquetado, n = 7.

Con la ayuda del software MATLAB y Simulink, se asignan los parámetros definidos a los siete valores de k y a los objetivos del sistema, que son de 72 en cada uno de ellos. La función de transferencia del sistema se obtiene en la Ecuación (4.8.2), con un numerador de grado 6 y un denominador de grado 7.

$$H_g(s) = \frac{0.05\,s^6 + 0.1075\,s^5 + 0.07967\,s^4 + 0.05889\,s^3 + 0.0118\,s^2 + 0.0008953\,s + 7.651 \times 10^{-5}}{s^7 + 2.2\,s^6 + 1.926\,s^5 + 0.8478\,s^4 + 0.1945\,s^3 + 0.02177\,s^2 + 0.0009926\,s + 7.651 \times 10^{-5}}$$

$$(4.8.2)$$

Al obtener la función de transferencia completa del proceso, se puede observar la salida del sistema, que se aproxima a los 72 minutos para el proceso de empaquetado; se realizó un análisis de los resultados en Stella con la función de transferencia. Véase la Figura 4.27.



(a) Salida de la función de transferencia ante una entrada escalón.

(b) Salida del diagrama de forrester en Vensim.

Figura 4.27: Salida de la función de tranfenrencia ante una entrada escalón vs el diagrama de forrester en Vensim

#### 4.8.2. Estabilidad del Sistema - Proceso de Empaquetado

Se analizan los polos y ceros de la función de transferencia para el caso de siete variables de estado, encontrando los siete polos y seis ceros del proceso, que se detallan a continuación:

- Polos: -0,55, -0,50, -0,45, -0,45, -0,12, -0,12 y -0,0095
- Ceros: -0,1760 + 0,72651i, -0,1760 0,72651i, -0,1180 + 0,0649i, -0,1180 0,0649i, -1,5518 y -0,0097

En la Figura 4.28 se muestran los siete polos en el eje real, donde se observa un comportamiento sin picos de sobreimpulso ni oscilaciones, ya que todos los polos del sistema se encuentran en el eje real; además, se obtuvieron cuatro ceros conjugados imaginarios y dos reales.



Figura 4.28: Diagrama de polos y ceros con siete variables de estado.

# 4.9. Análisis de las Funciones de Transferencia para los Modelos de Dinámica de Sistemas (SD) en el Proceso Textil

Se implementó la metodología propuesta para los siete modelos de Dinámica de Sistemas (SD), obteniéndose así una función de transferencia para cada una de las variables de estado del proceso textil, como se muestra en la Tabla 4.3. Cada función de transferencia refleja el comportamiento dinámico de las variables de estado, nombradas como a, b, c, d, e, f y g, en función de sus respectivas ecuaciones diferenciales. Estas funciones permiten evaluar la respuesta del sistema ante una entrada de tipo escalón de amplitud 72, equivalente a la meta establecida en el diagrama de Forrester para cada proceso.

Los resultados obtenidos para cada salida son consistentes y coinciden con una precisión de error inferior al 0.0001% respecto a las simulaciones en Stella, lo que valida la exactitud de los modelos implementados. Además, cada proceso refleja el comportamiento esperado en sus ciclos de tiempo, permitiendo un análisis detallado del sector textil en términos de tiempos de estabilización y respuesta dinámica.

Una ventaja clave de las funciones de transferencia obtenidas es la posibilidad de variabilidad en el tipo y valor de la entrada, lo cual permite analizar la salida en función de múltiples entradas. Esto se puede realizar tanto de forma independiente para cada entrada como utilizando el principio de superposición, proporcionando así flexibilidad en el análisis de los procesos y permitiendo simular diversos escenarios de producción en el sector textil.

Variable de Estado	Función de Transferencia
a	$H_a(s) = \frac{0,009541}{s+0,009541}$
b	$H_b(s) = \frac{0,1104s + 0,001145}{s^2 + 0,1295s + 0,01145}$
С	$H_c(s) = \frac{0,001s^2 + 0,01338s + 0,0001385}{s^3 + 0,2505s^2 + 0,01682s + 0,0001385}$
d	$H_d(s) = \frac{0.33s^3 + 0.08235s^2 + 0.007098s + 6.182 \times 10^{-5}}{s^4 + 0.6995s^3 + 0.129s^2 + 0.007648s + 6.183 \times 10^{-5}}$
e	$H_e(s) = \frac{0.0001s^4 + 0.1488s^3 + 0.03728s^2 + 0.003221s + 2.805 \times 10^{-5}}{s^5 + 1.151s^4 + 0.4448s^3 + 0.06601s^2 + 0.003531s + 2.805 \times 10^{-5}}$
$\int f$	$H_f(s) = \frac{0.05s^5 + 0.05748s^4 + 0.08901s^3 + 0.01996s^2 + 0.0016134s + 1.391 \times 10^{-5}}{s^6 + 1.65s^5 + 1.019s^4 + 0.2876s^3 + 0.03635s^2 + 0.001779s + 1.391 \times 10^{-5}}$
g	$H_g(s) = \frac{0.05s^6 + 0.1075s^5 + 0.07967s^4 + 0.05889s^3 + 0.0118s^2 + 0.0008953s + 7.651 \times 10^{-5}}{s^7 + 2.2s^6 + 1.926s^5 + 0.8478s^4 + 0.1945s^3 + 0.02177s^2 + 0.0009926s + 7.651 \times 10^{-5}}$

Cuadro 4.3: Funciones de Transferencia del Proceso Textil

## 4.10. Etapa III. Técnica de Control Moderno

La inclusión de modelos matemáticos en la teoría de dinámica de sistemas es fundamental para robustecer el análisis y control de procesos complejos, como los que se encuentran en la industria textil. Este estudio se enfoca en el uso de modelos matemáticos de tres variables de estado (correspondientes a los departamentos de Tejido, Hilvanado y Planchado) para capturar la interacción dinámica de estos procesos. A través del modelado matemático, es posible no solo describir el sistema de manera detallada, sino también prever cómo responderá ante perturbaciones y ajustes en las condiciones de operación.

La representación de estos departamentos mediante un modelo de Forrester en el contexto de la dinámica de sistemas permite observar visualmente cómo fluyen y se acumulan las variables en el proceso de manufactura. Sin embargo, el modelo de Forrester, por sí solo, se fortalece significativamente al ser traducido en un sistema de ecuaciones diferenciales, que permite captar el comportamiento temporal de las variables. Estas ecuaciones proporcionan un marco matemático para analizar el sistema de manera cuantitativa, y, al derivarlas, se pueden identificar tanto las tasas de cambio como las dependencias entre las variables.

Posteriormente, se transforma el modelo en una representación en el espacio de estados. Esta transición es crucial porque, en la teoría de control y dinámica de sistemas, el espacio de estados permite estructurar el sistema de forma tal que cada variable de estado (representando un departamento) y sus interrelaciones quedan explícitamente definidas. Con las matrices A, B, C y D, se obtiene una descripción lineal del sistema, lo cual facilita el diseño de estrategias de control que actúan directamente sobre las variables de estado.

Para robustecer aún más la estabilidad y rendimiento del sistema, se implementa un control por colocación de polos mediante el método de Ackermann. Este método permite ajustar la respuesta del sistema para alcanzar un estado estable y deseado en un tiempo específico, lo que es vital en un entorno de manufactura donde el tiempo de ciclo de producción tiene un impacto directo en la productividad y eficiencia operativa. De este modo, el modelo matemático no solo explica el comportamiento de los departamentos en términos de acumulación y flujo de recursos, sino que ofrece una base sólida para predecir el impacto de las decisiones de control y sus tiempos de ajuste. Además, el marco de dinámica de sistemas, apoyado en herramientas de control moderno, permite construir sistemas de manufactura más resilientes y adaptables. Esto robustece la teoría de dinámica de sistemas, proporcionando un enfoque cuantitativo que puede extenderse a otros sectores industriales, permitiendo un análisis más preciso y la optimización de múltiples etapas del proceso de producción.La figura 4.29 muestra un diagrama de Forrester que representa los tres procesos en el sector textil. El diagrama está dividido en tres bloques horizontales, cada uno de los cuales representa un proceso diferente: "Tejido = a", "Hilvanado = bz "Planchado = c".



Figura 4.29: Modelo de Forrester con 3 variables de estado.

Se definen los parámetros del modelo de Forrester para cada una de las tres operaciones textiles, que se presentan en el cuadro 4.4

Cı	ladro	4.4:	Datos	de	variables	auxiliares	у	r notación	de	variable	s c	le	estad	lo.

Variable de estado	Variables auxiliares	Notación de las variables
Tejido	0.008541	a
Hilvanado	0.037147	b
Planchado	0.02786	с

#### 4.10.1. Vector de Estado y de Salida

Para definir un sistema de ecuaciones diferenciales a partir de un modelo de simulación, es necesario identificar las variables involucradas en el sistema y cómo se relacionan
entre sí. Las variables se enumeran en el cuadro 4.4, donde se listan las variables de estado y las variables auxiliares. A partir de estas variables, se puede definir el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales. Consulte las ecuaciones 4.10.1–4.10.5.

La linealización de las variables de estado es una técnica utilizada para aproximar la solución de un sistema no lineal. Esto se realiza asumiendo que todas las variables del sistema pueden expresarse como una combinación lineal de las variables de estado y sus derivadas.

$$x_1 = a \tag{4.10.1}$$

$$\dot{x_1}(t) = \frac{da}{dt} \tag{4.10.2}$$

$$x_2(t) = b (4.10.3)$$

$$\dot{x_2}(t) = \frac{db}{dt} \tag{4.10.4}$$

$$x_3(t) = c (4.10.5)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{dc}{dt} \tag{4.10.6}$$

Una vez que se tienen las ecuaciones diferenciales lineales en las variables de estado, se pueden utilizar técnicas de control y optimización para diseñar estrategias de control y mejorar el rendimiento del sistema. Las ecuaciones se definen a continuación.

$$\dot{x}_1(t) = k_1(X_{d1} - x_1) \tag{4.10.7}$$

$$\dot{x}_2(t) = k_2(X_{d2} - x_2) - k_1(X_{d1} - x_1)$$
(4.10.8)

$$\dot{x}_3(t) = k_3(X_{d3} - x_3) - k_2(X_{d2} - x_2)$$
(4.10.9)

### 4.10.2. Matrices de Estado: A, B, C, D

Para obtener el modelo linealizado con las variables de estado definidas, se debe calcular la matriz A, que se obtiene a partir de las derivadas parciales de las ecuaciones 4.10.7–4.10.9. La matriz A es la matriz jacobiana, y se calcula como:

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0\\ k_1 & -k_2 & 0\\ 0 & k_2 & -k_3 \end{pmatrix}$$
(4.10.10)

La matriz B se calcula a partir de las derivadas parciales de las ecuaciones de estado con respecto a la variable de entrada u(t), como se muestra en la siguiente ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 - k_1 \\ k_3 - k_2 \end{pmatrix}$$
(4.10.11)

La salida C es igual a la tercera variable de estado, y por lo tanto:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(4.10.12)

En algunos casos, la matriz de transmisión directa D se establece en cero, ya que la salida depende solo de las variables de estado. Por lo tanto, la matriz:

$$D = 0 \tag{4.10.13}$$

El sistema en su representación en variables de estado es:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -0,008541 & 0 & 0\\ 0,008541 & -0,037147 & 0\\ 0 & 0,037147 & -0,02786 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,008541\\ 0,028606\\ -0,009287 \end{pmatrix} u(t) \quad (4.10.14)$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 0$$
 (4.10.15)

### 4.10.3. Matriz de Transferencia

Para simular el comportamiento del sistema, se puede utilizar la ecuación diferencial que describe la evolución temporal del vector de estado x y la ecuación que relaciona el vector de salida y con el vector de estado x. La matriz de transferencia G(s) se calcula como la relación entre la transformada de Laplace de la salida  $(x_3)$  y la transformada de Laplace de la entrada (u).

Primero, se calcula (sI - A):

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s + 0,008541 & 0 & 0\\ -0,008541 & s + 0,037147 & 0\\ 0 & -0,037147 & s + 0,02786 \end{pmatrix}$$
(4.10.16)

Para obtener la matriz de transferencia, se debe invertir (sI - A) y sustituir en la ecuación de Laplace para obtener G(s):

$$G(s) = \frac{-0,009827s^2 + 0,0006386s + 8,834 \times 10^{-6}}{s^3 + 0,07354s^2 + 0,00159s + 8,834 \times 10^{-6}}$$
(4.10.17)

### 4.10.4. Parámetros Deseados en el Sistema de Control

El parámetro  $\zeta$  (también conocido como coeficiente de amortiguamiento) es un valor utilizado en el análisis de sistemas dinámicos para describir la respuesta amortiguada de un sistema. Indica la cantidad de amortiguamiento presente en el sistema y afecta su comportamiento en términos de estabilidad, tiempo de respuesta y amortiguación. El valor de  $\zeta$  varía entre 0 y 1, donde 0 representa un sistema subamortiguado, 1 indica un sistema críticamente amortiguado y valores por encima de 1 representan sistemas sobreamortiguados.

Otro parámetro importante en el análisis de sistemas dinámicos es la *frecuencia* natural, representada por  $\omega_n$ . Esta frecuencia es una medida de la velocidad a la que un sistema vibrará u oscilará en ausencia de amortiguamiento o fuerzas externas. Para calcular la frecuencia natural del sistema, se utilizan las siguientes ecuaciones para obtener los valores deseados de los polos.

$$\sigma = 1,1\tag{4.10.18}$$

$$\omega_n = \frac{4}{\sigma t_{sa}} = 0,0291 \tag{4.10.19}$$

La ecuación siguiente muestra los polos deseados del sistema, que se obtienen a partir de la frecuencia natural deseada  $(\omega_n)$  y el coeficiente de amortiguamiento  $(\sigma)$ . Los polos se representan como valores conjugados complejos, ya que el sistema es de segundo orden más una cancelación de polos y ceros que se debe realizar para utilizar el sistema de segundo orden. En este caso, se desea un comportamiento de bajo amortiguamiento, por lo que el coeficiente de amortiguamiento se establece en 0.1 y la frecuencia natural se calcula a partir de los valores deseados de tiempo de asentamiento y tiempo de establecimiento.

$$s_{1,2} = -\omega_n \sigma \pm \omega_n \sqrt{\sigma^2 - 1} \tag{4.10.20}$$

Reemplazando los valores, los dos polos deseados resultan ser los siguientes:

$$s_1 = -0.0187, \quad s_2 = -0.0453$$

$$(4.10.21)$$

En la siguiente ecuación, se está asignando manualmente un polo específico  $(s_3)$  para lograr un comportamiento deseado en el sistema. Para obtener ese polo deseado, se toma un cero de la matriz de transferencia en lazo abierto y se cancela con el polo deseado. Esta técnica se conoce como *cancelación de polos y ceros*. La cancelación de polos y ceros implica agregar un cero en la función de transferencia del controlador para cancelar un polo no deseado en la función de transferencia del sistema. En este caso, se cancela un polo en la matriz de transferencia en lazo abierto con un cero en la función de transferencia del sistema. En este caso, se cancela un polo en la matriz de transferencia en lazo abierto con un cero en la función de transferencia del sistema en lazo cerrado.

$$s_3 = -0,0128 \tag{4.10.22}$$

Con los polos deseados definidos, se puede realizar la asignación de polos para obtener la ganancia del controlador que garantiza el comportamiento deseado del sistema.

### 4.11. Control Ackerman

Cuando existe un problema de control en variables de estado, una de las formas de encontrar la matriz de ganancia k de la retroalimentación de estado es utilizando la fórmula de Ackerman. Esta fórmula permite calcular directamente la matriz de ganancia de retroalimentación en el espacio de estado, a partir de la siguiente ecuación, si el sistema está en forma controlable. Ver figura 4.30



Figura 4.30: Control por espacio de estados con la fórmula de Ackerman.

Para el cálculo de las ganancias de Ackerman, se utiliza la siguiente ecuación. Los polos deseados del sistema ya están calculados para la investigación realizada. Se calcula la ecuación característica deseada a partir de estos:

$$(s+0,0187)(s+0,0453)(s+0,0128) (4.11.1)$$

Al multiplicar los 3 polos, se obtiene la ecuación deseada:

$$\Delta(\lambda) = s^3 + 0.07681s^2 + 0.00166s + 1.084 \times 10^{-5}$$
(4.11.2)

Donde se obtiene al reemplazar la matriz A:

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} -0,008541 & 0 & 0 \\ 0,008541 & -0,037147 & 0 \\ 0 & 0,037147 & -0,02786 \end{pmatrix}^{3} \\ + 0,07681 \begin{pmatrix} -0,008541 & 0 & 0 \\ 0,008541 & -0,037147 & 0 \\ 0 & 0,037147 & -0,02786 \end{pmatrix}^{2} \\ + 0,00166 \begin{pmatrix} -0,008541 & 0 & 0 \\ 0,008541 & -0,037147 & 0 \\ 0 & 0,037147 & -0,02786 \end{pmatrix} \\ + 1,084 \times 10^{-5} \begin{pmatrix} -0,008541 & 0 & 0 \\ 0,008541 & -0,037147 & 0 \\ 0,008541 & -0,037147 & 0 \\ 0 & 0,037147 & -0,02786 \end{pmatrix}$$
(4.11.3)

Al realizar las operaciones matriciales y sumar cada una de las operaciones, se obtiene:

$$\Phi(A) = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0,1592 & 0 & 0\\ -0,0623 & 0,3681 & 0\\ 0,1035 & -0,5055 & 0,2417 \end{pmatrix}$$
(4.11.4)

Se procede a obtener la matriz de controlabilidad del sistema:

$$C = \begin{pmatrix} b & Ab & A^2b \end{pmatrix} \tag{4.11.5}$$

Al reemplazar y realizar las operaciones en cada una de las posiciones de la matriz, el resultado es:

$$C = \begin{pmatrix} 0,008541 & -0,0001 & 0,0062 \times 10^{-4} \\ 0,028606 & -0,0010 & 0,3614 \times 10^{-4} \\ -0,009287 & 0,0013 & -0,0001 \end{pmatrix}$$

La matriz de ganancia de retroalimentación k se calcula como:

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0,008541 & -0,0001 & 0,0062 \times 10^{-4} \\ 0,028606 & -0,0010 & 0,3614 \times 10^{-4} \\ -0,009287 & 0,0013 & -0,0001 \end{pmatrix}^{-1} \times 10^{-5} \begin{pmatrix} 0,0921 & 0 & 0 \\ -0,0067 & 0,1147 & 0 \\ 0,0104 & -0,0528 & 0,1015 \end{pmatrix}$$

El vector de Ackerman k de tamaño  $1 \times 3$  es:

$$k = (0,4431 \quad -0,0666 \quad -0,1495)$$

Para obtener el nuevo  $A_k$ , se sustituye en la ecuación de retroalimentación:

$$A_k = \begin{pmatrix} -0.0123 & 0.0006 & 0.0013 \\ -0.0041 & -0.0352 & 0.0043 \\ 0.0041 & 0.0365 & -0.0292 \end{pmatrix}$$

Para obtener un modelo con diferentes entradas y que siga una referencia, se agrega el bloque N en la entrada del diagrama de bloques de protección de polos, y se realiza un control siguiendo una referencia. En este caso, se utiliza una ganancia de precompensación cuya deducción se muestra en la figura 4.31.



Figura 4.31: Control por espacio de estados compensación.

$$N = \frac{1}{C \left(A - Bk\right)^{-1} B} \tag{4.11.6}$$

Al introducir los datos en la ecuación anterior, se obtiene una ganancia de precompensación de N = 1,2269. La función de transferencia para la nueva asignación de polos, incluyendo la ganancia de regulación para una referencia, se mantiene:

$$G_2(s) = \frac{-0.01139s^2 + 0.0007834s + 1.084 \times 10^{-5}}{s^3 + 0.07681s^2 + 0.001666s + 1.084 \times 10^{-5}}$$

Al igualar el denominador a cero, se obtienen los autovalores y las raíces deseadas, logrando control mediante la asignación de polos y un comportamiento más rápido de la operación.

### 4.11.1. Gráfico Control Ackerman

Se obtiene la gráfica en donde se compara la matriz de transferencia del sistema de dinámica de sistemas versus el control óptimo.



Figura 4.32: Matriz de transferencia vs Control óptimo.

En conclusión, se observa que el tiempo de establecimiento del control óptimo es aproximadamente de 180 minutos, lo cual está por encima de los 125 minutos requeridos. Esto se debe a las limitaciones presentes en cada uno de los procesos de fabricación, ya sea en las máquinas o en el personal. Se realizaron pruebas para intentar alcanzar los 125 minutos, pero al hacerlo, se compromete el tipo de comportamiento deseado en el sistema, donde el factor de amortiguamiento ( $\zeta$ ) es mayor a 1. Dadas las condiciones existentes, se determina que aproximadamente 180 minutos es el tiempo óptimo que se puede lograr para mantener el mismo comportamiento deseado.

# 4.12. Etapa IV - Cálculo Fraccionario (Derivada de Caputo)

### 4.12.1. Análisis de Eficiencia y Control en un Proceso Textil mediante Derivadas Fraccionarias

En este capítulo se emplea un caso de estudio basado en un proceso textil, donde se han analizado bucles de balanceo con derivadas fraccionarias. La metodología de análisis utiliza la medida de Eficiencia General de los Equipos (OEE), aplicando datos reales de una empresa ubicada al sur del estado de Guanajuato. A través de esta metodología, se evalúan la disponibilidad, calidad y rendimiento de los departamentos de Tejido e Hilvanado, componentes clave del proceso textil.

Para modelar la dinámica del proceso, se desarrollan ecuaciones diferenciales fraccionarias que describen el comportamiento de estos departamentos, utilizando el método de Caputo para resolver las derivadas fraccionarias. A partir de esto, se generan diferentes escenarios que permiten evaluar la respuesta del sistema bajo diversas condiciones de operación.

Finalmente, con los datos obtenidos de la empresa, se grafican los resultados de eficiencia en los dos departamentos, ofreciendo una representación visual de cómo variaría la eficiencia de acuerdo con los parámetros reales observados.

### 4.12.2. Modelo de Dinámica de Sistemas

El diagrama de Forrester, como se muestra en la Figura 4.33, representa la dinámica del proceso de producción textil mediante un modelo de dinámica de sistemas (SD). Este modelo muestra los dos departamentos fundamentales del proceso textil: Tejido e Hilvanado. Incluye dos variables de estado, x y y, que representan a estos departamentos, respectivamente. Estas variables de estado son el eje central del sistema, reflejando la producción acumulada de cada departamento. El diagrama también incorpora seis variables auxiliares y dos variables de flujo, que forman el sistema, las interacciones y los mecanismos de retroalimentación.



Figura 4.33: Diagrama de Forrester del caso de estudio.

Figura 4.33 Modelo de dinámica de sistemas en el entorno Vensim. Las variables auxiliares, Xd1 y Xd2, son particularmente importantes ya que representan los objetivos del sistema o el número objetivo de piezas (por ejemplo, piezas de un modelo

específico de suéter) que cada departamento busca producir. Estos objetivos no son estáticos; guían la dinámica operativa, dando forma al flujo de trabajo y los esfuerzos de producción en cada departamento. El diagrama también introduce los sumadores 1 y 2, que calculan la discrepancia entre la producción real y los objetivos establecidos para cada departamento, destacando las áreas donde se pueden necesitar ajustes para alinearse con los objetivos de producción.

La constante k, asignada a cada departamento, representa la tasa ideal a la que se puede alcanzar el nivel de producción deseado, expresada en unidades de (1/min). Estas constantes son esenciales para calibrar el sistema a un rendimiento óptimo, asegurando que se cumplan los objetivos de producción de manera eficiente. El cuadro 4.5 describe los valores específicos y roles de estas variables en el diagrama de Forrester, proporcionando un marco claro para comprender la dinámica del proceso.

Variable d	e Notación	Xd (Objeti-	Sumador	Ecuación Diferencial
Estado	de la Va-	$\mathbf{vos})$		
	riable			
Tejido	X	Xd1 = 72	Xd1-x	$Ed1 = (Xd1 - x) \cdot k1$
Hilvanado	Y	Xd2 = 72	Xd2 - y	$Ed2 = (Xd2 - y) \cdot k2 - $
				Ed1

Cuadro 4.5: Variables del diagrama de Forrester.

### 4.12.3. Sistema de Ecuaciones Diferenciales

Es importante señalar que se ha desarrollado un modelo de dinámica de sistemas para representar el proceso de producción en dos departamentos. A partir de este modelo, se han identificado y formulado las dos ecuaciones diferenciales fundamentales que describen el comportamiento de estos departamentos. Estas ecuaciones forman la base del análisis, proporcionando una comprensión detallada de la dinámica de producción en estos contextos específicos.

El sistema propuesto, con condiciones iniciales x(0) = 0, y(0) = 0, es:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 (Xd1 - x), \tag{4.12.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2(Xd2 - y) - k_1(Xd1 - x).$$
(4.12.2)

### 4.12.4. Solución de la Ecuación Diferencial Ordinaria

Las siguientes ecuaciones se obtienen resolviendo el sistema completo de ecuaciones diferenciales:

$$x = Xd1 \left( 1 - e^{-k_1 t} \right), \tag{4.12.3}$$

$$y = Xd2\left(1 - e^{-k_2t}\right) + \frac{Xd1k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_2t} - e^{-k_1t}\right).$$
(4.12.4)

Para obtener los valores de  $k_1$  y  $k_2$ , la solución de cada una de las variables de estado debe ser igual al tiempo de operación de cada departamento. Estos tiempos son de 480 y 100 minutos, respectivamente, y se busca el valor de k que logre alcanzar el 98 % del objetivo.

### 4.12.5. Metodología OEE

El enfoque metodológico de este estudio se centra en los departamentos de Tejido y Hilvanado, que son segmentos fundamentales de la cadena de producción textil. Se trabajó con una empresa ubicada en el sur de Guanajuato, de la cual se recopilaron datos reales para evaluar con precisión la eficiencia de estos departamentos. La evaluación utiliza la metodología de Eficiencia General del Equipo (OEE, por sus siglas en inglés), una medida integral que evalúa la eficiencia de un departamento en función de la disponibilidad del equipo, la velocidad de rendimiento y la calidad del producto. En este estudio, la calidad del producto se relaciona específicamente con la producción de un modelo particular de suéter, lo que subraya la aplicación práctica y relevancia de esta investigación para los desafíos operativos de la industria textil.

En este proyecto de investigación, las ecuaciones diferenciales fraccionarias y su valor alfa, que se abordarán, están intrínsecamente vinculadas con la eficiencia derivada de la metodología OEE. Por lo tanto, es esencial obtener los valores absolutos de eficiencia de la empresa ubicada al sur de Guanajuato. Estos valores de eficiencia están directamente relacionados con el orden fraccionario de la derivada, subrayando la importancia de su precisión y validez para una correcta modelización y comprensión de la dinámica del proceso de producción textil.

### 4.12.6. Factor de Disponibilidad

La disponibilidad se calcula dividiendo el tiempo real de operación por el tiempo de producción planeado. Este factor, expresado como un porcentaje, proporciona una medida clave de eficiencia operativa al considerar el tiempo en que el equipo opera de acuerdo con el plan establecido. La disponibilidad del Departamento de Tejido para la semana del 25 al 30 de octubre puede observarse en el cuadro 4.6

Día	25	26	27	28	29	30
Tiempo total (min)	690	690	690	690	690	630
Pausas (min)	120	120	120	120	120	120
Paradas de mantenimiento (min)	10	10	10	10	10	45
Paradas de máquina (min)	20.43	29.21	36.23	20.78	32.45	30.27
(A) Tiempo disponible planeado (min)	560	560	560	560	560	465
(B) Tiempo productivo (min)	539.5	530.7	523.7	539.2	527.5	434.73
(B/A) Disponibilidad (%)	96.35	94.78	93.53	96.29	94.21	93.49

Cuadro 4.6: Disponibilidad del Departamento de Tejido.

En el cuadro 4.7 muestra la disponibilidad del Departamento de Hilvanado para la semana del 25 al 30 de octubre.

Día	25	26	27	28	29	30
Tiempo total (min)	100	100	100	100	100	90
Pausas (min)	20	20	20	20	20	20
(A) Tiempo disponible planeado (min)	80	80	80	80	80	70
(B) Tiempo productivo (min)	79.26	79.35	76.55	78.41	79.95	69.73
(B/A) Disponibilidad (%)	99.10	99.19	95.70	98.03	99.95	99.63

Cuadro 4.7: Disponibilidad del Departamento de Hilvanado.

### 4.12.7. Factor de Calidad

La calidad en la metodología OEE se mide considerando las unidades que cumplen con los estándares de calidad contra el total de unidades producidas. El factor de calidad del Departamento de Tejido para la semana del 25 al 30 de octubre se puede observar en el cuadro 4.8

Día	25	26	27	28	29	30
(A) Producción total	80	79	72	72	69	55
Lienzos contaminados	0	1	0	2	0	0
Superposiciones	5	6	5	10	7	10
Lienzos no funcionales	1	3	3	5	3	7
(B) Piezas buenas	74	69	64	55	59	38
(B/A) Calidad (%)	92.50	87.34	88.89	76.39	85.51	69.09

Cuadro 4.8: Calidad del Departamento de Tejido.

En el cuadro 4.9 muestra el factor de calidad del Departamento de Hilvanado para la semana del 25 al 30 de octubre.

Día	25	26	27	28	29	30
(A) Producción total	75	64	72	79	88	81
(B) Piezas buenas	75	64	72	78	88	80
(B/A) Calidad (%)	100	100	100	98.73	100	98.77

Cuadro 4.9: Calidad del Departamento de Hilvanado.

### 4.12.8. Factor de Rendimiento

La eficiencia se mide mediante el factor de producción planeada dividido entre la producción real. El cuadro 4.10 muestra el factor de eficiencia del Departamento de Tejido para la semana del 25 al 30 de octubre.

Cuadro 4.10: Rendimiento del Departamento de Tejido.

Día	25	26	27	28	29	30
(A) Producción planeada	83	79.	73	73	69	55
(B) Producción real	80	79	72	72	69	55
(B/A) Rendimiento (%)	96.70	99.59	98.66	98.04	99.65	99.63

El cuadro 4.11 muestra el factor de rendimiento del Departamento de Hilvanado para la semana del 25 al 30 de octubre.

Cuadro 4.11: Rendimiento del Departamento de Hilvanado.

Día	25	26	27	28	29	30
(A) Producción planeada	78.0	78	75	84	96	84
(B) Producción real	75	64	72	79	88	81
(B/A) Rendimiento (%)	96.10	81.93	95.54	94.38	91.16	96.20

El factor OEE se determina multiplicando los tres factores clave de la metodología. El cuadro 4.12 detalla el cálculo de la eficiencia para ambos departamentos.

Cuadro 4.12: Cálculo de la metodología OEE en los departamentos.

Día	25	26	27	<b>28</b>	29	30	OEE Semanal
OEE (Tejido) (%)	86.1	82.4	82.0	72.1	80.2	64.3	77.90
OEE (Hilvanado) ( $\%$ )	95.2	81.2	91.4	91.3	91.1	94.6	90.84

La Eficiencia General del Equipo (OEE) se calculó para ambos departamentos, obteniendo un valor alfa de 0.7790 para el proceso de tejido y un valor alfa de 0.9084 para el departamento de hilvanado.

## 4.13. Resultados y Análisis del Modelo de Orden Fraccionario mediante el Operador de Caputo

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos mediante el uso de la derivada de Caputo, acompañados de su demostración y las representaciones gráficas correspondientes en función del tiempo. Estos gráficos muestran variaciones en el comportamiento del sistema bajo diferentes niveles de eficiencia.

### 4.13.1. Solución del Modelo de Orden Fraccionario por Caputo

Se propone reemplazar los operadores de derivada de primer orden del sistema de ecuaciones diferenciales por operadores de orden fraccionario de orden  $\alpha$ , donde  $0 < \alpha < 1$ . Cuando  $\alpha = 1$ , se regresa a los operadores de primer orden y, por lo tanto, al sistema original de ecuaciones, como se muestra en las ecuaciones a continuación.

$$\frac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}} = k_1(x_{d1} - x), \tag{4.13.1}$$

$$\frac{d^{\alpha}y}{dt^{\alpha}} = k_2(x_{d2} - y) - k_1(x_{d1} - x).$$
(4.13.2)

Al usar el operador de derivada de Caputo en el sistema de ecuaciones fraccionarias, obtenemos:

$${}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}x = k_{1}(x_{d1} - x), \qquad (4.13.3)$$

$${}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}y = k_{2}(x_{d2} - y) - k_{1}(x_{d1} - x).$$
(4.13.4)

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, aplicamos la transformada de Laplace:

$$[s^{\alpha}X(s) - s^{\alpha-1}x(0)] = \frac{k_1 x_{d1}}{s} - k_1 X(s), \qquad (4.13.5)$$

$$[s^{\alpha}Y(s) - s^{\alpha-1}y(0)] = \frac{k_2 x_{d2} - k_1 x_{d1}}{s} - k_2 Y(s) + k_1 X(s).$$
(4.13.6)

Al simplificar ambas ecuaciones y aplicar las condiciones iniciales, obtenemos:

$$X(s)[s^{\alpha} + k_1] = \frac{k_1 x_{d1}}{s}, \qquad (4.13.7)$$

$$Y(s)[s^{\alpha} + k_2] = \frac{k_2 x_{d2} - k_1 x_{d1}}{s} + \frac{k_1^2 x_{d1}}{s(s^{\alpha} + k_1)}.$$
(4.13.8)

Al resolver para X(s), obtenemos:

$$X(s) = \frac{x_{d1}k_1}{s(s^{\alpha} + k_1)}.$$
(4.13.9)

Podemos encontrar la solución de x(t) aplicando la transformada inversa de Laplace usando la fórmula de la ecuación (10), obteniendo la ecuación:

$$x(t;\alpha) = x_{d1} \left[ 1 - E_{\alpha}(-k_1 t^{\alpha}) \right].$$
(4.13.10)

Para encontrar la solución de y(t), podemos usar X(s) de la ecuación anterior:

$$Y(s)[s^{\alpha} + k_2] = \frac{k_2 x_{d2} - k_1 x_{d1}}{s} + \frac{x_{d1} k_1^2}{s(s^{\alpha} + k_1)(s^{\alpha} + k_2)}.$$
(4.13.11)

Al despejar para Y(s), obtenemos:

$$Y(s) = \frac{k_2 x_{d2} - k_1 x_{d1}}{s(s^{\alpha} + k_2)} + \frac{x_{d1} k_1^2}{s(s^{\alpha} + k_1)(s^{\alpha} + k_2)}.$$
(4.13.12)

Para resolver Y(s), separamos en dos términos  $Y_1(s)$  y  $Y_2(s)$ , donde el primero tiene la misma estructura que X(s), por lo que podemos usar la misma fórmula de transformada inversa y resolver el primer término:

$$Y_1(s) = \frac{k_2 x_{d2} - k_1 x_{d1}}{k_2} \cdot \frac{1}{s(s^{\alpha} + k_2)}.$$
(4.13.13)

Aplicando la transformada inversa de Laplace a  $Y_1(s)$ , obtenemos:

$$y_1(t) = \frac{k_2 x_{d2} - k_1 x_{d1}}{k_2} \left[ 1 - E_\alpha(-k_2 t^\alpha) \right].$$
(4.13.14)

Para el segundo término  $Y_2(s)$ , tenemos:

$$Y_2(s) = \frac{x_{d1}k_1^2}{s(s^{\alpha} + k_1)(s^{\alpha} + k_2)}.$$
(4.13.15)

Multiplicamos el denominador de  $Y_2(s)$  por  $s^{2\alpha}/s^{2\alpha}$ :

$$Y_2(s) = \frac{x_{d1}k_1^2}{s^{2\alpha+1}} \cdot \frac{1}{(s^{\alpha}+k_1)(s^{\alpha}+k_2)}.$$
(4.13.16)

Al reorganizar los productos en el denominador, obtenemos:

$$Y_2(s) = \frac{x_{d1}k_1^2}{s^{2\alpha+1}(1+k_1s^{-\alpha})(1+k_2s^{-\alpha})}.$$
(4.13.17)

Aplicando las propiedades de la serie geométrica a ambos productos, obtenemos:

$$Y_2(s) = x_{d1}k_1^2 s^{-(2\alpha+1)} \sum_{m=0}^{\infty} (-k_1 s^{-\alpha})^m \sum_{n=0}^{\infty} (-k_2 s^{-\alpha})^n.$$
(4.13.18)

Al aplicar las propiedades del producto de series, obtenemos una forma más compacta:

$$Y_2(s) = x_{d1}k_1^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} k_1^m k_2^n s^{-(m+n+2)\alpha-1}.$$
 (4.13.19)

Expresamos el argumento de la serie como una fracción y multiplicamos por  $\Gamma[(m + n + 2)\alpha + 1]/\Gamma[(m + n + 2)\alpha + 1]$ :

$$Y_2(s) = x_{d1}k_1^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}k_1^m k_2^n}{\Gamma[(m+n+2)\alpha+1]} \cdot \frac{\Gamma[(m+n+2)\alpha+1]}{s^{(m+n+2)\alpha+1}}.$$
 (4.13.20)

Ahora podemos encontrar la transformada inversa:

$$y_2(t) = x_{d1}k_1^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}k_1^m k_2^n}{\Gamma[(m+n+2)\alpha+1]} t^{(m+n+2)\alpha}.$$
 (4.13.21)

La solución de y(t) es dada por:

$$y(t;\alpha) = \left(x_{d2} - \frac{x_{d1}k_1}{k_2}\right) \left[1 - E_{\alpha}(-k_2t^{\alpha})\right] + x_{d1}k_1^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}k_1^m k_2^n}{\Gamma[(m+n+2)\alpha+1]} t^{(m+n+2)\alpha}.$$
(4.13.22)

Esta es la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales con el operador Caputo para  $0<\alpha<1.$ 

### 4.13.2. Demostración Matemática de las Funciones Fraccionarias

La demostración de las funciones fraccionarias es fundamental para validar la solidez matemática y la formalidad de los modelos desarrollados. Al considerar el caso en el que el valor de  $\alpha$  es igual a 1, se espera que la solución fraccionaria coincida con la solución obtenida por métodos tradicionales. Esta coincidencia demuestra la consistencia del enfoque fraccionario con los métodos convencionales y confirma la validez matemática de los modelos. Por lo tanto, la precisión y coherencia del enfoque fraccionario en la representación de sistemas dinámicos pueden verificarse comparando las soluciones obtenidas con y sin el uso de funciones fraccionarias. Esta comparación es crucial para garantizar que las herramientas matemáticas sean apropiadas y efectivas para modelar fenómenos complejos.

La demostración se realiza para  $x(t; \alpha)$ , cuando  $\alpha = 1$ :

$$X(s) = \frac{x_{d1}k_1}{s(s^{\alpha} + k_1)}.$$
(4.13.23)

Ahora, reemplazamos en la función Mittag-Leffler:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)},$$
(4.13.24)

resultando en el denominador igual a  $\Gamma(k+1) = k!$ . Entonces, tenemos la función de Euler:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \qquad (4.13.25)$$

reemplazando el valor de z por  $k_1$ , se obtiene la ecuación (16) al realizar la demostración.

Esto resulta en que la solución ordinaria se obtiene al comprobar la correcta solución mediante el método de Caputo para la variable de estado 1.

La demostración se realiza para  $y(t; \alpha)$  cuando  $\alpha = 1$ :

$$y(t;1) = \left(x_{d2} - \frac{x_{d1}k_1}{k_2}\right) \left[1 - E_{\alpha}\left(-k_2t^1\right)\right] + x_{d1}k_1^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}k_1^m k_2^n}{\Gamma\left[(m+n+2)\alpha+1\right]} t^{(m+n+2)}.$$
(4.13.26)

Para demostrar la función encontrada con el cálculo fraccionario cuando  $\alpha = 1$ , aplicamos la transformada de Laplace, dividiendo la transformación en dos partes:

$$Y_1(s) = \left(x_{d2} - \frac{x_{d1}k_1}{k_2}\right) \frac{k_2}{s(s+k_2)}.$$
(4.13.27)

Las fracciones parciales resuelven el segundo término que queda en la ecuación de la siguiente manera:

$$Y_1(s) = \left(x_{d2} - \frac{x_{d1}k_1}{k_2}\right) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+k_2}\right).$$
(4.13.28)

Luego, se aplica la transformada de Laplace a la segunda parte:

$$Y_2(s) = x_{d1}k_1^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m k_1^m}{s^{m+1}}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k_2^n}{s^{n+1}}\right) s^{-1}.$$
(4.13.29)

Donde el denominador pasa a multiplicar el numerador en cada una de las sumas:

$$Y_2(s) = x_{d1}k_1^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m k_1^m s^{-m}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k_2^n s^{-n}\right) s^{-3}.$$
 (4.13.30)

Se reorganizan los términos para obtener la serie geométrica en los dos términos:

$$Y_2(s) = x_{d1}k_1^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-k_1 s^{-1})^m\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-k_2 s^{-1})^n\right) s^{-3}.$$
(4.13.31)

La aproximación de la serie geométrica obtenida se representa de la siguiente manera:

$$Y_2(s) = x_{d1}k_1^2 \frac{1}{1+k_1s^{-1}} \frac{1}{1+k_2s^{-1}}s^{-3}.$$
(4.13.32)

Los términos se reorganizan de la siguiente manera:

$$Y_2(s) = x_{d1}k_1^2 \frac{1}{s^3} \frac{1}{1+k_1s^{-1}} \frac{1}{1+k_2s^{-1}}.$$
(4.13.33)

Multiplicamos y reorganizamos el denominador:

$$Y_2(s) = x_{d1}k_1^2 \frac{1}{s(s+k_1)(s+k_2)}.$$
(4.13.34)

Se realizan las fracciones parciales lineales:

$$Y_2(s) = x_{d1}k_1^2 \frac{1}{s(s+k_1)(s+k_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+k_1} + \frac{D}{s+k_2}.$$
(4.13.35)

Resultado en las fracciones parciales:

$$Y_2(s) = x_{d1}k_1^2 \left(\frac{1}{k_1k_2}\frac{1}{s} - \frac{1}{k_1(k_2 - k_1)}\frac{1}{s + k_1} + \frac{1}{k_2(k_2 - k_1)}\frac{1}{s + k_2}\right).$$
(4.13.36)

Multiplicando y simplificando la ecuación:

$$Y_2(s) = \frac{x_{d1}k_1}{k_1k_2} \frac{1}{s} - \frac{x_{d1}k_1}{k_1(k_2 - k_1)} \frac{1}{s + k_1} + \frac{x_{d1}k_1^2}{k_2(k_2 - k_1)} \frac{1}{s + k_2}.$$
(4.13.37)

Sumando  $Y_1(s)$  y  $Y_2(s)$ :

$$Y(s) = \frac{x_{d2}}{s} - \frac{x_{d2}}{s + k_2} - \frac{x_{d1}k_1}{k_2s} + \frac{x_{d1}k_1}{k_2(s + k_2)} + \frac{x_{d1}k_1}{k_1k_2} \frac{1}{s} - \frac{x_{d1}k_1}{k_1(k_2 - k_1)} \frac{1}{s + k_1} + \frac{x_{d1}k_1^2}{k_2(k_2 - k_1)} \frac{1}{s + k_2} + \frac{x_{d1}k_1^2}{k_2(k_2 - k_1)} \frac{1}{s + k_$$

Reduciendo términos similares y sacando factor común  $x_{d2}$ :

$$Y(s) = x_{d2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+k_2}\right) + \frac{x_{d1}k_1^2}{k_2(k_2 - k_1)} \frac{1}{s+k_2} + \frac{x_{d1}k_1}{k_2(s+k_2)} - \frac{x_{d1}k_1}{k_1(k_2 - k_1)} \frac{1}{s+k_1}.$$
(4.13.39)

Por lo tanto, la transformada inversa de Y(s) nos devuelve la solución en el dominio temporal:

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}.$$
(4.13.40)

Finalmente, al validar la solución obtenida mediante el cálculo fraccionario con  $\alpha = 1$ , vemos que la solución coincide con la función en tiempo ordinario, lo que demuestra la validez y precisión del enfoque fraccionario para representar sistemas dinámicos.

### 4.13.3. Simulación de Diversos Escenarios

En esta sección, exploraremos varios escenarios, variando tanto los objetivos de producción como los valores de  $\alpha$  en cada departamento, para comprender mejor cómo estas variables afectan el desempeño de los procesos de Tejido y Hilvanado. Esto proporcionará información valiosa para la toma de decisiones en la gestión de la producción textil.

### 4.13.4. Simulación de Eficiencias en el Departamento de Tejido

Es importante notar que el parámetro  $\alpha$  desempeña un papel fundamental como indicador de eficiencia operativa, y su rango de variación permite una evaluación exhaustiva de la eficiencia del departamento en cuestión. EL cuadro 4.13 muestra los diferentes escenarios para el departamento de Tejido.

Cuadro 4.13: Variación de parámetros para diferentes simulaciones del Departamento de Tejido.

Escenarios	Categoría	Meta (Piezas)	Eficiencia
Escenario 1	Óptimo	100	$\alpha = 0,9$
	Muy bueno		$\alpha = 0.8$
	Bueno		$\alpha = 0,7$
	Regular		$\alpha = 0,6$
	Pobre		$\alpha = 0,5$
	Muy pobre		$\alpha = 0,4$
Escenario 2	Óptimo	70	$\alpha = 0,9$
	Muy bueno		$\alpha = 0,8$
	Bueno		$\alpha = 0,7$
	Regular		$\alpha = 0,6$
	Pobre		$\alpha = 0,5$
	Muy pobre		$\alpha = 0,4$
Escenario 3	Óptimo	50	$\alpha = 0,9$
	Muy bueno		$\alpha = 0.8$
	Bueno		$\alpha = 0,7$
	Regular		$\alpha = 0,6$
	Pobre		$\alpha = 0,5$
	Muy pobre		$\alpha = 0,4$

La Figura 4.34 muestra la Simulación 1, que compara las seis categorías de eficiencia con el  $100\,\%$  de desempeño.



Figura 4.34: Simulación 1 del proceso de Tejido con una meta de 100 piezas

La Figura 4.35 muestra la Simulación 2, que compara las seis categorías de eficiencia con el  $100\,\%$  de desempeño.



Figura 4.35: Simulación 2 del proceso de Tejido con una meta de 70 piezas

La Figura 4.36 muestra la Simulación 3, que compara las seis categorías de eficiencia con el  $100\,\%$  de desempeño.



Figura 4.36: Simulación 3 del proceso de Tejido con una meta de 50 piezas

### 4.13.5. Simulación de Eficiencias en el Departamento de Hilvanado

El cuadro 4.14 detalla los diferentes escenarios considerados para el departamento de Hilvanado. Cada escenario representa una combinación única de variables, incluyendo el objetivo de producción del departamento y los valores de eficiencia asociados con los procesos, expresados en términos de  $\alpha$ . Estos escenarios proporcionan una visión amplia de las configuraciones posibles bajo las cuales se evalúa el desempeño del departamento de Hilvanado en el proceso de manufactura.

Cuadro 4.14: Variación de parámetros para diferentes simulaciones del Departamento de Hilvanado.

Escenarios	Categoría	Meta (Piezas)	Eficiencia
Escenario 1	Óptimo	100	$\alpha = 0.9$
	Muy bueno		$\alpha = 0.8$
	Bueno		$\alpha = 0,7$
	Regular		$\alpha = 0,6$
	Pobre		$\alpha = 0.5$
	Muy pobre		$\alpha = 0,4$
Escenario 2	Óptimo	70	$\alpha = 0,9$
	Muy bueno		$\alpha = 0.8$
	Bueno		$\alpha = 0,7$
	Regular		$\alpha = 0,6$
	Pobre		$\alpha = 0,5$
	Muy pobre		$\alpha = 0,4$
Escenario 3	Óptimo	50	$\alpha = 0,9$
	Muy bueno		$\alpha = 0.8$
	Bueno		$\alpha = 0,7$
	Regular		$\alpha = 0,6$
	Pobre		$\alpha = 0,5$
	Muy pobre		$\alpha = 0,4$

La Figura 4.37 muestra la Simulación 1, que compara las seis categorías de eficiencia con el  $100\,\%$  de desempeño.



Figura 4.37: Simulación 1 del proceso de Hilvanado.

La Figura 4.38 muestra la Simulación 2, que compara las seis categorías de eficiencia con el  $100\,\%$  de desempeño.



Figura 4.38: Simulación 2 del proceso de Hilvanado.

La Figura 4.39 muestra la Simulación 3 del departamento de Hilvanado, donde se muestran las seis etiquetas comparativas.



Figura 4.39: Simulación 3 del proceso de Hilvanado.

Las simulaciones nos proporcionan una herramienta invaluable para la toma de decisiones. Al explorar una variedad de escenarios que abarcan diferentes valores de eficiencia para ambos departamentos, podemos obtener una comprensión más profunda de cómo estos factores afectan el proceso de producción. Esta capacidad de simular y comparar múltiples escenarios nos brinda información valiosa para optimizar nuestras operaciones y tomar decisiones informadas que impulsan la eficiencia y productividad en toda la organización.

### 4.13.6. Validación en Campo

En esta sección, contrastamos la eficiencia del 100 % con las eficiencias observadas en cada uno de los dos departamentos validados en campo. Este análisis minucioso nos permite ver la realidad operativa de ambos departamentos. Además, permite identificar discrepancias significativas y áreas de mejora potencial, lo cual contribuye a una toma de decisiones más informada y a la optimización continua de nuestros procesos.

#### Validación de Eficiencias en el Departamento de Tejido

Los resultados de la validación en campo usando la metodología OEE se presentan en la Figura 4.40 a continuación y se detallan en la tercera sección. En este contexto, la eficiencia obtenida para el departamento de Tejido fue del 77.90 %. Véase la Figura 4.40.



Figura 4.40: Validación de eficiencias en el departamento de Tejido.

#### Validación de Eficiencias en el Departamento de Hilvanado

Los resultados de la validación en campo usando la metodología OEE se presentan en la Figura 4.41 a continuación y se detallan en la tercera sección. En este contexto, la eficiencia obtenida para el departamento de Hilvanado fue del 90.84%. Se puede concluir que el proceso de Tejido se encuentra en la categoría "Bueno", ya que supera el 70% de eficiencia estimada y tiene un amplio margen de mejora en las dos categorías. Se estima que podría alcanzar aproximadamente 50 piezas. Por otro lado, el proceso de Hilvanado se encuentra en la categoría "Óptimo", superando el 90% de eficiencia, lo que indica un desempeño muy bueno en este departamento, obteniendo 67 piezas durante el periodo dado.



Figura 4.41: Validación de eficiencias en el departamento de Hilvanado.

Los resultados presentados en la Sección, están diseñados y analizados específicamente para el dominio  $0 < \alpha < 1$ . Este rango fue seleccionado intencionalmente porque tiene sentido para la aplicación. Dado que el valor de  $\alpha$  no mide producción absoluta sino eficiencia de producción, está limitado al rango de 0 a 1. En este contexto, un valor de  $\alpha$  mayor a 1 podría indicar una eficiencia superior al 100 %, lo cual no sería práctico o relevante para interpretar la eficiencia en el proceso. Por lo tanto, nos enfocamos en el rango  $0 < \alpha < 1$ , donde los resultados son más significativos y aplicables para este estudio.

# Capítulo 5

# Implementación de la Capacidad Solar Fotovoltaica en México

En este capítulo, se presentan los datos sobre el crecimiento de la capacidad fotovoltaica instalada en México, así como el potencial solar del país. Se analizan las cifras de instalación de sistemas fotovoltaicos y su relación con la irradiación solar disponible, lo que permite comprender la viabilidad y el potencial de la energía solar en el contexto mexicano.

## 5.1. Resultados: Caso de estudio de la capacidad instalada fotovoltaica

### 5.1.1. Datos

En esta sección se presentan los datos recolectados de fuentes oficiales como *Statista* [?] y el *Instituto Nacional de Estadística y Geografía* (INEGI) [81], que ilustran el crecimiento de la capacidad instalada fotovoltaica en México en los últimos años. La energía solar se ha convertido en una de las principales fuentes de energía renovable en el país, debido a las excelentes condiciones de irradiación solar en diversas regiones.

### 5.1.2. Capacidad fotovoltaica instalada (2015-2023)

El siguiente gráfico muestra el crecimiento de la capacidad fotovoltaica instalada en México entre 2015 y 2023, medido en megavatios (MW):

### 5.1.3. Irradiación Solar en México

México es uno de los países con los niveles más altos de irradiación solar a nivel mundial. La irradiación solar promedio diaria es de aproximadamente 5.5 kWh/m<sup>2</sup>/día, lo que coloca al país en una posición privilegiada para aprovechar la energía solar.



Figura 5.1: Capacidad fotovoltaica instalada en México (2015-2023). Fuente: Statista, INEGI.

Las áreas con mayor irradiación se encuentran principalmente en los estados del norte y centro del país, como Sonora, Chihuahua, Durango y Zacatecas, donde los niveles superan los 6 kWh/m<sup>2</sup>/día [82].

El siguiente mapa resalta las regiones de México con los niveles más altos de irradiación solar, marcadas en rojo:



Figura 5.2: Mapa de irradiación solar en México. Fuente: INEGI.

### 5.2. Metodología: Modelado de la Capacidad Fotovoltaica

En este estudio, se utilizó un modelo de dinámica de sistemas para simular la evolución de la capacidad fotovoltaica instalada en México durante el período de 2015 a 2030. La dinámica de sistemas es una metodología eficaz para comprender y modelar comportamientos complejos en sistemas dinámicos a lo largo del tiempo, con énfasis en las interacciones entre las variables clave.

### 5.2.1. Fase 1: Modelado y Simulación del Crecimiento Exponencial (2015-2030)

- 1. Desarrollo del Modelo de Dinámica de Sistemas en Vensim: Se crea un modelo de simulación para describir el crecimiento de la capacidad fotovoltaica instalada en México. En este modelo, se definen las variables del sistema, como la capacidad fotovoltaica instalada.
- 2. **Definición del Modelo de Ecuación Diferencial:** Se formula la ecuación diferencial que representa el crecimiento exponencial de la capacidad instalada. Se explican las variables involucradas.
- 3. Solución Analítica del Modelo: La ecuación diferencial obtenida se resuelve analíticamente, proporcionando una expresión explícita que describe cómo varía la capacidad instalada con el tiempo.
- 4. Solución del Modelo Fraccionario usando Cálculo Conformable: Se aplica el cálculo conformable para resolver el modelo de manera fraccionaria, capturando dinámicas complejas que incluyen efectos de memoria y comportamientos no locales en el crecimiento de la capacidad instalada.
- 5. Análisis de Sensibilidad y Simulación de Escenarios: Comparación de Errores con Datos Históricos: Se realizan simulaciones variando los valores del parámetro alfa en diferentes escenarios. La capacidad instalada proyectada se compara con los datos históricos, analizando el error y la precisión del modelo.

### 5.2.2. Fase 2: Modelado y Simulación del Crecimiento Sigmoidal (2015-2030)

1. Desarrollo del Modelo de Dinámica de Sistemas en Vensim: Se crea un modelo de simulación para describir el crecimiento sigmoidal de la capacidad fotovoltaica instalada en México. En este modelo, se definen las variables del sistema, incluyendo la capacidad fotovoltaica instalada, la capacidad máxima del sistema y los factores que influyen en la adopción de tecnologías fotovoltaicas.

- 2. Definición del Modelo de Ecuación Diferencial: Se formula la ecuación diferencial que representa el crecimiento sigmoidal de la capacidad instalada. En esta sección se explican las variables involucradas, como la tasa de crecimiento y los límites que afectan el comportamiento del sistema.
- 3. Solución Analítica de la Ecuación Logística: La ecuación diferencial obtenida se resuelve analíticamente, proporcionando una expresión explícita que describe cómo varía la capacidad instalada con el tiempo en un contexto sigmoidal.
- 4. Solución Fraccionaria Logística con Cálculo Conformable: Se aplica el cálculo conformable para resolver el modelo sigmoidal de manera fraccionaria, capturando dinámicas complejas que incluyen efectos de memoria y comportamientos no locales en el crecimiento de la capacidad instalada.
- 5. Análisis de Sensibilidad y Simulación de Escenarios: Comparación de Errores con Datos Históricos: Se realizan simulaciones variando los valores del parámetro alfa en diferentes escenarios. La capacidad instalada proyectada se compara con los datos históricos, analizando el error y la precisión del modelo en representar el crecimiento sigmoidal.

### 5.2.3. Fase 3: Integración de Modelos y Análisis de Sensibilidad a través del Cálculo Fraccionario (2015-2030)

- 1. Integración de Modelos: Los resultados de los modelos exponenciales y sigmoides se combinan. La solución analítica del modelo exponencial se utiliza para el período de 2015 a 2023, capturando el rápido crecimiento inicial de la capacidad instalada. Para el período de 2023 a 2030, se utiliza la solución analítica del modelo sigmoidal, reflejando el crecimiento estabilizado del sistema. Este enfoque también permite desarrollar un análisis de sensibilidad, donde se evalúan variaciones en el parámetro alfa del modelo utilizando técnicas de cálculo fraccionario.
- 2. Transición y Análisis de Sensibilidad: Esta fase de integración no solo permite analizar la transición entre los dos comportamientos de crecimiento, sino que también facilita un análisis de sensibilidad utilizando funciones fraccionarias obtenidas a través del cálculo conformable. Se explorarán diferentes escenarios para evaluar cómo los cambios en el parámetro alfa afectan la dinámica del sistema a lo largo del tiempo. Esto proporciona una comprensión más profunda de las interacciones bajo diversas condiciones.

### 5.2.4. Modelado y Simulación del Crecimiento Exponencial

### 5.2.5. Desarrollo del Modelo de Dinámica de Sistemas en Vensim

Este estudio utiliza un modelo de dinámica de sistemas para analizar y predecir el crecimiento de la capacidad fotovoltaica (FV) instalada en México desde 2015 hasta 2023. La dinámica de sistemas es una metodología eficaz para estudiar y modelar sistemas complejos e interrelacionados, ya que permite la simulación de bucles de retroalimentación y el análisis de los factores clave que afectan la expansión de la infraestructura fotovoltaica.

El modelo simula diversos escenarios de crecimiento mediante la incorporación de inversiones tanto públicas como privadas en el despliegue de FV, así como factores como la rentabilidad del sistema y las pérdidas de usuarios rurales. La capacidad instalada de FV se modela como un sistema dinámico que evoluciona en función de estos flujos de entrada y salida.

Para obtener la rentabilidad del sistema, se consideran varios factores clave. Primero, se analizan los costos de instalación y los costos operativos anuales de los sistemas fotovoltaicos. Además, es esencial tener en cuenta que la capacidad instalada se mide en megavatios (MW) y que, en promedio, los sistemas fotovoltaicos operan alrededor de 8,760 horas por año, lo que permite calcular la producción de energía en función de la capacidad instalada. Sin embargo, uno de los mayores desafíos para la rentabilidad es la eficiencia de los sistemas, que generalmente se mantiene alrededor del 20%.

La rentabilidad del sistema privado debe ser mayor que 1 para que haya un interés genuino en la inversión privada, mientras que el sector público enfrenta una inversión considerable, que puede justificarse por sus objetivos de sostenibilidad y desarrollo social. Además, el modelo tiene en cuenta las pérdidas asociadas con la transición de los sistemas energéticos de las zonas rurales a las urbanas, donde muchas instalaciones se vuelven inutilizadas. Esto se debe a que, en las zonas rurales, la energía solar resulta ser una alternativa muy conveniente, especialmente en regiones donde la electricidad pública no está disponible.

#### Componentes principales del modelo

• Capacidad fotovoltaica instalada  $(C_i(t))$ : Esta es la variable de estado principal del sistema, que representa la capacidad fotovoltaica instalada en megavatios (MW) en un momento dado t. La capacidad se actualiza anualmente en función de los flujos de despliegue público, despliegue privado y pérdidas de usuarios rurales.

### Flujos de Crecimiento y Pérdida:

• **Despliegue público**  $(A_{pu}(t))$ : Incremento anual de la capacidad impulsado por entidades públicas, dependiente de una tasa inicial de despliegue y proporcional a la capacidad instalada.

- Despliegue privado  $(B_{pr}(t))$ : Capacidad instalada por el sector privado, influenciada por la rentabilidad del sistema. Si la rentabilidad (P) es mayor que 1, el sector privado continúa expandiendo la capacidad.
- Pérdidas de usuarios rurales  $(L_{ru}(t))$ : Tasa constante de pérdida de capacidad debido a que los usuarios rurales se desconectan de los sistemas fotovoltaicos.



Figura 5.3: Modelo de Dinámica de Sistemas para el Despliegue de Capacidad Fotovoltaica en México.

### 5.2.6. Definición del Modelo de Ecuación Diferencial

El crecimiento de la capacidad fotovoltaica instalada durante el período 2015-2023 se puede describir mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = A_{pu}(t) + B_{pr}(t) - L_{ru}(t)$$
(5.2.1)

donde:

•  $A_{pu}(t)$ : Despliegue público de capacidad fotovoltaica.

- $B_{pr}(t)$ : Despliegue privado de capacidad fotovoltaica, dependiente de la rentabilidad.
- $L_{ru}(t)$ : Pérdida de usuarios rurales.

Variables de estado:

•  $C_i(t)$ : Capacidad fotovoltaica instalada en el tiempo t (en MW). Esta es la variable de estado principal del sistema, actualizada anualmente en función de los flujos de despliegue público, despliegue privado y pérdidas.

Tasas de flujo:

•  $A_{pu}(t)$ : Despliegue público de capacidad fotovoltaica (en MW/año). Esta es la tasa a la que las entidades gubernamentales o públicas instalan nueva capacidad fotovoltaica anualmente.

$$A_{pu}(t) = A_{pu0} \times C_i(t)$$

donde:

- $A_{pu0}$  representa la tasa inicial de despliegue público en MW/año.
- $B_{pr}(t)$ : Despliegue privado de capacidad fotovoltaica (en MW/año). Este flujo representa la capacidad fotovoltaica instalada por entidades privadas, influenciado por la rentabilidad del sistema.

$$B_{pr}(t) := \begin{cases} \alpha_{\text{base}} \cdot (P-1) \cdot C_i(t), & \text{si } P > 1, \\ 0, & \text{si } P \le 1. \end{cases}$$

donde:

- $\alpha_{\text{base}}$  es el parámetro base para el despliegue privado.
- P es la rentabilidad del sistema.
- $L_{ru}(t)$ : Pérdida de usuarios rurales (en MW/año). Este flujo representa la tasa a la que la capacidad instalada se reduce debido a que los usuarios rurales se desconectan de sus sistemas solares.

$$L_{ru}(t) = \beta \cdot C_i(t)$$

donde:

- $\beta$  es el parámetro que representa la tasa de pérdida rural.
- $C_i(t)$  es la capacidad fotovoltaica instalada en el tiempo t.

Variables auxiliares:

• **Rentabilidad del sistema** (*P*): La rentabilidad se define como:

$$P = \frac{R(t)}{C_{\text{total}}}$$

donde R(t) representa los ingresos generados por la energía producida, calculados como:

R(t) = Horas operativas×Precio de la energía solar×Número de MW×Factor de capacidad

Para el cálculo, se utiliza 1 MW.

Costos totales de instalación y operación ( $C_{\text{total}}$ ): Esta variable refleja los costos totales relacionados con la instalación y operación del sistema fotovoltaico, calculados como:

 $C_{\text{total}} = (\text{factor de capacidad} \times \text{número de MW} \times \text{horas operativas} \times \text{costos de instalación}) + \text{costos operativos anuales}$ 

En las siguientes sección, presentamos soluciones a la ecuación diferencial formulada, comparando la solución ordinaria con la solución fraccionaria conforme para evaluar sus respectivos comportamientos en el modelo.

### 5.2.7. Solución Analítica del Modelo

Partiendo de la ecuación diferencial general:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = A_{pu}(t) + B_{pr}(t) - L_{ru}(t)$$
(5.2.2)

Al agrupar los términos y factorizar, obtenemos:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = k_1 \cdot C_i(t) \tag{5.2.3}$$

Donde el coeficiente  $k_1$  se define como:

$$k_1 = A_{pu0} + \alpha_{\text{base}}(P - 1) - \beta \tag{5.2.4}$$

La solución general de esta ecuación es:

$$C_i(t) = C_0 \cdot e^{k_1 \cdot t} \tag{5.2.5}$$

Aquí,  $C_0$  es la capacidad fotovoltaica instalada inicial, tomada de datos reales.

### 5.2.8. Solución del Modelo Fraccionario utilizando Cálculo Conformable

Cuando aplicamos una derivada fraccionaria conforme de orden  $\alpha$ , la ecuación diferencial se convierte en:

$$t^{1-\alpha} \frac{dC_i(t)}{dt} = k_1 \cdot C_i(t)$$
 (5.2.6)

Separando las variables y resolviendo la ecuación, obtenemos:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = t^{\alpha - 1} \cdot k_1 \cdot C_i(t) \tag{5.2.7}$$

La solución general de la ecuación diferencial fraccionaria conforme es:

$$C_i(t) = C_0 \cdot e^{\frac{k_1}{\alpha} \cdot t^{\alpha}} \tag{5.2.8}$$

Donde  $C_0$  es la capacidad fotovoltaica instalada inicial.

### 5.2.9. Análisis de Sensibilidad y Simulación de Escenarios: Comparación de Errores con Datos Históricos

La función fraccionaria obtenida a través de la derivada conforme proporciona un marco para analizar un bucle de refuerzo fraccionario en la dinámica de sistemas. Al derivar la función que relaciona el tiempo con el parámetro  $\alpha$ , podemos realizar un análisis de sensibilidad variando  $\alpha$ .

Este enfoque nos permite explorar diferentes escenarios generados por las variaciones en el parámetro  $\alpha$  en el comportamiento del modelo de Euler. Al ajustar este parámetro, podemos observar cómo estas variaciones crean diferentes resultados y escenarios dentro del modelo.

Este análisis de sensibilidad en el bucle de refuerzo fraccionario mejora nuestra comprensión de la dinámica para la toma de decisiones en la modelización de sistemas, específicamente en el área de capacidad fotovoltaica instalada en México.

En esta sección, analizaremos dos escenarios:

• Escenario 2015-2023: En este período, los resultados muestran que el valor de  $\alpha$  que mejor se ajusta cuando se compara con los datos reales es  $\alpha = 0.8652$ , con un error porcentual promedio de 16,52 %. Los errores porcentuales promedio para diferentes valores de  $\alpha$  son los siguientes:

Valor de $\alpha$	Error Porcentual Promedio
1,0000	$23{,}30\%$
$0,\!9500$	$19{,}92\%$
0,9000	$17,\!63\%$
0,8652	$16{,}52\%$
0,8500	$16{,}90\%$
0,8000	$20,\!37\%$

Cuadro 5.1: Errores porcentuales promedio para diferentes valores de  $\alpha$  de 2015 a 2023



Figura 5.4: Análisis de los valores de  $\alpha$  de 2015 a 2023

Escenario 2023-2030: Las proyecciones indican capacidades que oscilan entre 100,000 y 700,000 MW, lo que parece ilógico dada la saturación de los mercados y la creciente competencia de otras fuentes de energía renovable, como la energía eólica. El comportamiento observado en el período 2015-2023 se argumenta que es adecuado y razonable, especialmente considerando que el valor de  $\alpha$  con el menor error es 0,8652. En cambio, la proyección de alcanzar entre 25,000 y 30,000 MW en México para 2030 parece poco realista, dado el crecimiento excesivamente alto proyectado.



Figura 5.5: Proyecciones para la capacidad fotovoltaica de 2023 a 2030

Es esencial considerar estos aspectos para hacer proyecciones más precisas en el futuro y reconocer las limitaciones actuales del mercado.

# 5.3. Transición a un Modelo de Crecimiento Logístico

# 5.3.1. Desarrollo del Modelo de Dinámica de Sistemas en Vensim

El modelo de crecimiento sigmoidal, también conocido como crecimiento logístico, es una extensión del modelo de crecimiento exponencial que incorpora un bucle de balance para representar los efectos de la saturación del mercado y las limitaciones estructurales. En este caso, el objetivo de capacidad fotovoltaica de México se ajusta en función de la meta establecida por la Secretaría de Energía (SENER) para 2030, que busca alcanzar una capacidad instalada de 25,000 MW.

Para lograr este ajuste, se ha integrado un bucle de retroalimentación de balance, que limita el crecimiento a medida que la capacidad instalada se acerca a la meta de SENER. Este bucle actúa como un factor limitante en el crecimiento de la
capacidad fotovoltaica, ralentizando la expansión a medida que la capacidad se acerca al objetivo de 25,000 MW.

En el modelo de dinámica de sistemas, esta adaptación es relativamente sencilla, ya que se conservan los mismos datos y parámetros básicos del modelo anterior. Las únicas adiciones son un factor multiplicador que reduce el crecimiento de la capacidad en función de la proximidad al objetivo de SENER, junto con el objetivo de 25,000 MW.



Figura 5.6: Modelo de Vensim para el Crecimiento de la Capacidad Fotovoltaica

El modelo sigmoidal utilizado para describir el crecimiento de la capacidad fotovoltaica se basa en el parámetro de tasa de crecimiento  $k_1$ , consistente con el modelo derivado del método de Euler. Con el reciente objetivo establecido por SENER y los ajustes en los bucles de retroalimentación del modelo de dinámica de sistemas, la dinámica del modelo sigmoidal se refina aún más para garantizar una representación más precisa de las condiciones del mercado.

### 5.3.2. Definición del Modelo de Ecuación Diferencial

El modelo sigmoidal puede expresarse de la siguiente manera: El modelo de crecimiento logístico, esperado a medida que el mercado fotovoltaico madura, se describe con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = k_1 \cdot C_i(t) \left(1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}}\right)$$
(5.3.1)

Donde:

- $k_1$  es la tasa de crecimiento ajustada que considera la saturación del mercado y es consistente con el modelo anterior derivado del método de Euler.
- $C_{max}$  es la capacidad máxima proyectada para el mercado fotovoltaico, estimada en 25,000 MW.

### Solución Analítica de la Ecuación Logística

**Ecuación Diferencial Logística:** El modelo de crecimiento logístico se representa mediante la ecuación:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = k_1 \cdot C_i(t) \left(1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}}\right)$$
(5.3.2)

**Reordenando la Ecuación:** Comenzamos con la ecuación logística. Para separar las variables, la reescribimos:

$$\frac{dC_i(t)}{C_i(t)\left(1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}}\right)} = k_1 dt$$
(5.3.3)

Integrando Ambos Lados: A continuación, integramos ambos lados. El lado izquierdo requiere descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{1}{C_i(t)\left(1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}}\right)} = \frac{A}{C_i(t)} + \frac{B}{1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}}}$$
(5.3.4)

Para encontrar  $A \neq B$ :

 $\operatorname{Sea}$ 

$$A\left(1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}}\right) + B \cdot C_{max} = 1.$$
(5.3.5)

Resolviendo para  $A \ge B$  obtenemos:

$$A = \frac{1}{C_{max}}, \quad B = \frac{1}{C_{max}}.$$

Por lo tanto, la ecuación se convierte en:

$$\frac{1}{C_{max}} \int \left( \frac{1}{C_i(t)} + \frac{1}{1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}}} \right) dC_i(t) = k_1 \int dt$$
 (5.3.6)

Integración: El lado izquierdo se integra a:

$$\frac{1}{C_{max}} \left( \ln |C_i(t)| - \ln \left| 1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}} \right| \right) = k_1 t + C.$$
 (5.3.7)

Combinando los términos logarítmicos:

$$\ln \left| \frac{C_i(t)}{1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}}} \right| = k_1 C_{max} t + C.$$
 (5.3.8)

Exponenciando: Tomando el exponente de ambos lados:

$$\frac{C_i(t)}{1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}}} = e^{k_1 C_{max} t + C}.$$
(5.3.9)

Forma Final: Reordenando se obtiene la ecuación logística final:

$$C_i(t) = \frac{C_{max}}{1 + \left(\frac{C_{max}}{C_0} - 1\right)e^{-k_1 t}}.$$
(5.3.10)

Donde: -  $C_{max}$  es la capacidad máxima proyectada para el mercado fotovoltaico (estimada en 25,000 MW). -  $C_0$  es la capacidad instalada inicial al comienzo de la fase de crecimiento logístico.

### 5.3.3. Solución Logística Fraccional Conformable

Formulación Fraccional Conformable: Ahora aplicamos la derivada fraccional conforme al modelo logístico. La derivada fraccional de orden  $\alpha$  nos da la siguiente ecuación:

$$t^{1-\alpha} \frac{dC_i(t)}{dt} = k_1 C_i(t) \left( 1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}} \right).$$
 (5.3.11)

Separación de Variables: Reordenando y separando obtenemos:

$$\frac{dC_i(t)}{C_i(t)\left(1-\frac{C_i(t)}{C_{max}}\right)} = k_1 t^{\alpha-1} dt.$$
(5.3.12)

**Integración:** De manera similar al caso ordinario, integramos ambos lados. El lado izquierdo utilizará nuevamente fracciones parciales como antes, lo que da lugar a:

$$\frac{1}{C_{max}} \int \left( \frac{1}{C_i(t)} + \frac{1}{1 - \frac{C_i(t)}{C_{max}}} \right) dC_i(t) = \int k_1 t^{\alpha - 1} dt.$$
(5.3.13)

La integral en el lado derecho da como resultado:

$$\frac{k_1 t^{\alpha}}{\alpha} + C. \tag{5.3.14}$$

Solución Final: Esto nos da una solución de la forma:

$$C_{i}(t) = C_{max} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{C_{max}}{C_{0}} - 1\right) e^{-\frac{k_{1}t^{\alpha}}{\alpha}}} \right).$$
(5.3.15)

Análisis de Sensibilidad y Simulación de Escenarios: Comparación de Errores con Datos Históricos

Con la solución derivada de la derivada fraccional conforme, obtenemos una función que describe la relación entre el tiempo y el parámetro  $\alpha$ . Al variar los valores de  $\alpha$ , podemos realizar un nuevo análisis de sensibilidad dentro de los modelos de dinámica de sistemas mediante la aplicación del cálculo conforme.

Este análisis se enfoca específicamente en la función sigmoidal, que representa el comportamiento de crecimiento en forma de S que a menudo se observa en sistemas que se acercan a la saturación. El modelo sigmoidal nos permite capturar la dinámica de crecimiento de manera más realista, particularmente en contextos donde existen límites de capacidad.

Al alterar sistemáticamente el parámetro  $\alpha$ , podemos observar cómo los cambios afectan la trayectoria de crecimiento del sistema. Esta variación nos permite identificar umbrales críticos y respuestas, proporcionando valiosos conocimientos sobre el comportamiento del modelo de crecimiento de la capacidad fotovoltaica bajo diferentes condiciones. Así, la aplicación del cálculo fraccional conforme no solo mejora nuestra comprensión de las dinámicas subyacentes, sino que también ofrece un marco robusto para el análisis de escenarios y la toma de decisiones en la planificación de energías renovables.

La solución final derivada del modelo logístico se expresa de la siguiente manera:

### Errores Promedio Porcentuales

Evaluamos el modelo en dos periodos de tiempo significativos: 2015-2023 y 2023-2030. Los errores promedio porcentuales para varios valores de  $\alpha$  durante el periodo de 2015 a 2023 se muestran en la tabla a continuación:

De los resultados, observamos que el menor error promedio porcentual ocurre cuando  $\alpha = 1,00~(25.07\%)$ . Sin embargo, es importante señalar que los mode-los fraccionales no tuvieron un buen desempeño en esta fase. La transición se

Valor de Alpha	Error Promedio Porcentual
$\alpha = 1,00$	25.07%
$\alpha = 0.95$	27.09%
$\alpha = 0,90$	29.31%
$\alpha = 0.87$	30.76%
$\alpha = 0.85$	31.37%
$\alpha = 0,80$	33.27%

Cuadro 5.2: Errores Promedio Porcentuales para Diferentes Valores de Alpha (2015-2023)

representa mejor con el modelo de Euler o el modelo de refuerzo para el primer periodo.

Al evaluar el periodo de 2023 a 2030, la capacidad se acerca a valores cercanos a los 25,000 MW, lo cual parece más lógico y está alineado con las proyecciones de SENER. Esto sugiere que el segundo escenario podría ser una representación más adecuada del crecimiento futuro.

Representación Gráfica

A continuación, presentamos las representaciones gráficas de los modelos:

1. Gráfico para 2015-2023 con el Modelo de Euler 2. Gráfico para 2023-2030 con el Modelo Sigmoidal

Los gráficos ilustran los patrones de crecimiento en la capacidad fotovoltaica durante los dos periodos. El modelo de Euler de 2015 a 2023 muestra una tendencia de crecimiento que es consistente con los datos reales, mientras que el modelo sigmoidal de 2023 a 2030 indica un enfoque de crecimiento más estabilizado, alineado con la saturación anticipada del mercado y los límites de capacidad. Esta transición refleja la necesidad de ajustes en nuestros enfoques de modelado, y el modelo sigmoidal parece proporcionar una previsión más realista para el futuro crecimiento de la capacidad fotovoltaica en México.

# 5.4. Fase 3: Integración de Modelos y Análisis de Sensibilidad mediante Cálculo Fraccional (2015-2030)

## 5.4.1. Integración de Modelos

En el análisis del crecimiento de la capacidad fotovoltaica en México de 2015 a 2023, utilizamos las condiciones iniciales establecidas por el modelo exponencial. La fase de crecimiento exponencial capturó de manera efectiva los datos histó-



Figura 5.7: Crecimiento de la Capacidad Fotovoltaica utilizando el Modelo de Euler (2015-2023)

ricos hasta 2023, demostrando una clara trayectoria ascendente en la capacidad instalada.

Posteriormente, realizamos la transición al modelo fraccional sigmoidal, que es más representativo de los patrones de crecimiento realistas dados los límites de saturación del mercado y las limitaciones estructurales inherentes al sector fotovoltaico. El rango proyectado de capacidad de 23,325 MW a 25,000 MW se alinea con los escenarios esperados bajo las políticas nacionales que promueven las energías renovables.

## 5.4.2. Transición y Análisis de Sensibilidad

Este enfoque integrado, que combina las ideas del modelo de crecimiento exponencial con el marco sigmoidal, indica que los desafíos a corto plazo que enfrenta el sector son manejables. Los resultados sugieren que alcanzar estos objetivos es factible, particularmente al considerar las políticas gubernamentales de apoyo y las condiciones del mercado.

Así, este estudio, junto con el análisis de sensibilidad fraccional, proporciona una perspectiva más realista sobre el crecimiento futuro de la capacidad fotovoltaica, adaptándose tanto a las tendencias de los datos históricos como a los desarro-



Figura 5.8: Crecimiento de la Capacidad Fotovoltaica utilizando el Modelo Sigmoidal (2023-2030)

llos anticipados, mientras ofrece una perspectiva de varios escenarios, los cuales podrían ser N escenarios.

En la etapa 5 del trabajo doctoral, se desarrolló un método de estimación innovador dentro del marco de la Dinámica de Sistemas, basado en el cálculo fraccional, con el objetivo de realizar un análisis de sensibilidad en el contexto del crecimiento de la capacidad fotovoltaica en México. Este estudio demuestra la efectividad del método de estimación y el análisis de sensibilidad mediante el uso combinado de la Dinámica de Sistemas (SD) y el Cálculo Fraccional Conformable (CFC) para evaluar el crecimiento de la capacidad fotovoltaica instalada en el país. La metodología aplicada se estructuró en tres fases: en la primera fase, se desarrolló un modelo de Dinámica de Sistemas para simular el crecimiento exponencial de la capacidad instalada, con un enfoque en variables clave como la inversión y los subsidios gubernamentales. Durante esta fase, el parámetro fraccional  $\alpha = 0,8652$ se optimizó, lo que redujo el error porcentual promedio al 16.52 % en comparación con los datos reales de capacidad instalada de 2015 a 2023.

Posteriormente, se exploró un modelo de crecimiento sigmoidal, proporcionando un análisis más profundo de los límites de capacidad del sistema y los factores que influyen en la adopción de tecnologías fotovoltaicas. Se desarrollaron ecuaciones diferenciales que capturan este comportamiento, y se aplicó el Cálculo Fraccional Conformable (CFC) para reflejar dinámicas complejas y efectos de memoria en la



Figura 5.9: Modelado del Crecimiento de la Capacidad Fotovoltaica en México (2015-2030)

trayectoria de crecimiento de la capacidad instalada. Las proyecciones resultantes para el período de 2023 a 2030 sugieren que la capacidad instalada podría variar entre 23,000 y 25,000 MW, con el parámetro fraccional  $\alpha$  variando de 0.8 a 1. Este rango señala un patrón de crecimiento más sostenido y realista, alineado con las condiciones anticipadas del mercado.

El análisis de sensibilidad en los modelos exponencial y sigmoidal permite examinar la transición entre diferentes comportamientos de crecimiento, proporcionando una comprensión más completa de la dinámica del sistema. Este enfoque facilita la identificación de cómo las variaciones en el parámetro  $\alpha$  afectan los resultados, lo cual es fundamental para la formulación de políticas y la toma de decisiones estratégicas. Además, enfatiza la importancia de cumplir con los compromisos de sostenibilidad establecidos bajo el Acuerdo de París, aprovechando el potencial solar de México, particularmente en regiones de alta irradiación como Oaxaca.

# Capítulo 6

# Conclusiones

La presente tesis doctoral representa un esfuerzo integral por ampliar y formalizar el análisis matemático de los modelos de Dinámica de Sistemas, con el objetivo de identificar y obtener modelos matematicos y como ayudan en la capacidad de apoyar la toma de decisiones en contextos reales. A continuación, se presentan las principales conclusiones obtenidas:

- Fortalecimiento de la Dinámica de Sistemas mediante análisis matemático. La investigación evidencia que la Dinámica de Sistemas, si bien es una metodología para modelar y simular sistemas y obtener us funciones mateamticas. Este trabajo ha contribuido a cerrar esta brecha al introducir herramientas del control moderno y el cálculo fraccionario para analizar y representar los modelos desde una perspectiva más rigurosa y formal.

- Obtención de funciones de transferencia en modelos dinámicos. Mediante la integración de técnicas de análisis en el dominio de la frecuancia, se logró obtener funciones de transferencia que describen la relación entre entradas y salidas de modelos basados en Dinámica de Sistemas. Este resultado no solo proporciona una visión más clara del comportamiento de los sistemas, sino que también facilita la implementación de estrategias de control basadas en modelos.

- Incorporación del control moderno en el análisis de sistemas. El uso del espacio de estados y técnicas de control, como el método de Ackermann, permitió implementar sistemas de control en lazo cerrado para modelos de simulación. Esto demuestra que la Dinámica de Sistemas puede beneficiarse de herramientas avanzadas de la ingeniería de control para mejorar su capacidad de control y su estabilidad en aplicaciones reales.

- Aportación del cálculo fraccionario al análisis dinámico. La aplicación del cálculo fraccionario, específicamente la derivada de Caputo y el cálculo conformable, permitió extender el análisis tradicional de Dinámica de Sistemas al tiempo fraccionario, introduciendo nuevas herramientas para la generación de escenarios mediante el parámetro fraccionario  $\alpha$ . Este enfoque no solo ofrece un mayor grado

de flexibilidad y precisión en la modelación de fenómenos que presentan comportamiento no lineal, sino que también se estableció como un novedoso método de análisis de sensibilidad en los modelos.

Adicionalmente, el cálculo conformable permitió desarrollar un método de estimación aplicado en la evaluación de la capacidad instalada de energía fotovoltaica en México. Este método demostró su eficacia al generar diversos escenarios que apoyan la toma de decisiones estratégicas en el ámbito energético. En conjunto, estas contribuciones amplían las posibilidades de análisis y simulación de la Dinámica de Sistemas, marcando una innovación significativa en el estado del arte.

El análisis de sensibilidad en la dinámica de sistemas tradicionalmente evalúa cómo los cambios en los parámetros afectan las variables de interés, considerando sistemas definidos en tiempo entero y con interacciones lineales o no lineales. Sin embargo, al incorporar el cálculo fraccionario, se abre la posibilidad de desarrollar un nuevo enfoque de análisis de sensibilidad

# Bibliografía

- J. Aracil, Introducción a la Dinámica de Sistemas, Alianza Editorial, Madrid, España, 1986.
- [2] J. Sterman, Business Dynamics, McGraw-Hill, Inc., 2000.
- [3] J.M. García, Teoría y Ejercicios Prácticos de Dinámica de Sistemas: Dinámica de Sistemas (Cuarta Edición), Spain, 2018. Available online: https://www.amazon.com.mx/Teor
- [4] E.A. Lagarda-Leyva and A. Ruiz, A Systems Thinking Model to Support Long-Term Bearability of the Healthcare System: The Case of the Province of Quebec, Sustainability, vol. 11, no. 24, pp. 7028, 2019. https://doi.org/10.3390/su11247028.
- [5] A.K. Cuartas Orozco, Estudio del efecto del clima sobre la producción de un hato bovino lechero desde la dinámica de sistemas, 2021.
- [6] E. De Leo, D. Aranda, and G.A. Addati, Introducción a la Dinámica de Sistemas, No. 739, Serie Documentos de Trabajo, 2020.
- [7] Economic Order Quantity Stochastic Dynamic Optimization Model in a Logistic 4.0 Environment, Sustainability, vol. 12, no. 10, pp. 4075, 2020. https://doi.org/10.3390/su12104075.
- [8] F. Facchini, J. Oleśków-Szłapka, L. Ranieri, and A. Urbinati, A Maturity Model for Logistics 4.0: An Empirical Analysis and a Roadmap for Future Research, Sustainability, vol. 12, no. 1, pp. 86, 2019. https://doi.org/10.3390/su12010086.
- [9] J. Nagy, J. Oláh, E. Erdei, D. Máté, and J. Popp, The Role and Impact of Industry 4.0 and the Internet of Things on the Business Strategy of the Value Chain—The Case of Hungary, Sustainability, vol. 10, no. 10, pp. 3491, 2018. https://doi.org/10.3390/su10103491.
- [10] R.A.G. Montoya, J.A.C. Arenas, and E.M. Bernal, Método Costeo ABC con Simulación de Monte Carlo en la Logística en la Cadena de Suministro en la Industria 4.0, Cuadernos de Contabilidad, vol. 21, pp. 20, 2020.
- [11] M. Golshanimanesh, H. Abbasianjahromi, M. Ehsanifar, and S.M. Mirhosseini, *Providing a System Dynamic Model to Predict Construction Status in Iran*

Using Sustainable Development Indicators, Journal of Industrial Engineering International, vol. 17, no. 3, pp. 1-19, 2021.

- [12] C. Gu, X. Ye, Q. Cao, W. Guan, C. Peng, Y. Wu, and W. Zhai, System Dynamics Modelling of Urbanization under Energy Constraints in China, Scientific Reports, vol. 10, no. 1, pp. 1-16, 2020.
- [13] M. Laimon, T. Mai, S. Goh, and T. Yusaf, Energy Sector Development: System Dynamics Analysis, Applied Sciences, vol. 10, no. 1, p. 134, 2019.
- [14] Y. Zuo, Y.L. Shi, and Y.Z. Zhang, Research on the Sustainable Development of an Economic-Energy-Environment (3E) System Based on System Dynamics (SD): A Case Study of the Beijing-Tianjin-Hebei Region in China, Sustainability, vol. 9, no. 10, p. 1727, 2017.
- [15] P.Y. Parra, B. Hare, U.F. Hutfilter, and N. Roming, Evaluating the Significance of Australia's Global Fossil Fuel Carbon Footprint, 2019.
- [16] M.O. Laimon, Sustainable Energy Sector Development Using Systems Thinking and System Dynamics Analysis, PhD dissertation, University of Southern Queensland, 2019.
- [17] M. Grida and M. Zeid, A System Dynamics-Based Model to Implement the Theory of Constraints in a Healthcare System, Simulation, vol. 95, no. 7, pp. 593-605, 2019.
- [18] M.R. Davahli, W. Karwowski, and R. Taiar, A System Dynamics Simulation Applied to Healthcare: A Systematic Review, International Journal of Environmental Research and Public Health, vol. 17, no. 16, p. 5741, 2020.
- [19] M. Shoaib and V. Ramamohan, Simulation Modeling and Analysis of Primary Health Center Operations, Simulation, p. 00375497211030931, 2020.
- [20] I. Hasan, E. Bahalkeh, and Y. Yih, Evaluating Intensive Care Unit Admission and Discharge Policies Using a Discrete Event Simulation Model, Simulation, vol. 96, no. 6, pp. 501-518, 2020.
- [21] J.A. Quizhpi Nieves and F.F. Sichiqui Velecela, Metodología y procedimientos para el desarrollo de un modelo de simulación aplicado a la industria, utilizando el enfoque de la dinámica de sistemas, Bachelor's thesis, 2019.
- [22] J. Martínez-Valderrama, J. Ibáñez, R. Gartzia, and F.J. Alcalá, Dinámica de Sistemas para comprender los procesos de desertificación, Ecosistemas, vol. 30, no. 3, p. 2191-2191, 2021.
- [23] J. Martínez-Valderrama, J. Ibáñez, R. Gartzia, and F. J. Alcalá, Dinámica de Sistemas para comprender los procesos de desertificación, Ecosistemas, vol. 30, p. 2191, 2021.
- [24] M. E. Mediavilla, S. Medina Quintana, and I. González López, Diagnóstico de sensibilidad medioambiental en estudiantes universitarios, Educativo, vol. 23, pp. 179–197, 2020.

- [25] I. L. López-Cruz, A. Ramírez-Arias, and A. Rojano-Aguilar, Análisis de sensibilidad de un modelo dinámico de crecimiento para lechugas (Lactuca sativa L.) cultivadas en invernadero, Agrociencia, vol. 38, no. 6, pp. 613–624, 2004.
- [26] L. M. Villa García, Análisis de sensibilidad aplicado a la dinámica de estructuras mediante la modificación de las propiedades inerciales, Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia, no. 70, pp. 66–77, 2014.
- [27] J. В. Sato. Análisis dedominancia mediante descomposi $ci\acute{o}n$ defuerzas detrayectoria, Disponible 2017.en línea: https://proceedings.systemdynamics.org/2017/proceed/papers/P1451.pdf (consultado el 27 de abril de 2023).
- [28] C. E. Kampmann and R. Oliva, Métodos analíticos para el análisis de dominancia estructural en dinámica de sistemas: una evaluación del estado actual de la cuestión, en Actas de la 25.<sup>a</sup> Conferencia Internacional de la Sociedad de Dinámica de Sistemas, Boston, MA, EE. UU., 29 de julio-2 de agosto de 2007.
- [29] R. Oliva, Linking structure to behavior using eigenvalue elasticity analysis, en Analytical Methods for Dynamic Modelers, MIT Press, Boston, MA, USA, 2015, pp. 207–239.
- [30] N. Forrester, Eigenvalue analysis of dominant feedback loops, en Proceedings of the Int. System Dynamics Conference, System Dynamics Society, Chestnut Hill, MA, 1983.
- [31] B.M. Keijser, J.H. Kwakkel, and E. Pruyt, How to explore and manage the future? Formal model analysis for complex issues under deep uncertainty, in Proceedings of the 30th International Conference of the System Dynamics Society, St. Gallen, Switzerland, 22-26 July 2012, System Dynamics Society.
- [32] J.J. Abram and J.G. Dyke, Structural loop analysis of complex ecological systems, Ecological Economics, vol. 154, pp. 333-342, 2018.
- [33] C.E. Kampmann and R. Oliva, Analytical methods for structural dominance analysis in system dynamics: An assessment of the current state of affairs, in Proceedings of the 25th International Conference of the System Dynamics Society, Boston, USA, 2007.
- [34] C. E. Kampmann, Ganancias de bucle de retroalimentación y comportamiento del sistema, Syst. Dyn. Rev., vol. 28, pp. 370–395, 2012.
- [35] P. Gonçalves, Modos de comportamiento, vías y trayectorias generales: análisis de vectores propios y valores propios de sistemas dinámicos, Syst. Dyn. Rev., vol. 25, pp. 35–62, 2009.
- [36] V. Gooyert, P. Goncalves, H. Herrera, C. Kampmann, F. Kapmeier, B. Kopainsky, and N. Zimmermann, System dynamics and sustainability: A research agenda for the coming decade(s), in International System Dynamics Conference, 2021, July.

- [37] M. Saleh and P. Davidsen, Extending eigenvalue analysis to nonlinear models via incorporating higher order terms of Taylor series expansion, in 25th International Systems Dynamics Conference, 2007.
- [38] R. Oliva, Structural dominance analysis of large and stochastic models, System Dynamics Review, vol. 32, no. 1, pp. 26-51, 2016.
- [39] C.E. Kampmann and R. Oliva, Loop eigenvalue elasticity analysis: three case studies, System Dynamics Review: The Journal of the System Dynamics Society, vol. 22, no. 2, pp. 141-162, 2006.
- [40] M. Saleh, R. Oliva, P. Davidsen, and C.E. Kampmann, Eigenvalue analysis of system dynamics models: Another perspective, in Proceedings of the Int. System Dynamics Conference, Neijmegen, The Netherlands, 2006, July.
- [41] E.R. González Ponzón, Herramienta computacional para un análisis formal de modelos de dinámica de sistemas bajo el método Loop Eigenvalue elasticity analysis (Leea) con soporte a modelos de gran escala, 2015.
- [42] P. Liu, B. Lin, H. Zhou, X. Wu, and J.C. Little, CO<sub>2</sub> emissions from urban buildings at the city scale: System dynamic projections and potential mitigation policies, Applied Energy, vol. 277, p. 115546, 2020.
- [43] C. Olaya, System dynamics: Engineering roots of model validation, in System Dynamics: Theory and Applications, pp. 109-117, 2020.
- [44] J.A. Quizhpi Nieves and F.F. Sichiqui Velecela, Metodología y procedimientos para el desarrollo de un modelo de simulación aplicado a la industria, utilizando el enfoque de la dinámica de sistemas, Bachelor's thesis, 2019.
- [45] J. Martínez-Valderrama, J. Ibáñez, R. Gartzia, and F.J. Alcalá, Dinámica de Sistemas para comprender los procesos de desertificación, Ecosistemas, vol. 30, no. 3, p. 2191, 2021.
- [46] H. Andrade-Sosa, I. Dyner, A. Espinosa, H. López, and R. Sotaquirá, Pensamiento sistémico: Diversidad en búsqueda de unidad, Bucaramanga: Ediciones Universidad Industrial de Santander, 2001.
- [47] Y. Un, N. Liu, J. Shang, and J. Zhang, Sustainable utilization of water resources in China: A system dynamics model, Journal of Cleaner Production, 2017.
- [48] J.D. Sterman, Business dynamics: Systems thinking and modeling for a complex world, McGraw-Hill Education, 2000.
- [49] J.M. García, Ejercicios avanzados en Dinámica de Sistemas: Vensim PLE PLUS, Juan Martín García, 2017.
- [50] I. de-Blas, L.J. Miguel, and C. de-Castro, Modelos de evaluación integrada (IAMs) aplicados al cambio climático y la transición energética, DYNA-Ingeniería e Industria, vol. 96, no. 3, 2021.
- [51] K. Ogata, Modern control engineering (5th ed.), Prentice Hall, 2009.

- [52] O. Mar Cornelio, Modelo para la toma de decisiones sobre el control de acceso a las prácticas de laboratorios de Ingeniería de Control II en un sistema de laboratorios remoto, Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas, Facultad de Ingeniería, 2019.
- [53] H. Gunduz and E. Celik, *H-norm evaluation for a transfer matrix via bisec*tion algorithm, Thermal Science, vol. 26, Spec. issue 2, pp. 745-751, 2022.
- [54] V. Ignatenko, A. Yudintsev, and D. Lyapunov, Application of state-space method for control system analysis, in 2019 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), pp. 1-5, IEEE, 2019, April.
- [55] P.R. Belanger, Control engineering: a modern approach, Oxford University Press, Inc., 1995.
- [56] F. Asadi, Entering the State-Space Model into MATLAB/Simulink Environment, in State-Space Control Systems: The MATLAB®/Simulink® Approach, pp. 1-63, Cham: Springer International Publishing, 2020.
- [57] J.M. Barrios Sánchez and R. Baeza Serrato, Design and development of an optimal control model in system dynamics through state-space representation, Applied Sciences, vol. 13, no. 12, p. 7154, 2023, MDPI.
- [58] J.M. Sánchez-Muñoz, Historias de matemáticas: Genesis y desarrollo del cálculo fraccional, Pensamiento matemático, ISSN 2174-0410, 2011.
- [59] E. Capelas de Oliveira and J.A. Tenreiro Machado, A review of definitions for fractional derivatives and integral, Mathematical Problems in Engineering, 2014, pp. 1-6, DOI: https://doi.org/10.1155/2014/238459.
- [60] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and A. Sababheh, A new definition of fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 264, pp. 65–70, 2014, DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002.
- [61] M. Caputo and F. Mainardi, A new dissipation model based on memory mechanism, Pure Appl. Geophys., vol. 91, pp. 134-147, 1971, DOI: https://doi.org/10.1007/BF00879562.
- [62] M. Caputo and M. Fabrizio, A new Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel, Progr. Fract. Differ. Appl., vol. 1, no. 2, pp. 73-85, 2015, DOI: http://dx.doi.org/10.12785/pfda/010201.
- [63] A. Atangana and D. Baleanu, New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model, Thermal Science, vol. 20, no. 2, pp. 763-769, 2016.
- [64] H. Schiesselt, R. Metzlert, A. Blument, and T.F. Nonnemacher, Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions, Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 28, pp. 6567-4584, 1995.
- [65] F.C. Meral, T.J. Royston, T.J. Magin, Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study, Communications in Nonlinear Scien-

*ce and Numerical Simulation*, vol. 15, no. 4, pp. 939-945, 2010, DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.05.004.

- [66] W. Chen, H. Sun, X. Zhang, and K. Dean, Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives, Computers Mathematics with Applications, vol. 59, no. 5, pp. 1754-1758, 2010, DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.020.
- [67] M. Guia, F. Gomez, and J. Rosales, Analysis on the time and frequency domain for the RC electric circuit of fractional order, Open Physics, vol. 11, no. 10, pp. 1366-1371, 2013, DOI: 10.2478/s11534-013-0236-y.
- [68] L. Martinez-Jimenez, J.M. Cruz-Duarte, J.J. Rosales, and I. Cruz-Aceves, Enhancement of Vessels in Coronary Angiograms Using a Hessian Matrix Based on Grunwald-Letnikov Fractional Derivative, in Proceedings of the 2018 8th International Conference on Biomedical Engineering and Technology (ICBET '18), Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, pp. 51–54, 2018, DOI: https://doi.org/10.1145/3208955.3208971.
- [69] L. Martínez-Jiménez, P. López-Lara, A. Flore-Balderas, and J.M. López-Hernández, Automatic blood vessel detection using fractional Hessian matrices, ECORFAN Journal-Taiwan, vol. 6, no. 11, pp. 12-19, 2022, DOI: 10.35429/EJT.2022.11.6.12.19.
- [70] S. Sengupta, U. Ghosh, S. Sarkar, and S. Das, Prediction of Ventricular Hypertrophy of Heart Using Fractional Calculus, Journal of Applied Nonlinear Dynamics, vol. 9, no. 2, pp. 287-305, 2020, DOI: 10.5890/JAND.2020.06.010.
- [71] G. Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène: Seconde note, Acta Math., vol. 24, pp. 183–204, 1903.
- [72] U.W. Humphries and F.A. Rihan, Role of Vaccines in Controlling the Spread of COVID-19: A Fractional-Order Model, Vaccines, vol. 11, p. 145, 2023, DOI: https://doi.org/10.3390/vaccines11010145.
- [73] L. Carvalho de Barros, M. Martins Lopes, F. Santo Pedro, E. Esmi, J.P. Carvalho dos Santos, and D.E. Sánchez, *The memory effect on fractional calculus: an application in the spread of COVID-19, Computational and Applied Mathematics*, vol. 40, no. 72, 2021, DOI: https://doi.org/10.1007/s40314-021-01456-z.
- [74] M. Caputo and F. Mainardi, A new dissipation model based on memory mechanism, Pure Appl. Geophys., vol. 91, pp. 134-147, 1971, DOI: https://doi.org/10.1007/BF00879562.
- [75] M.A. Horani, R. Khalil, and T. Abdeljawad, Conformable fractional semigroups of operators, arXiv preprint arXiv:1502.06014, 2014.
- Al Horani, [76] R. Khalil. М. А. Yousef. and М. Sababheh. A definition of fractional derivative, Journal ofComputationew

*nal and Applied Mathematics*, vol. 264, pp. 65-70, 2014, DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.00210.1016/j.cam.2014.01.002.

- [77] Y. Yu and Y. Yin, Fractal operators and convergence analysis in fractional viscoelastic theory, Fractal Fract., vol. 8, no. 4, p. 200, 2022, DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract804020010.3390/fractalfract8040200.
- [78] J.J. Rosales and L. Toledo-Sesma, Anisotropic fractional cosmology: Kessence theory, Fractal and Fractional, vol. 7, no. 11, p. 814, 2023, DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract711081410.3390/fractalfract7110814.
- [79] A. Adervani, S.R. Saadati, D. O'Regan, and F.S. Alshammari, Uncertain asymptotic stability analysis of a fractional-order system with numerical aspects, Mathematics, vol. 12, no. 6, p. 904, 2022, DOI: https://doi.org/10.3390/math1206090410.3390/math12060904.
- [80] T. Abdeljawad, On conformable fractional calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 279, pp. 57-66, 2015, DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.01610.1016/j.cam.2014.10.016. bibitemstatista2024 Statista, Capacidad instalada deenergía *so*desde2013 2023,Statista, 2024.lar en México hasta Enlace. https://es.statista.com/estadisticas/1238183/capacidad-instalada-energiasolar-mexico/https://es.statista.com/estadisticas/1238183/capacidadinstalada-energia-solar-mexico/.
- [81] Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), *Estadísticas de energía*, *INEGI*, 2024. [Enlace]. https://www.inegi.org.mx/https://www.inegi.org.mx/.
- [82] CEMAE, Energía Solar en México, CEMAE, 2024. [Enlace]. https://www.cemaer.org/energia-solar-enmexico/https://www.cemaer.org/energia-solar-en-mexico/.

# 6.1. Anexo: Carátulas de los Papers Publicados y en Proceso de Aceptación

A continuación se muestran las carátulas de mis papers publicados y los que están en proceso de aceptación.





## Article Design and Development of a Mathematical Model for an Industrial Process, in a System Dynamics Environment

Jorge Manuel Barrios Sánchez, Roberto Baeza Serrato \* and Marco Bianchetti

Departamento de Estudios Multidisciplinarios, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, Yuriria 38944, Guanajuato, Mexico

\* Correspondence: r.baeza@ugto.mx

Abstract: This research proposes a methodology based on control engineering, transforming the simulation model of system dynamics into a mathematical model expressed as a system transfer function. The differential equations of a time domain present in the Forrester diagram are transformed into a frequency domain based on the Laplace transform. The conventional control engineering technique is used to present and reduce the dynamic system in a block diagram as a mechanism for determining the structure of the system. The direct path equation and the feedback equation are determined to obtain mathematical models that explain the trajectory of the behavior of each state variable through a transfer function in response to the different inputs of the system. The research proposal is based on presenting an alternative of analytical validation for more robust decision-making to systems dynamics models, based on the explanation of the system structure through a transfer function and its analysis of stability and external controllability for the system dynamics model under study. The results are visually analyzed in a root diagram.

**Keywords:** system dynamic; Forrester; block diagram; differential equations; transfer function; system stability



Citation: Barrios Sánchez, J.M.; Baeza Serrato, R.; Bianchetti, M. Design and Development of a Mathematical Model for an Industrial Process, in a System Dynamics Environment. *Appl. Sci.* 2022, *12*, 9855. https:// doi.org/10.3390/app12199855

Academic Editor: Jan Awrejcewicz

Received: 22 August 2022 Accepted: 27 September 2022 Published: 30 September 2022

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



**Copyright:** © 2022 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

#### 1. Introduction

System Dynamics (SD) is a technique for constructing simulation models, at the service of a fundamental idea; the structure of causal relations between the elements of a system constitutes the main cause of its behavior. The SD further assumes that such a relationship structure forms a network of re-feeding loops that includes non-linear relationships and delays. The main result of a model is to obtain the time trajectories of all its variables for the simulation period that has been defined [1]. SD is based on the use of two types of diagrams, Causal Diagrams and Forrester Diagrams, which have their origin in the General Theory of Systems and are in fact like the two sides of the same coin. The Causal Diagram is in general a preliminary step to the construction of a Forrester Diagram, which serves to simulate the model in the PC, allows us to verify the coherence of our hypotheses, analyze the behavior of the system, and finally simulate different policies, so that the results of the model help to better solve the problem we are analyzing [2].

SD is responsible for studying the feedback of the system data and the means by which the models are used for the establishment and approach of problems, which are carried out with the purpose of showing the structure of the organization and observing how these variables interact, to simulate and model complex problems [3]. Much of the art of SD modeling involves discovering and representing feedback processes, which, along with stock structures, flow, auxiliary variables, time delays and nonlinearities, determine the dynamics of a system. You can imagine that there is an immense range of different feedback processes and other structures to master before you can understand the dynamics of complex systems. In fact, more complex behaviors are usually derived from the interactions (feedback) between system components, not from the complexity of the components





Jorge Manuel Barrios Sánchez 💿 and Roberto Baeza Serrato \*

Department of Multidisciplinary Studies, Engineering Division, Campus Irapuato-Salamanca, University of Guanajuato, Yuriria, Guanajuato 38940, Mexico; jm.barriossanchez@ugto.mx \* Correspondence: r.baeza@ugto.mx

Abstract: Control engineering and state-space representation are valuable tools in the analysis and design of dynamic systems. In this research, a methodology is proposed that uses these approaches to transform a system-dynamics simulation model into a mathematical model. This is achieved by expressing input, output and state variables as input, output and state vectors, respectively, allowing the representation of the model in matrix form. The resulting model is linear and time-invariant, facilitating its analysis and design. Through the use of this methodology, the system transfer matrix is obtained, which allows the analysis and design of the optimal control of the simulation model. The Ackermann gain-control technique is used to determine the optimal control of the system, which results in a shorter settlement time. This research proposal seeks to mathematically strengthen simulation models. This would allow more informed and effective decisions in the implementation of dynamic systems.

**Keywords:** system dynamic; Forrester; Ackermann; differential equations; transfer matrix; optimal; control; state space



Citation: Barrios Sánchez, J.M.; Baeza Serrato, R. Design and Development of an Optimal Control Model in System Dynamics through State-Space Representation. *Appl. Sci.* 2023, *13*, 7154. https://doi.org/ 10.3390/app13127154

Academic Editors: Giuseppe Lacidogna and Francesca Scargiali

Received: 28 April 2023 Revised: 24 May 2023 Accepted: 13 June 2023 Published: 15 June 2023

**Copyright:** © 2023 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

#### 1. Introduction

System dynamics (SD) is a tool based on simulation models that allows us to address complex situations [1] and solve specific problems. It was created in the 1950s and was called industrial dynamics, but over time it has been adapted for application to different problems [2–8]. SD finds its main applications in complex and undefined environments, where human decisions intervene [9].

SD is a modeling and analysis tool used to understand how systems change over time. This discipline studies how components of a system interact and influence each other, and how these interactions result in dynamic behavior over time. It is applicable in a wide variety of fields, including engineering, economics, ecology, psychology, politics and business management, among others. In all these fields, systems can be complex and consist of multiple variables interacting nonlinearly, making their behavior difficult to predict and control [10].

SD is a systematic methodology for modeling and analyzing complex systems and for understanding how interactions between their components lead to dynamic behavior. Through the use of simulation models, SD allows identifying long-term patterns and trends, as well as understanding how different actions and decisions can affect the behavior of a system [11]. Sensitivity analysis is a technique used in various fields, such as economics, engineering and science, to evaluate the impact of changes in the values of variables in a model on the results obtained. Sensitivity analysis can provide valuable information [12].

In general, sensitivity analysis is used as a validation tool in system-dynamics models. This technique assesses the impact of changes in the values of the variables of the model on the results obtained. However, by applying this technique to Forrester models, certain





## Article Fractional Calculus to Analyze Efficiency Behavior in a Balancing Loop in a System Dynamics Environment

Jorge Manuel Barrios-Sánchez 💿, Roberto Baeza-Serrato \* 💿 and Leonardo Martínez-Jiménez 💿

Departamento de Estudios Multidisciplinarios, División de Ingeniería, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato, Guanajuato 38940, Mexico; jm.barriossanchez@ugto.mx (J.M.B.-S.); leonardomj@ugto.mx (L.M.-J.) \* Correspondence: r.baeza@ugto.mx

Abstract: This research project focuses on developing a mathematical model that allows us to understand the behavior of the balancing loops in system dynamics in greater detail and precision. Currently, simulations give us an understanding of the behavior of these loops, but under the premise of an ideal scenario. In practice, however, accurate models often operate with varying efficiencies due to various irregularities and particularities. This discrepancy is the primary motivation behind our research proposal, which seeks to provide a more realistic understanding of the behavior of the loops, including their different levels of efficiency. To achieve this goal, we propose the introduction of fractional calculus in system dynamics models, focusing specifically on the balancing loops. This innovative approach offers a new perspective on the state of the art, offering new possibilities for understanding and optimizing complex systems.

Keywords: fractional calculus; system dynamics; OEE; Caputo; efficiency; balancing loops



Citation: Barrios-Sánchez, J.M.; Baeza-Serrato, R.; Martínez-Jiménez, L. Fractional Calculus to Analyze Efficiency Behavior in a Balancing Loop in a System Dynamics Environment. *Fractal Fract.* 2024, *8*, 212. https://doi.org/10.3390/ fractalfract8040212

Academic Editors: Ming Li and Junyu He

Received: 1 March 2024 Revised: 1 April 2024 Accepted: 2 April 2024 Published: 4 April 2024



**Copyright:** © 2024 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https:// creativecommons.org/licenses/by/ 4.0/).

### 1. Introduction

System dynamics (SD), as a modeling and simulation discipline, has emerged as a fundamental tool in solving complex and dynamic problems across various fields from business management to environmental science. These models, grounded in systems theory and computer simulation, empower researchers and professionals to comprehend and analyze the behavior of dynamic systems over time [1]. The primary objective of this technique is to capture causal relationships and mechanisms underlying observed phenomena, providing an invaluable perspective for decision-making and addressing complex challenges in a world characterized by interconnection and interdependence [2].

System dynamics (SD) emerges as a rigorous and systematic methodology designed for the modeling and analysis of complex systems, enabling a profound understanding of how interactions among their components result in dynamic behavior. Through simulation models, this discipline facilitates the identification of long-term patterns and trends and assesses how various actions and decisions can impact systemic behavior [3]. In this context, sensitivity analysis emerges as a highly beneficial tool employed across various disciplines from economics to engineering and science. Its purpose is to assess how changes in the values of model variables influence the obtained results, providing valuable information crucial for making informed decisions [4]. Sensitivity analysis makes it possible to identify the relatively small set of parameters whose values significantly alter the model's behavior or responses to different policies. In this way, parameters worth calculating more accurately are discovered [5].

Numerous highly relevant applications have been developed in various fields of knowledge, such as health, the environment, education, and agriculture, that leverage the sensitivity analysis technique in SD models. These applications have yielded positive results in understanding behaviors and obtaining models that meet the desired expectations [6–13].

Undoubtedly, SD models pose significant challenges. Selecting the appropriate parameters for a sensitivity analysis is intricate and often relies on subjective judgments. This



# Analysis of trend patterns for the historical evolution of energy intensities

Jorge Manuel Barrios-Sánchez<sup>a,\*</sup>, Ignacio de Blas<sup>b</sup>, Tommaso Brazzini<sup>b</sup>, Luis Javier Miguel Gonzalez<sup>b</sup>

 <sup>a</sup>Departamento de Estudios Multidisciplinarios, División de Ingeniería, Campus Irapuato-Salamanca, Guanajuato, 38940, , Mexico
 <sup>b</sup>Systems Engineering and Automatic Control, Escuela de Ingenierías Industriales, Paseo del Cauce s/n, Valladolid, 47011, Castilla y León, Spain

### Abstract

This study analyses trends in energy intensity across several countries using energy consumption and GDP data, with the aim of identifying patterns of energy efficiency in different economic sectors. Energy intensity is defined as energy consumption per unit of GDP (MJ/USD), a common indicator of efficiency. To ensure global representation, countries with at least 15 years of available data from 1990 to 2021 were selected.

The methodology includes the use of the K-means algorithm to group countries on the basis of similar energy intensity patterns, allowing them to be classified into homogeneous clusters. The elbow method is used to determine the optimal number of clusters, maximising homogeneity within each group. Once clusters are formed, trend models (exponential and quadratic) are fitted to analyse how energy intensity evolves over time.

The exponential model is justified as many economies show an accelerated decline in energy intensity in the early stages, followed by a stabilisation. In contrast, the quadratic model is useful when energy intensity shows non-linear changes due to periods of economic growth or recession. The accuracy of these models is assessed using the Mean Absolute Percentage Error (MAPE), a standard metric in energy forecasting studies.

This approach allows the identification of global efficiency patterns and provides insight into how countries have improved their energy use relative

Preprint submitted to Energy Policy

January 21, 2025

<sup>\*</sup>Corresponding author.

Email address: jm.barriossanchez@ugto.mx (Jorge Manuel Barrios-Sánchez)



https://www.aimspress.com/journal/energy

AIMS Energy, (): DOI: Received: Revised: Accepted: Published:

### Analysis of Installed Photovoltaic Capacity in Mexico: A Systems Dynamics and Conformable Fractional Calculus Approach

Jorge Manuel Barrios-Sánchez<sup>1</sup>, Roberto Baeza-Serrato<sup>1,\*</sup>and Leonardo Martínez-Jiménez<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad de Guanajuato, Campus Irapuato-Salamanca, Departamento de Estudios Multidisciplinarios, Guanajuato, México

\* Correspondence: Roberto Baeza-Serrato (r.baeza@ugto.mx)

**Abstract:** This study develops a new estimation method within the System Dynamics (SD) framework, incorporating fractional calculus to conduct a sensitivity analysis on photovoltaic capacity growth in Mexico. The primary goal is to address the need to model energy transitions accurately and realistically, considering Mexico's advantages in renewable energy, particularly solar power. The study explores the use of fractional calculus to improve the precision of simulations and provide valuable insights into the growth of photovoltaic installations under different market conditions and policies.

The methodology is structured in three phases. Initially, an exponential growth model is developed to simulate the early stage of photovoltaic capacity expansion, incorporating key variables such as public investment, subsidies, and the effects of rural loss on the adoption of renewable technologies. In the second phase, a sigmoidal growth model is applied to represent more realistic capacity limits, considering market saturation and structural limitations. The differential equations governing the growth were solved using the conformable derivative, which captures the complexity of the system's dynamics, including memory effects.

The sensitivity analysis performed on both the exponential and sigmoidal models reveals that the fractional parameter  $\alpha = 0.8652$  provides the best fit to the actual data from 2015 to 2023, reducing the average error to 16.52%. Projections for the period from 2023 to 2030 suggest that Mexico's installed photovoltaic capacity could range between 23,000 and 25,000 MW, with  $\alpha$  values varying between 0.8 and 1, aligning with expected market dynamics and national energy goals.

This study emphasizes the importance of using System Dynamics combined with fractional calculus as an innovative tool for energy planning in Mexico. The ability to simulate multiple scenarios and perform sensitivity analysis is crucial for optimizing energy resources, designing policies that promote renewable technologies, and ensuring a successful transition to a sustainable energy future.

**Keywords:** renewable technologies; solar irradiance; sensitivity analysis; system dynamics; fractional calculus; installed photovoltaic capacity