

Valdés  
·  
Valdés

Elementos finitos en mecánica de sólidos

# ELEMENTOS FINITOS EN MECÁNICA DE SÓLIDOS



Jesús Gerardo Valdés Vázquez  
Jesús Fernando Valdés Vázquez



# Elementos Finitos en Mecánica de Sólidos



# Elementos Finitos en Mecánica de Sólidos

Jesús Gerardo Valdés Vázquez  
Jesús Fernando Valdés Vázquez

UNIVERSIDAD DE  
GUANAJUATO



Ediciones  
Universitarias

Elementos Finitos en Mecánica de Sólidos

Primera edición digital, 2024

D. R. © Universidad de Guanajuato  
Lascuráin de Retana núm. 5  
Zona Centro  
Guanajuato, Gto., México  
C. P. 36000

Producción:  
GEMEC (Grupo de Estructuras y Mecánica Computacional)  
Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental  
División de Ingenierías  
Campus Guanajuato  
Avenida Juárez núm. 77  
Zona Centro  
Guanajuato, Gto., México  
C. P. 36000

Formación: Jesús Gerardo Valdés Vázquez  
Diseño de portada: J. G. Valdés Vázquez y J. F. Valdés Vázquez  
Fotografía de portada: Jesús Fernando Valdés Vázquez

La presente obra fue dictaminada por expertos en el área con la modalidad de evaluación por pares de doble ciego.

Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción o transmisión parcial o total de esta obra bajo cualquiera de sus formas, electrónica o mecánica, sin el consentimiento previo y por escrito de los titulares del copyright.

ISBN: 978-607-580-132-2

Hecho en México  
Made in México

# Contenido

<b>1. Conceptos Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Presentación . . . . .	4
<b>2. Mecánica de Medios Continuos</b>	<b>7</b>
2.1. Cinemática . . . . .	8
2.2. Medidas de la Deformación . . . . .	12
2.3. Esfuerzo . . . . .	14
2.4. Ecuaciones de Conservación . . . . .	15
2.4.1. Conservación de la Masa . . . . .	16
2.4.2. Conservación del Momento Lineal y Angular . . . . .	17
2.4.3. Conservación de la Energía . . . . .	21
2.5. Ecuaciones Constitutivas . . . . .	24
2.5.1. Elasticidad Lineal . . . . .	24
2.5.2. Elasticidad No-Lineal . . . . .	27
2.5.3. Fluidos Newtonianos . . . . .	28
2.6. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	29
2.7. Principios Variacionales . . . . .	30
2.7.1. Preliminares . . . . .	31
2.7.2. Principio del Trabajo Virtual . . . . .	32
<b>3. Formulación General de Sólidos</b>	<b>35</b>
3.1. Forma Débil . . . . .	35
3.2. Discretización . . . . .	38
3.3. Notación de Voigt . . . . .	41
3.3.1. Transformación de $\epsilon$ . . . . .	42

3.3.2.	Transformación de $\mathbf{f}^{int}$ . . . . .	46
3.4.	Ecuaciones Constitutivas . . . . .	49
3.5.	Solución de Problemas . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Elementos Unidimensionales Básicos</b>	<b>53</b>
4.1.	Formulación . . . . .	53
4.2.	Discretización . . . . .	55
4.2.1.	Elemento con dos nodos . . . . .	55
4.2.2.	Solución del problema . . . . .	60
4.2.3.	Resultados Finales . . . . .	62
4.2.4.	Interpretación Gráfica de los Resultados . . . . .	69
4.3.	Elemento con tres nodos . . . . .	81
<b>5.</b>	<b>Elementos Unidimensionales Avanzados</b>	<b>85</b>
5.1.	Interpolación paramétrica . . . . .	85
5.2.	Barra isoparamétrica de dos nodos . . . . .	89
5.3.	Integración Numérica . . . . .	92
5.3.1.	Integración Numérica de Elementos de Dos Nodos . . . . .	97
5.4.	Barra isoparamétrica de tres nodos . . . . .	99
5.4.1.	Resultados Finales en Espacio Real . . . . .	109
5.4.2.	Extrapolación de resultados . . . . .	118
<b>6.</b>	<b>Elementos Bidimensionales</b>	<b>123</b>
6.1.	Fuerzas Internas . . . . .	123
6.2.	Variables del Continuo . . . . .	124
6.3.	Triángulo de tres nodos . . . . .	124
6.3.1.	Funciones de Forma . . . . .	124
6.3.2.	Discretización . . . . .	127
6.4.	Cuadrilátero de 4 nodos . . . . .	127
6.4.1.	Funciones de forma . . . . .	127
6.4.2.	Discretización . . . . .	129
6.4.3.	Semi-algoritmo . . . . .	134
<b>7.</b>	<b>Elementos Tridimensionales</b>	<b>135</b>
7.1.	Fuerzas Internas . . . . .	135
7.2.	Variables del Continuo . . . . .	136
7.3.	Hexaedro de 8 nodos . . . . .	137
7.3.1.	Funciones de forma . . . . .	137

---

7.3.2. Discretización . . . . .	140
7.3.3. Semi-algoritmo . . . . .	144
<b>A. Algebra Matricial</b>	<b>147</b>
A.1. Resumen . . . . .	147
A.1.1. Tipos de Matrices . . . . .	149
A.1.2. Operaciones con Matrices . . . . .	155
<b>B. Algebra Vectorial</b>	<b>169</b>
B.1. Resumen . . . . .	169
B.1.1. Operaciones con Vectores . . . . .	170
B.1.2. Rotación de Vectores . . . . .	176
<b>C. Integración Numérica</b>	<b>181</b>
C.1. Puntos de Integración . . . . .	181
<b>D. Simbología</b>	<b>183</b>
D.1. Simbología Básica Capítulo 2 . . . . .	183
D.2. Simbología Básica Capítulo 3 . . . . .	184
D.3. Simbología Básica Capítulo 4 . . . . .	185
D.4. Simbología Básica Capítulo 5 . . . . .	186
D.5. Simbología Básica Capítulo 6 . . . . .	187
D.6. Simbología Básica Capítulo 7 . . . . .	188
<b>Referencias</b>	<b>189</b>
<b>Índice</b>	<b>192</b>



# Capítulo 1

## Conceptos Preliminares

### Sección

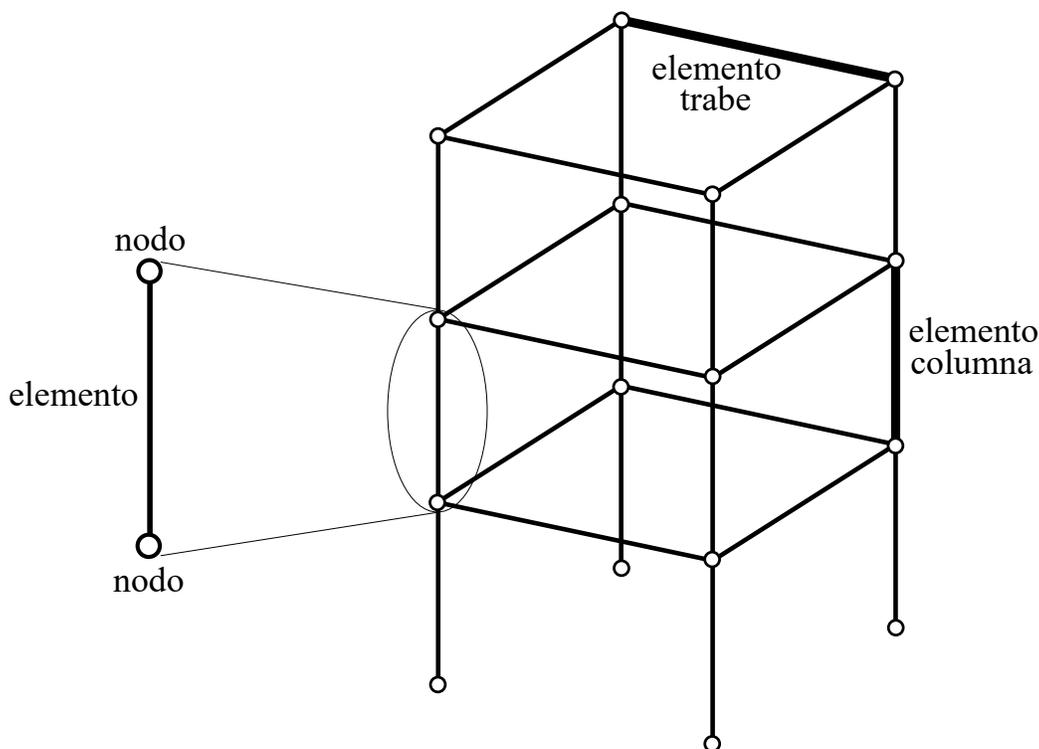
#### 1.1. Introducción

El método de los elementos finitos se ha convertido en una de las herramientas más utilizadas para el análisis de todo tipo de problemas. Si bien, en sus principios, el método de los elementos finitos estaba orientado a la solución general lo más exacta posible de sistemas de entepiso, como se evidencia en Zienkiewics y Cheung (1964), Clough y Tocher (1965), los cuales resolvían mediante ecuaciones diferenciales expresadas matricialmente y con el uso de las computadoras, soluciones analíticas específicas para cada tipo de problema, de acuerdo a Wagner (1929), Reissner (1938), Reissner (1945), Mindlin (1951). Uno de los puntos de partida de este método se experimentó mediante el análisis matricial de estructuras mediante rigideces y flexibilidades, cuyos trabajos iniciales del tema se deben a Melosh (1961). Las ecuaciones que se resuelven en el método de los elementos finitos corresponden al planteamiento matemático de problemas en ingeniería estudiados por la mecánica de medios continuos, donde la bibliografía clásica se refiere comúnmente a los tres siguientes: Malvern (1969), Gurtin (1981) y Spencer (1980). Recientemente, podemos encontrar un trabajo simplificado para estudiantes de ingeniería civil realizado por Valdés-Vázquez (2016).

En un principio, con los elementos finitos se estudiaron problemas de mecánica estructural y mecánica de sólidos. No pasó mucho tiempo en que los métodos numéricos también abordaran problemas de mecánica de fluidos, como se encuentra en Chorin (1967), Ghia y otros (1982), Hughes y Brooks (1979), Hughes y Brooks (1982), Hughes y otros (1986) y Hughes y otros (1989). Actualmen-

te, los elementos finitos están presentes en casi todo tipo de problemas cuyo planteamiento general se exprese mediante ecuaciones diferenciales. Otro libros recomendados para reforzar el conocimiento sobre el método de los elementos finitos son: Bhattacharjee (2022), Lee y Chung (2021), Hejazi y Esfahani (2021), Schröder y de Mattos Pimenta (2020), y Ferreira y Fantuzzi (2020).

En ingeniería civil es común llevar cursos donde se aprende el análisis de estructuras de barras para armaduras y marcos. Estos sistemas están constituidos por diferentes tipos de elementos (como pueden ser traveses y columnas) y que se conectan entre sí en sus extremos mediante nodos, como se aprecia en la Fig. 1.1. Cabe destacar que, para completar el sistema estructural mencionado anteriormente, se necesita conocer tanto sus apoyos como las cargas a las que estará sometida la estructura. Este tipo de sistemas estructurales donde se puede identificar claramente cada uno de sus elementos se denomina sistema discreto.

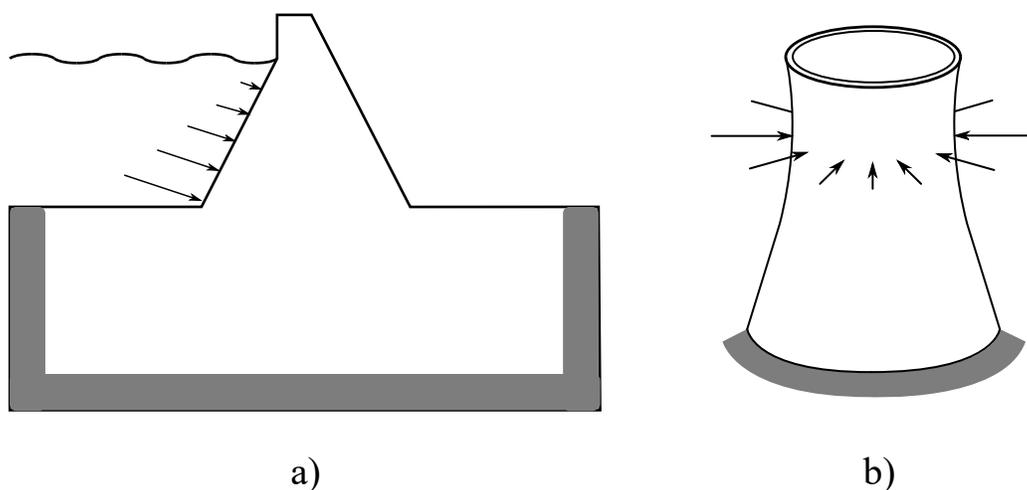


**Figura 1.1** Sistema discreto

Esta denominación de elementos y nodos no es exclusiva de sistemas estructurales ya que también se utiliza en ingeniería civil para sistemas hidráulicos, en particular, en el análisis de redes de distribución de agua potable. Lo mismo sucede en otras ingenierías, donde se discretizan sistemas eléctricos mediante elementos y nodos. A pesar de las diferencias sustanciales que pueden existir

entre cada uno de los sistemas anteriores, todos tienen la característica de que se pueden resolver usando análisis matricial.

Ahora bien, existen otros tipos de construcciones en ingeniería civil como pueden ser presas, puentes, losas de entrepiso y chimeneas industriales entre muchas otras (ver ejemplos de la Fig. 1.2: a) presa, b) chimenea industrial). Este tipo de sistemas tienen la característica de que no es posible distinguir entre las diferentes partes estructurales que los conforman (es decir, no se puede asegurar que se trata de muchas vigas juntas ni tampoco de varias columnas contiguas), razón por la cual se les denomina sistemas continuos.

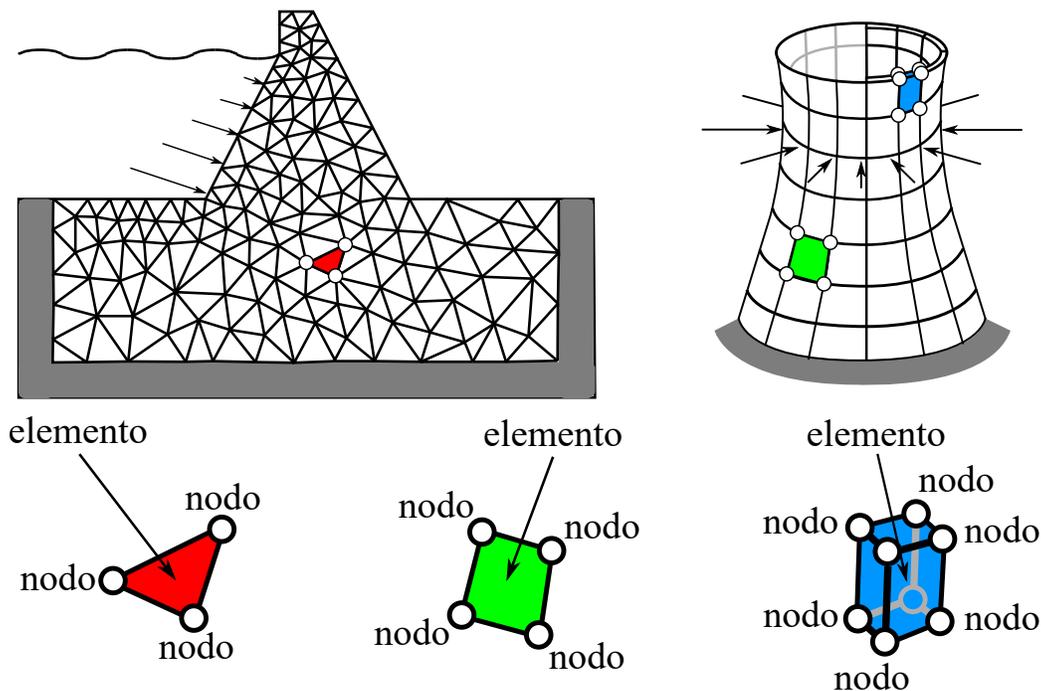


**Figura 1.2** Sistema continuo

Para poder analizar estructuras continuas utilizando el método de los elementos finitos es necesario discretizarlas creando una malla de elementos finitos. Estas mallas pueden ser de dos tipos: aquellas denominadas estructuradas, donde la malla sigue un patrón ordenado, y aquellas denominadas no-estructuradas, en las que la malla está desordenada. Además, los tipos de elementos finitos formados por estas mallas pueden ser unidimensionales, así como también bi y tridimensionales, como se aprecia en la Fig. 1.3.

En la Fig. 1.3 se aprecian dos elementos finitos bidimensionales: un triángulo rojo de tres nodos y un cuadrilátero verde de cuatro nodos. Se hace la aclaración del número de nodos ya que también existen triángulos de 6 ó 10 nodos y cuadriláteros de 8 ó 9 nodos, entre otros. En azul se aprecia un elemento tridimensional de ocho nodos, aunque existen otros tipos de elementos finitos para análisis en 3D.

Una vez que la estructura continua se encuentra discretizada con elementos finitos se puede proceder a su análisis mediante métodos matriciales muy simi-



**Figura 1.3** Sistema continuo ya discretizado

lares a los que utiliza el ingeniero estructural en el análisis de estructuras a base de elementos unidimensionales tipo barras.

Ya que la solución de problemas se hace de forma matricial, se han añadido a este libro dos anexos, uno relacionado con matrices, el **Anexo A**, y otro con vectores, el **Anexo B**.

## Sección

### 1.2. Presentación

Ya que el estudio del método de los elementos finitos se desarrolla a partir de la mecánica de medios continuos, en el **capítulo 2** se da un pequeño repaso dedicado a la mecánica de medios continuos. En esta capítulo se encuentran todas las definiciones y ecuaciones que se desarrollarán mediante el método de los elementos finitos en los capítulos subsecuentes.

Posteriormente, en el **capítulo 3** se desarrolla la formulación general del método de los elementos finitos. Este desarrollo es aplicable a elementos de la mecánica de sólidos desde 1 dimensión hasta 3 dimensiones. Su importancia radica en demostrar como a partir de las ecuaciones tensoriales de la mecánica

de medios continuos se puede expresar una formulación matricial que solucione el problema de forma aproximada.

Posteriormente, en el **capítulo 4** y **capítulo 5** se abordan los elementos finitos unidimensionales. Este capítulo explica con ejemplos como se desarrollan los elementos finitos más básicos y demuestra como es su solución al compararla con soluciones exactas para problemas conocidos en la resistencia de materiales. Finalmente, en los capítulos **capítulo 6**, y **capítulo 7** se desarrollan elementos finitos bi- y tri-dimensionales respectivamente. En cada uno de estos capítulos se incluye un semi-algoritmo que permite programar el método para obtener la matriz de rigidez del sistema.



## Capítulo 2

# Mecánica de Medios Continuos

El comportamiento macroscópico de fluidos, sólidos y estructuras esta definido por modelos provenientes de la mecánica de medios continuos. La mecánica de medios continuos tiene como finalidad estudiar los esfuerzos que se manifiestan en el interior de sólidos líquidos y gases así como las deformaciones o flujos de dichos materiales y descubrir las relaciones mutuas entre los esfuerzos y las deformaciones o fluencias.

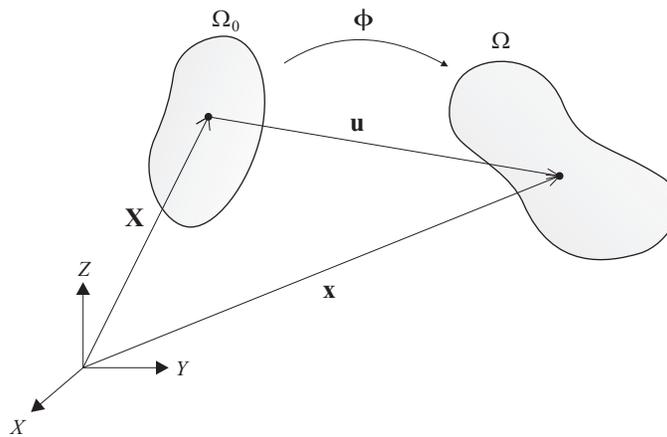
En éste capítulo, se presenta un resumen de la parte de la mecánica de medios continuos *usada en este trabajo*. Previo al estudio de este tema, se recomienda haber cursado la materia de mecánica de medios continuos para comprender notación y definiciones usadas en este texto. Se sugiere haber estudiado el texto Valdés-Vázquez (2020) sobre mecánica del continuo que complementa este trabajo. Una descripción general y más detallada de mecánica de medios continuos se puede encontrar en Malvern (1969), Spencer (1980), Gurtin (1981), Popov (1992), Holzapfel (2000), Batchelor (2000) y Kundu y Cohen (2002) entre otros libros clásicos bien conocidos.

Este capítulo empieza con la cinemática que hay en el movimiento de un cuerpo. Después se describe el concepto de esfuerzo y deformación para mecánica de sólidos no lineales y fluidos. Luego se presentan las ecuaciones de conservación, también conocidas como ecuaciones de balance. Finalmente se obtienen las ecuaciones constitutivas así como las ecuaciones de Navier-Stokes.

## Sección

## 2.1. Cinemática

La cinemática (*kinematics*) estudia el movimiento y deformación de un cuerpo sin importarle las fuerzas responsables de tal acción. Un cuerpo  $\mathcal{B}$  se puede imaginar como aquel formado por un conjunto de partículas que son llamadas *puntos materiales* (*material points*). Este cuerpo está en estado inicial cuando el tiempo  $t = 0$ , tal como se muestra en la Fig. 2.1. El dominio de este cuerpo en estado inicial está definido por  $\Omega_0$ , el cual ocupa una región en el espacio y es conocida como *configuración inicial* (*initial configuration*). Para describir la cinemática de un cuerpo, se necesita de otra configuración llamada *configuración de referencia* (*reference configuration*), en la cual están definidas las ecuaciones de la cinemática. La mayoría de las veces, la configuración inicial es usada como la configuración de referencia, a menos que se especifique lo contrario.



**Figura 2.1** Configuraciones de un medio continuo

Ahora supongamos que el dominio  $\Omega_0$  se mueve a una nueva región  $\Omega$  la cual es ocupada por el cuerpo  $\mathcal{B}$  en cualquier instante de tiempo subsecuente  $t > 0$ . En este instante de tiempo, la configuración del cuerpo es llamada *configuración actual* (*current configuration*), también conocida como *configuración deformada* (*deformed configuration*).

El contorno del dominio, este caso para la configuración actual, se define por  $\Gamma$ . La dimensión de cualquier modelo se expresa por  $n_{\text{dime}}$  indicándonos el número de dimensiones que ocupa en el espacio el medio continuo  $\mathcal{B}$ .

El vector de posición de un punto material (*material point*) en la configuración de referencia se define por  $\mathbf{X}$ , y viene dado por

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n_{\text{dime}}} X_i \mathbf{e}_i \quad (2.1.1)$$

donde  $X_i$  son los componentes de  $\mathbf{X}$  en la configuración de referencia y  $\mathbf{e}_i$  son los vectores unitarios (*unit base vectors*) que definen un sistema de coordenadas rectangular cartesiano (*rectangular Cartesian coordinate system*). Las componentes del vector  $\mathbf{X}$  son conocidas como *coordenadas materiales* (*material coordinates*) o también como *coordenadas lagrangianas* (*Lagrangian coordinates*). El movimiento de un cuerpo  $\mathcal{B}$  está dado por

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1.2)$$

donde

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n_{\text{dime}}} x_i \mathbf{e}_i \quad (2.1.3)$$

es la posición de un punto material  $\mathbf{X}$  pero en la configuración actual.

Las componentes del vector  $\mathbf{x}$  son llamadas *coordenadas espaciales* (*spatial coordinates*) o *coordenadas eulerianas* (*Eulerian coordinates*), y la función  $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t)$  nos da la posición que corresponde a la configuración de referencia pero en la configuración actual.

Cuando describimos la cinemática de un medio continuo dos aproximaciones son comúnmente usadas. La primera es cuando tomamos las coordenadas materiales  $X_i$  y el tiempo  $t$  como variables independientes, y entonces la descripción es conocida como *descripción material* (*material description*) o *descripción lagrangiana* (*Lagrangian description*). Por otra parte, si las variables independientes son las coordenadas espaciales  $x_i$  y el tiempo  $t$ , entonces nos estaremos refiriendo a una *descripción espacial* (*spatial description*) o *descripción euleriana* (*Eulerian description*). En general, la mecánica de sólidos y las estructuras usan la descripción lagrangiana mientras que la mecánica de fluidos usa la descripción euleriana.

La diferencia en un punto material entre su configuración actual y su configuración de referencia nos da como resultado un desplazamiento (*displacement*), el cual escrito en descripción material viene dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.1.4)$$

Reemplazando la ecuación (2.1.1) y la ecuación (2.1.2) en la ecuación (2.1.4) nos da como resultado

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.1.5)$$

ya que para  $t = 0$ ,  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$ , lo que significa que en la configuración de referencia,  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ . Por el contrario, si las variables independientes son  $(\mathbf{x}, t)$ , la ecuación inversa del movimiento se define por

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1.6)$$

lo que significa que el punto material  $\mathbf{X}$  se asocia con el lugar que ocupa la variable  $\mathbf{x}$  en el instante de tiempo  $t$ . De esta manera, el desplazamiento en descripción euleriana se expresa por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1.7)$$

Para un punto material, la *velocidad* (*velocity*) está dada por la derivada del vector de posición. Cuando  $\mathbf{X}$  se mantiene constante, entonces la derivada se llama *derivada material* respecto al tiempo (*material time derivative*) o también es conocida como *derivada total* respecto al tiempo (*total time derivative*). Usando la ecuación (2.1.2) y la ecuación (2.1.5), la velocidad material se expresa por

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1.8)$$

De la misma forma, la *aceleración material* (*material acceleration*) se expresa como la derivada de la velocidad respecto al tiempo, y viene dada por

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1.9)$$

Cuando las expresiones están dadas en descripción espacial, por ejemplo la velocidad  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$  donde se ha usado la ecuación (2.1.2), su derivada material puede ser encontrada si usamos

$$\frac{Dv_i(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \quad (2.1.10)$$

donde  $\partial v_i(\mathbf{x}, t)/\partial t$  es la *derivada espacial* respecto al tiempo (*spatial time derivative*) y el segundo término en el lado derecho de la ecuación es el término

*convectivo* (*convective term*), donde  $\partial v_i / \partial x_j$  es el *gradiente* derecho (*right gradient*) del vector velocidad respecto a las coordenadas espaciales, la cual se puede expresar en notación indicial por  $v_{i,j}$  o en notación tensorial por  $\mathbf{v}\nabla$ . Usando la ecuación inversa del movimiento, ecuación (2.1.6), para expresar la velocidad en descripción espacial, la ecuación (2.1.10) puede ser escrita como

$$\frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1.11)$$

donde  $\nabla\mathbf{v}$  es el *gradiente* izquierdo (*left gradient*) del vector velocidad con respecto a las coordenadas espaciales, las cuales pueden ser expresadas en notación indicial por  $\partial_j v_i$ . Es importante resaltar que

$$\frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.1.12)$$

En general, la derivada material respecto al tiempo de cualquier función, ya sea un escalar, un vector o un tensor expresado en variables espaciales  $\mathbf{x}$  y tiempo  $t$  se puede obtener con

$$\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\bullet) \quad (2.1.13)$$

Cuando un medio continuo se mueve de una configuración de referencia  $\Omega_0$  a una configuración deformada  $\Omega$ , cambia su tamaño y forma lo que resulta en una *deformación* (*deformation*). Una medida importante de la deformación comúnmente usada en mecánica es el *tensor material gradiente de la deformación*  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$  (*material deformation gradient tensor*) dado por

$$\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} = \frac{\partial\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial\mathbf{X}} \quad \text{or} \quad F_{ij} = \frac{\partial\phi_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.1.14)$$

el cual relaciona cantidades en la configuración de referencia con su correspondiente cantidad en la configuración deformada. Por ejemplo, si consideramos un segmento de línea infinitesimal  $d\mathbf{X}$  en la configuración de referencia, entonces usando la ecuación (2.1.14), el segmento de línea resultante  $d\mathbf{x}$  en la configuración deformada es

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{or} \quad dx_i = F_{ij} dX_j \quad (2.1.15)$$

El tensor material gradiente de la deformación  $\mathbf{F}$  también es conocido como la *matriz Jacobiana* (*Jacobian matrix*). Otra cantidad importante relacionada con  $\mathbf{F}$  es el *determinante del Jacobiano* (*Jacobian determinant*) expresado por

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (2.1.16)$$

El determinante del Jacobiano es importante ya que nos permite relacionar integrales en la configuración de referencia con su correspondiente contraparte en la configuración deformada.

Sustituyendo  $\mathbf{x}$  de la ecuación (2.1.4) en la ecuación (2.1.14), el tensor material gradiente de la deformación viene dado por

$$F_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} \quad (2.1.17)$$

donde  $\partial u_i / \partial X_j$  es el *tensor material gradiente de los desplazamientos* (*material displacement gradient tensor*) y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } i = j \\ 0 & \text{cuando } i \neq j \end{cases} \quad (2.1.18)$$

son los dos valores que puede tomar.

## Sección

## 2.2. Medidas de la Deformación

Existen muchas medidas cinemáticas de la deformación en la mecánica del continuo. En el caso de descripciones lagrangianas, la medida de deformación más importante es el *tensor de deformación de Green-Lagrange*  $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$  (*Green-Lagrange strain tensor*) que se define como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad \text{or} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ik}^T F_{kj} - \delta_{ij}) \quad (2.2.1)$$

el cual se puede expresar en función del tensor material gradiente de los desplazamientos, dando como resultado

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.2.2)$$

Para problemas con deformaciones lineales, el *tensor de deformaciones infinitesimales*  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t)$  (*infinitesimal strain tensor*) se puede deducir a partir de

la ecuación (2.2.2) simplemente despreciando los términos no lineales, de donde encontramos

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.2.3)$$

Ahora definamos el *tensor espacial gradiente de la velocidad*  $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$  (*spatial velocity gradient tensor*) como

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{or} \quad l_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.2.4)$$

el cual se puede descomponer en su parte simétrica y antisimétrica usando

$$\mathbf{l} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad (2.2.5)$$

La parte simétrica del tensor gradiente de la velocidad se define como el *tensor velocidad de deformación*  $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$  (*spatial rate of deformation tensor* o *velocity strain tensor* o *strain rate tensor*) y viene dado por

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad \text{or} \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2.6)$$

Por otro lado, el *tensor velocidad de rotación*  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ , también conocido como *tensor spin* (*spatial rate of rotation tensor* o *spin tensor*) se define como la parte antisimétrica del tensor gradiente de la velocidad expresandose por

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad \text{or} \quad w_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2.7)$$

Calculando la derivada material del tensor material gradiente de la deformación, ecuación (2.1.14), nos da como resultado

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{or} \quad \dot{F}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} \quad (2.2.8)$$

y ahora la ecuación (2.2.4) se puede escribir como

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{or} \quad l_{ij} = \dot{F}_{ik} F_{kj}^{-1} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad (2.2.9)$$

donde se ha usado el *tensor espacial gradiente de la deformación*  $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t)$  (*spatial deformation gradient tensor*) que se expresa por

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{or} \quad F_{kj}^{-1} = \frac{\partial \phi_i^{-1}}{\partial x_j} = \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad (2.2.10)$$

Si calculamos la derivada material del tensor de deformación de Green-Lagrange, ecuación (2.2.1), obtenemos

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} \right) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} \quad (2.2.11)$$

que en el caso de dinámica estructural se utiliza para calcular el amortiguamiento viscoelástico de estructuras.

## Sección

### 2.3. Esfuerzo

Del movimiento y la deformación de un medio continuo  $\mathcal{B}$  nacen *fuerzas* provenientes de la interacción entre las partes internas del cuerpo o de la interacción entre el cuerpo y sus elementos vecinos. Denotemos a  $P$  como un punto sobre el contorno  $\Gamma$  del medio continuo,  $\mathbf{n}$  el vector unitario *normal* saliente en el punto  $P$ , y  $d\Gamma$  la parte del contorno donde se encuentra  $P$ . Entonces  $d\mathbf{f}_s$  es un diferencial de la *fuerza de superficie* (*surface force*) que actúa en el punto  $P$  y que depende de la normal  $\mathbf{n}$  en la parte del contorno  $d\Gamma$ . Por lo tanto, la forma espacial de las fuerzas de superficie expresadas por  $\mathbf{t}$  aplicadas en el punto  $P$  ubicado sobre la superficie y con una normal saliente  $\mathbf{n}$  se define por

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{d\Gamma \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{f}_s}{d\Gamma} \quad (2.3.1)$$

donde  $\mathbf{t}$  no necesariamente tiene la misma dirección que la normal  $\mathbf{n}$ . Es importante resaltar que el vector de fuerzas de superficie tiene unidades de fuerza por unidad de área.

Existe un campo tensorial espacial  $\boldsymbol{\sigma}$  llamado *tensor de esfuerzos de Cauchy* (*Cauchy stress tensor*) tal que para cada vector normal unitario  $\mathbf{n}$  existe

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} \quad \text{or} \quad t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.3.2)$$

que también es conocido como *teorema de esfuerzos de Cauchy* o *ecuación de equilibrio en superficie*. Ya que el tensor de esfuerzos de Cauchy involucra la normal de la superficie en configuración deformada y el vector de fuerzas de

superficie también en configuración deformada, este tensor también es conocido como el *tensor de esfuerzos físicos verdaderos* (*true physical stress tensor*), que además tiene la propiedad de que es un tensor simétrico, tal y como se muestra en la sección 2. La contraparte de la ecuación (2.3.2) en configuración de referencia es

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P} \quad \text{or} \quad t_i^0 = P_{ji} n_j^0 \quad (2.3.3)$$

donde  $\mathbf{P}$  es el *tensor de esfuerzos nominal* (*nominal stress tensor*),  $\mathbf{t}_0$  y  $\mathbf{n}_0$  son la fuerza de superficie y el vector normal unitario respectivamente expresados en configuración de referencia. A diferencia del tensor de esfuerzos de Cauchy, el tensor nominal de esfuerzos no es simétrico y es importante resaltar que en este caso el vector normal unitario se encuentra en la parte izquierda del producto. La transpuesta del tensor nominal de esfuerzos da como resultado el *primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff* (*first Piola-Kirchhoff stress tensor*). Por otro lado, el *segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff* (*second Piola-Kirchhoff stress tensor*) se expresa mediante  $\mathbf{S}$  y viene dado por

$$\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{S} \quad (2.3.4)$$

donde la transformación del vector de fuerzas de superficie por el tensor  $\mathbf{F}^{-1}$  da como resultado que el segundo tensor de Piola-Kirchhoff sea simétrico. Las expresiones que permiten relacionar estas medidas de esfuerzo vienen dadas por

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.3.5)$$

$$\mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.3.6)$$

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.3.7)$$

## Sección

### 2.4. Ecuaciones de Conservación

Las *ecuaciones de conservación* (*conservation equations*) reflejan cantidades físicas para un medio continuo, las cuales siempre se deben de satisfacer y que no tienen restricción alguna de aplicación para ningún material. La aplicación de

las ecuaciones de conservación al dominio  $\Omega$  de un medio continuo  $\mathcal{B}$  nos arroja como resultado una ecuación en función de integrales. Ya que las ecuaciones integrales se deben de satisfacer para cualquier parte del dominio o subdominio del medio continuo, entonces las ecuaciones de conservación se pueden expresar como *ecuaciones en derivadas parciales* (*partial differential equations*).

Antes de continuar con las ecuaciones de conservación, la derivada material de una ecuación integral para cualquier propiedad espacial se define por

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} (\bullet) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{D(\bullet)}{Dt} + (\bullet) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) d\Omega \quad (2.4.1)$$

la cual es conocida como *teorema de transporte de Reynolds* (*Reynolds' transport theorem*). La *divergencia* (*divergence*)  $\nabla \cdot (\bullet)$  respecto a coordenadas actuales también puede ser expresada por  $\text{div}(\mathbf{v})$  o en notación indicial por  $v_{i,i}$ .

### 2.4.1. Conservación de la Masa

Considere el dominio  $\Omega$  de un medio continuo  $\mathcal{B}$ , el cual está envuelto por la superficie  $\Gamma$  y en su interior se encuentra un material de *densidad* (*density*) constante  $\rho(\mathbf{x}, t)$ . Entonces, la *masa* (*mass*) del medio continuo esta definida por

$$m = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (2.4.2)$$

La *conservación de la masa* (*mass conservation*) exige que la masa de cualquier cuerpo sea constante. Consecuentemente, la derivada material de la masa respecto al tiempo debe ser cero, de donde encontramos que

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (2.4.3)$$

la cual nos lleva a la siguiente relación integral, en la cual se usa la ecuación (2.4.1)

$$\frac{Dm}{Dt} = \int_{\Omega} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) d\Omega = 0 \quad (2.4.4)$$

donde las cantidades se expresan en coordenadas espaciales. Ya que la ecuación anterior se debe satisfacer para cualquier parte del dominio  $\Omega$ , entonces la con-

servación de la masa se puede escribir con la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{or} \quad \dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (2.4.5)$$

La ecuación anterior también se conoce como *ecuación de continuidad* (*continuity equation*). Substituyendo la derivada material, ecuación (2.1.13), en el primer término de la ecuación (2.4.5), la ecuación de continuidad se puede escribir como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \quad (2.4.6)$$

que se conoce como la *forma conservativa* (*conservative form*) de la ecuación de conservación de la masa. Cuando un material se dice que es *incompresible* (*incompressible*), su densidad se mantiene constante en el tiempo, y por lo tanto su derivada material respecto al tiempo vale cero y la ecuación de continuidad se convierte en

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{or} \quad v_{i,i} = 0 \quad (2.4.7)$$

Ésta es la ecuación de continuidad que comúnmente se usa en la mecánica de fluidos incompresibles como si se tratara de una restricción al problema.

Para descripciones lagrangianas, la ecuación de conservación de la masa se puede integrar y se obtiene una ecuación algebraica para la densidad, en la forma como se expresa la ecuación (2.4.2), lo que resulta en

$$\rho(\mathbf{X}, t)J = \rho_0(\mathbf{X}) \quad (2.4.8)$$

la cual es la ecuación de conservación de la masa en descripción lagrangiana.

## 2.4.2. Conservación del Momento Lineal y Angular

La *conservación de momento lineal* (*conservation of linear momentum*) dice que la derivada respecto al tiempo del momento lineal deber ser igual a la suma de todas las fuerzas aplicadas en un medio continuo. La conservación de momento lineal también recibe otros nombres como el *principio de balance de momento* o *principio de conservación de momento* (*balance of momentum principle* o

*momentum conservation principle*). Si consideramos un dominio arbitrario  $\Omega$  con su respectivo contorno  $\Gamma$  en configuración deformada, el cual se encuentra sujeto a *fuerzas másicas* (*body forces*)  $\rho \mathbf{b}$  y *fuerzas de superficie* (*surface tractions*)  $\mathbf{t}$ , donde  $\mathbf{b}$  es una fuerza por unidad de masa, entonces la fuerza total en el sistema es

$$\mathbf{f}(t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \quad (2.4.9)$$

Por definición, el momento lineal es igual al producto de la densidad  $\rho$  y la velocidad  $\mathbf{v}$  en todo el dominio  $\Omega$  en estudio, lo cual se expresa por

$$\mathbf{p}(t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (2.4.10)$$

Con éstas ecuaciones, la conservación del momento lineal viene dado por

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \quad (2.4.11)$$

Substituyendo las ecuaciones (2.4.1) y (2.4.5) en la ecuación (2.4.11), la derivada respecto al tiempo del momento lineal es

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{Dt} d\Omega \quad (2.4.12)$$

La integral del contorno en la ecuación (2.4.11) se puede transformar en una integral de dominio usando la ecuación (2.3.2) y el teorema de la divergencia de Gauss, lo cual da como resultado

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (2.4.13)$$

Substituyendo las ecuaciones (2.4.12) y (2.4.13) en la ecuación (2.4.11) se obtiene

$$\int_{\Omega} \left( \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{b} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) d\Omega = 0 \quad (2.4.14)$$

y ya que esta relación integral se cumple para cualquier dominio arbitrario, encontramos que

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad \text{or} \quad \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (2.4.15)$$

Ésta ecuación es conocida como la *ecuación de momento* (*momentum equation*). Hay que resaltar que aún no hemos especificado en que configuración se encuentra dicha ecuación.

Para obtener la *descripción euleriana* de la ecuación de momento, la derivada material en la ecuación (2.4.15) se substituye usando la ecuación (2.1.13), lo que nos da como resultado

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad \text{or} \quad \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \partial_j v_i \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (2.4.16)$$

donde todas las cantidades se encuentran expresadas en coordenadas espaciales. La ecuación (2.4.16) es la que en general se utiliza en problemas de mecánica de fluidos. Cuando ésta ecuación se usa para hacer una discretización con elementos finitos, se dice que se trata de una *formulación euleriana* (*Eulerian formulation*).

La ecuación de momento, ecuación (2.4.15), también se puede expresar en descripción lagrangiana donde todas las cantidades se encuentran en función de coordenadas materiales, dando como resultado

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad \text{or} \quad \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (2.4.17)$$

Ya que la ecuación (2.4.15) se encuentra en configuración deformada, el término de la divergencia se calcula respecto a coordenadas espaciales y por lo tanto  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)$  se expresa por  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$ , y de esta forma el gradiente espacial del campo de esfuerzos puede ser evaluado. Cuando se estudian sólidos y estructuras no lineales utilizando discretizaciones con elementos finitos, la ecuación (2.4.17) recibe el nombre de *formulación lagrangiana actualizada* (*updated Lagrangian formulation*).

La *conservación de momento angular* (*conservation of angular momentum*) se obtiene mediante el producto vectorial entre el vector de posición actual  $\mathbf{x}$  por cada uno de los términos de la ecuación de momento lineal, ecuación (2.4.11), de donde obtenemos

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \quad (2.4.18)$$

lo cual se puede demostrar que resulta en la simetría del tensor de esfuerzos, esto es

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.4.19)$$

El término de la aceleración de la ecuación (2.4.15) se puede despreciar cuando las cargas son aplicadas lentamente y en consecuencia las fuerzas inerciales se vuelven insignificantes. Entonces podemos escribir

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 \quad (2.4.20)$$

que es conocida como *ecuación de equilibrio interno* o simplemente *ecuación de equilibrio* (*equilibrium equation*). Los problemas que se resuelven usando la ecuación (2.4.20) son llamados *problemas estáticos* (*static problems*).

La conservación lineal de momento también se puede expresar en configuración de referencia. Consideremos un dominio arbitrario  $\Omega_0$  con un contorno  $\Gamma_0$  en la configuración de referencia, la cual está sujeta a las fuerzas másicas  $\rho_0 \mathbf{b}$  y fuerzas de superficie  $\mathbf{t}_0$ , entonces la fuerza total  $\mathbf{f}$  en el cuerpo esta dada por

$$\mathbf{f}(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{t}_0(\mathbf{X}, t) d\Gamma_0 \quad (2.4.21)$$

Si además sabemos que el momento lineal se expresa por

$$\mathbf{p}(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) d\Omega_0 \quad (2.4.22)$$

entonces la conservación lineal de momento se escribe como

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{t}_0(\mathbf{X}, t) d\Gamma_0 \quad (2.4.23)$$

La integral del contorno en la ecuación (2.4.23) se puede transformar en una integral de dominio usando la ecuación (2.3.3) y el teorema de la divergencia de Gauss, lo que resulta en

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{t}_0(\mathbf{X}, t) d\Gamma_0 = \int_{\Omega_0} \nabla_0 \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) d\Omega_0 \quad (2.4.24)$$

donde  $\nabla_0 \cdot (\bullet)$  es la divergencia tomada respecto a coordenadas materiales. Con ésta ecuación, la conservación lineal de momento en configuración de referencia y coordenadas lagrangianas es

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} \quad \text{or} \quad \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 b_i \quad (2.4.25)$$

Esta ecuación se conoce como la *descripción lagrangiana* de la ecuación de momento. Si se estudian sólidos y estructuras no lineales utilizando discretizaciones con elementos finitos, la ecuación (2.4.25) recibe el nombre de *formulación lagrangiana total* (*total Lagrangian formulation*). Su correspondiente ecuación de equilibrio en esta descripción viene dada por

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 b_i = 0 \quad (2.4.26)$$

De manera similar a lo mostrado con las ecuaciones (2.4.18) y (2.4.19), la conservación angular de momento en configuración de referencia nos dice que el tensor nominal de esfuerzos tiene la siguiente propiedad

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.4.27)$$

el cual en general es no simétrico. Hay que resaltar que el número de restricciones impuestas por la conservación de momento angular usualmente se imponen directamente en la ecuación constitutiva.

Substituyendo la ecuación (2.3.6) en la ecuación (2.4.27) se obtiene que el segundo tensor de Piola-Kirchhoff tiene la propiedad

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (2.4.28)$$

y es un tensor simétrico.

### 2.4.3. Conservación de la Energía

La *energía cinética* (*kinetic energy*) en un material se expresa por

$$\mathcal{E}^{\text{kin}} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (2.4.29)$$

la cual para un medio continuo  $\mathcal{B}$  representa solamente una parte de la energía total (*total energy*). El resto de la energía en  $\mathcal{B}$  se llama *energía interna* (*internal energy*) la cual se expresa por  $w^{\text{int}}$  y tiene unidades por unidad de masa. La energía interna por unidad de volumen viene dada por

$$\mathcal{E}^{\text{int}} = \int_{\Omega} \rho w^{\text{int}} d\Omega \quad (2.4.30)$$

Entonces la energía total se puede encontrar con  $\mathcal{E}^{\text{tot}} = \mathcal{E}^{\text{int}} + \mathcal{E}^{\text{kin}}$ . Con ésto, la *conservación de la energía* (*conservation of energy*) necesita que la potencia de la energía total sea igual a la potencia que resulta de las fuerzas en el medio continuo más la potencia que *otras energías* generan al entrar en el sistema. Las otras energías pueden tomar muchas formas, pero las más importantes se deben a la energía generada por fuentes de calor y flujos de calor en el cuerpo  $\mathcal{B}$ . Otros tipos de fuentes de energía son producidas por la radiación, cambios químicos, campos electromagnéticos, etc. Aquí solo se considerarán procesos termomecánicos.

La potencia generada por la energía total esta dada por

$$\mathcal{P}^{\text{tot}} = \mathcal{P}^{\text{int}} + \mathcal{P}^{\text{kin}} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho w^{\text{int}} d\Omega + \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (2.4.31)$$

mientras que la potencia de las fuerzas aplicadas se expresa por

$$\mathcal{P}^{\text{ext}} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \quad (2.4.32)$$

La potencia generada por fuentes de calor  $s$  y flujos de calor  $\mathbf{q}$  se encuentra de la siguiente manera

$$\mathcal{P}^{\text{heat}} = \int_{\Omega} \rho s d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} d\Gamma \quad (2.4.33)$$

La conservación de la energía establece que

$$\mathcal{P}^{\text{tot}} = \mathcal{P}^{\text{ext}} + \mathcal{P}^{\text{heat}} \quad (2.4.34)$$

la cual es conocida como la *primera ley de la termodinámica* (*first law of thermodynamics*). Substituyendo las ecuaciones (2.4.31)-(2.4.33) en la ecuación (2.4.34) obtenemos la ecuación de conservación de la energía

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho w^{\text{int}} d\Omega + \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} d\Omega + \\ \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho s d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

La ecuación que se obtiene de la expresión integral anterior da como resultado la ecuación en derivadas parciales de conservación de la energía en forma euleriana

$$\rho \frac{Dw^{\text{int}}}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho s \quad (2.4.36)$$

Cuando se trata de procesos solamente mecánicos, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\rho \frac{Dw^{\text{int}}}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \quad (2.4.37)$$

la cual deja de ser una ecuación en derivadas parciales. Como consecuencia de la ecuación (2.4.37) podemos decir que el tensor de esfuerzos de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  y el tensor velocidad de deformación  $\mathbf{d}$  están *conjugados en potencia* (*conjugate in power*).

La conservación de la energía también se puede expresar en coordenadas lagrangianas y en configuración de referencia, donde la contra parte de la ecuación (2.4.35) se expresa por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \left( \rho_0 w^{\text{int}} + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \mathbf{v} \cdot \rho_0 \mathbf{b} d\Omega_0 + \\ \int_{\Gamma_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_0 d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 s d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{q} d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

la cual da como resultado la ecuación en derivadas parciales de conservación de la energía en forma lagrangiana

$$\rho_0 \dot{w}^{\text{int}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}^T - \nabla_0 \cdot \mathbf{q} + \rho_0 s \quad (2.4.39)$$

Para procesos puramente mecánicos, la ecuación de conservación de la energía en forma lagrangiana es

$$\rho_0 \dot{w}^{\text{int}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}^T \quad (2.4.40)$$

de donde podemos ver que el tensor nominal de esfuerzos se conjuga en potencia con la derivada material del tensor gradiente de deformación. Substituyendo la ecuación (2.3.6) en la ecuación (2.4.40) podemos obtener la ecuación de conservación de la energía en términos del segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff

$$\rho_0 \dot{w}^{int} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2.4.41)$$

del cual se deduce que el segundo tensor de Piola-Kirchhoff se conjuga en potencia con la derivada respecto al tiempo del tensor de deformación de Green-Lagrange.

## Sección

### 2.5. Ecuaciones Constitutivas

Las ecuaciones que hemos visto hasta ahora son insuficientes para describir el comportamiento de cualquier medio continuo en estudio. Por lo tanto se requieren de ecuaciones adicionales llamadas *ecuaciones constitutivas* (*constitutive equations*), las cuales completan el conjunto de ecuaciones para describir el comportamiento del cuerpo y que además nos permiten especificar las propiedades de un cierto material. Para procesos mecánicos exclusivamente, la ecuación constitutiva de un material especifica la dependencia del tensor de esfuerzos como una función de las variables cinemáticas del tensor de deformaciones.

#### 2.5.1. Elasticidad Lineal

Los materiales que comúnmente se usan en Ingeniería Civil, tales como acero y concreto, generalmente presentan deformaciones infinitesimales debido a las cargas a las que están sujetos. Estos materiales tienen la característica de que si las fuerzas son retiradas, la estructura regresará a su posición original. Si además se toma en cuenta que las deformaciones del material son infinitesimales, entonces se puede considerar que no existirá ninguna diferencia entre la configuración inicial y la configuración deformada.

La teoría de *elasticidad lineal* (*linear elasticity*) proporciona un excelente modelo para el comportamiento de tales materiales. El tensor de deformaciones infinitesimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se usa como medida de la deformación mientras que el tensor de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  mide los esfuerzos. En la teoría de elasticidad lineal, la ecuación de conservación de la energía toma la siguiente forma

$$\rho_0 \dot{w}^{int} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (2.5.1)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  están conjugadas en potencia.

Es común escribir la energía interna por unidad de volumen  $\rho_0 w^{\text{int}}$  como  $W^{\text{int}}$ , la cual es llamada *energía de deformación (strain energy)*. Para materiales elásticos lineales, la energía de deformación depende solamente de los componentes  $\varepsilon_{ij}$  y además es una función cuadrática que tiene la siguiente forma

$$W^{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad \text{or} \quad W^{\text{int}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5.2)$$

donde los valores de  $\mathbb{C}_{ijkl}$  son llamados *constantes elásticas (elastic constants)*. Ya que las constantes elásticas presentan simetría de la forma

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jikl} = \mathbb{C}_{ijlk} = \mathbb{C}_{klij} \quad (2.5.3)$$

entonces para un *material isótropo (isotropic material)* las propiedades de sus componentes son iguales en todas direcciones.

Ya que  $W^{\text{int}}$  depende de  $\varepsilon_{ij}$ , la derivada respecto al tiempo de la ecuación (2.5.2) es

$$\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial t} = \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (2.5.4)$$

donde se ha tenido en cuenta la simetría de las constantes elásticas. Substituyendo (2.5.4) en la ecuación (2.5.1) obtenemos

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.5.5)$$

Sin embargo de las ecuaciones (2.5.2) y (2.5.3) sabemos que

$$\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.5.6)$$

Substituyendo la ecuación (2.5.6) en la ecuación (2.5.5) encontramos

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5.7)$$

que es la ecuación constitutiva que relaciona los esfuerzos y las deformaciones. Las ecuaciones constitutivas completan las ecuaciones que describen el comportamiento mecánico de un medio continuo elástico lineal. Para un material isótropo  $\mathbb{C}_{ijkl}$  toma la forma

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad \text{or} \quad \mathbb{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbb{I} \quad (2.5.8)$$

donde solo dos constantes  $\lambda$  y  $\mu$  de las originales 81 pertenecientes al tensor de cuarto orden quedan después de imponer las restricciones de isotropía del material y de la simetría del tensor de esfuerzos (conservación de momento angular). Las dos constantes elásticas independientes  $\lambda$  y  $\mu$  reciben el nombre de *constantes de Lamé* (*Lamé constants*),  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad de segundo orden y  $\mathbb{I}$  es el tensor identidad de cuarto orden que se expresa por  $\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ . La ecuación constitutiva, ecuación (2.5.7) se escribe como

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5.9)$$

donde  $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$  es la traza de  $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{kk}$ .

Una vez que las ecuaciones tensoriales son transformadas al álgebra matricial (tal y como se demuestra en el siguiente capítulo), las ecuaciones constitutivas se pueden escribir en función del módulo de elasticidad  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$  de la siguiente manera para materiales isótropos:

1. Para elementos unidimensionales

$$\mathbf{C} = E \quad (2.5.10)$$

2. Para elementos bidimensionales de esfuerzo plano

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.5.11)$$

3. Para elementos bidimensionales de deformación plana

$$\mathbf{C} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix} \quad (2.5.12)$$

4. Para elementos tridimensionales

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.5.13)$$

### 2.5.2. Elasticidad No-Lineal

En aplicaciones ingenieriles se pueden encontrar tanto pequeñas como grandes deformaciones provocadas por los grandes desplazamientos y grandes rotaciones que puede sufrir una estructura. La respuesta de dichos materiales se puede modelar con un material del tipo *Saint Venant-Kirchhoff* es cual es simplemente una generalización de la teoría lineal al caso de grandes desplazamientos, lo cual da como resultado la teoría de la *elasticidad no lineal* (*nonlinear elasticity*).

La función que define la energía de deformación para un material elástico no lineal es una generalización de la ecuación (2.5.2) y da como resultado

$$W^{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbf{C}_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \quad \text{or} \quad W^{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.5.14)$$

donde el esfuerzo es

$$S_{ij} = \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial E_{ij}} \quad (2.5.15)$$

La contraparte de la ecuación (2.5.7) en la teoría de la elasticidad no lineal es

$$S_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} E_{kl} \quad \text{or} \quad \mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.5.16)$$

donde  $\mathbb{C}_{ijkl}$  está dado por la ecuación (2.5.8). Finalmente, la ecuación constitutiva para materiales elásticos no lineales es

$$S_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad \text{or} \quad \mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (2.5.17)$$

Aquí, las constantes de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$  se pueden expresar en función de otras medidas físicas como

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.5.18)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.5.19)$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (2.5.20)$$

donde  $E$  es el módulo de Young,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson y  $K$  es el módulo de rigidez volumétrico.

### 2.5.3. Fluidos Newtonianos

Una ecuación que relaciona de manera lineal al tensor de esfuerzos con la derivada del tensor de deformación en un fluido se conoce como ecuación constitutiva para *fluidos Newtonianos* (*Newtonian fluids*).

Si el fluido se encuentra en reposo, es decir se trata de un fluido estático, el tensor de esfuerzos solo presenta componentes normales en cualquier contorno. Por lo tanto, el tensor de esfuerzos para un fluido en reposo es isótropo y tiene la forma

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (2.5.21)$$

donde  $p$  es conocida como *presión termodinámica* (*thermodynamic pressure*) que es función de la densidad  $\rho$  y la temperatura  $T$ .

Por el contrario si el fluido se encuentra en movimiento, se presentan además componentes de esfuerzo debido a la viscosidad del fluido, que se expresan por

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}^{\text{dev}} \quad (2.5.22)$$

donde el tensor desviador de esfuerzos  $\sigma_{ij}^{\text{dev}}$  es linealmente proporcional a la derivada del tensor de deformación,

$$\sigma_{ij}^{\text{dev}} = \mathbb{C}_{ijkl}d_{kl} \quad (2.5.23)$$

Substituyendo la ecuaciones (2.2.6) y 2.5.8) en la ecuación (2.5.23), si la ecuación resultante se substituye en la ecuación (2.5.22) obtenemos

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda d_{kk}\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \quad (2.5.24)$$

donde  $d_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{v}$  es la divergencia de la velocidad. Si se substituye la restricción de Stokes,  $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$ , en la ecuación (2.5.24) para tener una relación entre  $\lambda$  y  $\mu$ , se encuentra la siguiente ecuación

$$\sigma_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{v}\right)\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\sigma} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{v}\right)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d} \quad (2.5.25)$$

que se conoce como ecuación constitutiva para fluidos Newtonianos. Para fluidos incompresibles (*incompressible fluids*), la ecuación de continuidad, ecuación (2.4.7) se substituye en la ecuación (2.5.25) y se obtiene la ecuación constitutiva para fluidos incompresibles

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d} \quad (2.5.26)$$

donde  $p$  es la presión.

## Sección

### 2.6. Ecuaciones de Navier-Stokes

La ecuación del movimiento para un fluido Newtoniano se obtiene cuando se substituye la ecuación constitutiva para un fluido Newtoniano, ecuación (2.5.25) en la ecuación del momento en descripción euleriana, ecuación (2.4.16), de donde se obtiene

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \partial_j v_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho b_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2\mu d_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta_{ij} \right) \quad (2.6.1)$$

Ésta ecuación representa la forma general de las ecuaciones de *Navier-Stokes* (*Navier-Stokes equations*). Si  $\mu$  se toma como constante, la derivada de la parte derecha de la ecuación se puede expresar como

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2\mu d_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta_{ij} \right) = \mu \left( \nabla^2 v_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \quad (2.6.2)$$

donde  $\nabla^2 v_i$  es el *Laplaciano*<sup>1</sup> de  $v_i$ . Para fluidos incompresibles, la ecuación de continuidad, ecuación (2.4.7), se substituye en la ecuación (2.6.2) y las ecuaciones de Navier-Stokes se escriben de forma simplificada como

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \partial_j v_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho b_i + \mu \nabla^2 v_i \quad (2.6.3)$$

Si además despreciamos la viscosidad, como ocurre en algunos casos cuando el flujo en estudio se encuentra lejos de la capa límite, tenemos que

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \partial_j v_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho b_i \quad (2.6.4)$$

y de esta forma se ha encontrado la ecuación de *Euler* (*Euler equation*). Si se conoce la *velocidad característica*  $v_c$  y la *longitud característica* del sistema, entonces en *número de Reynolds* (*Reynolds number*) se define como  $\text{Re} = \rho v_c l_c / \mu$ . Si en un flujo el número de Reynolds es pequeño, el término convectivo se puede despreciar lo que da como resultado la siguiente ecuación

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \nabla^2 v_i = \rho b_i \quad (2.6.5)$$

que se conoce como *flujo de Stokes* (*Stokes flow*). Sin embargo, es común encontrar que la ecuación (2.6.5) se expresa sin el término inercial.

## Sección

## 2.7. Principios Variacionales

<sup>1</sup> $\nabla^2 v_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2}$

### 2.7.1. Preliminares

Los problemas a resolver en ingeniería y ciencias aplicadas se pueden plantear mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, tales como las que estudia la mecánica de medios continuos. Como ejemplo podemos hacer referencia a los problemas puramente mecánicos donde la única ecuación diferencial a resolver es la de momento que viene dada por la ecuación (2.4.15).

Para poder particularizar dicha ecuación en la solución de un problema en específico, debemos de proporcionar datos adicionales como lo son las cargas que actúan sobre la estructura y los desplazamientos o apoyos existentes. Este tipo de datos se conocen como *condiciones de contorno*. De esta manera el contorno  $\Gamma$  se divide en dos partes, el *contorno de Dirichlet* expresado por  $\Gamma^D$  y encargado de los desplazamientos prescritos  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ , y el *contorno de Neumann* descrito mediante  $\Gamma^N$  y encargado de las fuerzas prescritas  $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ . Además se tiene que cumplir que  $\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^N$  y  $\Gamma^D \cap \Gamma^N = 0$ . Con excepción de los problemas estáticos, se necesitan además *condiciones iniciales* de desplazamiento y velocidad en la configuración de referencia los cuales se expresan por  $\bar{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_0$  y  $\bar{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{v}_0$  respectivamente.

De esta forma se tiene que resolver un *problema de condiciones de contorno* cuando se trate del caso estático, y se dice que se tiene que resolver un *problema de condiciones de contorno con valores iniciales* cuando se trate del caso dinámico.

Esto nos lleva a la formulación en *forma clásica* — también llamada *forma fuerte* — del problema de condiciones de contorno con valores iniciales y que para el caso mecánico en deformaciones infinitesimales consiste en encontrar el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  tal que se cumpla

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} & \text{en } & \Omega \\
 \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} & \text{en } & \Gamma^D \\
 \mathbf{t} &= \bar{\mathbf{t}} & \text{en } & \Gamma^N \\
 \bar{\mathbf{u}}_0 &= \mathbf{u}_0 \\
 \bar{\mathbf{v}}_0 &= \mathbf{v}_0
 \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

Estas ecuaciones se complementan con una ecuación constitutiva que relacione los esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  que en general son funciones de los desplazamientos  $\mathbf{u}$ . La parte estática de las ecuaciones (2.7.1) se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} &= \mathbf{0} & \text{en } \Omega \\
\mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} & \text{en } \Gamma^D \\
\mathbf{t} &= \bar{\mathbf{t}} & \text{en } \Gamma^N
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

La solución encontrada a las ecuaciones (2.7.1) y (2.7.2) se cumple en todos los puntos que forman el dominio. Desafortunadamente la solución analítica de dichas ecuaciones se puede encontrar solamente a problemas particularmente sencillos y lamentablemente la solución a problemas reales es prácticamente imposible.

### 2.7.2. Principio del Trabajo Virtual

Una forma equivalente de plantear el problema originalmente expresado en forma fuerte es hacerlo mediante el cálculo variacional<sup>2</sup>. Una *formulación variacional* consiste en encontrar una función que minimice, maximice o haga estacionario un funcional y que además cumpla con ciertas condiciones de contorno.

Uno de los principios variacionales fundamentales es el *principio de los desplazamientos virtuales*, mejor conocido como *principio del trabajo virtual*. El principio del trabajo virtual trata con desplazamientos virtuales arbitrarios  $\delta u_i$  que son independientes del tiempo y además tienen la característica de que valen cero en el contorno de Dirichlet, es decir  $\delta u_i = 0$  en  $\Gamma^D$ . En los cursos de mecánica de medios continuos se deduce el principio del trabajo virtual para el caso estático y puramente mecánico, el cual se obtiene a partir del trabajo virtual externo que viene dado por el producto de un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}$  y las fuerzas externas — fuerzas másicas y de superficie — expresado mediante

$$\delta W^{ext} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma^N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \tag{2.7.3}$$

A partir de la ecuación anterior se demuestra que se puede obtener el trabajo virtual interno, el cual para problemas en deformaciones infinitesimales es

<sup>2</sup>El cálculo variacional es simplemente una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable, y consiste en buscar extremos relativos de funcionales que sean continuos. Un funcional se define como una función que toma funciones como su argumento.

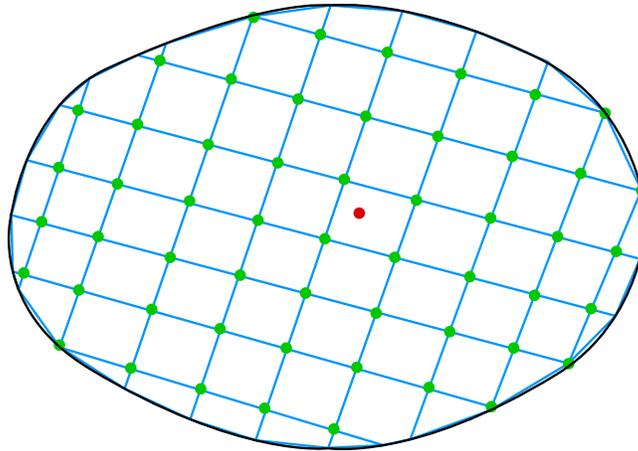
$$\delta W^{int} = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (2.7.4)$$

y por lo tanto, para el caso estático, el trabajo virtual interno es igual al trabajo virtual externo, encontrándose la ecuación

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma^N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (2.7.5)$$

Esta ecuación es conocida como la *forma débil* o *forma variacional* de la ecuación de equilibrio interno, ecuación (2.4.20), y como se puede observar requiere de condiciones de contorno para su solución.

Como lo demuestran Hughes (1987) y Marsden y Hughes (1994), la solución del problema en forma fuerte es equivalente a la solución en forma débil, es decir solucionar las ecuaciones (2.7.2) es lo mismo que solucionar las ecuaciones (2.7.5). Por otro lado, se pueden utilizar métodos numéricos para resolver el problema y en lugar de solucionar el problema de manera exacta mediante el planteamiento en forma fuerte, se encuentra una solución aproximada usando la forma débil junto con algún método numérico.



**Figura 2.2** Medio continuo discretizado

La diferencia principal entre la solución exacta y la solución aproximada es que la forma fuerte da una solución exacta en todos los puntos del dominio, mientras que la solución aproximada en forma débil y con métodos numéricos da una solución que tiende a la exacta en ciertos puntos del dominio y la solución en cualquier otro punto del dominio se encuentra mediante interpolación (ver Fig. 2.2). Es decir, la solución que tiende a la exacta depende del número de elementos finitos utilizados en la discretización y se encuentra solamente la solución

numérica en los puntos que definen cada elemento del dominio (puntos verdes mostrados en la Fig. 2.2) y en cualquier otro punto del dominio (por ejemplo el punto rojo mostrado en la misma figura) se obtiene mediante interpolación.

Desde el punto de vista matemático, las formulaciones en forma débil son de vital importancia para investigadores que buscan existencia, unicidad y estabilidad de la solución.

# Capítulo 3

## Formulación General de Sólidos

### Sección

#### 3.1. Forma Débil

Como hemos visto hasta ahora, el planteamiento del método de los elementos finitos se deriva del *principio del trabajo virtual*, aunque existen otros métodos como LOS PRINCIPIOS ENERGÉTICOS Y LA FORMA VARIACIONAL. Sin embargo, el principio del trabajo virtual no es más que una consecuencia del planteamiento en forma fuerte de la ecuación del balance del momento lineal.

Para nuestros planteamientos relacionados con la parte estática de la mecánica de los problemas en ingeniería, la *forma fuerte* se compone de la ecuación de momento lineal más las condiciones de contorno de Dirichlet y de Neumann, tal como lo describen Hughes (1987), Zienkiewicz y Taylor (1989), Cook y otros (1989) y Bathe (1996). La desventaja del planteamiento en forma fuerte de los problemas en ingeniería es que sólo para ciertos problemas sencillos se puede encontrar una solución analítica a dicho problema. Otro problema es que en la mayoría de los casos la demostración de existencia, unicidad y estabilidad de la solución es casi imposible.

Por esta razón, en lugar de trabajar con el planteamiento en forma fuerte del problema se opta por trabajar con el planteamiento del problema en forma débil, ya que al menos en este tipo de planteamientos se puede demostrar fácilmente la existencia, unicidad y estabilidad de la solución.

Para poder hacer el planteamiento del problema en forma débil se necesitan unas funciones de ensayo (*test functions*) y unas funciones de prueba (*trial functions*). El espacio donde son aceptables los valores de las funciones de ensayo  $\delta u_i$  se define como

$$\delta u_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_0, \quad \mathcal{U}_0 = \{\delta u_i \mid \delta u_i \in C^0(\mathbf{x}), \delta u_i = 0 \text{ en } \Gamma^D\} \quad (3.1.1)$$

donde  $C^0$  describe la continuidad de la función, y el contorno se define por  $\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^N$ . En general, una función es de continuidad  $C^n$  si la  $n$ -ésima derivada es una función continua. En la ecuación (3.1.1) las condiciones de Dirichlet se cumplen en forma exacta y para simplificar se puede interpretar como aquella en la que las condiciones de contorno de Dirichlet se desprecian quedando solo las condiciones de contorno de Neumann.

Por otro lado, el espacio donde viven las funciones de prueba (mejor conocidas como desplazamientos) se definen por

$$u_i(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} = \{u_i \mid u_i \in C^0(\mathbf{x}), u_i = \bar{u}_i \text{ en } \Gamma^D\} \quad (3.1.2)$$

Es decir, las funciones para los desplazamientos deben ser funciones del tiempo y además deben tener valores conocidos en el contorno de Dirichlet.

Con las definiciones anteriores podemos expresar la *forma débil* como la integral sobre el dominio del producto de las funciones de ensayo  $\delta u_i$  por la ecuación de conservación del momento lineal, que para el caso estático es la ecuación de equilibrio interno, ecuación (2.4.20), donde se deben utilizar apropiadas condiciones de contorno, quedando:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) d\Omega = 0 \quad (3.1.3)$$

La forma débil anterior no cumple con los espacios de las funciones de prueba, ya que éstos necesitan ser  $C^1$ . Para explicar por qué no se cumple, pensemos en el análisis estático-lineal, donde las deformaciones se miden infinitesimalmente y las diferencias entre la configuración de referencia y deformada se desprecian. En este sentido, las deformaciones dependen de su derivada con respecto a  $x$  y por otro lado, los esfuerzos son función de las deformaciones. Entonces la derivada de los esfuerzos implica, en cierto sentido, la segunda derivada de los desplazamientos, valores que quedan fuera del espacio  $C^0$ . Para remediar este problema, integremos por partes el término subrayado en la ecuación (3.1.3), quedando:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} d\Omega \quad (3.1.4)$$

Los componentes de la segunda integral de la ecuación (3.1.4) se puede descomponer en su parte simétrica y antisimétrica resultado

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1.5)$$

las que al se multiplicarlas por el tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$  y recordando que este último es simétrico, dan lugar a la siguiente ecuación

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) d\Omega + 0 = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (3.1.6)$$

donde acabamos de definir el *tensor de deformaciones infinitesimales virtuales* como

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1.7)$$

dada su similitud con la ecuación (2.2.3). Finalmente, sustituyendo la ecuación de equilibrio en superficie (2.3.2) y la ecuación (3.1.6) en la ecuación (3.1.4) se obtiene

$$\int_{\Omega} \delta u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma^N} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (3.1.8)$$

Ahora sustituyendo la ecuación (3.1.8) en la ecuación (3.1.3) se obtiene

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_i \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma^N} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma \quad (3.1.9)$$

que es la forma débil de la ecuación de conservación de momento lineal para el caso estático junto con las condiciones de contorno de Neumann. Hay que resaltar que en la ecuación (3.1.9) las funciones de ensayo y de prueba cumplen con la condición de ser de continuidad  $C^0$ .

En la literatura clásica de resistencia de materiales, la ecuación (3.1.9) recibe el nombre de *Principio del Trabajo Virtual*, donde se identifican los siguiente componentes

$$\delta W^{int} = \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega \quad (3.1.10)$$

$$\delta W^{ext} = \int_{\Omega} \delta u_i \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma^N} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma \quad (3.1.11)$$

y reciben el nombre de *trabajo virtual interno* y *trabajo virtual externo* respectivamente.

## Sección

### 3.2. Discretización

La discretización consiste en dividir el continuo mediante elementos finitos y encontrar una solución numérica equivalente a la solución analítica.

Hay que recordar que la solución analítica es exacta mientras que la solución numérica es aproximada. Como se apreciará en los ejemplos del capítulo siguiente, cuando el número de elementos finitos crece se tiende a la solución exacta.

Supongamos que dominio en estudio del continuo  $\Omega$  se discretiza con suficientes elementos finitos, los cuales conforman la malla de elementos finitos del problema. Para cada elemento finito de la malla, el campo de los desplazamientos se aproxima por

$$u_i^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} N_I(\mathbf{x}) u_{iI}(t) \quad \forall i = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.1)$$

donde  $N_I(\mathbf{x})$  son las funciones de forma de cada nodo  $I$ ,  $n_{\text{nodos}}$  es el número de nodos que forman el elemento finito en estudio, y  $u_{iI}(t)$  son los valores del desplazamiento en cada nodo  $I$  en la dirección global  $i$ . Si las mismas funciones de forma son usadas en la discretización tanto para las funciones de prueba como para las funciones de ensayo, entonces la forma débil es conocida como forma débil con el método de Galerkin. La discretización de las funciones de ensayo se escribe entonces por

$$\delta u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} N_I(\mathbf{x}) \delta u_{iI} \quad \forall i = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.2)$$

Si el tensor de deformación infinitesimal definido por la ecuación (2.2.3) se escribe de la siguiente manera

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta_{il} \right) \quad (3.2.3)$$

donde los subíndices  $ij$  de la parte izquierda han sido cambiados a  $kl$  por conveniencia. Si las componentes de la solución analítica del campo de los desplazamientos  $u_i$  son aproximadas por  $u_i^h$ , entonces sustituyendo la ecuación (3.2.1) en la ecuación (3.2.3) se obtiene

$$\varepsilon_{kl}^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I(\mathbf{x})}{\partial x_l} \delta_{ik} + \frac{\partial N_I(\mathbf{x})}{\partial x_k} \delta_{il} \right) u_{iI}(t) \quad \forall i = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.4)$$

Si definimos el tensor de 4<sup>to</sup> orden de la siguiente manera, el cual recibe el nombre de tensor deformación-desplazamiento, obtenemos

$$B_{iklI} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I(\mathbf{x})}{\partial x_l} \delta_{ik} + \frac{\partial N_I(\mathbf{x})}{\partial x_k} \delta_{il} \right) \quad (3.2.5)$$

De esta manera, el tensor de deformación infinitesimal dado por la ecuación (3.2.4) se puede expresar sencillamente por

$$\varepsilon_{kl}^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} B_{iklI} u_{iI} \quad \forall i = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.6)$$

Haciendo un desarrollo similar para la discretización de la deformación virtual  $\delta \varepsilon_{kl}$ , la ecuación resultante es

$$\delta \varepsilon_{kl}^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} B_{iklI} \delta u_{iI} \quad \forall i = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.7)$$

Recordando que el trabajo es el resultado de multiplicar una fuerza por una distancia, las fuerzas internas aparecen como parte del trabajo virtual interno, ecuación (3.1.10), el cual se puede expresar por

$$\delta W^{int} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \delta u_{iI} f_{iI}^{int} = \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{kl}^h \sigma_{kl} d\Omega \quad \forall i = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.8)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (3.2.7) en la ecuación (3.2.8), y observando que los desplazamientos virtuales  $\delta u_{iI}$  se pueden sacar de la integral se obtiene

$$\delta W^{int} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \delta u_{iI} f_{iI}^{int} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \delta u_{iI} \int_{\Omega} B_{iklI} \sigma_{kl} d\Omega \quad \forall i = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.9)$$

De la ecuación anterior se puede despejar el valor de las fuerzas internas  $f_{iI}^{int}$  observando que los desplazamientos virtuales  $\delta u_{iI}$  son arbitrarios. Entonces se obtiene,

$$\mathbf{f}^{int} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} f_{iI}^{int} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \int_{\Omega} B_{iklI} \sigma_{kl} d\Omega \quad \forall i = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.10)$$

Recordando que el tensor de esfuerzos  $\sigma_{kl}$  se puede expresar como una función de las deformaciones, como se vio en la ecuación (2.5.7), y utilizando la ecuación (3.2.6) en lugar de las deformaciones, encontramos en tensor de esfuerzos como una función directa de los desplazamiento que se expresa por

$$\sigma_{kl} = \mathbb{C}_{klmn} \varepsilon_{mn}^h = \sum_{J=1}^{n_{\text{nodos}}} \mathbb{C}_{klmn} B_{jmnJ} u_{jJ} \quad \forall j = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.11)$$

Sustituyendo la ecuación (3.2.11) en la ecuación (3.2.10) se obtiene la expresión tensorial de las furzas internas como una función de los desplazamientos,

$$\mathbf{f}^{int} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} f_{iI}^{int} = \sum_{I,J=1}^{n_{\text{nodos}}} \int_{\Omega} B_{iklI} \mathbb{C}_{klmn} B_{jmnJ} u_{jJ} d\Omega \quad \forall i, j = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.12)$$

Hasta este punto, se ha trabajado con la formulación y discretización general de sólidos por el métodos de los elementos finitos en su forma tensorial. Sin embargo, las ecuaciones anteriores se pueden simplificar como se verá a continuación.

Para el caso del trabajo virtual externo, dado por la ecuación (3.1.11), podemos escribir

$$\delta W^{ext} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \delta u_{iI} f_{iI}^{ext} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \delta u_{iI} \left[ \int_{\Omega} \rho b_{iI} d\Omega + \int_{\Gamma^N} \bar{t}_{iI} d\Gamma \right] \quad \forall i = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.13)$$

de donde despejamos en valor de las fuerzas externas

$$\mathbf{f}^{ext} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \mathbf{f}_{iI}^{ext} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \int_{\Omega} \rho b_{iI} d\Omega + \int_{\Gamma^N} \bar{t}_{iI} d\Gamma \quad \forall i = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.2.14)$$

y no representan ningún problema ya que son valores vectoriales y matriciales que se pueden manejar sin ningún problema utilizando álgebra vectorial.

## Sección

### 3.3. Notación de Voigt

Para simplificar las ecuaciones tensoriales del tema anterior, se hará uso de la notación de Voigt. Esta notación nos permitirá expresar las ecuaciones anteriores de una forma vectorial. De esta manera nos olvidaremos del cálculo tensorial y trabajaremos simplemente con multiplicaciones de matrices y vectores. La notación de Voigt se aplica de diferentes maneras según sea el tensor o vector que se quiere transformar.

Para el caso de tensores de esfuerzo de segundo orden, estos se transforman de acuerdo al procedimiento de Voigt para la cinética, de manera que

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \longrightarrow \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

De esta manera, el tensor de esfuerzos de segundo orden pasa a ser un vector de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  con 6 componentes, cuando se trate del problema en tres dimensiones. Para el caso bidimensional, se tiene

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \longrightarrow \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

Hay que destacar que para el caso unidimensional el único esfuerzo que existe es  $\sigma_{xx} = \sigma$ . Para el caso del tensor de deformaciones infinitesimales, se aplica el procedimiento de Voigt para la cinemática que se expresa por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \longrightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

para el caso tridimensional, mientras que la conversión para el caso bidimensional es

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \longrightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

Nuevamente, en el caso unidimensional tendremos solamente  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon$ . Para el caso de fuerzas y desplazamientos se utiliza el procedimiento de Voigt para matrices. En el caso de fuerzas internas  $f_{iI}$ , estas se convertirán a un vector de componentes  $f_a$  mediante la expresión

$$a = (I - 1) n_{\text{dimen}} + i \quad (3.3.5)$$

mientras que para el caso de los desplazamientos  $u_{jJ}$  se convertirán en un vector cuyas componentes son  $u_b$  siguiendo un procedimiento similar, consistente en

$$b = (J - 1) n_{\text{dimen}} + j \quad (3.3.6)$$

### 3.3.1. Transformación de $\varepsilon$

Finalmente se tiene que convertir el tensor deformación-desplazamiento de 4<sup>to</sup> orden  $B_{iklI}$  en una matriz. El procedimiento de Voigt a utilizar es una combinación que resulta de utilizar el procedimiento de Voigt para la cinemática más el procedimiento de Voigt para matrices, lo cual se desarrolla a continuación.

Para encontrar los valores vectoriales que aparecen en la ecuación (3.3.4), se tiene primero que encontrar el valor de la deformación  $\varepsilon_{xx}^h$  y para ello, de acuerdo a la ecuación (3.2.4), hay que tomar los siguientes valores para  $k = x = 1$  y para  $l = x = 1$ , quedando únicamente la variable  $i$ , la cual tendrá las opciones de las dimensiones del problema, es decir,  $i = x = 1$  y  $i = y = 2$ , como aparecen a continuación

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^h &= \underbrace{\sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{11} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{11} \right)}_{i=x=1} u_{xI} + \underbrace{\sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{21} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{21} \right)}_{i=y=2} u_{yI} \\
&= \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_1} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \right) u_{xI} \\
&= \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{\partial N_I}{\partial x_1} u_{xI}
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Para  $\varepsilon_{yy}^h$ ,  $k = y = 2$  y  $l = y = 2$ , de donde se encuentra

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{yy}^h &= \underbrace{\sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{12} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{12} \right)}_{i=x=1} u_{xI} + \underbrace{\sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{22} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{22} \right)}_{i=y=2} u_{yI} \\
&= \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \right) u_{yI} \\
&= \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{\partial N_I}{\partial x_2} u_{yI}
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Ahora para  $\varepsilon_{xy}^h$ ,  $k = x = 1$  y  $l = y = 2$ , que resultan en

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy}^h &= \underbrace{\sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{11} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{12} \right) u_{xI}}_{i=x=1} + \underbrace{\sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{21} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{22} \right) u_{yI}}_{i=y=2} \\
&= \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} u_{xI} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} u_{yI} \right)
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Finalmente, para  $\varepsilon_{yx}^h$ ,  $k = y = 2$  y  $l = x = 1$  se obtiene

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{yx}^h &= \underbrace{\sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{12} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{11} \right) u_{xI}}_{i=x=1} + \underbrace{\sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{22} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{21} \right) u_{yI}}_{i=y=2} \\
&= \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} u_{xI} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} u_{yI} \right)
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Se puede observar que  $\varepsilon_{xy}^h = \varepsilon_{yx}^h$ , por lo que

$$\varepsilon_{xy}^h + \varepsilon_{yx}^h = 2\varepsilon_{xy}^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} u_{xI} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} u_{yI} \right) \tag{3.3.11}$$

Con estos valores encontrados anteriormente, podemos escribir la forma vectorial discretizada para la deformación, dada por la ecuación (3.3.4), la cual aproximamos en forma matricial por

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^h \\ \varepsilon_{yy}^h \\ 2\varepsilon_{xy}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^h \\ \varepsilon_y^h \\ \gamma_{xy}^h \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_I}{\partial x_2} & \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_I} \begin{bmatrix} u_{xI} \\ u_{yI} \end{bmatrix} \tag{3.3.12}$$

de donde se acaba de encontrar, para el caso bidimensional, la matriz *deformación-desplazamiento* para un nodo  $I$  cualquiera y es

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_I}{\partial x_2} & \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

Partiendo de la ecuación (3.3.3) y siguiendo el mismo procedimiento usado anteriormente, se encuentra

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x_3} & \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_I}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_I}{\partial x_2} & \frac{\partial N_I}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.14)$$

para el caso tridimensional. La matriz  $\mathbf{B}$  completa de cualquier elemento finito se obtiene de la siguiente manera

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_I, \dots, \mathbf{B}_{n_{\text{nodos}}}] \quad (3.3.15)$$

Con la ecuación anterior, se puede encontrar

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (3.3.16)$$

que es la forma discretizada que nos permite calcular el vector de las deformaciones infinitesimales  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$  a partir de la matriz deformación-desplazamiento  $\mathbf{B}$  y el vector de los desplazamientos  $\mathbf{u}$ . Se puede ver que no se necesita más el cálculo tensorial y todas las operaciones se resuelven simplemente con los conocimientos del algebra matricial.

### 3.3.2. Transformación de $\mathbf{f}^{int}$

En esta sección se transformará el tensor de las fuerzas internas  $\mathbf{f}^{int}$  dado por la ecuación 3.2.10, en su correspondiente notación matricial. Sustituyendo  $B_{iklI}$  de la ecuación 3.2.5 se obtiene

$$\mathbf{f}^{int} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} f_{iI}^{int} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_l} \delta_{ik} + \frac{\partial N_I}{\partial x_k} \delta_{il} \right) \sigma_{kl} dV \quad \forall i = 1, n_{\text{dimen}} \quad (3.3.17)$$

Desarrollando la ecuación (3.3.17) para  $i = x = 1$  y para cualquier nodo  $I$ , se tienen que variar los valores restantes  $k$  y  $l$  para un problema dimensional, quedando

$$\begin{aligned} f_{xI}^{int} = & \underbrace{\int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{11} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{11} \right) \sigma_{xx} dV}_{k=x=1; l=x=1} + \\ & \underbrace{\int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{12} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{12} \right) \sigma_{yy} dV}_{k=y=2; l=y=2} + \\ & \underbrace{\int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{11} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{12} \right) \sigma_{xy} dV}_{k=x=1; l=y=2} + \\ & \underbrace{\int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{12} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{11} \right) \sigma_{yx} dV}_{k=y=2; l=x=1} \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Evaluando la delta de Kronecker, encontramos

$$f_{xI}^{int} = \int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_1} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \right) \sigma_{xx} dV + \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \sigma_{xy} dV + \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \sigma_{yx} dV \quad (3.3.19)$$

Por la simetría del tensor de Cauchy –que se demuestra en la sumatoria de momentos– sabemos que  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ , por lo que podemos simplificar la ecuación anterior y finalmente obtener

$$f_{xI}^{int} = \int_V \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \sigma_{xx} dV + \int_V \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \sigma_{xy} dV \quad (3.3.20)$$

La siguiente parte del desarrollo para la ecuación (3.3.17), toma el valor de  $i = y = 2$  y para cualquier nodo  $I$ , teniendo que variar los valores restantes  $k$  y  $l$  para un problema dimensional, quedando

$$f_{yI}^{int} = \underbrace{\int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{21} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{21} \right) \sigma_{xx} dV}_{k=x=1; l=x=1} + \underbrace{\int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{22} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{22} \right) \sigma_{yy} dV}_{k=y=2; l=y=2} + \underbrace{\int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{21} + \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{22} \right) \sigma_{xy} dV}_{k=x=1; l=y=2} + \underbrace{\int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \delta_{22} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \delta_{21} \right) \sigma_{yx} dV}_{k=y=2; l=x=1} \quad (3.3.21)$$

Nuevamente evaluamos la delta de Kronecker, quedando

$$f_{yI}^{int} = \int_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_I}{\partial x_2} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \right) \sigma_{yy} dV + \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \sigma_{xy} dV + \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \sigma_{yx} dV \quad (3.3.22)$$

Finalmente, utilizando las propiedades simétricas del tensor de esfuerzos  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ , podemos simplificar, resultando

$$f_{yI}^{int} = \int_V \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \sigma_{yy} dV + \int_V \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \sigma_{xy} dV \quad (3.3.23)$$

Usando las ecuaciones (3.3.20) y (3.3.23), encontramos que la forma matricial –no tensorial– para el vector de las fuerzas internas es

$$\mathbf{f}^{int} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \begin{bmatrix} f_{xI}^{int} \\ f_{yI}^{int} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \int_V \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x_2} & \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dV \quad (3.3.24)$$

Intercambiando la integral de volumen con la sumatoria sobre los nodos  $I$ , y escribiendo las componentes de los esfuerzos en notación de voigt en lugar de utilizar notación tensorial, encontramos

$$\mathbf{f}^{int} = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \begin{bmatrix} f_{xI}^{int} \\ f_{yI}^{int} \end{bmatrix} = \int_V \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x_2} & \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_I^T} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dV \quad (3.3.25)$$

donde claramente se ve que las fuerzas internas  $\mathbf{f}^{int}$  dependen del vector de los esfuerzos  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  y de la misma matriz  $\mathbf{B}$  con la que se calculan las deformaciones  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ , pero siendo ahora la transpuesta de la matriz deformación-desplazamiento  $\mathbf{B}^T$ , lo cual se puede escribir como

$$\mathbf{f}^{int} = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} dV \quad (3.3.26)$$

Hay que destacar que esta ecuación funciona para calculos en una, dos y tres dimensiones, siendo lo único que cambia es la matriz deformación-desplazamiento  $\mathbf{B}$  y las componentes de los esfuerzos  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ .

## Sección

**3.4. Ecuaciones Constitutivas**

En este apartado se encuentran las ecuaciones constitutivas que nos permiten complementar el análisis por elementos finitos de la mecánica de sólidos. El tensor correspondiente a la ecuación constitutiva se expresa matricialmente como se vio en las ecuaciones (2.5.10) - (2.5.13) y que corresponden a

1. Para elementos unidimensionales

$$\mathbf{C} = E \quad (3.4.1)$$

2. Para elementos bidimensionales de esfuerzo plano

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

3. Para elementos bidimensionales de deformación plana

$$\mathbf{C} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix} \quad (3.4.3)$$

4. Para elementos tridimensionales

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.4.4)$$

Estas ecuaciones, junto con los desarrollos anteriores, nos permiten modelar cualquier estructura desde el punto de vista de la mecánica de sólidos.

## Sección

### 3.5. Solución de Problemas

Con las conversiones anteriormente expuestas para la notación de Voigt, la ecuación tensorial (3.2.10) que a continuación reescribiremos

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega} B_{iklI} \sigma_{kl} d\Omega$$

se puede expresar en notación Voigt por

$$f_a^{int} = \int_{\Omega} B_{ab}^T \sigma_b d\Omega \quad \text{ó} \quad \mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega \quad (3.5.1)$$

De manera similar se transforma la matriz de las fuerzas externas  $f_{iI}^{ext}$  en  $f_a^{ext}$ . Es común en elementos finitos que al momento de analizar cada elemento  $I$  se haga de acuerdo a una particularización de la ecuación anterior, lo que resulta en

$$\mathbf{f}_I^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega \quad (3.5.2)$$

Aquellas personas familiarizadas con el análisis elástico-lineal de elementos finitos preferirán escribir la ecuación (3.3.10) en la forma

$$\mathbf{f}_I^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_J \cdot \mathbf{u}_J d\Omega \quad (3.5.3)$$

donde  $\{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{C} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$  y  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbf{B}_J \cdot \mathbf{u}_J$ . De esta manera, la matriz de rigidez del elemento finito se podrá expresar por

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_J d\Omega \quad (3.5.4)$$

de manera que para el sistema global se cumple que

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} \quad (3.5.5)$$

cuya solución al sistema consiste en resolver un sistema de ecuaciones de  $n_{puntos} \times n_{dimen}$ , donde  $n_{puntos}$  es la totalidad de nodos  $I$  en la malla de elementos finitos.



# Capítulo 4

# Elementos Unidimensionales Básicos

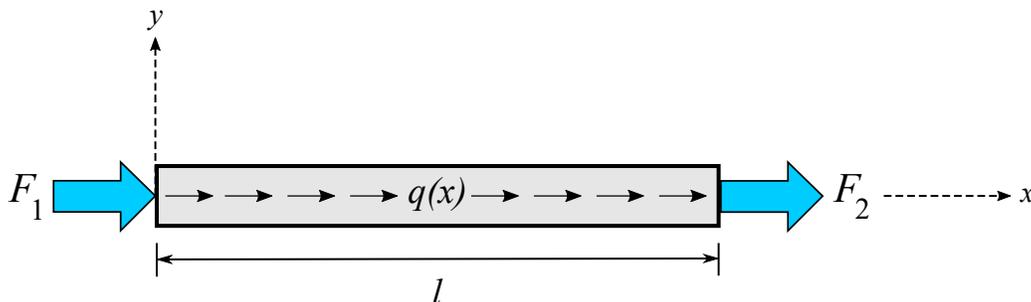
## Sección

### 4.1. Formulación

La formulación de elementos finitos unidimensionales vendrá dada a partir del principio del trabajo virtual.

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^N} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (4.1.1)$$

Esta ecuación particularizada para elementos unidimensionales, como el caso de la barra con solamente cargas axiales que se muestra en la Fig. 4.1, se puede expresar por:



**Figura 4.1** Viga unidimensional con carga axial

$$\int_V \delta \varepsilon \sigma dV = \int_l \delta u q dx + F_1 \delta u|_{x=0} + F_2 \delta u|_{x=l} \quad (4.1.2)$$

donde se puede observar que el trabajo virtual interno  $\delta \mathcal{W}^{int}$  es igual al trabajo virtual externo  $\delta \mathcal{W}^{ext}$  y se expresan respectivamente por

$$\delta \mathcal{W}^{int} = \int_V \delta \varepsilon \sigma dV \quad (4.1.3)$$

$$\delta \mathcal{W}^{ext} = \int_l \delta u q dx + F_1 \delta u|_{x=0} + F_2 \delta u|_{x=l} \quad (4.1.4)$$

En la ecuación anterior, el término  $F_2 \delta u|_{x=l}$  se refiere a que la fuerza  $F_2$  va multiplicada solamente por el desplazamiento virtual  $\delta u$  ubicado en la misma posición donde se encuentra la fuerza  $F_2$ , en este caso en  $x = l$ , y no por todo el campo de desplazamientos  $\delta u$ . Lo mismo ocurre con el término  $F_1 \delta u|_{x=0}$ .

De la ecuación (2.2.3) que nos da la deformación infinitesimal obtenemos que para el caso unidimensional

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \text{o} \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (4.1.5)$$

Siguiendo un procedimiento análogo, la deformación virtual se expresa por

$$\delta \varepsilon = \frac{d \delta u}{dx} \quad (4.1.6)$$

Por otro lado, de la ecuación constitutiva lineal, ecuación (2.5.9) tenemos que para nuestro problema en estudio

$$\sigma = E \varepsilon \quad (4.1.7)$$

Con estas ecuaciones podemos expresar el trabajo virtual interno de la siguiente manera

$$\delta \mathcal{W}^{int} = \int_l \int_A \delta \varepsilon E \varepsilon dA dx = \int_l \delta \varepsilon EA \varepsilon dx = \int_l \frac{d \delta u}{dx} EA \frac{du}{dx} dx \quad (4.1.8)$$

y el principio del trabajo virtual para nuestra barra en estudio se expresa por

$$\int_l \frac{d \delta u}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_l \delta u q dx + F_1 \delta u|_{x=0} + F_2 \delta u|_{x=l} \quad (4.1.9)$$

Como lo demuestra Timoshenko (1970), la solución exacta de la ecuación anterior consiste en encontrar el campo de desplazamientos  $u$  que satisfaga la ecuación (4.1.9) junto con las condiciones de contorno de Dirichlet. Para casos sencillos como este se puede encontrar la solución exacta, no siendo así para la mayoría de los problemas de ingeniería.

## Sección

### 4.2. Discretización

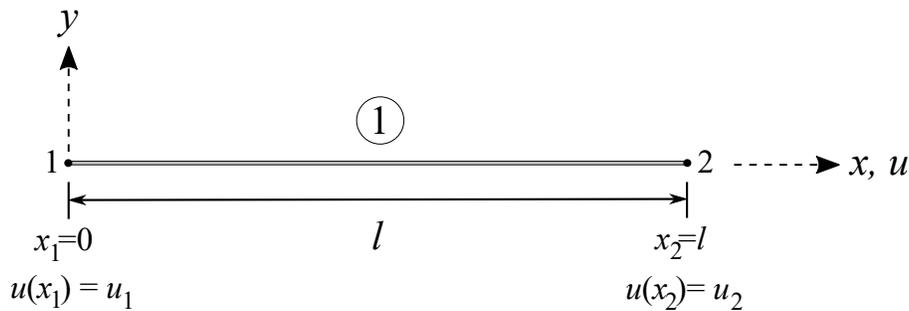
Una forma de solucionar el problema dado por la ecuación (4.1.9) consiste en encontrar una solución aproximada utilizando métodos numéricos. Aquí nos enfocaremos en la solución aproximada utilizando el método de los elementos finitos y de esta forma en lugar de encontrar el campo de desplazamientos exacto  $u$ , encontraremos en campo de desplazamiento aproximado que denominaremos  $u^h$ .

El campo de desplazamientos  $u^h$  se puede aproximar con diferentes funciones, sin embargo la manera más sencilla de hacerlo es mediante polinomios, que en general tienen la siguiente forma

$$u(x) \approx u^h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (4.2.1)$$

La solución al problema de manera exacta dada por el campo de desplazamientos  $u$  nos permite conocer la solución en un número infinito de puntos a lo largo de la longitud del elemento. Sin embargo, la solución aproximada nos permitirá encontrar una solución *casi exacta* solo en un determinado número de puntos a lo largo de la longitud del elemento y vendrá dado por  $n + 1$  puntos, donde  $n$  es el orden del polinomio de la ecuación (4.2.1). Así para un polinomio de orden 1 encontraremos la solución *exacta* en solo 2 puntos, mientras que para un polinomio de orden 2 la solución *exacta* será en 3 puntos. En elementos finitos es común hablar de nodos cuando se hace referencia a los puntos donde se encuentra la solución *exacta* del polinomio. Como veremos más adelante, entre más nodos existan en la discretización de la estructura, más exacta será la solución.

#### 4.2.1. Elemento con dos nodos



**Figura 4.2** Elementos finito de 2 nodos

El caso más sencillo de analizar consiste es discretizar la barra en estudio en un único elemento finito con dos nodos, por lo que estamos hablando de aproximar el campo de desplazamientos con el siguiente polinomio de orden uno

$$u^h(x) = a_0 + a_1x \quad (4.2.2)$$

Para encontrar los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  del polinomio lineal, se tiene que conocer el desplazamiento  $u^h$  en dos puntos. Estos desplazamientos deben de coincidir con los desplazamientos de los nodos 1 y 2, los cuales estarán definidos por  $u_1$  y  $u_2$  que tienen coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente tal como se aprecia en la Fig. 4.2. Esto nos permite plantear el siguiente sistema de ecuaciones y encontrar el valor de los coeficientes del polinomio

$$u_1 = a_0 + a_1x_1 \quad (4.2.3)$$

$$u_2 = a_0 + a_1x_2 \quad (4.2.4)$$

De la ecuación (4.2.3) podemos despejar  $a_0$ , obteniendo

$$a_0 = u_1 - a_1x_1 \quad (4.2.5)$$

Sustituyendo la ecuación (4.2.5) en la ecuación (4.2.4) y despejando  $a_1$  se encuentra

$$a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \quad (4.2.6)$$

Reemplazando ahora la ecuación (4.2.6) en la ecuación (4.2.5) se obtiene

$$a_0 = \frac{u_1x_2 - u_2x_1}{x_2 - x_1} \quad (4.2.7)$$

Finalmente sustituyendo las ecuaciones (4.2.6) y (4.2.7) en la ecuación (4.2.2) se encuentra nuestro polinomio que es

$$u^h(x) = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} + \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} x \quad (4.2.8)$$

Sin embargo es común en elementos finitos reordenar los términos de la ecuación anterior, y escribir el polinomio (4.2.8) de la siguiente manera

$$u^h(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2 \quad (4.2.9)$$

de donde se definen las siguientes funciones

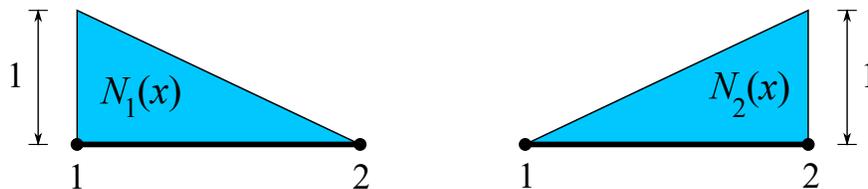
$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad (4.2.10)$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (4.2.11)$$

y en forma compacta el campo de desplazamiento, ecuación (4.2.9) se escribe por

$$u^h(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 \quad (4.2.12)$$

donde  $N_1(x)$  y  $N_2(x)$  reciben el nombre de *funciones de forma* o *funciones de interpolación* para los desplazamientos. La gráfica de las funciones anteriores se encuentra en la Fig. 4.3.



**Figura 4.3** Gráfica de las funciones de forma

En la Fig. 4.3 se puede observar una de las propiedades más importantes de las funciones de forma, y es que valen 1 en su nodo y 0 fuera de su nodo. Es decir, la función de forma  $N_1$  vale uno en el nodo 1 y vale cero en el nodo 2. Por otro lado, la función de forma  $N_2$  vale cero en el nodo 1 y vale uno en el nodo 2.

La aproximación del campo de los desplazamientos dada por la ecuación (4.2.12) es la forma con la que se trabajará de ahora en adelante. De esta forma, la ecuación (4.1.9) se escribe de manera aproximada por

$$\int_l \frac{d \delta u^h}{dx} EA \frac{du^h}{dx} dx = \int_l \delta u^h q dx + F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 \quad (4.2.13)$$

Se necesita de las siguientes cantidades en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \varepsilon^h &= \frac{du^h}{dx} = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{x_2 - x}{l} \right) u_1 + \frac{d}{dx} \left( \frac{x - x_1}{l} \right) u_2 \\ &= -\frac{1}{l} u_1 + \frac{1}{l} u_2 \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

donde se ha sustituido la igualdad  $l = x_2 - x_1$ . También se tiene que la variación del desplazamiento se puede escribir como

$$\delta u^h(x) = N_1(x) \delta u_1 + N_2(x) \delta u_2 \quad (4.2.15)$$

donde se han utilizado las mismas funciones de interpolación que para el campo real de desplazamientos. Esta particularización de utilizar las mismas funciones de forma tanto para el campo real de desplazamiento  $u^h$  como la parte virtual de los desplazamientos  $\delta u^h$  se conoce como método de Galerkin. De esta forma se puede encontrar

$$\delta \varepsilon^h = \frac{d \delta u^h}{dx} = -\frac{1}{l} \delta u_1 + \frac{1}{l} \delta u_2 \quad (4.2.16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.2.14) y (4.2.16) en la parte izquierda de la igualdad de la ecuación (4.2.13), se obtiene la parte correspondiente al trabajo virtual interno

$$\delta \mathcal{W}^{int} = \int_l \left( -\frac{1}{l} \delta u_1 + \frac{1}{l} \delta u_2 \right) EA \left( -\frac{1}{l} u_1 + \frac{1}{l} u_2 \right) dx \quad (4.2.17)$$

asi como el trabajo virtual externo se obtiene sustituyendo la ecuación (4.2.15) en la parte derecha de la igualdad en la ecuación (4.2.13)

$$\delta \mathcal{W}^{ext} = \int_l (N_1 \delta u_1 + N_2 \delta u_2) q dx + F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 \quad (4.2.18)$$

De la definición de trabajo se tiene que es igual al producto de fuerza por distancia, por lo que en este caso el trabajo virtual se define como fuerza por desplazamiento virtual. Escribiendo la ecuación (4.2.17) en forma matricial encontramos

$$\delta \mathcal{W}^{int} = [\delta u_1 \quad \delta u_2] \int_l \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx \quad (4.2.19)$$

Si definimos los siguientes términos

$$\delta \mathbf{u}^T = [\delta u_1 \quad \delta u_2] \quad (4.2.20)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (4.2.21)$$

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2] \quad (4.2.22)$$

y tomando en cuenta la definición de trabajo virtual entonces podemos escribir la ecuación (4.2.19) en la forma

$$\delta \mathcal{W}^{int} = \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}^{int} = \delta \mathbf{u}^T \int_l \mathbf{B}^T EA \mathbf{B} \mathbf{u} dx \quad (4.2.23)$$

donde no hay que olvidar que el campo de los desplazamiento es discretizado, es decir,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^h$ . Despejando de la ecuación anterior las fuerzas internas e integrando sobre la longitud suponiendo elementos prismáticos de sección constante se obtiene

$$\mathbf{f}^{int} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.24)$$

Repetiendo el procedimiento para el trabajo virtual externo, ecuación (4.2.18), se encuentra

$$\delta \mathcal{W}^{ext} = [\delta u_1 \quad \delta u_2]^T \left\{ \int_l \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} q dx + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.2.25)$$

Definiendo

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2] \quad (4.2.26)$$

$$\mathbf{F}^T = [F_1 \quad F_2] \quad (4.2.27)$$

podemos escribir la ecuación (4.2.25) de la siguiente manera

$$\delta \mathcal{W}^{ext} = \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}^{ext} = \delta \mathbf{u}^T \left( \int_l \mathbf{N}^T q \, dx + \mathbf{F} \right) \quad (4.2.28)$$

y despejando de la ecuación anterior las fuerzas externas e integrando sobre la longitud se obtiene

$$\mathbf{f}^{ext} = \begin{bmatrix} \frac{ql}{2} + F_1 \\ \frac{ql}{2} + F_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.29)$$

La formulación y discretización completa del problema anterior se puede expresar por

$$\mathbf{f}^{int} = \mathbf{f}^{ext} \quad \text{o} \quad \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ql}{2} + F_1 \\ \frac{ql}{2} + F_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.30)$$

El siguiente paso es encontrar el campo de desplazamientos que satisfaga la ecuación anterior.

### 4.2.2. Solución del problema

Una vez planteadas las ecuaciones que rigen el problema se procede a su solución para lo cual se pueden utilizar muchos métodos, de entre los cuales aquí usaremos el método de Newton-Rahson. El método consiste en escribir la ecuación (4.2.30) de la siguiente forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^{ext} \quad (4.2.31)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el residuo que viene dado por la diferencia entre las fuerzas internas dependientes del campo de los desplazamientos y las fuerzas externas aplicadas a la estructura, es decir

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{ql}{2} + F_1 \\ \frac{ql}{2} + F_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.32)$$

Tal como se indicó en la expresión de la forma débil, para que el problema esté planteado correctamente se necesita de una condición de contorno de Dirichlet que se satisfaga en la configuración de referencia, que para este problema es

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma^D \quad \text{cuando} \quad t = 0 \quad (4.2.33)$$

que escribiremos de manera compacta  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ . Si pensamos que este valor es la solución al problema, al sustituirlo en la ecuación (4.2.31) se obtendría que el residuo  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ .

En el caso contrario cuando el residuo  $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ , se efectúa el siguiente procedimiento para encontrar la solución a nuestro problema. Utilizando series de Taylor para expandir el residuo alrededor de un valor conocido  $\mathbf{u}^i$  se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{u}^{i+1}) = & \mathbf{r}(\mathbf{u}^i) + \frac{\mathbf{r}'(\mathbf{u}^i)}{1!}(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i) + \frac{\mathbf{r}''(\mathbf{u}^i)}{2!}(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)^2 + \dots + \\ & \frac{\mathbf{r}^{(n)}(\mathbf{u}^i)}{n!}(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i)^n \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

Tomando solo los términos de primer orden y particularizando la serie de Taylor para nuestro problema de manera que para  $\mathbf{u}^{i+1}$ ,  $\mathbf{r}(\mathbf{u}^{i+1}) = \mathbf{0}$ , se obtiene

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}^{i+1}) \approx \mathbf{r}(\mathbf{u}^i) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}^i)}{\partial \mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{0} \quad (4.2.35)$$

donde  $\Delta \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i$ . Matemáticamente, la matriz tangente se puede definir por

$$\mathbf{K}^i = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}^i)}{\partial \mathbf{u}} \quad (4.2.36)$$

cuyo nombre se debe a que se trata de la primera derivada. Sustituyendo la ecuación (4.2.31) en la ecuación (4.2.36) se obtiene

$$\mathbf{K}^i = \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}^i)}{\partial \mathbf{u}} \quad (4.2.37)$$

y en el caso de problemas estructurales se conoce como matriz de rigidez, cuyo valor se obtiene derivando la ecuación (4.2.24) resultado

$$\mathbf{K}^i = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.38)$$

Finalmente se puede escribir la ecuación (4.2.35) de la siguiente manera

$$\mathbf{K}^i \cdot \Delta \mathbf{u}^{i+1} = -\mathbf{r}(\mathbf{u}^i) \quad (4.2.39)$$

Para el caso de problemas lineales se toma en cuenta que se parte de una solución inicial que generalmente es igual a cero, es decir,  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ , por lo que se obtiene para  $i = 0$ ,  $\Delta \mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^1$ . De la misma manera, al evaluar el residuo en  $\mathbf{u}^0$  se obtiene  $\mathbf{r}(\mathbf{u}^0) = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}^0) - \mathbf{f}^{ext} = -\mathbf{f}^{ext}$ , por lo que escribimos

$$\mathbf{K}^0 \cdot \mathbf{u}^1 = \mathbf{f}^{ext} \quad (4.2.40)$$

Ya que para problemas lineales la solución se encuentra en una sola iteración, entonces podemos escribir la ecuación (4.2.40) en la siguiente forma equivalente

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} \quad (4.2.41)$$

donde  $\mathbf{K}$  toma el valor de  $\mathbf{K}^i$  de la ecuación (4.2.38), y el vector de los desplazamientos  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^h = [u_1 \ u_2]^T$  representa la incógnita a nuestro problema. De esta manera se tiene que nuestro problema se ha reducido a la solución de un sistema lineal de ecuaciones. Hay que resaltar que aunque matemáticamente la solución a la ecuación (4.2.41) está dada por  $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{f}^{ext}$ , desde el punto de vista computacional dicha solución es muy cara ya que requiere del cálculo de una inversa, por lo que la manera adecuada de proceder es resolviendo el sistema de ecuaciones.

### 4.2.3. Resultados Finales

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones descrito anteriormente, se conocerán los desplazamientos de los nodos que conforman la estructura discretizada por elementos finitos. El paso siguiente es encontrar las deformaciones, esfuerzos y elementos mecánicos asociados al campo de los desplazamientos.

Para ello, una vez conocidos los desplazamientos en los nodos, se puede conocer el desplazamiento en cualquier lugar  $x$  de la estructura, sustituyendo la posición  $x$  donde se quiere conocer el desplazamiento en la ecuación (4.2.12) de la siguiente manera:

$$u^h = u^h(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2 \quad (4.2.42)$$

y después podemos encontrar el valor de la deformación  $\varepsilon^h$ , dada por la ecuación (4.2.14), mediante

$$\varepsilon^h = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 = -\frac{1}{l} u_1 + \frac{1}{l} u_2 \quad (4.2.43)$$

Para calcular esta deformación es suficiente con conocer el valor de los desplazamientos de los nodos y la longitud del elemento en cuestión. Una vez encontrada la deformación, usamos la ley de Hooke que nos permite encontrar los esfuerzos  $\sigma^h$  con la relación

$$\sigma^h = E \varepsilon^h = -\frac{E}{l} u_1 + \frac{E}{l} u_2 \quad (4.2.44)$$

y de la definición de esfuerzo, despejando se encuentra el valor de la fuerza axial  $F^h$

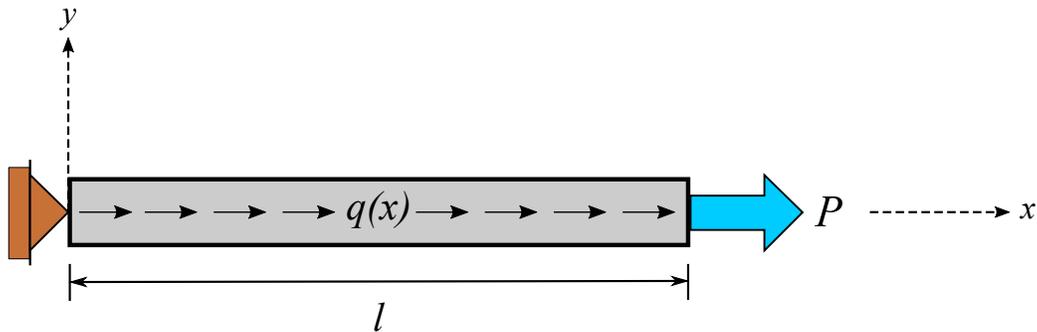
$$F^h = \sigma^h A = -\frac{EA}{l} u_1 + \frac{EA}{l} u_2 \quad (4.2.45)$$

En el caso del elemento de dos nodos, al ser los valores de la deformación constante en el elemento, los esfuerzos serán también constantes en el elemento. De esta forma, las fuerzas axiales también serán constantes en el elemento.

A continuación, se verá la precisión del método de los elementos finitos al compararlo con un problema del cual se conoce la solución exacta. En la Fig. 4.4 se muestra el problema a resolver y consta de una barra sometida a una fuerza axial uniformemente distribuida  $q(x)$  y a una fuerza axial puntual  $P$  en un extremo de la viga. En el otro extremo se encuentra un apoyo que impide el desplazamiento de ese nodo.

La solución analítica, dada por la resistencia de materiales, da como resultados

$$u = u(x) = \frac{1}{EA} \left[ -\frac{qx^2}{2} + (P + ql)x \right] \quad (4.2.46)$$



**Figura 4.4** Viga unidimensional con carga axial

$$\varepsilon = \varepsilon(x) = \frac{1}{EA} [P + q(l - x)] \quad (4.2.47)$$

$$\sigma = \sigma(x) = \frac{1}{A} [P + q(l - x)] \quad (4.2.48)$$

$$F = F(x) = P + q(l - x) \quad (4.2.49)$$

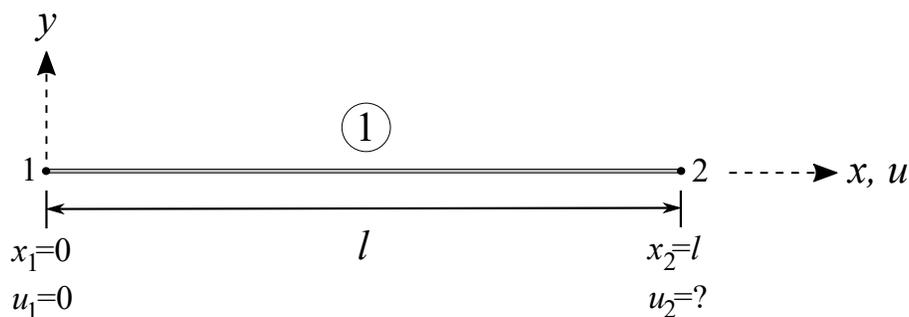
donde ninguna de las cantidades anteriores es constante, de tal forma que, todas son variables dependientes de la posición  $x$ . Ya que la solución analítica anterior descrita en las ecuaciones (4.2.46)-(4.2.49) no se parece a la solución con elementos finitos dada por las ecuaciones (4.2.42)-(4.2.45), se procederá a hacer una comparación con los valores que aparecen en la tabla 4.1.

**Tabla 4.1** Propiedades geométricas, del material y cargas

$l$	$[cm]$	300.0
$A$	$[cm^2]$	800.0
$E$	$[kg/cm^2]$	$2.4 \times 10^5$
$P$	$[kg]$	0.0
$q$	$[kg/cm]$	600.0

### Ejemplo 4.1

La estructura discretizada con 1 elemento finito de 2 nodos para hacer la comparación se puede apreciar en la Fig. 4.5. En este caso, la solución viene dada por la ecuación (4.2.41), que depende de una matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , un vector de desplazamiento  $\mathbf{u}^h$  y un vector de fuerzas externas  $\mathbf{f}^{ext}$ . La matriz



**Figura 4.5** Viga discretizada con 1 elemento finito de 2 nodos

de rigidez  $\mathbf{K}$  se obtiene directamente de la ecuación (4.2.38), dando lugar a

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{(2.4 \times 10^5)(800.0)}{300.0} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = 6.4 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de las fuerzas externas se calcula usando la ecuación (4.2.29), donde no existe carga puntual en el nodo 1 y, por tanto, se obtiene

$$\mathbf{f}^{ext} = \begin{bmatrix} \frac{ql}{2} + R \\ \frac{ql}{2} + P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(600.0)(300.0)}{2} + R \\ \frac{(600.0)(300.0)}{2} + 0 \end{bmatrix} = 9.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

El planteamiento para la solución de este problema por el método de los elementos finitos es

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^{ext}$$

resultando

$$6.4 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 9.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} 6.4 \times 10^5 & -6.4 \times 10^5 \\ -6.4 \times 10^5 & 6.4 \times 10^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.0 \times 10^4 + R \\ 9.0 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

En la Fig. 4.4 se aprecia que existe un apoyo en el nodo 1, por lo que existe una condición de contorno de tipo Dirichlet, es decir, una reacción, de tal forma que el desplazamiento del nodo 1 es conocido, y vale  $u_1 = 0$ .

Para solucionar adecuadamente el sistema anterior independientemente de si el valor en el apoyo es cero o cuenta con algún valor prescrito diferente de cero, separaremos los valores en la matriz de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix}$$

El objetivo de la separación anterior es poner en un apartado los grados de libertad conocidos y en otro apartado los grados de libertad desconocidos. De esta manera, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} K_{aa} \cdot u_a + K_{ab} \cdot u_b &= f_a \\ K_{ba} \cdot u_a + K_{bb} \cdot u_b &= f_b \end{aligned}$$

Partiendo del hecho de que todas las rigideces son conocidas, en la primera ecuación tenemos como incógnita el vector de los desplazamientos  $u_b$  así como el valor de la reacción que se encuentra en  $f_a$ . Por otro lado, en la segunda ecuación se tiene como incógnita el vector de los desplazamientos  $u_b$ . Entonces, lo primero que tenemos que hacer es encontrar el vector de los desplazamientos  $u_b$  de la segunda ecuación, de donde tenemos que resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$K_{bb} \cdot u_b = f_b - K_{ba} \cdot u_a$$

ya que  $u_a$  es conocido. Una vez encontrado el vector de los desplazamientos  $u_b$ , se procede a encontrar las reacciones de la primera ecuación mediante:

$$f_a = K_{aa} \cdot u_a + K_{ab} \cdot u_b$$

En el caso de que los desplazamientos prescritos en los nodos sean igual a cero, se obtienen las siguientes ecuaciones simplificadas

$$\begin{aligned}K_{bb} \cdot u_b &= f_b \\ f_a &= K_{ab} \cdot u_b\end{aligned}$$

La solución al sistema anterior para un desplazamiento conocido  $u_1 = 0$  da como resultado

$$u_2 = 0.140625 \text{ cm}$$

De esta forma, el campo de los desplazamientos utilizando 1 elemento finito de 2 nodos es

$$\mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.140625 \end{bmatrix} \text{ [cm]} \quad (4.2.50)$$

El valor de la reacción se obtiene con la ecuación

$$f_a = K_{ab} \cdot u_b$$

que sustituyendo se obtiene

$$9.0 \times 10^4 + R = -6.4 \times 10^5 \cdot 0.140625$$

Despejando, se encuentra que

$$R = -6.4 \times 10^5 \cdot 0.140625 - 9.0 \times 10^4$$

$$R = -9.0 \times 10^4 - 9.0 \times 10^4$$

$$R = -1.8 \times 10^5 \text{ kg}$$

La solución exacta para la viga de la estructura mostrada en la Fig. 4.4, se encuentra utilizando la ecuación (4.2.46) en los dos nodos de la viga discretizada que aparece en la Fig. 4.5. Para el nodo 1 tenemos que  $x_1 = 0$ , de manera que

$$u_1 = u(x_1) = u(0) = 0.0 \text{ cm}$$

mientras que para el nodo 2 se encuentra que  $x_2 = l$ , lo que resulta en

$$u_2 = u(x_2) = u(l) = \frac{1}{EA} \left[ -\frac{ql^2}{2} + (0 + ql)l \right] = \frac{ql^2}{2EA}$$

Sustituyendo valores se obtiene

$$u_2 = \frac{(600.0)(300.0)^2}{2(2.4 \times 10^5)(800.0)} = 0.140625 \text{ cm}$$

La solución exacta al problema anterior es

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.140625 \end{bmatrix} \text{ [cm]} \quad (4.2.51)$$

Si comparamos la solución con elementos finitos, dada por la ecuación (4.2.50), con la solución exacta de la ecuación (4.2.51), se puede ver que ambas soluciones coinciden.

Sin embargo, la variación de los resultados por elementos finitos para el campo de los desplazamientos, expuestos en la ecuación (4.2.42), es lineal, mientras que la variación de la solución exacta para el mismo campo de los desplazamientos, vista en la ecuación (4.2.46), resultan ser de segundo orden. Esto hace que si bien la solución en los nodos 1 y 2 es la misma, los desplazamientos intermedios entre ambos nodos será diferente.

El siguiente paso será el cálculo de las deformaciones, luego seguirá el cálculo de los esfuerzos y por último las fuerzas axiales sobre el elemento. Ya que el punto de comparación serán los elementos mecánicos, evaluaremos directamente las fuerzas axiales.

A partir de la ecuación (4.2.45) podemos encontrar directamente el valor de las fuerzas axiales dado por el método de los elementos finitos. Ya que el desplazamiento en el nodo 1,  $u_1 = 0$ , la ecuación (4.2.45) se reduce y obtenemos

$$F^h = \frac{EA}{l} u_2 = \frac{(2.4 \times 10^5) (800.0)}{(300.0)} 0.140625 = 9.0 \times 10^4 \text{ kg} \quad (4.2.52)$$

Por otro lado, a partir de la ecuación (4.2.49) se puede encontrar el valor de la fuerza axial, el cual es variable linealmente, es decir, depende la posición  $x$  donde se evalué la función. Para ello, tenemos que evaluar la función en dos puntos, siendo uno de ellos el valor de  $x_1 = 0$ , dando como resultado

$$F(x_1) = F(0) = 0 + (600.0) (300.0 - 0) = 1.8 \times 10^5 \text{ kg} \quad (4.2.53)$$

El otro punto donde se evaluará la fuerza corresponde al punto  $x_2 = 300$ , de donde se obtiene

$$F(x_2) = F(300) = 0 + (600.0) (300.0 - 300) = 0.0 \text{ kg} \quad (4.2.54)$$

Podemos ver como la solución con elementos finitos es diferente a los valores máximos y mínimos dados por la solución exacta. Comparando el valor constante arrojado por el método de los elementos finitos con los valores extremos de la solución exacta, podemos ver que existe un error de 50% en las fuerzas axiales.

#### 4.2.4. Interpretación Gráfica de los Resultados

Para ver más claramente la diferencia entre la solución exacta y la solución con el método de los elementos finitos, procederemos a hacer una gráfica comparativa entre ambas soluciones para el caso de los desplazamientos y las fuerzas axiales.

Con el fin de mostrar esta diferencia, se graficarán ambas respuestas a lo largo de todo el elemento finito de manera que los resultados sean independientes de las unidades de medición. Para ello, normalizaremos la geometría  $x$  respecto a la longitud de la viga  $l$  de la siguiente manera

$$\frac{x}{l} \quad (4.2.55)$$

Para los desplazamientos  $u$ , su normalización se hará como se muestra a

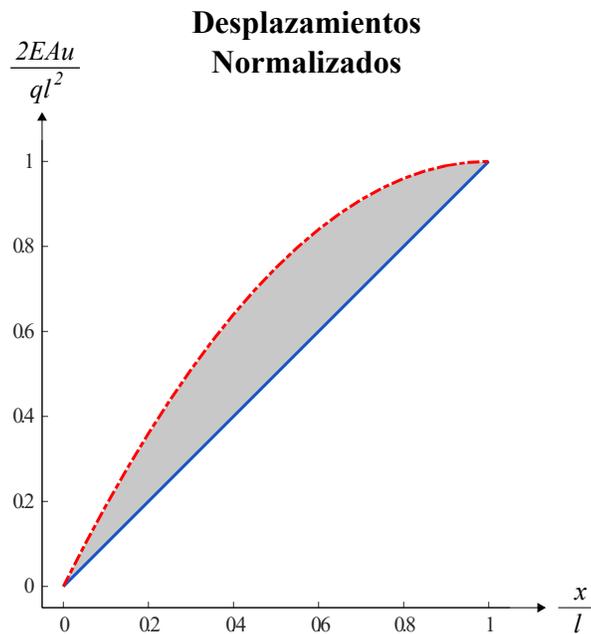
continuación

$$\frac{2EAu}{ql^2} \quad (4.2.56)$$

Y finalmente para las fuerzas axiales  $F$ , normalizaremos con

$$\frac{F}{ql} \quad (4.2.57)$$

En la Fig. 4.6 se aprecia la diferencia entre la solución exacta (roja punteada) y la solución con elementos finitos (azul) para el campo de los desplazamientos. En los extremos de la estructura la solución coincide, no siendo así en el resto de la viga. Esto ocasiona un error (coloreado en gris) que aún no sabemos que tan grave sea hasta que se comparen las fuerzas axiales.

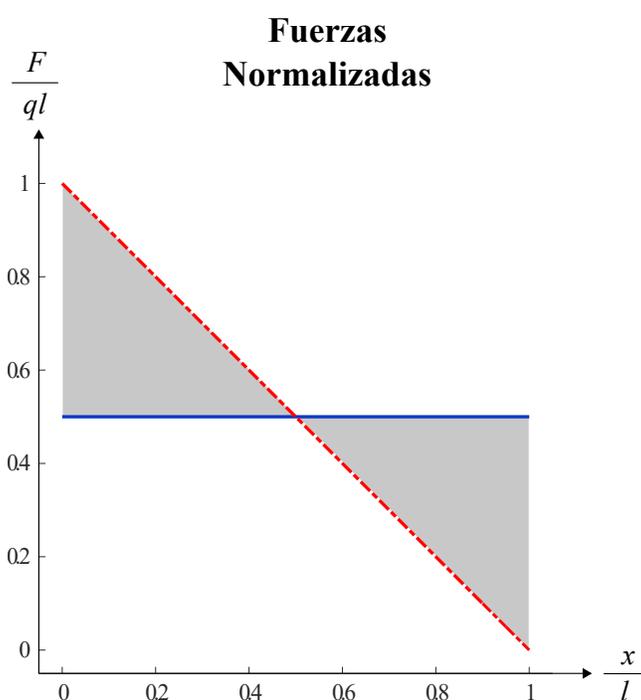


**Figura 4.6** Comparativa de desplazamientos normalizados con 1 elemento finito

En el caso de las fuerzas axiales, las diferencias entre la solución exacta (roja punteada) y la solución con elementos finitos (azul) es más preocupante, tal como se muestra en la Fig. 4.7. En ella podemos observar que solamente coinciden ambas soluciones al centro de la gráfica. Por otro lado, vemos que el valor exacto en un extremo inicial de la viga es del doble arrojado por la solución con elementos finitos. Es decir, existe un error al inicio de la viga del 50% cuando calculamos con elementos finitos (la cual está sombreada en color gris).

Además, también podemos observar en la Fig. 4.7 que en el extremo final de la viga la solución exacta y la solución por elementos finitos también difieren en un 50 % (el cual también se colora en color gris). Podemos concluir entonces que el error que se aprecia en el campo de los desplazamientos de la Fig. 4.6 es importante y se puede apreciar claramente al momento de calcular las fuerzas axiales.

En conclusión, esa teoría que muchos inexpertos predicán de que la solución de un problema con elementos finitos es igual a la solución exacta es errónea por el momento.

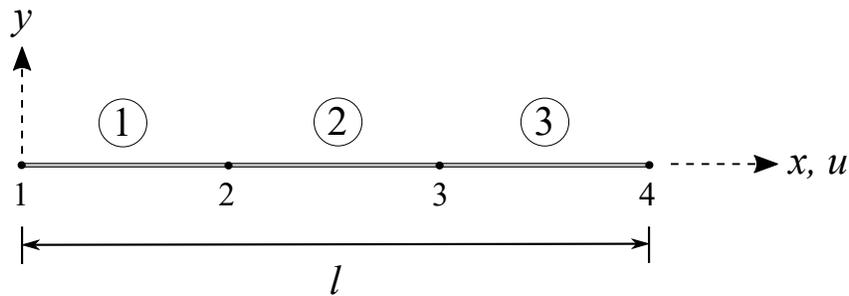


**Figura 4.7** Comparativa de fuerzas normalizadas con 1 elemento finito

Al aumentar el número de elementos finitos al discretizar la estructura, también se aumenta la precisión de los resultados. Por ejemplo, si la viga se discretiza en 3 elementos finitos unidimensionales de 2 nodos, se tienen entonces un total de 4 nodos, como se aprecia en la Fig. 4.8.

### Ejemplo 4.2

La estructura discretizada con 3 elementos finitos de 2 nodos para hacer la comparación se puede apreciar en la Fig. 4.8. En este caso, la solución



**Figura 4.8** Viga discretizada con 3 elementos finitos de 2 nodos

viene dada por la ecuación (4.2.41), que depende de una matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , un vector de desplazamiento  $\mathbf{u}^h$  y un vector de fuerzas externas  $\mathbf{f}^{ext}$ . Ya que los 3 elementos finitos que forman la estructura son iguales, la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  de cada elemento se obtiene directamente de la ecuación (4.2.38), recordando que el cambio respecto al ejemplo anterior es el tamaño de cada elemento finito, que ahora es de  $l^e = l/3 = 100$ , dando lugar a

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{K}^3 = \frac{EA}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{(2.4 \times 10^5)(800.0)}{100.0} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{K}^3 = 1.92 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de las fuerzas externas se calcula usando la ecuación (4.2.29), donde para el elemento 1 se tiene

$$\mathbf{f}^{ext,1} = \begin{bmatrix} \frac{ql^e}{2} + R \\ \frac{ql^e}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(600.0)(100.0)}{2} + R \\ \frac{(600.0)(100.0)}{2} \end{bmatrix} = 3.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

y para los elementos 2 es

$$\mathbf{f}^{ext,2} = \begin{bmatrix} \frac{ql^e}{2} \\ \frac{ql^e}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(600.0)(100.0)}{2} \\ \frac{(600.0)(100.0)}{2} \end{bmatrix} = 3.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y para el elemento 3 queda como

$$\mathbf{f}^{ext,3} = \begin{bmatrix} \frac{ql^e}{2} \\ \frac{ql^e}{2} + P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(600.0)(100.0)}{2} \\ \frac{(600.0)(100.0)}{2} + P \end{bmatrix} = 3.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P = 0 \end{bmatrix}$$

El planteamiento para la solución de este problema por el método de los elementos finitos resulta en las aportaciones de cada elemento a la matriz global, obteniéndose

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^{ext}$$

resultando

$$1.92 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = 3.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ P = 0 \end{bmatrix}$$

o

$$1.92 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \times 10^4 + R \\ 6.0 \times 10^4 \\ 6.0 \times 10^4 \\ 3.0 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

En la Fig. 4.8 se aprecia que existe un apoyo en el nodo 1, por lo que existe una condición de contorno de tipo Dirichlet, es decir, una reacción, de tal forma que el desplazamiento del nodo 1 es conocido, y vale  $u_1 = 0$ .

Para solucionar adecuadamente el sistema anterior independientemente de si el valor en el apoyo es cero o cuenta con algún valor prescrito diferente de cero, separemos los valores en la matriz de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ \text{-----} & \text{-----} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ \text{-----} \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a \\ \text{-----} \\ f_b \end{bmatrix}$$

El objetivo de la separación anterior es poner en un apartado los grados de libertad conocidos y en otro apartado los grados de libertad desconocidos. De esta manera, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} K_{aa} \cdot u_a + K_{ab} \cdot u_b &= f_a \\ K_{ba} \cdot u_a + K_{bb} \cdot u_b &= f_b \end{aligned}$$

Partiendo del hecho de que todas las rigideces son conocidas, en la primera ecuación tenemos como incógnita el vector de los desplazamientos  $u_b$  así como el valor de la reacción que se encuentra en  $f_a$ . Por otro lado, en la segunda ecuación se tiene como incógnita en vector de los desplazamientos  $u_b$ . Entonces, lo primero que tenemos que hacer es encontrar el vector de los desplazamientos  $u_b$  de la segunda ecuación, de donde tenemos que resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$K_{bb} \cdot u_b = f_b - K_{ba} \cdot u_a$$

ya que  $u_a$  es conocido. Una vez encontrado el vector de los desplazamientos  $u_b$ , se procede a encontrar las reacciones de la primera ecuación mediante:

$$f_a = K_{aa} \cdot u_a + K_{ab} \cdot u_b$$

En el caso de que los desplazamientos prescritos en los nodos sean igual a cero, se obtienen las siguientes ecuaciones simplificadas

$$\begin{aligned} K_{bb} \cdot u_b &= f_b \\ f_a &= K_{ab} \cdot u_b \end{aligned}$$

La solución al sistema anterior para un desplazamiento conocido  $u_1 = 0$  consiste en resolver el sistema de ecuaciones  $K_{bb} \cdot u_b = f_b$ , quedando

$$1.92 \times 10^6 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0 \times 10^4 \\ 6.0 \times 10^4 \\ 3.0 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

El resultado obtenido es

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.078125 \\ 0.125 \\ 0.140625 \end{bmatrix}$$

De esta forma, el campo de los desplazamientos utilizando 3 elementos finitos de 2 nodos es

$$\mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.078125 \\ 0.125 \\ 0.140625 \end{bmatrix} \quad [cm] \quad (4.2.58)$$

El valor de la reacción se obtiene con la ecuación  $f_a = K_{ab} \cdot u_b$ , que sustituyendo se obtiene

$$\left[ 3.0 \times 10^4 + R \right] = 1.92 \times 10^6 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 = 0.078125 \\ u_3 = 0.125 \\ u_4 = 0.140625 \end{bmatrix}$$

Despejando, se encuentra que

$$R = -1.92 \times 10^6 \cdot 0.078125 - 3.0 \times 10^4$$

$$R = -1.5 \times 10^5 - 3.0 \times 10^4$$

$$R = -1.8 \times 10^5 \text{ kg}$$

La solución exacta para la viga de la estructura mostrada en la Fig. 4.4, se encuentra utilizando la ecuación (4.2.46). Para el caso de la viga discretizada que aparece en la Fig. 4.5. Para el nodo 1 tenemos que  $x_1 = 0$ , de manera que

$$u_1 = u(x_1) = u(0) = 0.0 \text{ cm}$$

mientras que para el nodo 2 se encuentra que  $x_2 = l/3 = l^e = 100$ , lo que resulta en

$$u_2 = u(x_2) = u(l^e) = \frac{1}{EA} \left[ -\frac{q(l^e)^2}{2} + (0 + ql) l^e \right] = \frac{-q(l^e)^2}{2EA} + \frac{ql(l^e)}{EA}$$

$$u_2 = \frac{-q(l^e)^2 + 2ql(l^e)}{2EA}$$

Sustituyendo valores se obtiene

$$u_2 = \frac{(-600.0)(100.0)^2 + (2)(600.0)(300.0)(100.0)}{2(2.4 \times 10^5)(800.0)} = 0.078125 \text{ cm}$$

Por otro lado, para el nodo 3 se tiene que  $x_3 = 2 \times l/3 = 2 \times l^e = 200$ , lo que resulta en

$$u_3 = u(x_3) = u(2l^e) = \frac{1}{EA} \left[ -\frac{q(2l^e)^2}{2} + (0 + ql) 2l^e \right] = \frac{-q(2l^e)^2}{2EA} + \frac{ql(2l^e)}{EA}$$

$$u_3 = \frac{-q(2l^e)^2 + 2ql(2l^e)}{2EA}$$

Sustituyendo valores se obtiene

$$u_3 = \frac{(-600.0)(200.0)^2 + (2)(600.0)(300.0)(200.0)}{2(2.4 \times 10^5)(800.0)} = 0.125 \text{ cm}$$

Finalmente, el nodo 4 tiene las coordenadas  $x_4 = 3 \times l/3 = 3l^e = l = 300$ , lo que resulta en

$$u_4 = u(x_4) = u(3l^e) = \frac{1}{EA} \left[ -\frac{q(3l^e)^2}{2} + (0 + ql)3l^e \right] = \frac{-q(3l^e)^2}{2EA} + \frac{ql(3l^e)}{EA}$$

$$u_4 = \frac{-q(3l^e)^2 + 2ql(3l^e)}{2EA}$$

Sustituyendo valores se obtiene

$$u_4 = \frac{(-600.0)(300.0)^2 + (2)(600.0)(300.0)(300.0)}{2(2.4 \times 10^5)(800.0)} = 0.140625 \text{ cm}$$

La solución exacta al problema anterior es

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.078125 \\ 0.125 \\ 0.140625 \end{bmatrix} \text{ [cm]} \quad (4.2.59)$$

Nuevamente podemos ver que ambas soluciones coinciden.

Sin embargo, la variación de los resultados por elementos finitos para el campo de los desplazamientos, expuestos en la ecuación (4.2.42), es lineal, mientras que la variación de la solución exacta para el mismo campo de los desplazamientos, vista en la ecuación (4.2.46), resultan ser de segundo orden. Esto hace que si bien la solución en los nodos sea la misma, los desplazamientos intermedios entre nodos será diferente. Aunque hay que resaltar que entre más nodos se tenga, menos diferencias habrá entre la solución con elementos finitos y la solución exacta.

El siguiente paso será el cálculo de las deformaciones, luego seguirá el cálculo de los esfuerzos y por último las fuerzas axiales sobre el elemento. Ya que el punto de comparación serán los elementos mecánicos, evaluaremos directamente las fuerzas axiales.

A partir de la ecuación (4.2.45) podemos encontrar directamente el valor de las fuerzas axiales dado por el método de los elementos finitos. Ya que el desplazamiento en el nodo 1,  $u_1 = 0$ , encontramos con la ecuación (4.2.45) la fuerza axial del elemento 1

$$\begin{aligned} F^{h,1} &= -\frac{EA}{l^e} u_1 + \frac{EA}{l^e} u_2 \\ &= \frac{(2.4 \times 10^5) (800.0)}{(100.0)} 0.078125 \\ &= 1.5 \times 10^5 \text{ kg} \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

Para el elemento 2, tenemos que su fuerza axial vale

$$\begin{aligned} F^{h,2} &= -\frac{EA}{l^e} u_2 + \frac{EA}{l^e} u_3 \\ &= -\frac{(2.4 \times 10^5) (800.0)}{(100.0)} 0.078125 + \\ &\quad \frac{(2.4 \times 10^5) (800.0)}{(100.0)} 0.125 \\ &= 9.0 \times 10^4 \text{ kg} \end{aligned} \quad (4.2.61)$$

Finalmente, para el elemento 3, tenemos que su fuerza axial vale

$$\begin{aligned} F^{h,3} &= -\frac{EA}{l^e} u_3 + \frac{EA}{l^e} u_4 \\ &= -\frac{(2.4 \times 10^5) (800.0)}{(100.0)} 0.125 + \\ &\quad \frac{(2.4 \times 10^5) (800.0)}{(100.0)} 0.140625 \\ &= 3.0 \times 10^4 \text{ kg} \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

Hay que recordar que las fuerzas axiales en cada uno de los tres elementos son constantes a lo largo de cada elemento. Por otro lado, a partir de la ecuación (4.2.49) se puede encontrar el valor de la fuerza axial, la cual es variable linealmente, es decir, depende la posición  $x$  donde se evalué la función. Para ello, tenemos que evaluar la función en dos puntos, siendo uno de ellos el valor de  $x_1 = 0$ , dando como resultado

$$F(x_1) = F(0) = 0 + (600.0)(300.0 - 0) = 1.8 \times 10^5 \text{ kg} \quad (4.2.63)$$

El otro punto donde se evaluará la fuerza corresponde al punto  $x_4 = 300$ , de donde se obtiene

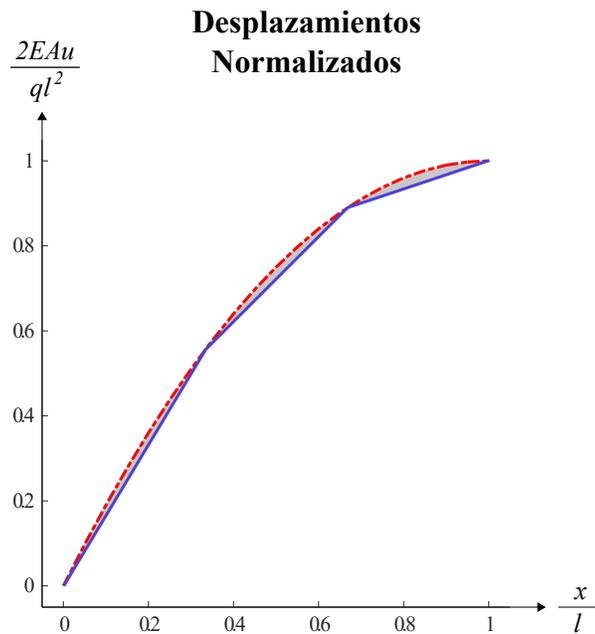
$$F(x_4) = F(300) = 0 + (600.0)(300.0 - 300) = 0.0 \text{ kg} \quad (4.2.64)$$

Podemos ver como la solución con elementos finitos es diferente a los valores máximos y mínimos dados por la solución exacta. Aún así, el valor constante en cada uno de los elementos finitos se aproxima más a la solución exacta que cuando se utilizó un solo elemento finito.

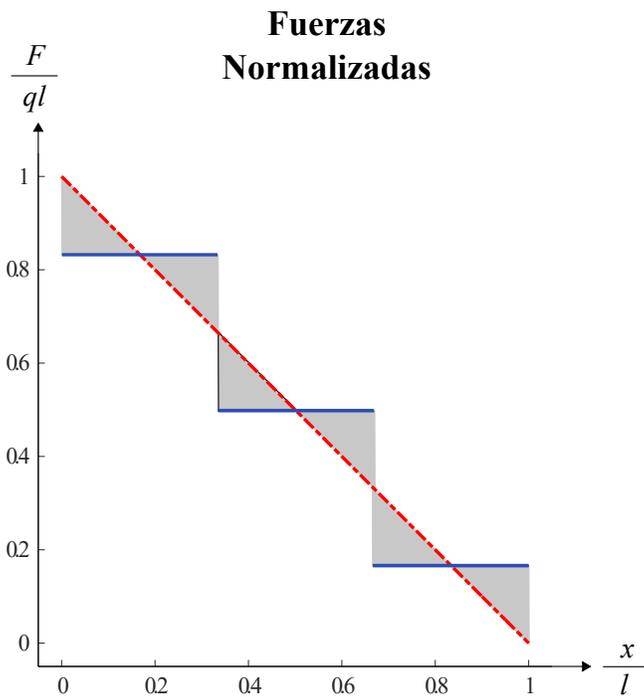
Los resultados normalizados de los desplazamientos y las fuerzas axiales se muestran en las Figs. 4.9 y 4.10. En la Fig. 4.9 se puede observar como la diferencia entre el campo de los desplazamiento exactos (rojo punteado) y el campo de los desplazamientos por elementos finitos (azul) ha disminuido considerablemente, (por lo que el área coloreada en gris que representa el error, ha disminuido). Sin embargo, en la Fig. 4.10 se presenta una diferencia clara entre las fuerzas axiales exactas (rojo punteado) y las fuerzas axiales discretizadas en elementos finitos (azul). En esta última, el error (gris) entre ambas soluciones aún es considerable y es del 17%.

Finalmente se volverá a resolver la estructura pero esta vez utilizando 10 elementos finitos de 2 nodos. Los resultados para el campo de los desplazamientos entre la solución exacta y la solución con elementos finitos se aprecia en la Fig. 4.11. Se puede ver claramente como prácticamente ya no hay distinción entre la solución exacta (roja punteada) y la solución con elementos finitos (azul). Se considera entonces que, desde el punto de vista de los desplazamientos, la solución por elementos finitos puede considerarse exacta.

Pasando ahora al campo de las fuerzas axiales, se puede apreciar en la Fig. 4.12 que aún existen diferencias entre la solución exacta (roja punteada) y la solución con elementos finitos (azul). Para este caso en particular, el error (gris)



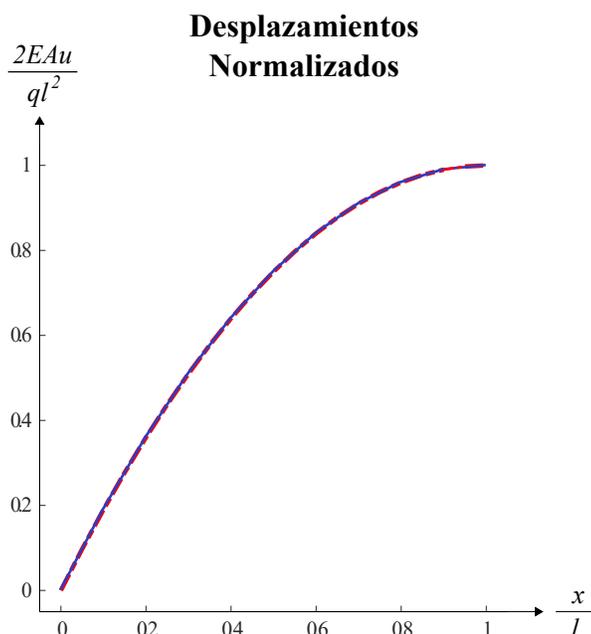
**Figura 4.9** Comparativa de desplazamientos normalizadas con 3 elementos finitos



**Figura 4.10** Comparativa de fuerzas normalizadas con 3 elementos finitos

entre la solución exacta y por elementos finitos es del 5% solamente en los extremos.

Se observa además como las variables principales del problema – despla-



**Figura 4.11** Comparativa de desplazamientos normalizadas con 10 elementos finitos

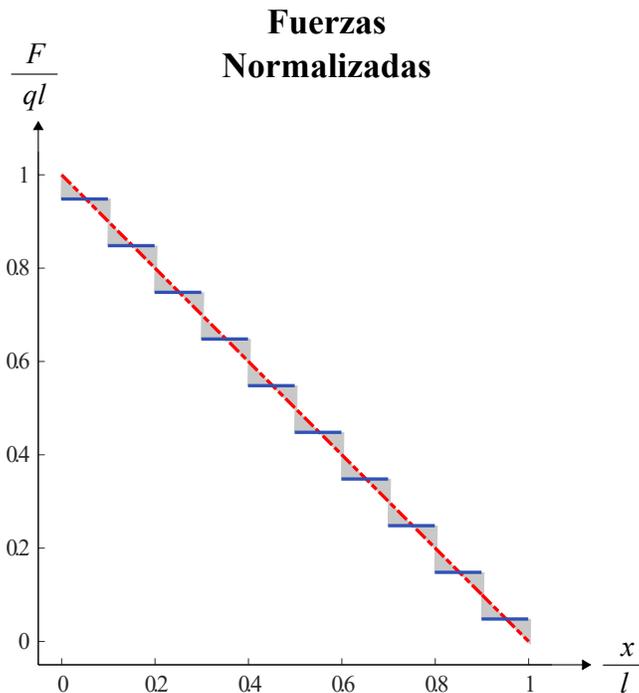
mientos – se aproximan más rápidamente a la solución exacta que las variables secundarias o derivadas – como las fuerzas axiales –. Desafortunadamente, en ingeniería civil se diseña principalmente con elementos mecánicos, siendo estos más difíciles de obtener con bastante precisión.

Se concluye entonces que, a medida que el número de elementos finitos utilizados en la discretización aumente, su solución tenderá a la solución exacta. A esta tendencia se debe precisamente el nombre del método, ya que con un solo elemento no es suficiente para capturar el verdadero comportamiento de la estructura. Sin embargo, al aumentar el número de elementos – sin tener que llegar a infinito número de elementos – se puede decir que se ha llegado a la solución exacta del problema. Por esta razón el nombre de este procedimiento es *método de los elementos finitos*.

En este punto, es importante mencionar que existen técnicas que mejoran la solución con elementos finitos sin tener que recurrir a un gran número de elementos para resolver el problema. Estas técnicas se verán más adelante.

## Sección

### 4.3. Elemento con tres nodos

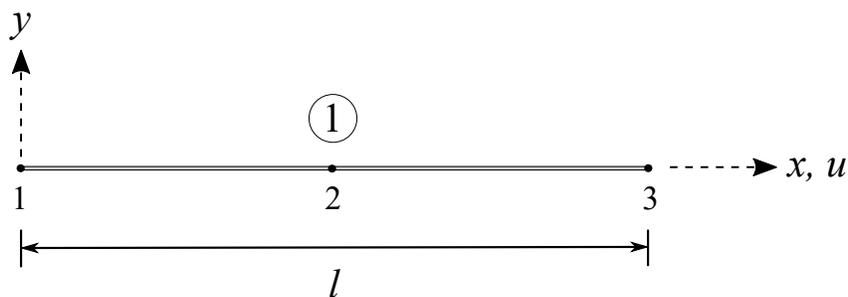


**Figura 4.12** Comparativa de fuerzas normalizadas con 10 elementos finitos

Para la discretización de la barra en estudio en un único elemento finito con tres nodos, se tiene que aproximar el campo de desplazamientos con el siguiente polinomio de segundo orden

$$u^h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (4.3.1)$$

Al igual que en la sección 4, se tienen que encontrar los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  del polinomio de segundo orden lo nos permitirá expresar la ecuación (4.3.1) mediante unas funciones de forma particularizadas para el elemento lineal de tres nodos. Su correspondiente discretización se muestra en la Fig. 4.13.



**Figura 4.13** Discretización con 1 elemento finito de 3 nodos

A medida que aumenta el grado del polinomio se vuelve más difícil encontrar

las funciones de forma, ya que se tiene que resolver un sistema de ecuaciones simultáneas cada vez más grande. Una solución sencilla a este problema consiste en utilizar los polinomios de *Lagrange*, los cuales nos permiten obtener las funciones de forma para elementos unidimensionales de manera sencilla.

En elementos finitos, la función de forma del nodo  $I$  de un elemento unidimensional se obtiene utilizando los polinomios de Lagrange mediante la siguiente expresión

$$N_I(x) = \prod_{J=1 (J \neq I)}^m \left( \frac{x - x_J}{x_I - x_J} \right) \quad (4.3.2)$$

donde  $m = n + 1$ , siendo  $n$  el orden del polinomio, ecuación (4.2.1). En general, las funciones de forma utilizadas en la discretización de elementos finitos que provienen de los polinomios de Lagrange se denominan *elementos Lagrangianos*. Hay que resaltar nuevamente que las funciones de forma del nodo  $I$  valen uno en dicho nodo y cero en el resto de los nodos del elemento.

Utilizando la ecuación (4.3.2) para el polinomio lineal (grado  $n = 1$ ), se obtienen las siguientes funciones de forma

$$N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x}{l} \quad (4.3.3)$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{l} \quad (4.3.4)$$

que coinciden con las ecuaciones (4.2.10) y (4.2.11) respectivamente. Siguiendo el mismo procedimiento para el caso de un polinomio de segundo orden, se tiene que  $m = 3$  y de la ecuación (4.3.2) se obtienen las siguientes funciones de forma

$$N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \quad (4.3.5)$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \quad (4.3.6)$$

$$N_3(x) = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \quad (4.3.7)$$

Como se puede observar, las funciones de forma del elemento de tres nodos se han complicado considerablemente con respecto al elemento de dos nodos. Una manera de mantener las funciones de forma de elementos de más de dos nodos

lo más sencillamente posible es mediante la introducción de un *sistema natural de coordenadas* también conocido como *sistema de coordenadas normalizado*, cuya variable independiente será  $\xi$ .

# Capítulo 5

## Elementos Unidimensionales Avanzados

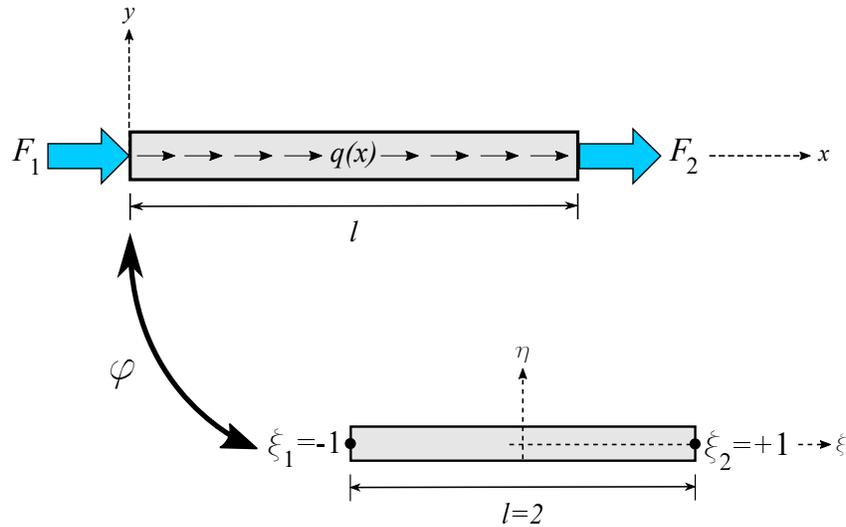
### Sección

#### 5.1. Interpolación paramétrica

Cualquier elemento unidimensional que se encuentre en el espacio tridimensional Euclideo puede ser transformado mediante una función  $\varphi$  al sistema de coordenadas normalizado  $(\xi, \eta)$ , el cual tiene la característica de que cualquier elemento en este espacio tendrá una longitud de dos unidades. Para un elemento de dos nodos, la representación de una viga en ambos espacios se aprecia en la Fig. 5.1, donde la longitud de la viga en el espacio normalizado va de  $\xi_1 = -1$  a  $\xi_2 = +1$ .

El propósito de escoger estos valores para  $\xi$  es debido a que más adelante se utilizará integración numérica. En un principio, hablar de integración numérica para elementos unidimensionales puede resultar exagerado, ya que se puede usar integración analítica para este tipo de elementos sin ningún problema. Sin embargo cuando se trabaje con elementos bidimensionales y tridimensionales, la integración analítica dejará de ser obvia y es cuando se tendrá que recurrir a integración numérica.

Dentro de los muchos métodos de integración numérica que existen se encuentra la *cuadratura de Gauss-Legendre*, que consiste en evaluar una función que tiene que ser integrada entre  $[-1,+1]$  mediante la evaluación de la función en ciertos puntos específicos, como se verá más adelante. La característica principal de este método de integración numérica es que el resultado de la integral



**Figura 5.1** Viga en ambos espacios

es igual a la integral analítica. De ahí la razón por la cual el espacio Euclideo se transforma a un espacio normalizado con límites de integración que van de  $\xi = -1$  a  $\xi = +1$ .

En el espacio normalizado, el campo de desplazamientos para el elemento unidimensional de dos nodos se escribe de la siguiente manera

$$u^h(\xi) = N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 \quad (5.1.1)$$

donde tenemos que encontrar las nuevas funciones de forma  $N_I(\xi)$ . Las funciones de forma en el espacio normalizado se encuentran utilizando los polinomios de Lagrange de la siguiente manera:

$$N_I(\xi) = \prod_{J=1 (J \neq I)}^m \left( \frac{\xi - \xi_J}{\xi_I - \xi_J} \right) \quad (5.1.2)$$

donde  $m = n + 1$ , siendo  $n$  el orden del polinomio.

De la ecuación (5.1.2) podemos encontrar el valor de las funciones de forma para el elemento unidimensional de dos nodos, donde las coordenadas de sus nodos vienen dadas para el nodo 1 por  $\xi_1 = -1$  y el nodo 2 se encuentra en  $\xi_2 = +1$ . Las funciones de forma para este caso resultan ser

$$N_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.1.3)$$

$$N_2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.1.4)$$

De la ecuación (4.2.13), sabemos que una vez discretizado el campo de los desplazamientos, el siguiente paso es encontrar su derivada respecto a  $x$ , de donde encontramos

$$\frac{du^h}{dx} = \frac{dN_1(\xi)}{dx} u_1 + \frac{dN_2(\xi)}{dx} u_2 \quad (5.1.5)$$

de donde podemos observar que el cálculo no es inmediato, ya que se tienen las funciones de forma en función de  $\xi$  y no en función de  $x$ . Entonces, para solucionar este problema podemos utilizar la regla de la cadena, de donde obtenemos

$$\frac{du^h}{dx} = \frac{du^h}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad (5.1.6)$$

Para el desarrollo de la ecuación anterior, usaremos la regla de la cadena para cada una de las funciones de forma que aparecen en la ecuación (5.1.5), quedando

$$\frac{dN_1(\xi)}{dx} = \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1 - \xi}{2} \right) \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d\xi}{dx} \quad (5.1.7)$$

$$\frac{dN_2(\xi)}{dx} = \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1 + \xi}{2} \right) \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\xi}{dx} \quad (5.1.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.1.7) y (5.1.8) en la ecuación (5.1.5), encontramos

$$\frac{du^h}{dx} = -\frac{1}{2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right) u_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right) u_2 \quad (5.1.9)$$

y claramente se puede ver en la ecuación anterior que para completar el cálculo tenemos que conocer el valor de  $\frac{d\xi}{dx}$ , es decir, tenemos que encontrar la relación existente entre  $\xi$  y  $x$ .

Para encontrar dicha relación, podemos aproximar la geometría del elemento mediante una interpolación, tal como se hizo para el campo de los desplazamientos dado por la ecuación (5.1.1). En general, si se conocen (por ejemplo, de un

levantamiento topográfico) las coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_q$  de  $q$  puntos cualquiera del elemento, se puede calcular cualquier punto intermedio de la geometría mediante interpolación. Esta interpolación puede escribirse de la forma

$$x \approx x^h = \hat{N}_1(\xi) x_1 + \hat{N}_2(\xi) x_2 + \dots + \hat{N}_q(\xi) x_q \quad (5.1.10)$$

Aquí, las funciones  $\hat{N}_I(\xi)$  se denominan *funciones de interpolación* de la geometría y tienen las mismas características que las funciones de forma de los desplazamientos, es decir, toman el valor de la unidad en el punto  $I$  y cero en el resto de los  $q - 1$  puntos.

La ecuación (5.1.10) expresa la transformación de coordenadas  $\xi \rightarrow x$  de manera que a cada punto en el espacio normalizado entre  $[-1, +1]$  le corresponde otro del espacio Euclideo comprendido de  $[x_1, x_2]$ . Una característica fundamental es que la transformación sea biunívoca.

Hasta ahora, tenemos que existen dos tipos de interpolaciones denominadas  $N_I(\xi)$  y  $\hat{N}_I(\xi)$ , de las cuales, una que se utiliza para interpolar los desplazamientos  $u^h$  y otra que se utiliza para interpolar la geometría  $x^h$ . Dependiendo del tipo de problema resolver, en ocasiones se puede requerir de polinomios de alto grado para aproximar la geometría mientras que para geometrías sencillas se puede requerir un interpolación lineal.

De esta forma, si  $q$  es mayor que el número de total de nodos del elemento  $m$ , las funciones de interpolación de la geometría  $\hat{N}_I$  serán de mayor orden que las funciones de interpolación de los desplazamientos  $N_I$ . Este tipo de formulación recibe el nombre de interpolación *superparamétrica*. Por otro lado, si  $q$  coincide con el número de nodos  $m$ , entonces la formulación recibe el nombre de interpolación *isoparamétrica*. Finalmente, en el caso de que el número de puntos de la geometría  $q$  sea menor al de los nodos  $m$ , se trata de una formulación *subparamétrica*.

Tomando como ejemplo el elemento finito de 2 nodos tenemos que el orden del polinomio es  $n = 1$ , de manera que  $m = 2$ . De esta forma, los tipos de interpolación quedarían:

$$u^h = N_1 u_1 + N_2 u_2 \rightarrow \begin{cases} x^h = \hat{N}_1 u_1 & \text{subparamétrica} \\ x^h = \hat{N}_1 u_1 + \hat{N}_2 u_2 & \text{isoparamétrica} \\ x^h = \hat{N}_1 u_1 + \hat{N}_2 u_2 + \hat{N}_3 u_3 & \text{superparamétrica} \end{cases}$$

En la práctica de los elementos finitos, es usual utilizar el mismo orden de interpolación para la geometría y los desplazamientos, es decir, se trabaja con una formulación isoparamétrica. Si además definimos a  $\hat{N}_I = N_I$ , se dice que estamos utilizando el método de Galerkin. Esta última consideración es con la que trabajaremos en el desarrollo de los elementos finitos presentados a continuación.

## Sección

### 5.2. Barra isoparamétrica de dos nodos

Mediante una formulación isoparamétrica, expresaremos tanto el campo de desplazamientos como la geometría de una barra unidimensional de dos nodos con las mismas funciones de forma. De esta manera interpolamos la geometría de la siguiente manera

$$x^h(\xi) = N_1(\xi) x_1 + N_2(\xi) x_2 \quad (5.2.1)$$

donde las expresiones de  $N_1(\xi)$  y  $N_2(\xi)$  vienen dadas por las ecuaciones (5.1.3) y (5.1.4) respectivamente. Si ahora derivamos la ecuación (5.2.1) respecto de  $\xi$  encontramos

$$\frac{dx^h}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi} x_1 + \frac{dN_2}{d\xi} x_2 = -\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 = \frac{l}{2} \quad (5.2.2)$$

Por simplicidad de notación, la ecuación anterior la escribiremos como

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{l}{2} \quad (5.2.3)$$

De la ecuación anterior podemos encontrar

$$dx = \frac{l}{2} d\xi \quad (5.2.4)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l} \quad (5.2.5)$$

Esta última ecuación es precisamente la relación buscada entre  $\xi$  y  $x$ . Sustituyendo la ecuación (5.2.5) en las ecuaciones (5.1.7) y (5.1.8) respectivamente nos permite encontrar

$$\frac{dN_1(\xi)}{dx} = -\frac{1}{2} \left( \frac{2}{l} \right) = -\frac{1}{l} \quad (5.2.6)$$

$$\frac{dN_2(\xi)}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{l} \right) = \frac{1}{l} \quad (5.2.7)$$

Si ahora sustituimos las dos ecuaciones anteriores en la ecuación (5.1.9) se deduce

$$\frac{du^h}{dx} = -\frac{1}{l} u_1 + \frac{1}{l} u_2 \quad (5.2.8)$$

La parte virtual de la ecuación anterior se encuentra que es

$$\frac{d\delta u^h}{dx} = -\frac{1}{l} \delta u_1 + \frac{1}{l} \delta u_2 \quad (5.2.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.2.8) y (5.2.9) en la parte izquierda de la igualdad de la ecuación (4.2.13) e integrando sobre los límites del espacio normalizado del elemento, se obtiene la parte correspondiente al trabajo virtual interno

$$\delta \mathcal{W}^{int} = \int_{-1}^{+1} \left( -\frac{1}{l} \delta u_1 + \frac{1}{l} \delta u_2 \right) EA \left( -\frac{1}{l} u_1 + \frac{1}{l} u_2 \right) \frac{l}{2} d\xi \quad (5.2.10)$$

Al igual que con la ecuación (4.2.17), podemos escribir en forma matricial la ecuación (5.2.10), lo que da lugar a

$$\delta \mathcal{W}^{int} = [\delta u_1 \quad \delta u_2] \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \frac{l}{2} d\xi \quad (5.2.11)$$

Utilizando las ecuaciones (4.2.20)–(4.2.22) y la definición de trabajo virtual podemos encontrar a partir de la ecuación (5.2.11) las fuerzas internas que para el caso de un elemento unidimensional de dos nodos es

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T EA \mathbf{B} \frac{l}{2} d\xi \mathbf{u} \quad (5.2.12)$$

o en forma desarrollada

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{-1}^{+1} \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} d\xi \quad (5.2.13)$$

de donde la rigidez se puede expresar ahora en el sistema de coordenadas normalizado por

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T EA \mathbf{B} \frac{l}{2} d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi \quad (5.2.14)$$

En el espacio normalizado, el campo virtual de los desplazamientos para el elemento unidimensional de dos nodos se escribe de la siguiente manera

$$\delta u^h(\xi) = N_1(\xi) \delta u_1 + N_2(\xi) \delta u_2 \quad (5.2.15)$$

por lo que el trabajo virtual externo se obtiene sustituyendo la ecuación (5.2.15) en la parte derecha de la igualdad de la ecuación (4.2.13)

$$\delta \mathcal{W}^{ext} = \int_{-1}^{+1} (N_1 \delta u_1 + N_2 \delta u_2) q \frac{l}{2} d\xi + F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 \quad (5.2.16)$$

la cual escrita en forma matricial es

$$\delta \mathcal{W}^{ext} = [\delta u_1 \quad \delta u_2] \left( \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} q \frac{l}{2} d\xi + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \right) \quad (5.2.17)$$

Sustituyendo el valor de las funciones de forma en la ecuación anterior, podemos encontrar que

$$\delta \mathcal{W}^{ext} = [\delta u_1 \quad \delta u_2] \left( \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} q \frac{l}{2} d\xi + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \right) \quad (5.2.18)$$

Utilizando las ecuaciones (4.2.26) y (4.2.27) y la definición de trabajo virtual podemos encontrar a partir de la ecuación (5.2.17) las fuerzas externas que para el caso de un elemento unidimensional de dos nodos es

$$\mathbf{f}^{ext} = \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T q \frac{l}{2} d\xi + \mathbf{F} \quad (5.2.19)$$

que en forma desarrollada equivale a

$$\mathbf{f}^{ext} = \int_{-1}^{+1} \frac{ql}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix} d\xi + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (5.2.20)$$

Se puede observar que tanto las fuerzas internas como las externas están integradas sobre el dominio del espacio normalizado, lo que en un principio no parece tener ninguna ventaja sobre la integración del espacio Euclideo real. Sin embargo, el poder integrar sobre el espacio normalizado nos permite utilizar integración numérica, la cual da resultados exactos evaluando las funciones en pocos puntos denominados *puntos de Gauss*.

La integración analítica de la formulación isoparamétrica se puede realizar únicamente para elementos unidimensionales. Sin embargo, desde aquí se suele trabajar con integración numérica ya que es la forma que se utiliza en la gran mayoría de los elementos finitos bidimensionales y tridimensionales.

## Sección

### 5.3. Integración Numérica

Existen diferentes métodos para resolver integrales de forma numérica. Uno de los más utilizados en el método de los elementos finitos es la *Cuadratura de Gauss-Legendre*. El desarrollo de este método se presenta en libros de métodos numéricos o análisis numérico. Aquí nos enfocaremos a resolver un ejemplo y explicar como es su aplicación para elementos finitos. Para ello, definamos la siguiente función

$$f(\xi) = 3\xi^5 - 4\xi^4 + 7\xi^3 - 2\xi^2 + 9\xi - 6 \quad (5.3.1)$$

Entonces, ahora integremos esa función, quedando:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} 3\xi^5 - 4\xi^4 + 7\xi^3 - 2\xi^2 + 9\xi - 6 d\xi \quad (5.3.2)$$

Hay que destacar que el método de integración de Gauss-Legendre resuelve integrales en el intervalo  $[-1, +1]$ , razón por la cual escogimos nuestro espacio normalizado con estos límites.

Con la finalidad de poder comparar los diferentes resultados después de realizar la integración numérica, resolveremos la integral en forma analítica, cuyo resultado es

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{3\xi^6}{6} - \frac{4\xi^5}{5} + \frac{7\xi^4}{4} - \frac{2\xi^3}{3} + \frac{9\xi^2}{2} - 6\xi \Big|_{-1}^{+1} \\
 &= \left[ \frac{3(1)^6}{6} - \frac{4(1)^5}{5} + \frac{7(1)^4}{4} - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{9(1)^2}{2} - 6(1) \right] - \\
 &\quad \left[ \frac{3(-1)^6}{6} - \frac{4(-1)^5}{5} + \frac{7(-1)^4}{4} - \frac{2(-1)^3}{3} + \frac{9(-1)^2}{2} - 6(-1) \right]
 \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Después de realizar las operaciones se obtiene

$$I = -14.9333333333 \tag{5.3.4}$$

El procedimiento para realizar la integración numérica consiste en realizar una sumatoria de la función a integrar evaluándola en determinados puntos (conocidos como *puntos Gauss*) y multiplicándola por unos valores que se llaman pesos. La representación matemática de dicho procedimiento es

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n_{PG}} [f(\xi_i) \times \omega_i] \tag{5.3.5}$$

donde  $n_{PG}$  es el número de veces que se repetirá la sumatoria y se conoce como número de puntos de Gauss. Estos puntos de Gauss se obtienen con un procedimiento que se desarrolla en los libros de métodos numéricos. En la tabla 5.1 se muestran los primeros valores para los puntos de Gauss y sus pesos.

Para evaluar el valor de la integral dado por la ecuación (5.3.2) pero en forma numérica, empecemos por realizar la integración con un solo punto de Gauss, es decir,  $n_{PG} = 1$ , de manera que nuestra ecuación a resolver es

Número de puntos $n_{PG}$	Posición de los puntos de Gauss $\xi_i$	Peso de los puntos de Gauss $\omega_i$
1	0	2
2	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{5}{9}$

**Tabla 5.1** Puntos básicos de la cuadratura de Gauss

$$\begin{aligned}
 I_{1PG} &= \sum_{i=1}^{n_{PG}=1} [f(\xi_i) \times \omega_i] \\
 &= [f(\xi_1) \times \omega_1] \\
 &= [f(0) \times 2] \\
 &= [(3(0)^5 - 4(0)^4 + 7(0)^3 - 2(0)^2 + 9(0) - 6) \times 2]
 \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Después de realizar las operaciones, encontramos que el valor de la integral es

$$I_{1PG} = -12.0 \tag{5.3.7}$$

Podemos ver que este valor no coincide con el valor de la integral analítica dada por la ecuación (5.3.3). Probemos entonces la integración con dos puntos de Gauss, es decir,  $n_{PG} = 2$ , de manera que la ecuación a resolver queda

$$\begin{aligned}
I_{2PG} &= \sum_{i=1}^{n_{PG}=2} [f(\xi_i) \times \omega_i] \\
&= [f(\xi_1) \times \omega_1] + [f(\xi_2) \times \omega_2] \\
&= \left[ f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times 1 \right] + \left[ f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times 1 \right] \\
&= \left[ \left( 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 - 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + 7\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 9\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 6 \right) \times 1 \right] + \tag{5.3.8} \\
&+ \left[ \left( 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + 7\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 9\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 6 \right) \times 1 \right] \\
&= -13.8468642517 - 0.37535797056
\end{aligned}$$

Al realizar las operaciones anteriores, encontramos que el valor de la integral es

$$I_{2PG} = -14.2222222222 \tag{5.3.9}$$

Este resultado tampoco coincide con el valor de la integral analítica dada por la ecuación (5.3.3). Intentemos ahora la integración con tres puntos de Gauss, es decir,  $n_{PG} = 3$ , de manera que la función a resolver es

$$\begin{aligned}
I_{3PG} &= \sum_{i=1}^{n_{PG}=3} [f(\xi_i) \times \omega_i] \\
&= [f(\xi_1) \times \omega_1] + [f(\xi_2) \times \omega_2] + [f(\xi_3) \times \omega_3] \\
&= \left[ f(0) \times \frac{8}{9} \right] + \left[ f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) \times \frac{5}{9} \right] + \left[ f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) \times \frac{5}{9} \right] \\
&= \left[ (3(0)^5 - 4(0)^4 + 7(0)^3 - 2(0)^2 + 9(0) - 6) \times \frac{8}{9} \right] \\
&\quad + \left[ \left( 3\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^5 - 4\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^4 + 7\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^3 - 2\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 9\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) - 6 \right) \times \frac{5}{9} \right] + \\
&\quad + \left[ \left( 3\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^5 - 4\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^4 + 7\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^3 - 2\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 9\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) - 6 \right) \times \frac{5}{9} \right] \\
&= -5.3333333333 - 10.945133576 + 1.34513357599
\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

El valor de la integral anterior es

$$I_{3PG} = -14.9333333333 \tag{5.3.11}$$

Podemos ver que este resultado coincide con la solución analítica. Es decir, se necesitan utilizar 3 puntos de Gauss para llegar, numéricamente, a la solución exacta. El principal problema es saber cuantos puntos de Gauss se deben utilizar para llegar a la solución exacta sin necesidad de hacer varios intentos. La respuesta está en la siguiente ecuación

$$n_{PG} \geq \frac{n+1}{2} \tag{5.3.12}$$

donde el número de puntos de Gauss necesarios para resolver de manera exacta nuestra integral es función del grado del polinomio que estamos resolviendo  $n$ . Para nuestro ejemplo, tenemos que el grado del polinomio es  $n = 5$ , entonces el número de puntos de Gauss que necesitamos para resolver nuestra integral es

$$n_{PG} \geq \frac{5 + 1}{2} \geq 3 \quad (5.3.13)$$

es decir, necesitamos al menos 3 puntos de Gauss para que nuestra integración sea exacta. Si decidimos utilizar 4 puntos de Gauss nuestra integración será también exacta, solamente que estaremos trabajando más de lo necesario para llegar a la solución.

En la ecuación (5.3.12) hay que resaltar que existe un el símbolo de  $\geq$ , esto significa que cuando en un ejemplo nos de una solución de  $n_{PG} = 2.5$  tendremos que redondear al siguiente valor entero, ya que el número de puntos de Gauss es entero y además tiene que ser mayor o igual. De esta manera, en este caso si obtenemos  $n_{PG} = 2.5$  tendremos que tomar  $n_{PG} = 3$ .

### 5.3.1. Integración Numérica de Elementos de Dos Nodos

Ya que hemos visto como se realiza la integración numérica de una función en el intervalo entre  $[-1, +1]$ , aplicaremos este conocimiento al método de los elementos finitos.

Sabemos que el elemento finito de dos nodos eestá desarrollado en base a un polinomio de grado  $n = 1$ . Sin embargo, las ecuaciones necesarias en el trabajo virtual interno  $\delta W^{int}$  utilizan la derivada de este polinomio, por lo que la ecuación a integrar resulta ser de grado  $n = 0$ . De esta forma, el número de puntos de Gauss necesarios para integrar nuestra función es

$$n_{PG} \geq \frac{0 + 1}{2} \geq \frac{1}{2} \quad (5.3.14)$$

Ya que no existen 0.5 puntos de Gauss, el número entero mayor inmediato es uno, por lo que el número de puntos de Gauss para nuestro problema resulta ser  $n_{PG} = 1$ . Es decir, para resolver la integral dada por la ecuación (5.2.13), tenemos que evaluar la función en un único punto de Gauss por lo que  $\xi_1 = 0$  y el peso  $\omega_1 = 2$ , de donde obtenemos

$$\mathbf{f}^{int} = (f(0)) \times (2) = \left( \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right) \times (2) \quad (5.3.15)$$

Podemos observar que nuestra función no depende de  $\xi$ , de manera que tenemos que evaluar puras constantes y multiplicarlas por 2. Entonces se obtiene que

$$\mathbf{f}^{int} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.3.16)$$

Por otro lado, la integración numérica de la matriz de rigidez dada por la ecuación (5.2.14) da como resultado

$$\mathbf{K} = (f(0)) \times (2) = \left( \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \times (2) = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.17)$$

Finalmente, la integración de las fuerzas externas es diferente, ya que la función a evaluar sí depende de  $\xi$ . Entonces, podemos ver de la ecuación (5.2.20) que

$$f(\xi) = \frac{ql}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix} \quad (5.3.18)$$

de donde el polinomio a evaluar es de grado  $n = 1$ . Entonces, el número de puntos de Gauss  $n_{PG}$  para realizar la integral exacta es

$$n_{PG} \geq \frac{1+1}{2} \geq 1 \quad (5.3.19)$$

Entonces, usando un punto de Gauss para integrar numéricamente la ecuación (5.2.20) da como resultado

$$\mathbf{f}^{ext} = f(0) \times (2) = \left( \frac{ql}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - 0) \\ \frac{1}{2}(1 + 0) \end{bmatrix} \right) \times (2) = \frac{ql}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.20)$$

A la expresión anterior agreguemos las cargas puntuales que no estaban dentro de la integral, de manera que las fuerzas externas del elemento de dos nodos son

$$\mathbf{f}^{ext} = \begin{bmatrix} \frac{ql}{2} + F_1 \\ \frac{ql}{2} + F_2 \end{bmatrix} \quad (5.3.21)$$

Finalmente, el sistema a resolver para el caso elástico lineal con elementos finitos de dos nodos es:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} \quad (5.3.22)$$

y resulta ser el mismo sistema de ecuaciones que se había obtenido cuando no se usó el sistema normalizado.

## Sección

### 5.4. Barra isoparamétrica de tres nodos

Comencemos el estudio del elemento finito unidimensional de tres nodos, el cual se representa en la Fig. 5.2. Como lo hicimos con el elemento de dos nodos, el elemento de tres nodos también se trabajará en el espacio normalizado con una formulación isoparamétrica.

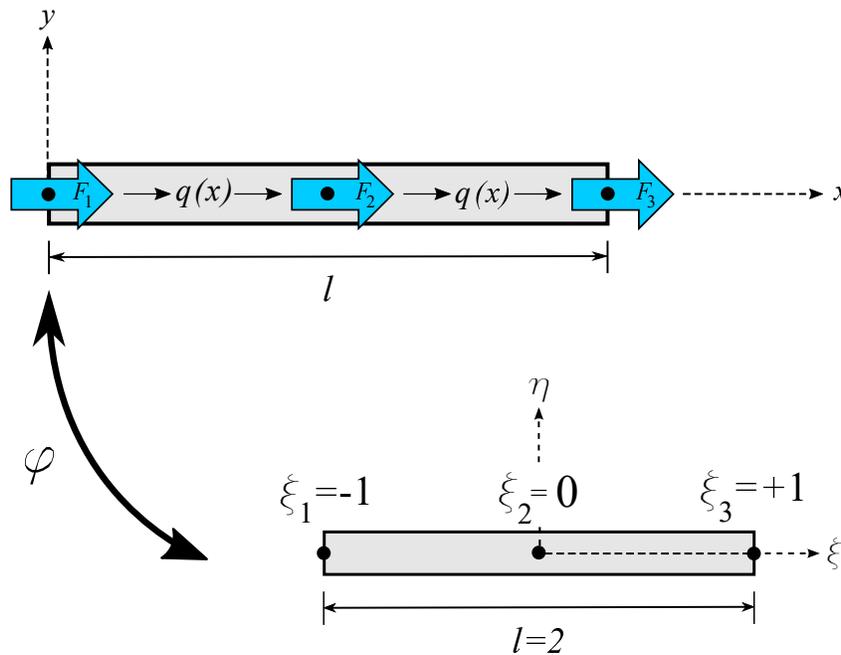
Hay que recordar que estamos desarrollando una función para los desplazamientos  $u^h$  y otra para los desplazamientos virtuales  $\delta u^h$  tales que se puedan derivar y sustituir en el principio del trabajo virtual. Recordando que el trabajo virtual interno es

$$\delta W^{int} = \int_l \frac{\partial \delta u^h}{\partial x} EA \frac{\partial u^h}{\partial x} dx \quad (5.4.1)$$

el campo de los desplazamientos que utilizaremos se expresa de la siguiente manera

$$u^h(\xi) = N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 + N_3(\xi) u_3 \quad (5.4.2)$$

donde el cálculo de las funciones de forma se realiza mediante los polinomios de Lagrange dados por la ecuación (5.1.2). Para este elemento, el grado del



**Figura 5.2** Elemento de 3 nodos

polinomio es  $n = 2$ , de manera que  $m = n + 1 = 2 + 1 = 3$ . Con estos datos, para  $I = 1$ , tenemos

$$N_1(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \right) \left( \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} \right) \quad (5.4.3)$$

donde no se ha utilizado el valor de  $J = 1$  ya que  $I \neq J$ . Además, recordando que  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 0$  y  $\xi_3 = +1$ , a partir de la ecuación anterior se obtiene

$$N_1(\xi) = \left( \frac{\xi - 0}{-1 - 0} \right) \left( \frac{\xi - 1}{-1 - 1} \right) \quad (5.4.4)$$

y

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad (5.4.5)$$

Ahora, para la segunda función de forma,  $I = 2$ , tenemos

$$N_2(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \right) \left( \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \right) \quad (5.4.6)$$

donde no se ha utilizado el valor de  $J = 2$  ya que  $I \neq J$ . Sustituyendo los valores conocidos en la ecuación anterior se obtiene

$$N_2(\xi) = \left( \frac{\xi - (-1)}{0 - (-1)} \right) \left( \frac{\xi - 1}{0 - 1} \right) \quad (5.4.7)$$

y

$$N_2(\xi) = (1 + \xi)(1 - \xi) \quad (5.4.8)$$

Finalmente, para la tercer función de forma,  $I = 3$ , tenemos

$$N_3(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} \right) \left( \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} \right) \quad (5.4.9)$$

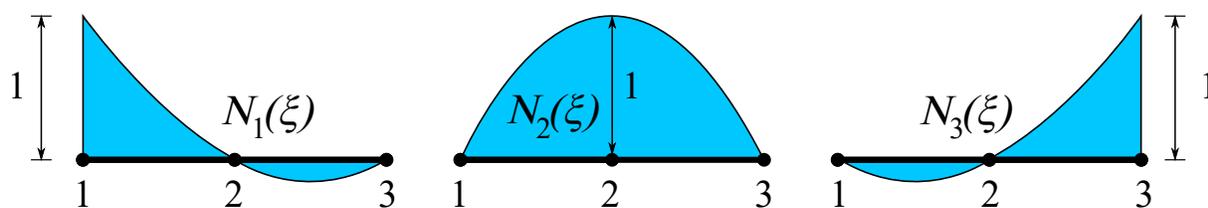
donde no se ha utilizado el valor de  $J = 3$  ya que  $I \neq J$ . Sustituyendo los valores conocidos en la ecuación anterior se obtiene

$$N_3(\xi) = \left( \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} \right) \left( \frac{\xi - 0}{1 - 0} \right) \quad (5.4.10)$$

y

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \quad (5.4.11)$$

La gráfica de las funciones de forma anteriores se presenta en la Fig. 5.3. Se puede ver claramente que cada función cumple con la condición de valer uno en su nodo y cero fuera de su nodo. También se puede observar como la traza de las funciones es de segundo orden, dejando de ser líneas rectas como en el caso del elemento unidimensional de 2 nodos.



**Figura 5.3** Gráfica de funciones de forma

Una vez obtenidas las funciones de forma, la aproximación del campo de los desplazamientos se escribe como

$$u^h(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) u_1 + (1 + \xi)(1 - \xi) u_2 + \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) u_3 \quad (5.4.12)$$

El mismo procedimiento se puede realizar para encontrar la aproximación del campo de los desplazamientos virtuales, de donde se obtiene

$$\delta u^h(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \delta u_1 + (1 + \xi)(1 - \xi) \delta u_2 + \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \delta u_3 \quad (5.4.13)$$

Los resultados dados por las ecuaciones (5.4.12) y (5.4.13) nos sirven para evaluar los términos que conforman el trabajo virtual interno. En particular, tenemos que

$$\frac{du^h}{dx} = \frac{du^h}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \quad (5.4.14)$$

donde hemos utilizado la regla de la cadena, ya que nuestro campo de desplazamientos  $u^h$  es función de  $\xi$  y no de  $x$ . El problema con la ecuación (5.4.14) es que no conocemos el valor de  $\frac{d\xi}{dx}$  para lo cual realizaremos la aproximación de la geometría  $x^h$  utilizando una interpolación isoparamétrica. De esta manera, escribimos

$$x^h(\xi) = N_1(\xi) x_1 + N_2(\xi) x_2 + N_3(\xi) x_3 \quad (5.4.15)$$

donde al sustituir el valor de las funciones de forma se encuentra que

$$x^h(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) x_1 + (1 + \xi)(1 - \xi) x_2 + \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) x_3 \quad (5.4.16)$$

Ahora, simplemente procedamos a derivar  $x^h$  con respecto a  $\xi$ , de donde obtenemos

$$\frac{dx^h}{d\xi} = \left( \xi - \frac{1}{2} \right) x_1 - 2\xi x_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) x_3 \quad (5.4.17)$$

En el caso particular que ubiquemos a  $x_2$  en el punto medio entre los extremos  $x_1$  y  $x_3$ , es decir,  $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$  obtenemos

$$\frac{dx^h}{d\xi} = \left( \xi - \frac{1}{2} \right) x_1 - \xi x_1 - \xi x_3 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) x_3 = \frac{1}{2} (x_3 - x_1) \quad (5.4.18)$$

Pero la longitud del elemento  $l$  es la distancia entre  $x_3$  y  $x_1$ . Si dejamos de escribir el índice  $h$  en la ecuación anterior, podemos escribir

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{l}{2} \quad (5.4.19)$$

Despejando de la ecuación anterior, encontramos

$$dx = \frac{l}{2} d\xi \quad (5.4.20)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l} \quad (5.4.21)$$

Esta última ecuación (5.4.21) es la relación que estábamos buscando para sustituir en la ecuación (5.4.14), de manera que obtenemos

$$\frac{du^h}{dx} = \frac{du^h}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{du^h}{d\xi} \cdot \frac{2}{l} \quad (5.4.22)$$

De la ecuación (5.4.12) podemos encontrar la siguiente derivada

$$\frac{du^h}{d\xi} = \left( \xi - \frac{1}{2} \right) u_1 - 2\xi u_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) u_3 \quad (5.4.23)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (5.4.22) se obtiene

$$\frac{du^h}{dx} = \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{l} u_1 - 2\xi \cdot \frac{2}{l} u_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{l} u_3 \quad (5.4.24)$$

De manera similar, se obtiene

$$\frac{d\delta u^h}{dx} = \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{l} \delta u_1 - 2\xi \cdot \frac{2}{l} \delta u_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{l} \delta u_3 \quad (5.4.25)$$

Con las ecuaciones obtenidas se puede encontrar el valor del trabajo virtual interno. Entonces, sustituyendo las ecuaciones (5.4.20), (5.4.24) y (5.4.25) en la ecuación (5.4.1) y teniendo cuidado de cambiar los límites de integración por aquellos del elemento normalizado se obtiene

$$\delta W^{int} = \int_{-1}^{+1} \left[ \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{l} \delta u_1 - 2\xi \cdot \frac{2}{l} \delta u_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{l} \delta u_3 \right] \times EA \times \left[ \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{l} u_1 - 2\xi \cdot \frac{2}{l} u_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{l} u_3 \right] \times \frac{l}{2} d\xi \quad (5.4.26)$$

Escribiendo la ecuación anterior en forma matricial se obtiene

$$\delta W^{int} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \int_{-1}^{+1} \frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} \xi - \frac{1}{2} \\ -2\xi \\ \xi + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \left[ \xi - \frac{1}{2}, -2\xi, \xi + \frac{1}{2} \right] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} d\xi \quad (5.4.27)$$

Realizando el producto de la matriz columna por la matriz fila que son función de  $\xi$ , se obtiene

$$\delta W^{int} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \times \int_{-1}^{+1} \frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} \left( \xi - \frac{1}{2} \right)^2 & -2\xi \left( \xi - \frac{1}{2} \right) & \left( \xi^2 - \frac{1}{4} \right) \\ -2\xi \left( \xi - \frac{1}{2} \right) & 4\xi^2 & -2\xi \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \\ \left( \xi^2 - \frac{1}{4} \right) & -2\xi \left( \xi + \frac{1}{2} \right) & \left( \xi + \frac{1}{2} \right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} d\xi \quad (5.4.28)$$

Si definimos la siguiente función de  $f(\xi)$  con los términos que están dentro de la integral, entonces

$$f(\xi) = \frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 & -2\xi \left(\xi - \frac{1}{2}\right) & \left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right) \\ -2\xi \left(\xi - \frac{1}{2}\right) & 4\xi^2 & -2\xi \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \\ \left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right) & -2\xi \left(\xi + \frac{1}{2}\right) & \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (5.4.29)$$

de esta manera, el trabajo virtual interno se escribe en forma simplificada de la siguiente manera

$$\delta W^{int} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \quad (5.4.30)$$

la cual puede ser integrada mediante la cuadratura de Gauss-Legendre, de manera que podemos escribir

$$\delta W^{int} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \sum_{i=1}^{n_{PG}} [f(\xi_i) \cdot \omega_i] \quad (5.4.31)$$

Para saber cuantos puntos de Gauss necesitamos para obtener el mismo resultado que la integral analítica, vemos que el grado máximo del polinomio en  $f(\xi)$  dado por la ecuación (5.4.29) es de segundo grado, de manera que  $n = 2$ . Entonces, usando la ecuación (5.3.12) obtenemos

$$n_{PG} \geq \frac{n+1}{2} \geq \frac{2+1}{2} \geq \frac{3}{2} \geq 1.5 \quad (5.4.32)$$

y como no existen 1.5 puntos de Gauss, entonces en siguiente valor entero mayor resulta en el número de puntos de Gauss a utilizar, que en este caso es  $n_{PG} = 2$ . Entonces la integración numérica a realizar es

$$\delta W^{int} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \sum_{i=1}^2 [f(\xi_i) \cdot \omega_i] \quad (5.4.33)$$

donde de acuerdo con la Tabla 5.1 para dos puntos de Gauss  $\xi_i = \pm\sqrt{3}/3$  y  $\omega_i = 1$ . Sustituyendo estos valores en la integral de la ecuación (5.4.33) nos queda

$$\delta W^{int} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \left\{ \left[ f \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) (1) \right] + \left[ f \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) (1) \right] \right\} \quad (5.4.34)$$

El resultado de realizar las operaciones anteriores da como resultado

$$\delta W^{int} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \frac{EA}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (5.4.35)$$

Por otro lado, trabajaremos ahora con el trabajo virtual externo, el cual recordamos que es

$$\delta W^{ext} = \int_l \delta u^h q dx + F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 + F_3 \delta u_3 \quad (5.4.36)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.4.13) y (5.4.20) en la ecuación anterior y cambiando los límites de integración obtenemos

$$\begin{aligned} \delta W^{ext} = \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \delta u_1 + (1 + \xi)(1 - \xi) \delta u_2 + \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \delta u_3 \right] \frac{ql}{2} d\xi + \\ + F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 + F_3 \delta u_3 \end{aligned} \quad (5.4.37)$$

La forma matricial de escribir la ecuación anterior es

$$\delta W^{ext} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{ql}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \\ (1 + \xi)(1 - \xi) \\ \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \end{bmatrix} d\xi + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4.38)$$

Si definimos como  $g(\xi)$  a los términos dentro de la integral anterior, se encuentra

$$g(\xi) = \frac{ql}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \\ (1 + \xi)(1 - \xi) \\ \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \end{bmatrix} \quad (5.4.39)$$

entonces podemos expresar el trabajo virtual externo de la ecuación (5.4.38) como

$$\delta W^{ext} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \left\{ \int_{-1}^{+1} g(\xi) d\xi + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4.40)$$

La función  $g(\xi)$  contiene polinomios de segundo orden en  $\xi$  de manera que el número de puntos de Gauss para realizar la integración numérica es nuevamente  $n_{PG} = 2$ . El planteamiento para resolver numéricamente dicha integral se expresa a continuación en el trabajo virtual externo

$$\delta W^{ext} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \left\{ \sum_{i=1}^{n_{PG}=2} [g(\xi_i) \cdot \omega_i] + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4.41)$$

El resultado después de integrar numéricamente la ecuación (5.4.40) es

$$\delta W^{ext} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \left\{ \frac{ql}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4.42)$$

Ahora, sabiendo que  $\delta W^{int} = \delta W^{ext}$  se substituyen respectivamente las ecuaciones (5.4.35) y (5.4.42), llegando a

$$[\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \frac{EA}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3] \left\{ \frac{ql}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4.43)$$

Ya que trabajo es igual a fuerza por distancia y viendo que tenemos un vector de desplazamientos virtuales, entonces estamos hablando de trabajo virtual. Si los desplazamientos virtuales son arbitrarios entonces los podemos eliminar en ambos lados de la ecuación anterior, de donde llegamos a la igualdad de que  $\mathbf{f}^{int} = \mathbf{f}^{ext}$ , que en forma desarrollada es

$$\underbrace{\frac{EA}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^{int}} = \underbrace{\frac{ql}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^{ext}} \quad (5.4.44)$$

En el caso particular que se esté buscando la igualdad de las fuerzas  $\mathbf{f}^{int} = \mathbf{f}^{ext}$  de una estructura mediante el método de Newton-Raphson, la matriz de rigidez viene dada por

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{EA}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (5.4.45)$$

y la solución del sistema a resolver es

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} \quad (5.4.46)$$

siendo

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (5.4.47)$$

el campo de los desplazamientos para el elemento finito de tres nodos. En el caso de estructuras que trabajen en el rango no-lineal, el proceso general es el que se explicó en el capítulo 4.

### 5.4.1. Resultados Finales en Espacio Real

Una vez que se resuelve el sistema de ecuaciones dado por la ecuación (5.4.46), se encuentra el campo de los desplazamiento  $\mathbf{u}$  que para el elemento finito de tres nodos está compuesto por  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ . Con los datos anteriores, el siguiente paso es encontrar el campo de las deformaciones, el cual viene dado por la ecuación (5.4.24), la cual analizaremos a continuación

$$\varepsilon^h = \varepsilon^h(\xi) = \frac{du^h}{dx} = \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{l} u_1 - \frac{4\xi}{l} u_2 + \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{l} u_3 \quad (5.4.48)$$

A diferencia del elemento isoparamétrico de dos nodos, en el cual el campo de las deformaciones era constante, aquí podemos ver que el campo de las deformaciones para el elemento isoparamétrico de tres nodos resulta ser un polinomio de primer orden función de  $\xi$ . Esto significa que las deformaciones en el elemento tienen una variación lineal y aunque conocemos los valores de los desplazamientos en los nodos  $(u_1, u_2, u_3)$ , aún nos falta saber que valor tendrá  $\xi$  para poder calcular la deformación.

Ya que pretendemos calcular la deformación en el elemento de tres nodos y sabemos que la deformación tiene una variación lineal, entonces conociendo dos puntos de la deformación podemos trazar una línea recta y encontrar la deformación a lo largo del elemento. Lógicamente podemos deducir que estos puntos corresponden a los nodos extremos del elemento, siendo que el valor de  $\xi$  en los nodos extremos son  $\pm 1$ . Entonces basta con evaluar la deformación en  $\xi = -1$  para el primer punto y en  $\xi = +1$  para el segundo punto.

Sin embargo, hacer una evaluación en  $\xi = \pm 1$  no siempre es correcto en términos generales para elementos finitos, ya que cuando las funciones tienen una variación de segundo o tercer orden, la evaluación de las deformaciones en los extremos da resultados incorrectos. Entonces, recordando que la cuadratura de Gauss resulta en el valor correcto de la función en los puntos de Gauss seleccionados para la integración, la mejor opción para evaluar las deformaciones es en los mismos puntos de Gauss que se utilizaron para realizar la integración numérica del trabajo virtual interno y externo. Ya que en este caso se utilizaron dos puntos de Gauss resulta que los puntos óptimos para realizar la evaluación de la deformación es en  $\xi = \pm\sqrt{3}/3$ .

Lo anterior significa que se encontrará una primer deformación en  $\xi = -\sqrt{3}/3$  y una segunda deformación en  $\xi = +\sqrt{3}/3$ . Conocidos ambos puntos y conociendo que la variación de la función de la deformación es lineal, simplemente se trazará una línea recta entre ambos nodos y se habrá obtenido la deformación en la mayor parte del elemento.

Hay que resaltar que el método anterior para calcular la deformación a lo largo del elemento no está contemplando dos partes del elemento de tres nodos. La primera que va desde  $\xi = -1$  a  $\xi = -\sqrt{3}/3$  y la segunda que va desde  $\xi = +\sqrt{3}/3$  a  $\xi = +1$ . Sin embargo, la obtención de estas partes se verá más adelante.

Por ahora continuemos con el cálculo de los esfuerzos, los cuales se pueden obtener fácilmente una vez conocido el campo de las deformaciones y el módulo de elasticidad  $E$  del material en estudio. La ecuación para encontrar los esfuerzos resulta ser

$$\sigma^h = \sigma^h(\xi) = E \varepsilon^h = \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2E}{l} u_1 - \frac{4E\xi}{l} u_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2E}{l} u_3 \quad (5.4.49)$$

que como podemos ver es una función de primer orden en  $\xi$  nuevamente. Es decir, la variación del campo de los esfuerzos también es lineal y necesitamos nuevamente de dos puntos en  $\xi$  para trazar una línea recta entre ellos. Estos valores corresponden a  $\xi = \pm\sqrt{3}/3$ . La obtención de las deformaciones en estos puntos de Gauss se extrapolará a los nodos extremos como se explicará más adelante.

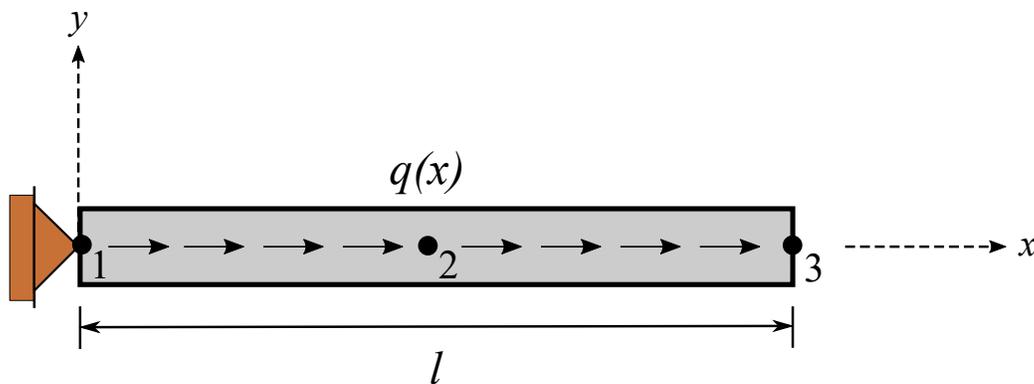
Finalmente, la obtención de las fuerzas en el elemento se obtiene a partir de los esfuerzos y la sección transversal de elemento  $A$ . Así, la ecuación para la obtención de las fuerzas es

$$F^h = F^h(\xi) = A \sigma^h = \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2EA}{l} u_1 - \frac{4EA\xi}{l} u_2 + \left( \xi + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2EA}{l} u_3 \quad (5.4.50)$$

que nuevamente se evalúa en los puntos de Gauss  $\xi = \pm\sqrt{3}/3$ . Lo anterior, se puede comprender más fácilmente en el siguiente ejemplo, cuyos datos se muestran nuevamente en la tabla 5.2. En la Fig. 5.4 se muestra el apoyo, la carga y los nodos en el elemento, el cual resolveremos usando un solo elemento finito de tres nodos.

**Tabla 5.2** Propiedades geométricas, del material y cargas

$l$	[cm]	300.0
$A$	[cm <sup>2</sup> ]	800.0
$E$	[kg/cm <sup>2</sup> ]	$2.4 \times 10^5$
$P$	[kg]	0.0
$q$	[kg/cm]	600.0



**Figura 5.4** Ejemplo con elemento de tres nodos

### Ejemplo 5.1

La estructura discretizada con 1 elemento finito de 3 nodos para hacer la comparación se puede apreciar en la Fig. 5.4. En este caso, la solución viene dada por la ecuación (5.4.46), que depende de una matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , un vector de desplazamiento  $\mathbf{u}^h$  y un vector de fuerzas externas  $\mathbf{f}^{ext}$ .

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  del elemento finito se obtiene directamente de la

ecuación (5.4.45), dando lugar a

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} = \frac{(2.4 \times 10^5)(800.0)}{(3)(300.0)} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = 2.133 \times 10^5 \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

El vector de las fuerzas externas se calcula usando la parte derecha de la igualdad de la ecuación (5.4.44), donde se tiene que no existen fuerzas puntuales ( $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ) pero sí existe una reacción  $R$  en el apoyo que se toma como una fuerza puntual. Entonces se obtiene

$$\mathbf{f}^{ext} = \begin{bmatrix} \frac{ql}{6} + R \\ \frac{4ql}{6} \\ \frac{ql}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(600.0)(300.0)}{6} + R \\ \frac{(4)(600.0)(300.0)}{6} \\ \frac{(600.0)(300.0)}{6} \end{bmatrix} = 3.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El planteamiento para la solución de este problema por el método de los elementos finitos es

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^{ext}$$

resultando

$$2.133 \times 10^5 \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 3.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$2.133 \times 10^5 \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \times 10^4 + R \\ 1.2 \times 10^5 \\ 3.0 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

En la Fig. 5.4 se aprecia que existe un apoyo en el nodo 1, por lo que existe una condición de contorno de tipo Dirichlet, es decir, una reacción, de tal forma que el desplazamiento del nodo 1 es conocido, y vale  $u_1 = 0$ .

Para solucionar adecuadamente el sistema anterior independientemente de si el valor en el apoyo es cero o cuenta con algún valor prescrito diferente de cero, separamos los valores en la matriz de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix}$$

El objetivo de la separación anterior es poner en un apartado los grados de libertad conocidos y en otro apartado los grados de libertad desconocidos. De esta manera, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} K_{aa} \cdot u_a + K_{ab} \cdot u_b &= f_a \\ K_{ba} \cdot u_a + K_{bb} \cdot u_b &= f_b \end{aligned}$$

Partiendo del hecho de que todas las rigideces son conocidas, en la primera ecuación tenemos como incógnita el vector de los desplazamientos  $u_b$  así como el valor de la reacción que se encuentra en  $f_a$ . Por otro lado, en la segunda ecuación se tiene como incógnita en vector de los desplazamientos  $u_b$ . Entonces, lo primero que tenemos que hacer es encontrar el vector de los desplazamientos  $u_b$  de la segunda ecuación, de donde tenemos que resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$K_{bb} \cdot u_b = f_b - K_{ba} \cdot u_a$$

ya que  $u_a$  es conocido. Una vez encontrado el vector de los desplazamientos  $u_b$ , se procede a encontrar las reacciones de la primera ecuación mediante:

$$f_a = K_{aa} \cdot u_a + K_{ab} \cdot u_b$$

En el caso de que los desplazamientos prescritos en los nodos sean igual a cero, se obtienen las siguientes ecuaciones simplificadas

$$\begin{aligned} K_{bb} \cdot u_b &= f_b \\ f_a &= K_{ab} \cdot u_b \end{aligned}$$

La solución al sistema anterior para un desplazamiento conocido  $u_1 = 0$  consiste en resolver el sistema de ecuaciones  $K_{bb} \cdot u_b = f_b$ , quedando

$$2.133 \times 10^5 \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \times 10^5 \\ 3.0 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

El resultado obtenido es

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10546785 \\ 0.140625 \end{bmatrix}$$

De esta forma, el campo de los desplazamientos utilizando 1 elemento finito de 3 nodos es

$$\mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.10546875 \\ 0.140625 \end{bmatrix} [cm] \quad (5.4.51)$$

El valor de la reacción se obtiene con la ecuación  $f_a = K_{ab} \cdot u_b$ , que sustituyendo se obtiene

$$\begin{bmatrix} 3.0 \times 10^4 + R \end{bmatrix} = 2.133 \times 10^5 \begin{bmatrix} -8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 = 0.10546875 \\ u_3 = 0.140625 \end{bmatrix}$$

Despejando, se encuentra que

$$R = (2.133 \times 10^5)(-0.703125) - 3.0 \times 10^4$$

$$R = -1.5 \times 10^5 - 3.0 \times 10^4$$

$$R = -1.8 \times 10^5 \text{ kg}$$

La solución exacta para la viga de la estructura mostrada en la Fig. 5.4, se encuentra utilizando la ecuación (4.2.46). Para el nodo 1 tenemos que  $x_1 = 0$ , de manera que

$$u_1 = u(x_1) = u(0) = 0.0 \text{ cm}$$

mientras que para el nodo 2 se encuentra que  $x_2 = l/2 = 150$ , lo que resulta en

$$u_2 = u(x_2) = u(150) = \frac{1}{EA} \left[ -\frac{q(x_2)^2}{2} + (0 + ql)x_2 \right] = \frac{-q(x_2)^2}{2EA} + \frac{ql(x_2)}{EA}$$

$$u_2 = \frac{-q(x_2)^2 + 2ql(x_2)}{2EA}$$

Sustituyendo valores se obtiene

$$u_2 = \frac{(-600.0)(150.0)^2 + (2)(600.0)(300.0)(150.0)}{2(2.4 \times 10^5)(800.0)} = 0.10546875 \text{ cm}$$

Finalmente, el nodo 3 tiene las coordenadas  $x_3 = l = 300$ , lo que resulta en

$$u_3 = u(x_3) = u(300) = \frac{1}{EA} \left[ -\frac{q(x_3)^2}{2} + (0 + ql)x_3 \right] = \frac{-q(x_3)^2}{2EA} + \frac{ql(x_3)}{EA}$$

$$u_3 = \frac{-q(x_3)^2 + 2ql(x_3)}{2EA}$$

Sustituyendo valores se obtiene

$$u_3 = \frac{(-600.0)(300.0)^2 + (2)(600.0)(300.0)(300.0)}{2(2.4 \times 10^5)(800.0)} = 0.140625 \text{ cm}$$

La solución exacta al problema anterior es

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.10546875 \\ 0.140625 \end{bmatrix} \text{ [cm]} \quad (5.4.52)$$

Nuevamente podemos ver que ambas soluciones coinciden.

La variación de los resultados por elementos finitos para el campo de los desplazamientos, expuestos en la ecuación (5.4.12), es de segundo orden, la misma que la variación de la solución exacta para el mismo campo de los desplazamientos, vista en la ecuación (4.2.46). Es decir, la solución para elementos estructurales con una carga axial uniformemente distribuida será la misma con un elemento finito de tres nodos que la solución exacta.

El siguiente paso será el cálculo de las deformaciones, luego seguirá el cálculo de los esfuerzos y por último las fuerzas axiales sobre el elemento. Ya que el punto de comparación serán los elementos mecánicos, evaluaremos directamente las fuerzas axiales.

A partir de la ecuación (5.4.50) podemos encontrar directamente el valor de las fuerzas axiales en los puntos de Gauss, tomando los valores ya conocidos para  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ . La fuerza axial en el primer punto de Gauss es

$$\begin{aligned}
f_{PG_1}^h(\xi) &= f_{PG_1}^h\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\
&= \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \frac{2EA}{l} u_1 - \frac{4EA\xi}{l} u_2 + \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \frac{2EA}{l} u_3 \\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) \frac{2(2.4 \times 10^5)(800)}{300} (0) - \\
&\quad \frac{4(2.4 \times 10^5)(800) \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{300} (0.10546875) + \\
&\quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right) \frac{2(2.4 \times 10^5)(800)}{300} (0.140625) \\
&= 1.4196 \times 10^5 \text{ kg}
\end{aligned} \tag{5.4.53}$$

Finalmente, para el segundo punto de Gauss del elemento tenemos que su fuerza axial vale

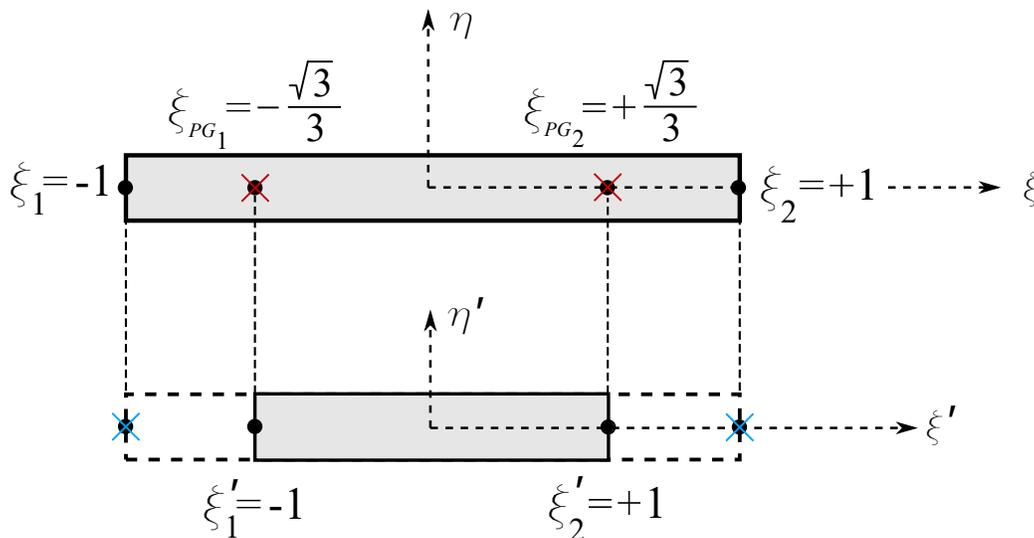
$$\begin{aligned}
f_{PG_2}^h(\xi) &= f_{PG_2}^h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\
&= \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \frac{2EA}{l} u_1 - \frac{4EA\xi}{l} u_2 + \left(\xi + \frac{1}{2}\right) \frac{2EA}{l} u_3 \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) \frac{2(2.4 \times 10^5)(800)}{300} (0) - \\
&\quad \frac{4(2.4 \times 10^5)(800) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{300} (0.10546875) + \\
&\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right) \frac{2(2.4 \times 10^5)(800)}{300} (0.140625) \\
&= 3.8038 \times 10^4 \text{ kg}
\end{aligned} \tag{5.4.54}$$

Hay que recordar que las fuerzas axiales en el elemento tiene una variación lineal para este elemento finito de tres nodos.

Ya que nos interesa las fuerzas axiales en los nodos, lo siguiente que tenemos que hacer es extrapolar los valores encontrados en los puntos de Gauss a los nodos, como se verá a continuación.

### 5.4.2. Extrapolación de resultados

Para poder realizar la extrapolación de los resultados de los puntos de Gauss a los nodos extremos del elemento de tres nodos, comencemos con definir un nuevo espacio normalizado  $\xi'$ . Este nuevo espacio tiene la característica que también va de  $\xi' = -1$  a  $\xi' = +1$ , pero estos valores coinciden con la posición de los punto de Gauss en el espacio normalizado  $\xi$ , como se aprecia en la Fig. 5.5.



**Figura 5.5** Espacio Normalizado para Extrapolación

Como dato, tenemos que se necesitan extrapolar son las deformaciones  $\varepsilon^h$ , los esfuerzos  $\sigma^h$  y las fuerzas  $f^h$ , las cuales son funciones lineales y tienen valores conocidos en los puntos de Gauss (marcados con cruces rojas en la Fig. 5.5). Los valores en los puntos de Gauss en el espacio normalizado  $\xi$  coinciden con los valores extremos del nuevo espacio normalizado  $\xi' = \pm 1$ . Ahora, queremos que

los valores extremos del nuevo espacio normalizado pasen a los que corresponden cuando  $\xi = \pm 1$ , que serían valores en las cruces azules. Para trabajar en el espacio  $\xi'$ , definamos entonces el siguiente campo de desplazamientos

$$u^h = u^h(\varepsilon') = N_1(\varepsilon') u'_1 + N_2(\varepsilon') u'_2 = N'_1 u'_1 + N'_2 u'_2 \quad (5.4.55)$$

donde las funciones de forma  $N_I(\xi')$  coinciden con las las funciones de forma  $N_I(\xi)$  pero ahora en el espacio  $\xi'$ , de manera que

$$N_1(\xi') = N'_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi') \quad (5.4.56)$$

y

$$N_2(\xi') = N'_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi') \quad (5.4.57)$$

De la Fig. 5.5 podemos encontrar la relación existente entre  $\xi$  y  $\xi'$ , la cual viene dada por

$$\xi = \frac{\sqrt{3}}{3} \xi' \quad (5.4.58)$$

Despejando  $\xi'$  de la ecuación anterior se obtiene

$$\xi' = \sqrt{3} \xi \quad (5.4.59)$$

Ya que nos interesan los resultados en los extremos de la viga, es decir, cuando en el espacio normalizado  $\xi = -1$  y cuando  $\xi = +1$ , se sustituyen estos valores en la ecuación (5.4.59) y se obtiene  $\xi' = -\sqrt{3}$  y  $\xi' = +\sqrt{3}$  respectivamente. Entonces se procede a evaluar las funciones de forma de las ecuaciones (5.4.56) y (5.4.57). Si tomamos  $\xi' = -\sqrt{3}$  se obtiene

$$N_1(\xi' = -\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(1 - (-\sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \quad (5.4.60)$$

$$N_2(\xi' = -\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(1 + (-\sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) \quad (5.4.61)$$

De manera similar cuando  $\xi' = +\sqrt{3}$  se obtiene

$$N_1(\xi' = +\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(1 - (+\sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) \quad (5.4.62)$$

$$N_2(\xi' = +\sqrt{3}) = \frac{1}{2} (1 + (+\sqrt{3})) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) \quad (5.4.63)$$

Finalmente podemos relacionar los desplazamientos evaluados en los puntos de Gauss con sus valores extrapolados a los extremos mediante

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} \quad (5.4.64)$$

de donde se obtiene la matriz de extrapolación para el elemento finito unidimensionales con dos puntos de integración, la cual es

$$\mathbf{M}_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (5.4.65)$$

Con la matriz de extrapolación anterior y los valores de las deformaciones, esfuerzos y fuerzas conocidos en los puntos de Gauss, se puede encontrar su valor correspondiente extrapolado a los nodos extremos del elemento. Para ello, basta con multiplicar la matriz de extrapolación por el valor en los puntos de Gauss y como resultado se obtendrá su correspondiente valor en los nodos extremos.

### Ejemplo 5.2

En esta parte calcularemos el valor de las fuerzas en los nodos partiendo de los resultados obtenidos en los puntos de Gauss, los cuales extrapolaremos haciendo uso de la matriz de extrapolación.

Las fuerzas en los puntos de Gauss obtenidas en el ejemplo anterior son

$$\mathbf{f}_{PG} = \begin{bmatrix} f_{PG_1}^h \\ f_{PG_2}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4196 \times 10^5 \\ 3.8038 \times 10^4 \end{bmatrix} kg \quad (5.4.66)$$

Para obtener las fuerzas en los nodos tenemos que utilizar la siguiente

relación

$$\mathbf{f}_{Nodos} = \mathbf{M}_{ext} \cdot \mathbf{f}_{PG} \quad (5.4.67)$$

Sustituyendo los valores conocidos se encuentra

$$\mathbf{f}_{Nodos} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.4196 \times 10^5 \\ 3.8038 \times 10^4 \end{bmatrix} \quad (5.4.68)$$

El resultado que se obtiene de la expresión anterior es

$$\mathbf{f}_{Nodos} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.80 \times 10^5 \\ 0.0 \end{bmatrix} kg \quad (5.4.69)$$

que son los valores exactos que se obtuvieron con la solución analítica, como se puede verificar en el capítulo anterior.



# Capítulo 6

## Elementos Bidimensionales

### 6.1. Fuerzas Internas

Partiendo de la formulación general en dos dimensiones tenemos que para cada nodo  $I$ , las fuerzas internas son:

$$\mathbf{f}_I^{\text{int}} = \int_A \mathbf{B}_I^T \{\boldsymbol{\sigma}\} t dA \quad (6.1.1)$$

donde el valor  $t$  se refiere al espesor del elemento bidimensional y aparece debido a que la integral de las fuerzas internas se aplican a un volumen, y debido a que tenemos una integral sobre el área, faltaría el espesor para convertir las fuerzas internas en una integral de volumen. También se sabe que

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.1.2)$$

y

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.1.3)$$

con  $N_I$  como funciones de forma del elemento bidimensional.

## 6.2. Variables del Continuo

El campo de los desplazamientos de cada nodo es

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (6.2.1)$$

donde  $u$  y  $v$  son los desplazamientos del nodo en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Con estas variables independientes, podemos encontrar el tensor de deformaciones infinitesimales procediendo como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{xy} &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Hay que tomar en cuenta que para el caso de deformación plana la variable  $\varepsilon_{zz}$  es nula, mientras que en el caso de esfuerzo plano tenemos que  $\sigma_{zz}$  no es nulo. Sin embargo el producto entre ambos  $\sigma_{zz} \varepsilon_{zz}$  no interviene ya que el trabajo realizado entre ellos es cero. De esta forma, el vector de las deformaciones es

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.2.3)$$

Dependiendo del problema, se usa una ecuación constitutiva de esfuerzo plano o de deformación plana para encontrar los esfuerzos.

## 6.3. Triángulo de tres nodos

### 6.3.1. Funciones de Forma

Para un triángulo de tres nodos (denominado *constante strain triangle CST*) tenemos que el campo de los desplazamientos discretizado es

$$u_1 = u \approx u^h \quad (6.3.1)$$

$$u_2 = v \approx v^h \quad (6.3.2)$$

donde podemos escribir para el caso lineal del triangulo de tres nodos

$$u^h = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (6.3.3)$$

$$v^h = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (6.3.4)$$

lo que nos dará tras encontrar el valor de las variables  $\alpha_i$  las funciones de forma del elemento. Sabiendo que la interpolación para la variable  $u^h$  es la misma que para  $v^h$ , basta con obtener la expresión de una de las funciones de la ecuación (6.3.3). Conociendo el campo de desplazamiento en cada nodo  $(u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3)$  así como sus respectivas coordenadas  $(x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3)$ , encontramos

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \quad (6.3.5)$$

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \quad (6.3.6)$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \quad (6.3.7)$$

en donde hay tres ecuaciones con tres incógnitas. Resolviendo dicho sistema se encuentra

$$\alpha_1 = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) u_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) u_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) u_3}{x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2} \quad (6.3.8)$$

$$\alpha_2 = \frac{(y_2 - y_3) u_1 + (y_3 - y_1) u_2 + (y_1 - y_2) u_3}{x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2} \quad (6.3.9)$$

$$\alpha_3 = \frac{(x_3 - x_2) u_1 + (x_1 - x_3) u_2 + (x_2 - x_1) u_3}{x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2} \quad (6.3.10)$$

También sabemos que el área de un triángulo está relacionada con el determinante de sus coordenadas mediante

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2y_3 - y_2x_3 - (x_1y_3 - y_1x_3) + x_1y_2 - y_1x_2 \quad (6.3.11)$$

por lo que el denominador de las tres incógnitas  $\alpha_i$  es igual a  $2A$ . Sustituyendo las ecuaciones (6.3.8)-(6.3.11) en la ecuación (6.3.3), y agrupando términos semejantes se obtiene

$$u^h = \frac{1}{2A} [(a_1 + b_1x + c_1y)u_1 + (a_2 + b_2x + c_2y)u_2 + (a_3 + b_3x + c_3y)u_3] \quad (6.3.12)$$

donde

$$a_I = x_Jy_K - x_Ky_J, \quad b_I = y_J - y_K, \quad c_I = x_K - x_J; \quad \forall I, J, K = 1, 2, 3 \quad (6.3.13)$$

con  $I \neq J \neq K$   
e  $I, J, K$  en  
sentido antihorario

De esta forma, se encuentra que las funciones de forma del elemento triangular de tres nodos son

$$N_I = N_I(x, y) = \frac{1}{2A} (a_I + b_Ix + c_Iy) \quad (6.3.14)$$

y el desplazamiento  $u^h$  se expresa por

$$u^h(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3 \quad (6.3.15)$$

o en forma reducida

$$u^h = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \quad (6.3.16)$$

Ya que se está utilizando la misma aproximación para el desplazamiento en dirección vertical, entonces se tiene que

$$v^h = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 \quad (6.3.17)$$

con lo que se completa el campo de los desplazamientos discretizados para elementos finitos bidimensionales de tres nodos.

### 6.3.2. Discretización

Haciendo el cálculo de la funciones de forma de la ecuación (6.3.14) para cada nodo del triángulo y acomodándolo su resultado en la ecuación (6.1.2) se obtienen las submatrices que forman la matriz  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \quad \mathbf{B}_2, \quad \mathbf{B}_3] \quad (6.3.18)$$

que en forma desarrollada es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.3.19)$$

También tenemos que las fuerzas internas se obtienen mediante

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \int_A \mathbf{B}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} t dA \quad (6.3.20)$$

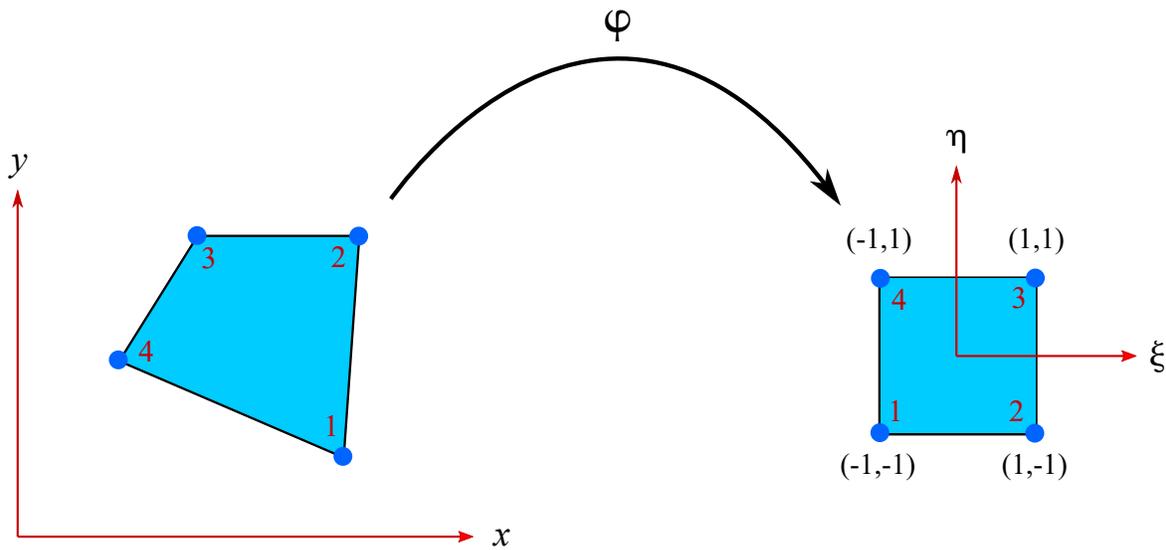
Finalmente, se substituye la ecuación (6.3.19) en la ecuación anterior y se encuentra el vector de las fuerzas internas, donde el vector  $\boldsymbol{\sigma}$  se definió en la ecuación (6.1.2) y  $t$  se refiere al espesor del problema bidimensional.

## 6.4. Cuadrilátero de 4 nodos

Para trabajar elementos cuadrilateros de 4 nodos se hace una transformación de coordenadas al espacio isoparamétrico como se aprecia en la figura 6.1. De esta manera, todos los cálculos se hacen en el espacio isoparamétrico y tenemos que empezar por calcular las funciones de forma en este espacio.

### 6.4.1. Funciones de forma

A partir de las funciones de forma de los elementos en 1D se pueden obtener las funciones de forma para elementos cuadriláteros en 2D tipo lagrangiano.



**Figura 6.1** Cambio a espacio normalizado para cuadrilátero de 4 nodos

Para ello, recordemos que para un elemento 1D de 2 nodos se conocen sus funciones de forma en el espacio normalizado (ver elemento 1D en la parte inferior de la figura 6.2), cuyos valores son:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \tag{6.4.1}$$

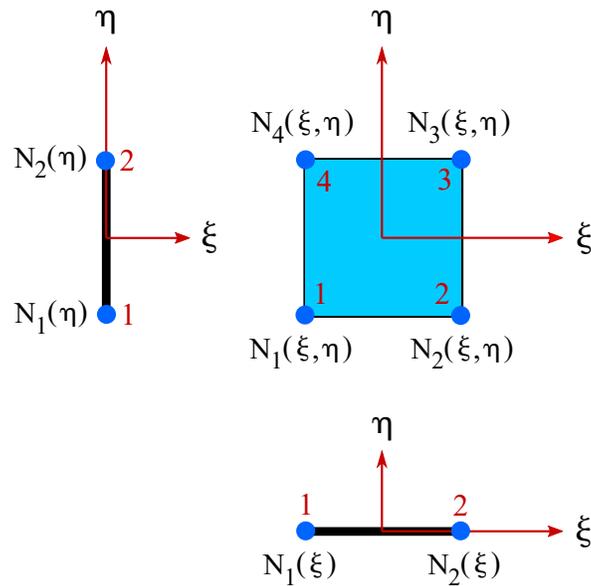
$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Si rotamos el elemento 1D de 2 nodos, podemos obtener las funciones de forma ahora en sentido vertical, como se aprecia en la parte izquierda de la figura 6.2, que resultan ser

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \tag{6.4.2}$$

$$N_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

Ahora, para obtener las funciones de forma del cuadrilátero 2D de 4 nodos se combinan las funciones de forma 1D de la siguiente manera



**Figura 6.2** Relación entre funciones de forma 2D y 1D

$$N_1(\xi, \eta) = N_1(\xi) \times N_1(\eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = N_2(\xi) \times N_1(\eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = N_2(\xi) \times N_2(\eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = N_1(\xi) \times N_2(\eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$$

(6.4.3)

Con las funciones de forma para el elemento finito cuadrilátero de 4 nodos se pueden obtener sus derivadas con respecto a los ejes del espacio normalizado, las cuales se utilizarán en la discretización del apartado siguiente.

## 6.4.2. Discretización

Como ya se mencionó anteriormente, se tiene que las fuerzas internas dadas por la ecuación (6.1.1) y la derivada de las funciones de forma expresadas

en la ecuación (6.1.2) nos permiten obtener la matriz de rigidez del elementos cuadrilátero de 4 nodos.

Partiendo de la derivada de las funciones de forma podemos desarrollarlas de la siguiente manera usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial N_I}{\partial \xi} = \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (6.4.4)$$

$$\frac{\partial N_I}{\partial \eta} = \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Si ahora escribimos la ecuación anterior en forma matricial obtenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{DERIV} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_J \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} \end{bmatrix}}_{CARTD} \quad (6.4.5)$$

donde el primer vector *DERIV* contiene la derivada de las funciones de forma, mientras que del lado derecho de la igualdad se tiene la matriz jacobiana de la transformación *J* y el vector *CARTD* que contiene la derivada cartesiana de las funciones de forma.

Ahora, hay que recordar que estamos trabajando es una formulación isoparamétrica, por lo que vamos a utilizar las mismas funciones de forma para aproximar la geometría. De esta forma se obtiene la siguiente aproximación

$$x \approx x^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}=4} N_I(\xi, \eta) x_I$$

$$y \approx y^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}=4} N_I(\xi, \eta) y_I \quad (6.4.6)$$

Ahora usando la ecuación (6.4.6) se calcula la derivada de las funciones de forma con respecto a  $\xi$  y se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &\approx \frac{\partial x^h}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) x_I \right] = \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \xi} x_I \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &\approx \frac{\partial y^h}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) y_I \right] = \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \xi} y_I\end{aligned}\tag{6.4.7}$$

De manera similar, se obtiene la derivada de las funciones de forma con respecto a  $\eta$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \eta} &\approx \frac{\partial x^h}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) x_I \right] = \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \eta} x_I \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &\approx \frac{\partial y^h}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) y_I \right] = \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I}{\partial \eta} y_I\end{aligned}\tag{6.4.8}$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.4.7) y (6.4.8) en el jacobiano  $J$  de la ecuación (6.4.5) se obtiene

$$J = \sum_{I=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} x_I & \frac{\partial N_I}{\partial \xi} y_I \\ \frac{\partial N_I}{\partial \eta} x_I & \frac{\partial N_I}{\partial \eta} y_I \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot [x_I \quad y_I]\tag{6.4.9}$$

En forma desarrollada, la ecuación anterior se expresa por

$$J = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{DERIV} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}}_{ELCOD^T} \quad (6.4.10)$$

donde *ELCOD* son las coordenadas de los 4 nodos del elementos finito. De esta manera, se puede calcular la matriz jacobiana *J* y sustituirla en la ecuación (6.4.5). En esa misma ecuación, se conocen los valores de las derivadas de las funciones de forma *DERIV* y la única incógnita que se tiene es la matriz de las derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas cartesianas *CARTD*. En forma resumida, la ecuación (6.4.5) se escribe como

$$DERIV = J \cdot CARTD \quad (6.4.11)$$

de la cual podemos despejar el valor que no conocemos y encontrar

$$CARTD = J^{-1} \cdot DERIV \quad (6.4.12)$$

que en forma desarrollada nos dará

$$CARTD = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.4.13)$$

Acomodando los valores de la ecuación (6.4.13) en la ecuación (6.1.2) se obtienen las submatrices que forman la matriz **B**

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \quad \mathbf{B}_2, \quad \mathbf{B}_3, \quad \mathbf{B}_4] \quad (6.4.14)$$

que en forma desarrollada es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.4.15)$$

Recordando que las fuerzas internas se obtienen mediante

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \int_A \mathbf{B}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} t dA \quad (6.4.16)$$

se substituye la ecuación (6.4.15) en la ecuación anterior y sabiendo que el vector  $\boldsymbol{\sigma}$  vale

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (6.4.17)$$

donde hemos usado la igualdad

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (6.4.18)$$

recordando que  $\mathbf{C}$  es la ecuación constitutiva para 2D (que puede ser de esfuerzo plano o de deformación plana) y  $t$  se refiere al espesor del problema bidimensional. De esta manera, se encuentra que las fuerzas internas son

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u} t dA \quad (6.4.19)$$

Recordando que la matriz de rigidez se obtiene a partir de la derivada de las fuerzas internas respecto a los desplazamientos, podemos obtener

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} t dA \quad (6.4.20)$$

de manera que

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (6.4.21)$$

De esta manera, se resuelve el problema 2D con elementos finitos cuadrilateros de 4 nodos.

### 6.4.3. Semi-algoritmo

Resumen de pasos para cálculo:

- Seleccionar los valores de  $\xi$  y  $\eta$  para cada punto de Gauss
- Calcular las derivadas de las funciones de forma evaluadas en cada punto de Gauss
- Calcular la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  multiplicando  $\text{DERIV} \times \text{ELCOD}^T$
- Calcular el determinante del jacobiano  $J$
- Calcular la inversa del jacobiano  $\mathbf{J}^{-1}$
- Calcular las derivadas cartesianas (simplificadas) multiplicando  $\mathbf{J}^{-1} \times \text{DERIV}$
- Calcular el volumen en el punto de Gauss multiplicando  $J \times \text{Pesos}_{pg} \times \text{espesor}$
- Calcular B
- Calcular C
- Calcular K

# Capítulo 7

## Elementos Tridimensionales

### 7.1. Fuerzas Internas

Partiendo de la formulación general en tres dimensiones tenemos que para cada nodo  $I$ , las fuerzas internas son:

$$\mathbf{f}_I^{\text{int}} = \int_V \mathbf{B}_I^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dA \quad (7.1.1)$$

También se sabe que

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_I}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.1.2)$$

y

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (7.1.3)$$

con  $N_I$  como funciones de forma del elemento tridimensional.

## 7.2. Variables del Continuo

El campo de los desplazamientos de cada nodo es

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (7.2.1)$$

donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  son los desplazamientos del nodo en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Con estas variables independientes, podemos encontrar el tensor de deformaciones infinitesimales procediendo como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{yz} &= \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial v} \\ 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{xz} &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{xy} &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

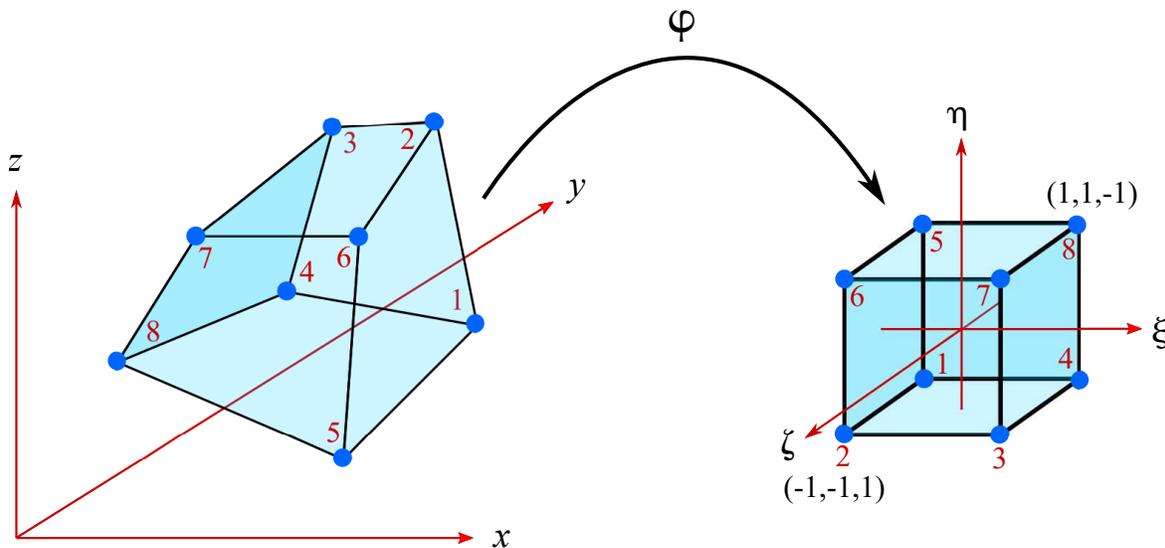
El vector de las deformaciones para el caso tridimensional es

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (7.2.3)$$

La relación entre los esfuerzos y las deformaciones se da por una ecuación constitutiva en 3D.

## 7.3. Hexaedro de 8 nodos

Para trabajar elementos tipo hexaedro de 8 nodos se hace una transformación de coordenadas al espacio isoparamétrico como se aprecia en la figura 7.1. De esta manera, todos los cálculos se hacen en el espacio isoparamétrico y tenemos que empezar por calcular las funciones de forma en este espacio.



**Figura 7.1** Cambio a espacio normalizado para hexaedro de 8 nodos

### 7.3.1. Funciones de forma

A partir de las funciones de forma de los elementos en 1D se pueden obtener las funciones de forma para elementos hexaedros en 3D tipo lagrangiano.

Para ello, recordemos que para un elemento 1D de 2 nodos se conocen sus funciones de forma en el espacio normalizado (ver elemento 1D en la parte inferior de la figura 7.2), cuyos valores son:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

(7.3.1)

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Si rotamos el elemento 1D de 2 nodos en dirección del eje  $\eta$ , podemos obtener las funciones de forma ahora en ese sentido, como se aprecia en la parte derecha de la figura 7.2, que resultan ser

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

(7.3.2)

$$N_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

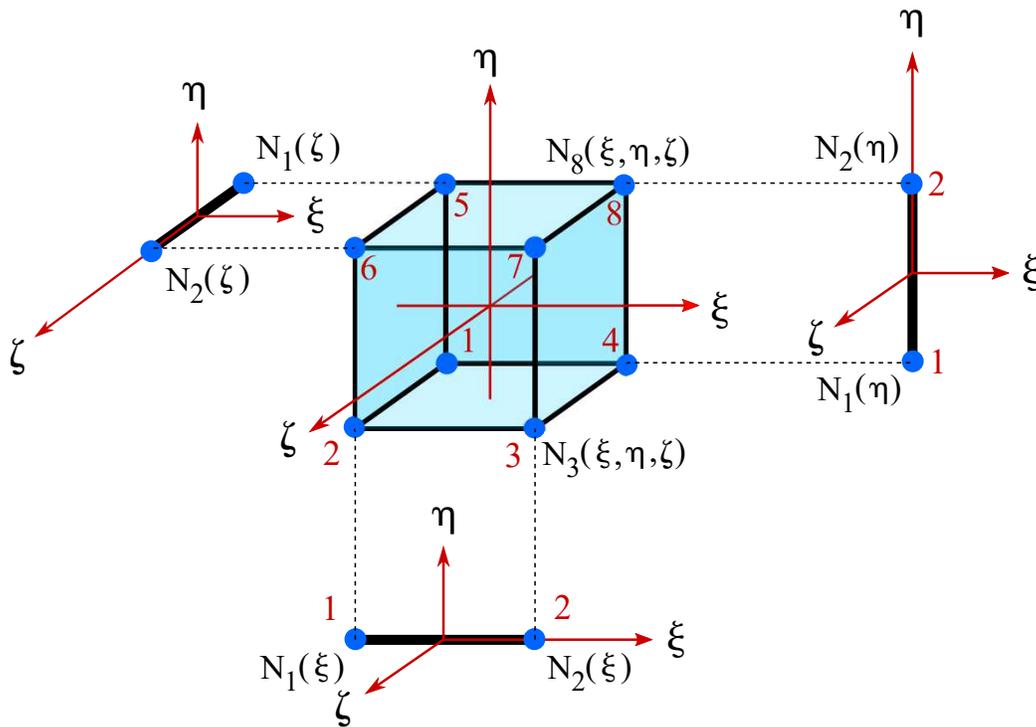
Si hacemos una rotación más, pero ahora en dirección del eje  $\zeta$ , se obtienen las funciones de forma que aparecen en la parte izquierda de la figura 7.2, y que son

$$N_1(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta)$$

(7.3.3)

$$N_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta)$$

Ahora, para obtener las funciones de forma del hexaedro 3D de 8 nodos se combinan las primeras cuatro funciones de forma 1D de la siguiente manera



**Figura 7.2** Relación entre funciones de forma 3D y 1D

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = N_1(\xi) \times N_1(\eta) \times N_1(\zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta)$$

$$N_2(\xi, \eta, \zeta) = N_1(\xi) \times N_1(\eta) \times N_2(\zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta)$$

(7.3.4)

$$N_3(\xi, \eta, \zeta) = N_2(\xi) \times N_1(\eta) \times N_2(\zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta)$$

$$N_4(\xi, \eta, \zeta) = N_2(\xi) \times N_1(\eta) \times N_1(\zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta)$$

Las funciones de forma para los nodos restantes se obtienen mediante

$$\begin{aligned}
N_5(\xi, \eta, \zeta) &= N_1(\xi) \times N_2(\eta) \times N_1(\zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) \\
N_6(\xi, \eta, \zeta) &= N_1(\xi) \times N_2(\eta) \times N_2(\zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) \\
N_7(\xi, \eta, \zeta) &= N_2(\xi) \times N_2(\eta) \times N_2(\zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) \\
N_8(\xi, \eta, \zeta) &= N_2(\xi) \times N_2(\eta) \times N_1(\zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta)
\end{aligned} \tag{7.3.5}$$

Con las funciones de forma para el elemento finito hexaedro de 8 nodos se pueden obtener sus derivadas con respecto a los ejes del espacio normalizado, las cuales se utilizarán en la discretización del apartado siguiente.

### 7.3.2. Discretización

Como ya se mencionó anteriormente, se tiene que las fuerzas internas dadas por la ecuación (7.1.1) y la derivada de las funciones de forma expresadas en la ecuación (7.1.2) nos permiten obtener la matriz de rigidez del elemento hexaedro de 8 nodos.

Partiendo de la derivada de las funciones de forma podemos desarrollarlas de la siguiente manera usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_I}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_I}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\
\frac{\partial N_I}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_I}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\
\frac{\partial N_I}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_I}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}
\end{aligned} \tag{7.3.6}$$

Si ahora escribimos la ecuación anterior en forma matricial obtenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} \end{bmatrix}}_{DERIV} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}}_J \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_I}{\partial z} \end{bmatrix}}_{CARTD} \quad (7.3.7)$$

donde el primer vector *DERIV* contiene la derivada de las funciones de forma, mientras que del lado derecho de la igualdad se tiene la matriz jacobiana de la transformación *J* y el vector *CARTD* que contiene la derivada cartesiana de las funciones de forma.

Ahora, hay que recordar que estamos trabajando es una formulación isoparamétrica, por lo que vamos a utilizar las mismas funciones de forma para aproximar la geometría. De esta forma se obtiene la siguiente aproximación

$$\begin{aligned}
 x &\approx x^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}=8} N_I(\xi, \eta, \zeta) x_I \\
 y &\approx y^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}=8} N_I(\xi, \eta, \zeta) y_I \\
 z &\approx z^h = \sum_{I=1}^{n_{\text{nodos}}=8} N_I(\xi, \eta, \zeta) z_I
 \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

Ahora usando la ecuación (7.3.8) se calcula la derivada de las funciones de forma con respecto a  $\xi$  y se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &\approx \frac{\partial x^h}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) x_I \right] = \sum_{I=1}^8 \frac{\partial N_I}{\partial \xi} x_I \\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &\approx \frac{\partial y^h}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) y_I \right] = \sum_{I=1}^8 \frac{\partial N_I}{\partial \xi} y_I \\
\frac{\partial z}{\partial \xi} &\approx \frac{\partial z^h}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) z_I \right] = \sum_{I=1}^8 \frac{\partial N_I}{\partial \xi} z_I
\end{aligned} \tag{7.3.9}$$

De manera similar, se obtiene la derivada de las funciones de forma con respecto a  $\eta$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \eta} &\approx \frac{\partial x^h}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) x_I \right] = \sum_{I=1}^8 \frac{\partial N_I}{\partial \eta} x_I \\
\frac{\partial y}{\partial \eta} &\approx \frac{\partial y^h}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) y_I \right] = \sum_{I=1}^8 \frac{\partial N_I}{\partial \eta} y_I \\
\frac{\partial z}{\partial \eta} &\approx \frac{\partial z^h}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) z_I \right] = \sum_{I=1}^8 \frac{\partial N_I}{\partial \eta} z_I
\end{aligned} \tag{7.3.10}$$

Por último, se obtiene el valor de las derivadas respecto a  $\zeta$ , obteniéndose

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \zeta} &\approx \frac{\partial x^h}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) x_I \right] = \sum_{I=1}^8 \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} x_I \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} &\approx \frac{\partial y^h}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) y_I \right] = \sum_{I=1}^8 \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} y_I \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} &\approx \frac{\partial z^h}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) z_I \right] = \sum_{I=1}^8 \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} z_I\end{aligned}\tag{7.3.11}$$

Sustituyendo las ecuaciones de (7.3.9) y (7.3.11) en el jacobiano  $J$  de la ecuación (7.3.7) se obtiene

$$J = \sum_{I=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} x_I & \frac{\partial N_I}{\partial \xi} y_I & \frac{\partial N_I}{\partial \xi} z_I \\ \frac{\partial N_I}{\partial \eta} x_I & \frac{\partial N_I}{\partial \eta} y_I & \frac{\partial N_I}{\partial \eta} z_I \\ \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} x_I & \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} y_I & \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} z_I \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^8 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} \end{bmatrix}}_{DERIV} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_I & y_I & z_I \end{bmatrix}}_{ELCOD^T}\tag{7.3.12}$$

donde  $ELCOD$  son las coordenadas de los 8 nodos del elemento finito. De esta manera, se puede calcular la matriz jacobiana  $J$  y sustituirla en la ecuación (7.3.7). En esa misma ecuación, se conocen los valores de las derivadas de las funciones de forma  $DERIV$  y la única incógnita que se tiene es la matriz de las derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas cartesianas  $CARTD$ . En forma resumida, la ecuación (7.3.7) se escribe como

$$DERIV = J \cdot CARTD\tag{7.3.13}$$

de la cual podemos despejar el valor que no conocemos y encontrar

$$CARTD = J^{-1} \cdot DERIV\tag{7.3.14}$$

Acomodando los valores resultantes de la ecuación (7.3.14) en la ecuación (7.1.2) se obtienen las submatrices que forman la matriz  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6, \mathbf{B}_7, \mathbf{B}_8] \quad (7.3.15)$$

Recordando que las fuerzas internas se obtienen mediante

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \int_V \mathbf{B}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV \quad (7.3.16)$$

se substituye la ecuación (7.3.15) en la ecuación anterior y sabiendo que el vector  $\boldsymbol{\sigma}$  vale

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (7.3.17)$$

donde hemos usado la igualdad

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (7.3.18)$$

recordando que  $\mathbf{C}$  es la ecuación constitutiva para 3D en el problema tridimensional. De esta manera, se encuentra que las fuerzas internas son

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u} dV \quad (7.3.19)$$

Recordando que la matriz de rigidez se obtiene a partir de la derivada de las fuerzas internas respecto a los desplazamientos, podemos obtener

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (7.3.20)$$

de manera que

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (7.3.21)$$

De esta manera, se resuelve el problema 3D con elementos finitos hexaedricos de 8 nodos.

### 7.3.3. Semi-algoritmo

Resumen de pasos para cálculo:

- Seleccionar los valores de  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$  para cada punto de Gauss

- Calcular las derivadas de las funciones de forma evaluadas en cada punto de Gauss
- Calcular la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  multiplicando  $\text{DERIV} \times \text{ELCOD}^T$
- Calcular el determinante del jacobiano  $\mathbf{J}$
- Calcular la inversa del jacobiano  $\mathbf{J}^{-1}$
- Calcular las derivadas cartesianas (simplificadas) multiplicando  $\mathbf{J}^{-1} \times \text{DERIV}$
- Calcular el volumen en el punto de Gauss multiplicando  $\mathbf{J} \times \text{Pesos}_{pg}$
- Calcular B
- Calcular C
- Calcular K



# Anexo A

## Algebra Matricial

### Sección

### A.1. Resumen

### Generalidades

La solución **lo más exacta posible** a los diferentes problemas en ingeniería se reduce a resolver un **sistema de ecuaciones**, el cual en general es:

$$\begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + \cdots + A_{1m} x_m &= b_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + \cdots + A_{2m} x_m &= b_2 \\ \vdots & \quad \quad \quad \ddots & \quad \quad \quad \vdots \\ A_{n1} x_1 + A_{n2} x_2 + \cdots + A_{nm} x_m &= b_n \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

Esta relación lineal puede escribirse también en forma abreviada como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{A.1.2}$$

donde la **matriz de los coeficientes** se define por la ecuación (A.1.3), y se representará por una letra mayúscula negrita,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} \tag{A.1.3}$$

en la cual  $n$  es el número de renglones de la matriz y  $m$  el número de columnas.

Estos números representan el orden de la matriz, que se escribe explícitamente por:

$$\mathbf{A}_{(n \times m)} \quad (\text{A.1.4})$$

Por otro lado, el **vector de las incógnitas** se define por la ecuación (A.1.5) y el **vector de los términos independientes** por la ecuación (A.1.6)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.5})$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.6})$$

El vector de las incógnitas es de orden  $m$ , mientras que el vector de los términos independientes es de orden  $n$ , es decir tienen  $m$  y  $n$  componentes respectivamente, y se representarán por letras minúsculas negritas. Hay que resaltar que los vectores se escriben siempre de forma vertical, tal y como aparece en las ecuaciones (A.1.5)-(A.1.6).

El sistema de ecuaciones que aparece en la ecuación (A.1.1) se puede escribir de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.7})$$

La forma matricial abreviada del sistema anterior viene dada por:

$$A_{ij} x_j = b_i \quad (\text{A.1.8})$$

A continuación se mostrarán algunos ejemplos.

### Ejemplo A.1

Una matriz cualquiera se presenta a continuación:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & -4 & 6 \\ -2 & 8 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es de orden **3** por **4**, y se escribe como  $\mathbf{A}_{(3 \times 4)}$

### Ejemplo A.2

Un sistema de ecuaciones se muestra enseguida:

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & -4 & 6 \\ -2 & 8 & 13 & 5 \\ 1 & 4 & 7 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -8 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones anterior tiene **4** ecuaciones y **4** incógnitas.

## Subsección

### A.1.1. Tipos de Matrices

#### Matriz Transpuesta

Una matriz representa un arreglo de  $n$  filas por  $m$  columnas, es decir,  $\mathbf{A}_{(n \times m)}$ . Sin embargo, si la misma matriz  $\mathbf{A}$  se escribe de manera que **se intercambien los renglones por columnas y viceversa**, entonces se dice que se tiene la **matriz transpuesta** de  $\mathbf{A}$ , que se representa por  $\mathbf{A}^T$ , y su orden cambia para ser ahora

$$\mathbf{A}_{(m \times n)}^T \tag{A.1.9}$$

Para ejemplificar este tipo de matriz se muestra el siguiente ejemplo.

### Ejemplo A.3

Escribamos la matriz

$$\mathbf{A}_{(3 \times 2)} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.10})$$

cuya transpuesta resulta ser

$$\mathbf{A}_{(2 \times 3)}^T = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.11})$$

### Matrices Fila y Columna

La forma particular en que se agrupan los componentes de una matriz en una sola columna da lugar a la denominada **matriz columna**. Este tipo de matrices se representará también por una letra minúscula en negrita, como por ejemplo la matriz  $\mathbf{a}$ . Si suponemos que la matriz  $\mathbf{a}$  tiene 4 componentes, entonces su orden será  $\mathbf{a}_{(4 \times 1)}$ . Hay que destacar que una matriz de este tipo representa exactamente lo mismo que un vector.

Si se calcula la transpuesta de una matriz columna, se obtiene la **matriz fila**. Tomando como ejemplo el caso anterior, la transpuesta de la matriz columna  $\mathbf{a}_{(4 \times 1)}$  será la matriz fila  $\mathbf{a}_{(1 \times 4)}^T$ .

### Ejemplo A.4

Escribamos la matriz columna

$$\mathbf{a}_{(5 \times 1)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.12})$$

---

cuya transpuesta resulta ser la siguiente matriz fila

$$\mathbf{a}_{(1 \times 5)}^T = [6 \ 2 \ 7 \ -1 \ 5] \quad (\text{A.1.13})$$

### Matriz Cuadrada

Se dice que cuando el número de renglones es igual al número de columnas, es decir  $n = m$ , se tiene una **matriz cuadrada**.

#### Ejemplo A.5

Una matriz cuadrada de orden 3 se representa por

$$\mathbf{A}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ 6 & 7 & 3 \\ -2 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.14})$$

### Matriz Simétrica y Antisimétrica

Se dice que cuando los componentes de una matriz cuadrada tienen la característica de que  $A_{ij} = A_{ji}$  se tiene entonces una **matriz simétrica**.

#### Ejemplo A.6

Una matriz simétrica de orden 3 se representa por

$$\mathbf{A}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.15})$$

Hay que destacar que la transpuesta de una matriz simétrica coincide con si misma, es decir,  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ .

Por otro lado, cuando los componentes de una matriz cuadrada tienen la característica de que  $A_{ij} = -A_{ji}$  y además  $A_{ii} = 0$ , se tiene entonces una **matriz antisimétrica**.

#### Ejemplo A.7

Una matriz antisimétrica de orden 3 se presenta a continuación

$$\mathbf{A}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -9 \\ -5 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.16})$$

Hay que destacar que la transpuesta de una matriz antisimétrica es  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ .

### Matriz Diagonal

Cuando los componentes de una matriz cuadrada tienen las siguientes características:

- $A_{ij} = 0$  cuando  $i \neq j$  (*fuera de la diagonal principal*)
- $A_{ij} \neq 0$  cuando  $i = j$  (*en la diagonal principal*)

se tiene entonces una **matriz diagonal**.

### Ejemplo A.8

Una matriz diagonal de orden 3 se presenta a continuación

$$\mathbf{A}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.17})$$

### Matriz Identidad

Se dice que cuando los componentes de una matriz cuadrada que están en la diagonal  $A_{ii} = 1$  y el resto de sus componentes valen cero, entonces se tiene

una **matriz identidad**. Generalmente la letra con la que se representa la matriz identidad es **I**.

### Ejemplo A.9

Una matriz identidad de orden 3 se presenta a continuación

$$\mathbf{I}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.18})$$

### Matriz Triangular

Una matriz cuadrada que tiene la característica de que  $A_{ij} = 0$  cuando  $i > j$  se dice que es una **matriz triangular superior**. Generalmente se les representa por la letra **U**.

### Ejemplo A.10

Una matriz triangular superior de orden 3 se presenta a continuación

$$\mathbf{U}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.19})$$

En el caso contrario, cuando una matriz cuadrada que tiene la característica de que  $A_{ij} = 0$  cuando  $i < j$  se dice que es una **matriz triangular inferior**. A este tipo de matrices se les suele representar por la letra **L**.

### Ejemplo A.11

Una matriz triangular inferior de orden 3 se presenta a continuación

$$\mathbf{L}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -5 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.20})$$

## Subsección

### A.1.2. Operaciones con Matrices

#### Traza de una Matriz

La traza de una matriz se aplica a matrices cuadradas y consiste en realizar la suma de los elementos de la diagonal principal. La traza de la matriz  $\mathbf{A}$  se representa por

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn} = \sum_{i=1}^n A_{ii} \quad (\text{A.1.21})$$

#### Ejemplo A.12

Calcular la traza de la matriz  $\mathbf{A}$  con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & -5 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.22})$$

La traza es:

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = 9 + 6 + 10 = 25 \quad (\text{A.1.23})$$

### Suma de Matrices

La suma y/o resta de dos matrices **A** y **B**, las cuales deben ser del mismo orden, tiene como resultado una matriz **C** cuyos componentes se obtienen de acuerdo a

$$C_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij} \quad (\text{A.1.24})$$

#### Ejemplo A.13

Sumar las matrices **A** y **B**

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & -6 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 9 & 14 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ -1 & 9 & 2 \\ 10 & 8 & 15 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.25})$$

### Multiplicación de una Matriz por un Escalar

La multiplicación de un escalar  $\lambda$  por una matriz  $\mathbf{A}$ , donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de orden  $(p \times q)$ , da como resultado una matriz  $\mathbf{B}$  del mismo orden  $(p \times q)$ , cuyos componentes se obtienen multiplicando todos los componentes de  $\mathbf{A}$  por  $\lambda$ , de acuerdo a:

$$B_{ij} = \lambda A_{ij} \quad (\text{A.1.26})$$

#### Ejemplo A.14

Multiplicar el escalar  $\lambda = 5$  por la matriz  $\mathbf{A}$  con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & -5 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.27})$$

El resultado es:

$$\mathbf{B} = \lambda \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 45 & -5 & 10 \\ 10 & 30 & 15 \\ 20 & -25 & 50 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.28})$$

### Multiplicación de Matrices

La multiplicación de dos matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de orden  $(p \times q)$  y  $\mathbf{B}$  de orden  $(q \times r)$ , se representa por  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  y da lugar a una matriz  $\mathbf{C}$  de orden  $(p \times r)$  cuyos componentes se obtienen de acuerdo a:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^q A_{ik} B_{kj} \quad (\text{A.1.29})$$

Hay que destacar que la multiplicación de dos matrices solo se puede llevar a cabo cuando el número de columnas de la matriz  $\mathbf{A}$  es igual al número de filas de la matriz  $\mathbf{B}$ .

**Ejemplo A.15**

Multiplicar las matrices  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & -5 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.30})$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.31})$$

El resultado es:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 23 & -9 & 3 \\ 34 & 35 & 31 \\ 33 & -86 & 56 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.32})$$

Las leyes generales de multiplicación de matrices en álgebra matricial son:

- Ley Asociativa:  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
- Ley Distributiva:  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- Ley Conmutativa: No se puede aplicar, es decir,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Las propiedades para la multiplicación de matrices son:

- *El producto de la matriz identidad  $\mathbf{I}$  por una matriz  $\mathbf{A}$  vale*

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (\text{A.1.33})$$

- *La transpuesta del producto de dos matrices vale*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (\text{A.1.34})$$

**Determinante de una Matriz**

El determinante de una matriz  $\mathbf{A}$  se calcula solamente a matrices cuadradas de cualquier orden y se representa por  $\det(\mathbf{A})$  ó  $|\mathbf{A}|$

Para calcular el valor del determinante de la matriz  $\mathbf{A}$  se puede utilizar el *teorema de Laplace* que es una regla recursiva que reduce el cálculo a sumas y restas de varios determinantes de un orden inferior.

Para el cálculo del determinante también se puede utilizar la *fórmula de Leibniz*, o bien la *fórmula de Laplace*, que para una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  de orden  $n$  con  $i = 1$  es:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} A_{1j} |\mathbf{A}_{1j}| \quad (\text{A.1.35})$$

donde:

- $A_{1j}$  es el valor del coeficiente correspondiente a la primera fila y la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{A}$ .
- $|\mathbf{A}_{1j}|$  es la sub-matriz de orden  $(n - 1)$  resultante de la eliminación de la primera fila y la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{A}$ .

Las propiedades del determinante de una matriz son:

- *El determinante del producto de dos matrices es*

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \quad (\text{A.1.36})$$

- *El determinante de la transpuesta de una matriz vale*

$$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}| \quad (\text{A.1.37})$$

- *El determinante de la matriz identidad es igual a*

$$|\mathbf{I}| = 1 \quad (\text{A.1.38})$$

- *La multiplicación de un escalar  $\lambda$  por un determinante da como resultado la multiplicación de dicho escalar por cualquier línea, ya sea renglón ó columna, pero sólo una línea.*

Por ejemplo, si multiplicamos el determinante  $|\mathbf{A}|$  por el escalar  $\lambda$ , el resultado de 2 de las 6 posibilidades correctas sería:

$$\lambda |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \lambda A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \lambda A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \lambda A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{A.1.39})$$

### Ejemplo A.16

Para la matriz  $\mathbf{A}$  siguiente, calcular su determinante  $|\mathbf{A}|$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 20 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.40})$$

$$|\mathbf{A}| = 7 \begin{vmatrix} 6 & 20 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = 7(54 - 100) - 3(18 - 60) + 1(10 - 18)$$

$$|\mathbf{A}| = 7(-46) - 3(-42) + 1(-8) = -322 + 126 - 8 = -\mathbf{204}$$

### Menor de una Matriz

Para cada elemento  $A_{ij}$  de una matriz, su menor complementario se define por  $MC_{ij}$  y es igual al valor del determinante de la matriz cuadrada de orden  $(n - 1)$  que se obtiene al eliminar el renglón  $i$  y la columna  $j$ .

### Ejemplo A.17

Obtener el menor del elemento  $A_{23}$  de la matriz siguiente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 20 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.41})$$

Resultado:

$$MC_{23} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 9 = \mathbf{26} \quad (\text{A.1.42})$$

### Ejemplo A.18

Si para el ejemplo anterior además nos pidieran todos los menores complementarios de la matriz  $\mathbf{A}$ , es decir los nueve valores, se hubiera encontrado:

$$MC_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 20 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -46 \quad MC_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -42 \quad MC_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -8$$

$$MC_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 22 \quad MC_{22} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 60 \quad MC_{23} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 26$$

$$MC_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 20 \end{vmatrix} = 54 \quad MC_{32} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 20 \end{vmatrix} = 138 \quad MC_{33} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

### Cofactor de una Matriz

Para cada elemento  $A_{ij}$  de una matriz, su cofactor se define por  $Cf_{ij}$  y es igual al valor del menor complementario multiplicado por el siguiente signo:

- (+) si la suma de  $i + j$  es par.
- (-) si la suma de  $i + j$  es impar.

Es decir, para cada elemento su cofactor se obtiene por:

$$Cf_{ij} = (-1)^{i+j} MC_{ij} \quad (\text{A.1.43})$$

**Ejemplo A.19**

Obtener el cofactor del elemento  $A_{23}$  de la matriz siguiente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 20 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.44})$$

Resultado:

$$Cf_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(35 - 9) = -\mathbf{26} \quad (\text{A.1.45})$$

**Ejemplo A.20**

Si para el ejemplo anterior además nos pidieran todos los cofactores de la matriz  $\mathbf{A}$ , es decir los nueve valores, se hubiera encontrado:

$$Cf_{11} = + \begin{vmatrix} 6 & 20 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -46 \quad Cf_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 42 \quad Cf_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -8$$

$$Cf_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -22 \quad Cf_{22} = + \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 60 \quad Cf_{23} = - \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -26$$

$$Cf_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 20 \end{vmatrix} = 54 \quad Cf_{32} = - \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 20 \end{vmatrix} = -138 \quad Cf_{33} = + \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

**Adjunta de una Matriz**

Para una matriz  $\mathbf{A}$ , su adjunta se define por  $Adj(\mathbf{A})$ . Su definición suele crear confusión ya que en la literatura existen dos versiones según el libro de álgebra que se consulte: la primera que dice que la adjunta de una matriz es simplemente la transpuesta de la matriz de los cofactores; mientras que la segunda dice que la matriz adjunta y matriz de los cofactores son iguales. Esta última definición

es la que adoptaremos en este texto cuando no se especifique lo contrario. Como ejemplo, calculemos la adjunta tomando ambas versiones.

Para el primer caso, la adjunta es la transpuesta de la matriz de los cofactores. Es decir, para cada elemento se obtiene su adjunto por:

$$Adj(A_{ij}) = (Cf_{ij})^T = (Cf_{ji}) = \left[ (-1)^{i+j} MC_{ij} \right]^T = (-1)^{i+j} MC_{ji} \quad (\text{A.1.46})$$

### Ejemplo A.21

Obtener la matriz adjunta considerando que cada elemento se obtiene como el transpuesto de la matriz de los cofactores:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 20 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.47})$$

Resultado:

$$Adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 20 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 20 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 20 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.1.48})$$

$$Adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -46 & 42 & -8 \\ -22 & 60 & -26 \\ 54 & -138 & 36 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -46 & -22 & 54 \\ 42 & 60 & -138 \\ -8 & -26 & 36 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.49})$$

Para el segundo caso, la adjunta es simplemente igual a la matriz de los cofactores.

**Ejemplo A.22**

Obtener la matriz adjunta considerando que cada elemento es igual a la matriz de los cofactores:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 20 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.50})$$

Resultado:

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 20 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 20 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 20 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.51})$$

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -46 & 42 & -8 \\ -22 & 60 & -26 \\ 54 & -138 & 36 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.52})$$

**Matriz Inversa**

La inversa de una matriz  $\mathbf{A}$  se representa por  $\text{inv}(\mathbf{A})$  ó  $\mathbf{A}^{-1}$ , donde se debe cumplir

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (\text{A.1.53})$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. Las condiciones necesarias para que se pueda calcular la inversa de una matriz  $\mathbf{A}$  son:

- $\mathbf{A}$  debe ser una matriz cuadrada

- $|\mathbf{A}|$  debe ser diferente de cero

Las propiedades de la inversa de una matriz son:

- *La inversa del producto de dos matrices es*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.1.54})$$

- *La inversa de una matriz transpuesta vale*

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \quad (\text{A.1.55})$$

- *La inversa de una matriz triangular es triangular*

- *La inversa de una matriz simétrica es simétrica*

La inversa de una matriz es algo laborioso, pero se puede usar la siguiente ecuación general para calcularla, derivada de la fórmula de Laplace y haciendo uso la definición de matriz adjunta (que en este caso la tomaremos igual a la matriz de los cofactores):

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} [\text{Adj}(\mathbf{A})]^T \quad (\text{A.1.56})$$

Para matrices de  $2 \times 2$  su inversa se puede calcular como se indica a continuación. Si  $\mathbf{A}$  está definida por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.57})$$

Entonces su inversa es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.58})$$

con

$$|\mathbf{A}| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \quad (\text{A.1.59})$$

Para una matriz  $\mathbf{A}$  como se define a continuación:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.60})$$

su inversa se calcula con

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23} & A_{32}A_{13} - A_{12}A_{33} & A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13} \\ A_{31}A_{23} - A_{21}A_{33} & A_{11}A_{33} - A_{31}A_{13} & A_{21}A_{13} - A_{11}A_{23} \\ A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22} & A_{31}A_{12} - A_{11}A_{32} & A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.61})$$

siendo

$$|\mathbf{A}| = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{13}A_{21}A_{32} + A_{31}A_{12}A_{23} - A_{31}A_{22}A_{13} - A_{33}A_{12}A_{21} - A_{11}A_{23}A_{32} \quad (\text{A.1.62})$$

### Ejemplo A.23

Calcular la inversa de la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.63})$$

Utilizando la ecuación (A.1.59), encontramos que el valor de su determinante es:

$$|\mathbf{A}| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \quad (\text{A.1.64})$$

Su inversa queda entonces definida por la ecuación (A.1.58) cuyo resultado es:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.65})$$

**Ejemplo A.24**

Obtener la matriz inversa de la siguiente matriz considerando que son iguales tanto la matriz de los cofactores como la matriz adjunta:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 20 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.66})$$

Resultado:

Utilizando la ecuación (A.1.56), los resultados del determinante y adjunta de la misma matriz resueltos anteriormente, encontramos

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-204} \begin{bmatrix} -46 & 42 & -8 \\ -22 & 60 & -26 \\ 54 & -138 & 36 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.1.67})$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.225490 & 0.107843 & -0.264706 \\ -0.205882 & -0.294118 & 0.676471 \\ 0.039216 & 0.127451 & -0.176471 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.68})$$

**Matriz Ortogonal**

Por definición, una matriz  $\mathbf{A}$  es ortogonal si su inversa es igual a su transpuesta, esto es

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad (\text{A.1.69})$$

Lo anterior es equivalente a multiplicar:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (\text{A.1.70})$$

Las propiedades de una matriz ortogonal son:

- El determinante del siguiente producto de dos matrices ortogonales vale

$$|\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T| |\mathbf{A}| = |\mathbf{I}| = 1 \quad (\text{A.1.71})$$

- El determinante de una matriz ortogonal elevado al cuadrado vale

$$|\mathbf{A}|^2 = 1 \quad (\text{A.1.72})$$

- El determinante de una matriz ortogonal vale

$$|\mathbf{A}| = \pm 1 \quad (\text{A.1.73})$$

### Ejemplo A.25

Verificar si la siguiente matriz es ortogonal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.74})$$

Para empezar, calculamos su matriz transpuesta, que resulta ser:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.75})$$

Si ahora comparamos este resultado con el valor de su inversa, dado por la ecuación (A.1.58), podemos observar que  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$  por lo que concluimos que  $\mathbf{A}$  es una matriz ortogonal

# Anexo B

## Algebra Vectorial

### Sección

### B.1. Resumen

Ciertas cantidades físicas, tales como fuerza, velocidad y aceleración, que poseen magnitud y dirección se pueden representar en un sistema coordenado tridimensional mediante segmentos de línea dirigidos. Tales segmentos son denominados *vectores*. Por ejemplo, un vector  $\mathbf{a}$  se puede expresar en un espacio tridimensional en función de sus *componentes*  $a_1, a_2, a_3$  y una *base vectorial*  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  como

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \quad (\text{B.1.1})$$

Si los valores de la base vectorial (vectores base) de un sistema coordenado son constantes, es decir tienen direcciones y longitudes fijas, el sistema coordenado se denomina *sistema coordenado Cartesiano*. En general los sistemas Cartesianos son curvos, pero si el sistema Cartesiano es ortogonal entonces recibe el nombre de *sistema coordenado rectangular Cartesiano*. Si los vectores base de un sistema rectangular Cartesiano tienen longitud unitaria y además son mutuamente ortogonales reciben el nombre de ortonormales. Entonces un vector unitario es un vector cuya longitud es igual a la unidad y en un sistema rectangular Cartesiano se representarán por  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ . Un vector en este espacio se representará por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\
 &= (a_1, a_2, a_3) \tag{B.1.2} \\
 &= \sum_{i=1}^3 a_i \hat{\mathbf{e}}_i \\
 &= a_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad \forall i = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

donde  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  representan las componentes del vector  $\mathbf{a}$ . Es decir, un vector en el espacio rectangular Cartesiano se puede expresar como una combinación lineal de sus componentes y tres vectores unitarios perpendiculares entre sí. Estos últimos constituyen una *base vectorial Cartesiana rectangular*. Gráficamente un vector se puede representar en el sistema rectangular cartesiano tridimensional como se muestra en la figura B.1.

## Subsección

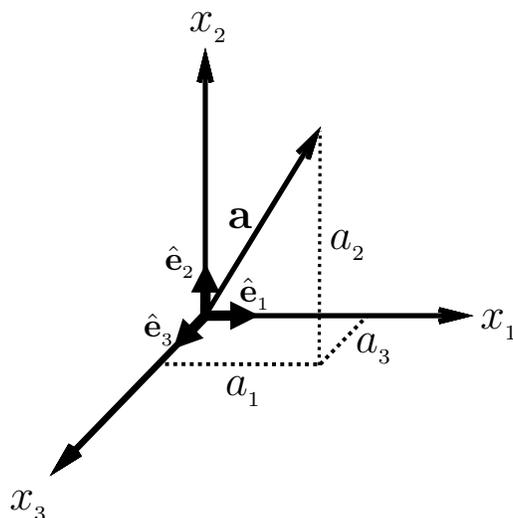
### B.1.1. Operaciones con Vectores

#### Norma de un vector

La norma de un vector  $\mathbf{a}$ , también llamada magnitud de  $\mathbf{a}$ , se representa por  $\|\mathbf{a}\|$ , y se calcula utilizando el teorema generalizado de Pitágoras, el cual es equivalente a:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{B.1.3}$$

En la bibliografía matemática resulta común representar la norma de un vector  $\mathbf{a}$  mediante la notación  $|\mathbf{a}|$ , la cual se puede observar es más sencilla de utilizar que  $\|\mathbf{a}\|$ . Esta notación simplificada representaría el determinante del vector  $\mathbf{a}$ ,



**Figura B.1** Representación de un vector en un sistema rectangular Cartesiano

sin embargo al no existir dicha operación aplicada a vectores se entiende que se trata de su norma.

### Ejemplo B.1

Calcular la norma del siguiente vector:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.4})$$

De acuerdo con la ecuación (B.1.3), el valor de la norma del vector  $\mathbf{v}$  es:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2 + (8)^2} = \sqrt{16 + 1 + 64} = \mathbf{9} \quad (\text{B.1.5})$$

### Producto de un vector por un escalar

El producto de un escalar  $\lambda$  por un vector  $\mathbf{a}$  da como resultado otro vector, cuyas componentes se obtiene al multiplicar cada componente  $a_i$  por el escalar  $\lambda$ , y se representa por

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.6})$$

### Ejemplo B.2

Encontrar el vector  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ , tomando el escalar  $\alpha = 5$  y el vector  $\mathbf{x} =$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Según la ecuación (B.1.6), el vector  $\mathbf{y}$  es:

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x} = \begin{bmatrix} (5)(2) \\ (5)(-4) \\ (5)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \\ 35 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.7})$$

### Producto escalar o interno de dos vectores

El producto escalar o interno de dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  da como resultado un escalar  $\lambda$ . De esta forma, si tenemos

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.8})$$

entonces su producto es igual a:

$$\lambda = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad (\text{B.1.9})$$

Siendo  $\theta$  el ángulo que se forma entre la intersección de los dos vectores. Si expresamos los vectores como matrices fila y columna, entonces para cumplir con la regla de multiplicación de matrices tendríamos que escribir

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3], \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.10})$$

de manera que su multiplicación sería igual a

$$\lambda = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = [a_1 \ a_2 \ a_3] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad (\text{B.1.11})$$

Esta forma de representar las operaciones vectoriales mediante matrices es bastante útil en la solución de las ecuaciones de la mecánica de medios continuos con métodos numéricos.

### Ejemplo B.3

Realizar el producto interno de los vectores  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ , cuyo

resultado será el escalar  $\gamma$ .

En forma de vectores y con la ecuación (B.1.9), encontramos que:

$$\gamma = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = (1)(4) + (-2)(6) + (3)(8) = 4 - 12 + 24 = \mathbf{16} \quad (\text{B.1.12})$$

En forma de matricial, esta misma operación se puede realizar multiplicando matrices fila y columna de acuerdo a la ecuación (B.1.11).

$$\gamma = \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{q} = [1 \ -2 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = (1)(4) + (-2)(6) + (3)(8) = 4 - 12 + 24 = \mathbf{16} \quad (\text{B.1.13})$$

### Producto vectorial o cruz de dos vectores

El producto vectorial de  $\mathbf{a}$  por  $\mathbf{b}$  está dado por

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{B.1.14})$$

El vector resultante se puede encontrar realizando la operación siguiente

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{B.1.15})$$

de manera que el resultado es

$$\mathbf{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{\mathbf{e}}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \hat{\mathbf{e}}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (\text{B.1.16})$$

Este tipo de operaciones donde aparecen sumas y restas no son funcionales al momento de hacer demostraciones en mecánica de medios continuos. Más adelante veremos la forma de eliminar esas operaciones.

#### Ejemplo B.4

Realizar el producto vectorial de los vectores  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ , cuyo

resultado será el vector  $\mathbf{s}$ .

Con las ecuaciones (B.1.15) y (B.1.16), encontramos que  $\mathbf{s} = \mathbf{q} \times \mathbf{r}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} \\ &= [(2)(5) - (3)(6)] \hat{\mathbf{e}}_1 - [(1)(5) - (3)(4)] \hat{\mathbf{e}}_2 + [(1)(6) - (2)(4)] \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &= (10 - 18) \hat{\mathbf{e}}_1 - (5 - 12) \hat{\mathbf{e}}_2 + (6 - 8) \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &= -8 \hat{\mathbf{e}}_1 + 7 \hat{\mathbf{e}}_2 - 2 \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned}$$

### Triple Producto Escalar

El triple producto escalar o producto mixto es el resultado de dos operaciones, una de ellas el producto vectorial de dos vectores y la segunda operación es el producto escalar del resultado anterior por el tercer vector dando como resultado un escalar. Así tenemos que:

$$\lambda = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad (\text{B.1.17})$$

El vector resultante se puede encontrar realizando la operación siguiente

$$\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{B.1.18})$$

de manera que el resultado es

$$\lambda = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \quad (\text{B.1.19})$$

#### Ejemplo B.5

Realizar el triple producto escalar de los vectores  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$  y

$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ , cuyo resultado será el escalar  $\beta$ .

Con las ecuaciones (B.1.18) y (B.1.19), encontramos que  $\beta = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{s})$ .

$$\begin{aligned} \beta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 1 [(6)(7) - (5)(-1)] - 2 [(4)(7) - (5)(1)] + (-3) [(4)(-1) - (6)(1)] \\ &= 1(42 + 5) - 2(28 - 5) - 3(-4 - 6) = (1)(47) + (-2)(23) + (-3)(-10) \\ &= \mathbf{31} \end{aligned}$$

### Triple Producto Vectorial

Es un producto vectorial de dos vectores, uno de los cuales es a su vez un producto vectorial. Se representa por

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (\text{B.1.20})$$

Si definimos los escalares  $\alpha$  y  $\beta$  con

$$\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{B.1.21})$$

$$\beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{B.1.22})$$

entonces podemos escribir la ecuación (B.1.20) como

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{b} - \beta \mathbf{c} \quad (\text{B.1.23})$$

y para realizar la operación anteriormente indicada podemos recurrir a la ecuación (B.1.6), que ejemplifica la multiplicación de un escalar por un vector.

### Subsección

#### B.1.2. Rotación de Vectores

Sea un vector  $\mathbf{a}$  en un sistema rectangular Cartesiano igual a

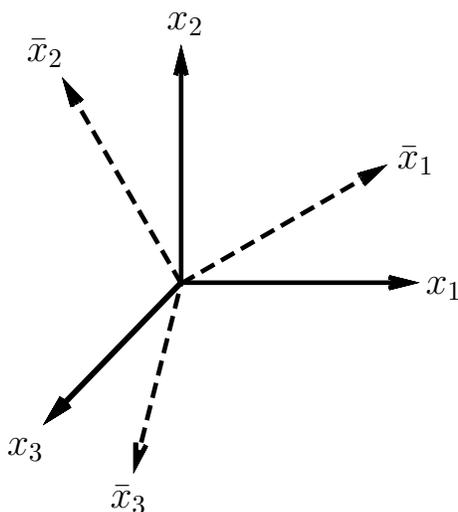
$$\mathbf{a} = a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = (a_1, a_2, a_3) \quad (\text{B.1.24})$$

donde los valores  $a_1, a_2, a_3$  son las componentes del vector que, salvo que se indique lo contrario, son números reales.

Hasta el momento las componentes del vector  $\mathbf{a} = a_i \hat{\mathbf{e}}_i$  han sido determinadas con respecto a un sistema coordenado  $x_1, x_2, x_3$  definido por los vectores base o vectores unitarios  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ . Dado un nuevo sistema coordenado  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ , cuyos vectores base son  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ , los cuales también forman una base ortonormal, permiten expresar el mismo vector de la forma:

$$\mathbf{a} = \bar{a}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{a}_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{a}_3 \bar{\mathbf{e}}_3 = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \quad (\text{B.1.25})$$

donde los factores  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  corresponden a las componentes del vector  $\mathbf{a}$  con respecto al sistema coordenado  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ . En la figura B.2 se muestran ambos sistemas coordenados.



**Figura B.2** Rotación de sistemas coordenados

Con la finalidad de relacionar los dos sistemas de coordenadas, se define el coeficiente de rotación  $M_{ij}$  como el coseno director del vector  $\bar{\mathbf{e}}_i$  con respecto al vector  $\hat{\mathbf{e}}_j$ , de forma que:

$$M_{ij} = \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \quad (\text{B.1.26})$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $\hat{\mathbf{e}}_j$  se obtiene

$$\bar{\mathbf{e}}_i = M_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j \quad (\text{B.1.27})$$

Mediante un procedimiento similar se puede demostrar que:

$$\hat{\mathbf{e}}_j = M_{ij} \bar{\mathbf{e}}_i \quad (\text{B.1.28})$$

Sea un vector definido por  $\mathbf{a} = a_i \hat{\mathbf{e}}_i = \bar{a}_i \bar{\mathbf{e}}_i$ , las componentes del sistema coordenado  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  se expresan en función de las componentes dadas en el sistema coordenado original en notación indicial de la forma

$$\bar{a}_i = M_{ij} a_j \quad (\text{B.1.29})$$

Reescribiendo la ecuación anterior en notación matricial se tiene que

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.30})$$

donde se define la matriz  $\mathbf{M}$  como la matriz de rotación cuyos coeficientes son los cosenos directores  $M_{ij}$ . La ecuación inversa correspondiente a la ecuación (B.1.30) se puede expresar por

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.31})$$

Sin embargo se puede demostrar que la matriz de rotación  $\mathbf{M}$  es ortogonal, por lo que su inversa es igual a su transpuesta, es decir  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$ . Obviamente en la práctica resulta mucho más sencillo calcular una transpuesta que una inversa. Si desarrollamos la forma matricial de la ecuación (B.1.30) para cada componente se obtiene

$$\bar{a}_1 = M_{11} a_1 + M_{12} a_2 + M_{13} a_3 = f(a_1, a_2, a_3) \quad (\text{B.1.32})$$

Sin embargo, en mecánica de medios continuos es común expresar que los vectores (y su generalización a tensores de cualquier orden, como veremos más adelante) son función de ciertos componentes en la forma

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_1(a_1, a_2, a_3) = \bar{a}_1(\mathbf{a}) \quad (\text{B.1.33})$$

la cual es equivalente a la ecuación (B.1.32). El mismo procedimiento se puede seguir para las otras dos componentes,  $\bar{a}_2$  y  $\bar{a}_3$ , es decir

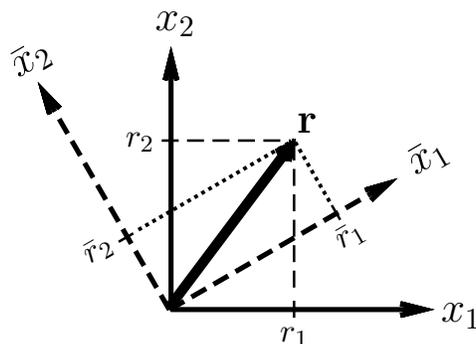
$$\bar{a}_i = \bar{a}_i(a_1, a_2, a_3) \quad (\text{B.1.34})$$

para cualquier valor de  $i = 1, 2, 3$ . Su representación inversa será

$$a_i = a_i(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \quad (\text{B.1.35})$$

Esta forma general tridimensional también es aplicable a problemas bidimensionales, teniendo cuidado de eliminar el eje de la tercera dimensión.

### Ejemplo B.6



**Figura B.3** Sistemas coordenados global y local

En un sistema coordenado rectangular cartesiano bidimensional, se encuentra el vector  $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  cuya base vectorial es  $\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , tal como se aprecia en la figura B.3. Encontrar las componentes del vector resultante  $\bar{\mathbf{r}}$  si los ejes globales se rotan a un sistema de ejes locales que se encuentra a  $30^\circ$  respecto a la horizontal.

Los valores de la nueva base vectorial medidos respecto a la horizontal en una inclinación de  $30^\circ$  serán  $\bar{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$  y  $\bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ .

De acuerdo con la ecuación (B.1.26), los coeficientes de la matriz de rotación valen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Ahora, utilizando la ecuación (B.1.30) podemos encontrar  $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}$ , por lo que

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.598 \\ 1.964 \end{bmatrix}$$



# Anexo C

## Integración Numérica

### Sección

### C.1. Puntos de Integración

Ya que es común realizar las integrales del método de los elementos finitos mediante integración numérica, a continuación se encuentran los valores exactos y aproximados que se utilizan en la cuadratura de Gauss-Legendre.

**Tabla C.1** Puntos de Integración para la Cuadratura de Gauss

Puntos	Posición	Peso
$n_{gauss}$	$\xi_i = [-1, +1]$	$w_i$
1	0	2
2	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0.57735026919$	1
3	0  $\pm \frac{\sqrt{15}}{5} \approx \pm 0.774596669242$	$\frac{8}{9} \approx 0.888888888889$  $\frac{5}{9} \approx 0.555555555556$
4	$\pm \sqrt{\left(3 - 2\sqrt{6/5}\right)/7} \approx \pm 0.339981043585$  $\pm \sqrt{\left(3 + 2\sqrt{6/5}\right)/7} \approx \pm 0.861136311594$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36} \approx 0.652145154861$  $\frac{18 - \sqrt{30}}{36} \approx 0.347854845139$
5	0  $\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 - 2\sqrt{10/7}} \approx \pm 0.538469310107$  $\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 + 2\sqrt{10/7}} \approx \pm 0.906179845937$	$\frac{128}{225} \approx 0.568888888889$  $\frac{322 + 13\sqrt{70}}{900} \approx 0.478628670499$  $\frac{322 - 13\sqrt{70}}{900} \approx 0.236926885057$

# Anexo D

## Simbología

### Sección

### D.1. Simbología Básica Capítulo 2

$\mathbf{b}$	Vector de fuerzas másicas
$\mathbf{C}$	Ecuación constitutiva (propiedades del material)
$\frac{D(\bullet)}{Dt}$	Derivada material
$\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$	Tensor de deformación de Green-Lagrange
$\mathbf{f}$	Vector de fuerzas totales
$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$	Tensor material gradiente de deformación
$\mathbf{t}$	Vector de fuerzas de superficie
$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$	Vector de desplazamiento material
$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$	Vector de velocidad material
$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$	Vector de aceleración material
$\mathbf{x}$	Vector de posición espacial
$\mathbf{X}$	Vector de posición material
$\delta$	Cantidad virtual
$\rho$	Densidad
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzos de Cauchy
$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t)$	Tensor de deformación infinitesimal
$\nabla$	Gradiente
$\nabla \cdot$	Divergencia

## Sección

**D.2. Simbología Básica Capítulo 3**

$B_{iklI}$	Tensor deformación-desplazamiento
$\mathbf{B}_I$	Matriz deformación-desplazamiento del nodo $I$
$C^0$	Función de continuidad cero
$C^n$	Función de continuidad $n$
$f_{iI}^{int}$	Tensor de fuerzas internas
$f_{iI}^{ext}$	Tensor de fuerzas externas
$n_j$	Vector normal a la superficie
$N_I$	Función de forma del nodo $I$
$\bar{t}_i$	Vector de fuerzas de contorno
$u_i$	Funciones de prueba / desplazamientos reales
$u_i^h$	Vector de desplazamiento discretizado
$u_{iI}$	Desplazamiento en dirección $i$ del nodo $I$
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\delta u_i$	Funciones de ensayo / desplazamientos virtuales
$\delta u_i^h$	Vector de desplazamiento virtual discretizado
$\delta u_{iI}$	Desplazamiento virtual en dirección $i$ del nodo $I$
$\delta \varepsilon_{ij}$	Tensor de deformaciones infinitesimales virtuales
$\delta W^{int}$	Trabajo virtual interno
$\delta W^{ext}$	Trabajo virtual externo
$\Gamma$	Contorno del problema en estudio
$\Gamma^D$	Contorno de Dirichlet
$\Gamma^N$	Contorno de Neumann
$\Omega$	Dominio del problema en estudio
$\rho b_i$	Fuerzas másicas
$\sigma_{ij}$	Tensor de esfuerzos de Cauchy
$\varepsilon_{kl}^h$	Tensor discretizado de deformaciones infinitesimales
$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$	Vector de deformaciones infinitesimales
$\{\boldsymbol{\sigma}\}$	Vector de esfuerzos de Cauchy

## Sección

## D.3. Simbología Básica Capítulo 4

$A$	Área de la sección transversal
$E$	Módulo de elasticidad / Young
$F_i$	Fuerza puntual $i$
$F^h$	Fuerza discretizada
$N_1(x)$	Función de forma/interpolación del nodo 1
$N_2(x)$	Función de forma/interpolación del nodo 2
$q$	Carga axial uniformemente distribuida
$u$	Desplazamiento unidimensional
$u^h$	Desplazamiento discretizado unidimensional
$\mathbf{B}$	Matriz deformación-desplazamiento
$\mathbf{f}^{int}$	Vector de fuerzas internas
$\mathbf{f}^{ext}$	Vector de fuerzas externas
$\mathbf{F}$	Vector de fuerzas puntuales
$\mathbf{K}$	Matriz tangente/de rigidez
$\mathbf{N}$	Vector de funciones de forma
$\mathbf{r}$	Vector de los residuos
$\mathbf{u}$	Vector de desplazamientos
$\varepsilon$	Deformación unidimensional
$\varepsilon^h$	Deformación discretizada unidimensional
$\sigma$	Esfuerzo unidimensional
$\sigma^h$	Esfuerzo discretizado unidimensional
$\delta u$	Desplazamiento virtual unidimensional
$\delta u^h$	Desplazamiento virtual discretizado unidimensional
$\delta u _{x=0}$	Valor del desplazamiento virtual en $x = 0$
$\delta u _{x=l}$	Valor del desplazamiento virtual en $x = l$
$\delta \mathbf{u}$	Vector de desplazamientos virtuales
$\delta \varepsilon$	Deformación virtual unidimensional
$\delta \varepsilon^h$	Deformación virtual discretizada unidimensional

## Sección

**D.4. Simbología Básica Capítulo 5**

$A$	Área de la sección transversal
$E$	Módulo de elasticidad / Young
$F_i$	Fuerza puntual $i$
$F^h$	Fuerza discretizada
$n_{PG}$	Número de puntos de Gauss
$N_1(\xi)$	Función de forma/interpolación del nodo 1
$N_2(\xi)$	Función de forma/interpolación del nodo 2
$N_3(\xi)$	Función de forma/interpolación del nodo 3
$q$	Carga axial uniformemente distribuida
$u$	Desplazamiento unidimensional
$u^h$	Desplazamiento discretizado unidimensional
$\mathbf{f}^{int}$	Vector de fuerzas internas
$\mathbf{f}^{ext}$	Vector de fuerzas externas
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{u}$	Vector de desplazamientos
$x$	Geometría en espacio real
$x^h(\xi)$	Geometría discretizada en espacio normalizado
$\xi, \eta$	Ejes de referencia en el espacio normalizado
$\varepsilon^h$	Deformación discretizada unidimensional
$\sigma^h$	Esfuerzo discretizado unidimensional
$\delta u^h$	Desplazamiento virtual discretizado unidimensional
$\delta u_1$	Desplazamiento virtual en el nodo 1
$\delta u_2$	Desplazamiento virtual en el nodo 2
$\delta u_3$	Desplazamiento virtual en el nodo 3
$\delta \mathbf{u}$	Vector de desplazamientos virtuales
$\delta \varepsilon^h$	Deformación virtual discretizada unidimensional

## Sección

**D.5. Simbología Básica Capítulo 6**

$A$	Área del elemento bidimensional
$CARD$	Matriz de las derivadas en espacio $x - y$
$DERIV$	Matriz de las derivadas en espacio normalizado $\xi - \eta$
$J$	Matriz jacobiana ( $2 \times 2$ )
$N_I(x, y)$	Función de forma bidimensional $x - y$ del nodo $I$
$N_I(\xi, \eta)$	Función de forma bidimensional $\xi - \eta$ del nodo $I$
$t$	Espesor del problema bidimensional
$u^h$	Componente en dirección $x$ de desplazamiento
$v^h$	Componente en dirección $y$ de desplazamiento
$\mathbf{B}_I$	Matriz deformación-desplazamiento
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{u}$	Vector de desplazamientos
$\mathbf{f}^{int}$	Vector de fuerzas internas
$\mathbf{f}^{ext}$	Vector de fuerzas externas
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vector de deformación bidimensional
$\boldsymbol{\sigma}$	Vector de esfuerzo bidimensional
$\xi, \eta$	Ejes de referencia en el espacio normalizado

## Sección

**D.6. Simbología Básica Capítulo 7**

$V$	Volumen del elemento tridimensional
$CARTD$	Matriz de las derivadas en espacio $x - y - z$
$DERIV$	Matriz de las derivadas en espacio normalizado $\xi - \eta - \zeta$
$J$	Matriz jacobiana ( $3 \times 3$ )
$N_I(\xi, \eta, \zeta)$	Función de forma tridimensional $\xi - \eta - \zeta$ del nodo $I$
$u$	Componente en dirección $x$ de desplazamiento
$v$	Componente en dirección $y$ de desplazamiento
$w$	Componente en dirección $z$ de desplazamiento
$\mathbf{B}_I$	Matriz deformación-desplazamiento
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{u}$	Vector de desplazamientos
$\mathbf{f}^{int}$	Vector de fuerzas internas
$\mathbf{f}^{ext}$	Vector de fuerzas externas
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vector de deformación tridimensional
$\boldsymbol{\sigma}$	Vector de esfuerzo tridimensional
$\xi, \eta, \zeta$	Ejes de referencia en el espacio normalizado

# Referencias

- Batchelor, G. K. (2000). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Bathe, Klaus-Jürgen (1996). *Finite Elements Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Bhattacharjee, Sudip S. (2022). *Finite Element Analysis of Solids and Structures*. CRC-Press.
- Chorin, A. J. (1967). «A numerical method for solving incompressible viscous problems». *Journal of Computational Physics*, **2**, pp. 12–26.
- Clough, R. W. y Tocher, J. L. (1965). «Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending». *Proc. Conf. Matrix Methods In Structural Mechanics, AFIT, Air Force Base, Ohio*, pp. 515–545.
- Cook, Robert D.; Malkus, David S. y Plesha, Michael E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Wiley, New York, 3rd<sup>a</sup> edición.
- Ferreira, Antonio J. M. y Fantuzzi, Nicholas (2020). *MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures*. Springer.
- Ghia, U.; Ghia, K. N. y Shin, C. T. (1982). «High-re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes Equations and the Multigrid Method». *Journal of Computational Physics*, **48**, pp. 387–411.
- Gurtin, Morton E. (1981). *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, Florida.

- Hejazi, Farzad y Esfahani, Hojjat Mohammadi (2021). *Solving Complex Problems for Structures and Bridges using ABAQUS Finite Element Package*. CRC Press.
- Holzappel, Gerhard A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley, Chichester.
- Hughes, T. J. R. y Brooks, A. N. (1979). «A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion». En: T. J. R. Hughes (Ed.), *FEM for Convection Dominated Flows*, ASME, New York.
- Hughes, T. J. R. y Brooks, A. N. (1982). «A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: applications to the streamline upwind procedure». En: R. H. Gallagher; D. M. Norrie; J. T. Oden y O. C. Zienkiewicz (Eds.), *Finite Element in Fluids*, volumen IV, pp. 46–65. Wiley, London.
- Hughes, T. J. R.; Franca, L. P. y Balestra, M. (1986). «A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **59**, pp. 85–99.
- Hughes, T. J. R.; Franca, L. P. y Hulbert, G. M. (1989). «A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **73**, pp. 173–189.
- Hughes, Thomas J. R. (1987). *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Kundu, Pijush K. y Cohen, Ira M. (2002). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.
- Lee, Sung W. y Chung, Peter W. (2021). *Finite Element Method for Solids and Structures: A Concise Approach*. Cambridge University Press, UK.
- Malvern, Lawrence E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Marsden, J. E. y Hughes, Thomas J. R. (1994). *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover, New York.

- Melosh, R. J. (1961). «A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending». *Journal of Aerospace Science*, **28**, pp. 34–42.
- Mindlin, R. D. (1951). «Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates». *Journal of Applied Mechanics*, **18**, pp. 31–38.
- Popov, Egor P. (1992). *Introducción a la Mecánica de Sólidos*. Limusa, México.
- Reissner, E. (1938). «On tension field theory». En: *Procedures of the 5th International Congress of Applied Mechanics*, pp. 88–92.
- Reissner, E. (1945). «The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates». *Journal of Applied Mechanics*, **12**, pp. 69–76.
- Schröder, Jörg y de Mattos Pimenta, Paulo (2020). *Novel Finite Element Technologies for Solids and Structures*. Springer International Publishing.
- Spencer, A. J. M. (1980). *Continuum Mechanics*. Longman mathematical texts, London.
- Timoshenko, Stephen P. (1970). *Resistencia de Materiales, Partes I y II*. Espasa-Calpe, Madrid.
- Valdés-Vázquez, Jesús Gerardo (2016). *Ecuaciones Fundamentales de Conservación y Balance para Medios Continuos*. GEMEC/UGTO, Guanajuato.
- Valdés-Vázquez, Jesús Gerardo (2020). *Mecánica de Medios Continuos en Ingeniería Civil*. GEMEC/UGTO, Guanajuato.
- Wagner, H. (1929). «Flat sheet metal girders with very thin metal web». *Zeitschrift für Flugtechnik Motorluftschiffahrt*, **20**, pp. 200–207.
- Zienkiewics, O. C. y Cheung, Y. K. (1964). «The finite element method for analysis of elastic isotropic and isotropic slabs». *Proc. Inst. Civil Engineering*, **28**, pp. 471–488.
- Zienkiewicz, O. C. y Taylor, Robert L. (1989). *The Finite Element Method*. volumen 1 and 2. McGraw-Hill, London, 4th<sup>a</sup> edición.

# Índice

- aceleración
  - material, 10
- cálculo variacional, 32
- cinemática, 8
- condición
  - de contorno, 31
  - iniciales, 31
- configuración
  - actual, 8
  - de referencia, 8
  - deformada, 8
  - inicial, 8
- conjugados en potencia, 23
- conservación
  - de la masa, 16
- conservación de momento angular, 19
- conservación de momento lineal, 17
- constantes elásticas, 25
- contorno
  - condición de, 31
  - Dirichlet, 31
  - Neumann, 31
- convectivo
  - término, 11
- coordenadas
  - espaciales, 9
  - eulerianas, 9
  - lagrangianas, 9
  - sistema natural, 84
  - sistema normalizado, 84
- deformación, 11
  - tensor espacial gradiente, 13
  - tensor material gradiente, 11
- densidad, 16
- derivada
  - espacial, 10
  - material, 10
  - total, 10
- desplazamiento, 9
  - tensor material gradiente, 12
- determinante del Jacobiano, 11
- Dirichlet, contorno de, 31
- divergence, 16
- divergencia, 20
- ecuación constitutiva
  - elasticidad lineal, 26
  - elasticidad no lineal, 28
  - fluidos Newtonianos, 29
- ecuación de continuidad, 17
- ecuación de equilibrio interno, 20
- ecuación de momento, 19
  - forma euleriana, 19
  - forma lagrangiana, 19, 21
- ecuaciones constitutivas, 24

- ecuaciones de conservación, 15
  - continuidad, 17
  - energía, 22
  - masa, 16
  - momento angular, 19
  - momento lineal, 17
- ecuaciones en derivadas parciales, 16
- elasticidad
  - lineal, 24
  - no lineal, 27
- energía
  - cinética, 21
  - conservación, 22
  - de deformación, 25
  - interna, 21
  - total, 21
- esfuerzo
  - primer tensor de Piola-Kirchhoff, 15
- esfuerzos
  - tensor de Cauchy, 14
  - tensor nominal, 15
- espacial
  - descripción, 9
- espaciales
  - coordenadas, 9
- estáticos
  - problemas, 20
- Euler
  - ecuación, 30
- euleriana
  - descripción, 9
- eulerianas
  - coordenadas, 9
- fluidos incompresibles, 29
- fluidos Newtonianos, 28
- forma
  - clásica, 31
  - débil, 33
  - fuerte, 31
  - variacional, 32, 33
- forma conservativa
  - masa, 17
- formulación euleriana, 19
- formulación lagrangiana
  - actualizada, 19
  - total, 21
- fuerza
  - de superficie, 14
- fuerzas
  - másicas, 18
  - superficiales, 18
- funcional, 32
- funciones de forma
  - unidimensionales, 57
- funciones de interpolación
  - de desplazamientos, 57
  - de geometría, 88
- gradiente
  - derecho, 11
  - izquierdo, 11
- Green-Lagrange
  - tensor de dedormación, 12
- incompresible
  - material, 17
- infinitesimal
  - tensor de deformación, 12
- inicial
  - condición, 31
- integración numérica, 85
- Kronecker
  - delta, 12
- Lagrange

- polinomios, 83
- lagrangiana
  - descripción, 9
- lagrangianas
  - coordenadas, 9
- Laplaciano, 30
- masa, 16
- material
  - derivada, 10
  - descripción, 9
  - punto, 8
- material isotrópico, 25
- materiales
  - coordenadas, 9
- matriz Jacobiana, 11
- Navier-Stokes
  - ecuaciones, 30
- Neumann, contorno de, 31
- presión termodinámica, 28
- primera ley de la termodinámica, 22
- principio del trabajo virtual, 32
- Reynolds
  - número, 30
  - teorema de transporte, 16
- Saint Venant-Kirchhoff
  - material, 27
- sistema de coordenadas
  - natural, 84
  - normalizado, 84
  - rectangular cartesiano, 9
- Stokes
  - flujo, 30
- termodinámica
  - primera ley, 22
- trabajo virtual
  - principio, 32
- variacional
  - cálculo, 32
- velocidad
  - espacial, 10
  - material, 10
  - tensor de deformación, 13
  - tensor de rotación, 13
  - tensor espacial gradiente, 13
- virtual
  - principio del trabajo, 32

# UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

Dra. Claudia Susana Gómez López  
Rectora General

Dr. Salvador Hernández Castro  
Secretario General

Dr. José Eleazar Barboza Corona  
Secretario Académico

Dra. Graciela Ma. de la Luz Ruiz Aguilar  
Secretaria de Gestión y Desarrollo

Dra. Elba Margarita Sánchez Rolón  
Coordinadora del Programa Editorial Universitario

Elementos Finitos en Mecánica de Sólidos  
terminó su tratamiento editorial  
en el mes de diciembre de 2024.  
En su composición se utilizó  
la fuente tipográfica Computer Modern  
de 12, 14, 18, 21, 30 y 36 puntos.  
El cuidado de la edición estuvo a cargo  
de Jesús Gerardo Valdés Vázquez.