

ISBN: 978-607-441-381-6



9 786074 413816

ASPECTOS BÁSICOS DEL MÉTODO DE RIGIDECES

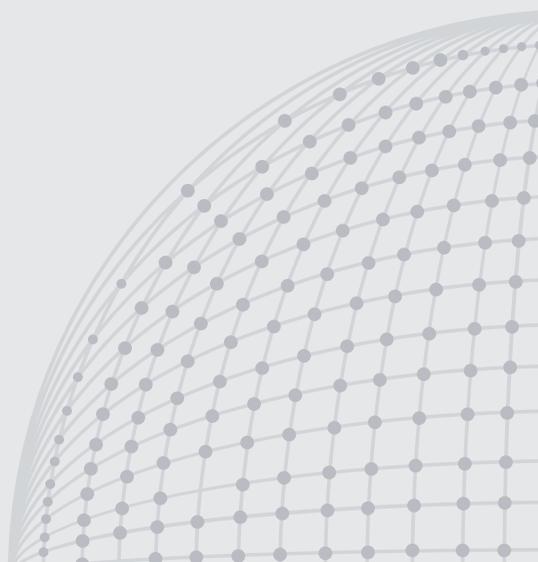


Universidad
de Guanajuato

› Alejandro Hernández Martínez

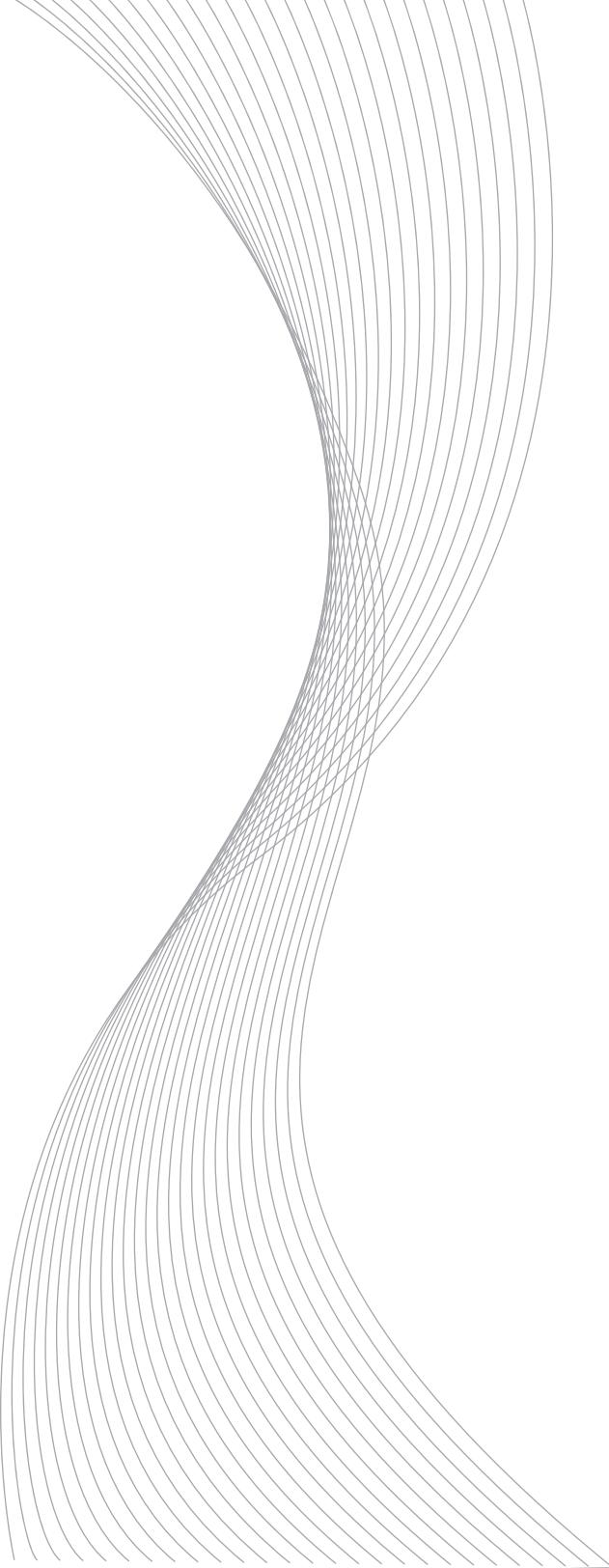
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL
División de Ingenierías

Universidad de Guanajuato
Campus Guanajuato



1 INTRODUCCIÓN	07
1.1 Generalidades	07
1.2 Conceptos preliminares	07
1.2.1 Nodo	07
1.2.2 Barra	08
1.2.3 Sistemas de Referencia	08
1.2.4 Grado de Libertad	08
1.2.5 Rigidez	10
1.3 Matriz de Rigidez de una estructura	11
1.3.1 Propiedades de la Matriz de Rigidez	11
2 ARMADURAS PLANAS	15
2.1 Determinación de la matriz de rigidez	15
2.2 Rotación del sistema local al sistema global	20
2.3 Ejemplos de aplicación	24
2.3.1 Ensamble de la matriz de rigidez de la estructura - Opción A	24
2.3.2 Ensamble de la matriz de rigidez de la estructura - Opción B	28
2.3.3 Obtención de las fuerzas en los elementos	33
2.3.4 Análisis de una armadura de cubierta a dos aguas	40
3 ARMADURAS TRIDIMENSIONALES	54
3.1 Determinación de la matriz de rigidez	54
3.2 Ejemplos de Aplicación	56
3.2.1 Ejemplo 1 – Armadura en el Espacio de Tres Elementos Tipo Trípode	56
3.2.2 Ejemplo 2 – Armadura Tridimensional	61
4 VIGAS CONTINUAS	75
1.1 Determinación de la matriz de rigidez de un elemento viga	75
1.2 Ejemplos de aplicación	83
1.2.1 Ejemplo 1 – Viga continua considerando la participación de la fuerza cortante en los términos de rigidez	83
1.2.2 Ejemplo 2 – Viga Continua sin Considerar el Efecto del Cortante	91
1.2.3 Ejemplo 3	95
5 MARCOS PLANOS	102
5.1 Determinación de la matriz de rigidez	102
5.2 Rotación del sistema local a global	103
5.3 Ejemplos de aplicación	110
5.2.1 Ejemplo 1	110
5.2.2 Ejemplo 2	118
5.2.3 Ejemplo 3	131





INTRODUCCIÓN

1

1 Introducción

1.1 Generalidades

El método de rigideces es un método matricial de análisis general de estructuras que pueden modelarse con elementos barra, como es el caso de las armaduras, vigas y marcos. Es un método que resulta fácilmente programable, razón por la cual es de uso común de diversos paquetes de software comercial.

En términos generales el método de rigideces consiste en establecer la relación que hay entre las fuerzas aplicadas a una estructura y los desplazamientos que se presentan debido a la aplicación de dichas fuerzas, cumpliendo a la vez el equilibrio y la compatibilidad que toda estructura debe tener. A partir de tal relación se intenta conocer los desplazamientos en los nodos de la estructura, con los cuales se infiere los elementos mecánicos en las barras que conforman el sistema estructural. Como en un paso preliminar para conocer los elementos mecánicos en las barras se requiere conocer primeramente los desplazamientos de los nodos, al método de rigideces también se le conoce como el método de los desplazamientos.

1.2 Conceptos preliminares

1.2.1 NODO

Los *nodos* son puntos que se utilizan para definir el inicio y final de un elemento barra. Adicionalmente, dentro de la estructura en general, un nodo puede servir de punto de unión entre dos o más barras. En la Figura 1.1 los nodos de una barra se identifican con i y j para definir los nodos inicial y final de la barra respectivamente. Resulta de uso común que para la fácil identificación de los nodos, su denominación se encierre en un círculo, tal y como se muestra en la Figura 1.1.

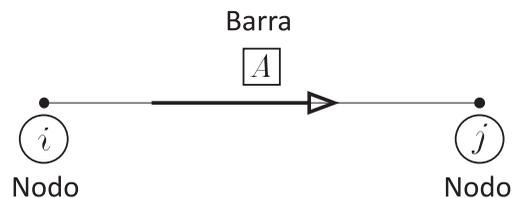


Figura 1.1 Barra y nodos que la definen

1.2.2 BARRA

Los elementos barra representan los elementos estructurales con las cuales se conforman una estructura, como los que pueden verse en las armaduras o en las vigas y columnas de los edificios. Para que un elemento estructural pueda ser considerado como una barra, generalmente la dimensión longitudinal (distancia entre los nodos i y j) es generalmente mucho mayor a cualquiera de las dimensiones de su sección transversal. Para definir una barra dentro del método de rigidez se requieren de dos nodos que indiquen el punto inicial y final de la misma. La dirección de la barra se indica generalmente con una flecha, tal y como se muestra en la Figura 1.1, donde el nodo inicial está definido por el nodo i y el nodo final por el nodo j . Para identificar a las barras, resulta común que la denominación empleada se encierre en un rectángulo.

Para la nomenclatura de nodos y barras podría emplearse cualquier nombre o caracter alfanumérico, sin embargo, resulta práctico emplear solamente números. Por lo cual se dará prioridad a esta forma de nomenclatura para barras y nodos dentro de estas notas.

1.2.3 SISTEMAS DE REFERENCIA

En general, para la aplicación del método de rigidez se emplean dos sistemas de referencia, uno denominado *sistema local* (x, y, z) referenciado a cada una de las barras, y otro llamado *sistema global* (X, Y, Z) que se utiliza para referenciar la estructura completa. Ejemplo de los sistemas local y global se muestran en la Figura 1.2.

Es importante señalar que en el sistema local, el eje x debe de coincidir con el eje longitudinal de la barra con dirección del nodo inicial al nodo final a través del centroide de la sección transversal. Los ejes y y z se establecen considerando un sistema coordenado derecho, tal y como se ilustra en la Figura 1.2. La determinación del origen y orientación del sistema global es arbitrario, y en general se define de acuerdo a la conveniencia.

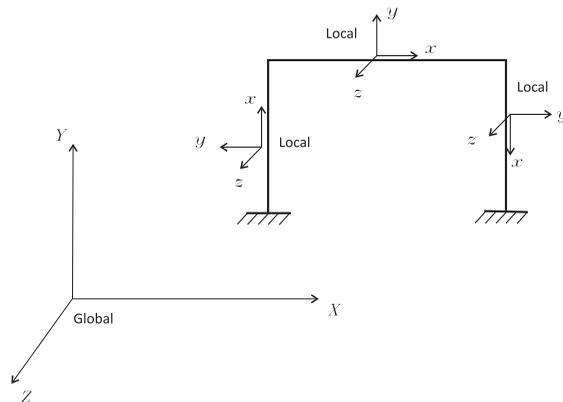


Figura 1.2 Sistemas de referencia local y global

1.2.4 GRADO DE LIBERTAD

Los *grados de libertad* (GDL) son cantidades independientes que definen la configuración de una estructura. De una manera más general, son las variables independientes que definen la variación espacial de un campo (desplazamientos, temperatura, velocidades, etc.).

En el caso del método de rigideces, el campo es de desplazamientos, el cual puede ser en 1D, 2D o 3D; los cuales se localizan en los *puntos nodales*. Por tanto, para el caso del método de rigideces el número de GDL se asocia a las posibilidades de movimiento (lineal o angular) que un nodo, barra o estructura puede presentar. Si se trabaja en un espacio tridimensional se pueden tener hasta seis GDL o componentes de desplazamiento, tres lineales y tres angulares. Tales componentes se muestran esquemáticamente en la Figura 1.3.

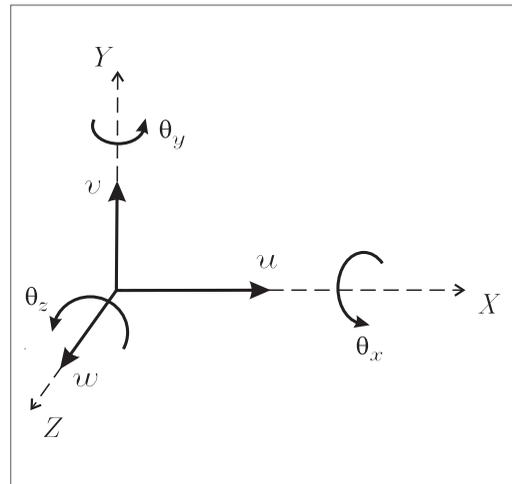


Figura 1.3 Componentes del vector de desplazamientos $\{D\}$ en un campo tridimensional

La representación en forma matricial del vector de desplazamientos $\{D\}$ se puede hacer de la siguiente forma:

Dónde

u, v, w = Desplazamientos lineales con respecto a X, Y y Z respectivamente

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ = Desplazamientos angulares alrededor de los ejes X, Y y Z

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

Asociados a los GDL de desplazamiento, se presentan seis componentes de fuerza como se muestra en la Figura 1.4. La representación matricial del vector de fuerzas $\{F\}$ se muestra en la ecuación (1.2)

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

En la aplicación del método de rigidez en estructuras suele ser común el “eliminar” algunos GDL por facilidad de análisis, al considerar que bajo ciertas condiciones, la contribución de los elementos mecánicos asociados no presentan magnitudes significativas.

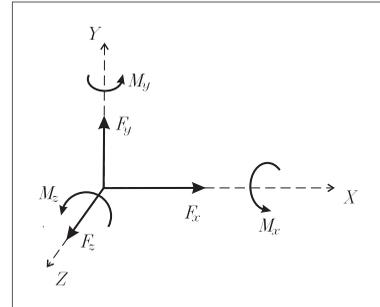


Figura 1.4 Componentes del vector de fuerzas $\{F\}$ en un espacio tridimensional.

1.2.5 RIGIDEZ

Dentro del análisis lineal donde las fuerzas son proporcionales a los desplazamientos, dicha proporcionalidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$\{F\} \sim \{D\} \quad (1.3)$$

Para convertir (1.3) en una igualdad se debe emplear una constante de proporcionalidad, en este caso una matriz $[K]$ denominada matriz de rigidez, haciendo que (1.3) pueda expresarse como igualdad de la siguiente manera:

$$\{F\} = [K]\{D\} \quad (1.4)$$

La *rigidez* se define como la “magnitud de la fuerza requerida para producir un desplazamiento unitario”. En la definición anterior *desplazamiento* se refiere a cualquier componente del vector $\{D\}$ que sea de interés. En consecuencia, dependiendo de los GDL considerados se pueden establecer términos de rigidez axiales, cortantes, flexionantes o de torsión. El cómo se obtienen dichos términos de rigidez y la forma de establecer la relación fuerza–desplazamiento definida mediante la ecuación (1.4) se verá en las secciones siguientes.

Para obtener los términos de rigidez, a una barra se le imponen desplazamiento unitario en algunos de sus grados de libertad nodales, los términos de rigidez se determinan al establecer el equilibrio de la barra mediante las condiciones de continuidad y de frontera.

1.3 Matriz de Rigidez de una Estructura

Una matriz de rigidez $[K]$ de una estructura es un arreglo numérico cuadrado que al premultiplicar al vector de desplazamientos nodales $\{D\}$ conduce a las fuerzas correspondientes, tal y como se define en (1.4). La palabra *correspondiente* indica que son cantidades de dos tipos de variables diferentes, valuadas en el mismo punto y con la misma dirección (ver Figuras 1.3 y 1.4).

Como se mostrará más adelante, una forma conveniente de obtener la matriz de rigidez de la estructura $[K]$, por ser fácil de implementar en un programa de cómputo, es a partir de la matriz de rigidez $[k]$ de cada una de las barras que conforman la estructura. De manera similar, el vector de fuerzas $\{F\}$ de la estructura se obtiene a partir del *ensamble* de los vectores de fuerzas nodales $\{f\}$ de cada una de las barras.

1.3.1 PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

La matriz de rigidez de la estructura $[K]$, al igual que otras matrices de otro tipo de problemas, tiene varias propiedades características, de las cuales a continuación se describen las principales con referencia a problemas de mecánica estructural.

■ **DEFINIDA POSITIVA.** Esto se debe al hecho de que la aplicación de una fuerza en la dirección del GDL i necesariamente conduce a un *desplazamiento correspondiente* en la misma dirección de aplicación de la carga.

■ **SIMÉTRICA.** Solamente para el caso de problemas lineales donde las fuerzas son proporcionales a las deformaciones, la matriz de rigidez es simétrica. Esta propiedad se puede comprobar aplicando el *teorema de Betti–Maxwell*, el cual establece que si dos conjuntos de cargas actúan sobre una estructura elástica–lineal, el trabajo realizado por el primer conjunto de cargas actuando sobre los desplazamientos ocasionados por el segundo conjunto de cargas, es igual al trabajo realizado por el segundo en los desplazamientos causados por el primero.

■ **DISPERSA.** Es decir, una gran cantidad de elementos de la matriz de rigidez de la estructura $[K]$ contendrá valores nulos (o iguales a cero). Por ejemplo, si los grados de libertad p y q no están conectados por una barra, los elementos k_{pq} y k_{qp} resultarán nulos. Esta característica es notable sobre todo en estructuras medianas o grandes, en estructuras con unos pocos GDL es a veces imperceptible.

■ **SINGULAR.** La matriz resulta singular (no tiene una solución única) cuando el sistema estructural es inestable, ya sea porque (a) la estructura no tiene apoyos, (b) sus apoyos son inadecuados o (c) los GDL seleccionados para análisis no son adecuados con el tipo de estructura a analizar. En el primer caso (sin ningún apoyo) no es posible identificar un vector $\{D\}$ con el cual la estructura se deforme. Esto se ilustra en la Figura 1.5 donde la armadura puede adoptar *tres movimientos de cuerpo rígido* independientes: desplazamiento vertical, desplazamiento horizontal y rotación. En el segundo caso, no se presentan movimientos de cuerpo rígido en toda la estructura, solamente en parte de ella, como se ejemplifica en la Figura 1.6, donde la articulación central que una la armadura permite que se forme un mecanismo. En el tercer caso mostrado en la Figura 1.7 los GDL de rotación (asociado al momento flexionante) no se considera en la solución de la estructura, lo cual la hace inestable.

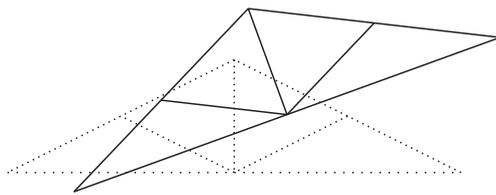


Figura 1.5 Singularidad de la matriz de rigidez por falta de apoyos (movimiento de cuerpo, rígido horizontal, vertical y rotacional)

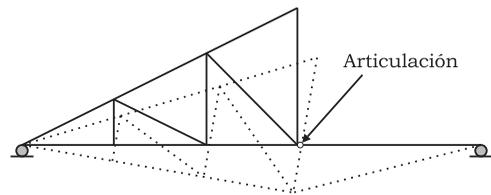


Figura 1.6 Singularidad de la matriz de rigidez por apoyos inadecuados.

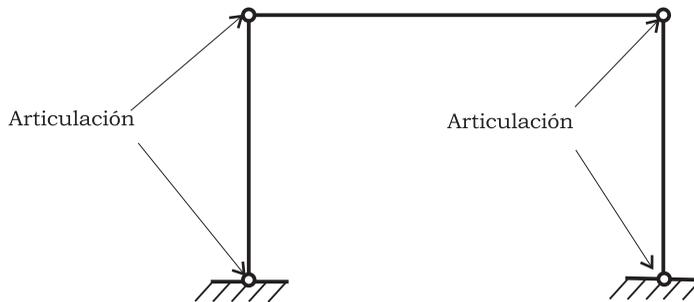
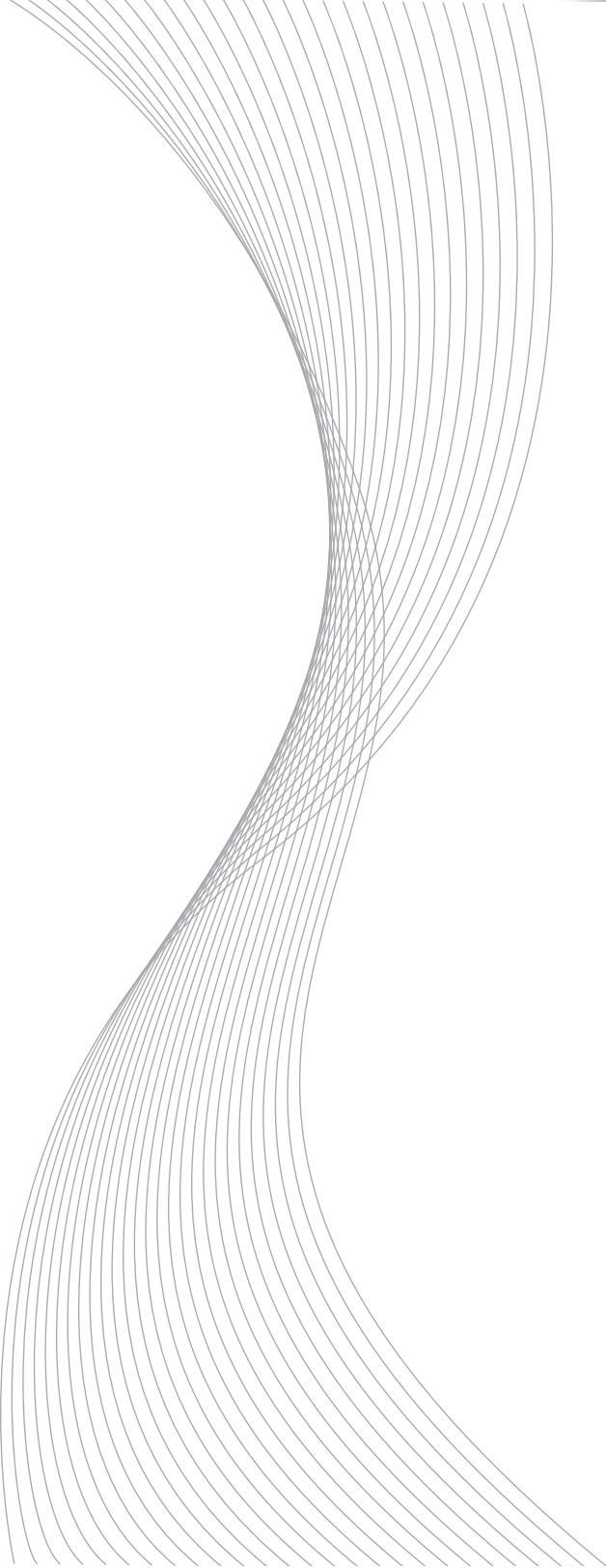


Figura 1.7 Singularidad de la matriz por GDL inadecuados.



ARMADURAS
PLANAS

2

2 Armaduras planas.

2.1 Determinación de la matriz de rigidez.

Una armadura se compone de elementos barra las cuales están unidas por medio de pasadores, es decir, solamente pueden transmitir carga axial, por tal motivo se supone solamente cargadas en los nodos como se muestra en la Figura 2.1.

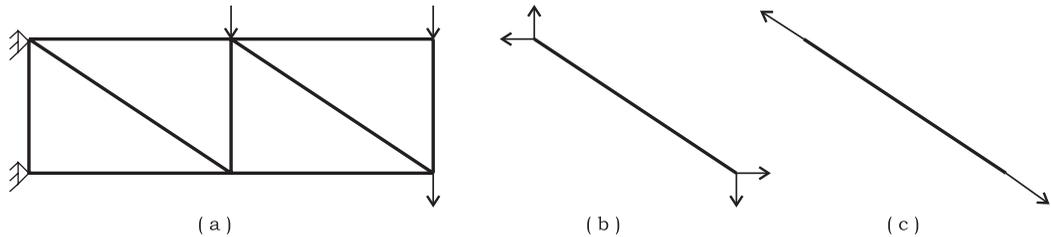


Figura 2.1 (a) Armadura sujeta a fuerzas externas (b) Fuerzas actuantes en elementos aislado (c) Resultante de las fuerzas actuando en el elemento.

La rigidez axial de una barra se determina a partir de la relación que existe entre los desplazamientos que sufren los nodos y las fuerzas que mantienen el equilibrio en la barra. Esta relación de acuerdo con la mecánica de sólidos está dada por:

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA}$$

(2.1)

Dónde:

N = Fuerza normal actuante en la barra.

A = Área de la sección transversal.

E = Módulo de elasticidad del material de la barra.

Tomando como referencia la barra que se muestra en la Figura 2.2 y aplicando un desplazamiento unitario en el nodo i en la dirección x , la fuerza requerida para que se presente un desplazamiento unitario en el nodo i se denota como f_i . Para que la barra se mantenga en equilibrio, en el nodo j debe actuar otra fuerza identificada como f_j como se muestra en la Figura 2.3.

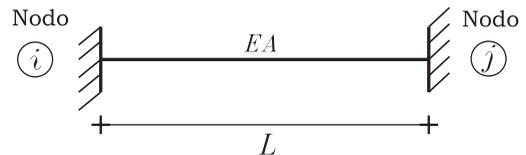


Figura 2.2 Barra doblemente empotrada

Al igual que el desplazamiento unitario en el nodo i , las fuerzas se indican en el sentido positivo respecto al eje x , en caso de que las fuerzas actúen en sentido opuesto, los valores obtenidos tendrán signo negativo.

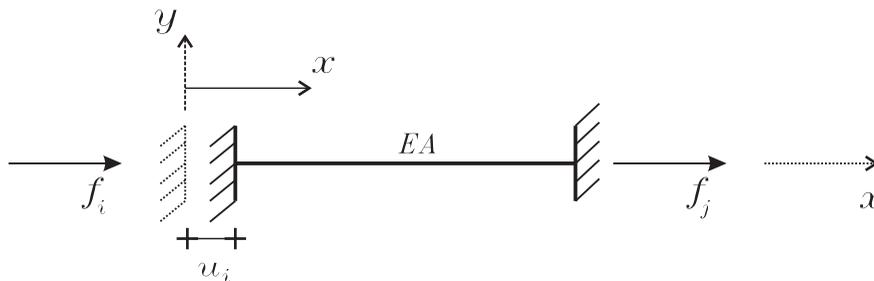


Figura 2.3 Barra con desplazamiento unitario en el nodo i

<p>De la Figura 2.3 puede verse que a una distancia x, para que se presente el equilibrio se debe tener:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <p>(2.2) $N = -f_i$</p> </div>	<p>Substituyendo (2.2) en (2.1) se obtiene:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\frac{du}{dx} = -\frac{f_i}{EA}$ </div>	<p>Integrando ambos lados de la expresión anterior se tiene:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <p>(2.3) $u = \frac{f_i}{EA}x + C$</p> </div>
--	---	---

En la Figura 2.3 puede verse que en los nodos se tienen las siguientes condiciones de frontera.

1. Para $x = 0 \Rightarrow u = u_i = 1$
2. Para $x = L \Rightarrow u = u_j = 0$

<p>Substituyendo la primera condición en (2.3)</p> $1 = \frac{f_i}{EA}(0) + C$ <p>de donde puede deducirse que $C = 1$</p>	<p>Substituyendo la segunda condición de frontera en (2.3) y considerado que $C = 1$</p> $0 = \frac{f_i}{EA}L + 1$	<p>Despejando f_i de la expresión anterior</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <p>(2.4) $f_i = \frac{EA}{L}$</p> </div>
---	---	---

Para que se cumpla el equilibrio en la barra, las fuerzas deben estar en equilibrio, es decir $\sum f = 0$ y de acuerdo a las fuerzas que se muestran en la Figura 2.3, se debe cumplir con

$$f_i + f_j = 0 \qquad f_j = -\frac{EA}{L} \qquad (2.5)$$

De esta forma, las fuerzas necesarias para que el desplazamiento del nodo i sea unitario ($u_i=1$) se muestran de forma esquemática en la



Figura 2.4 Fuerzas generadas por el desplazamiento unitario en el nodo i

De manera análoga, si se impone un desplazamiento unitario en el nodo j ($u_j = 1$), las fuerzas que se generan en los extremos de la barra serían las mostradas en la Figura 2.5



Figura 2.5 Fuerzas generadas por el desplazamiento unitario en el nodo j

Las fuerzas en cada extremo de la barra debidas al desplazamiento unitario en el nodo j se expresan como:

$$f_i = -\frac{EA}{L} \quad (2.6)$$

$$f_j = \frac{EA}{L} \quad (2.7)$$

Considerando que ambos nodos pueden desplazarse una cantidad distinta a la unidad de manera independiente, es decir, $u_i \neq u_j \neq 1$, las fuerzas actuantes en el nodo i se obtienen al sumar (2.4) y (2.6), afectando cada fuerza por su correspondiente desplazamiento, con lo que se obtiene

$$f_i = \frac{EA}{L} u_i - \frac{EA}{L} u_j \quad (2.8)$$

De igual forma, para el nodo j se obtiene

$$f_j = -\frac{EA}{L} u_i + \frac{EA}{L} u_j \quad (2.9)$$

Escribiendo las ecuaciones (2.8) y (2.9) en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{jx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

En la ecuación (2.10) se han cambiado los subíndices para las fuerzas en los nodos de f_i y f_j a f_{ix} y f_{jx} para enfatizar que las fuerzas en los nodos i y j actúan en el sentido del eje local x de la barra.

La expresión (2.10) puede escribirse de forma condensada de la siguiente forma :

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (2.11)$$

Dónde:

$\{f\}$ = Vector de fuerzas en el sistema local.

$[k]$ = Matriz de rigidez de la barra.

$\{d\}$ = Vector de desplazamientos en el sistema local.

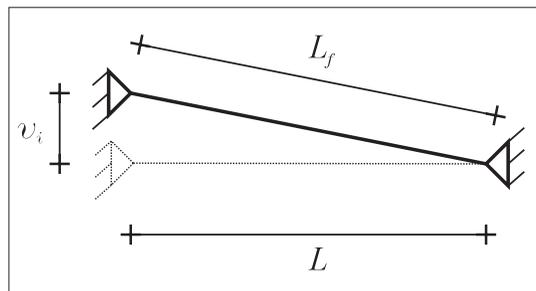


Figura 2.6 Desplazamiento vertical unitario en el nodo i

Imponiendo un desplazamiento vertical unitario ($v_i=1$) como se ilustra en la Figura 2.6, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, la longitud final de la barra L_f después de desplazarla se obtiene mediante

$$L_f = \sqrt{L^2 + v_i^2}$$

La deformación unitaria ε de la barra estaría definida mediante:

$$\varepsilon = \frac{L_f - L}{L} = \frac{\sqrt{L^2 + v_i^2} - L}{L}$$

Si v_i es pequeño en comparación con la longitud L de la barra, puede notarse que:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{v_i^2}{L^2}} - 1 \approx 0$$

La consideración anterior se cumple solamente para cuando los desplazamientos son pequeños en comparación con la longitud de los elementos que conforman la estructura, por tanto, puede esperarse que las fuerzas actuantes sobre el eje y puedan expresarse como

$$f_{iy} = f_{jy} \approx 0$$

(2.12)

Considerando la expresión anterior en (2.10) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

En forma condensada, la ecuación anterior puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

2.2 Rotación del sistema local al sistema global.

Como puede notarse en la Figura 2.1 (a), las barras de una armadura pueden tener diferente inclinación respecto a la horizontal, por tanto, se requiere un sistema de referencia para toda la estructura al cual se puedan referenciar todas las barras. En consecuencia, el sistema global (X, Y) servirá para tal fin.

De la Figura 2.7 puede verse que las fuerzas actuantes en la barra en el sistema local (x, y) respecto al sistema global (X, Y) se establece mediante

$$F_{ix} = f_{ix} \cos \theta - f_{iy} \sin \theta$$

$$F_{iy} = f_{ix} \sin \theta + f_{iy} \cos \theta$$

Reescribiendo en forma matricial las expresiones anteriores y considerando $l = \cos \theta$ y $m = \sin \theta$ se obtiene

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

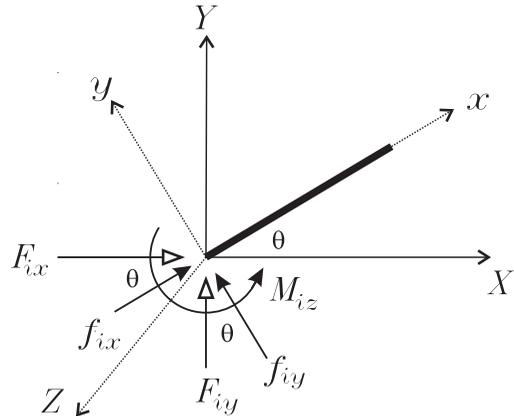


Figura 2.7 Fuerzas en el nodo i en el sistema local (x, y) y global (X, Y)

En forma condensada

$$\{F_i\} = [R]^T \{f_i\} \quad (2.16)$$

Donde:

$\{F_i\}$ = Fuerzas en el nodo i en el sistema global.

$[R]^T$ = Matriz de rotación traspuesta.

$\{f_i\}$ = Fuerzas en el nodo i en el sistema local.

De manera semejante, para referenciar las fuerzas al sistema local, respecto a las actuantes en el sistema global, y de acuerdo al esquema mostrado en la Figura 2.7 se establecen las siguientes expresiones

$$f_{ix} = F_{ix} \cos \theta + F_{iy} \sin \theta$$

$$f_{iy} = -F_{ix} \sin \theta + F_{iy} \cos \theta$$

Que en forma matricial se expresan como

$$\begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Reescribiendo en forma condensada

$$\{f_i\} = [R]\{F_i\} \quad (2.18)$$

Una de las propiedades de la matriz de rotación $[R]$ es que la matriz inversa de ésta es la matriz transpuesta $[R]^T$ esto se puede verificar al substituir (2.18) en (2.16), es decir

$$\begin{aligned} \{F_i\} &= [R]^T \{f_i\} \\ \{F_i\} &= [R]^T ([R]\{F_i\}) \end{aligned}$$

de donde puede verse que, para que se cumpla la igualdad

$$[R]^T [R] = [I]$$

Donde: $[I]$ = Matriz identidad, por tanto

$$[R]^{-1} = [R]^T \quad (2.19)$$

Al igual que las fuerzas, los desplazamientos se pueden expresar de forma similar de la siguiente manera

$$\{D_i\} = [R]^T \{d_i\} \quad (2.20)$$

$$\{d_i\} = [R]\{D_i\} \quad (2.21)$$

Substituyendo (2.21) y (2.18) en (2.14) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} [R]\{F_i\} \\ [R]\{F_j\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [R]\{D_i\} \\ [R]\{D_j\} \end{Bmatrix}$$

La expresión anterior se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{F_j\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_i\} \\ \{D_j\} \end{Bmatrix}$$

Pre-multiplicando ambos lados de la expresión anterior por $\begin{bmatrix} [R] & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix}^{-1}$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} [R] & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [R] & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R] & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R] & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix}$$

De (2.19) se sabe que $\begin{bmatrix} [R] & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} [R] & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} [R]^T & [O] \\ [O] & [R]^T \end{bmatrix}$ con lo que se obtiene

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R] & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R] & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix}$$

Realizando operaciones se obtiene

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R]^T [k_{ii}] [R] & [R]^T [k_{ij}] [R] \\ [R]^T [k_{ji}] [R] & [R]^T [k_{jj}] [R] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R] & [O] \\ [O] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix}$$

(2.22)

Para el término que involucra a la submatriz $[k_{ii}]$ las operaciones a realizar son

$$[R]^T [k_{ii}] [R] = \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones se obtiene

$$[R]^T [k_{ii}] [R] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 & \frac{EA}{L} lm \\ \frac{EA}{L} lm & \frac{EA}{L} m^2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ lm & m^2 \end{bmatrix}$$

(2.23)

De (2.13) y (2.14) puede verse que

$$\begin{aligned} [k_{ii}] &= [k_{jj}] = -[k_{ij}] \\ [k_{ji}] &= [k_{ij}] \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación (2.22) puede expresarse en forma detallada de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

(2.24)

2.3 Ejemplos de aplicación.

2.3.1 Ensamble de la matriz de rigidez de la estructura – Opción A

En la Figura 2.8 se muestra el esquema de una armadura donde se han identificado mediante un círculo los nodos y mediante un cuadrado las barras. Es práctica común que tanto nodos como barras sean identificados con valores numéricos, sin embargo, para fines didácticos se ha planteado la nomenclatura mostrada solamente para los primeros ejemplos.

De acuerdo al sentido de las barras mostrado en la Figura 2.8, la relación fuerza–desplazamiento para cada una de las barras definida por la ecuación (2.24) son las siguientes.

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Barra A} \quad (2.25 \text{ a})$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \text{Barra B} \quad (2.25 \text{ b})$$

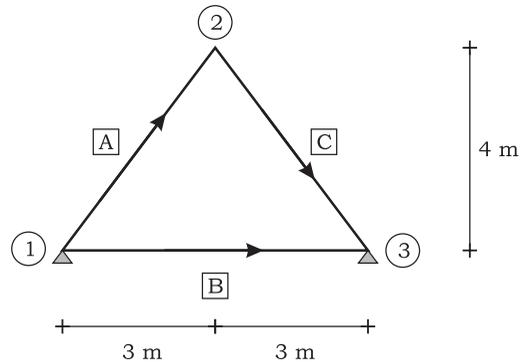


Figura 2.8 Estructura de armadura con tres barras

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \text{Barra C} \quad (2.25 \text{ c})$$

Como puede notarse, en la expresión correspondiente a cada barra se han identificado las fuerzas y desplazamientos correspondientes a los nodos a los cuales está conectada la barra, por tanto, expandiendo cada una de las matrices para todos los nodos que se tienen en la estructura, las ecuaciones (2.25) se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\text{Barra A} \quad (2.26 \text{ a})$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Barra B} \quad (2.26 \text{ b})$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Barra C} \quad (2.26 \text{ c})$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

La matriz de rigideces de la estructura se obtiene al sumar las expresiones (2.26), es decir:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} & a_{14} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} & a_{24} & b_{23} & b_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + c_{11} & a_{34} + c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} + c_{21} & a_{44} + c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ b_{31} & b_{32} & c_{31} & c_{32} & b_{33} + c_{33} & b_{34} + c_{34} \\ b_{41} & b_{42} & c_{41} & c_{42} & b_{43} + c_{43} & b_{44} + c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Considerando que las barras de la armadura de la Figura 2.8 tienen las propiedades mostradas en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Propiedades de las barras para el cálculo de las matrices de rigidez.

Barra	E (ton/cm ²)	A (cm ²)	L (cm)	θ (grados)	l	m	l^2	m^2	lm
A	2 100	15	500	233.1301	-0.6	-0.8	0.36	0.64	0.48
B	2 100	10	600	180	-1	0	1	0	0
C	2 100	15	500	126.8699	-0.6	0.8	0.36	0.64	-0.48

Note que los valores del ángulo θ se miden en todos los casos a partir de la horizontal (o eje global X) y que el sentido positivo es contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Los valores numéricos de las matrices de rigidez de cada una de las barras, de acuerdo a la ecuación (2.24) son los siguientes:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.68 & 30.24 & -22.68 & -30.24 & 0 & 0 \\ 30.24 & 40.32 & -30.24 & -40.32 & 0 & 0 \\ -22.68 & -30.24 & 22.68 & 30.24 & 0 & 0 \\ -30.24 & -40.32 & 30.24 & 40.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \text{Barra A} \quad (2.28 \text{ a})$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \text{Barra B} \quad (2.28 \text{ b})$$

2.3.2 Ensamble de la matriz de rigidez de la estructura – Opción B

Aunque la forma en que se ensambla la matriz de rigidez de la estructura en el ejemplo anterior es fácil de comprender, el realizarlo para cualquier estructura tiene sus inconvenientes. El primero de ellos es el tener que expandir la matriz de rigidez de cada barra para que coincida con la matriz de rigidez de la estructura, lo cual, para un número de nodos pequeños es simple, pero para una estructura grande con una gran cantidad de nodos puede resultar complicado e ineficiente. El segundo aspecto a considerar es que necesariamente, la conectividad de las barras se ve restringida a que el nodo inicial sea un nodo numéricamente menos al nodo final, haciendo que la generalización del método se vea limitada.

Por lo anterior, se plantea una forma adicional que permite comprender de una forma más general el proceso de ensamble, tomando el ejemplo visto anterior, cambiando solamente el sentido de las conectividades de las barras, tal y como se muestra en la Figura 2.9.

Primeramente, se realiza el ensamble de las matrices de manera simbólica, para identificar el lugar al que corresponde cada uno de los coeficientes de rigidez de las barras en el matriz de la estructura. De esta forma, para cada barra se tiene.

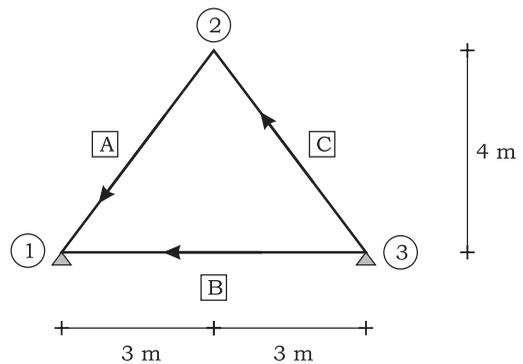


Figura 2.9 Estructura de armadura cambiando el sentido de las barras respecto al ejemplo anterior.

$$\begin{Bmatrix} F_{2,x} \\ F_{2,y} \\ F_{1,x} \\ F_{1,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad \text{Barra A} \quad (2.30 \text{ a})$$

$$\begin{Bmatrix} F_{3,x} \\ F_{3,y} \\ F_{1,x} \\ F_{1,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad \text{Barra B} \quad (2.30 \text{ b})$$

$$\begin{Bmatrix} F_{3,x} \\ F_{3,y} \\ F_{2,x} \\ F_{2,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Barra C} \quad (2.30 \text{ c})$$

Tomando solamente la matriz de rigidez de cada una de las barras de (2.30) y mostrando los coeficientes de rigidez en un tablero donde los renglones y columnas se identifican mediante los grados de libertad de los nodos inicial y final a los cuales está conectada la barra, las matrices de rigidez se disponen de la siguiente forma

u_2	v_2	u_1	v_1	Barra A
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	u_2
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	v_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	u_1
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	v_1

u_3	v_3	u_1	v_1	Barra B
b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	u_3
b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	v_3
b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}	u_1
b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44}	v_1

u_3	v_3	u_2	v_2	Barra C
c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	u_3
c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	v_3
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	u_2
c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	v_2

De esta forma, el ensamble de cada una de las barras en la matriz de rigideces de la estructura es de la siguiente forma

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	Barra A
a_{33}	a_{34}	a_{31}	a_{32}			u_1
a_{43}	a_{44}	a_{41}	a_{42}			v_1
a_{13}	a_{14}	a_{11}	a_{12}			u_2
a_{23}	a_{24}	a_{21}	a_{22}			v_2
						u_3
						v_3

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	Barra B
b_{33}	b_{34}			b_{31}	b_{32}	u_1
b_{43}	b_{44}			b_{41}	b_{42}	v_1
						u_2
						v_2
b_{13}	b_{14}			b_{11}	b_{12}	u_3
b_{23}	b_{24}			b_{21}	b_{22}	v_3

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	Barra C
						u_1
						v_1
		c_{33}	c_{34}	c_{31}	c_{32}	u_2
		c_{43}	c_{44}	c_{41}	c_{42}	v_2
		c_{13}	c_{14}	c_{11}	c_{12}	u_3
		c_{23}	c_{24}	c_{21}	c_{22}	v_3

De esta forma, al sumar las matrices de rigidez que corresponden a cada barra, la matriz de rigideces de la estructura se expresa de la siguiente forma:

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	
$a_{33} + b_{33}$	$a_{34} + b_{34}$	a_{31}	a_{32}	b_{31}	b_{32}	u_1
$a_{43} + b_{43}$	$a_{44} + b_{44}$	a_{41}	a_{42}	b_{41}	b_{42}	v_1
a_{13}	a_{14}	$a_{11} + c_{33}$	$a_{12} + c_{34}$	c_{31}	c_{32}	u_2
a_{23}	a_{24}	$a_{21} + c_{43}$	$a_{22} + c_{44}$	c_{41}	c_{42}	v_2
b_{13}	b_{14}	c_{13}	c_{14}	$b_{11} + c_{11}$	$b_{12} + c_{12}$	u_3
b_{23}	b_{24}	c_{23}	c_{24}	$b_{21} + c_{21}$	$b_{22} + c_{22}$	v_3

Asignando valores numéricos al problema de la Figura 2.9 de acuerdo a los datos mostrados en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2 Propiedades de barras de la armadura.

Barra	E (ton/cm ²)	A (cm ²)	L (cm)	θ (grados)	l	m	l^2	m^2	lm
A	2 100	15	500	233.1301	-0.6	-0.8	0.36	0.64	0.48
B	2 100	10	600	180	-1	0	1	0	0
C	2 100	15	500	126.8699	-0.6	0.8	0.36	0.64	-0.48

Con estos datos, los valores numéricos de las matrices de rigidez de cada una de las barras son:

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	Barra A
22.68	30.24	-22.64	-30.24			u_1
30.24	40.32	-30.24	-40.32			v_1
-22.68	-30.24	22.68	30.24			u_2
-30.24	-40.32	30.24	40.32			v_2
						u_3
						v_3

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	Barra B
35				-35		u_1
						v_1
						u_2
						v_2
-35				35		u_3
						v_3

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	Barra C
						u_1
						v_1
		22.68	-30.24	-22.68	30.24	u_2
		-30.24	40.32	30.24	-40.32	v_2
		-22.68	30.24	22.68	-30.24	u_3
		30.24	-40.32	-30.24	40.32	v_3

Sumando las matrices de rigidez de cada barra, la matriz de rigidez de la estructura resultante es:

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	
57.68	30.24	-22.68	-30.24	-35		u_1
30.24	40.32	-30.24	-40.32			v_1
-22.68	-30.24	45.36		-22.68	30.24	u_2
-30.24	-40.31		80.64	30.24	-40.32	v_2
-35		-22.68	30.24	57.68	-30.24	u_3
		30.24	-40.32	-30.24	40.32	v_3

La matriz anterior se puede expresar en la forma en que se encuentra la ecuación (2.29), donde puede verse que las matrices de rigidez son idénticas, aunque fueron obtenidas por un procedimiento diferente y definiendo una conectividad de las barras contrapuesta.

La expresión que se obtiene, de la forma mostrada en la ecuación (2.29) es singular, es decir, no se puede obtener una solución única. Esto es debido a que aún no se le han impuesto condiciones de apoyo, teniendo el caso de singularidad mostrado en la Figura 1.5. Para resolver la estructura bajo un sistema de cargas se le deben imponer, además de las cargas, las restricciones correspondientes para que no tenga desplazamientos de cuerpo rígido, además de revisar las otras causas de singularidad mencionadas en la sección 1.3.1.

2.3.3 Obtención de las fuerzas en los elementos

Considerando la armadura plana de los ejemplos anteriores y definiendo las fuerzas que se aplican sobre la misma, así como las condiciones de apoyo, la estructura a resolver se muestra en la Figura 2.10

Primeramente, estableciendo las unidades de trabajo, a pesar de que en la Figura 2.10 las unidades mostradas son metros (m) para la longitud se trabajará con centímetros (cm) a fin de hacer compatible el ejemplo con los anteriormente mostrados.

Hay que notar que en la Figura 2.10 se muestran las condiciones de apoyo para los nodos 1 y 3. Para el nodo 1 se encuentran restringidos los desplazamientos en las direcciones X y Y (globales), mientras que para el nodo 3 solamente se encuentra restringido el desplazamiento en el sentido Y . En consecuencia, para resolver la estructura, se eliminan los renglones y columnas asociados a los grados de libertad u_1, v_1 y v_3 de (2.29), con lo que la matriz de rigidez de la estructura queda de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} 4000 \\ -7000 \\ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.36 & 0 & -22.68 \\ 0 & 80.64 & 30.24 \\ -22.68 & 30.24 & 57.68 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

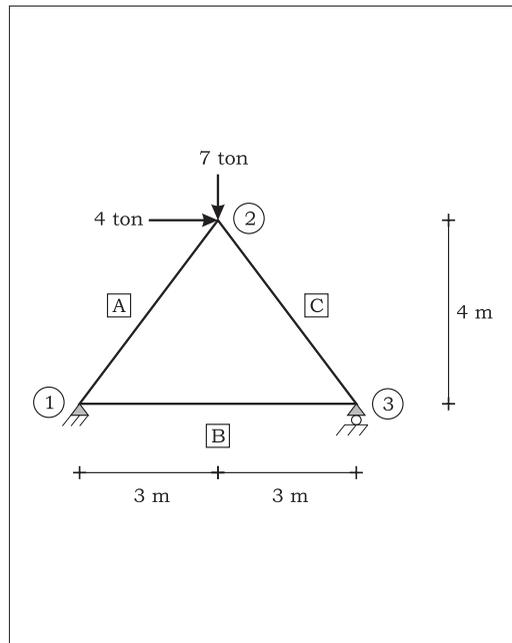


Figura 2.10 Armadura plana a resolver.

En el sistema anterior se ha substituido F_{2x} , F_{2y} y F_{3x} por los valores correspondientes a las fuerzas aplicadas en cada nodo de la estructura, las cuales corresponden a 4,000 kg en el sentido X y $-7,000$ kg en el sentido Y para el nodo 2. Como en el nodo 3 no actúan fuerzas, se asigna un valor nulo. Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} u_2 &= 0.1543 \text{ cm} \\ v_2 &= -0.1364 \text{ cm} \\ u_3 &= 0.1321 \text{ cm} \end{aligned}$$

En consecuencia, el vector de desplazamientos de toda la estructura es:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1543 \\ -0.1364 \\ 0.1321 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas en las barras se obtienen al substituir en la ecuación (2.24) los desplazamientos ya encontrados, en consecuencia y considerando la conectividad mostrada en la Figura 2.8 las fuerzas para cada barra en el sistema global (X,Y) son:

$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.68 & 30.24 & -22.68 & -30.24 \\ 30.24 & 40.32 & -30.24 & -40.32 \\ -22.68 & -30.24 & 22.68 & 30.24 \\ -30.24 & -40.32 & 30.24 & 40.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1543 \\ -0.1364 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6250 \\ 0.8333 \\ -0.6250 \\ -0.8333 \end{Bmatrix}$	Barra A
--	---------

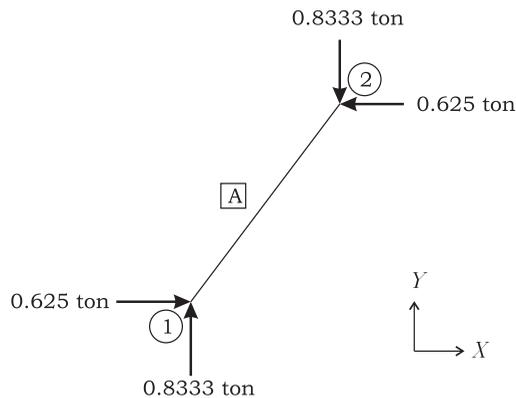
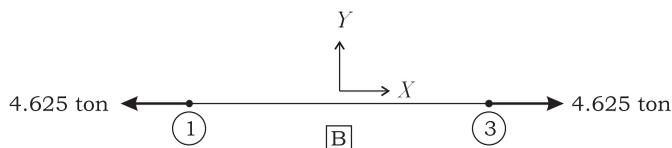


Figura 2.11 Fuerzas actuantes en barra A en el sistema global (X,Y)

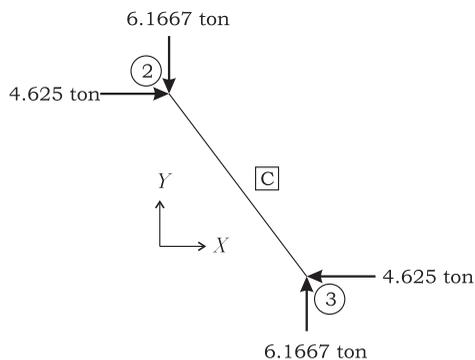
$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1321 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.625 \\ 0 \\ 4.625 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra B

Figura 2.12 Fuerzas actuantes en Barra B en el sistema global (X, Y)

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.68 & -30.24 & -22.68 & 30.24 \\ -30.24 & 40.32 & 30.24 & -40.32 \\ -22.68 & 30.24 & 22.68 & -30.24 \\ 30.24 & -40.32 & -30.24 & 40.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.1543 \\ -0.1364 \\ 0.1321 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.6250 \\ -6.1667 \\ -4.6250 \\ 6.1667 \end{Bmatrix}$$

Barra C

Figura 2.13 Fuerzas actuantes en barra C en el sistema global (X, Y)

De los resultados mostrados puede deducirse las reacciones en los nodos 1 y 2. Para el apoyo en el nodo 1, sumando las fuerzas mostradas en las Figuras 2.11 y 2.12 que corresponden a las barras que convergen al nodo 1 se tiene que las reacciones son:

$$\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6250 \\ 0.8333 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -4.625 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.0 \\ 0.8333 \end{Bmatrix}$$

Para el apoyo en el nodo 3, las reacciones se obtienen al sumar las fuerzas que actúan en las barras conectadas a dicho nodo, es decir:

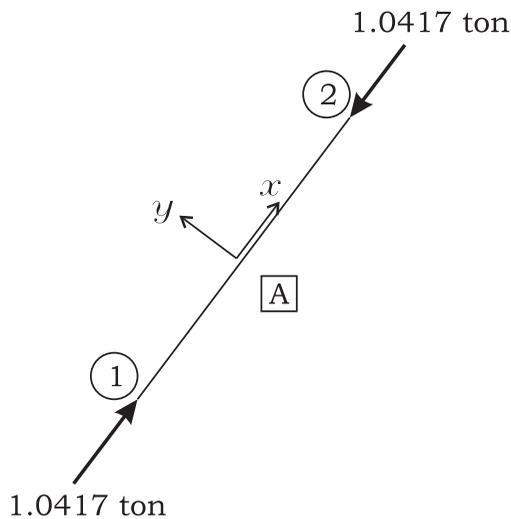
$$\begin{Bmatrix} R_{3x} \\ R_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.625 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -4.625 \\ 6.1667 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6.1667 \end{Bmatrix}$$

Para obtener las fuerzas de tensión o compresión actuantes en cada una de las barras, se requiere rotar las fuerzas del sistema global (X, Y) al local de cada una de las barras (x, y) , esto se realiza al multiplicar el vector de fuerzas en cada extremo de la barra por la matriz de rotación definida en (2.17) y (2.18), es decir:

$$\{f\} = [R]\{F\}$$

De esta forma, las fuerzas en el sistema local de cada barra son las siguientes:

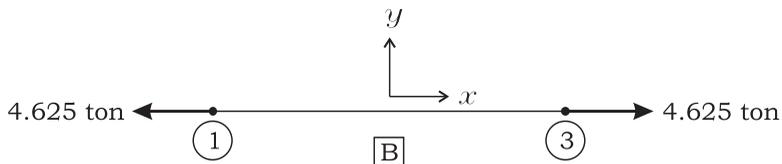
$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6250 \\ 0.8333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0417 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.6250 \\ -0.8333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.0417 \\ 0 \end{Bmatrix}$	Barra A
---	---------

Figura 2.14 Fuerzas actuantes en la barra A en el sistema local (x, y)

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4.625 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.625 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.625 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.625 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra B

Figura 2.15 Fuerzas actuantes en barra B en el sistema local (x, y)

$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.625 \\ -6.1667 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.7083 \\ 0 \end{Bmatrix}$	Barra C
$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4.625 \\ 6.1667 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.7083 \\ 0 \end{Bmatrix}$	

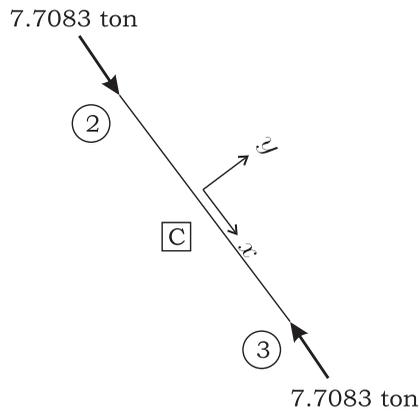


Figura 2.16 Fuerzas actuantes en barra C en el sistema local (x, y)

De esta forma, las fuerzas actuantes en cada una de las barras de la armadura de la Figura 2.10, así como el tipo de fuerza actuante se muestra en la siguiente tabla.

BARRA	Fuerza (ton)	TIPO
A	1.0417	Compresión
B	4.6250	Tensión
C	7.7083	Compresión

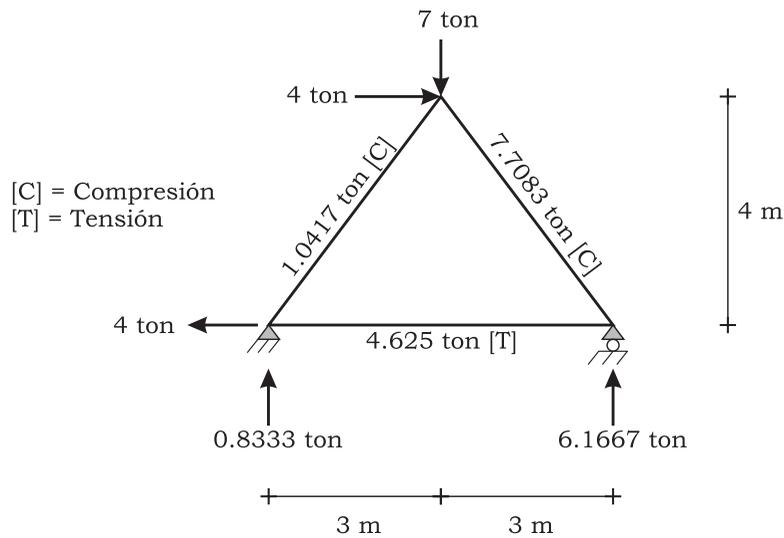


Figura 2.17 Resumen de fuerzas actuantes y reacciones en los apoyos.

2.3.4 Análisis de una armadura de cubierta a dos aguas.

Se desea analizar la armadura bajo las condiciones mostradas en la Figura 2.18 en donde la sección transversal de los elementos $A = 10 \text{ cm}^2$. Todos los elementos son de acero A-36 ($E = 2'100,000 \text{ kg/cm}^2$). Para fines de análisis la nomenclatura de nodos, barras así como el sentido de la conectividad se muestran en la Figura 2.19

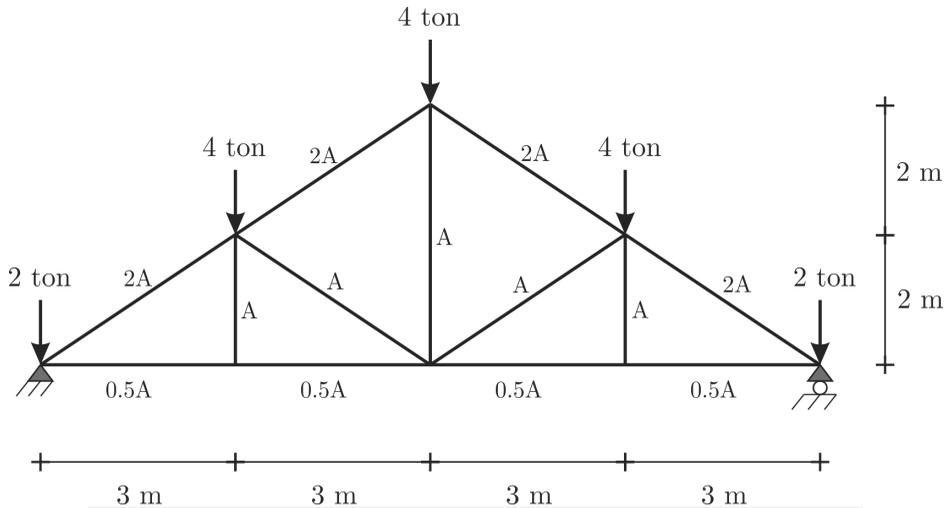


Figura 2.18 Armadura de cubierta a dos aguas.

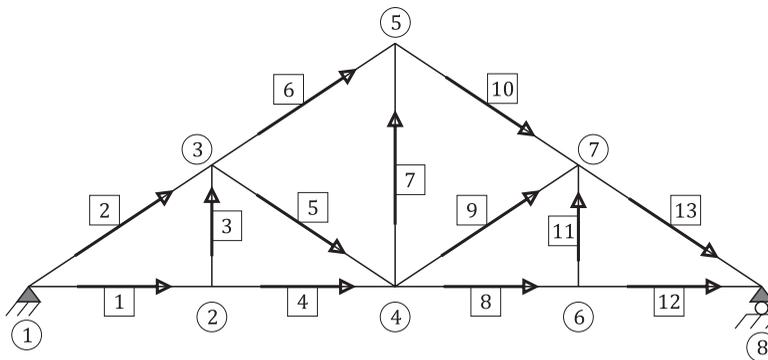


Figura 2.19 Nomenclatura y conectividad en armadura.

En la tabla que se muestra a continuación se resumen las características de las barras que conforman la armadura con el fin de calcular los coeficientes de la matriz de rigidez.

BARRA	E (ton/cm ²)	A (cm ²)	L (cm)	θ (grados)	l	m
1, 4, 8 y 12	2100	5	300	0	1	0
2 y 6	2100	20	360.5551	33.6901	0.8321	0.5547
10 y 13	2100	20	360.5551	-33.6901	0.8321	-0.5547
3 y 11	2100	10	200	90	0	1
5	2100	10	360.5551	-33.6901	0.8321	-0.5547
7	2100	10	400	90	0	1
9	2100	10	360.5551	33.6901	0.8321	0.5547

De esta forma, las matrices de rigidez de las barras son las siguientes:

Barras 1, 4, 8 y 12	
$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 35 & 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$

Barras 2 y 6	
$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 80.6449 & 53.7632 & -80.6449 & -53.7632 \\ 53.7632 & 35.8422 & -53.7632 & -35.8422 \\ -80.6449 & -53.7632 & 80.6449 & 53.7632 \\ -53.7632 & -35.8422 & 53.7632 & 35.8422 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$

Barras 10 y 13

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.6449 & -53.7632 & -80.6449 & 53.7632 \\ -53.7632 & 35.8422 & 53.7632 & -35.8422 \\ -80.6449 & 53.7632 & 80.6449 & -53.7632 \\ 53.7632 & -35.8422 & -53.7632 & 35.8422 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Barras 3 y 11

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & -105 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -105 & 0 & 105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Barra 5

$$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.3224 & -26.8816 & -40.3224 & 26.8816 \\ -26.8816 & 17.9211 & 26.8816 & -17.9211 \\ -40.3224 & 26.8816 & 40.3224 & -26.8816 \\ 26.8816 & -17.9211 & -26.8816 & 17.9211 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Barra 7

$$\begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52.5 & 0 & -52.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -52.5 & 0 & 52.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

Barra 9											
$\left\{ \begin{matrix} F_{4,x} \\ F_{4,y} \\ F_{7,x} \\ F_{7,y} \end{matrix} \right\}$	=	$\begin{bmatrix} 40.3224 & 26.8816 & -40.3224 & -26.8816 \\ 26.8816 & 17.9211 & -26.8816 & -17.9211 \\ -40.3224 & -26.8816 & 40.3224 & 26.8816 \\ -26.8816 & -17.9211 & 26.8816 & 17.9211 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{matrix} u_4 \\ v_4 \\ u_7 \\ v_7 \end{matrix} \right\}$								

Ensamblando para cada una de las barras, la matriz de rigidez de la estructura resultante es:

$$\begin{matrix} \left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & -35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & -105 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 201.61 & 80.64 & -40.32 & 26.88 & -80.64 & -53.76 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -105 & 80.64 & 194.61 & 26.88 & -17.92 & -53.76 & -35.84 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & -40.32 & 26.88 & 150.64 & 0 & 0 & 0 & -35 & 0 & -40.32 & -26.88 & 0 \\ 0 & 0 & 26.88 & -17.92 & 0 & 88.34 & 0 & -52.5 & 0 & 0 & -26.88 & -17.92 & 0 \\ 0 & 0 & -80.64 & -53.76 & 0 & 0 & 161.29 & 0 & 0 & 0 & -80.64 & 53.76 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -53.76 & -35.84 & 0 & -52.5 & 0 & 124.18 & 0 & 0 & 53.76 & -35.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -35 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 105 & 0 & -105 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40.32 & -26.88 & -80.64 & 53.76 & 0 & 0 & 201.61 & -80.64 & -80.64 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -26.88 & -17.92 & 53.76 & -35.84 & 0 & -105 & -80.64 & 194.61 & 53.76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -35 & 0 & -80.64 & 53.76 & 115.64 \end{bmatrix} \right\} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \end{matrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtienen los siguientes desplazamientos

$$u_2 = 0.2571$$

$$v_2 = -1.0885$$

$$u_4 = 0.5143$$

$$v_4 = -1.1266$$

$$u_6 = 0.7714$$

$$v_6 = -1.0885$$

$$u_8 = 1.0286$$

$$u_3 = 0.6141$$

$$v_3 = -1.0885$$

$$u_5 = 0.5143$$

$$v_5 = -1.0504$$

$$u_7 = 0.4145$$

$$v_7 = -1.0885$$

Las fuerzas en el sistema global (X, Y) para cada barra son:

Barra 1	
$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2571 \\ -1.0885 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{Bmatrix}$	

Barra 2	
$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.6449 & 53.7632 & -80.6449 & -53.7632 \\ 53.7632 & 35.8422 & -53.7632 & -35.8422 \\ -80.6449 & -53.7632 & 80.6449 & 53.7632 \\ -53.7632 & -35.8422 & 53.7632 & 35.8422 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6141 \\ -1.0885 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 6 \\ -9 \\ -6 \end{Bmatrix}$	

Barra 3	
$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & -105 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -105 & 0 & 105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2571 \\ -1.0885 \\ 0.6141 \\ -1.0885 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	

Barra 4	
$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.4808 \\ -0.6020 \\ 0.3429 \\ -0.5449 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{Bmatrix}$	

Barra 5

$$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.3224 & -26.8816 & -40.3224 & 26.8816 \\ -26.8816 & 17.9211 & 26.8816 & -17.9211 \\ -40.3224 & 26.8816 & 40.3224 & -26.8816 \\ 26.8816 & -17.9211 & -26.8816 & 17.9211 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6141 \\ -1.0885 \\ 0.5143 \\ -1.1266 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Barra 6

$$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.6449 & 53.7632 & -80.6449 & -53.7632 \\ 53.7632 & 35.8422 & -53.7632 & -35.8422 \\ -80.6449 & -53.7632 & 80.6449 & 53.7632 \\ -53.7632 & -35.8422 & 53.7632 & 35.8422 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6141 \\ -1.0885 \\ 0.5143 \\ -1.0504 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \\ -6 \\ -4 \end{Bmatrix}$$

Barra 7

$$\begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52.5 & 0 & -52.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -52.5 & 0 & 52.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5143 \\ -1.1266 \\ 0.5143 \\ -1.0504 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Barra 8

$$\begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{6x} \\ F_{6y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5143 \\ -1.1266 \\ 0.7714 \\ -1.0885 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 9

$$\begin{Bmatrix} F_{4,x} \\ F_{4,y} \\ F_{7,x} \\ F_{7,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.3224 & 26.8816 & -40.3224 & -26.8816 \\ 26.8816 & 17.9211 & -26.8816 & -17.9211 \\ -40.3224 & -26.8816 & 40.3224 & 26.8816 \\ -26.8816 & -17.9211 & 26.8816 & 17.9211 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3429 \\ -0.6592 \\ 0.2049 \\ -0.6020 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

Barra 10

$$\begin{Bmatrix} F_{5,x} \\ F_{5,y} \\ F_{7,x} \\ F_{7,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.6449 & -53.7632 & -80.6449 & 53.7632 \\ -53.7632 & 35.8422 & 53.7632 & -35.8422 \\ -80.6449 & 53.7632 & 80.6449 & -53.7632 \\ 53.7632 & -35.8422 & -53.7632 & 35.8422 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5143 \\ -1.0504 \\ 0.4145 \\ -1.0885 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ -4 \\ -6 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Barra 11

$$\begin{Bmatrix} F_{6,x} \\ F_{6,y} \\ F_{7,x} \\ F_{7,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & -105 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -105 & 0 & 105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7714 \\ -1.0885 \\ 0.4145 \\ -1.0885 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 12

$$\begin{Bmatrix} F_{6,x} \\ F_{6,y} \\ F_{8,x} \\ F_{8,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7714 \\ -1.0885 \\ 1.0286 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 13

$$\begin{Bmatrix} F_{7x} \\ F_{7y} \\ F_{8x} \\ F_{8y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.6449 & -53.7632 & -80.6449 & 53.7632 \\ -53.7632 & 35.8422 & 53.7632 & -35.8422 \\ -80.6449 & 53.7632 & 80.6449 & -53.7632 \\ 53.7632 & -35.8422 & -53.7632 & 35.8422 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4145 \\ -1.0885 \\ 1.0286 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ -6 \\ -9 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

Para obtener las acciones sobre las barras, las fuerzas en el sistema global (X,Y) se rotan al sistema local (x,y) mediante (2.18) obteniéndose para cada barra.

Barra 1

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -9 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 9 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 2

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8321 & 0.5547 \\ -0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 9 \\ 6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.8167 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8321 & 0.5547 \\ -0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -9 \\ -6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10.8167 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 3

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 4

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -9 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{4x} \\ f_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 9 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 5

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8321 & -0.5547 \\ 0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.6056 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{4x} \\ f_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8321 & -0.5547 \\ 0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.6056 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 6

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8321 & 0.5547 \\ -0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.2111 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{5x} \\ f_{5y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{5x} \\ F_{5y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8321 & 0.5547 \\ -0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -6 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.2111 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 7

$$\begin{Bmatrix} f_{4,x} \\ f_{4,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{4,x} \\ F_{4,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{5,x} \\ f_{5,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{5,x} \\ F_{5,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 8

$$\begin{Bmatrix} f_{4,x} \\ f_{4,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{4,x} \\ F_{4,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -9 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{6,x} \\ f_{6,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{6,x} \\ F_{6,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 9 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 9

$$\begin{Bmatrix} f_{4,x} \\ f_{4,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{4,x} \\ F_{4,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8321 & 0.5547 \\ -0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.6056 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{7,x} \\ f_{7,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{7,x} \\ F_{7,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8321 & 0.5547 \\ -0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.6056 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 10

$$\begin{Bmatrix} f_{5,x} \\ f_{5,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{5,x} \\ F_{5,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8321 & -0.5547 \\ 0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 \\ -4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.2111 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{7,x} \\ f_{7,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{7,x} \\ F_{7,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8321 & -0.5547 \\ 0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -6 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.2111 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 11

$$\begin{cases} f_{6,x} \\ f_{6,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{cases} F_{6,x} \\ F_{6,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{7,x} \\ f_{7,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{cases} F_{7,x} \\ F_{7,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

Barra 12

$$\begin{cases} f_{6,x} \\ f_{6,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{cases} F_{6,x} \\ F_{6,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} -9 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -9 \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{7,x} \\ f_{7,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{cases} F_{7,x} \\ F_{7,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} 9 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 9 \\ 0 \end{cases}$$

Barra 13

$$\begin{cases} f_{7,x} \\ f_{7,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{cases} F_{7,x} \\ F_{7,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0.8321 & -0.5547 \\ 0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{cases} 9 \\ -6 \end{cases} = \begin{cases} 10.8167 \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{8,x} \\ f_{8,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{cases} F_{8,x} \\ F_{8,y} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0.8321 & -0.5547 \\ 0.5547 & 0.8321 \end{bmatrix} \begin{cases} -9 \\ 6 \end{cases} = \begin{cases} -10.8167 \\ 0 \end{cases}$$

Las fuerzas que actúan en cada una de las barras se muestran en la Tabla 2.3. La Figura 2.20 muestra de manera esquemática como se distribuyen las fuerzas en las barras.

Tabla 2.3 Resumen de fuerzas actuantes.

BARRA	Fuerza (ton)	TIPO
1	9.0	Tensión
2	10.8167	Compresión
3	0	-
4	9.0	Tensión
5	3.6056	Compresión
6	7.2111	Compresión
7	4.0	Tensión
8	9.0	Tensión
9	3.6056	Compresión
10	7.2111	Compresión
11	0	-
12	9.0	Tensión
13	10.8167	Compresión

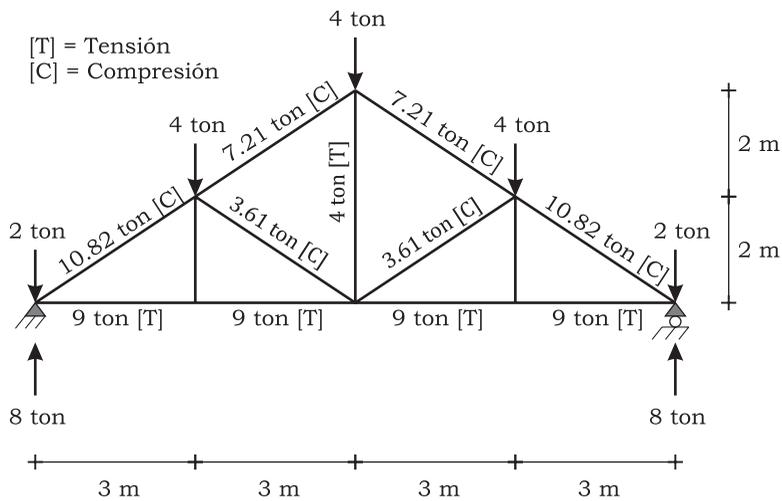
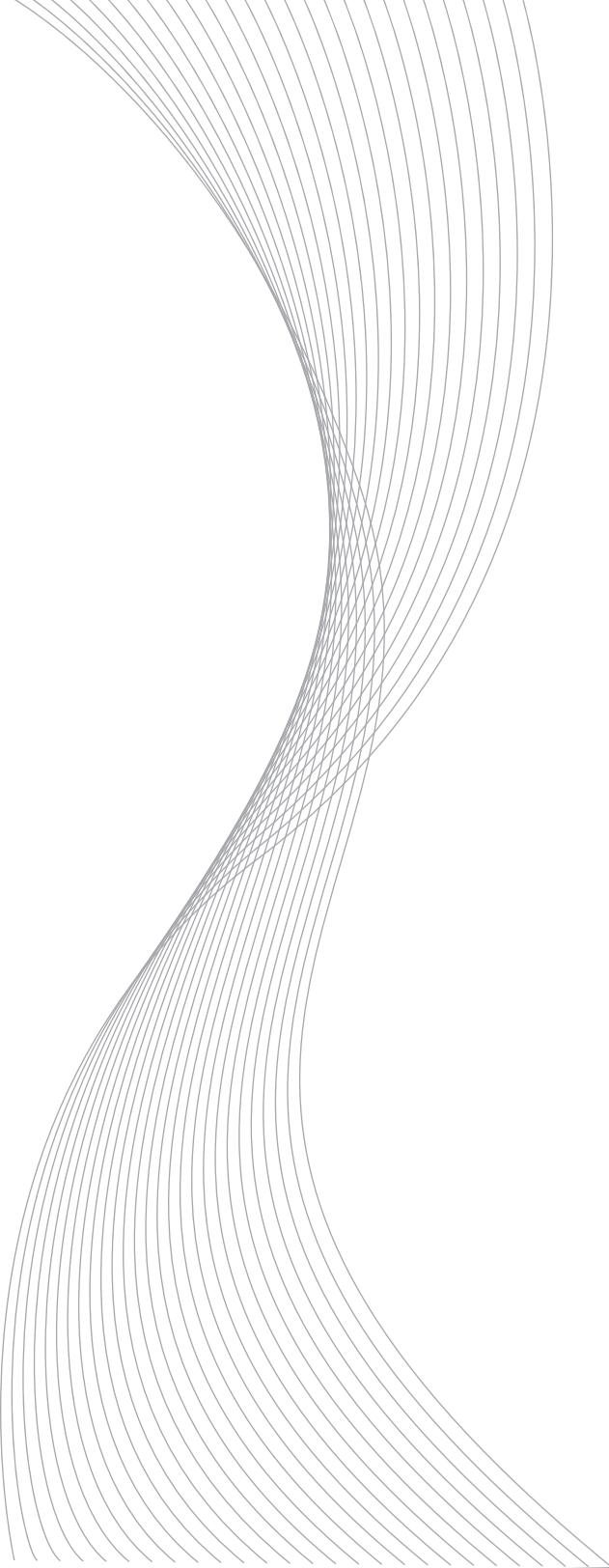


Figura 2.20 Fuerzas actuantes en las barras de la armadura.



ARMADURAS
TRIDIMENSIONALES

3

3 ARMADURAS TRIDIMENSIONALES

3.1 Determinación de la matriz de rigidez

Para una barra en el espacio, como la mostrada en la Figura 3.1 se emplean los ángulos α , β y δ para referenciar la barra a los ejes globales X, Y y Z respectivamente.

Como ya se vio en el capítulo anterior, y de acuerdo a las ecuaciones (2.10) y (2.11) la matriz de rigideces en el sistema local para una barra de armadura se expresa como:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

De la Figura 3.1 puede notarse que

$$\begin{aligned} F_x &= f_x \cos \alpha \\ F_y &= f_x \cos \beta \\ F_z &= f_x \cos \gamma \end{aligned}$$

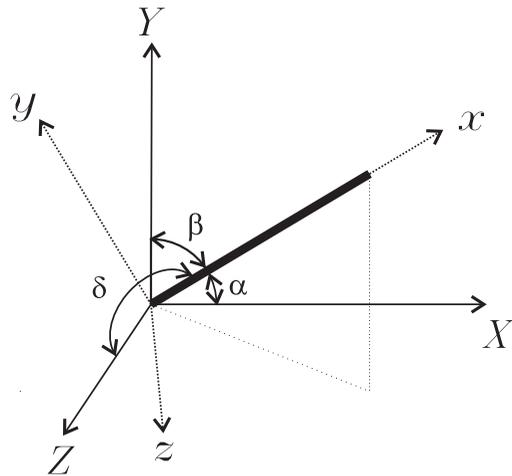


Figura 3.1 Sistemas de referencia local y global

Considerando $l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta$, y $n = \cos \delta$ reescribiendo en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = f_x \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

o en forma condensada

$$\{F\} = f \{R\}^T \quad (3.3)$$

Retomando la expresión (2.22) que define la rotación de una barra del sistema local (x,y) al sistema global (X,Y) pero considerando como matriz de rotación la correspondiente a armaduras planas, es decir: \longrightarrow

$$\{R\} = \{l \quad m \quad n\} \tag{3.4}$$

Las operaciones a realizar para el término que involucra a la submatriz $[k_{ii}] = E/AL$ de (3.1) son:

$$\{R\}^T [k_{ii}] \{R\} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \frac{EA}{L} \{l \quad m \quad n\} \longrightarrow \{R\}^T [k_{ii}] \{R\} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln \\ lm & m^2 & mn \\ ln & mn & n^2 \end{bmatrix}$$

Considerando que \longrightarrow

$$[k_{ii}] = [k_{jj}] = -[k_{ij}]$$

$$[k_{ij}] = [k_{ji}]$$

La matriz de rigideces para una barra de armadura en tres dimensiones referenciada al sistema global (X,Y,Z) se define como:

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Donde:

$$l = \frac{\Delta X}{L}$$

$$m = \frac{\Delta Y}{L}$$

$$n = \frac{\Delta Z}{L}$$

3.2 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

3.2.1 Ejemplo 1 – Armadura en el Espacio de Tres Elementos Tipo Trípode

Para ejemplificar la aplicación del método de rigideces en armaduras en el espacio se considera primeramente la estructura formada por tres elementos que se muestra en la Figura 3.2. La nomenclatura y conectividad de la estructura se muestra en la Figura 3.3 .

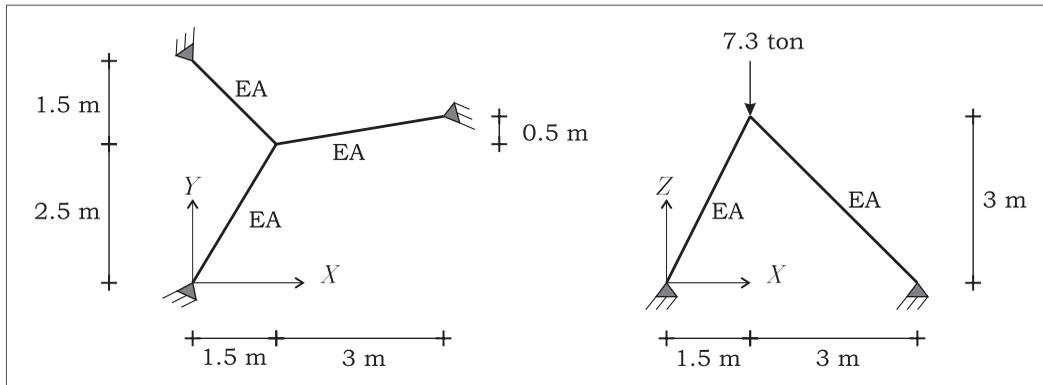


Figura 3.2 Armadura en el espacio de tres elementos.

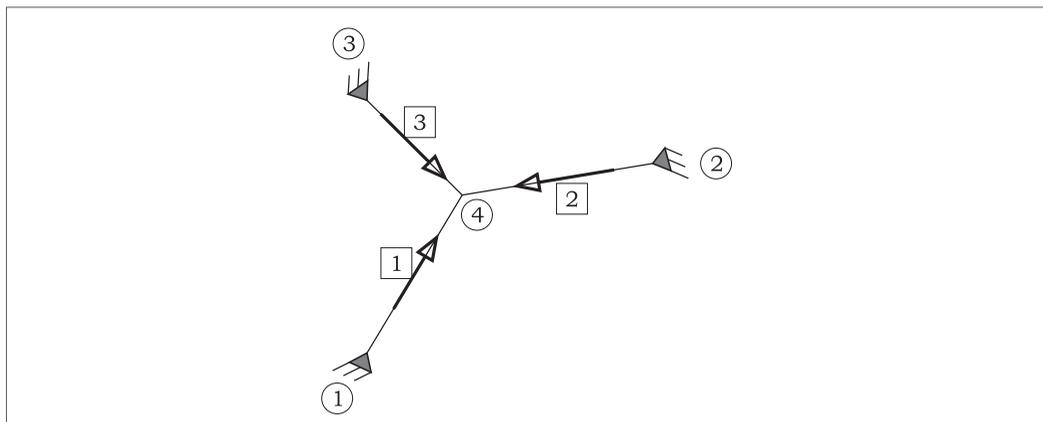


Figura 3.3 Nomenclatura y conectividad de la estructura.

Las propiedades de cada una de las barras que conforman la estructura se muestran en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Propiedades elasto-geométricas de las barras de la armadura.

Barra	E	A	L (m)	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)	l	m	n
1	1	1	4.1833	1.5	2.5	3.0	0.3586	0.5976	0.7171
2	1	1	4.2720	-3.0	-0.5	3.0	-0.7022	-0.1170	0.7022
3	1	1	3.6742	1.5	-1.5	3.0	0.4082	-0.4082	0.8165

Las matrices de rigidez de cada una de las barras de la estructura se muestran a continuación:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{4z} \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.0307 & 0.0512 & 0.0615 & -0.0307 & -0.0512 & -0.0615 \\ 0.0512 & 0.0854 & 0.1024 & -0.0512 & -0.0854 & -0.1024 \\ 0.0615 & 0.1024 & 0.1229 & -0.0615 & -0.1024 & -0.1229 \\ -0.0307 & -0.0512 & -0.0615 & 0.0307 & 0.0512 & 0.0615 \\ -0.0512 & -0.0854 & -0.1024 & 0.0512 & 0.0854 & 0.1024 \\ -0.0615 & -0.1024 & -0.1229 & 0.0615 & 0.1024 & 0.1229 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix}$$

Barra 1

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{4z} \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.1154 & 0.0192 & -0.1154 & -0.1154 & -0.0192 & 0.1154 \\ 0.0192 & 0.0032 & -0.0192 & -0.0192 & -0.0032 & 0.0192 \\ -0.1154 & -0.0192 & 0.1154 & 0.1154 & 0.0192 & -0.1154 \\ -0.1154 & -0.0192 & 0.1154 & 0.1154 & 0.0192 & -0.1154 \\ -0.0192 & -0.0032 & 0.0192 & 0.0192 & 0.0032 & -0.0192 \\ 0.1154 & 0.0192 & -0.1154 & -0.1154 & -0.0192 & 0.1154 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix}$$

Barra 2

$$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{4z} \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.0454 & -0.0454 & 0.0907 & -0.0454 & 0.0454 & -0.0907 \\ -0.0454 & 0.0454 & -0.0907 & 0.0454 & -0.0454 & 0.0907 \\ 0.0907 & -0.0907 & 0.1814 & -0.0907 & 0.0907 & -0.1814 \\ -0.0454 & 0.0454 & -0.0907 & 0.0454 & -0.0454 & 0.0907 \\ 0.0454 & -0.0454 & 0.0907 & -0.0454 & 0.0454 & -0.0907 \\ -0.0907 & 0.0907 & -0.1814 & 0.0907 & -0.0907 & 0.1814 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad \text{Barra 3}$$

Ensamblando las matrices de rigidez de las barras y eliminando los grados de libertad restringidos por las condiciones de apoyo y considerando las fuerzas aplicadas, la matriz de rigidez de la estructura a resolver es:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7.3 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.1915 & 0.0251 & 0.0368 \\ 0.0251 & 0.1339 & -0.0075 \\ 0.0368 & -0.0075 & 0.4198 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Resolviendo el sistema de} \\ \text{ecuaciones se obtiene:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} u_4 = 3.6226 / EA \\ v_4 = -1.6738 / EA \\ w_4 = -17.7355 / EA \end{array}$$

Las fuerzas en el sistema global (X, Y, Z) y local (x, y, z) de cada barra son:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0307 & 0.0512 & 0.0615 & -0.0307 & -0.0512 & -0.0615 \\ 0.0512 & 0.0854 & 0.1024 & -0.0512 & -0.0854 & -0.1024 \\ 0.0615 & 0.1024 & 0.1229 & -0.0615 & -0.1024 & -0.1229 \\ -0.0307 & -0.0512 & -0.0615 & 0.0307 & 0.0512 & 0.0615 \\ -0.0512 & -0.0854 & -0.1024 & 0.0512 & 0.0854 & 0.1024 \\ -0.0615 & -0.1024 & -0.1229 & 0.0615 & 0.1024 & 0.1229 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.6226 \\ -1.6738 \\ -17.7355 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0646 \\ 1.7743 \\ 2.1292 \\ -1.0646 \\ -1.7743 \\ -2.1292 \end{Bmatrix} \quad \text{Barra 1}$$

$$f_1 = \{l \quad m \quad n\} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{Bmatrix} = \{0.3586 \quad 0.5976 \quad 0.7171\} \begin{Bmatrix} 1.0646 \\ 1.7743 \\ 2.1292 \end{Bmatrix} = 2.9690$$

$$f_4 = \{l \quad m \quad n\} \begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{4z} \end{Bmatrix} = \{0.3586 \quad 0.5976 \quad 0.7171\} \begin{Bmatrix} -1.0646 \\ -1.7743 \\ -2.1292 \end{Bmatrix} = -2.9690$$

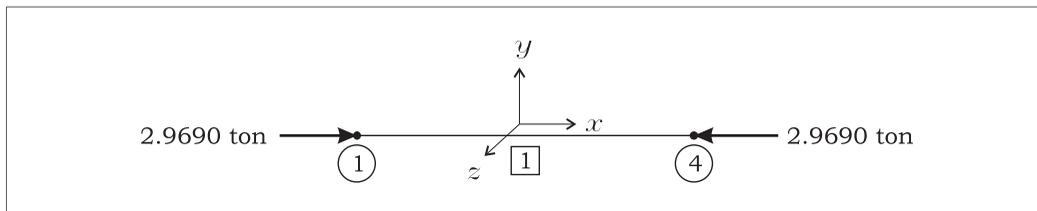


Figura 3.4 Fuerzas actuantes en el sistema local en barra 1.

$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1154 & 0.0192 & -0.1154 & -0.1154 & -0.0192 & 0.1154 \\ 0.0192 & 0.0032 & -0.0192 & -0.0192 & -0.0032 & 0.0192 \\ -0.1154 & -0.0192 & 0.1154 & 0.1154 & 0.0192 & -0.1154 \\ -0.1154 & -0.0192 & 0.1154 & 0.1154 & 0.0192 & -0.1154 \\ -0.0192 & -0.0032 & 0.0192 & 0.0192 & 0.0032 & -0.0192 \\ 0.1154 & 0.0192 & -0.1154 & -0.1154 & -0.0192 & 0.1154 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.6226 \\ -1.6738 \\ -17.7355 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.4333 \\ -0.4056 \\ 2.4333 \\ 2.4333 \\ 0.4056 \\ -2.4333 \end{Bmatrix}$	Barra 2
--	---------

$$f_2 = \{-0.7022 \quad -0.1170 \quad 0.7022\} \begin{Bmatrix} -2.4333 \\ -0.4056 \\ 2.4333 \end{Bmatrix} = 3.4651$$

$$f_4 = \{-0.7022 \quad -0.1170 \quad 0.7022\} \begin{Bmatrix} 2.4333 \\ 0.4056 \\ -2.4333 \end{Bmatrix} = -3.4651$$

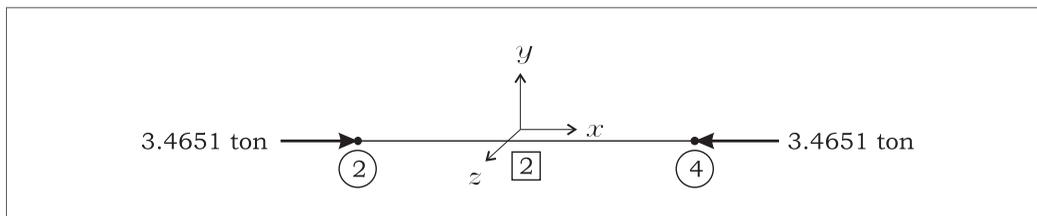


Figura 3.5 Fuerzas actuantes en el sistema local en barra 2.

	$\begin{Bmatrix} F_{3,x} \\ F_{3,y} \\ F_{3,z} \\ F_{4,x} \\ F_{4,y} \\ F_{4,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0454 & -0.0454 & 0.0907 & -0.0454 & 0.0454 & -0.0907 \\ -0.0454 & 0.0454 & -0.0907 & 0.0454 & -0.0454 & 0.0907 \\ 0.0907 & -0.0907 & 0.1814 & -0.0907 & 0.0907 & -0.1814 \\ -0.0454 & 0.0454 & -0.0907 & 0.0454 & -0.0454 & 0.0907 \\ 0.0454 & -0.0454 & 0.0907 & -0.0454 & 0.0454 & -0.0907 \\ -0.0907 & 0.0907 & -0.1814 & 0.0907 & -0.0907 & 0.1814 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.6226 \\ -1.6738 \\ -17.7355 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.3688 \\ -1.3688 \\ 2.7375 \\ -1.3688 \\ 1.3688 \\ -2.7375 \end{Bmatrix}$	Barra 3
--	--	---------

$$f_3 = \{0.4082 \quad -0.4082 \quad 0.8165\} \begin{Bmatrix} 1.3688 \\ -1.3688 \\ 2.7375 \end{Bmatrix} = 3.3527$$

$$f_4 = \{0.4082 \quad -0.4082 \quad 0.8165\} \begin{Bmatrix} -1.3688 \\ 1.3688 \\ -2.7375 \end{Bmatrix} = -3.3527$$

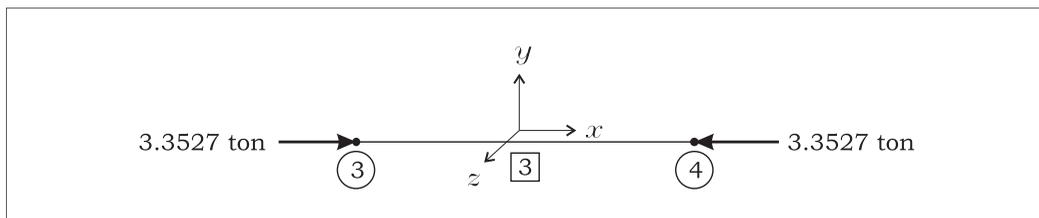


Figura 3.6 Fuerzas actuantes en el sistema local en barra 3.

En la Figura 3.7 se muestra un resumen de las fuerzas actuantes en las barras de la estructura, así como las reacciones en los apoyos debidas a las cargas actuantes.

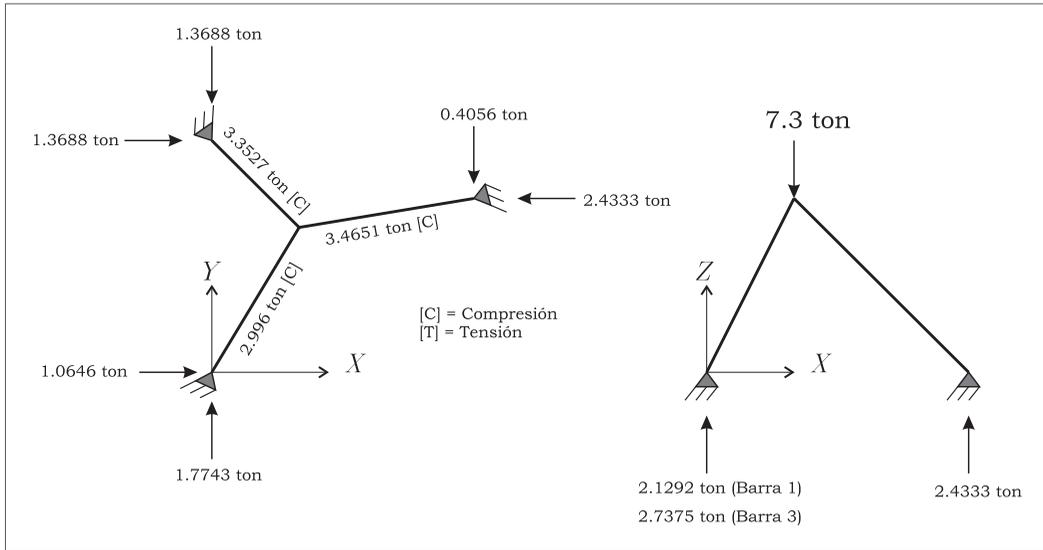


Figura 3.7 Fuerzas actuantes en las barras de la estructura y reacciones en los apoyos

3.2.2 Ejemplo 2 Armatura Tridimensional

Empleando el método de rigideces, resolver la estructura mostrada en la Figura 3.8

Material: $E = 141,000 \text{ kg/cm}^2$

Barras 1, 2, 3, 4, 5, 6: $A = 100 \text{ cm}^2$

Barra 7: $A = 20 \text{ cm}^2$

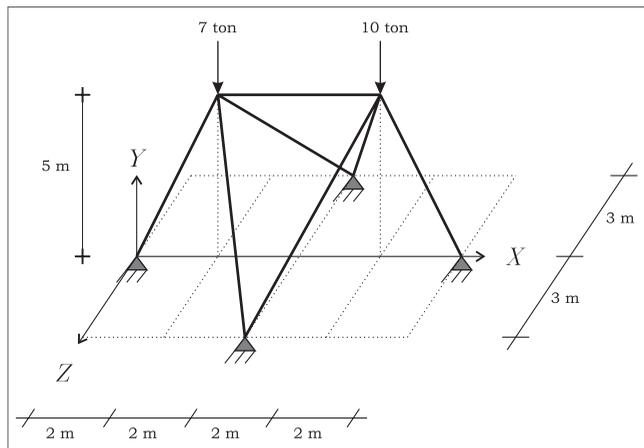


Figura 3.8 Armadura tridimensional.

La nomenclatura y conectividad de nodos y barras se muestra en la Figura 3.9

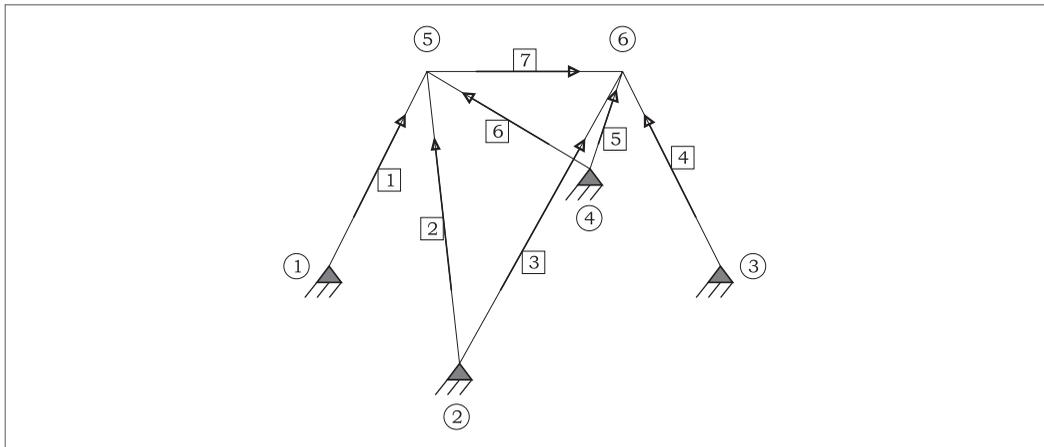


Figura 3.9 Nomenclatura y conectividad.

Para facilitar los cálculos, las coordenadas de cada nodo se muestran en la Tabla 3.2

Tabla 3.2 Coordenadas nodales de estructura a analizar

Nodo	Coordenadas (cm)		
	X	Y	Z
1	0	0	0
2	400	0	300
3	800	0	0
4	400	0	-300
5	200	500	0
6	600	500	0

De esta forma, las propiedades de cada una de las barras se muestran en la Tabla 3.3

Tabla 3.3 Propiedades elasto-geométricas de barras.

Barra	Nodo i	Nodo j	E (Ton/cm ²)	A (cm ²)	L (cm)	l	m	n
1	1	5	141	100	538.5165	0.3714	0.9285	0
2	2	5	141	100	616.4414	-0.3244	0.8111	-0.4867
3	2	6	141	100	616.4414	0.3244	0.8111	-0.4867
4	3	6	141	100	538.5165	-0.3714	0.9285	0
5	4	6	141	100	616.4414	0.3244	0.8111	0.4867
6	4	5	141	100	616.4414	-0.3244	0.8111	0.4867
7	5	6	141	20	400	1	0	0

Con los datos mostrados en la Tabla 3.3, las matrices de rigidez de las barras son las siguientes:

Barra 1

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \\ F_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6115 & 9.0286 & 0 & -3.6115 & -9.0286 & 0 \\ 9.0286 & 22.5716 & 0 & -9.0286 & -22.5716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.6115 & -9.0286 & 0 & 3.6115 & 9.0286 & 0 \\ -9.0286 & -22.5716 & 0 & 9.0286 & 22.5716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_5 \\ v_5 \\ w_5 \end{Bmatrix}$$

Barra 2

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \\ F_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4077 & -6.0193 & 3.6116 & -2.4077 & 6.0193 & -3.6116 \\ -6.0193 & 15.0482 & -9.0289 & 6.0193 & -15.0482 & 9.0289 \\ 3.6116 & -9.0289 & 5.4173 & -3.6116 & 9.0289 & -5.4173 \\ -2.4077 & 6.0193 & -3.6116 & 2.4077 & -6.0193 & 3.6116 \\ 6.0193 & -15.0482 & 9.0289 & -6.0193 & 15.0482 & -9.0289 \\ -3.6116 & 9.0289 & -5.4173 & 3.6116 & -9.0289 & 5.4173 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_5 \\ v_5 \\ w_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2,x} \\ F_{2,y} \\ F_{2,z} \\ F_{6,x} \\ F_{6,y} \\ F_{6,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4077 & 6.0193 & -3.6116 & -2.4077 & -6.0193 & 3.6116 \\ 6.0193 & 15.0482 & -9.0289 & -6.0193 & -15.0482 & 9.0289 \\ -3.6116 & -9.0289 & 5.4173 & 3.6116 & 9.0289 & -5.4173 \\ -2.4077 & -6.0193 & 3.6116 & 2.4077 & 6.0193 & -3.6116 \\ -6.0193 & -15.0482 & 9.0289 & 6.0193 & 15.0482 & -9.0289 \\ 3.6116 & 9.0289 & -5.4173 & -3.6116 & -9.0289 & 5.4173 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_6 \\ v_6 \\ w_6 \end{Bmatrix}$$

Barra 3

$$\begin{Bmatrix} F_{3,x} \\ F_{3,y} \\ F_{3,z} \\ F_{6,x} \\ F_{6,y} \\ F_{6,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6115 & -9.0286 & 0 & -3.6115 & 9.0286 & 0 \\ -9.0286 & 22.5716 & 0 & 9.0286 & -22.5716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.6115 & 9.0286 & 0 & 3.6115 & -9.0286 & 0 \\ 9.0286 & -22.5716 & 0 & -9.0286 & 22.5716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_6 \\ v_6 \\ w_6 \end{Bmatrix}$$

Barra 4

$$\begin{Bmatrix} F_{4,x} \\ F_{4,y} \\ F_{4,z} \\ F_{6,x} \\ F_{6,y} \\ F_{6,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4077 & 6.0193 & 3.6116 & -2.4077 & -6.0193 & -3.6116 \\ 6.0193 & 15.0482 & 9.0289 & -6.0193 & -15.0482 & -9.0289 \\ 3.6116 & 9.0289 & 5.4173 & -3.6116 & -9.0289 & -5.4173 \\ -2.4077 & -6.0193 & -3.6116 & 2.4077 & 6.0193 & 3.6116 \\ -6.0193 & -15.0482 & -9.0289 & 6.0193 & 15.0482 & 9.0289 \\ -3.6116 & -9.0289 & -5.4173 & 3.6116 & 9.0289 & 5.4173 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ u_6 \\ v_6 \\ w_6 \end{Bmatrix}$$

Barra 5

$$\begin{Bmatrix} F_{4,x} \\ F_{4,y} \\ F_{4,z} \\ F_{5,x} \\ F_{5,y} \\ F_{5,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4077 & -6.0193 & -3.6116 & -2.4077 & 6.0193 & 3.6116 \\ -6.0193 & 15.0482 & 9.0289 & 6.0193 & -15.0482 & -9.0289 \\ -3.6116 & 9.0289 & 5.4173 & 3.6116 & -9.0289 & -5.4173 \\ -2.4077 & 6.0193 & 3.6116 & 2.4077 & -6.0193 & -3.6116 \\ 6.0193 & -15.0482 & -9.0289 & -6.0193 & 15.0482 & 9.0289 \\ 3.6116 & -9.0289 & -5.4173 & -3.6116 & 9.0289 & 5.4173 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ w_5 \end{Bmatrix}$$

Barra 6

$\begin{Bmatrix} F_{5,x} \\ F_{5,y} \\ F_{5,z} \\ F_{6,x} \\ F_{6,y} \\ F_{6,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.05 & 0 & 0 & -7.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.05 & 0 & 0 & 7.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ w_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ w_6 \end{Bmatrix}$	Barra 7
--	---------

Al ensamblar las matrices de rigidez de las barras, la matriz de rigidez de la estructura resultante es:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.4769 & -3.0099 & 0 & -7.05 & 0 & 0 \\ -3.0099 & 52.6679 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.8347 & 0 & 0 & 0 \\ -7.05 & 0 & 0 & 15.4769 & 3.0099 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.0099 & 52.6679 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.8347 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ w_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ w_6 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} u_5 &= -0.0113 \\ v_5 &= -0.1336 \\ w_5 &= 0 \\ u_6 &= 0.0321 \\ v_6 &= -0.1917 \\ w_6 &= 0 \end{aligned}$$

Las fuerzas actuantes en cada una de las barras son:

$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \\ F_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6115 & 9.0286 & 0 & -3.6115 & -9.0286 & 0 \\ 9.0286 & 22.5716 & 0 & -9.0286 & -22.5716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.6115 & -9.0286 & 0 & 3.6115 & 9.0286 & 0 \\ -9.0286 & -22.5716 & 0 & 9.0286 & 22.5716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0113 \\ -0.1336 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2468 \\ 3.1170 \\ 0 \\ -1.2468 \\ -3.1170 \\ 0 \end{Bmatrix}$	Barra 1

$$f_1 = \{0.3714 \quad 0.9285 \quad 0\} \begin{Bmatrix} 1.2468 \\ 3.1170 \\ 0 \end{Bmatrix} = 3.3571$$

$$f_5 = \{0.3714 \quad 0.9285 \quad 0\} \begin{Bmatrix} -1.2468 \\ -3.1170 \\ 0 \end{Bmatrix} = -3.3571$$

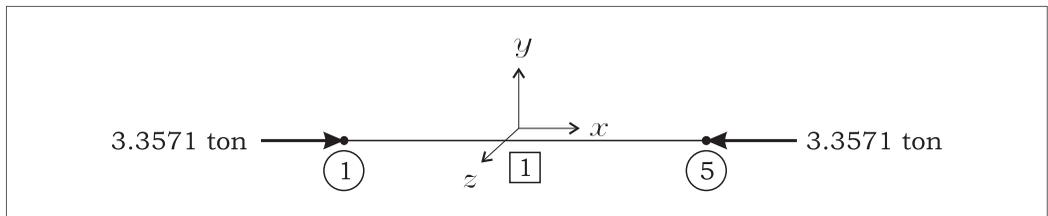


Figura 3.10 Fuerzas actuantes en la barra 1 en el sistema local.

$\begin{Bmatrix} F_{2,x} \\ F_{2,y} \\ F_{2,z} \\ F_{5,x} \\ F_{5,y} \\ F_{5,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4077 & -6.0193 & 3.6116 & -2.4077 & 6.0193 & -3.6116 \\ -6.0193 & 15.0482 & -9.0289 & 6.0193 & -15.0482 & 9.0289 \\ 3.6116 & -9.0289 & 5.4173 & -3.6116 & 9.0289 & -5.4173 \\ -2.4077 & 6.0193 & -3.6116 & 2.4077 & -6.0193 & 3.6116 \\ 6.0193 & -15.0482 & 9.0289 & -6.0193 & 15.0482 & -9.0289 \\ -3.6116 & 9.0289 & -5.4173 & 3.6116 & -9.0289 & 5.4173 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0113 \\ -0.1336 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.7766 \\ 1.9415 \\ -1.1649 \\ 0.7766 \\ -1.9415 \\ 1.1649 \end{Bmatrix}$	Barra 2
--	---------

$$f_2 = \{-0.3244 \quad 0.8111 \quad -0.4867\} \begin{Bmatrix} -0.7766 \\ 1.9415 \\ -1.1649 \end{Bmatrix} = 2.3936$$

$$f_5 = \{-0.3244 \quad 0.8111 \quad -0.4867\} \begin{Bmatrix} 0.7766 \\ -1.9415 \\ 1.1649 \end{Bmatrix} = -2.3936$$

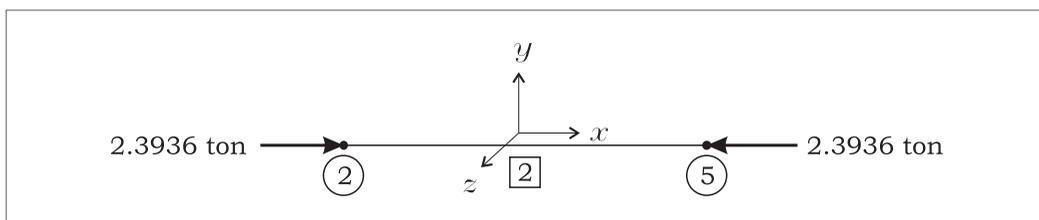


Figura 3.11 Fuerzas actuantes en barra 2 en el sistema local.

$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \\ F_{6x} \\ F_{6y} \\ F_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4077 & 6.0193 & -3.6116 & -2.4077 & -6.0193 & 3.6116 \\ 6.0193 & 15.0482 & -9.0289 & -6.0193 & -15.0482 & 9.0289 \\ -3.6116 & -9.0289 & 5.4173 & 3.6116 & 9.0289 & -5.4173 \\ -2.4077 & -6.0193 & 3.6116 & 2.4077 & 6.0193 & -3.6116 \\ -6.0193 & -15.0482 & 9.0289 & 6.0193 & 15.0482 & -9.0289 \\ 3.6116 & 9.0289 & -5.4173 & -3.6116 & -9.0289 & 5.4173 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0321 \\ -0.1917 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0766 \\ 2.6915 \\ -1.6149 \\ -1.0766 \\ -2.6915 \\ 1.6149 \end{Bmatrix}$	Barra 3
---	---------

$$f_2 = \{0.3244 \quad 0.8111 \quad -0.4867\} \begin{Bmatrix} 1.0766 \\ 2.6915 \\ -1.6149 \end{Bmatrix} = 3.3183$$

$$f_6 = \{0.3244 \quad 0.8111 \quad -0.4867\} \begin{Bmatrix} -1.0766 \\ -2.6915 \\ 1.6149 \end{Bmatrix} = -3.3183$$

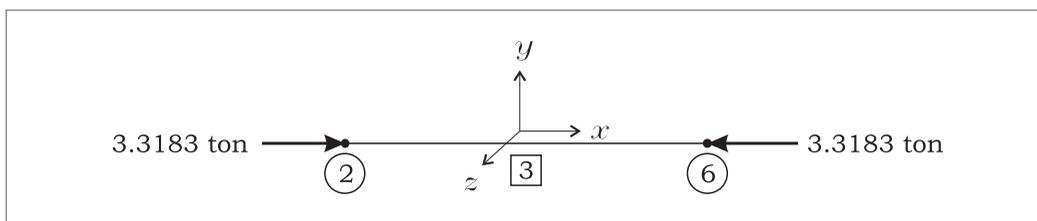


Figura 3.12 Fuerzas actuantes en barra 3 en el sistema local.

$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{3z} \\ F_{6x} \\ F_{6y} \\ F_{6z} \end{Bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} 3.6115 & -9.0286 & 0 & -3.6115 & 9.0286 & 0 \\ -9.0286 & 22.5716 & 0 & 9.0286 & -22.5716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.6115 & 9.0286 & 0 & 3.6115 & -9.0286 & 0 \\ 9.0286 & -22.5716 & 0 & -9.0286 & 22.5716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0321 \\ -0.1917 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.8468 \\ 4.6170 \\ 0 \\ 1.8468 \\ -4.6170 \\ 0 \end{Bmatrix}$	Barra 4
--	---	---------

$$f_3 = \{-0.3714 \quad 0.9285 \quad 0\} \begin{Bmatrix} -1.8468 \\ 4.6170 \\ 0 \end{Bmatrix} = 4.9727$$

$$f_6 = \{-0.3714 \quad 0.9285 \quad 0\} \begin{Bmatrix} 1.8468 \\ -4.6170 \\ 0 \end{Bmatrix} = -4.9727$$

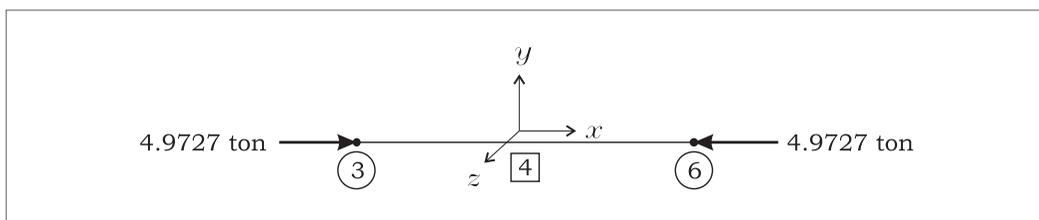


Figura 3.13 Fuerzas actuantes en barra 4 en el sistema local.

		Barra 5
$\begin{Bmatrix} F_{4,x} \\ F_{4,y} \\ F_{4,z} \\ F_{6,x} \\ F_{6,y} \\ F_{6,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4077 & 6.0193 & 3.6116 & -2.4077 & -6.0193 & -3.6116 \\ 6.0193 & 15.0482 & 9.0289 & -6.0193 & -15.0482 & -9.0289 \\ 3.6116 & 9.0289 & 5.4173 & -3.6116 & -9.0289 & -5.4173 \\ -2.4077 & -6.0193 & -3.6116 & 2.4077 & 6.0193 & 3.6116 \\ -6.0193 & -15.0482 & -9.0289 & 6.0193 & 15.0482 & 9.0289 \\ -3.6116 & -9.0289 & -5.4173 & 3.6116 & 9.0289 & 5.4173 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0321 \\ -0.1917 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0766 \\ 2.6915 \\ 1.6149 \\ -1.0766 \\ -2.6915 \\ -1.6149 \end{Bmatrix}$		

$$f_4 = \{0.3244 \quad 0.8111 \quad 0.4867\} \begin{Bmatrix} 1.0766 \\ 2.6915 \\ 1.6149 \end{Bmatrix} = 3.3183$$

$$f_6 = \{0.3244 \quad 0.8111 \quad 0.4867\} \begin{Bmatrix} -1.0766 \\ -2.6915 \\ -1.6149 \end{Bmatrix} = -3.3183$$

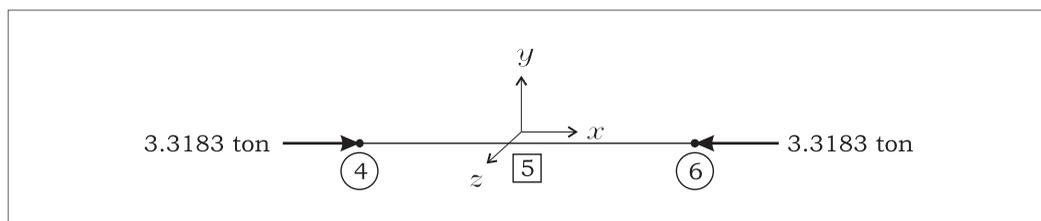


Figura 3.14 Fuerzas actuantes en barra 5 en el sistema local.

$\begin{Bmatrix} F_{4,x} \\ F_{4,y} \\ F_{4,z} \\ F_{5,x} \\ F_{5,y} \\ F_{5,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4077 & -6.0193 & -3.6116 & -2.4077 & 6.0193 & 3.6116 \\ -6.0193 & 15.0482 & 9.0289 & 6.0193 & -15.0482 & -9.0289 \\ -3.6116 & 9.0289 & 5.4173 & 3.6116 & -9.0289 & -5.4173 \\ -2.4077 & 6.0193 & 3.6116 & 2.4077 & -6.0193 & -3.6116 \\ 6.0193 & -15.0482 & -9.0289 & -6.0193 & 15.0482 & 9.0289 \\ 3.6116 & -9.0289 & -5.4173 & -3.6116 & 9.0289 & 5.4173 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0113 \\ -0.1336 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.7766 \\ 1.9415 \\ 1.1649 \\ 0.7766 \\ -1.9415 \\ -1.1649 \end{Bmatrix}$	Barra 6
--	---------

$$f_4 = \{-0.3244 \quad 0.8111 \quad 0.4867\} \begin{Bmatrix} -0.7766 \\ 1.9415 \\ 1.1649 \end{Bmatrix} = 2.3936$$

$$f_5 = \{-0.3244 \quad 0.8111 \quad 0.4867\} \begin{Bmatrix} 0.7766 \\ -1.9415 \\ -1.1649 \end{Bmatrix} = -2.3936$$

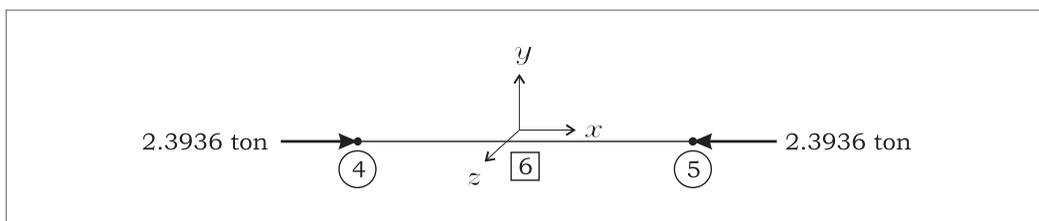


Figura 3.15 Fuerzas actuantes en barra 6 en el sistema local.

$$\begin{matrix} F_{5,x} \\ F_{5,y} \\ F_{5,z} \\ F_{6,x} \\ F_{6,y} \\ F_{6,z} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 7.05 & 0 & 0 & -7.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.05 & 0 & 0 & 7.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0113 \\ -0.1336 \\ 0 \\ 0.0321 \\ -0.1917 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3064 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3064 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra 7

$$f_5 = \{1 \ 0 \ 0\} \begin{Bmatrix} -0.3064 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -0.3064$$

$$f_6 = \{1 \ 0 \ 0\} \begin{Bmatrix} 0.3064 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0.3064$$

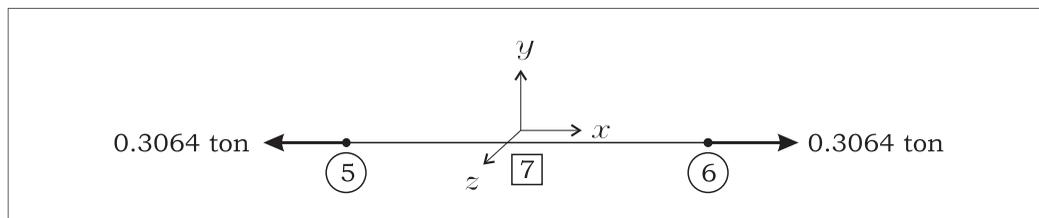
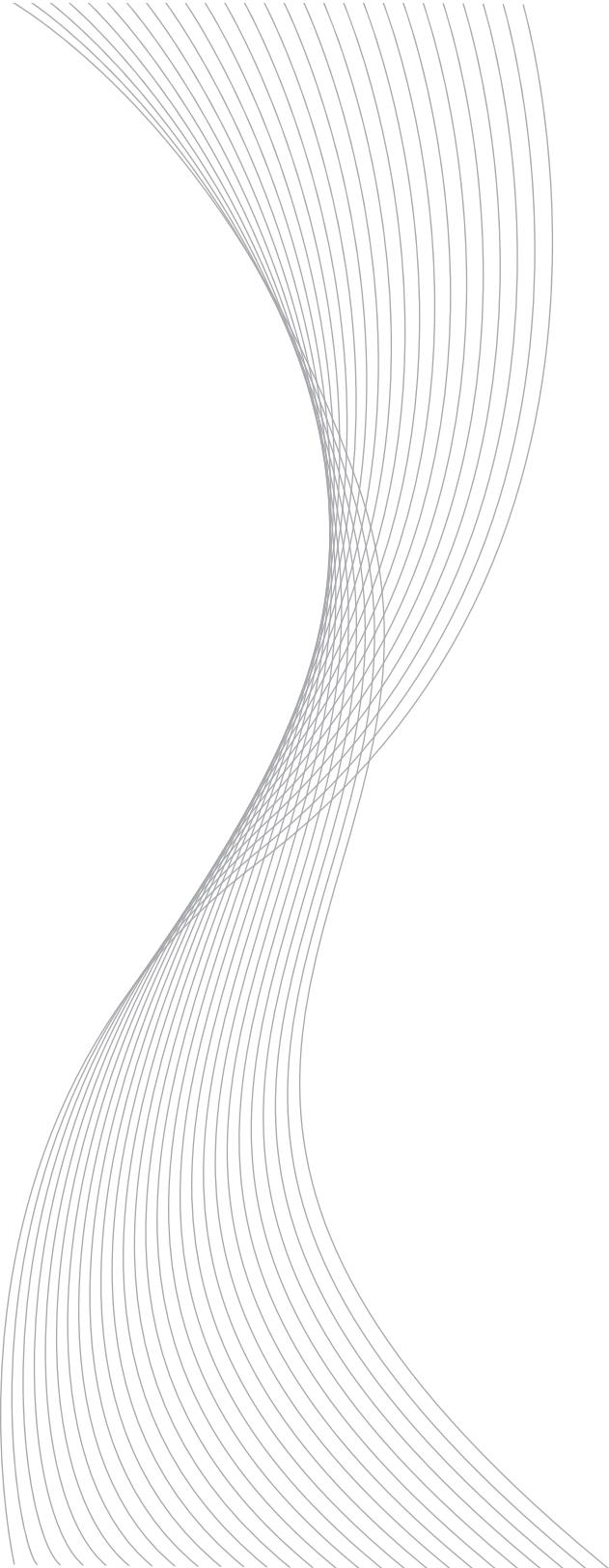


Figura 3.16 Fuerzas actuantes en barra 7 en el sistema local

La Tabla 3.4 muestra un resumen de las fuerzas actuantes en todas las barras de la estructura mostrada en la Figura 3.8

Tabla 3.4 Resumen de las fuerzas actuantes en las barras.

Barra	Carga	Tipo
1	3.3571	Compresión
2	2.3936	Compresión
3	3.3183	Compresión
4	4.9727	Compresión
5	3.3183	Compresión
6	2.3936	Compresión
7	0.3064	Tensión



VIGAS
CONTINUAS

4

4 Vigas Continuas

Las vigas son elementos barra que soportan cargas transversales a su eje únicamente, es decir, se supone que no transmiten fuerzas axiales, ya que generalmente se encuentran trabajando en conjunto con un sistema de piso que hace que las fuerzas axiales que se presentan sean demasiado pequeñas, por lo que en la mayoría de los casos pueden despreciarse. Ejemplos de lo anterior pueden encontrarse en los sistemas de piso de los edificios o en la superestructura de los puentes, entre otras varias.

Al considerar que las vigas solamente soportan y transmiten cargas transversales a su eje, los elementos mecánicos que soportan son fuerzas cortantes y momentos flexionantes, que se asocian a desplazamientos verticales y de rotación, respectivamente. Por lo anterior, para determinar los coeficientes de rigidez se deberán imponer desplazamientos unitarios en los extremos de las barras correspondientes, es decir, desplazamientos verticales unitarios así como giros unitarios en los extremos de la barra a considerar.

4.1 DETERMINACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO VIGA.

Se considera una barra doblemente empotrada de longitud L , sección con momento de inercia I_z y material con módulo de elasticidad E como la que se muestra en la Figura 4.1

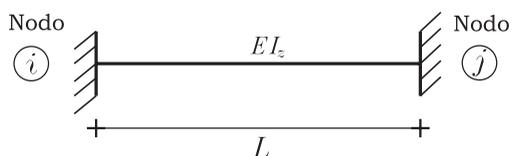


Figura 4.1 Propiedades de barra doblemente empotrada considerada para análisis

Imponiendo un desplazamiento vertical unitario en el nodo i ($v_{iy}=1$) como se ilustra en la Figura 4.2, a una distancia x del nodo i , para que se mantenga el equilibrio se debe cumplir con:

$$V_y = -F_{iy} \quad (4.1)$$

$$M_z = M_{iz} - F_{iy}x \quad (4.2)$$

De mecánica de sólidos se sabe que:

$$\frac{dv_s}{dx} = f_{fy} \frac{V_y}{GA} \quad (4.3)$$

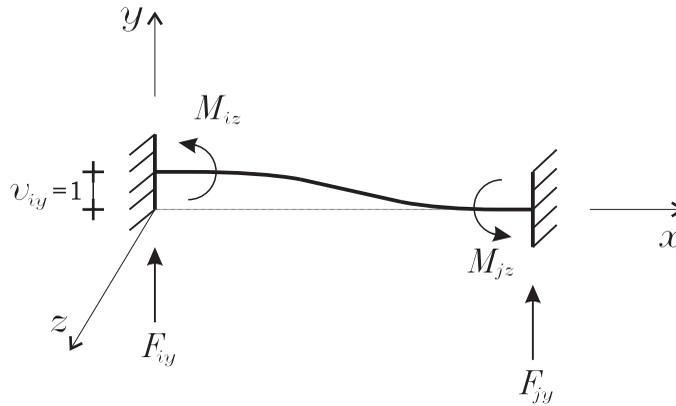


Figura 4.2 Barra doblemente empotrada con desplazamiento vertical unitario en el nodo inicial

$$\frac{d^2 v_b}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (4.4)$$

- A = Área de la sección transversal de la barra
- I_z = Momento de inercia de la sección transversal alrededor del eje local z
- E = Módulo de elasticidad del material
- G = Módulo de elasticidad al corte del material
- dv_z/dx = Pendiente de la deformada por cortante
- $d^2 v_b/dx^2$ = Giro de la deformada por flexión

El factor de forma f_{fy} depende de las características de la sección, en otras palabras, la deformación por cortante depende de la forma en que la sección transmite las fuerzas cortantes, por lo tanto, para una barra con sección A no es igual para una sección cuadrada que para una sección tubular hueca. De mecánica de sólidos se puede determinar el factor de forma f_{fy} que se determina a partir de:

$$f_{fy} = \int_A \frac{Q_z^2}{r_z^2 I_z b^2} dA \quad (4.5)$$

- Q_z = Momento estático alrededor del eje z del área de la sección comprendida entre la fibra en estudio y la fibra más alejada
- b = Ancho de la fibra en estudio
- r_z = Radio de giro de la sección

Substituyendo (4.1) y (4.2) en (4.3) y (4.4) respectivamente, se obtiene:

$$\frac{dv_s}{dx} = -f_{fy} \frac{F_{iy}}{GA} \quad (4.6)$$

$$\frac{dv_b}{dx} = \frac{F_{iy}}{EI_z} x - \frac{M_{iz}}{EI_z} \quad (4.7)$$

Integrando (4.7) se obtiene:

$$\frac{dv_b}{dx} = \frac{F_{iy}}{2EI_z} x^2 - \frac{M_{iz}}{EI_z} x + C_1 \quad (4.8)$$

De la Figura 4.2 puede verse que en la barra se tienen las siguientes condiciones de frontera:

- 1) Para $x = 0 \rightarrow dv_b/dx = 0$
- 2) Para $x = L \rightarrow dv_b/dx = 0$

Substituyendo la primera condición de frontera en (4.8)

$$0 = \frac{F_{iy}}{2EI_z} (0) - \frac{M_{iz}}{EI_z} (0) + C_1$$

de donde se puede ver que $C_1 = 0$.

Substituyendo la segunda condición de frontera y $C_1 = 0$ en (4.8) se obtiene:

$$0 = \frac{F_{iy}L^2}{2EI_z} - \frac{M_{iz}L}{EI_z} \longrightarrow M_{iz} = F_{iy} \frac{L}{2} \quad (4.9)$$

Substituyendo (4.9) en (4.8)

$$\frac{dv_b}{dx} = \frac{F_{iy}}{2EI_z} x^2 - \frac{F_{iy}L}{2EI_z} x \quad (4.10)$$

y considerando que la pendiente total dv/dx es la suma de las pendientes por flexión dv_b/dx y por cortante dv_s/dx lo cual se puede expresar como:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_b}{dx} + \frac{dv_s}{dx} \quad (4.11)$$

Substituyendo (4.3) y (4.10) en (4.11) \longrightarrow

$$\frac{dv}{dx} = \frac{F_{iy}}{2EI_z} x^2 - \frac{F_{iy}}{2EI_z} x - f_{fy} \frac{F_{iy}}{GA}$$

Integrando la expresión anterior respecto a x se obtiene: _____ →

$$v = \frac{F_{iy}}{6EI_z} x^3 - \frac{F_{iy}L}{4EI_z} x^2 - f_{fy} \frac{F_{iy}}{GA} x + C_2 \quad (4.12)$$

En la Figura 4.2 puede observarse que se tienen las siguientes condiciones de frontera:

- 1) Para $x = 0 \rightarrow v = 1$
- 2) Para $x = L \rightarrow v = 0$

Substituyendo en (4.12) la primera condición de frontera se tiene: _____ →

$$1 = \frac{F_{iy}}{6EI_z} (0)^3 - \frac{F_{iy}L}{4EI_z} (0)^2 - f_{fy} \frac{F_{iy}}{GA} (0) + C_2$$

de donde resulta evidente que $C_2 = 1$, y substituyendo en (4.12)

$$0 = \frac{F_{iy}L^3}{6EI_z} - \frac{F_{iy}L^3}{4EI_z} - f_{fy} \frac{F_{iy}L}{GA} + 1$$

$$\frac{F_{iy}L^3}{12EI_z} + f_{fy} \frac{F_{iy}L}{GA} = 1$$

$$\frac{F_{iy}L^3}{12EI_z} \left[1 + f_{fy} \frac{F_{iy}L}{GA} \frac{12EI_z}{L^3} \right] = 1$$

$$\frac{F_{iy}L^3}{12EI_z} \left[1 + f_{fy} F_{iy} \frac{12EI_z}{GAL^2} \right] = 1$$

$$F_{iy} = \frac{12EI_z}{\left(1 + f_{fy} \frac{12EI_z}{GAL^2} \right) L^3} \quad (4.13)$$

Definiendo el factor de cortante φ_y como:

$$\varphi_y = f_{fy} \frac{12EI_z}{GAL^2} \quad (4.14)$$

Substituyendo (4.14) en (4.13)

$$F_{iy} = \frac{12EI_z}{(1 + \varphi_y) L^3} \quad (4.15)$$

y (4.15) en (4.9)

$$M_{iz} = \frac{6EI_z}{(1 + \varphi_y) L^2} \quad (4.16)$$

Por equilibrio, las fuerzas que se presentan en los nodos deben cumplir con $\sum F_y = 0$ para que esta condición se cumpla, de acuerdo a las fuerzas mostradas en la Figura 4.2, ésta condición se presenta cuando: $F_{iy} + F_{jy} = 0$

Substituyendo (4.15)
en la expresión anterior: \longrightarrow

$$\frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} + F_{jy} = 0 \quad \left| \rightarrow \quad F_{jy} = -\frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} \right.$$

(4.17)

De manera análoga, por equilibrio de momentos se debe cumplir con $\sum M_z = 0$ y de acuerdo a la Figura 4.2 esto se cumple cuando: $M_{iz} + M_{jz} + F_{jy}L = 0$

Substituyendo (4.16) y (4.17) en la ecuación anterior:

$$\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} + M_{jz} + \left[-\frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} \right] L = 0 \quad \left| \rightarrow \quad \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} + M_{jz} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} = 0 \right. \quad \left| \rightarrow \quad M_{jz} = \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} \right.$$

(4.18)

Las fuerzas que se generan por la imposición del desplazamiento vertical unitario en el nodo i ($v_i=1$) se muestran de forma gráfica en la Figura 4.3.

De forma análoga, si se impone desplazamiento vertical en el nodo j , así como los correspondientes giros en ambos nodos, las fuerzas necesarias para mantener el equilibrio se muestran en las figuras 4.4 a 4.6 respectivamente.

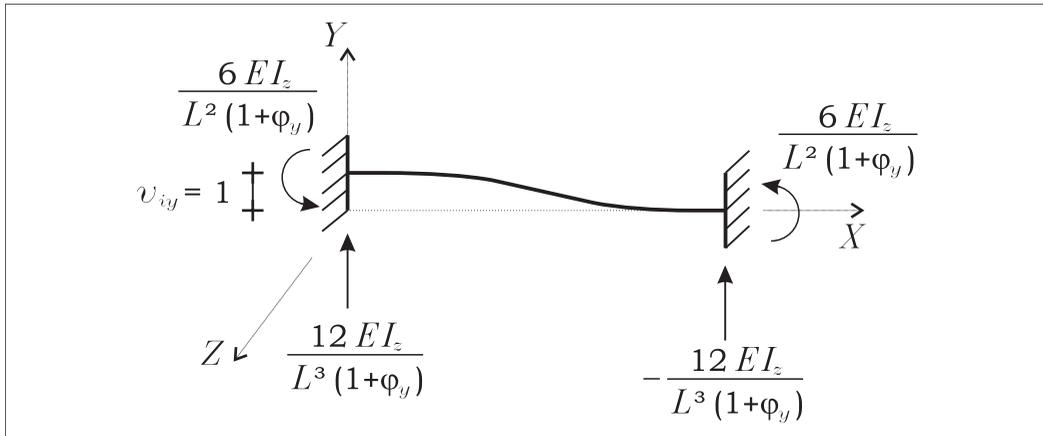


Figura 4.3 Coeficientes de rigidez debidos a desplazamiento vertical unitario en el nodo inicial ($v_i = 1$)

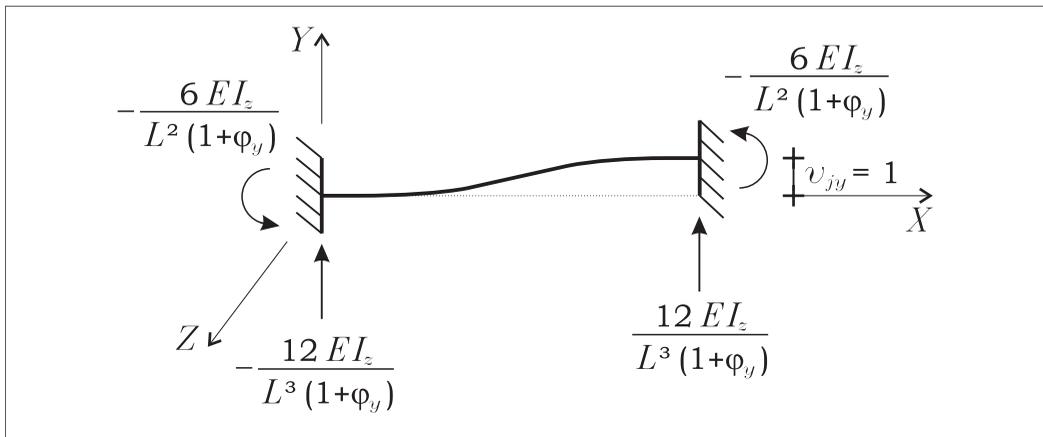


Figura 4.4 Coeficientes de rigidez debidos a desplazamiento vertical unitario en el nodo final ($v_j = 1$)

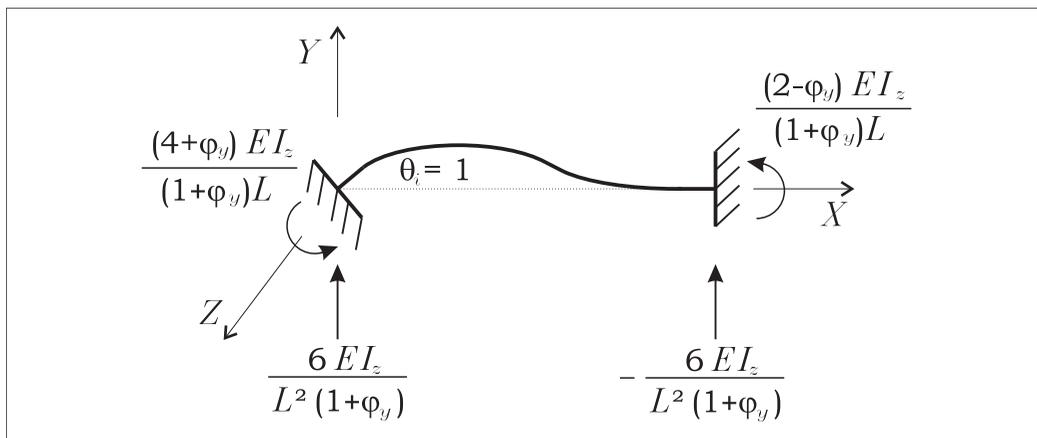


Figura 4.5 Coeficientes de rigidez debidos a giro unitario en el nodo inicial ($\theta_i = 1$)

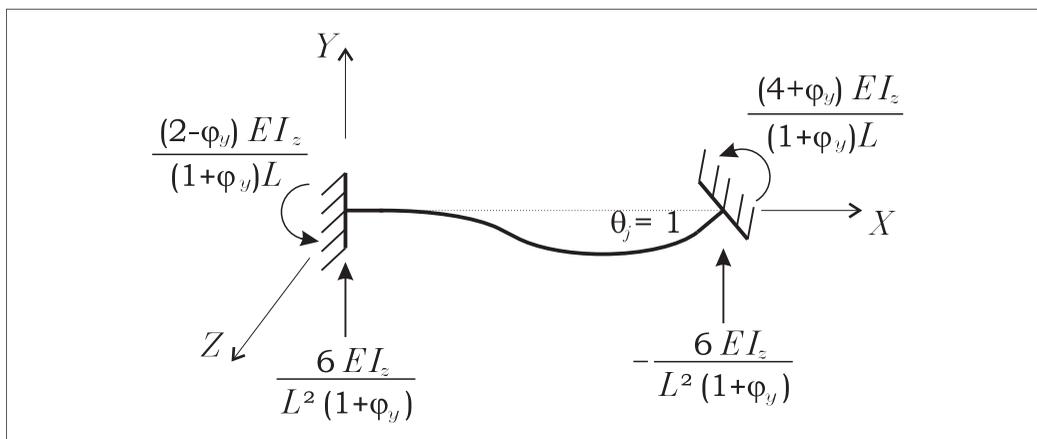


Figura 4.6 Coeficientes de rigidez debidos a giro unitario en el nodo final ($\theta_j = 1$)

Expresando la relación fuerza–desplazamiento en forma matricial se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & -\frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & \frac{(4+\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & \frac{(2-\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} \\ -\frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & \frac{(2-\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & \frac{(4+\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

En la expresión anterior el término φ_y se calcula mediante la ecuación (4.14), el valor de f_{fy} se puede obtener al resolver (4.5), la cual para casos prácticos se le puede asignar los siguientes valores:

$f_{fy} = 1.2$ para secciones rectangulares o triangulares

$f_{fy} = 10/9$ para secciones circulares

$f_{fy} = \frac{\text{Área total de la sección}}{\text{Área del alma}}$ para perfiles I o H cuando las cargas actúan paralelas al alma

$f_{fy} = \frac{\text{Área total de la sección}}{\text{Área de los patines}}$ para perfiles I o H cuando las cargas actúan paralelas a los patines

La matriz de rigidez mostrada en (4.19) no requiere rotación del sistema local al global, ya que para vigas continuas, es relativamente sencillo asegurarse de que ambos sistemas coincidan, solamente el sentido de la barra siempre se debe establecer de izquierda a derecha. Por este motivo, se ha eliminado de la notación la referencia a los ejes locales (x, y, z) y considerando en todos los casos solamente los ejes globales (X, Y, Z).

4.2 Ejemplos de aplicación

4.2.1 Ejemplo 1 – Viga continua considerando la participación de la fuerza cortante en los términos de rigidez

Resolver la viga continua mostrada en la Figura 4.7 considerando los efectos de la fuerza cortante en la determinación de los elementos mecánicos actuantes en las barras.

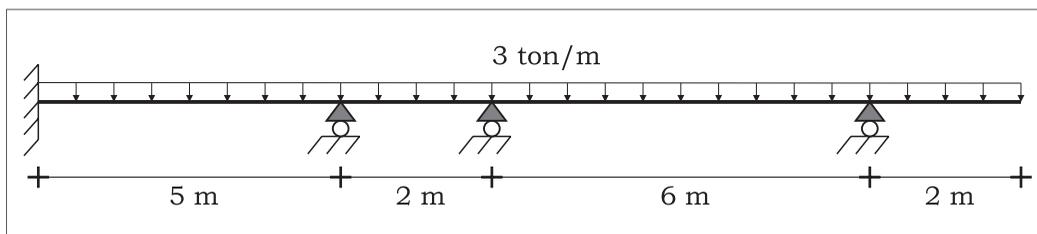


Figura 4.7 Viga continua

DATOS: Concreto $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$ $\rightarrow E = 10,000 \sqrt{f'_c} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$

Sección transversal rectangular de 60 x 25 cm

De acuerdo a la mecánica de sólidos, para materiales elásticos, lineales e isótropos; el módulo de elasticidad al corte G se determina a partir de:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \left| \rightarrow \text{Donde: } \nu = \text{Relación de Poisson} \right.$$

Para el caso de concreto común $\nu \approx 0.2$, haciendo que $G \approx 0.4 E$. La conectividad y nomenclatura de nodos y barras de la viga se muestra en la Figura 4.8.

Barra 2

$$\begin{Bmatrix} F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 84.037 & 8,403.691 & -84.037 & 8,403.691 \\ 8,403.691 & 1,196,125.300 & -8,403.691 & 484,612.826 \\ -84.037 & -8,403.691 & 84.037 & -8,403.691 \\ 8,403.691 & 484,612.826 & -8,403.691 & 1,196,125.300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Barra 3

$$\begin{Bmatrix} F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.838 & 1,151.315 & -3.838 & 1,151.315 \\ 1,151.315 & 463,979.817 & -1,151.315 & 226,808.992 \\ -3.838 & -1,151.315 & 3.838 & -1,151.315 \\ 1,151.315 & 226,808.992 & -1,151.315 & 463,979.817 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

Barra 4

$$\begin{Bmatrix} F_{4y} \\ M_{4z} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 84.037 & 8,403.691 & -84.037 & 8,403.691 \\ 8,403.691 & 1,196,125.300 & -8,403.691 & 484,612.826 \\ -84.037 & -8,403.691 & 84.037 & -8,403.691 \\ 8,403.691 & 484,612.826 & -8,403.691 & 1,196,125.300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_4 \\ \theta_4 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$$

En los ejemplos vistos en los capítulos anteriores, donde se tratan armaduras, las fuerzas se aplican directamente sobre los nodos, por lo que el vector de cargas se puede obtener de las fuerzas aplicadas a cada uno de los nodos. En el caso de vigas, las fuerzas pueden aplicarse tanto en los nodos, como en el interior de las barras.

Cuando en vigas las cargas se aplican directamente a los nodos, la forma de crear el vector de cargas es similar a como se procede en el caso de armaduras. Si las cargas se aplican en las barras, las fuerzas deben “trasladarse” a los nodos, ya que es en donde se establecen las relaciones fuerza–desplazamiento. En otras palabras, se deben calcular las fuerzas actuantes en los nodos debido a las fuerzas externas impuestas en las barras.

Las fuerzas actuantes se estiman considerando que todos los nodos se encuentran inicialmente empotrados, tal y como se ilustra en la Figura 4.9

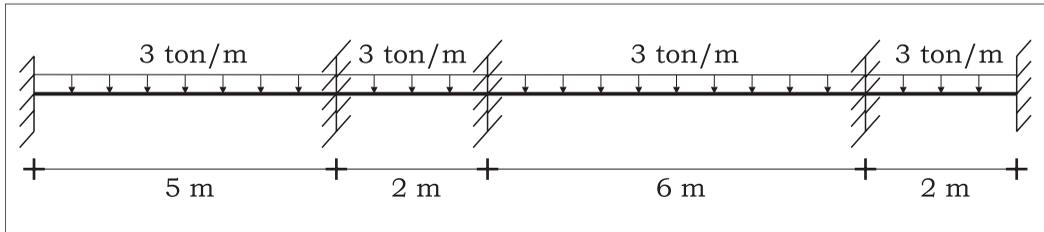


Figura 4.9 Empotramiento inicial de los extremos de las barras.

Las fuerzas de empotramiento perfecto (FEP) en una barra doblemente empotrada (cortante y momento) se muestran en la Figura 4.10

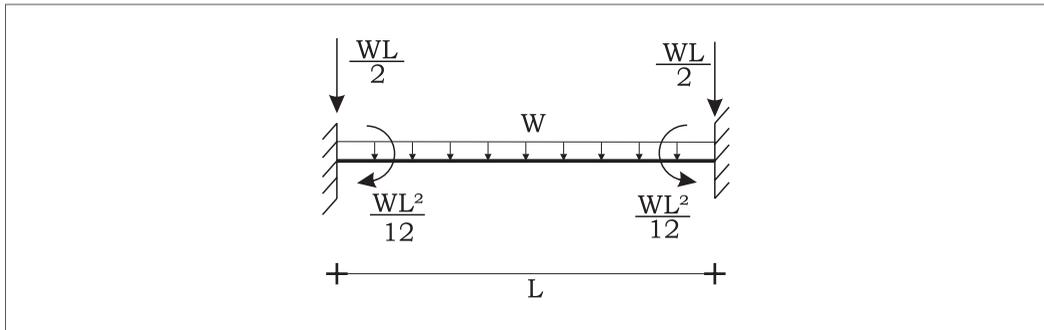


Figura 4.10 Acciones en los nodos (FEP) causados por una carga uniformemente distribuida.

Para las barras que conforman la viga, las FEP planteadas como acciones en las barras se muestran en la Figura 4.11.

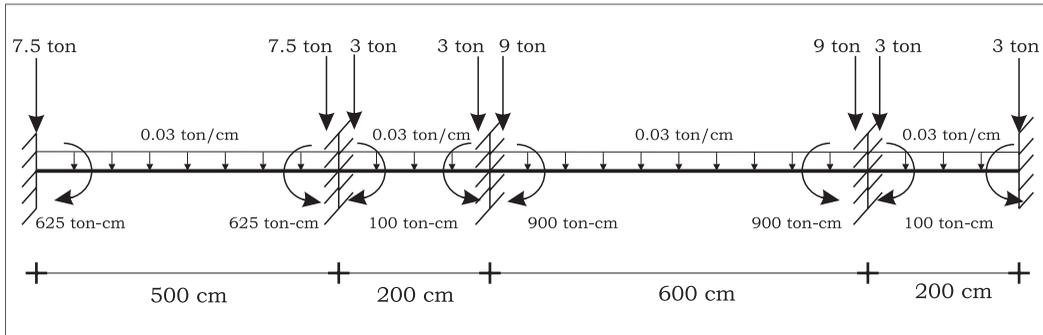


Figura 4.11 FEP en viga continua planteadas como acciones en los nodos (barra / nodo).

Las fuerzas planteadas como acciones en los nodos se expresan de forma matricial de la siguiente forma:

FEP en Barra 1

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.5 \\ -625.0 \\ -7.5 \\ 625.0 \end{Bmatrix}$$

FEP en Barra 2

$$\begin{Bmatrix} F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.0 \\ -100.0 \\ -3.0 \\ 100.0 \end{Bmatrix}$$

FEP en Barra 3

$$\begin{Bmatrix} F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9.0 \\ -900.0 \\ -9.0 \\ 900.0 \end{Bmatrix}$$

FEP en Barra 4

$$\begin{Bmatrix} F_{4y} \\ M_{4z} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.0 \\ -100.0 \\ -3.0 \\ 100.0 \end{Bmatrix}$$

El vector de fuerzas actuantes en la estructura, planteadas como acciones en las barras, resulta de la suma de las fuerzas en cada uno de los nodos expresado como:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.5 \\ -625.0 \\ -10.5 \\ 525.0 \\ -12.0 \\ -800.0 \\ -12.0 \\ 800.0 \\ -3.0 \\ 100.0 \end{Bmatrix}$$

Ensamblando las matrices de rigidez de las barras, la matriz de rigideces de la estructura resultante es:

$$\begin{Bmatrix} 525.0 \\ -800.0 \\ 800.0 \\ -3.0 \\ 100.0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,747,656.595 & 484,612.826 & 0 & 0 & 0 \\ 484,612.26 & 1,660,105.177 & 226,808.992 & 0 & 0 \\ 0 & 226,808.992 & 1,660,105.177 & -8,403.691 & 484,612.826 \\ 0 & 0 & -8,403.691 & 84.037 & -8,403.691 \\ 0 & 0 & 484,612.826 & -8,403.691 & 1,196,125.300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= 5.1446 \times 10^{-4} \text{ radianes} & v_5 &= 0.1129 \text{ cm} \\ \theta_3 &= -7.7197 \times 10^{-4} \text{ radianes} & \theta_5 &= 4.6176 \times 10^{-4} \text{ radianes} \\ \theta_4 &= 1.0239 \times 10^{-3} \text{ radianes} \end{aligned}$$

Las fuerzas en los extremos de cada barra son las siguientes:

	Barra 1	
$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.548 & 1,636.915 & -6.548 & 1,636.915 \\ 1,636.915 & 551,531.295 & -1,636.915 & 266,926.305 \\ -6.548 & -1,636.915 & 6.548 & -1,636.915 \\ 1,636.915 & 266,926.305 & -1,636.915 & 551,531.295 \end{bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5.1446 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.842 \\ 137.324 \\ -0.842 \\ 283.744 \end{Bmatrix}$

A las fuerzas así obtenidas hay que quitarle el efecto de las FEP, ya que aunque inicialmente se consideró que las barras están perfectamente empotradas en ambos extremos, en la realidad no es así, por lo que hay que “eliminar” tal efecto, por lo cual los elementos mecánicos finales se obtienen restando las FEP, es decir:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.842 \\ 137.324 \\ -0.842 \\ 283.744 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -7.5 \\ -625.0 \\ -7.5 \\ 625.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8.342 \\ 762.324 \\ 6.658 \\ -341.256 \end{Bmatrix}$$

Así, para obtener los elementos mecánicos finales en las barras, a las fuerzas que se obtienen de la relación fuerza–desplazamiento $\{F\}=[K]\{D\}$ se deben restar las fuerzas de empotramiento perfecto (FEP) debidas a la acción de fuerzas en el interior de las barras. En este contexto, para las demás barras el cálculo de las fuerzas actuantes se muestra en una sola operación de la siguiente forma:

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 84.037 & 8,403.691 & -84.037 & 8,403.691 \\ 8,403.691 & 1,196,125.300 & -8,403.691 & 484,612.826 \\ -84.037 & -8,403.691 & 84.037 & -8,403.691 \\ 8,403.691 & 484,612.826 & -8,403.691 & 1,196,125.300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 5.1446 \times 10^{-4} \\ 0 \\ -7.7197 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -3.0 \\ -100.0 \\ -3.0 \\ 100.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.836 \\ 341.256 \\ 5.164 \\ -774.060 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 3.838 & 1,151.315 & -3.838 & 1,151.315 \\ 1,151.315 & 463,979.817 & -1,151.315 & 226,808.992 \\ -3.838 & -1,151.315 & 3.838 & -1,151.315 \\ 1,151.315 & 226,808.992 & -1,151.315 & 463,979.817 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -7.7197 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 1.0239 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -9.0 \\ -900.0 \\ -9.0 \\ 900.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.290 \\ 774.060 \\ 8.710 \\ -600.0 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} F_{4y} \\ M_{4z} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 84.037 & 8,403.691 & -84.037 & 8,403.691 \\ 8,403.691 & 1,196,125.300 & -8,403.691 & 484,612.826 \\ -84.037 & -8,403.691 & 84.037 & -8,403.691 \\ 8,403.691 & 484,612.826 & -8,403.691 & 1,196,125.300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.0239 \times 10^{-3} \\ 0.1129 \\ 4.6176 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -3.0 \\ -100.0 \\ -3.0 \\ 100.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.0 \\ 600.0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

Los elementos mecánicos obtenidos para cada una de las barras se muestran de forma gráfica en la Figura 4.12.

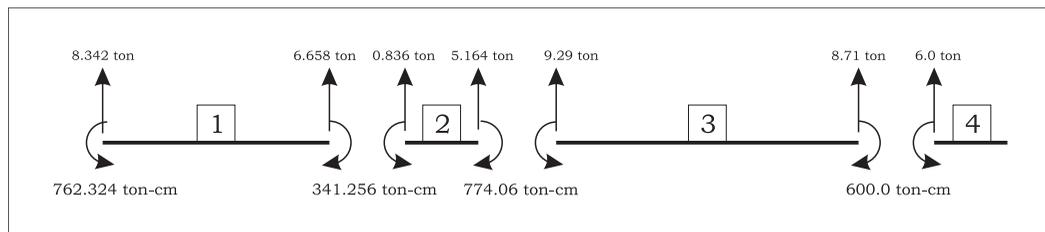


Figura 4.12 Reacciones en los extremos de las barras (nodo / barra)

Combinando los resultados mostrados en la Figura 4.12 para los nodos con restricciones al movimiento, las reacciones en los apoyos se pueden determinar fácilmente, tal y como se ilustran en la Figura 4.13, donde también se muestran los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante actuantes en las barras.

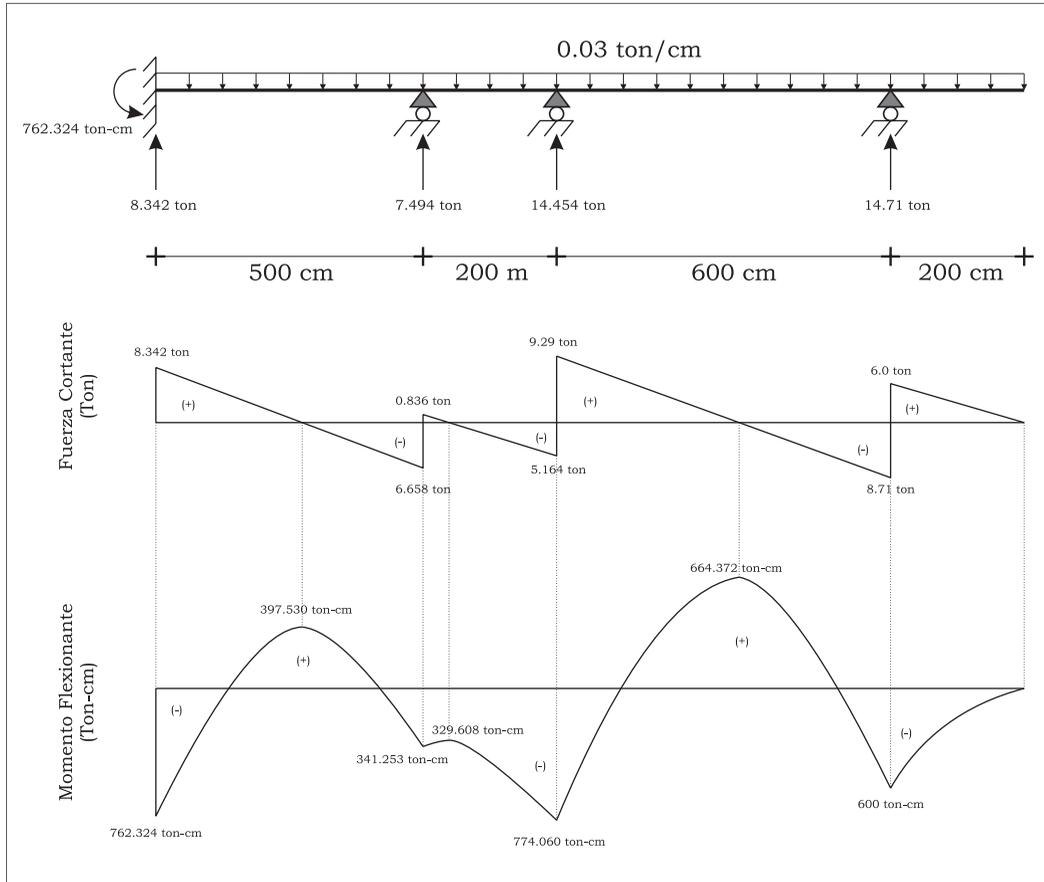


Figura 4.13 Reacciones en los apoyos y diagramas de fuerzas actuantes en las barras.

4.2.2 Ejemplo 2 – Viga Continua sin Considerar el Efecto del Cortante

En este ejemplo se resuelve la viga mostrada anteriormente sin considerar la deformación por cortante, es decir, para calcular las matrices de rigidez de las barras se considera $\varphi_y=0$ esto se realiza con la finalidad de mostrar las diferencias entre ambas formas de estimar las fuerzas involucradas en las barras. En consecuencia, las propiedades de la estructura son las mismas ya mostradas en el ejemplo anterior, y realizando los cálculos, las matrices de rigidez de las barras son las siguientes:

		Barra 1					
$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix}$	=	6.831	1,707.630	-6.831	1,707.630	$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$	
		1,707.630	569,209.979	-1,707.630	284,604.989		
		-6.831	1,707.630	6.831	-1,707.630		
		1,707.630	284,604.989	-1707.630	569,209.979		

		Barra 2					
$\begin{Bmatrix} F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix}$	=	106.727	10,672.687	-106.727	10,672.687	$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$	
		10,672.687	1,423,024.947	-10,672.687	711,512.474		
		-106.727	-10,672.687	106.727	-10,672.687		
		10,672.687	711,512.474	-10,672.687	1,423,024.947		

		Barra 3					
$\begin{Bmatrix} F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix}$	=	3.953	1,185.854	-3.953	1,185.854	$\begin{Bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$	
		1,185.854	474,341.649	-1,185.854	2,377,170.825		
		-3.953	-1,185.854	3.953	-1,185.854		
		1,185.854	237,170.825	-1,185.854	474,341.649		

		Barra 4						
$\begin{Bmatrix} F_{4,y} \\ M_{4,z} \\ F_{5,y} \\ M_{5,z} \end{Bmatrix}$	=	106.727	10,672.687	-106.727	10,672.687]	\begin{Bmatrix} v_4 \\ \theta_4 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}	
		10,672.687	1,423,024.947	-10,672.687	711,512.474			
		-106.727	-10,672.687	106.727	-10,672.687			
		10,672.687	711,512.474	-10,672.687	1,423,024.947			

Realizando el ensamble de las matrices de las barras, la matriz de rigideces de la estructura queda de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} 525.0 \\ -800.0 \\ 800.0 \\ -3.0 \\ 100.0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,992,234.926 & 711,512.474 & 0 & 0 & 0 \\ 711,512.474 & 1,897,366.596 & 237,170.825 & 0 & 0 \\ 0 & 237,170.825 & 1,897,366.596 & -10,672.687 & 711,512.474 \\ 0 & 0 & -10,672.687 & 106.727 & -10,672.687 \\ 0 & 0 & 711,512.474 & -10,672.687 & 1,423,024.947 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$\theta_2 = 5.2997 \times 10^{-4}$ radianes	$v_5 = 0.1168$ cm
$\theta_3 = -7.4606 \times 10^{-4}$ radianes	$\theta_5 = 4.4330 \times 10^{-4}$ radianes
$\theta_4 = 1.0055 \times 10^{-3}$ radianes	

Calculando las fuerzas para cada barra, se tiene:

		Barra 1									
$\begin{Bmatrix} F_{1,y} \\ M_{1,z} \\ F_{2,y} \\ M_{2,z} \end{Bmatrix}$	=	6.831	1,707.630	-6.831	1,707.630]	\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5.2997 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}	-	\begin{Bmatrix} -7.5 \\ -625.0 \\ -7.5 \\ 625.0 \end{Bmatrix}	=	\begin{Bmatrix} 8.405 \\ 775.833 \\ 6.595 \\ -323.333 \end{Bmatrix}
		1,707.630	569,209.979	-1,707.630	284,604.989						
		-6.831	-1,707.630	6.831	1,707.630						
		1,707.630	284,604.989	-1,707.630	569,209.979						

Barra 2										
$\begin{Bmatrix} F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix}$	106.727	10,672.687	-106.727	10,672.687	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 5.2997 \times 10^{-4} \\ 0 \\ -7.4606 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix}$	-3.0	$\begin{Bmatrix} 0.694 \\ 323.33 \\ 5.306 \\ -784.583 \end{Bmatrix}$
			10,672.687	1,423,024.947	10,672.687	711,512.474			-100.0	
			-106.727	-10,672.687	106.727	-10,672.687			-3.0	
			10,672.687	711,512.474	-10,672.687	1,423,024.947			100.0	

Barra 3										
$\begin{Bmatrix} F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix}$	3.953	1,185.854	-3.953	1,185.854	$\begin{Bmatrix} 0 \\ -7.4606 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 1.0055 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix}$	-9.0	$\begin{Bmatrix} 9.308 \\ 784.583 \\ 8.692 \\ -600.000 \end{Bmatrix}$
			1,185.854	474,341.649	-1,185.854	2,377,170.825			-900.0	
			-3.953	-1,185.854	3.953	-1,185.854			-9.0	
			1,185.854	237,170.825	-1,185.854	474,341.649			900.0	

Barra 4										
$\begin{Bmatrix} F_{4y} \\ M_{4z} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix}$	106.727	10,672.687	-106.727	10,672.687	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1.0055 \times 10^{-3} \\ 0.1168 \\ 4.4330 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix}$	-3.0	$\begin{Bmatrix} 6.0 \\ 600.0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
			10,672.687	1,423,024.947	10,672.687	711,512.474			-100.0	
			-106.727	-10,672.687	106.727	-10,672.687			-3.0	
			10,672.687	711,512.474	-10,672.687	1,423,024.947			100.0	

De forma gráfica, las fuerzas en los extremos de las barras se muestran en la Figura 4.14. Como puede notarse al comparar los resultados obtenidos con los mostrados en el ejemplo anterior, las diferencias entre tomar en cuenta las deformaciones por cortante y considerar solamente las deformaciones por flexión ($\varphi_y = 0$) son mínimas en la mayoría de los casos; las mayores diferencias se encuentran en los elementos cortos en donde las fuerzas cortantes se vuelven importantes, como en el caso de vigas diafragma. Esto puede notarse para el caso de la barra 2 en ambos ejemplos, donde se pueden notar las mayores diferencias en las fuerzas, debido a que en este elemento por su corta longitud, las deformaciones por cortante tienen mayor importancia que en las otras barras.

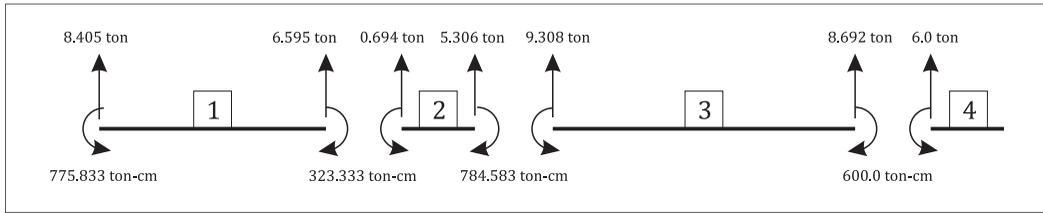


Figura 4.14 Reacciones en los extremos de las barras (nodo/barra).

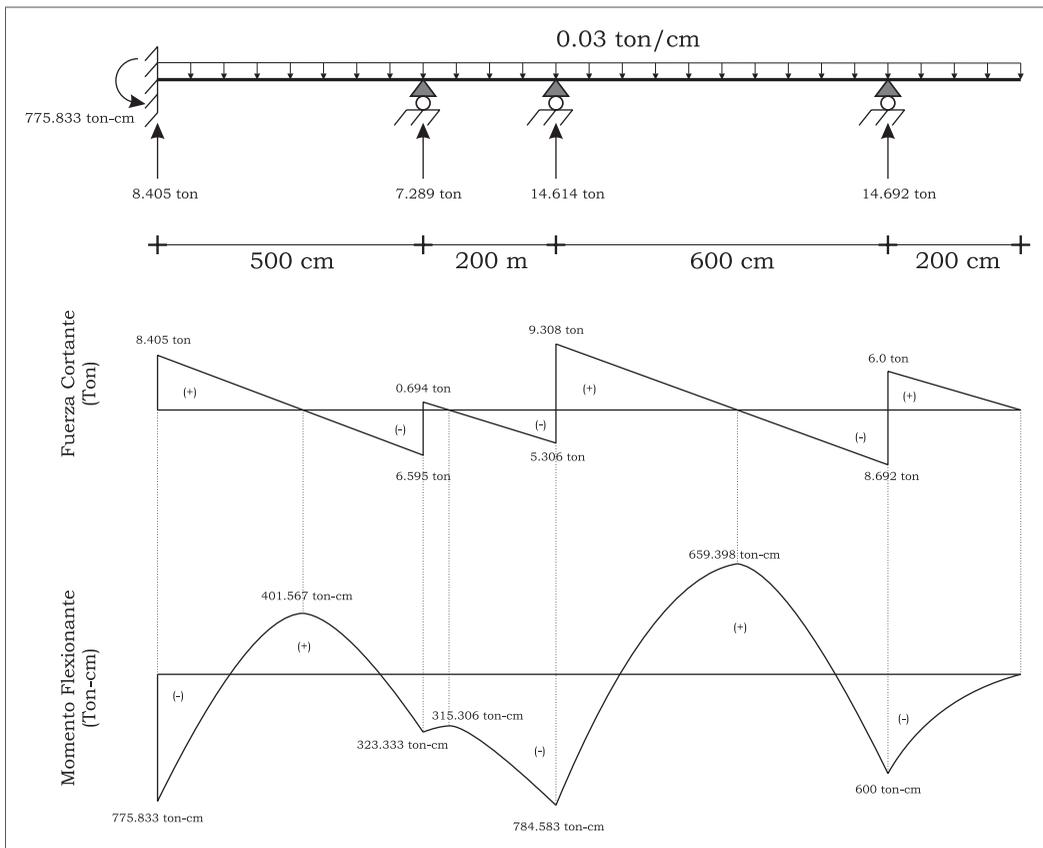


Figura 4.15 Reacciones en los apoyos y fuerzas actuantes en las barras.

4.2.3 Ejemplo 3

Material: Concreto $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$ $\rightarrow E = 15,100 \sqrt{f'_c} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$

Sección: Rectangular 60 x 25 cm (Peralte x ancho) en todas las barras.

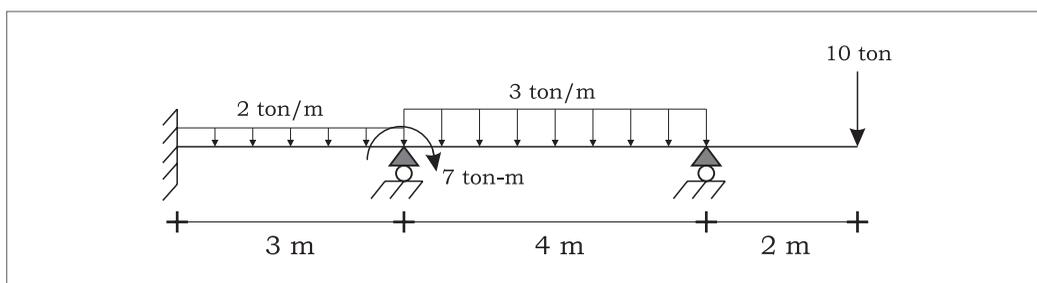


Figura 4.16 Esquema de viga continua a resolver.

En la Figura 4.16 se muestra la geometría y fuerzas externas actuando en una viga continua. Para resolverse por el método de rigideces, las propiedades elasto-geométricas de las barras. En la solución del problema no se considera la contribución de la fuerza cortante en la determinación de los desplazamientos, es decir, $\phi_y = 0$. Para facilitar el trabajo numérico, las unidades a emplear en la solución del problema son toneladas y centímetros.

Tabla 4.2 Propiedades elasto-geométricas de las barras de la viga a resolver.

BARRA	E (ton/cm ²)	I_z (cm ⁴)	L (cm)
1	238.7520	450,000	300
2	238.7520	450,000	400
3	238.7520	450,000	200

La Figura 4.17 muestra la nomenclatura de barras y nodos así como la conectividad de las barras que se emplea para la el cálculo de las matrices de rigidez.

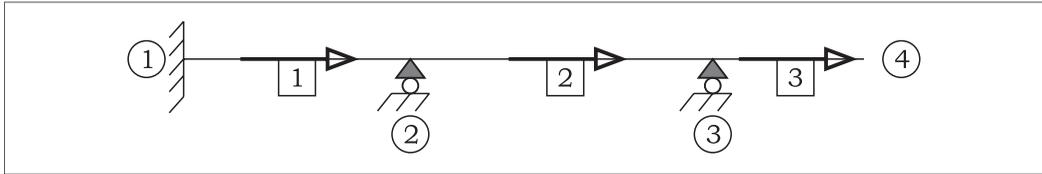


Figura 4.17 Nomenclatura y conectividad de barras y nodos de la viga a resolver.

De esta forma, las matrices de rigidez para cada una de las barras son las siguientes:

		Barra 1						
{	F_{1y}	=	47.7504	7,162.5589	-47.7504	7,162.5589	{	v_1
	M_{1z}		7,162.5589	1'432,511.7800	-7,162.5589	716,255.8900		θ_1
	F_{2y}		-47.7504	-7,162.5589	47.7504	-7,162.5589		v_2
	M_{2z}		7,162.5589	716,255.8900	-7162.5589	1'432,511.7800		θ_2

		Barra 2						
{	F_{2y}	=	20.1447	4,028.9394	-20.1447	4,028.9394	{	v_2
	M_{2z}		4,028.9394	1'074,383.8350	-4,028.9394	537,191.9175		θ_2
	F_{3y}		-20.1447	-4,028.9394	20.1447	-4,028.9394		v_3
	M_{3z}		4,028.9394	537,191.9175	-4,028.9394	1'074,383.8350		θ_3

		Barra 3						
{	F_{3y}	=	161.1576	16,115.7575	-161.1576	16,115.7575	{	v_3
	M_{3z}		16,115.7575	2'148,767.6700	-16,115.7575	1'074,383.8350		θ_3
	F_{4y}		-161.1576	-16,115.7575	161.1576	-16,115.7575		v_4
	M_{4z}		16,115.7575	1'074,383.8350	-16,115.7575	2'148,767.6700		θ_4

Las FEP en cada una de las barras (ver Figura 4.10), en forma matricial son:

Barra 1	Barra 2	Barra 3
$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.0 \\ -150.0 \\ -3.0 \\ 150.0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.0 \\ -400.0 \\ -6.0 \\ 400.0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

En el cálculo de las FEP, solamente deben considerarse las fuerzas que están en el interior de la barra, si las fuerzas se aplican directamente a los nodos, éstas se “suman” solamente hasta que se ensambla la matriz de rigidez de la estructura.

Ensamblando todas las barras y eliminado los grados de libertad restringidos por las condiciones de apoyo, la matriz de rigidez de la estructura es:

$$\begin{Bmatrix} -950.0 \\ 400.0 \\ -10.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2'506,895.6150 & 537,191.9175 & 0 & 0 \\ 537,191.9175 & 3'223,151.5050 & -16,115.7575 & 1'074,383.8350 \\ 0 & -16,115.7575 & 161.1576 & -16,115.7575 \\ 0 & 1'074,383.8350 & -16,115.7575 & 2'148,767.6700 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= -6.7015 \times 10^{-5} \text{ radianes} & v_4 &= -0.5393 \text{ cm} \\ \theta_3 &= -1.4557 \times 10^{-3} \text{ radianes} & \theta_4 &= -3.3173 \times 10^{-3} \text{ radianes} \end{aligned}$$

Las fuerzas actuantes en cada una de las barras se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 47.7504 & 7,162.5589 & -47.7504 & 7,162.5589 \\ 7,162.5589 & 1'432,511.7800 & -7,162.5589 & 716,255.8900 \\ -47.7504 & -7,162.5589 & 47.7504 & -7,162.5589 \\ 7,162.5589 & 716,255.8900 & -7162.5589 & 1'432,511.7800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6.7015 \times 10^{-5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.0 \\ -150.0 \\ -3.0 \\ 150.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.52 \\ 102.00 \\ 3.48 \\ -246.00 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 20.1447 & 4,028.9394 & -20.1447 & 4,028.9394 \\ 4,028.9394 & 1'074,383.8350 & -4,028.9394 & 537,191.9175 \\ -20.1447 & -4,028.9394 & 20.1447 & -4,028.9394 \\ 4,028.9394 & 537,191.9175 & -4,028.9394 & 1'074,383.8350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -6.7015 \times 10^{-5} \\ 0 \\ -1.4557 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6.0 \\ -400.0 \\ -6.0 \\ 400.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.135 \\ -454.000 \\ 12.135 \\ -2000.000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 161.1576 & 16,115.7575 & -161.1576 & 16,115.7575 \\ 16,115.7575 & 2'148,767.6700 & -16,115.7575 & 1'074,383.8350 \\ -161.1576 & -16,115.7575 & 161.1576 & -16,115.7575 \\ 16,115.7575 & 1'074,383.8350 & -16,115.7575 & 2'148,767.6700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1.4557 \times 10^{-3} \\ -0.5393 \\ -3.3173 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 2,000.0 \\ -10.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

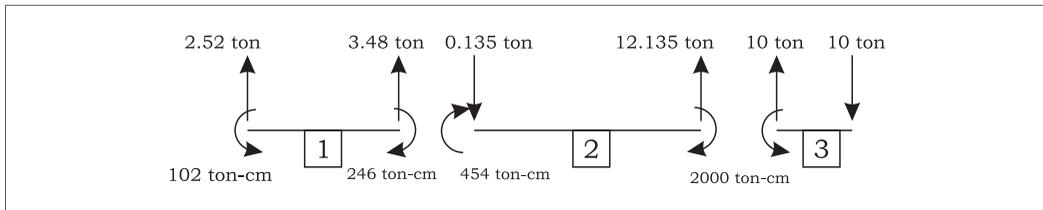


Figura 4.18 Fuerzas actuantes en los extremos de las barras (nudo/barra)

Los resultados obtenidos en los extremos de las barras se muestran gráficamente en la Figura 4.18. De esta forma, las reacciones, así como los diagramas de cortante y momento flexionante se muestran en:

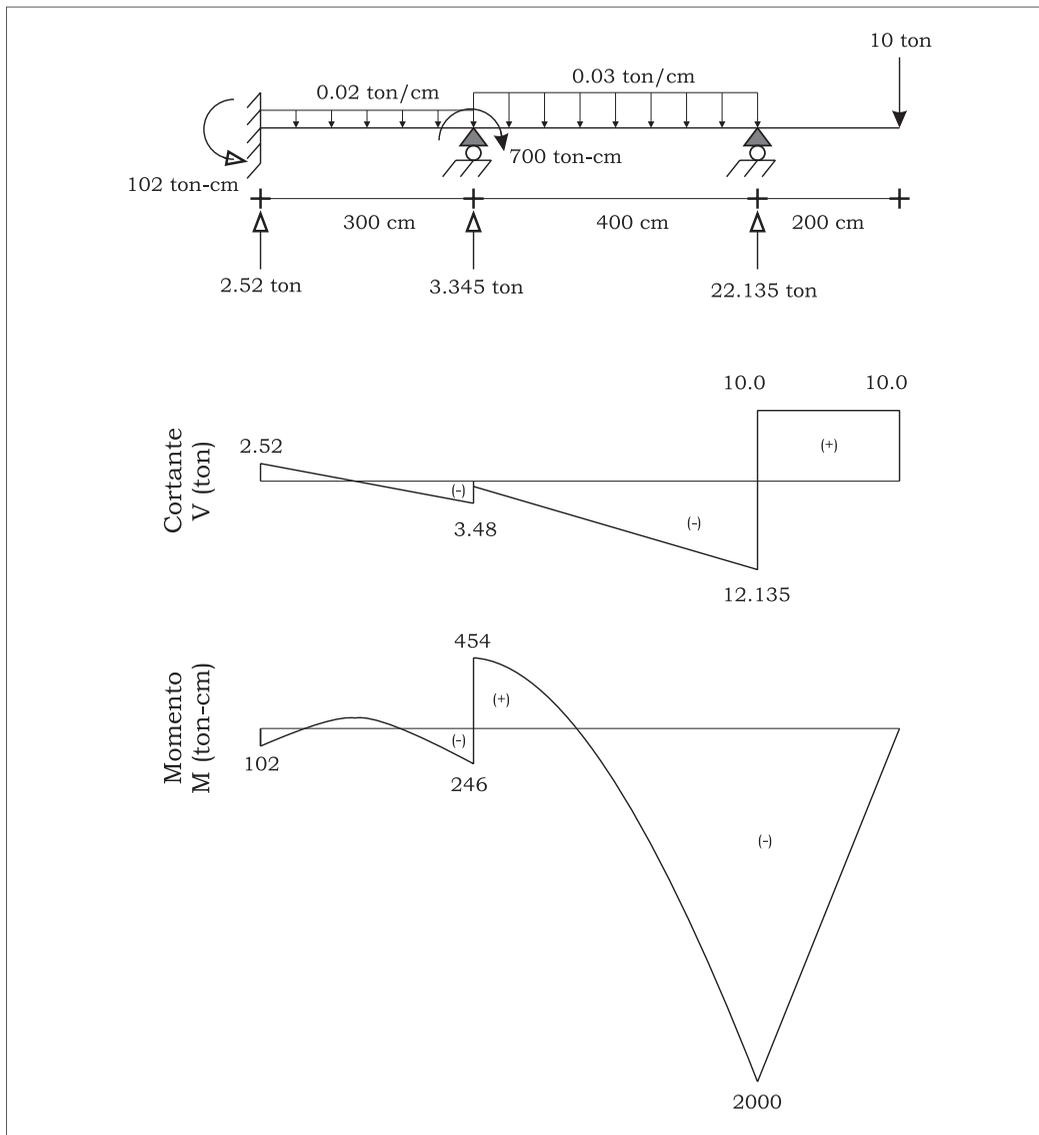
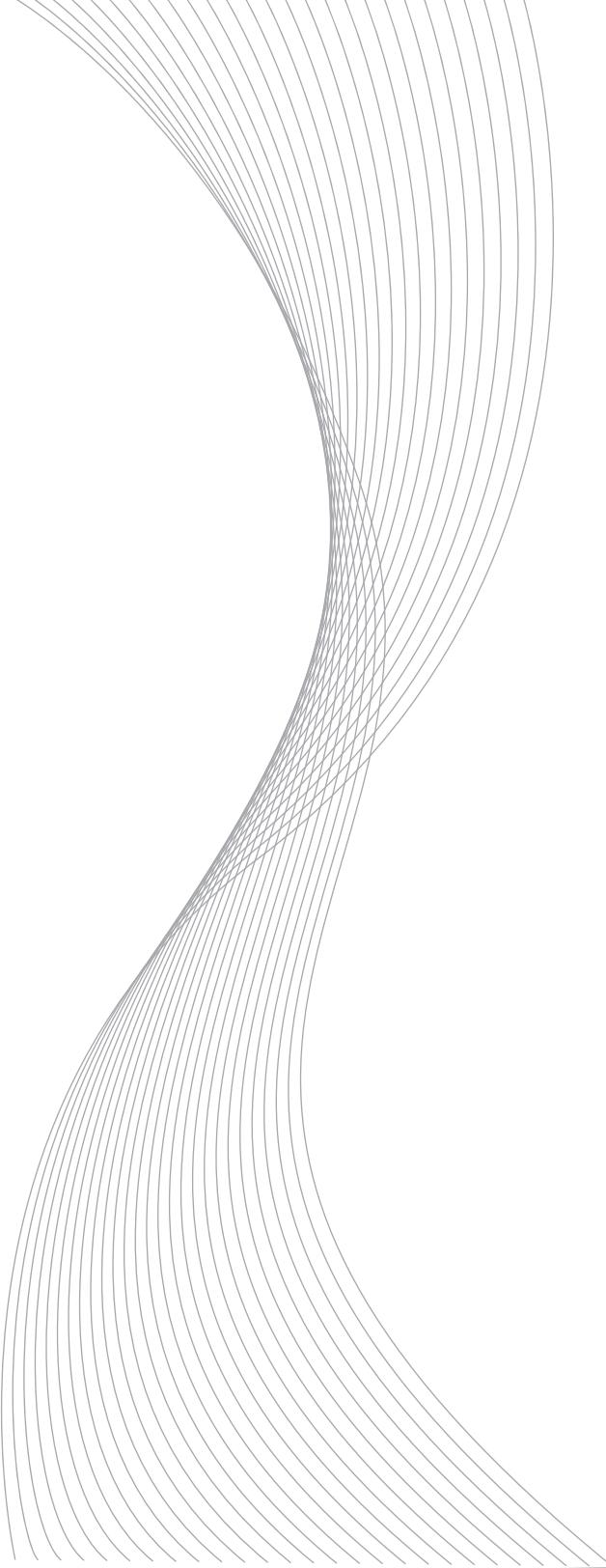


Figura 4.19 Reacciones en los apoyos y diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



MARCOS PLANOS

5

5 MARCOS PLANOS

Los elementos barra que forman parte de un marco plano, adicional a las fuerzas transversales a su eje que provocan fuerza cortante y momento flexionante (como en el caso de vigas) tienen que soportar carga axial (como en el caso de armaduras). Por tanto, la matriz de rigidez de este tipo de elementos debe considerar los coeficientes de rigidez ya vistos para el caso de armaduras y vigas simultáneamente.

5.1 Determinación de la matriz de rigidez

Considerando la Figura 2.4 y la Figura 2.5 para los coeficientes de rigidez axial y de la Figura 4.3 a la Figura 4.6 para los coeficientes de rigidez por fuerza cortante y momento flexionante, la matriz de rigidez de un elemento marco en el plano se define de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ m_{iz} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \\ m_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & \frac{(4+\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} & 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & \frac{(2-\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & \frac{(2-\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & \frac{(4+\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

La expresión anterior se puede expresar de forma condensada como:

$$\begin{Bmatrix} \{f_i\} \\ \{f_j\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_i\} \\ \{d_j\} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

5.2 Rotación del sistema local a global

Considerando las fuerzas mostradas en la Figura 5.1 puede verse que las fuerzas actuantes en el nodo i en el sistema global (X, Y) respecto al local (x, y) son:

$$\begin{aligned} F_{ix} &= f_{ix} \cos \theta - f_{iy} \sin \theta \\ F_{iy} &= f_{ix} \sin \theta + f_{iy} \cos \theta \\ M_{iz} &= m_{iz} \end{aligned}$$

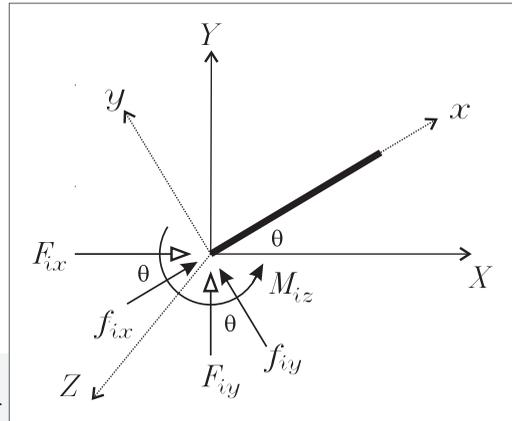


Figura 5.1 Fuerzas en el sistema local y global en el nodo i

Reescribiendo en forma matricial las expresiones anteriores y considerando que $l = \cos \theta$ y $m = \sin \theta$ se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ m_{iz} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

En forma condensada, la expresión anterior se puede expresar como:

$$\{F_i\} = [R]^T \{f_i\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Donde: } \{F_i\} = \text{Fuerzas en el sistema global en el nodo } i \\ \{f_i\} = \text{Fuerzas en el sistema local en el nodo } i \\ [R] = \text{Matriz de rotación} \end{array} \right.$$

Por tanto, la matriz de rotación para marcos en el plano se define como:

$$[R] = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Para referenciar las fuerzas del sistema local de la barra al global de la estructura se retoma la ecuación (2.22) expresada como:

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R]^T [k_{ii}] [R] & [R]^T [k_{ij}] [R] \\ [R]^T [k_{ji}] [R] & [R]^T [k_{jj}] [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Las operaciones a realizar son las siguientes:

$$[R]^T [k_{ii}] [R] = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} & \frac{(4+\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R]^T [k_{ij}] [R] = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} \\ 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} & \frac{(2-\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R]^T [k_{ji}][R] = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R]^T [k_{jj}][R] = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obteniendo como resultado:

$$[R]^T [k_{ij}][R] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}l^2 + \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3}m^2 & \left[\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} \right]lm & -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2}m \\ \left[\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} \right]lm & \frac{EA}{L}m^2 + \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3}l^2 & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2}l \\ -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2}m & -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2}l & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix} \tag{5.6 a}$$

$$[R]^T [k_{ij}] [R] = \begin{bmatrix} -\left[\frac{EA}{L} l^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} m^2 \right] & -\left[\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} \right] lm & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} m \\ -\left[\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} \right] lm & -\left[\frac{EA}{L} m^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} l^2 \right] & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} l \\ \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} m & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} l & \frac{(2-\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} \end{bmatrix}$$

(5.6 b)

$$[R]^T [k_{ji}] [R] = \begin{bmatrix} -\left[\frac{EA}{L} l^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} m^2 \right] & -\left[\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} \right] lm & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} m \\ -\left[\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} \right] lm & -\left[\frac{EA}{L} m^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} l^2 \right] & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} l \\ -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} m & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} l & \frac{(2-\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} \end{bmatrix}$$

(5.6 c)

$$[R]^T [k_{jj}] [R] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} m^2 & \left[\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} \right] lm & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} m \\ \left[\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} \right] lm & \frac{EA}{L} m^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3} l^2 & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} l \\ \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} m & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2} l & \frac{(4+\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} \end{bmatrix}$$

(5.6 d)

Substituyendo las expresiones (5.6) en (5.5) se obtiene la matriz de rigideces para marcos planos, la cual se muestra en la ecuación (5.7)

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}l^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}m^2 & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}\right)lm & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}m & -\left(\frac{EA}{L}l^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}m^2\right) & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}\right)lm & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}m \\ \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}\right)lm & \frac{EA}{L}m^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}l^2 & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}l & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}\right)lm & -\left(\frac{EA}{L}m^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}l^2\right) & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}l \\ -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}m & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}l & \frac{(4+\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}m & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}l & \frac{(2-\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} \\ -\left(\frac{EA}{L}l^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}m^2\right) & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}\right)lm & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}m & \frac{EA}{L}l^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}m^2 & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}\right)lm & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}m \\ -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}\right)lm & -\left(\frac{EA}{L}m^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}l^2\right) & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}l & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}\right)lm & \frac{EA}{L}m^2 + \frac{12EI_z}{(1+\varphi_y)L^3}l^2 & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}l \\ -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}m & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}l & \frac{(2-\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} & \frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}m & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi_y)L^2}l & \frac{(4+\varphi_y)EI_z}{(1+\varphi_y)L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

(5.7)

5.3 Ejemplos de aplicación

5.3.1 Ejemplo 1

Se muestra el análisis del marco mostrado en la Figura 5.2, en el cual, se tienen las características elastogeométricas:

Material: Concreto $f'c = 200 \text{ kg/cm}^2$ \rightarrow $E = 14,000 \sqrt{f'c} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$ \rightarrow $G \approx 0.4 E$

Sección: Cuadrada de 60 x 60 cm en ambas barras.

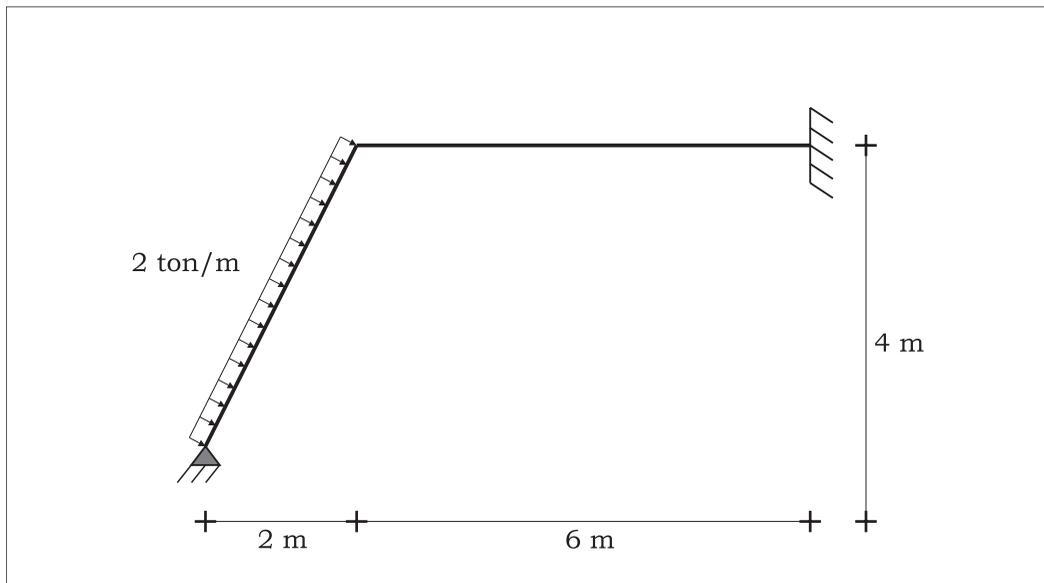


Figura 5.2 Marco de dos barras a analizar.

La nomenclatura de nodos y barras, así como la conectividad de las mismas se muestra en la Figura 5.3. Para el análisis se considera la participación de las deformaciones por cortante en el cálculo de los coeficientes de rigidez, los cuales se basan en los datos mostrados en la Tabla 5.1

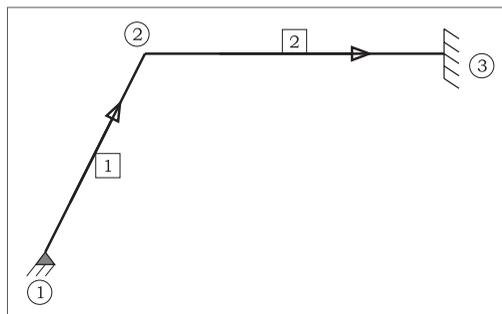


Figura 5.3 Nomenclatura de nodos, barras y conectividad.

Tabla 5.1 Propiedades elasto-geométricas de las barras del marco a resolver

Barra	A (cm ²)	E (ton/cm ²)	G (ton/cm ²)	I_z (cm ⁴)	L (cm)	l	m	f_{fy}	ϕ_y
1	3600	197.9899	79.1960	1'080,000	447.2136	0.4472	0.8944	1.2	0.054
2	3600	197.9899	79.1960	1'080,000	600.0000	1.0000	0	1.2	0.030

De acuerdo a las propiedades de las barras mostradas en la Tabla 5.1, las matrices de rigidez para las barras son las mostradas a continuación:

		Barra 1								
{	F_{1x}	=	340.5323	626.6278	-5,443.6780	-340.5323	-626.6278	-5,443.6780	}	u_1
	F_{1y}		626.6278	1,280.4740	2,721.8390	-626.6278	-1,280.4740	2,721.8390		v_1
	M_{1z}		-5,443.6780	2,721.8390	1'839,055.8760	5,443.6780	-2,721.8390	882,783.1118		θ_1
	F_{2x}		-340.5323	-626.6278	5,443.6780	340.5323	626.6278	5,443.6780		u_2
	F_{2y}		-626.6278	-1,280.4740	-2,721.8390	626.6278	1,280.4740	-2,721.8390		v_2
	M_{2z}		-5,443.6780	2,721.8390	882,783.1118	5,443.6780	-2,721.8390	1'839,055.8760		θ_2

De acuerdo a la Figura 4.10, las FEP en el sistema local (x,y) , en forma matricial serían:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_{1z} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4.4721 \\ -333.3333 \\ 0 \\ -4.4721 \\ 333.3333 \end{Bmatrix}$$

Para referenciarlas al sistema global (X,Y) de la estructura, se hace uso de la matriz de rotación transpuesta $[R]^T$ definida en (5.4), es decir:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 & -0.8944 & 0 \\ 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -4.4721 \\ -333.3333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.0000 \\ -2.0000 \\ -333.3333 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 & -0.8944 & 0 \\ 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -4.4721 \\ 333.3333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.0000 \\ -2.0000 \\ 333.3333 \end{Bmatrix}$$

Así, las FEP para la barra 1 en el sistema global estarían definidas por:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.0000 \\ -2.0000 \\ -333.3333 \\ 4.0000 \\ -2.0000 \\ 333.3333 \end{Bmatrix}$$

		Barra 2							
$\left\{ \begin{array}{l} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{array} \right\} =$	$\left[\begin{array}{cccccc} 1,187.9394 & 0 & 0 & -1,187.9394 & 0 & 0 \\ 0 & 11.5334 & 3,460.0176 & 0 & -11.5334 & 3,460.0176 \\ 0 & 3,460.0176 & 1'394,387.1120 & 0 & -3,460.0176 & 681,623.4766 \\ -1,187.9394 & 0 & 0 & 1,187.9394 & 0 & 0 \\ 0 & -11.5334 & -3,460.0176 & 0 & 11.5334 & -3,460.0176 \\ 0 & 3,460.0176 & 681,623.4766 & 0 & -3,460.0176 & 1'394,387.1120 \end{array} \right]$	$\left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\}$							

Para este caso, las FEP en el sistema global y local, son:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_{2z} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_{3z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

De esta forma, la matriz de rigidez de la estructura está dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} -333.3333 \\ 4.0000 \\ -2.0000 \\ 333.3333 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 1'839,055.8760 & 5,443.6780 & -2,721.8390 & 882,783.1118 \\ 5,443.6780 & 1,528.4717 & 626.6278 & 5,443.6780 \\ -2,721.8390 & 626.6278 & 1,292.0074 & 738.1787 \\ 882,783.1118 & 5,443.6780 & 738.1787 & 3233442.9880 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{array}{ll} \theta_1 = -2.8619 \times 10^{-4} \text{ radianes} & v_2 = -4.6349 \times 10^{-3} \text{ cm} \\ u_2 = 4.9167 \times 10^{-3} \text{ cm} & \theta_2 = 1.7400 \times 10^{-4} \text{ radianes} \end{array}$$

El cálculo para obtener las fuerzas en las barras se muestra a continuación:

		Barra 1										
$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix}$	=	340.5323	626.6278	-5,443.6780	-340.5323	-626.6278	-5,443.6780	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.8619 \times 10^{-4} \\ 4.9167 \times 10^{-3} \\ -4.6349 \times 10^{-3} \\ 1.7400 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$	=	$\begin{Bmatrix} 4.000 \\ -2.000 \\ -333.3333 \\ 4.000 \\ -2.000 \\ 333.3333 \end{Bmatrix}$	=	$\begin{Bmatrix} -2.1592 \\ 4.5486 \\ 0 \\ -5.8408 \\ -0.5486 \\ -226.5935 \end{Bmatrix}$
		626.6278	1,280.4740	2,721.8390	-626.6278	-1,280.4740	2,721.8390					
		-5,443.6780	2,721.8390	1'839,055.8760	5,443.6780	-2,721.8390	882,783.1118					
		-340.5323	-626.6278	5,443.6780	340.5323	626.6278	5,443.6780					
		-626.6278	-1,280.4740	-2,721.8390	626.6278	1,280.4740	-2,721.8390					
		-5,443.6780	2,721.8390	882,783.1118	5,443.6780	-2,721.8390	1'839,055.8760					

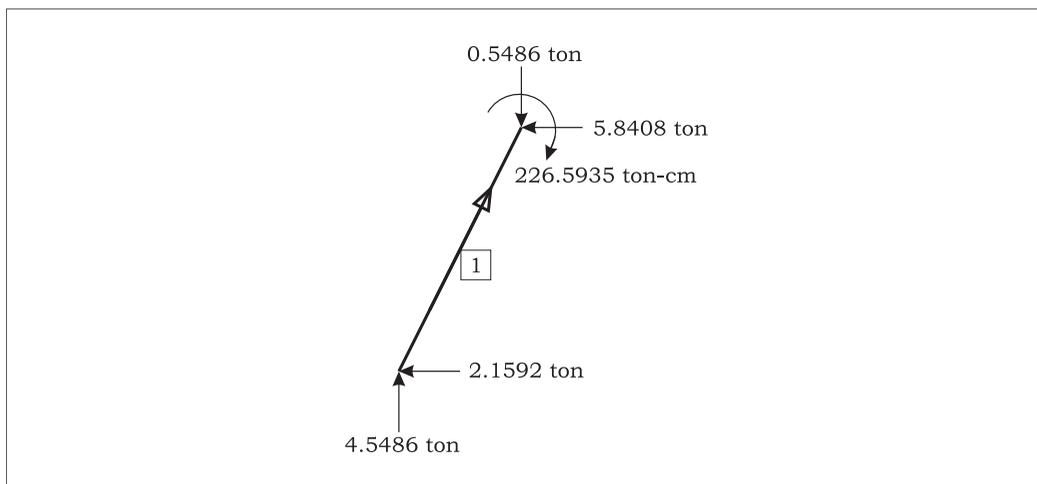


Figura 5.4 Fuerzas actuantes sobre barra 1 en el sistema global (nodo/barra).

Rotando las fuerzas del sistema global (X,Y,Z) al local (x,y,z) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.8944 & 0 \\ -0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2.1592 \\ 4.5486 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.1028 \\ 3.9655 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.8944 & 0 \\ -0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5.8408 \\ -0.5486 \\ -226.5932 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.1028 \\ 4.9788 \\ -226.5932 \end{Bmatrix}$$

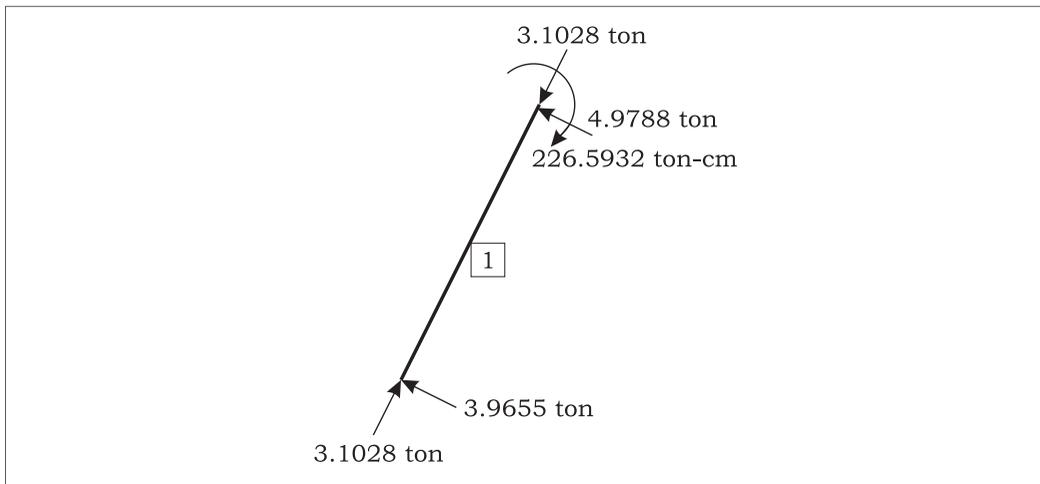


Figura 5.5 Fuerzas actuantes sobre barra 1 en el sistema local (nodo/barra).

Barra 2

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,187.9394 & 0 & 0 & -1,187.9394 & 0 & 0 \\ 0 & 11.5334 & 3,460.0176 & 0 & -11.5334 & 3,460.0176 \\ 0 & 3,460.0176 & 1'394,387.1120 & 0 & -3,460.0176 & 681,623.4766 \\ -1,187.9394 & 0 & 0 & 1,187.9394 & 0 & 0 \\ 0 & -11.5334 & -3,460.0176 & 0 & 11.5334 & -3,460.0176 \\ 0 & 3,460.0176 & 681,623.4766 & 0 & -3,460.0176 & 1'394,387.1120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.9167 \times 10^{-3} \\ -4.6349 \times 10^{-3} \\ 1.7400 \times 10^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5.8408 \\ 0.5486 \\ 226.5932 \\ -5.8408 \\ -0.5486 \\ 102.5688 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5.8408 \\ 0.5486 \\ 226.5932 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.8408 \\ 0.5486 \\ 226.5932 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5.8408 \\ -0.5486 \\ 102.5688 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.8408 \\ -0.5486 \\ 102.5688 \end{Bmatrix}$$

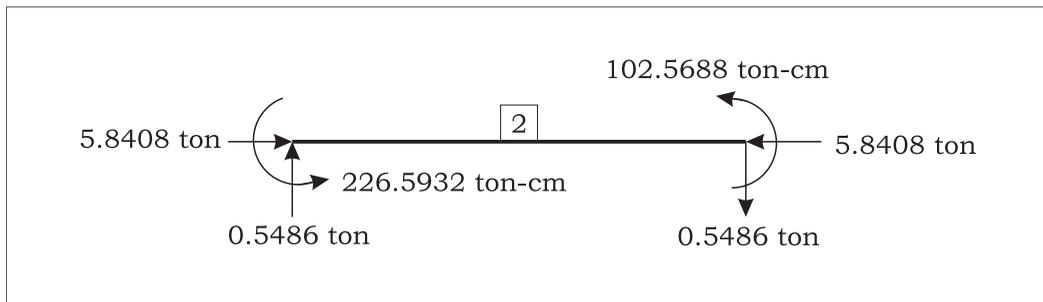


Figura 5.6 Fuerzas actuantes sobre barra 2 en los sistemas global y local (nodo/barra).

En las figuras que se muestran a continuación pueden verse los diagramas de fuerza axial, cortante y momento flexionante que experimentan cada una de las barras como consecuencia de las fuerzas aplicadas mostradas en la Figura 5.2.

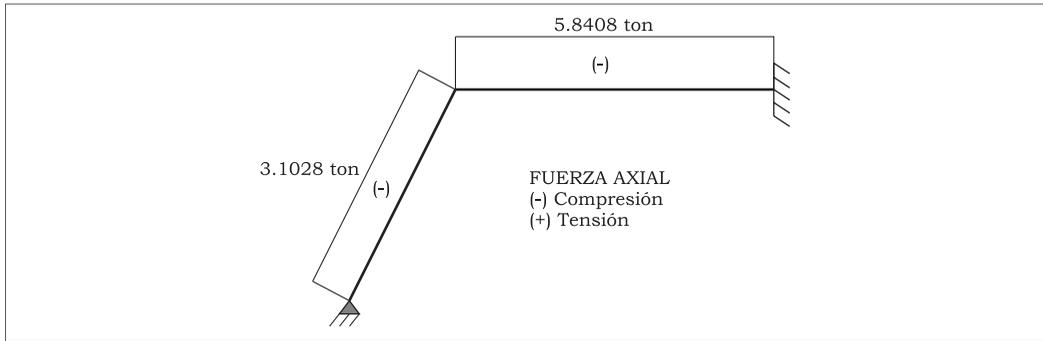


Figura 5.7 Diagrama de fuerza axial.

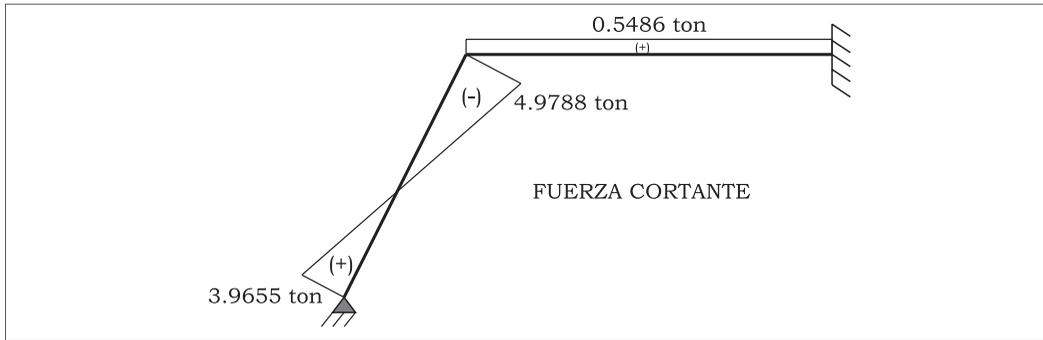


Figura 5.8 Diagrama de Fuerza Cortante.

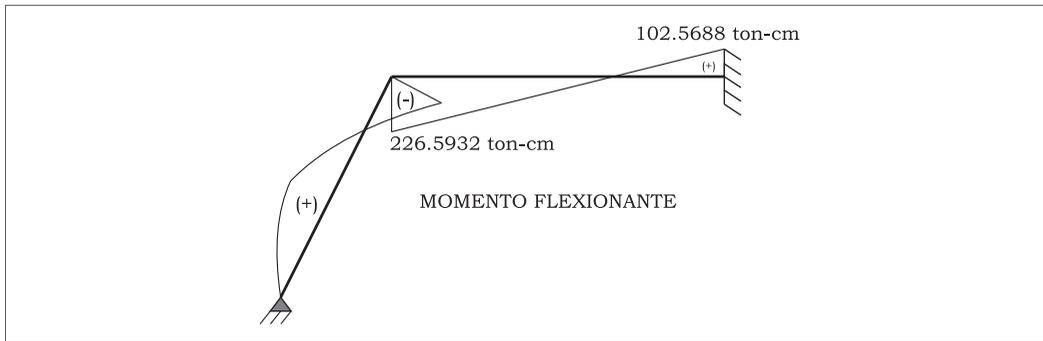
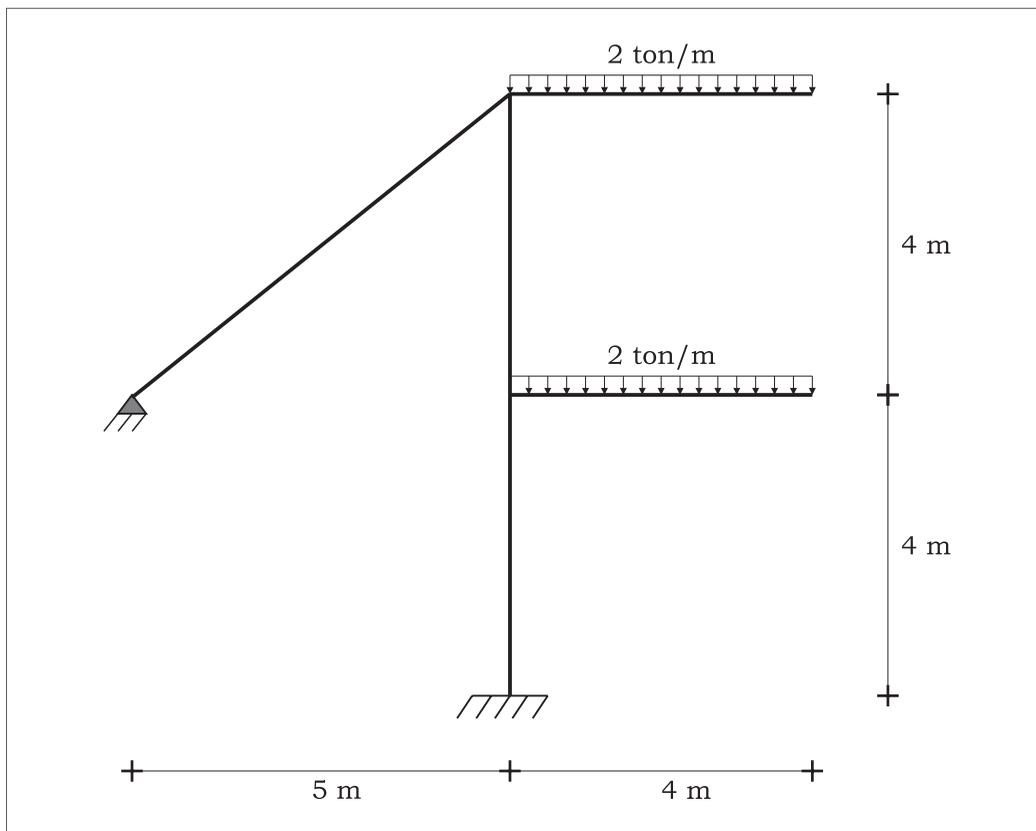


Figura 5.9 Diagrama de Momento Flexionante.

5.3.2 Ejemplo 2

Empleando el método de rigideces resolver el marco mostrado en la Figura 5.10



Columnas: Sección cuadrada de 60 x 60 cm, concreto
 Trabes: Sección rectangular de 20 x 50 cm, concreto
 Tensor: Sección circular de 2" de diámetro, acero A36

Materiales: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Acero } E = 2040000 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{Concreto } E = 15,100 \sqrt{f'c} \text{ (kg/cm}^2) \quad f'c = 400 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right.$

En la Figura 5.11 se muestran la nomenclatura de nodos y barras, así como la conectividad de las barras. En la Tabla 5.2 se muestran las propiedades de las barras que conforman la estructura.

Tabla 5.2 Propiedades elasto-geométricas de las barras del marco a resolver

Barra	E (ton/cm ²)	I (cm ⁴)	A (cm ²)	L (cm)	θ (grados)	l	m
1	2,040.0	32.691	20.268	640.3124	38.6598	0.7809	0.6247
2	302.0	1'080,000.00	3,600.00	400.00	90	0	1
3	302.0	1'080,000.00	3,600.00	400.00	90	0	1
4	302.0	208,333.33	1,000.00	400.00	0	1	0
5	302.0	208,333.33	1,000.00	400.00	0	1	0

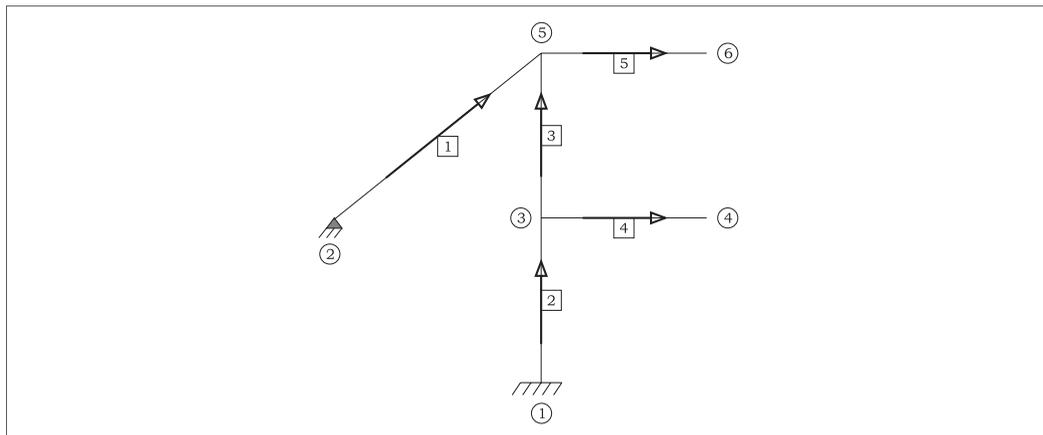


Figura 5.11 Nomenclatura y conectividad de marco.

Las matrices de rigidez de cada una de las barras se muestran a continuación:

		Barra 1		
$\begin{Bmatrix} F_{2,x} \\ F_{2,y} \\ M_{2,z} \\ F_{5,x} \\ F_{5,y} \\ M_{5,z} \end{Bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} 39.3748 & 31.4974 & -0.6097 & -39.3748 & -31.4974 & -0.6097 \\ 31.4974 & 25.2010 & 0.7621 & -31.4974 & -25.2010 & 0.7621 \\ -0.6097 & 0.7621 & 416.6069 & 0.6097 & -0.7621 & 208.3034 \\ -39.3748 & -31.4974 & 0.6097 & 39.3748 & 31.4974 & 0.6097 \\ -31.4974 & -25.2010 & -0.7621 & 31.4974 & 25.2010 & -0.7621 \\ -0.6097 & 0.7621 & 208.3034 & 0.6097 & -0.7621 & 416.6069 \end{bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}$	

		Barras 2 y 3		
$\begin{Bmatrix} F_{i,x} \\ F_{i,y} \\ M_{i,z} \\ F_{j,x} \\ F_{j,y} \\ M_{j,z} \end{Bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} 61.155 & 0 & -12,231.000 & -61.155 & 0 & -12,231.000 \\ 0 & 2718.000 & 0 & 0 & -2,718.000 & 0 \\ -12,231.000 & 0 & 3'261,600.000 & 12,231.000 & 0 & 1'630,800.000 \\ -61.155 & 0 & 12,231.000 & 61.155 & 0 & 12,231.000 \\ 0 & -2718.000 & 0 & 0 & 2,718.000 & 0 \\ 0 & 0 & 1'630,800.000 & 12,231.000 & 0 & 3'261,600.000 \end{bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$	

		Barras 4 y 5		
$\begin{Bmatrix} F_{i,x} \\ F_{i,y} \\ M_{i,z} \\ F_{j,x} \\ F_{j,y} \\ M_{j,z} \end{Bmatrix}$	=	$\begin{bmatrix} 755 & 0 & 0 & -755 & 0 & 0 \\ 0 & 11.7969 & 2,359.3750 & 0 & -11.7969 & 2,359.3750 \\ 0 & 2,359.3750 & 629,166.6667 & 0 & -2359.3750 & 314,583.3333 \\ -755 & 0 & 0 & 755 & 0 & 0 \\ 0 & -11.7969 & -2,359.3750 & 0 & 11.7969 & -2359.3750 \\ 0 & 2,359.3750 & 314,583.3333 & 0 & -2359.3750 & 629,166.6667 \end{bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$	

Las FEP en los sistemas local y global para ambas barras, de acuerdo a lo mostrado en la Figura 4.10 son:

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ m_{iz} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \\ m_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \\ -266.6667 \\ 0 \\ -4 \\ 266.6667 \end{Bmatrix}$$

Ensamblando las matrices de rigidez y eliminando los grados de libertad restringidos por las condiciones de apoyo, la matriz de rigideces de la estructura es:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ -266.6667 \\ 0 \\ -4 \\ 266.6667 \\ 0 \\ -4 \\ -266.6667 \\ 0 \\ -4 \\ 266.6667 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 416.6069 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6097 & -0.7621 & 208.3034 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 877.31 & 0 & 0 & -755 & 0 & 0 & -61.155 & 0 & -12,231 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,447.7969 & 2,359.3750 & 0 & -11.7969 & 2,359.3750 & 0 & -2,718 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,359.3750 & 7'152,366.6667 & 0 & -2,359.3750 & 314,583.3333 & 12,231 & 0 & 1'630,8000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -755 & 0 & 0 & 755 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11.7969 & -2,359.3750 & 0 & 11.7969 & -2,359.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,359.3750 & 314,583.3333 & 0 & -2,359.3750 & 629,166.6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6097 & -61.155 & 0 & 12,231 & 0 & 0 & 0 & 855.5298 & 31.4974 & 12,231.6097 & -755 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7621 & 0 & -2718 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31.4974 & 2,754.9978 & 2,358.6129 & 0 & -11.7969 & 2,359.3750 \\ 208.3034 & -12,231 & 0 & 1'630,800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12,231.6097 & 2358.6129 & 3'891,183.274 & 0 & -2,359.3750 & 314,583.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -755 & 0 & 0 & 755 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.7969 & -2,359.375 & 0 & 11.7969 & -2,359.3750 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,359.3750 & 314,583.3333 & 0 & -2359.3750 & 629,166.6667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema planteado, se obtiene:

$$\begin{array}{l}
 \theta_2 = 2.7471 \times 10^{-4} \text{ rad} \\
 u_3 = -0.0310 \text{ cm} \\
 v_3 = -7.3554 \times 10^{-3} \text{ cm} \\
 \theta_3 = -2.5280 \times 10^{-4} \text{ rad}
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 u_4 = -0.0310 \text{ cm} \\
 v_4 = -1.1257 \text{ cm} \\
 \theta_4 = -3.6435 \times 10^{-3} \text{ rad} \\
 u_5 = 0.1361 \text{ cm}
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 v_5 = -0.0118 \text{ cm} \\
 \theta_5 = -9.9093 \times 10^{-4} \text{ rad} \\
 u_6 = 0.1361 \text{ cm} \\
 v_6 = -1.4254 \text{ cm} \\
 \theta_6 = -4.3817 \times 10^{-3} \text{ rad}
 \end{array}
 \right.$$

Las fuerzas actuantes en cada una de las barras son:

Barra 1											
$ \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix} = $	39.3748	31.4974	-0.6097	-39.3748	-31.4974	-0.6097	$ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.7471 \times 10^{-4} \\ 0.1361 \\ -0.0118 \\ -9.9093 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = $	$ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = $	$ \begin{Bmatrix} -4.9893 \\ -3.9920 \\ 0 \\ 4.9893 \\ 3.9920 \\ -0.2636 \end{Bmatrix} $		
	31.4974	25.2010	0.7621	-31.4974	-25.2010	0.7621					
	-0.6097	0.7621	416.6069	0.6097	-0.7621	208.3034					
	-39.3748	-31.4974	0.6097	39.3748	31.4974	0.6097					
	-31.4974	-25.2010	-0.7621	31.4974	25.2010	-0.7621					
	-0.6097	0.7621	208.3034	0.6097	-0.7621	416.6069					

Rotando las fuerzas al sistema local:

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7809 & 0.6247 & 0 \\ -0.6247 & 0.7809 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4.9893 \\ -3.9920 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.3898 \\ -0.0004 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{5x} \\ f_{5y} \\ m_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{5x} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7809 & 0.6247 & 0 \\ -0.6247 & 0.7809 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.9893 \\ 3.9920 \\ -0.2636 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.3898 \\ 0.0004 \\ -0.2636 \end{Bmatrix}$$

Barra 2											
$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix}$	$=$	61.155	0	-12,231.000	-61.155	0	-12,231.000	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0310 \\ -7.3554 \times 10^{-3} \\ -2.5280 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$=$	$\begin{Bmatrix} 4.9893 \\ 19.9920 \\ -791.7300 \\ -4.9893 \\ -19.9920 \\ -1,204.0032 \end{Bmatrix}$
		0	2718.000	0	0	-2,718.000	0				
		-12,231.000	0	3'261,600.000	12,231.000	0	1'630,800.000				
		-61.155	0	12,231.000	61.155	0	12,231.000				
0	-2718.000	0	0	2,718.000	0						
0	0	1'630,800.000	12,231.000	0	3'261,600.000						

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.9893 \\ 19.9920 \\ -791.7300 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 19.9920 \\ -4.9893 \\ -791.7299 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4.9893 \\ -19.9920 \\ -1,204.0032 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -19.9920 \\ 4.9893 \\ -1,204.0032 \end{Bmatrix}$$

Barra 3											
$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix}$	$=$	61.155	0	-12,231.000	-61.155	0	-12,231.000	$\begin{Bmatrix} -0.0310 \\ -7.3554 \times 10^{-3} \\ -2.5280 \times 10^{-4} \\ 0.1361 \\ -0.0118 \\ -9.9093 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$=$	$\begin{Bmatrix} 4.9893 \\ 19.9920 \\ 395.9968 \\ -4.9893 \\ -11.9920 \\ -1,599.7364 \end{Bmatrix}$
		0	2718.000	0	0	-2,718.000	0				
		-12,231.000	0	3'261,600.000	12,231.000	0	1'630,800.000				
		-61.155	0	12,231.000	61.155	0	12,231.000				
		0	-2718.000	0	0	2,718.000	0				
		0	0	1'630,800.000	12,231.000	0	3'261,600.000				

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.9893 \\ 19.9920 \\ 395.9968 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.9920 \\ -4.9893 \\ -395.9968 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{5x} \\ f_{5y} \\ m_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{5x} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4.9893 \\ -11.9920 \\ -1,599.7364 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11.9920 \\ 4.9893 \\ -1,599.7364 \end{Bmatrix}$$

Barra 4

$$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 755 & 0 & 0 & -755 & 0 & 0 \\ 0 & 11.7969 & 2,359.3750 & 0 & -11.7969 & 2,359.3750 \\ 0 & 2,359.3750 & 629,166.6667 & 0 & -2359.3750 & 314,583.3333 \\ -755 & 0 & 0 & 755 & 0 & 0 \\ 0 & -11.7969 & -2,359.3750 & 0 & 11.7969 & -2359.3750 \\ 0 & 2,359.3750 & 314,583.3333 & 0 & -2359.3750 & 629,166.6667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0310 \\ -7.3554 \times 10^{-3} \\ -2.5280 \times 10^{-4} \\ -0.03102 \\ -1.1257 \\ -3.6435 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \\ -266.6667 \\ 0 \\ -4 \\ 266.6667 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1600 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1600 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1600 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{4x} \\ f_{4y} \\ m_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra 5

$$\begin{Bmatrix} F_{5x} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \\ F_{6x} \\ F_{6y} \\ M_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 755 & 0 & 0 & -755 & 0 & 0 \\ 0 & 11.7969 & 2,359.3750 & 0 & -11.7969 & 2,359.3750 \\ 0 & 2,359.3750 & 629,166.6667 & 0 & -2359.3750 & 314,583.3333 \\ -755 & 0 & 0 & 755 & 0 & 0 \\ 0 & -11.7969 & -2,359.3750 & 0 & 11.7969 & -2359.3750 \\ 0 & 2,359.3750 & 314,583.3333 & 0 & -2359.3750 & 629,166.6667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.1361 \\ -0.0118 \\ -9.9094 \times 10^{-4} \\ 0.1361 \\ -1.4253 \\ -4.3816 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \\ -266.6667 \\ 0 \\ -4 \\ 266.6667 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1600 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{5x} \\ f_{5y} \\ m_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{5x} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1600 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1600 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{6x} \\ f_{6y} \\ m_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{6x} \\ F_{6y} \\ M_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De esta forma, las fuerzas actuantes en los extremos de las barras que conforman la estructura se obtienen tal y como se muestra en la Figura 5.12.

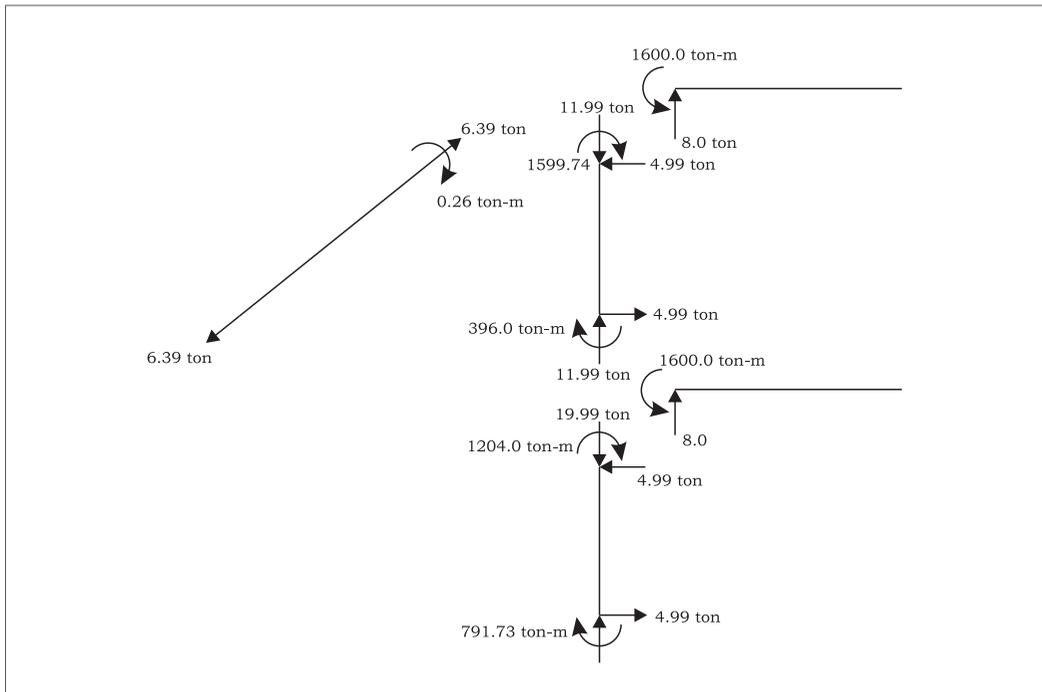


Figura 5.12 Reacciones en los extremos de las barras de la estructura.

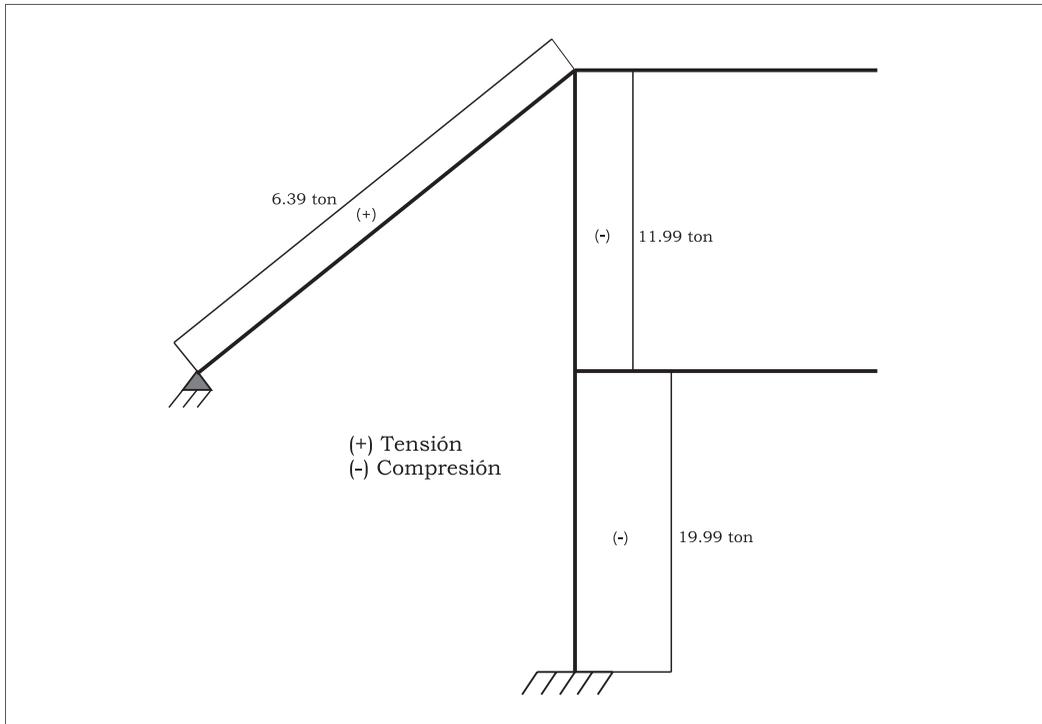


Figura 5.13 Diagrama de fuerza axial.

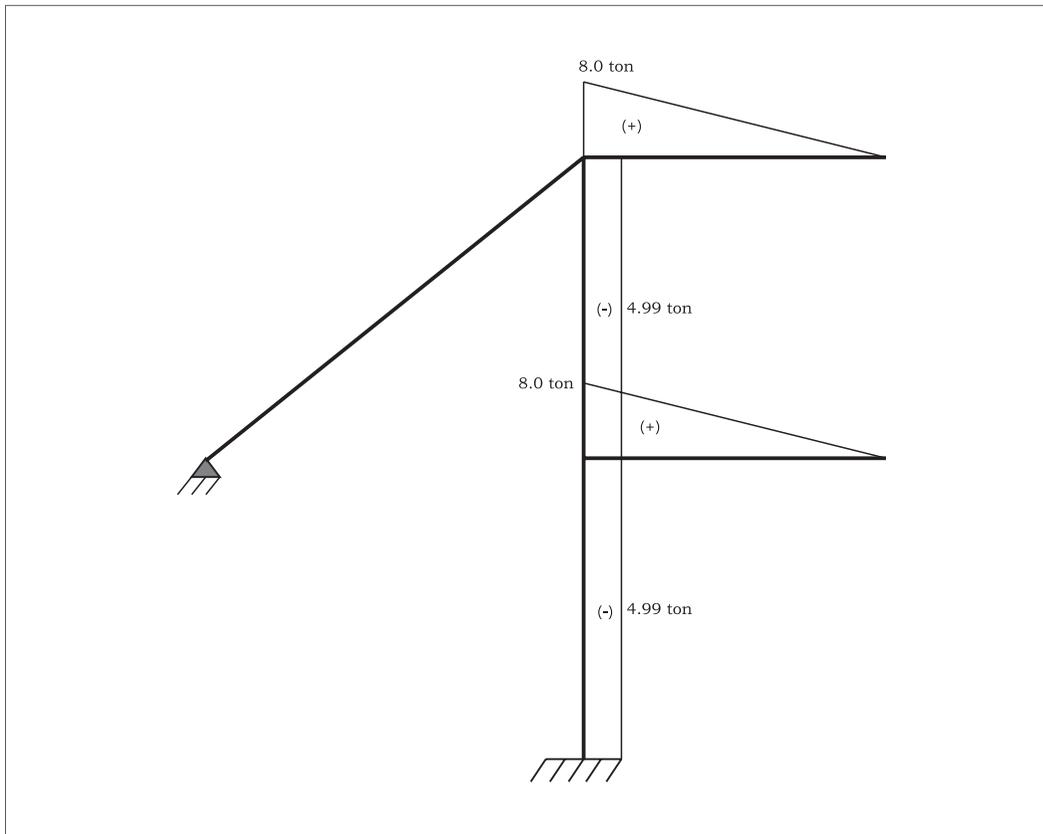
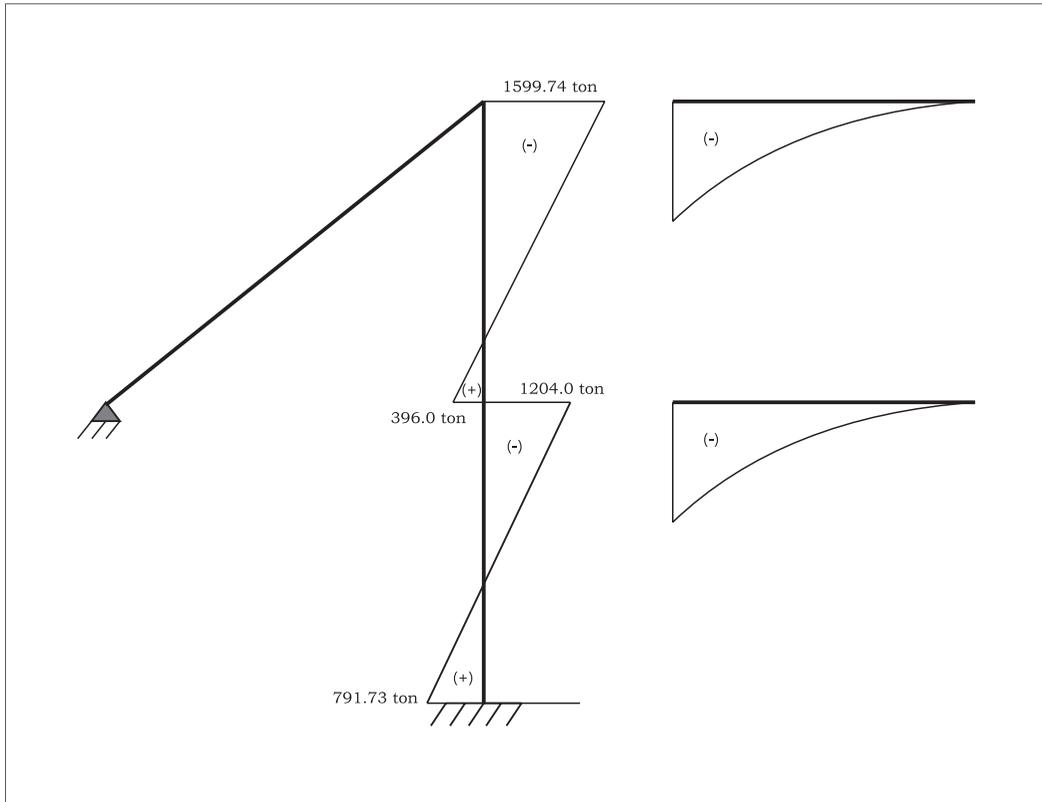


Figura 5.14 Diagrama de Fuerza Cortante.



5.15 Diagrama de momentos flexionantes.

5.3.3 Ejemplo 3

Empleando el método de rigideces, analizar el marco mostrado en la Figura 5.16

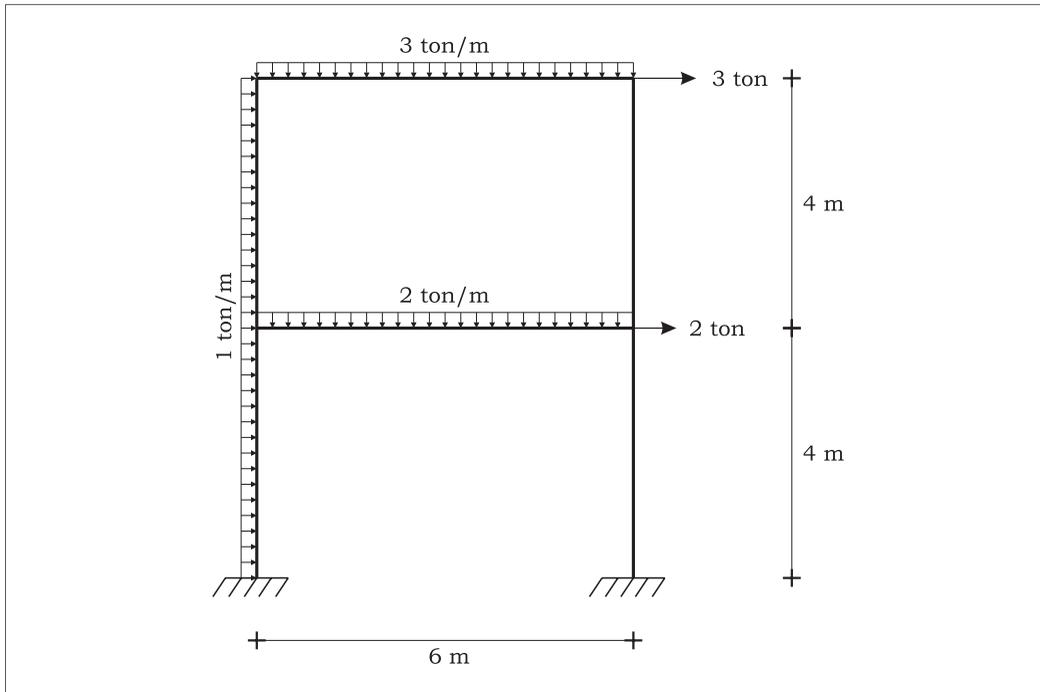


Figura 5.16 Estructura tipo marco a resolver.

Datos para análisis

Columnas: 55 x 55 cm

Trabes: 25 x 40 cm

Material: Concreto $f'c = 200 \text{ kg/cm}^2 \quad \rightarrow \quad E = 14,000 \sqrt{f'c}$

La nomenclatura de nodos y barras, así como el sentido de la conectividad se muestra en la Figura 5.17. La Tabla 5.3 muestra los datos de las propiedades de las barras del marco a analizar.

Tabla 5.3 Propiedades de las barras para análisis.

Barra	E (ton/cm ²)	I (cm ⁴)	A (cm ²)	L (cm)	θ (grados)	l	m
1	197.9899	762,552.08	3,025	400	90	0	1
2	197.9899	762,552.08	3,025	400	90	0	1
3	197.9899	762,552.08	3,025	400	90	0	1
4	197.9899	762,552.08	3,025	400	90	0	1
5	197.9899	133,333.33	1,000	600	0	1	0
6	197.9899	133,333.33	1,000	600	0	1	0

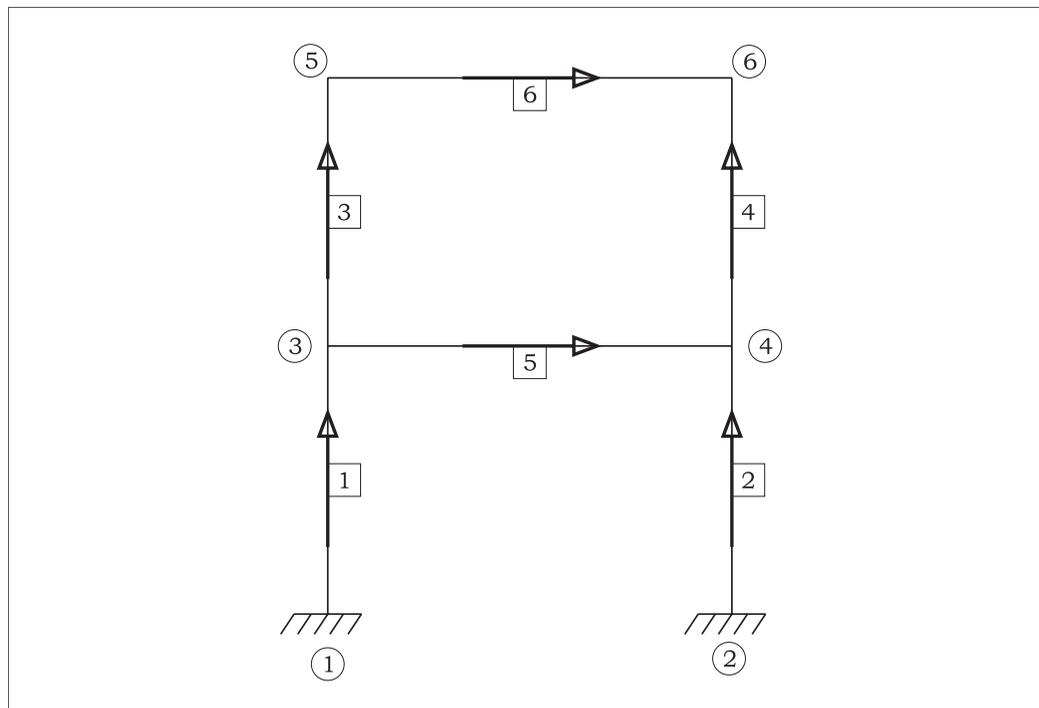


Figura 5.17 Nomenclatura y conectividad de marco.

Matrices de rigidez de las barras.

		Barras 1, 2, 3 y 4							
$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix}$	=		28.3083	0	-5,661.6604	-28.3083	0	-5,661.6604	$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix}$
			0	1,497.2986	0	0	-1,497.2986	0	
			-5,661.6604	0	1'509,776.0980	5,661.6604	0	754,888.0488	
			-28.3083	0	5,661.6604	28.3083	0	5,661.6604	
			0	-1,497.2986	0	0	1,497.2986	0	
			-5,661.6604	0	754,888.0488	5,661.6604	0	1'509,776.0980	

		Barras 5 y 6							
$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix}$	=		329.9832	0	0	-329.9832	0	0	$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$
			0	1.4666	439.9776	0	-1.4666	439.9776	
			0	439.9776	175,991.0211	0	-439.9776	87,995.5105	
			-329.9832	0	0	329.9832	0	0	
			0	-1.4666	-439.9776	0	1.4666	-439.9776	
			0	439.9776	87,995.5105	0	-439.9776	175,991.0211	

De acuerdo a la Figura 4.10, las FEP son las siguientes:

		Barras 1 y 3							
$\begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ m_{iz} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \\ m_{jz} \end{Bmatrix}$	=		0						$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix}$
			-2.0					2.0	
			-133.3333					-133.3333	
			0					2.0	
			-2.0					0	
			133.3333					133.3333	

Barra 5

$$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_{3z} \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ m_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6.0 \\ -600.0 \\ 0 \\ -6.0 \\ 600.0 \end{Bmatrix}$$

Barra 6

$$\begin{Bmatrix} F_{5x} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \\ F_{6x} \\ F_{6y} \\ M_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{5x} \\ f_{5y} \\ m_{5z} \\ f_{6x} \\ f_{6y} \\ m_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -9.0 \\ -900.0 \\ 0 \\ -9.0 \\ 900.0 \end{Bmatrix}$$

Por tanto, la matriz de rigideces resultante es:

$$\begin{Bmatrix} 4.0 \\ -6.0 \\ -600.0 \\ 2.0 \\ -6.0 \\ 600.0 \\ 2.0 \\ -9.0 \\ -766.667 \\ 3.0 \\ -9.0 \\ 900.0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 386.60 & 0 & 0 & -329.98 & 0 & 0 & -28.31 & 0 & -5,661.66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,996.06 & 439.98 & 0 & -1.47 & 439.98 & 0 & -1,497.30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 439.98 & 3'195,543.22 & 0 & -439.98 & 87,995.51 & 5,661.66 & 0 & 754,888.05 & 0 & 0 & 0 \\ -329.98 & 0 & 0 & 386.60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -28.31 & 0 & -5,661.66 \\ 0 & -1.47 & -439.98 & 0 & 2,996.06 & -439.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,497.30 & 0 \\ 0 & 439.98 & 87,995.51 & 0 & -439.98 & 3'195,543.22 & 0 & 0 & 0 & 5,661.66 & 0 & 754,888.05 \\ -28.31 & 0 & 5,661.66 & 0 & 0 & 0 & 358.29 & 0 & 5,661.66 & -329.98 & 0 & 0 \\ 0 & -1,497.30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,498.77 & 439.98 & 0 & -1.47 & 439.98 \\ -5,661.66 & 0 & 754,888.05 & 0 & 0 & 0 & 5,661.66 & 439.98 & 1'685,767.12 & 0 & -439.98 & 97,995.51 \\ 0 & 0 & 0 & -28.31 & 0 & 5,661.66 & -329.98 & 0 & 0 & 358.29 & 0 & 5,661.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.47 & -439.98 & 0 & 1,498.77 & -439.98 \\ 0 & 0 & 0 & -5,661.66 & 0 & 754,888.05 & 0 & 439.98 & 87,995.51 & 5,661.66 & -439.98 & 1'685,767.12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ \theta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6585 \\ -7.4521 \times 10^{-3} \\ -2.4103 \times 10^{-3} \\ 0.6634 \\ -0.0126 \\ -2.2565 \times 10^{-3} \\ 1.6307 \\ -0.0123 \\ -2.5619 \times 10^{-3} \\ 1.6227 \\ -0.0198 \\ -1.5458 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas actuantes en los extremos de las barras son:

		Barra 1										
$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix}$	=	28.3083	0	-5,661.6604	-28.3083	0	-5,661.6604	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6585 \\ -7.4521 \times 10^{-3} \\ -2.4103 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$	-	$\begin{Bmatrix} 2.0 \\ 0.0 \\ -133.33 \end{Bmatrix}$	=	$\begin{Bmatrix} -6.9948 \\ 11.1580 \\ 2,042.0674 \\ 2.9948 \\ -11.1580 \\ -44.1333 \end{Bmatrix}$
		0	1,497.2986	0	0	-1,497.2986	0					
		-5,661.6604	0	1'509,776.0980	5,661.6604	0	754,888.0488					
		-28.3083	0	5,661.6604	28.3083	0	5,661.6604					
		0	-1,497.2986	0	0	1,497.2986	0					
		-5,661.6604	0	754,888.0488	5,661.6604	0	1'509,776.0980					

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -6.9948 \\ 11.1580 \\ 2,042.0674 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.1580 \\ 6.9948 \\ 2,042.0674 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.9948 \\ -11.1580 \\ -44.1333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11.1580 \\ -2.9948 \\ -44.1333 \end{Bmatrix}$$

Barra 2

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.3083 & 0 & -5,661.6604 & -28.3083 & 0 & -5,661.6604 \\ 0 & 1,497.2986 & 0 & 0 & -1,497.2986 & 0 \\ -5,661.6604 & 0 & 1'509,776.0980 & 5,661.6604 & 0 & 754,888.0488 \\ -28.3083 & 0 & 5,661.6604 & 28.3083 & 0 & 5,661.6604 \\ 0 & -1,497.2986 & 0 & 0 & 1,497.2986 & 0 \\ -5,661.6604 & 0 & 754,888.0488 & 5,661.6604 & 0 & 1'509,776.0980 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6634 \\ -0.0126 \\ -2.2465 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.0052 \\ 18.8420 \\ 2,052.7343 \\ 6.0052 \\ -18.8420 \\ 349.3316 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -6.0052 \\ 18.8420 \\ 2,052.7343 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18.8420 \\ 6.0052 \\ 2,052.7343 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{4x} \\ f_{4y} \\ m_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6.0052 \\ -18.8420 \\ 349.3316 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18.8420 \\ -6.0052 \\ 349.3316 \end{Bmatrix}$$

Barra 3

$$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.3083 & 0 & -5,661.6604 & -28.3083 & 0 & -5,661.6604 \\ 0 & 1,497.2986 & 0 & 0 & -1,497.2986 & 0 \\ -5,661.6604 & 0 & 1'509,776.0980 & 5,661.6604 & 0 & 754,888.0488 \\ -28.3083 & 0 & 5,661.6604 & 28.3083 & 0 & 5,661.6604 \\ 0 & -1,497.2986 & 0 & 0 & 1,497.2986 & 0 \\ -5,661.6604 & 0 & 754,888.0488 & 5,661.6604 & 0 & 1'509,776.0980 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6585 \\ -7.4521 \times 10^{-3} \\ -2.4103 \times 10^{-3} \\ 1.6307 \\ -0.0123 \\ -2.5619 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 0.0 \\ -133.3333 \\ 2.0 \\ 0.0 \\ 133.3333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.3305 \\ 7.2038 \\ 64.6345 \\ -2.6295 \\ -7.2038 \\ -316.4267 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1.3305 \\ 7.2038 \\ 64.6345 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.2038 \\ 1.3705 \\ 64.6345 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{5x} \\ f_{5y} \\ m_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{5x} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2.6295 \\ -7.2038 \\ -316.4267 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.2038 \\ 2.6295 \\ -316.4267 \end{Bmatrix}$$

Barra 4

$$\begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \\ F_{6x} \\ F_{6y} \\ M_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.3083 & 0 & -5,661.6604 & -28.3083 & 0 & -5,661.6604 \\ 0 & 1,497.2986 & 0 & 0 & -1,497.2986 & 0 \\ -5,661.6604 & 0 & 1'509,776.0980 & 5,661.6604 & 0 & 754,888.0488 \\ -28.3083 & 0 & 5,661.6604 & 28.3083 & 0 & 5,661.6604 \\ 0 & -1,497.2986 & 0 & 0 & 1,497.2986 & 0 \\ -5,661.6604 & 0 & 754,888.0488 & 5,661.6604 & 0 & 1'509,776.0980 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6634 \\ -0.0126 \\ -2.2565 \times 10^{-3} \\ 1.6227 \\ -0.0198 \\ -1.5458 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.6295 \\ 10.7962 \\ 857.6325 \\ 5.6295 \\ -10.7962 \\ 1,394.1597 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{4x} \\ f_{4y} \\ m_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5.6295 \\ 10.7962 \\ 857.6325 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.7962 \\ 5.6295 \\ 857.6325 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{6x} \\ f_{6y} \\ m_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{6x} \\ F_{6y} \\ M_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5.6295 \\ -10.7962 \\ 1,394.1597 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10.7962 \\ -5.6295 \\ 1,394.1597 \end{Bmatrix}$$

Barra 5

$$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 329.9832 & 0 & 0 & -329.9832 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4666 & 439.9776 & 0 & -1.4666 & 439.9776 \\ 0 & 439.9776 & 175,991.0211 & 0 & -439.9776 & 87,995.5105 \\ -329.9832 & 0 & 0 & 329.9832 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4666 & -439.9776 & 0 & 1.4666 & -439.9776 \\ 0 & 439.9776 & 87,995.5105 & 0 & -439.9776 & 175,991.0211 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6585 \\ -7.4521 \times 10^{-3} \\ -2.4103 \times 10^{-3} \\ 0.6634 \\ -0.0126 \\ -2.2565 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -6 \\ -600 \\ 0 \\ -6 \\ 600 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.6243 \\ 3.9542 \\ -20.5012 \\ 1.6243 \\ 8.0458 \\ -1,206.9641 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \\ m_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1.6243 \\ 3.9542 \\ -20.5012 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.6243 \\ 3.9542 \\ -20.5012 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{4x} \\ f_{4y} \\ m_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.6243 \\ 8.0458 \\ -1,206.9641 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6243 \\ 8.0458 \\ -1,206.9641 \end{Bmatrix}$$

Barra 6

$$\begin{Bmatrix} F_{5x} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \\ F_{6x} \\ F_{6y} \\ M_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 329.9832 & 0 & 0 & -329.9832 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4666 & 439.9776 & 0 & -1.4666 & 439.9776 \\ 0 & 439.9776 & 175,991.0211 & 0 & -439.9776 & 87,995.5105 \\ -329.9832 & 0 & 0 & 329.9832 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4666 & -439.9776 & 0 & 1.4666 & -439.9776 \\ 0 & 439.9776 & 87,995.5105 & 0 & -439.9776 & 175,991.0211 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.6307 \\ -0.0123 \\ -2.5619 \times 10^{-3} \\ 1.6227 \\ -0.0198 \\ -1.5458 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \\ -9 \\ 900 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.6295 \\ 7.2038 \\ 316.4267 \\ -2.6295 \\ 10.7962 \\ -1,394.1698 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{5x} \\ f_{5y} \\ m_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{5x} \\ F_{5y} \\ M_{5z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.6295 \\ 7.2038 \\ 316.4267 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.6295 \\ 7.2038 \\ 316.4267 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{6x} \\ f_{6y} \\ m_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{6x} \\ F_{6y} \\ M_{6z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2.6295 \\ 10.7962 \\ -1,394.1698 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.6295 \\ 10.7962 \\ -1,394.1698 \end{Bmatrix}$$

En la Figura 5.18 pueden verse los resultados en los extremos de las barras que resumen los resultados obtenidos anteriormente.

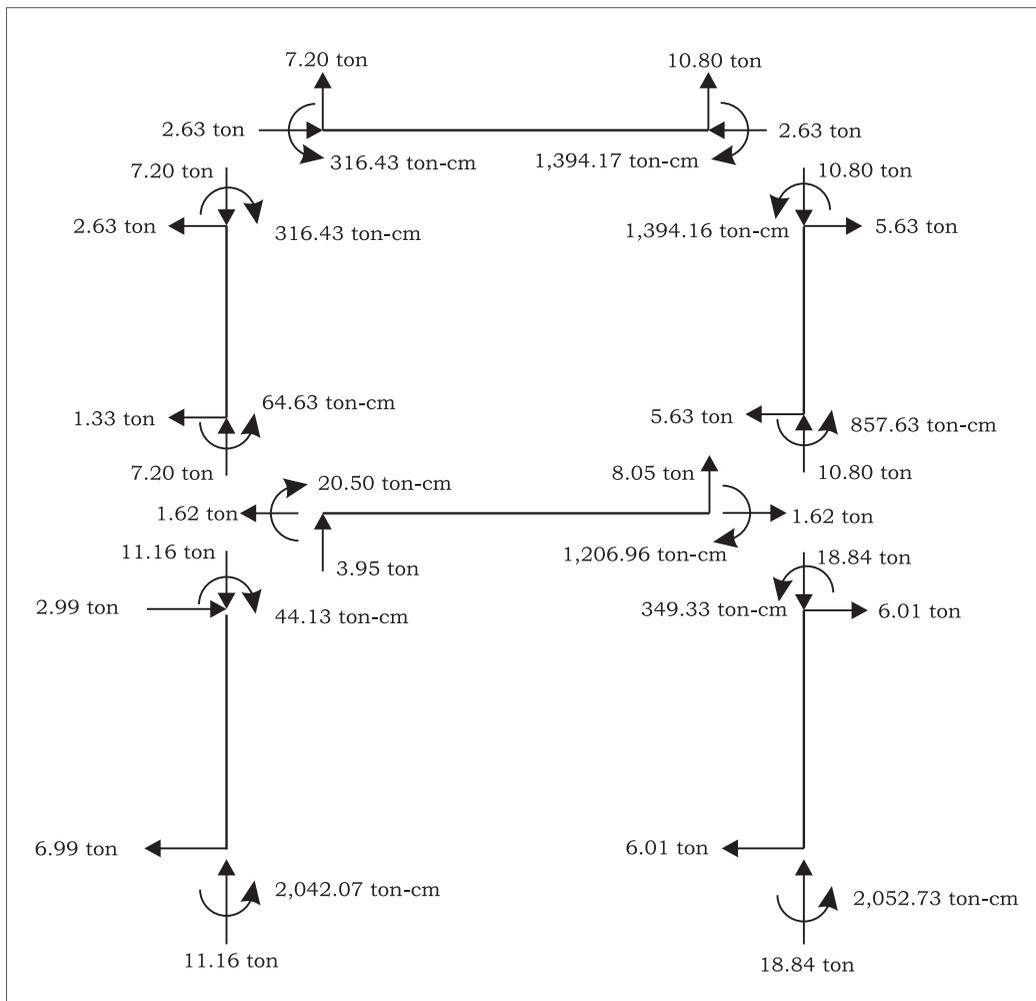


Figura 5.18 Elementos mecánicos actuantes en los extremos de las barras.

> BIBLIOGRAFÍA

McGuire W et al. (2000).
Matrix Structural Analysis.
2ª Edición,
John Wiley and Sons

Timoshenko S P y Goodier J N (1970).
Theory of Elasticity.
3ª Edición,
McGraw Hill

Popov E P (1981).
Introducción a la Mecánica de Sólidos.
Limusa

Rojas R R y Padilla P H M (2009)
Análisis Estructural con Matrices.
Trillas



Universidad
de Guanajuato

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL
División de Ingenierías

ISBN: 978-607-441-381-6

