

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



Cuantización canónica de fermiones de segundo orden

Julio César Olmos Gómez

Tesis presentada para la obtención del título de:
Maestro en física

Director de tesis:
Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo

Línea de Investigación:
Física de partículas y teoría cuántica de campos
Universidad de Guanajuato
División de Ciencias e Ingenierías
León, Guanajuato
11 de junio de 2024

Cuantización canónica de fermiones de segundo orden

Julio César Olmos Gómez

Tesis presentada para la obtención del título de:
Maestro en física

Director de tesis:
Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo

Línea de Investigación:
Física de partículas y teoría cuántica de campos
Universidad de Guanajuato
División de Ciencias e Ingenierías
León, Guanajuato
11 de junio de 2024

Una gran parte de mi trabajo es solamente
jugar con ecuaciones y ver qué producen.

Paul Dirac

Declaro que esta tesis es resultado de mi trabajo personal, que no he realizado copia o plagio alguno, ni robo de ideas. En este trabajo se presentan diversas fuentes bibliográficas, las cuales fueron indispensables en la elaboración de este trabajo y su correcta mención proporciona la información necesaria para sustentar el mismo. Declaro que en este trabajo no se hizo uso de ningún tipo de inteligencia artificial o programa externo al editor de texto (Overleaf) empleado en la redacción de este trabajo.

Agradecimientos

He de agradecer al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por su apoyo económico durante mis estudios de maestría, también a la Universidad de Guanajuato (UG), por permitirme desarrollar este proyecto en su División de Ciencias e Ingenierías (DCI) como su estudiante de posgrado.

Quiero mencionar mi agradecimiento con el Dr. Rodolfo Ferro y el Dr. Eduardo Peinado por su importante colaboración en el desarrollo de este proyecto, asimismo a los licenciados Pablo Bretschneider y Abraham Domínguez por su asesoramiento en el manejo de la herramienta $\text{\LaTeX}$ para la redacción de este trabajo. También, estoy sumamente agradecido con el Dr. Carlos Vaquera por la oportunidad que me dió para trabajar en este proyecto como su estudiante, así como por todo el apoyo que me ha brindando desde mi licenciatura hasta el día de hoy.

Finalmente, agradezco a mis padres, Julio y Fabiola por creer en mí y darme todo su apoyo desde mi infancia, a mi hermano Mario, a mi tía Gabriela y mis abuelos Julio y Ma. Cristina por animarme y creer en mí. A mis amigos de toda la vida, a los que conocí no hace mucho, a los que ya no lo son, a mis seres amados, pues sin ellos, la persona que soy hoy, no sería la misma.

Resumen

En este trabajo se estudió la segunda cuantización canónica para campos fermiónicos de espín $\frac{1}{2}$ con ocho grados de libertad, sujetos a la densidad lagrangiana de Klein-Gordon la cual satisface un formalismo pseudohermítico a través de la redefinición de su campo adjunto mediante un operador unitario y hermítico, haciendo así a los fermiones de segundo orden una teoría autoncosistente, es decir, causal, invariante de Poincaré, invariante ante CPT y renormalizable conforme al grado de divergencia superficial.

Palabras clave: segunda cuantización canónica, campos fermiónicos, formalismo pseudohermítico, campo adjunto, fermiones de segundo orden, causal, invariante de Poincaré, invariante ante CPT, renormalizable, criterio de divergencia superficial.

Abstract

This work encompasses the study of the second canonical quantization of fermionic fields of spin $\frac{1}{2}$ with eight degrees of freedom, which are subject to the Klein-Gordon lagrangian density, which satisfies a pseudo-hermitian formalism due to re-definition of its adjoint field through an hermitian and unitary operator. Thereof, making the second-order fermions theory self-consistent, e. g., causal, Poincaré covariant, CPT invariant and renormalizable according to the superficial degree of divergence.

Key words: second canonical quantization, fermionic, fermionic fields, pseudo-hermitian formalism, adjoint field, second order fermions, causal, Poincaré invariant, CPT invariant, renormalizable, superficial degree of divergence.

Contenido

Agradecimientos	VI
Resumen	VIII
Introducción	1
1. Teoría de Dirac	5
1.1. Conceptos preeliminares	5
1.1.1. Campo de Klein-Gordon	5
1.1.2. Invariancia de Lorentz	6
1.1.3. Cuantización del campo de Klein-Gordon	8
1.2. Teoría de Dirac	9
1.2.1. Álgebra de Clifford	9
1.2.2. Ecuación de Dirac	10
1.2.3. Dirac y Klein-Gordon	11
1.2.4. Solución a la ecuación de Dirac	11
1.2.5. Segunda cuantización canónica del campo de Dirac	13
1.2.6. Ordenamiento Normal	15
1.2.7. Causalidad	17
1.3. Cargas conservadas	18
1.3.1. Traslaciones espacio-temporales	18
1.3.2. Carga	19
1.3.3. Espín	20
1.4. Simetrías discretas	22
1.4.1. Paridad	22
1.4.2. Inversión Temporal	23
1.4.3. Conjugación de carga	23
1.5. Invariancia de Poincaré	24

2. Cuantización de fermiones de segundo orden y pseudohermiticidad	25
2.1. Solución a la ecuación de Klein-Gordon para fermiones	25
2.2. Segunda cuantización canónica para fermiones de segundo orden	27
2.2.1. Norma negativa	28
2.2.2. Redefinición del campo adjunto y cuantización canónica	28
2.3. Pseudohermiticidad	30
2.3.1. Mecánica cuántica pseudohermítica	30
2.3.2. Producto interno	31
2.3.3. Eigenvalores	31
2.3.4. Evolución temporal	31
2.3.5. Teoría cuántica de campos pseudohermítica	31
2.4. Operador η	32
2.4.1. η y el campo adjunto	32
2.4.2. η y los operadores de creación y aniquilación	32
2.4.3. Forma explícita de η	34
3. Capítulo 3: Teoría de campo para fermiones de segundo orden	35
3.1. Causalidad	35
3.2. Cantidades conservadas	36
3.2.1. Generadores de traslaciones espacio-temporales	36
3.2.2. Hamiltoniano	37
3.2.3. 3-momento	37
3.2.4. 4-momento	37
3.2.5. Carga	39
3.2.6. Espín	40
3.2.7. Estados degenerados	42
3.3. Invarianza de Poincaré	42
3.3.1. Invariancia de Lorentz	42
3.3.2. Invarianza de Poincaré	44
3.4. Simetría CPT	46
3.4.1. Paridad	46
3.4.2. Inversión Temporal	47
3.4.3. Conjugación de Carga	49
3.4.4. CPT	50
3.5. Simetría simpléctica	50
3.6. Renormalización	51

Conclusiones y perspectivas	53
A. Anexo: Expresiones útiles	54
B. Anexo: Cuantización de fermiones de segundo orden y pseudohermiticidad	55
C. Anexo: Teoría de campo para fermiones de segundo orden	59
C.1. Relaciones de cuantización canónica	59
C.2. Hamiltoniano y 3-momento	63
C.2.1. Hamiltoniano	63
C.2.2. 3-momento	66
C.3. Carga	69
C.4. Espín	71
Bibliografía	74

La cuantización canónica es el proceso heurístico¹ en el que la mecánica cuántica toma información clásica y la vuelve cuántica. A esto se le suele llamar *cuantizar*; dicho proceso toma las coordenadas generalizadas de un sistema y sus momentos conjugados, promoviéndolos a operadores los cuales actuarán sobre un cierto espacio de Hilbert, donde sus vectores se definen como estados cuánticos, cantidades que poseen las propiedades cuánticas de las partículas.

Primero se toman los corchetes de Poisson y se promueven a un conmutador. En el caso de la mecánica cuántica convencional, la posición y el momento lineal suelen ser las dos variables conjugadas que son promovidas a operadores junto con su corchete de Poisson, a esto se le conoce como la *primera cuantización canónica*:

$$x_j \rightarrow \hat{x}_j, \quad p_j \rightarrow \hat{p}_j; \quad \{x_j, p_j\}_{poisson} \rightarrow [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}, \quad \{x_j, x_k\}_{poisson} \rightarrow [\hat{x}_j, \hat{x}_k] = 0, \quad (0-1)$$

donde los subíndices $j, k = 1, 2, 3$ denotan las componentes vectoriales e i el número imaginario. Por otro lado el símbolo $\hat{}$ indica que el objeto es un operador. Los símbolos $[..., ...]$ son conmutadores (o en el caso fermiónico, anticonmutadores, $\{..., ...\}$), lo cual se hablará más adelante.

A partir de la energía clásica, $E = H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V$ y usando que en la base de posiciones, $E \rightarrow i\frac{d}{dt}$ y $\mathbf{p} = -i\nabla$, donde $\mathbf{p}$ es el 3-momento, se puede construir, heurísticamente, la ecuación de Schrödinger, la cual, en unidades naturales², es

$$i\frac{d}{dt}\langle \mathbf{x}|\alpha \rangle = H\langle \mathbf{x}|\alpha \rangle = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V\right)\langle \mathbf{x}|\alpha \rangle, \quad (0-2)$$

donde $|\alpha\rangle$ es un estado cuántico y $\langle \beta|\alpha \rangle \equiv \Psi_\alpha(\beta)$ no es más que la proyección de los estados “alfa” en la base de posiciones, es decir, la *función de onda*. Por otro lado, H y V son los operadores Hamiltoniano y el asociando a la energía potencial, respectivamente, donde omitiremos la notación $\hat{}$ para operadores por convención a partir de ahora.

¹procesos no rigurosos para la resolución de problemas.

²Las unidades naturales son $c = \hbar = e = \epsilon_0 = G = 1$ y serán empleadas en este trabajo por convención.

A pesar de que el formalismo cuántico resulta ser robusto, este es incapaz de ser uno combatible con la relatividad especial. Esto es fácil de ver, pues el Hamiltoniano involucra segundas derivadas con respecto a la posición, diferentes a la derivada temporal presente en [0-2]. Por ejemplo, al realizar una transformación de la forma $t \rightarrow t'$ y $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$, las derivadas con respecto al tiempo y a la posición al tener un grado distinto, trasformarán diferente. Estos problemas fueron resueltos gracias a la teoría cuántica de campos.

La teoría cuántica de campos asume que existen ciertas cantidades llamadas *campos*, objetos que están definidos sobre todo el espacio-tiempo y los cuales, al ser sometidos a la *segunda cuantización canónica*, estos adquieren propiedades cuánticas. La segunda cuantización son relaciones de conmutación (o anticonmutación) a tiempos iguales,

$$\{\psi_a(x), \pi_{\psi_b}(y)\}_{poisson} \rightarrow [\psi_a(x), \pi_{\psi_b}(y)] = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad y \quad [\psi_a(x, t), \psi_b(y, t)] = 0, \quad (0-3)$$

donde ψ es un campo mientras que π es el momento conjugado de ψ . Es importante mencionar que a partir de este momento se usará la convención de la métrica $\eta^{\mu\nu} = diag(+1, -1, -1, -1)$ de tal forma que podemos escribir la 4-posición $x^\mu \equiv x = (t, \mathbf{x})$, el 4-momento $p^\mu = p = (p^0, \mathbf{p})$ y $\partial^\mu = (\frac{d}{dt}, -\nabla)$.

Con este formalismo, la primera ecuación cuántica relativista fue la ecuación de Klein-Gordon, la cual procede similar a la ecuación de Schrödinger, pero a partir de la relación de dispersión o la energía relativista,

$$E^2 = p^2 + m^2 \rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi = (\square + m^2)\psi = 0, \quad (0-4)$$

sin embargo, a través del formalismo de Hamiltoniano se puede probar que la densidad de probabilidad asociada a este campo es proporcional a la energía que satisface la relación de dispersión, la cual al sacar raíz cuadrada, es posible encontrar energías negativas, lo que conduce a densidades de probabilidad negativas, lo cual no tiene sentido.

Paul Dirac, en 1928 [5] logró concretar una idea, en la cual buscaba obtener “la raíz cuadrada” de la ecuación de Klein-Gordon, de tal forma que se pudiese aislar la solución positiva de la energía asociada, haciendo uso (sin saberlo) del álgebra [3] de Clifford, la cual definiremos más adelante, (la cual no es más que un anticonmutador). La ecuación de Dirac es

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\chi = 0 \quad (0-5)$$

donde γ^μ son las llamadas matrices gamma, elementos del álgebra de Clifford; y χ el campo de Dirac para partículas que obedecen el principio de exclusión de Pauli, es decir,

³Relaciones de conmutación o anticonmutación entre elementos de un grupo que suelen ser operadores.

fermiones, como el electrón. La ecuación de Dirac puede ser resuelta por la combinación lineal de ondas planas $e^{-ip \cdot x}$ y $e^{ip \cdot x}$, de donde se puede observar que la energía negativa está presente.

La ecuación de Dirac trajo consigo un nuevo paradigma, el de los campos cuánticos, pues aunque la energía negativa parecía ser un problema, con este nuevo formalismo dejó de serlo, pues en realidad, la densidad Hamiltoniana, al ser cuantizada, esta tenía como espectro de eigenvalores a la energía. Asimismo, la teoría de Dirac permitió predecir la antimateria, que en 1932 Carl D. Anderson confirmó al descubrir el positrón. De la misma manera, esta teoría, es capaz de describir el momento magnético del electrón, por lo que no es atrevido decir que la ecuación de Dirac fue una revolución en la física moderna. El contexto histórico anterior puede ser encontrado con más detalle en [15].

Por otro lado, la ecuación de Dirac no fue derivada “de primeros principios”, sino que fue encontrada por medio de procedimientos matemáticos a partir de la ecuación de Klein-Gordon. Por esta razón resulta interesante preguntarse: ¿por qué es necesaria la ecuación de Dirac, si esta proviene de la ecuación de Klein-Gordon, la cual es capaz incluso de describir otros fenómenos como el campo de Higgs? ¿Se puede usar la ecuación de Klein-Gordon para describir la misma teoría que describe la ecuación de Dirac?

En 1958, Richard P. Feynman y M. Gell-Mann ([8]) incursionaron en la idea de trabajar con campos fermiónicos sujetos a la densidad lagrangiana de Klein-Gordon, la cual es de segundo orden en las derivadas, mientras que la de Dirac es de primer orden, pero dichos campos satisfacen las propiedades de los fermiones de espín $\frac{1}{2}$. Estos son llamados *fermiones de segundo orden*. Posterior a este trabajo, más autores como [9], [17] se han encargado de estudiar a estos fermiones de segundo orden.

Esta tesis tiene como objetivo construir una teoría autoconsistente para fermiones de segundo orden a partir de la imposición de la segunda cuantización canónica, imponiendo las relaciones de anticonmutación que los campos fermiónicos deben satisfacer. En el proceso de construcción de este formalismo, se abandonó el principio de hermiticidad de la mecánica cuántica [3], el cual establece que todos los operadores asociados a los observables físicos, cantidades clásicamente mensurables (como el momento), deben ser hermíticos para asegurar que su espectro de eigenvalores sea real; a favor de una teoría pseudohermítica [13, 14] la cual mantiene al espectro real, pero redefiniendo el producto interno del espacio de Fock⁴ de los estados cuánticos. También manteniendo a la teoría como causal, invariante ante traslaciones, ante rotaciones y ante boost, es decir, es invariante de Poincaré, invariante ante paridad, inversión temporal y ante conjugación de

⁴Espacio formado por la suma directa de espacios de Hilbert, en donde se encuentran, individualmente, los estados de cada partícula

carga, es decir, es invariante ante CPT . Este trabajo se encuentra en [7] en formato de artículo.

En el capítulo 1 se trabaja en la introducción de conceptos necesarios para comprender la teoría cuántica de campos, como la solución y cuantización de la teoría Klein-Gordon y el grupo de Lorentz. Lo anterior sirve como contexto para trabajar la teoría de Dirac con la finalidad de estudiar la cuantización de campos fermiónicos.

En el capítulo 2, haciendo uso del formalismo empleado en el capítulo anterior, se realiza la segunda cuantización canónica de los campos fermiónicos de segundo orden, a través de la redefinición del campo adjunto de la teoría mediante un nuevo operador, adoptando el formalismo de la pseudohermiticidad propuesto por Ali Mostafazadeh en [13, 14], garantizando así una teoría cuantizable que cuenta con un espectro real para sus observables físicos y una evolución temporal unitaria de los estados cuánticos.

En el capítulo 3, se construye una teoría de campo para los fermiones de segundo orden, mostrando que la teoría presenta cantidades conservadas propias de los fermiones, como el espín $\frac{1}{2}$, la teoría preserva la causalidad, es invariante de Poincaré, invariante ante CPT y renormalizable, según el criterio del grado de divergencia superficial del cual hablaremos más adelante.

1. Teoría de Dirac

1.1. Conceptos preeliminarios

1.1.1. Campo de Klein-Gordon

La ecuación de Klein-Gordon fue el primer intento de una ecuación cuántica relativista, la cual se construyó pensando en sustituir la ecuación de Schrödinger. Sin embargo, la ecuación de Schrödinger actúa sobre funciones de onda, mientras que la de Klein-Gordon lo hace sobre campos. Esencialmente, la función de onda es una amplitud de probabilidad sobre un cierto espacio de configuraciones, mientras que un campo es una función definida sobre todo el espacio-tiempo y es responsable de la creación o aniquilación de partículas a través de operadores que aparecen después de la segunda cuantización canónica.

La densidad lagrangiana de Klein-Gordon es

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi, \quad (1-1)$$

donde (...) ^{*} es la operación complejo conjugado y los campos presentes son escalares. Si calculamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo ϕ^* encontramos *la ecuación de Klein-Gordon*

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0, \quad (1-2)$$

la cual puede ser resuelta a través de una transformada de Fourier

$$\phi_{KG}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} (A(p) e^{-ip \cdot x} + B(p) e^{ip \cdot x}), \quad (1-3)$$

donde el factor de integración $\frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}}$ es elegido para preservar la invariancia de Lorentz¹

¹Más adelante en 1-12 se verá el motivo de este factor.

1.1.2. Invariancia de Lorentz

La relatividad especial tiene como postulado que las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales, esto es, es invariante ante rotaciones, boost, traslaciones y ciertas transformaciones discretas que mencionaremos más adelante. Por ejemplo, en unidades naturales tenemos un boost

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - |\mathbf{v}|x}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \\ x' &= \frac{x - |\mathbf{v}|t}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{1-4}$$

El grupo² de transformaciones $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ que deja invariante al elemento de línea $(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, es aquel que satisface

$$\Lambda^\mu_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \tag{1-5}$$

y es llamado el grupo de Lorentz $O(1,3)$, donde los índices $\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ son llamados índices de Lorentz. Este grupo se divide en:

- El subgrupo homogéneo de Lorentz $SO(1,3)^+$ (HLG, por sus siglas en inglés o también llamado Grupo Restringido de Lorentz o RLG, también por sus siglas en inglés): grupo generado por las rotaciones propias y los boost de Lorentz, donde los elementos de este subgrupo se denominan como Λ^μ_ν , los cuales satisfacen que $\Lambda^0_0 > 0$ y $\det \Lambda = 1$ (transformaciones ortócronas y propias respectivamente). De tal forma que la dirección del tiempo se preserva positiva
- Paridad: aquella transformación que cambia el signo de las coordenadas espaciales $x_j \rightarrow -x_j$ con $j = 1, 2, 3$.
- Inversión temporal: aquella transformación que cambia el signo de la coordenada temporal $t \rightarrow -t$.

Las simetrías discretas de paridad e inversión temporal así como las traslaciones, serán tratadas con detalle, más adelante.

²Conjunto de elementos que dada una operación binaria satisfacen los axiomas de cerradura (la operación resulta en elementos del mismo conjunto), la existencia del elemento identidad y del elemento inverso.

Es importante mencionar que los grupos pueden actuar sobre diferentes objetos, la forma en la que estos grupos actúan sobre dichos objetos se le conoce como representación del grupo. Para el HLG, los objetos son escalares, vectores o espinores; y su representación puede identificarse fácilmente, pues el subgrupo es isomorfo³ a dos copias de $SU(2)$, el grupo de las matrices especiales (determinante 1) y unitarias de dimensión 2×2 ,

$$SO(1,3)^+ \simeq SU(2)_A \otimes SU(2)_B, \quad (1-6)$$

donde $\otimes$ es el llamado producto directo. $SU(2)$ es generado por las matrices de Pauli σ_A^j con $j = 1, 2, 3$

$$\sigma_A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1-7)$$

el subíndice A indica a que grupo de la relación 1-6 pertenecen las matrices y operadores más adelante. Es importante notar que las matrices de Pauli son la base de espín en mecánica cuántica:

$$\begin{aligned} S_A^3 |j_A, m_A\rangle &= \frac{\sigma_A^3}{2} |j_A, m_A\rangle = m |j_A, m_A\rangle, \\ \mathbf{S}_A^2 |j_A, m_A\rangle &= j_A(j_A + 1) |j_A, m_A\rangle \end{aligned} \quad (1-8)$$

donde $m_A = -j_A, -j_A + 1, \dots, j_A$ es el eigenvalor de espín, con $j_A = \frac{n}{2}$ y $n \in \mathbb{Z}$, mientras que $\mathbf{S}^2 = (S^1, S^2, S^3) \cdot (S^1, S^2, S^3)$ es un ejemplo de casimir cuadrático, una función de los generadores que conmutan con ellos. Con esto podemos escribir la notación:

$$(j_A, j_B), \quad (1-9)$$

para así identificar, a través del espín, la representación del HLG con la cual se está trabajando. Por ejemplo, en el caso $(0, 0)$, se tiene a los escalares, este es el caso del campo ϕ de Klein-Gordon; para $(\frac{1}{2}, 0)$ o el $(0, \frac{1}{2})$ se está trabajando con espinores de Weyl, fermiones de espín $\frac{1}{2}$, la suma directa de estas dos representaciones son conocidos como espinores de Dirac $(\frac{1}{2}, 0) \oplus \sum(0, \frac{1}{2})$; y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, bosones de Guage, como el fotón.

La representación del HLG explícitamente es

$$S[\Lambda] = e^{\frac{i}{2} \Omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu}}, \quad (1-10)$$

³Básicamente, son parecidos en su estructura, en el caso de los grupos, su álgebra tiene la misma forma.

donde $\Omega_{\mu\nu}$ son parámetros de transformación, como el ángulo θ cuando se habla de rotaciones, mientras que $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ son los generadores del grupo para cada representación. En el caso escalar $S[\Lambda] = 1$, por eso se suele llamar a representación trivial al caso escalar, mientras que en el caso fermiónico⁴, los generadores son:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (1-11)$$

En teoría cuántica de campos, se suele utilizar el factor $\frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}$, pues se busca construir una función de dos puntos invariante de Lorentz para la propagación de las partículas. Por ello la presencia de la raíz cuadrada, ya que al tener el producto de dos campos (esto relacionado a la función de dos puntos conocida como propagador [1-52](#)) tendremos,

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} = \int d^4p \delta(p^2 - m^2)|_{p^0=E_p>0}, \quad (1-12)$$

donde la segunda integral es explícitamente invariante de Lorentz, pues todas las cantidades presentes son escalares.

Es importante mencionar que al grupo de Lorentz se le añade las traslaciones espacio temporales $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ para así formar al *grupo de Poincaré*, el grupo más general que deja invariante al elemento de línea $(ds)^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. La discusión anterior puede encontrar más desarrollada en [\[12\]](#).

1.1.3. Cuantización del campo de Klein-Gordon

Para cuantizar el campo de Klein-Gordon, se imponen las relaciones de la segunda cuantización canónica, recordemos, a tiempos iguales,

$$\begin{aligned} [\phi(x)_a, \pi_{\phi_b}(y)] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [\phi(x), \phi(y)] &= [\pi_{\phi_b}(x), \pi_{\phi_b}(y)] = 0, \end{aligned} \quad (1-13)$$

donde

$$\pi_{\phi_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} = \dot{\phi}, \quad (1-14)$$

⁴Como dato curioso, aunque un espinor de 4 componentes puede parecer un 4-vector, este no lo es, pues, al realizar una rotación de 2π , el espinor parecerá que solo rotó 180° , mientras que el vector regresará al mismo punto.

con $\dot{\phi}$ es la derivada temporal del campo escalar. Con estas relaciones se puede construir una teoría de campo consistente como en [20]; sin embargo esta teoría no es útil en la física actual si no se hace uso del *rompimiento espontáneo de simetría*, del cual no se hablará, pero puede estudiarse en [19, 16]. Es por ello, que el siguiente paso de este trabajo es cuantizar y ahondar más en la teoría de campo que la ecuación de Dirac provee.

1.2. Teoría de Dirac

Para poder incursionar en los fermiones de segundo orden primero hemos de repasar la cuantización del campo de Dirac, esto con la finalidad de entender las particularidades que los campos fermiónicos traen consigo cuando se les impone la segunda cuantización canónica.

1.2.1. Álgebra de Clifford

Antes de que Dirac pudiera construir su famosa ecuación en 1928, William K. Clifford en 1877 construyó un álgebra con elementos similares a los cuaterniones [15]. Esto permitió descomponer operadores como el Laplaciano o el D’Alambertiano en los elementos de dicha álgebra,

$$\square = \left(\gamma^0 \frac{d}{dt} - \gamma^j \nabla_j \right)^2 \equiv (\not{\partial})^2, \quad (1-15)$$

donde estos elementos matriciales γ^μ (con $\mu = 0, 1, 2, 3$ siendo índices de Lorentz) son las matrices gamma, a las cuales se les añade la matriz gamma cinco: $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Estos elementos satisfacen el álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{I}_{4 \times 4}, \quad (1-16)$$

donde recordemos, la convención para la métrica es $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Las matrices gamma y sus propiedades son vitales en la construcción de la ecuación de Dirac así como en cantidades asociadas a los fermiones. Las matrices gamma puede escribirse en una cierta base para facilitar los cálculos con ellas. En este caso, se usará la llamada base Quiral, en la cual las matrices gamma son:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (1-17)$$

⁵Extensión de los números complejos, de tal modo que forman una base: $\{1, i, j, k\}$, con $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

donde $\sigma^u = (\mathbb{I}_{2 \times 2}, \sigma^i)$ y σ^i las matrices de Pauli. En esta base, se satisfacen las siguientes relaciones:

1. $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$
2. $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$
3. $(\gamma^5)^2 = (\gamma^0)^2 = 1$
4. $(\gamma^j)^2 = -1,$
5. $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$
6. $(\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j,$

(1-18)

las expresiones 1, 3 y 4 son independientes de la base elegida solo están sujetas a la convención de la métrica.

1.2.2. Ecuación de Dirac

Históricamente, la ecuación de Dirac se encontró a partir de la ecuación de Klein-Gordon, sin embargo, el formalismo lagrangiano nos permite encontrar dicha ecuación partir de la ahora llamada, densidad lagrangiana de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\chi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\chi, \quad (1-19)$$

donde χ es un campo de Dirac que trasforman ante la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ del HLG. Y gracias a $\bar{\chi} \equiv \chi^\dagger \gamma^0$, 1-19 es invariante ante transformaciones de Lorentz, pues

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(x)\chi(x) &= \chi^\dagger(x)\gamma^0\chi(x) \rightarrow \chi^\dagger(\Lambda^{-1}x)S^\dagger[\Lambda]\gamma^0S[\Lambda]\chi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \chi(\Lambda^{-1}x)^\dagger(\Lambda)\gamma^0\chi(\Lambda^{-1}x) = \bar{\chi}(\Lambda^{-1}x)\chi(\Lambda^{-1}x), \end{aligned} \quad (1-20)$$

donde se usó el resultado $S^{-1}\gamma^0 = \gamma^0S^{-\dagger}$ [20] y siguiendo a [10, 16, 19, 20], tenemos

$$\begin{aligned} \chi'_j(x') &= S[\Lambda]\chi_j(\Lambda^{-1}x) \\ \bar{\chi}'_j(x') &= \bar{\chi}_j(\Lambda^{-1}x)S^{-1}[\Lambda], \end{aligned} \quad (1-21)$$

con la representación del grupo de Lorentz $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ siendo

$$S[\Lambda] = e^{\frac{i}{2}\Omega_{\mu\nu}\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]} \quad (1-22)$$

Si ahora encontramos las ecuaciones de Euler-Lagrange para 1-19, llegamos a la famosa ecuación de Dirac:

$$D\chi \equiv (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\chi = (i\bar{\partial} - m)\chi = 0, \quad (1-23)$$

donde D es el operador de Dirac y $\not{d} = \gamma^\mu \partial_\mu$.

Empleando el formalismo Hamiltoniano, podemos encontrar el momento conjugado al campo χ

$$\Pi_{\chi_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}_a} = i \bar{\chi}_a \gamma^0 = i \chi_a^\dagger, \quad (1-24)$$

1.2.3. Dirac y Klein-Gordon

Como se mencionó anteriormente, la ecuación de Dirac fue encontrada a partir de la ecuación de Klein-Gordon.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi &= (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\phi = \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} \partial_\nu \partial_\mu + m^2\right)\phi = \\ &= \left(\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2 + im(\gamma^\nu \partial_\nu - \gamma^\mu \partial_\mu)\right)\phi = -(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\phi, \end{aligned} \quad (1-25)$$

donde en la segunda línea se reescribió $2\gamma^\nu \gamma^\mu = [\gamma^\nu, \gamma^\mu] + \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}$ y se usó la simetría de las derivadas. La ecuación de Dirac aparece naturalmente al introducir las matrices gamma en la ecuación de Klein-Gordon, sin embargo, al hacer eso, estamos haciendo que el campo ϕ deje de ser un escalar, pues para que la ecuación de Dirac sea invariante de Lorentz, el campo debe transformar como un espinor de Dirac, esto es

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\phi &\rightarrow (i\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu - m)S\phi = SS^{-1}(i\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu - m)S\phi = \\ &= S(iS^{-1}\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu S \partial_\nu - m)\phi, \end{aligned} \quad (1-26)$$

pero en la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ se satisface que $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho$. Por tanto nos queda

$$\begin{aligned} S(iS^{-1}\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu S \partial_\nu - m)\phi &= S(\Lambda^\mu_\rho \gamma^\rho \Lambda_\mu^\nu S \partial_\nu - m)\phi = S(\delta^\mu_\rho \gamma^\rho \partial_\mu - m)\phi = \\ &= S(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\phi = 0, \end{aligned} \quad (1-27)$$

es decir, S debe ser la correspondiente a la representación de espinores de Dirac, de lo contrario, el cálculo anterior no se podría realizar, es decir, ϕ no es un campo escalar, es un campo espinorial $\phi_{KG} \rightarrow \chi_D$.

1.2.4. Solución a la ecuación de Dirac

Debido a que χ debe satisfacer a la ecuación de Klein-Gordon y Dirac, asumimos que la solución a la ecuación de Dirac debe ser una transformada de Fourier similar a Klein-Gordon, pero que cuente con elementos que hagan que este sea un espinor

$$\chi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \left(A(p) u_p e^{-ip \cdot x} + B(p) v_p e^{ip \cdot x} \right), \quad (1-28)$$

donde u_p y v_p son funciones de espín o simplemente espinores⁶, $A(p)$ y $B(p)$ son los perfil de modo de oscilación de la transformada de Fourier y corresponde a los que serán los operadores de creación y aniquilación; mientras que la exponencial encarna la naturaleza ondulatoria de las partículas con 4-momento p . Estas tres partes de la solución viven en espacios diferentes. Se dice de frecuencia positiva, a la exponencial con el signo negativo, pues el signo negativo en la exponencial indica, heurísticamente un “ $t > 0$ ”; mientras que para la otra exponencial, se dice de frecuencias negativas por un argumento similar al anterior.

Notemos que todas las funciones dependen de la 4-posición y 4-momento; sin embargo, estamos asumiendo una teoría *on-shell*, es decir, a energías fijas, por lo que en realidad $p^0 = E_p$ y la relación de dispersión relativista $E_p^2 + \mathbf{p}^2 = m^2$ se cumple. De esta forma, si sustituimos nuestra solución de frecuencias positivas de la ecuación de Dirac en la ecuación 1-23 obtendremos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\chi = 0 \rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m)u_p = \not{p}u_p = mu_p, \quad (1-29)$$

donde es importante hacer énfasis en que la solución cuenta con tres piezas que viven en espacios diferentes, lo que permitió llegar a la ecuación anterior. Si ahora resolvemos este sistema de ecuaciones como en [20], podemos llegar a lo siguiente

$$u_p = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \bar{\xi} \end{pmatrix}, \quad (1-30)$$

en esta ecuación, ξ es un espinor de dos componentes arbitrario unitario. De la misma forma podemos resolver para la solución de frecuencias negativas

$$v_p = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \tau \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \bar{\tau} \end{pmatrix}, \quad (1-31)$$

donde τ es otro espinor de dos componentes unitario.

⁶Recordemos que un espinor es un objeto que trasforman ante las representaciones $(\frac{1}{2}, 0)$ y/o $(0, \frac{1}{2})$.

Con estas dos soluciones al problema de eigenvalores 1-19 podemos introducir las bases

$$\begin{aligned}\xi^s &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \tau^s &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},\end{aligned}\tag{1-32}$$

donde cada elemento de cada base representa *la polarización del espín* ($s = \pm \frac{1}{2}$ según el experimento de Stern-Gerlach) y dichos conjuntos son linealmente independientes, así podemos construir ciertas propiedades como en [20], las cuales son

$$\begin{aligned}\bar{u}_p^r u_p^s &= -\bar{v}_p^r v_p^s = 2m\delta^{rs}, & \bar{u}_p^r v_p^s &= \bar{v}_p^r u_p^s = 0 \\ \sum_s u_{pa}^s \bar{u}_{pb}^s &= \sum_s u_{pa}^s u_{pb}^{s\dagger} \gamma_{cb}^0 = (\not{p} + m)_{ab}, & \sum_s v_{pa}^s \bar{v}_{pb}^s &= \sum_s v_{pa}^s v_{pb}^{s\dagger} \gamma_{cb}^0 = (\not{p} - m)_{ab} \\ \sum_s u_{pa} u_{pd}^{s\dagger} &= (\not{p} + m)_{ab} \gamma_{bd}^0, & \sum_s v_{pa} v_{pd}^{s\dagger} &= (\not{p} - m)_{ab} \gamma_{bd}^0, \\ u_p^{r\dagger} v_{-p}^s &= v_p^{r\dagger} u_{-p}^s = 0,\end{aligned}\tag{1-33}$$

donde los subíndices $a, b, c, d = 1, 2, 3, 4$ denotan las componentes espinoriales. Es importante recordar que p es el 4-momento y que $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, es decir, la energía es función del 3-momento y la masa. Estas propiedades son de gran importancia en los cálculos relacionados a los campos fermiónicos y por ello serán empleadas en cálculos posteriores.

Ahora, podemos construir el campo transpuesto conjugado $(\dots)^\dagger$ y el adjunto al campo de Dirac

$$\begin{aligned}\chi^\dagger(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s [b_p^s v_p^{s\dagger} e^{-ip \cdot x} + a_p^{s\dagger} u_p^{s\dagger} e^{ip \cdot x}] \\ \bar{\chi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s [b_p^s \bar{v}_p^s e^{-ip \cdot x} + a_p^{s\dagger} \bar{u}_p^s e^{ip \cdot x}].\end{aligned}\tag{1-34}$$

1.2.5. Segunda cuantización canónica del campo de Dirac

Los campos de Dirac describen fermiones, es decir, partículas que siguen *el principio de exclusión de Pauli*. Este principio estipula que las partículas fermiónicas no pueden tener los mismos números cuánticos, de ser el caso, sus funciones de onda son idénticamente cero; dicho de otro modo, ante el intercambio de fermiones, sus funciones de onda

son antisimétricas, así los fermiones no pueden ocupar el mismo estado. Esto se puede visualizar de la siguiente manera en términos de funciones de onda:

$$\begin{aligned}\Psi(1,2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(r_a)\psi_2(r_b) - \psi_1(r_b)\psi_2(r_a)) = -\Psi(2,1) \\ \Psi(1,1) &= \Psi(2,2) = 0.\end{aligned}\tag{1-35}$$

De este modo, la correcta cuantización canónica del campo de Dirac debería de seguir el principio de exclusión de Pauli por lo que en lugar de realizar la cuantización mediante conmutadores como con Klein-Gordon [1-13](#) lo haremos con anticonmutadores, esto para ser consistentes con la relación [1-35](#), de esta forma, las relaciones de la segunda cuantización canónica son

$$\{\chi_a(x), \Pi_{\chi_b}(y)\}_{poisson} \rightarrow \{\chi_a(x), \pi_{\chi_b}(y)\} = \{\chi_a(x), i\chi_b^\dagger(y)\} = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\tag{1-36}$$

hemos asumido que las mediciones entre diferentes direcciones no interfieren entre sí, también $\hbar = 1$ por las unidades naturales y la relación [1-24](#) para el momento conjugado del campo de Dirac, asimismo estamos considerando que los eventos ocurren a tiempos iguales. Con lo anterior, el campo de Dirac cuantizado será

$$\chi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s [a_p^s u_p^s e^{-ip \cdot x} + b_p^{s\dagger} v_p^s e^{ip \cdot x}],\tag{1-37}$$

donde a diferencia con [1-28](#), a_p y b_p ahora son operadores que actuarán sobre un espacio de Hilbert donde viven los estados cuánticos.

Las relaciones de la segunda cuantización canónica serán pues

$$\begin{aligned}\{\chi_a(x), \chi_b(y)\} &= \{\chi_a^\dagger(x), \chi_b^\dagger(y)\} = 0 \\ \{\chi_a(x), \chi_b^\dagger(y)\} &= \delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned}\tag{1-38}$$

Así, el campo de Dirac está cuantizado; sin embargo, aun hay resultados importantes por obtener, pues todavía no conocemos las relaciones entre los operadores de creación y aniquilación. Para esto, primero debemos de reescribir las relaciones [1-37](#) y [1-34](#) de tal forma que los operadores queden despejados, tomando las transformadas de Fourier del producto de los espinores u y v con los campos de Dirac, tendremos que

$$\begin{aligned}a_p^s &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{2E_p}} e^{ip \cdot x} u_{pa}^{s\dagger} \chi_a(x), & a_p^{ts} &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{2E_p}} e^{-ip \cdot x} \chi_a^\dagger(x) u_{pa}^s \\ b_p^s &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{2E_p}} e^{ip \cdot x} \chi_a^\dagger(x) v_{pa}^s, & b_p^{ts} &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{2E_p}} e^{-ip \cdot x} v_{pa}^{s\dagger} \chi_a(x),\end{aligned}\tag{1-39}$$

las cuales al sustituirlas en las relaciones de conmutación [1-38](#) para el campo de Dirac, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\{a_p^s, a_q^r\} &= \{a_p^{s\dagger}, a_q^{r\dagger}\} = \{b_p^s, b_q^r\} = \{b_p^{s\dagger}, b_q^{r\dagger}\} = 0 \\ \{a_p^s, b_q^r\} &= \{a_p^{s\dagger}, b_q^{r\dagger}\} = \{a_p^s, b_q^r\} = \{a_p^s, b_q^{r\dagger}\} = 0 \\ \{b_p^s, b_q^{r\dagger}\} &= \{a_p^s, a_q^{r\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{sr} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}),\end{aligned}\tag{1-40}$$

las cuales, por supuesto, se ven satisfechas al tratar de probarlas con las expresiones explícitas de [1-39](#). De estas relaciones de conmutación para los operadores de creación y aniquilación podemos observar que los campos no tienen preferencia al crear o destruir cierto tipo de partículas. Con esto es posible construir la teoría de campo para Dirac.

1.2.6. Ordenamiento Normal

El hamiltoniano asociado a la densidad lagrangiana de Dirac se puede obtener a través de la transformada de Legendre como en [1-16](#), [20](#)], y es

$$H = \int d^3x \bar{\chi} i \gamma^0 \dot{\chi} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (a_p^{s\dagger} a_p^s - b_p^s b_p^{s\dagger}).\tag{1-41}$$

Podemos definir al estado del vacío como aquel que el operador de aniquilación vuelve cero, es decir

$$a_p^s |0\rangle = b_p^s |0\rangle \equiv 0,\tag{1-42}$$

también, podemos definir al estado de una partícula como la acción de un operador de creación sobre el mismo vacío

$$|p, s\rangle \equiv \sqrt{2E_p} a_p^{s\dagger} |0\rangle,\tag{1-43}$$

de esta forma, usando las relaciones de anticonmutación [1-40](#)

$$\langle q|p\rangle = 2\sqrt{E_q}\sqrt{E_p}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})\tag{1-44}$$

y así, utilizando el factor de integración invariante de Lorentz $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}$ tendremos

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \langle q|p\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} 2E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = 1.\tag{1-45}$$

Dicho lo anterior, H sobre el vacío resulta en

$$H|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (a_p^{s\dagger} a_p^s - b_p^s b_p^{s\dagger}) |0\rangle, \quad (1-46)$$

donde el término relacionado a los operadores a_p se aniquila trivialmente, mientras que el término asociado a los operadores b_p no lo hace, teniendo una contribución negativa a la energía del vacío, lo cual no tiene sentido. Es por esto que hemos de optar por usar la prescripción del ordenamiento normal: colocar los operadores de aniquilación a la derecha de los de creación, esto con el objetivo de que la acción del hamiltoniano esté acotada por abajo y no extraiga energía del vacío. Con esto en mente, definimos el ordenamiento normal para fermiones como se sigue

$$\begin{aligned} : b_p^{s\dagger} b_p^s &:= -b_p^{s\dagger} b_p^s \\ : a_p^s a_p^{s\dagger} &:= a_p^{s\dagger} a_p^s \end{aligned} \quad (1-47)$$

de esta forma, el Hamiltoniano será:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s : (a_p^{s\dagger} a_p^s - b_p^s b_p^{s\dagger}) : = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (a_p^{s\dagger} a_p^s + b_p^{s\dagger} b_p^s) \quad (1-48)$$

y así:

$$H|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (a_p^{s\dagger} a_p^s + b_p^{s\dagger} b_p^s) |0\rangle = 0 \quad (1-49)$$

donde donde $:$ indica la acción del ordenamiento normal sobre los operadores. Lo anterior también asegura que

$$H|p, s\rangle = E_p |p, s\rangle, \quad (1-50)$$

es decir, el eigenvalor de energía del estado de una partícula es $E_p > 0$ [16].

Recordando que la expresión 1-42 define al vacío y la expresión 1-43 para el estado de una partícula 1-43, podemos definir un estado de dos partículas:

$$|p_1, s_1; p_2, s_2\rangle_a \propto a_{p_1}^{s_1\dagger} a_{p_2}^{s_2\dagger} |0\rangle = -a_{p_2}^{s_2\dagger} a_{p_1}^{s_1\dagger} |0\rangle, \quad (1-51)$$

donde se usó la anticonmutación de los operadores $a^\dagger$ en las expresiones de 1-40, el signo menos es congruente con el principio de exclusión de Pauli.

1.2.7. Causalidad

En la teoría cuántica de campos, la propagación de las partículas en el espacio-tiempo debe ser *causal*. A tiempos iguales, tenemos una separación *spacelike*, esto es $(x - y)^2 < 0$, esto ocurre cuando dos eventos no están causalmente conectados, pues es necesario viajar más rápido que la velocidad de la luz para ir de un evento a otro. Por otro lado cuando $(x - y)^2 > 0$, $x^0 \neq y^0$, y por tanto podemos conectar dos eventos sin necesidad de viajar más rápido que la luz, por ello, en la teoría cuántica de campos se define al propagador a tiempos distintos como se sigue

$$[\phi_a(x), \bar{\phi}_b(y)]_{x^0, y^0} \equiv \Delta(x - y)_{ab}. \quad (1-52)$$

Sabemos que la segunda cuantización canónica esta basada en la imposición de que a tiempos iguales, la expresión 1-52 es cero, mientras que cuando $x^0 \neq y^0$, se debe garantizar que $\Delta(x - y)$ sea una cantidad invariante de Lorentz y que preserve la causalidad, pues el propagador formará parte de los cálculos necesarios para los fenómenos de dispersión.

Para la teoría de Dirac, se tiene que

$$\{\chi_a(x), \bar{\chi}_b(y)\}_{x^0, y^0} = (i\bar{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) = (i\bar{\partial}_x + m)_{ab} \Delta(x - y). \quad (1-53)$$

Asimismo cuando se asumen los tiempos iguales y que la teoría es *on-shell*:

$$\{\chi_a(x), \hat{\chi}_b(y)\}_{x^0=y^0} = \{\chi_a(x), \bar{\chi}_b(y)\} = (i\bar{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} (e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} - e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}) = 0, \quad (1-54)$$

pues en la segunda integral basta con hacer $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ para llegar al resultado. Cuando $x^0 \neq y^0$, notemos que el operador delante del propagador no es más que el operador de Dirac complejo conjugado en 1 dimensión, pues si definimos

$$D \equiv (i\bar{\partial} - m) \quad (1-55)$$

entonces

$$D^* = -(i\bar{\partial} + m) \quad (1-56)$$

y notemos que $\Delta(x - y)$ no son más que ondas planas, las cuales resuelven a la ecuación de Dirac

$$D\Delta(x - y) = 0, \quad (1-57)$$

por consiguiente

$$D^* \Delta(x - y) = 0. \quad (1-58)$$

De esta forma vemos que nuestra teoría preserva la causalidad con $\Delta(x - y)$ siendo el propagador (o función de Green) de Schwinger.

1.3. Cargas conservadas

Una simetría, es una transformación que deja invariante una cantidad. El teorema de Noether nos dice que, dada una simetría continua, existe una cantidad conservada [20], en la teoría cuántica de campos estas cantidades conservadas se identifican operadores asociados a números cuánticos, como la carga de las partículas o su espín.

1.3.1. Traslaciones espacio-temporales

Podemos realizar una traslación infinitesimal en el campo

$$\begin{aligned} \chi(x) &\rightarrow \psi(x - \epsilon), & \delta\chi &= 0, \\ \delta x &= -\epsilon, \end{aligned} \quad (1-59)$$

la cual tendrá una corriente conservada

$$j^\mu = T^{\mu\nu} \epsilon_\nu, \quad (1-60)$$

donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento de la teoría de Dirac

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = i \bar{\chi} \gamma^\mu \partial^\nu \chi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (1-61)$$

Con la corriente anterior, se pueden definir los generadores de las traslaciones como cantidades conservadas

$$P^\mu \equiv \int d^3x T^{0\mu} \rightarrow \frac{dP^\mu}{dt} = 0. \quad (1-62)$$

Para P^0 se recupera la expresión del Hamiltoniano [1-48]

$$P^0 = H = \int d^3x : \bar{\chi} i \gamma^0 \dot{\chi} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (a_p^{s\dagger} a_p^s + b_p^{s\dagger} b_p^s), \quad (1-63)$$

mientras que para el 3-momento

$$\mathbf{P} = \int d^3x : \chi^\dagger (-i\nabla) \chi := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \sum_s (a_p^{s\dagger} a_p^s + b_p^{s\dagger} b_p^s). \quad (1-64)$$

Así, podemos escribir el generador de las traslaciones espacio-temporales

$$P^\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^\mu \sum_s (a_p^{1\dagger} a_p^s + b_p^{s\dagger} b_p^s). \quad (1-65)$$

Es importante mencionar que estos generadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$i[P^\mu, \chi] = \partial^\mu \chi, \quad i[P^\mu, \bar{\chi}] = \partial^\mu \bar{\chi}, \quad (1-66)$$

lo cual garantiza que esta teoría sea invariante ante traslaciones.

Podemos calcular

$$\begin{aligned} [P^\mu, a_k^{r\dagger}] &= a_k^{r\dagger} p^\mu, \\ [P^\mu, b_k^{r\dagger}] &= b_k^{r\dagger} p^\mu, \\ [P^\mu, a_k^r] &= -a_k^r p^\mu, \\ [P^\mu, a_k^r] &= -b_k^r p^\mu, \end{aligned} \quad (1-67)$$

lo que nos llevará a deducir que, por ejemplo

$$\begin{aligned} P^\mu a_k^{ir\dagger} |0\rangle &= (P^\mu a_k^{\dagger r} - a_k^{r\dagger} P^\mu) |0\rangle = [P^\mu, a_k^{r\dagger}] |0\rangle = p^\mu a_k^{r\dagger} |0\rangle = p^\mu a_k^{r\dagger} |0\rangle \\ &\quad \therefore \\ P^\mu a_k^{ir\dagger} |0\rangle &= p^\mu a_k^{r\dagger} |0\rangle, \end{aligned} \quad (1-68)$$

es decir, la energía y el momento asociados a una partícula es p^μ , en otras palabras E_p y $\mathbf{p}$, no existe ninguna energía negativa asociada a las partículas o antipartículas, por lo que es necesaria otra cantidad para poder diferenciarse entre sí, esta es la carga eléctrica o simplemente carga.

1.3.2. Carga

Asociada a la simetría de fase global U(1),

$$\begin{aligned} \chi &\rightarrow e^{-i\theta} \chi, & \delta\chi &= -i\theta\chi, \\ \bar{\chi} &\rightarrow e^{i\theta} \bar{\chi}, & \delta\bar{\chi} &= i\theta\bar{\chi}, \\ \delta x &= 0, \end{aligned} \quad (1-69)$$

existe una corriente conservada

$$j^\mu = \bar{\chi} \gamma^\mu \chi, \quad (1-70)$$

con carga asociada

$$\begin{aligned} Q &\equiv \int d^3x : \bar{\chi} \gamma^0 \chi := \int d^3x : \chi^\dagger \chi := \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \sum_s : a_p^{s\dagger} a_p^s + b_p^s b_p^{s\dagger} := \\ &= \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \sum_s (a_p^{s\dagger} a_p^s - b_p^{s\dagger} b_p^s) \equiv Q_a + Q_b, \end{aligned} \quad (1-71)$$

de esta manera podemos reconocer dos cargas, una asociada a las partículas a y otra a las partículas b . En la teoría electromagnética, la carga del electrón es $-eQ, e > 0$. Si notamos las siguientes relaciones de conmutación entre los operadores de creación y aniquilación con el operador de carga Q

$$\begin{aligned} [Q, a_p^{s\dagger}] &= a_p^{s\dagger}, & [Q, b_p^{s\dagger}] &= -b_p^{s\dagger} \\ [Q, a_p^s] &= -a_p^s, & [Q, b_p^s] &= b_p^s \end{aligned} \quad (1-72)$$

$$[Q, \psi] = -\psi, \quad [Q, \bar{\psi}] = \bar{\psi} \quad (1-73)$$

podemos ver que

$$\begin{aligned} Q a_p^{s\dagger} |0\rangle &= [Q, a_p^{s\dagger}] |0\rangle = a_p^{s\dagger} |0\rangle, \\ Q b_p^{s\dagger} |0\rangle &= [Q, b_p^{s\dagger}] |0\rangle = -b_p^{s\dagger} |0\rangle \end{aligned} \quad (1-74)$$

y así identificamos a las partículas a como electrones, mientras que a las partículas b como su antipartícula, es decir, antielectrones o positrones. De este modo el campo χ crea positrones y aniquila electrones, mientras que su adjunto $\bar{\chi}$ crea electrones y aniquila positrones, partículas fermiónicas de espín $\frac{1}{2}$.

1.3.3. Espín

La teoría de Dirac describe fermiones de espín $\frac{1}{2}$, para probar esto, hagamos una transformación de Lorentz infinitesimal (rotación o boost).

$$\begin{aligned} \chi(x) &\rightarrow S[\omega] \chi(\omega^\mu{}_\nu x^\nu), \quad S[\omega] = 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu} \psi(x) \\ \delta \chi_a &= -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} [\mathcal{J}^{\mu\nu}]_a{}^b \chi_b(x), \quad \delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu, \end{aligned} \quad (1-75)$$

donde $\omega_{\mu\nu}$ son los parámetros de transformación y $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ los generadores de dicha transformación para la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$.

A esta transformación se le asocia la corriente conservada

$$j^\mu = \frac{1}{2}(M^\mu)^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}, \quad (1-76)$$

con

$$(M^\mu)^{\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} + \bar{\chi}\gamma^\mu \mathcal{J}^{\alpha\beta}\chi. \quad (1-77)$$

de donde podemos identificar seis cantidades conservadas:

$$M^{\mu\nu} \equiv \int d^3x (M^0)^{\alpha\beta}, \quad (1-78)$$

de las cuales, tres se pueden coleccionar en un vector antisimétrico como sigue

$$L_{total}^c = \frac{1}{2}\epsilon_{abc} \int d^3x \chi^\dagger [ix^a \partial^b - ix^b \partial^a + \mathcal{J}^{ab}] \chi, \quad (1-79)$$

esta expresión es la versión cuántica del momento angular total⁷ para los campos de Dirac es [16]. Definiendo el 3-vector $J^k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\mathcal{J}^{ij}$ que en la base Quiral [19] se escribe en términos de las matrices de Pauli

$$J^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad (1-80)$$

podemos escribir al momento angular total en forma vectorial

$$\mathbf{L}_{total} = \int d^3x : \chi^\dagger (\mathbf{x} \times (-i\nabla) + \mathbf{J}) \chi :, \quad (1-81)$$

donde la aportación del espín es

$$\mathbf{S} = \int d^3x : \chi^\dagger \mathcal{J} \chi :. \quad (1-82)$$

Si ahora nos preguntamos cual es el espín de las partículas descritas por los campos de Dirac, primero hemos de asumir que la componente S^3 satisface

$$S^3 |\mathbf{p}, \pm, s\rangle = s |\mathbf{p}, \pm, s\rangle, \quad (1-83)$$

⁷ $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$, con $\times$ siendo el producto cruz)

también que el momento lineal asociado al estado de una partícula es cero, de esta forma:

$$\mathbf{L}_{total} |\mathbf{0}, \pm, s\rangle = \mathbf{S} |\mathbf{0}, \pm, s\rangle, \quad (1-84)$$

aplicando entonces lo anterior para un estado de una partícula tipo a :

$$S^3 |\mathbf{0}, +, s\rangle = \sqrt{2E_0} S^3 a_0^{\dagger s} |0\rangle = \sqrt{2E_0} [S^3, a_0^{\dagger s}] |0\rangle, \quad (1-85)$$

de este modo, y como S^3 aniquila al vacío al estar ordenado normalmente, haciendo uso de las relaciones [1-40](#) llegamos a

$$S^3 a_0^{\dagger s} |0\rangle = [S^3, a_0^{\dagger s}] |0\rangle = \pm \frac{1}{2} a_0^{\dagger s} |0\rangle, \quad (1-86)$$

donde el signo $\pm$ corresponde a la polarización de espín vista en [1-32](#), mientras que, para partículas tipo b :

$$S^3 b_0^{\dagger s} |0\rangle = \pm \frac{1}{2} b_0^{\dagger s} |0\rangle. \quad (1-87)$$

Notemos que las partículas que describe la ecuación de Dirac son, en efecto, de espín $\frac{1}{2}$.

1.4. Simetrías discretas

Para terminar, como se mencionó en [1.1.2](#) parte del grupo de Lorentz está formado por transformaciones discreteas, transformaciones que describen cambios no continuos de un sistema. En [\[10, 16, 19\]](#), se dice que una densidad lagrangiana es invariante ante cierta transformación discretas $\mathcal{O}$ si

$$\mathcal{O}\mathcal{L}(x_i, t)\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{L}(x'_i, t'), \quad (1-88)$$

donde x_i son las coordenadas espaciales, con $i = 1, 2, 3$. Con esto se puede concluir que la teoría descrita por la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ en [1-88](#) es invariante ante la transformación discreta $\mathcal{O}$ que, añadidas al HLG y a las traslaciones, se puede concluir si una teoría es invariante de Poincaré.

1.4.1. Paridad

La transformación de *paridad* P se define como aquella transformación que cambia el signo de las coordenadas espaciales: $x_i \rightarrow -x_i$. Por los argumentos expuestos con anterioridad, sabemos que paridad es una simetría del sistema, si se satisface que

$$P\mathcal{L}(x_i, t)P^{-1} = \mathcal{L}(-x_i, t),. \quad (1-89)$$

La teoría de Dirac es invariante ante paridad, pues conforme a [10, 16, 19], los campos de Dirac satisfacen que

$$\begin{aligned} P\chi(x_i, t)P^{-1} &= \lambda\gamma^0\chi(-x_i, t), \\ P\bar{\chi}(x_i, t)P^{-1} &= \lambda^*\bar{\chi}(-x_i, t)\gamma^0, \end{aligned} \quad (1-90)$$

donde λ es una fase que se obedece a $|\lambda|^2 = 1$. Aplicando otra transformación de paridad a 1-90

$$PP\chi(x_i, t)P^{-1}P^{-1} = \lambda\gamma^0P\chi(-x_i, t)P^{-1} = \lambda^2(\gamma^0)^2\chi(x_i, t) = \lambda^2\chi(x_i, t) \quad (1-91)$$

vemos que al aplicar dos veces paridad, recuperamos la configuración inicial salvo la fase λ el cual no es significativo, pues los escalares a partir de campos fermiónicos están hechos por dos componentes de campos que serán sometidos a las transformaciones, por lo que la fase desaparecerá. Por ejemplo, el escalar $\bar{\chi}\chi$ transforma

$$\bar{\chi}\chi \rightarrow P\bar{\chi}\chi P^{-1} = P\bar{\chi}P^{-1}P\chi P^{-1} = |\lambda|^2\bar{\chi}(-x_i, t)\gamma^0\gamma^0\chi(-x_i, t) = \bar{\chi}(-x_i, t)\chi(-x_i, t). \quad (1-92)$$

1.4.2. Inversión Temporal

La *inversión temporal* T , se define como aquella transformación que cambia el signo de a coordenada espacial $t \rightarrow -t$.

Para campos de Dirac χ , se satisface qué

$$\begin{aligned} T\chi(x_i, t)T^{-1} &= \rho\mathcal{C}\gamma^5\chi(x_i, -t) \\ T\bar{\chi}(x_i, t)T^{-1} &= \bar{\chi}(x_i, -t)\gamma^5\rho^*\mathcal{C}, \end{aligned} \quad (1-93)$$

donde en la base Quiral $\mathcal{C} = \epsilon\gamma^2\gamma^0$ y, que por convención $\epsilon = -i$, mientras que ρ es solo una fase (diferente a la vista en paridad). Con esto, se garantiza que la teoría es invariante ante inversión temporal, es decir,

$$T\mathcal{L}(x_i, t)T^{-1} = \mathcal{L}(x_i, -t),. \quad (1-94)$$

1.4.3. Conjugación de carga

Existe una transformación discreta más, la *conjugación de carga*. Si la teoría es invariante ante el intercambio de partícula por su antipartícula, se dice invariante ante la conjugación de carga C .

Las transformaciones para los campos de Dirac χ son

$$\begin{aligned} C\chi C^{-1} &= \omega \mathcal{C} \bar{\chi}^T, \\ C\bar{\chi} C^{-1} &= \chi^T \omega^* \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (1-95)$$

es importante mencionar que la operación $(...)^T$ es la transposición y no tiene relación con la inversión temporal. Estas transformaciones garantizan que la teoría de Dirac es invariante ante conjugación de carga

$$C\mathcal{L}T^{-1} = \mathcal{L}. \quad (1-96)$$

1.5. Invariancia de Poincaré

Por lo tanto, sabiendo que la teoría es invariante a C, P y T , se concluye que esta es invariante ante CPT , satisfaciendo el teorema CPT el cual establece que cualquier teoría de cuántica de campo relativista y hermítica debe tener una invariancia ante CPT [19]. Con esto y con los resultados de invariancia ante traslaciones en [1-66] y los de la invariancia de Lorentz en [1-20] y [1-27]; se concluye que la teoría de Dirac es invariante de Poincaré.

En el siguiente capítulo estudiaremos la segunda cuantización canónica para campos fermiónicos de espín $\frac{1}{2}$ que, en lugar de satisfacer la ecuación de Dirac [1-23], satisfacen la ecuación de Klein-Gordon [1-1].

2. Cuantización de fermiones de segundo orden y pseudohermiticidad

Como se presentó anteriormente, Dirac construyó su ecuación a partir de la de Klein-Gordon. En el cálculo [1-25](#) observamos como al multiplicar la ecuación de Dirac por su conjugada se recupera explícitamente Klein-Gordon. ¿Por qué si la ecuación de Dirac encontrarse a partir de la ecuación de Klein-Gordon, no utilizamos esta última para describir a los fermiones, de la misma forma que Klein-Gordon puede describir teorías como la de campos escalares, como el campo de Higgs?

A continuación cuantizaremos cuidadosamente una teoría consistente de Klein-Gordon para campos de espín $\frac{1}{2}$, es decir, cuantizaremos fermiones de segundo orden (por la densidad lagrangiana).

2.1. Solución a la ecuación de Klein-Gordon para fermiones

Primero escribamos la densidad lagrangiana de Klein-Gordon para fermiones, el campo ψ que aparecerá en la densidad lagrangiana es un campo de espín $\frac{1}{2}$ y no uno de espín 0, como el caso convencional de Klein-Gordon, por lo este campo fermiónico debe de satisfacer todas las propiedades que aparecen en [1-33](#) así como su álgebra de anticonmutadores. La densidad lagrangiana para fermiones de segundo orden será pues

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \bar{\psi} \partial_\mu \psi - m^2 \bar{\psi} \psi, \quad (2-1)$$

mientras que las ecuaciones de movimiento asociadas a esta densidad lagrangiana para $\bar{\psi}$, son

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi = 0. \quad (2-2)$$

En este punto se podría pensar que la única solución a esta ecuación de Klein-Gordon para fermiones debería ser una de la forma [1-37](#), sin embargo, ya no estamos trabajando

con la ecuación de Dirac. Si bien la solución vista en 1-37 es quien resuelve a la ecuación de Dirac:

$$D\chi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\chi = 0, \quad (2-3)$$

recordemos que en 1-55 $D\chi = 0$, pero también $D^*\chi = 0$, por lo tanto ψ también debería de resolver a D^* . En 4 se abordó esta particularidad,

$$\begin{aligned} D^*\psi &= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\gamma^5\chi = \\ &= -\gamma^5(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\chi = \\ &= -i\gamma^5 D\chi = 0. \end{aligned} \quad (2-4)$$

Como ambas soluciones son independientes (no es posible reescribir una en términos de la otra por la γ^5), podemos escribir a la solución completa a la ecuación de Klein-Gordon para fermiones como:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\chi_1 + \gamma^5\chi_2), \quad (2-5)$$

donde χ_j son campos de Dirac como en 1-37. A diferencia del campo de Dirac 1-37, este nuevo campo tienen un factor de $\frac{1}{\sqrt{2m}}$, esto es para normalizar correctamente las dimensiones del campo. Al ser ψ un campo fermiónico en una densidad lagrangiana de Klein-Gordon, las dimensiones se ven alteradas

$$\begin{aligned} [\phi_{KG}] &= [M] \\ [\chi_D] &= [M]^{3/2} \\ [\psi] &= [\phi_{KG}] \\ &\vdots \\ [\psi] &= \frac{[\chi_D]}{M^{1/2}}, \end{aligned} \quad (2-6)$$

donde M son unidades de masa. También es importante notar que ψ cuenta con dos campos χ_j diferentes, por lo que ambos tendrán operadores de creación y aniquilación diferentes. Debido a esto, hemos de agregar un nuevo índice a nuestros operadores

$$\begin{aligned} a_p^{js}, b_p^{js} \\ u_{pa}^s, v_{pa}^s \end{aligned} \quad (2-7)$$

recordemos que el índice p indica el momento asociado a la partícula; mientras que $s = \pm\frac{1}{2}$ indica la polarización de espín; el subíndice a indica la componente espinorial y el índice

2.2 Segunda cuantización canónica para fermiones de segundo orden 27

$j = 1, 2$ indica a que campo χ_j pertenece el operador de creación o aniquilación. De esta forma, los nuevos campos son

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{4mE_p}} \sum_s [a_p^{1s} u_p^s e^{-ip \cdot x} + b_p^{s\dagger} v_p^s e^{ip \cdot x} + a_p^{2s} \gamma^5 u_p^s e^{-ip \cdot x} + b_p^{2s\dagger} \gamma^5 v_p^s e^{ip \cdot x}], \quad (2-8)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{4mE_p}} \sum_s [a_p^{1s\dagger} \bar{u}_p^s e^{ip \cdot x} + b_p^{1s} \bar{v}_p^s e^{-ip \cdot x} - a_p^{2s\dagger} \bar{u}_p^s \gamma^5 e^{ip \cdot x} - b_p^{2s} \bar{v}_p^s \gamma^5 e^{-ip \cdot x}], \quad (2-9)$$

2.2. Segunda cuantización canónica para fermiones de segundo orden

Con lo anterior podemos proceder con la segunda cuantización canónica para los campos fermiónicos de segundo orden.

Primero, impongamos las relaciones de cuantización para los nuevos campos

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = 0, \quad (2-10)$$

$$\{\psi_a(x), \Pi_{\psi_b}(y)\} = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2-11)$$

donde

$$\Pi_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_a} = \partial^0 \bar{\psi}_a = \psi_a^\dagger \gamma^0, \quad (2-12)$$

donde notamos que existen 4 grados de libertad (8 componentes reales) provenientes de las componentes espinoriales del campo ψ y 4 de su conjugado Π_{ψ} , teniendo como total 8 grados de libertad. Caso contrario al de Dirac, pues el conjugado al campo χ es simplemente $\chi^\dagger$ en [1-38](#), dejándonos con 4 grados de libertad.

Imponer las relaciones de anticonmutación anteriores, requiere que las relaciones de anticonmutación para los operadores de creación y aniquilación de los campos χ_j satisfagan, por separado, las relaciones [1-40](#). También los operadores de un campo deberán de anticonmutar con los del otro, esto es:

$$\{a_p^{1s}, a_k^{2r}\} = \dots = \{a_p^{1s}, a_k^{2r\dagger}\} = \dots \{a_p^{1s}, b_k^{1r\dagger}\} = \dots = 0. \quad (2-13)$$

Sin embargo, ocurre algo un interesante. Si quisiéramos que la relación 2-11 se vea satisfecha, debemos de añadir un signo menos a los anticonmutadores de los operadores del segundo campo:

$$\begin{aligned}\{a_p^{1s}, a_q^{1r\dagger}\} &= (2\pi)^3 \delta^{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ \{a_p^{2s}, a_q^{2r\dagger}\} &= -(2\pi)^3 \delta^{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}),\end{aligned}\quad (2-14)$$

$$\begin{aligned}\{b_p^{1s}, b_q^{1r\dagger}\} &= (2\pi)^3 \delta^{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ \{b_p^{2s}, b_q^{2r\dagger}\} &= -(2\pi)^3 \delta^{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}),\end{aligned}\quad (2-15)$$

mientras que el resto de anticonmutadores se mantienen:

$$\begin{aligned}\{a_p^{js}, a_q^{jr}\} &= \{a_p^{js\dagger}, a_q^{jr\dagger}\} = \{b_p^{js}, b_q^{jr}\} = \{b_p^{js\dagger}, b_q^{jr\dagger}\} = 0, \\ \{a_p^{js}, b_q^{jr}\} &= \{a_p^{js\dagger}, b_q^{jr\dagger}\} = \{a_p^{js\dagger}, b_q^{jr}\} = \{a_p^{js}, b_q^{jr\dagger}\} = 0.\end{aligned}\quad (2-16)$$

2.2.1. Norma negativa

Que las relaciones de anticonmutación en 2-14 y 2-15 no sean canónicas, es decir, que los signos no sean positivos, provocan un problema, la denominada *norma negativa*. Pensemos que queremos calcular la proyección de un estado en otro

$$\langle p|q\rangle \propto \langle 0|a_p a_q^\dagger|0\rangle = \langle 0|(-a_p^\dagger a_q - (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}))|0\rangle = -(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (2-17)$$

notemos que el producto interior es negativo, lo cual, a su vez, nos llevará a una densidad de probabilidad negativa.

2.2.2. Redefinición del campo adjunto y cuantización canónica

Para hacer que los anticonmutadores sigan una relación canónica debemos de hacer que dos de los anticonmutadores en 2-14 y 2-15 recuperen su signo positivo; esto se puede lograr si hacemos primero que el campo se mantenga sin cambios

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{4mE_p}} \sum_s [a_p^{1s} u_p^s e^{-ip \cdot x} + b_p^{1s\dagger} v_p^s e^{ip \cdot x} + a_p^{2s} \gamma^5 u_p^s e^{-ip \cdot x} + b_p^{2s\dagger} \gamma^5 v_p^s e^{-ip \cdot x}], \quad (2-18)$$

2.2 Segunda cuantización canónica para fermiones de segundo orden 29

pero redefiniendo al campo adjunto $\bar{\psi} \rightarrow \hat{\psi}$, donde el signo negativo en [2-9](#) ahora es positivo:

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{4mE_p}} \sum_s [a_p^{1s\dagger} \bar{u}_p^s e^{ip \cdot x} + b_p^{1s} \bar{v}_p^s e^{-ip \cdot x} + a_p^{2s\dagger} \bar{u}_p^s \gamma^5 e^{ip \cdot x} + b_p^{2s} \bar{v}_p^s \gamma^5 e^{-ip \cdot x}], \quad (2-19)$$

o de forma compacta:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2m}} (\chi_1 + \gamma^5 \chi_2) \quad (2-20)$$

$$\hat{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2m}} (\bar{\chi}_1 + \bar{\chi}_2 \gamma^5), \quad (2-21)$$

Con esto, se obtienen las relaciones de anticonmutación canónicas para los operadores de creación y aniquilación con $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \{a_p^{is}, a_q^{jr\dagger}\} &= \{b_p^{is}, b_q^{jr\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{ij} \delta^{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ \{a_p^{is}, a_q^{jr}\} &= \{a_p^{is\dagger}, a_q^{jr\dagger}\} = \{b_p^{is}, b_q^{jr}\} = \{b_p^{is\dagger}, b_q^{jr\dagger}\} = 0, \\ \{a_p^{is}, b_q^{jr}\} &= \{a_p^{is\dagger}, b_q^{jr\dagger}\} = \{a_p^{is\dagger}, b_q^{jr}\} = \{a_p^{is}, b_q^{jr\dagger}\} = 0. \end{aligned} \quad (2-22)$$

La derivación explícita de estas relaciones se puede ver en el Anexo [C](#). Así las relaciones de la segunda cuantización canónica de los campos fermiónicos de segundo orden se ven satisfechas

$$\{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\} = 0 \quad (2-23)$$

$$\{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\} = i \delta_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2-24)$$

donde los campos [2-18](#) y [2-19](#) están descritos por la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \psi - m^2 \hat{\psi} \psi \quad (2-25)$$

permitiendo así a los fermiones de segundo orden ser una teoría cuantizable.

2.3. Pseudohermiticidad

A pesar de que la teoría corregida sea cuantizable, esta deja de ser hermítica, pues la densidad lagrangiana [2-25](#) no lo es, esto es fácil de ver al darse cuenta que, $(\hat{\psi}\psi)^\dagger \neq \hat{\psi}\psi$, explícitamente:

$$\begin{aligned} (\hat{\psi}\psi)^\dagger &= \psi^\dagger \hat{\psi}^\dagger = (\chi_1 + \gamma^5 \chi_2)^\dagger (\bar{\chi}_1 + \bar{\chi}_2 \gamma^5)^\dagger = (\chi_1^\dagger + \chi_2^\dagger \gamma^5) (\bar{\chi}_1^\dagger + \gamma^5 \bar{\chi}_2^\dagger) = \\ &= (\chi_1^\dagger + \chi_2^\dagger \gamma^5) (\gamma^0 \chi_1 + \gamma^5 \gamma^0 \chi_2) = (\chi_1^\dagger + \chi_2^\dagger \gamma^5) (\gamma^0 \chi_1 - \gamma^0 \gamma^5 \chi_2) = (\chi_1^\dagger \gamma^0 + \chi_2^\dagger \gamma^5 \gamma^0) (\chi_1 - \gamma^5 \chi_2) = \\ &= (\chi_1^\dagger \gamma^0 - \chi_2^\dagger \gamma^0 \gamma^5) (\chi_1 - \gamma^5 \chi_2) = (\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_2 \gamma^5) (\chi_1 - \gamma^5 \chi_2), \end{aligned} \quad (2-26)$$

mientras que:

$$\hat{\psi}\psi = (\bar{\chi}_1 + \chi_2 \gamma^5) (\chi_2 + \gamma^5 \chi_1) \quad (2-27)$$

por lo tanto:

$$(\hat{\psi}\psi)^\dagger \neq \hat{\psi}\psi. \quad (2-28)$$

Aparentemente esto es un problema, pues uno de los axiomas de la mecánica cuántica establece que los operadores que representan a los observables físicos deben ser hermíticos para asegurar que su espectro de eigenvalores sea real. Sin embargo, se puede relajar este axioma, exigiendo que el espectro de los observables físicos sea real, adoptando un formalismo de la *pseudohermiticidad*.

Un operador se dice *pseudohermítico* si:

$$\mathcal{O}^\# \equiv \eta^{-1} \mathcal{O}^\dagger \eta = \mathcal{O}, \quad (2-29)$$

donde $\mathcal{O}^\#$ es el operador pseudohermítico adjunto de $\mathcal{O}$ con η siendo un operador que actúa sobre un espacio de Hilbert dado.

2.3.1. Mecánica cuántica pseudohermítica

En [\[13\]](#) y [\[14\]](#), Ali Mostafazadeh propuso un formalismo para operadores inspirado en las relaciones de la invariancia ante PT , como [\[3\]](#) donde el Hamiltoniano de la teoría es pseudohermítico

$$H^\# \equiv \eta^{-1} H^\dagger \eta = H, \quad (2-30)$$

2.3.2. Producto interno

En este formalismo, el operador η debe redefinir el producto interno del espacio de Hilbert de los estados de la siguiente forma

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \rightarrow \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_\eta \equiv \langle \psi_1 | \eta | \psi_2 \rangle. \quad (2-31)$$

2.3.3. Eigenvalores

Con lo anterior, se sigue que el espectro asociado a $\mathcal{O}$ es real, por ejemplo, para el caso de un hamiltoniano

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi | 0 | \psi \rangle = \langle \psi | H^\dagger \eta - \eta H | \psi \rangle = \langle \psi | E^* \eta - \eta E | \psi \rangle = \\ &= (E^* - E) \langle \psi | \eta | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (2-32)$$

si $\langle \psi | \eta | \psi \rangle \neq 0$, entonces $E^\dagger = E \in \mathbb{R}$; por lo tanto, el espectro de H es real.

2.3.4. Evolución temporal

Asimismo, esta teoría mantiene a la evolución temporal de los estados unitaria

$$\langle \psi_2 | \eta | \psi_1 \rangle_{t>0} = \langle \psi_2 | e^{iH^\dagger t} \eta e^{-iHt} | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | \eta e^{iHt} e^{-iHt} | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | \eta | \psi_1 \rangle. \quad (2-33)$$

2.3.5. Teoría cuántica de campos pseudohermítica

Podemos generalizar la teoría pseudohermítica de la mecánica cuántica a una teoría cuántica de campos pseudohermítica en un espacio de Fock. Esto imponiendo que la relación [2-29](#) sea satisfecha por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}^\# = \eta^{-1} \mathcal{L}^\dagger \eta = \mathcal{L}, \quad (2-34)$$

lo cual es importante, pues en la teoría de perturbaciones, al trabajar con interacciones, la densidad lagrangiana juega un papel importante así como la serie de Dyson^{[1](#)}.

¹Ejemplo de lo anterior se puede ver en [\[11\]](#).

2.4. Operador η

2.4.1. η y el campo adjunto

En este caso, para los fermiones de segundo orden la expresión [2-34](#) se ve explícitamente como

$$\mathcal{L}^\# = \eta^{-1} \left(\partial^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \psi - m^2 \hat{\psi} \psi \right)^\dagger \eta = \partial^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \psi - m^2 \hat{\psi} \psi = \mathcal{L}, \quad (2-35)$$

de donde podemos extraer la expresión:

$$\eta^{-1} (\hat{\psi} \psi)^\dagger \eta = \hat{\psi} \psi, \quad (2-36)$$

la cual puede ser reescrita

$$\hat{\psi} \psi = \eta^{-1} (\hat{\psi} \psi)^\dagger \eta = \eta^{-1} \psi^\dagger \hat{\psi}^\dagger \eta = \eta^{-1} \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \hat{\psi}^\dagger \eta = \eta^{-1} \bar{\psi} \gamma^0 \hat{\psi}^\dagger \eta = \eta^{-1} \bar{\psi} \eta \eta^{-1} \gamma^0 \hat{\psi}^\dagger \eta, \quad (2-37)$$

de donde podemos identificar las siguientes dos relaciones

$$\hat{\psi} = \eta^{-1} \bar{\psi} \eta \quad \psi = \eta^{-1} \gamma^0 \hat{\psi}^\dagger \eta. \quad (2-38)$$

Ambas expresiones están relacionadas a través de la transposición conjugada, sin embargo, la primera relaciona directamente al adjunto de Dirac $\bar{\psi}$ de la expresión [2-9](#) de la teoría "naive" (ingenua en inglés) con su redefinición $\hat{\psi}$ en la expresión [2-19](#) a través de una transformación a partir de η . Con esto, obtenemos de forma natural una redefinición del campo adjunto a través del formalismo pseudohermítico.

2.4.2. η y los operadores de creación y aniquilación

Usando nuevamente las expresiones [2-38](#), podemos identificar cómo actúa η sobre los operadores de creación y aniquilación, pues recordemos que η actúa sobre operadores en el espacio de Fock, de esta forma y utilizando las expresiones [2-5](#) y [2-19](#) podemos hacer

$$\begin{aligned} \psi &= \eta^{-1} \gamma^0 \hat{\psi}^\dagger \eta = \frac{1}{\sqrt{2m}} \eta^{-1} \gamma^0 (\bar{\chi}_1 + \bar{\chi}_2 \gamma^5)^\dagger \eta = \frac{1}{\sqrt{2m}} \eta^{-1} \gamma^0 (\chi_1^\dagger \gamma^0 + \chi_2^\dagger \gamma^0 \gamma^5)^\dagger \eta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \eta^{-1} (\chi_1 - \gamma^5 \chi_2) \eta. \end{aligned} \quad (2-39)$$

De esta forma, utilizando las expresiones [2-20](#) y [2-39](#) podemos ver que

$$(\chi_1 + \gamma^5 \chi_2) = \eta^{-1} (\chi_1 - \gamma^5 \chi_2) \eta, \quad (2-40)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \eta^{-1} \chi_1 \eta \\ \chi_2 &= -\eta^{-1} \chi_2 \eta. \end{aligned} \quad (2-41)$$

Para calcular explícitamente las expresiones [2-41](#), veamos que la parte de χ_j sobre la que actúa η son únicamente los operadores de creación y aniquilación a_p, b_p , así nos quedarán las relaciones

$$\begin{aligned} \eta^{-1} a_p^{1s} \eta &= a_p^{1s}, \\ \eta^{-1} b_p^{1s\dagger} \eta &= b_p^{1s\dagger}, \\ \eta^{-1} a_p^{2s} \eta &= -a_p^{2s}, \\ \eta^{-1} b_p^{2s\dagger} \eta &= -b_p^{2s\dagger}, \end{aligned} \quad (2-42)$$

si ahora utilizamos las expresiones [2-21](#) y [2-38](#) obtenemos

$$(\bar{\chi}_1 + \bar{\chi}_2 \gamma^5) = \hat{\psi} = \eta \bar{\psi} \eta = \eta (\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_2 \gamma^5) \eta, \quad (2-43)$$

vemos qué

$$\begin{aligned} \eta^{-1} a_p^{1s\dagger} \eta &= a_p^{1s\dagger}, \\ \eta^{-1} b_p^{1s} \eta &= b_p^{1s}, \\ \eta^{-1} a_p^{2s\dagger} \eta &= -a_p^{2s\dagger}, \\ \eta^{-1} b_p^{2s} \eta &= -b_p^{2s}. \end{aligned} \quad (2-44)$$

O de forma compacta para $j = 1, 2$ tenemos

$$\begin{aligned} \eta^{-1} a_p^{js} \eta &= (-1)^{j-1} a_p^{js}, \\ \eta^{-1} a_p^{js\dagger} \eta &= (-1)^{j-1} a_p^{js\dagger}, \\ \eta^{-1} b_p^{js} \eta &= (-1)^{j-1} b_p^{js}, \\ \eta^{-1} b_p^{js\dagger} \eta &= (-1)^{j-1} b_p^{js\dagger}, \end{aligned} \quad (2-45)$$

Las relaciones en [2-45](#) dictaminan la forma en que η transforma los operadores de creación y de aniquilación, algo más básico que a nivel de los operadores de campo en [2-38](#). Con esto, vemos que el cambio de signo en la redefinición del campo adjunto $\bar{\psi} \rightarrow \hat{\bar{\psi}}$ (de [2-9](#) a [2-19](#)) proviene del hecho de que nuestra teoría sea pseudohermítica, al nivel de la densidad lagrangiana [2-34](#).

2.4.3. Forma explícita de η

Por lo expuesto previamente, podemos deducir ciertas propiedades de η , primero, como η solo actúa sobre operadores del espacio de Hilbert, se debe satisfacer que

$$\eta|0\rangle = |0\rangle, \quad \eta^\dagger|0\rangle = |0\rangle \quad y \quad \eta^{-1}|0\rangle = |0\rangle \quad (2-46)$$

con lo anterior, podemos proponer una ecuación de eigenvalores para η para estados de una sola partícula

$$\begin{aligned} \eta a_p^{js\dagger}|0\rangle &= (-1)^{j-1} a_p^{js\dagger} \eta|0\rangle = (-1)^{j-1} a_p^{js\dagger}|0\rangle \\ &\vdots \\ \eta a_p^{js\dagger}|0\rangle &= (-1)^{j-1} a_p^{js\dagger}|0\rangle. \end{aligned} \quad (2-47)$$

De esta forma, los eigenvalores de η , son ± 1 . Si ahora realizamos el mismo cálculo con $\eta^\dagger$

$$\eta^\dagger a_p^{js\dagger}|0\rangle = (a_p^{js} \eta)^\dagger|0\rangle = (-1)^{j-1} (\eta a_p^{js})^\dagger|0\rangle = (-1)^{j-1} a_p^{js\dagger} \eta^\dagger|0\rangle = (-1)^{j-1} a_p^{js\dagger}|0\rangle = \eta a_p^{js\dagger}|0\rangle \quad (2-48)$$

por lo tanto se concluye que η es hermítico

$$\eta = \eta^\dagger. \quad (2-49)$$

Asimismo notemos qué

$$\eta \eta a_p^{js\dagger}|0\rangle = a_p^{js\dagger}|0\rangle, \quad (2-50)$$

es decir, esta es involutiva

$$\eta \eta^{-1} = \eta \eta = 1, \quad (2-51)$$

concluyendo que η es un operador unitario

$$\eta \eta^\dagger = 1. \quad (2-52)$$

Con todo lo anterior, se puede mostrar que la forma explícita de η es:

$$\eta = \exp \left(i\pi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} + b_p^{2s\dagger} b_p^{2s}) \right), \quad (2-53)$$

los cálculos necesarios para llegar al resultado anterior se encuentran en el Anexo [B](#).

En el tercer y último capítulo se explorarán más a fondo los fermiones de segundo orden, estudiando su causalidad, sus cantidades conservadas y su posible renormalizabilidad según el criterio del grado de divergencia superficial.

3. Capítulo 3: Teoría de campo para fermiones de segundo orden

Para concluir con este trabajo, sabiendo que una teoría para fermiones de segundo orden es cuantizable gracias al formalismo pseudohermítico, procederemos a describir dicha teoría, estudiando su causalidad, sus cantidades conservadas y su renormalizabilidad utilizando el criterio del grado de divergencia superficial.

3.1. Causalidad

Explícitamente al retomar el cálculo explícito de [2-23](#) en el Anexo [C](#)

$$\{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\}_{x^0=y^0} = \dots = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left(e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right) \delta_{ab} \equiv \Delta(x-y) \delta_{ab}, \quad (3-1)$$

vemos que la expresión es invariante de Lorentz debido a la presencia de la conocida medida de integración $\int \frac{d^3p}{2E_p}$ y a que en las exponenciales $p \cdot (x-y)$ es un escalar. Cuando se asumen tiempos iguales y a la teoría como *on-shell* llegamos a

$$\{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\}_{x^0=y^0} = \{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left(e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} - e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \right) \delta_{ab} = 0, \quad (3-2)$$

donde en la segunda integral basta con hacer $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ para llegar al resultado. De esta forma vemos que nuestra teoría preserva la causalidad con $\Delta(x-y)$ siendo el propagador de Schwinger

$$\{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\}_{x^0=y^0} \equiv \Delta(x-y). \quad (3-3)$$

3.2. Cantidades conservadas

3.2.1. Generadores de traslaciones espacio-temporales

El 4-momento asociado a los campos está relacionado con el tensor de energía-momento, en el caso de la densidad lagrangiana [2-25](#) es:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \hat{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \hat{\psi})} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3-4)$$

donde es importante notar que el segundo término tiene un orden diferente para mantener conforme la multiplicación de los campos. Para darle ese orden a ese término, hemos de utilizar el hecho de que [2-23](#) puede generalizarse para funciones de ψ y $\hat{\psi}$ asumiendo que estos pueden expresarse en términos de esos campos. Por ello, el tensor de energía-momento puede escribirse como:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} \partial^\nu \psi_a - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \hat{\psi}_a)} \partial^\nu \hat{\psi}_a - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3-5)$$

también la corriente conservada se verá afectada por los argumentos anteriores:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} \delta \psi + \delta \hat{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \hat{\psi}_a)} - T^{\mu\nu} \delta x_\nu \quad (3-6)$$

Ya sea utilizando la expresión [3-4](#) o [3-5](#) y utilizando el teorema de Noether, podemos realizar una traslación infinitesimal en el campo:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi(x - \epsilon), & \delta \psi &= 0, \\ \delta x &= -\epsilon, \end{aligned} \quad (3-7)$$

y de esta forma, la corriente conservada asociada será:

$$j^\mu = T^{\mu\nu} \epsilon_\nu, \quad (3-8)$$

y podemos definir los generadores de las traslaciones como cantidades conservadas:

$$P^\mu \equiv \int d^3x T^{0\mu} \rightarrow \frac{dP^\mu}{dt} = 0. \quad (3-9)$$

3.2.2. Hamiltoniano

Con lo anterior, podemos construir el Hamiltoniano de la teoría libre como sigue:

$$P^0 = H =: \int d^3x T^{00} := \int d^3x : \tilde{\psi} \psi + \nabla \tilde{\psi} \cdot \nabla \psi + m^2 \tilde{\psi} \psi :, \quad (3-10)$$

donde los cálculos explícitos se encuentran en el Anexo [C](#), obteniendo como resultado final:

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s : a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} - b_p^{1s} b_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} - b_p^{2s} b_p^{2s\dagger} : = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} + b_p^{1s\dagger} b_p^{1s} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} + b_p^{2s\dagger} b_p^{2s}),. \end{aligned} \quad (3-11)$$

Es importante notar que la relación [2-30](#) se ve satisfecha trivialmente, pues el Hamiltoniano de la teoría libre es hermítico, sin embargo, para interacciones H es pseudohermítico a través de la matriz S como en [\[11\]](#).

3.2.3. 3-momento

El 3-momento se escribe como

$$P^j =: \int d^3x T^{0j} := - \int d^3x : \tilde{\psi} \nabla_j \psi - \psi \nabla_j \tilde{\psi} :, \quad (3-12)$$

que después de cálculos análogos al de hamiltoniano, se llega a:

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \sum_s (a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} + b_p^{1s\dagger} b_p^{1s} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} + b_p^{2s\dagger} b_p^{2s}). \quad (3-13)$$

3.2.4. 4-momento

Finalmente podemos construir los generadores espacio-temporales de las translaciones

$$P^u = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^u \sum_s (a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} + b_p^{1s\dagger} b_p^{1s} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} + b_p^{2s\dagger} b_p^{2s}), \quad (3-14)$$

que de forma más compacta es

$$P^u = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{j,s} p^u (a_p^{js\dagger} a_p^{js} + b_p^{js\dagger} b_p^{js}). \quad (3-15)$$

Con esto, podemos calcular el conmutador de P^μ con los operadores de creación y aniquilación. Haciendo explícitamente para $a_k^{ir\dagger}$:

$$[P^\mu, a_k^{ir\dagger}] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{j,s} [(a_p^{js\dagger} a_p^{js} + b_p^{js\dagger} b_p^{js}), a_k^{ir\dagger}] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{j,s} ([a_p^{js\dagger} a_p^{js}, a_k^{ir\dagger}] + [b_p^{js\dagger} b_p^{js}, a_k^{ir\dagger}]), \quad (3-16)$$

usando la identidad $[AB, C] = A[B, C] - \{A, C\}B$ y las relaciones 2-22 llegamos a que:

$$\begin{aligned} [P^\mu, a_k^{ir\dagger}] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^\mu \sum_{j,s} \left(a_p^{js\dagger} \{a_p^{js}, a_k^{ir\dagger}\} - \{a_p^{js\dagger}, a_k^{ir\dagger}\} a_p^{js} + b_p^{js\dagger} \{b_p^{js}, a_k^{ir\dagger}\} - \{b_p^{js\dagger}, a_k^{ir\dagger}\} b_p^{js} \right) = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^\mu \sum_{j,s} a_p^{js\dagger} \{a_p^{js}, a_k^{ir\dagger}\} = a_k^{ir\dagger} p^\mu \end{aligned} \quad (3-17)$$

Cálculos análogos nos llevarán a:

$$\begin{aligned} [P^\mu, a_k^{ir\dagger}] &= a_k^{ir\dagger} p^\mu, \\ [P^\mu, b_k^{ir\dagger}] &= b_k^{ir\dagger} p^\mu, \\ [P^\mu, a_k^{ir}] &= -a_k^{ir} p^\mu, \\ [P^\mu, b_k^{ir}] &= -b_k^{ir} p^\mu, \end{aligned} \quad (3-18)$$

donde el signo negativo para los operadores de aniquilación, que proviene de la expresión $[AB, C] = A[B, C] - \{A, C\}B$, en donde es el segundo conmutador el que es distinto de cero, para este caso. Con lo anterior (y recordando que $P^\mu |0\rangle = 0$ pues el ordenamiento normal hace que el operador de aniquilación sea el que actúe primero en P^μ sobre los estados), podemos notar que:

$$\begin{aligned} P^\mu a_k^{ir\dagger} |0\rangle &= (P^\mu a_k^{ir\dagger} - a_k^{ir\dagger} P^\mu) |0\rangle = [P^\mu, a_k^{ir\dagger}] |0\rangle = p^\mu a_k^{ir\dagger} |0\rangle = p^\mu a_k^{ir\dagger} |0\rangle \\ &\vdots \\ &P^\mu a_k^{ir\dagger} |0\rangle, \end{aligned} \quad (3-19)$$

de esta forma, el eigenvalor de P^μ para un estado de una partícula tipo a (o b) creada es p^μ , lo cual tiene sentido, pues al crear una partícula, se crea una unidad de 4-momento p^μ , mientras que al destruir una partícula, una unidad de 4-momento es destruida también.

Con esto, podemos concluir que los eigenvalores de energía y momento lineal p^μ son reales y positivos.

3.2.5. Carga

Asociada a la simetría global U(1):

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{-i\theta}\psi, & \delta\psi &= -i\theta\psi, \\ \hat{\psi} &\rightarrow e^{i\theta}\hat{\psi}, & \delta\hat{\psi} &= i\theta\hat{\psi}, \\ \delta x &= 0,\end{aligned}\tag{3-20}$$

existe una carga conservada:

$$Q =: \int d^3x j^0 := i \int d^3x : \hat{\psi} \dot{\psi} - \dot{\hat{\psi}} \psi :, \tag{3-21}$$

después de varios cálculos (ver anexo [C](#)) obtenemos

$$\begin{aligned}Q &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} - b_p^{1s\dagger} b_p^{1s} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} - b_p^{2s\dagger} b_p^{2s}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{j,s} (a_p^{js\dagger} a_p^{js} - b_p^{js\dagger} b_p^{js}) \equiv \\ &\equiv \sum_j (\mathcal{N}_{aj} - \mathcal{N}_{bj})\end{aligned}\tag{3-22}$$

donde se han definido los operadores de número como se sigue:

$$\mathcal{N}_{aj} \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} N_{aj}, \quad \mathcal{N}_{bj} \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} N_{bj}, \tag{3-23}$$

con:

$$N_{aj} \equiv \sum_s a_p^{js\dagger} a_p^{js}, \quad N_{bj} \equiv \sum_s b_p^{js\dagger} b_p^{js}. \tag{3-24}$$

Así como en el caso del 4-momento, podemos calcular el conmutador de Q, con los operadores de creación y aniquilación a y b . Explícitamente para $a_k^{i\dagger r}$:

$$[Q, a_k^{i\dagger r}] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{j,s} [(a_p^{js\dagger} a_p^{js} - b_p^{js\dagger} b_p^{js}), a_k^{i\dagger r}], \tag{3-25}$$

usando $[AB, C] = A[B, C] - \{A, C\}B$ y las relaciones [2-22](#) llegamos a:

$$\begin{aligned}[Q, a_k^{i\dagger r}] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{j,s} \left(a_p^{js\dagger} \{a_p^{js}, a_k^{i\dagger r}\} - \{a_p^{js\dagger}, a_k^{i\dagger r}\} a_p^{js} - b_p^{js\dagger} \{b_p^{js}, a_k^{i\dagger r}\} + \{b_p^{js\dagger}, a_k^{i\dagger r}\} b_p^{js} \right) = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{j,s} a_p^{js\dagger} \{a_p^{js}, a_k^{i\dagger r}\} = a_k^{i\dagger r},\end{aligned}\tag{3-26}$$

de manera análoga, pero siendo cuidadosos con el signo negativos en los operadores a y b en Q , obtendremos que

$$\begin{aligned} [Q, a_k^{ir\dagger}] &= a_k^{ir\dagger}, \\ [Q, b_k^{ir\dagger}] &= -b_k^{ir\dagger}, \\ [Q, a_k^{ir}] &= -a_k^{ir}, \\ [Q, a_k^{ir}] &= b_k^{ir}, \end{aligned} \quad (3-27)$$

Con lo anterior, notemos que

$$\begin{aligned} Qa_k^{ir\dagger}|0\rangle &= (Qa_k^{ir\dagger} - a_k^{ir\dagger}Q)|0\rangle = [Q, a_k^{ir\dagger}]|0\rangle = a_k^{ir\dagger}|0\rangle \\ &\vdots \\ Qa_k^{ir\dagger}|0\rangle &= a_k^{ir\dagger}|0\rangle \end{aligned} \quad (3-28)$$

donde es importante mencionar que $Q|0\rangle = 0$, nuevamente por el ordenamiento normal. Así, notamos que el eigenvalor de Q para un estado de una partícula tipo a creada es $+1$, similarmente se llegaría a que la carga de las partículas tipo b creadas es -1 :

$$\begin{aligned} Qb_k^{ir\dagger}|0\rangle &= (Qb_k^{ir\dagger} - a_k^{ir\dagger}Q)|0\rangle = [Q, b_k^{ir\dagger}]|0\rangle = -b_k^{ir\dagger}|0\rangle \\ &\vdots \\ Qb_k^{ir\dagger}|0\rangle &= -b_k^{ir\dagger}|0\rangle \end{aligned} \quad (3-29)$$

3.2.6. Espín

Para terminar con estas cantidades debemos probar que, efectivamente, nuestra teoría es una que describe fermiones de espín $\frac{1}{2}$, para ello, hagamos una transformación de Lorentz infinitesimal (rotación o boost diferente a la traslación que da lugar al 4-momento y a la simetría de fase global del campo que da lugar a la carga Q):

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow S[\omega]\psi(\omega^\mu_\nu x^\nu), \quad S[\omega] = 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} \\ \delta\psi_a &= -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\mathcal{J}^{\mu\nu}]_a^b\psi_b(x), \quad \delta x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu, \end{aligned} \quad (3-30)$$

donde $\omega_{\mu\nu}$ son los parámetros de transformación y $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ los generadores de dicha transformación para la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$.

Con lo anterior, la corriente conservada es:

$$j^\mu = \frac{1}{2}(M^\mu)^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}, \quad (3-31)$$

con

$$(M^\mu)^{\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} - i(\dot{\psi}^a [\mathcal{J}^{\mu\nu}]_a^b \psi_b - \hat{\psi}^a [\mathcal{J}^{\mu\nu}]_a^b \dot{\psi}_b), \quad (3-32)$$

de modo que podemos identificar seis cantidades conservadas:

$$M^{\mu\nu} \equiv \int d^3x (M^0)^{\alpha\beta}, \quad (3-33)$$

de las cuales, podemos coleccionar tres elementos en un vector antisimétricos como se sigue:

$$L_{total}^k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x (x^i T^{0j} - x^j T^{0i} - i(\dot{\psi}^a [\mathcal{J}^{ij}]_a^b \psi_b - \hat{\psi}^a [\mathcal{J}^{ij}]_a^b \dot{\psi}_b)), \quad (3-34)$$

pero notando que $T^{0j} = (\dot{\psi} \nabla_j \psi - \dot{\psi} \nabla_j \tilde{\psi})$ y que $J^k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \mathcal{J}^{ij}$ llegamos a :

$$\mathbf{L}_{total} = \int d^3x : [-\mathbf{x} \times (\dot{\psi} \nabla \psi - \dot{\psi} \nabla \tilde{\psi}) - i(\dot{\psi} \mathbf{J} \psi - \hat{\psi} \mathbf{J} \dot{\psi})] : \equiv \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (3-35)$$

donde J^k puede escribirse en términos de las matrices de Pauli σ^k en la base Quiral [19] como:

$$J^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (3-36)$$

De esta manera hemos construido el generador del momento angular total $\mathbf{L}_{total}$, que se puede describir como la suma del momento angular orbital $\mathbf{L}$ y el espín $\mathbf{S}$, este último explícitamente:

$$\mathbf{S} = -i \int d^3x : (\dot{\psi} \mathbf{J} \psi - \hat{\psi} \mathbf{J} \dot{\psi}) : \quad (3-37)$$

Como en la mecánica cuántica convencional, asumimos que la componente S^3 satisface:

$$S^3 |\mathbf{p}, \pm, j, s\rangle = s |\mathbf{p}, \pm, j, s\rangle, \quad (3-38)$$

donde s es el eigenvalor de espín. De esta forma y por simplicidad, calcularemos la acción de S^3 sobre un estado de una partícula con momento lineal cero, de este modo solo es necesario usar el espín y no el momento angular total como operador:

$$L_{total}^3 |0, \pm, j, s\rangle = (L^3 + S^3) |0, \pm, j, s\rangle = S^3 |0, \pm, j, s\rangle, \quad (3-39)$$

con esto, podemos comenzar con el cálculo, para una partícula creada por a_0^{1+} :

$$S^3 |0, +, 1, s\rangle = \sqrt{2E_0} S^3 a_0^{1+} |0\rangle = \sqrt{2E_0} [S^3, a_0^{1+}] |0\rangle, \quad (3-40)$$

donde en la última línea se usa el hecho de que $[S^3, a_0^{1+}] |0\rangle = (S^3 a_0^{1+} - a_0^{1+} S^3) |0\rangle$ y $S^3 |0\rangle = 0$, pues $\mathbf{S}$ está ordenado normalmente y los operadores de aniquilación actúan sobre el vacío, aniquilándolo. Calculando explícitamente [3-40](#) usando [3-37](#) para la componente S^3 (ver anexo [C](#)) se llega a que:

$$S^3 a_0^{1+} |0\rangle = \pm \frac{1}{2} a_0^{1+} |0\rangle, \quad (3-41)$$

donde el signo + corresponde al valor de $s=1$ y el signo – al de $s=2$; de esta forma se puede llegar a que:

$$\begin{aligned} S^3 a_0^{j+} |0\rangle &= \pm \frac{1}{2} a_0^{j+} |0\rangle \\ S^3 b_0^{j+} |0\rangle &= \pm \frac{1}{2} b_0^{j+} |0\rangle, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3-42)$$

Con esto, se llega a que las partículas descritas por esta teoría son, en efecto, fermiones de espín $\frac{1}{2}$.

3.2.7. Estados degenerados

Con todos los resultados anteriores, podemos darnos cuenta que existen estados degenerados de energía y momento, sin importar la carga de la partícula, su espín o a que campo χ_j pertenece; esto es:

$$P^\mu |\mathbf{p}, \pm, j, s\rangle = p^\mu |\mathbf{p}, \pm, j, s\rangle, \quad (3-43)$$

donde el índice j corresponde al campo χ_j de [2-20](#) asociado a la partícula creada, mientras que $\vec{p}$ es el momento asociado, el cual satisface la relación de dispersión $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, por otro lado, $\pm$ es la carga de la partícula y s el espín de las partículas.

3.3. Invarianza de Poincaré

3.3.1. Invariancia de Lorentz

Para probar que los fermiones de segundo orden son invariante de Lorentz notemos que el campo ψ es una superposición de campos de Dirac,

$$\psi = \frac{1}{2} (\chi + \gamma^5 \chi), \quad (3-44)$$

los cuales son covariantes de Lorentz [10],[16][19] y [20], es decir, transforman bajo la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz.

$$\begin{aligned}\chi'_j(x') &= S[\Lambda]\chi_j(\Lambda^{-1}x) \\ \bar{\chi}'_j(x') &= \bar{\chi}_j(\Lambda^{-1}x)S^{-1}[\Lambda],\end{aligned}\tag{3-45}$$

con la representación del grupo de Lorentz siendo

$$S[\Lambda] = e^{\frac{-i}{2}\Omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}},\tag{3-46}$$

donde los generadores corresponden a la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu].\tag{3-47}$$

Podemos escribir [3-46] como una serie de potencias

$$S = \sum_k \left(\frac{-i}{2}\right)^k (\Omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu})^k,\tag{3-48}$$

esto nos ayudará a poder saber como S actúa sobre los campos [2-20] y [2-21]. Notemos que en la solución ψ de campos fermiónicos de segundo orden [2-20], el campo χ_1 y su adjunto transforman como se espera según [3-45], sin embargo, $\gamma^5\chi_2$ parece no hacerlo por la presencia de γ^5 . Notemos que el único término matricial de S es $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, el cual esta compuesto por la diferencia de un par de matrices gamma y, recordando las propiedades [1-18], γ^5 puede pasar a través de $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ anticonmutando con el par de matrices gamma, dejando intacto los signos, es decir, conmutan

$$\mathcal{J}^{\mu\nu}\gamma^5 = \gamma^5\mathcal{J}^{\mu\nu},\tag{3-49}$$

por lo que γ^5 conmuta con $(\mathcal{J}^{\mu\nu})^k$ también. De esa forma

$$S\gamma^5 = \gamma^5S.\tag{3-50}$$

Con lo anterior, podemos saber como transforman el campo ψ ante el grupo de Lorentz

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x') = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(S\chi_1(\Lambda^{-1}x) + \gamma^5 S\chi_1(\Lambda^{-1}x) \right) = \\ &= S \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\chi_1(\Lambda^{-1}x) + \gamma^5 \chi_1(\Lambda^{-1}x) \right) = S\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &\quad \therefore \\ \psi(x) &\rightarrow \psi'(x') = S\psi(\Lambda^{-1}x)\end{aligned}\tag{3-51}$$

y también como transforma ante Lorentz el campo adjunto $\hat{\psi}$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(X) &\rightarrow \hat{\psi}'(x') = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\bar{\chi}_j(\Lambda^{-1}x)S^{-1} + \bar{\chi}_j(\Lambda^{-1}x)S^{-1}\gamma^5 \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\bar{\chi}_j(\Lambda^{-1}x) + \bar{\chi}_j(\Lambda^{-1}x)\gamma^5 \right) S^{-1} = \hat{\psi}(\Lambda^{-1}x)S^{-1} \\ &\quad \therefore \\ \hat{\psi}(X) &\rightarrow \hat{\psi}'(x') = \hat{\psi}(\Lambda^{-1}x)S^{-1}.\end{aligned}\tag{3-52}$$

Vemos que a pesar de que los campos sean una superposición particular de campos de Dirac, los campos resultantes transforman de la misma forma que lo hacen los campos de Dirac convencionales. Por lo que podemos probar que, de hecho, la densidad lagrangiana [2-25](#) para fermiones es invariante de Lorentz

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= (\partial^\mu)' \hat{\psi}' (\partial_\mu)' \psi' - m^2 \hat{\psi}' \psi' = \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho \partial^\rho \hat{\psi}(\Lambda^{-1}x) S^{-1} \Lambda_\mu{}^\sigma \partial_\sigma \psi(\Lambda^{-1}x) - m^2 \hat{\psi}(\Lambda^{-1}x) S^{-1} \psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\mu{}^\sigma \partial^\rho \hat{\psi}(\Lambda^{-1}x) \partial_\sigma \psi(\Lambda^{-1}x) - m^2 \hat{\psi}(\Lambda^{-1}x) \psi(\Lambda^{-1}x) = \partial^\rho \hat{\psi} \partial_\rho \psi - m^2 \hat{\psi} \psi = \mathcal{L} \\ &\quad \therefore \\ \mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}'(x')\end{aligned}\tag{3-53}$$

donde en el último paso usamos los hechos de que los índices son mudos y que siempre podemos realizar un cambio de variable en las coordenadas del espacio-tiempo. Así, concluimos que la densidad lagrangiana para fermiones de segundo orden es invariante ante transformaciones de Lorentz.

3.3.2. Invarianza de Poincaré

Para probar que nuestra teoría es *covariante de Poincaré*, hace falta probar que nuestra teoría es invariante ante traslaciones y ante ciertas simetrías discretas. Para lo primero, podemos preguntarnos si nuestra teoría satisface un álgebra particular según el formalismo presentado en [\[18\]](#). Si los generadores de traslaciones espacio-temporales P^μ [3-14](#) conmutan con ψ y $\hat{\psi}$ como se sigue:

$$[\psi, P_\mu] = i\partial_\mu \psi, \quad [\hat{\psi}, P_\mu] = i\partial_\mu \hat{\psi},\tag{3-54}$$

entonces se dice que cualquier bilineal formado por los campos son invariantes ante traslaciones espacio-temporales. Utilizando las relaciones [3-18](#) podemos probar dicha álge-

bra (recordando que $[A, B] = -[B, A]$), pues los campos son una integral de sumas de operadores de creación y aniquilación en el espacio de Hilbert de los operadores. Las derivadas de los campos se pueden ver en el anexo [A](#). De ese modo, para el primer conmutador:

$$[\psi, P_\mu] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p_\mu}{\sqrt{4mE_p}} \sum_s ([a_p^{1s} + a_p^{2s} \gamma^5] u_p^s e^{-ip \cdot x} - [b_p^{s\dagger} + b_p^{2s\dagger} \gamma^5] v_p^s e^{ip \cdot x}), \quad (3-55)$$

primero, cuando $\mu = 0$, $P_0 = P^0 = H$ y $\partial_0 = \partial^0 = \partial_t$ tenemos que:

$$[\psi, H] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{4m}} \sum_s ([a_p^{1s} + a_p^{2s} \gamma^5] u_p^s e^{-ip \cdot x} - [b_p^{s\dagger} + b_p^{2s\dagger} \gamma^5] v_p^s e^{ip \cdot x}) = i\dot{\psi}, \quad (3-56)$$

por otro lado, cuando $\mu = j$, $P_j = -P^j$ y $\partial_j = \nabla_j$, así:

$$[\psi, P_j] = -[\psi, P^j] = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^j}{\sqrt{4mE_p}} \sum_s ([a_p^{1s} + a_p^{2s} \gamma^5] u_p^s e^{-ip \cdot x} - [b_p^{s\dagger} + b_p^{2s\dagger} \gamma^5] v_p^s e^{ip \cdot x}) = i\nabla_j \psi. \quad (3-57)$$

Asimismo, para el campo $\hat{\psi}$:

$$[\hat{\psi}, P_\mu] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p_\mu}{\sqrt{4mE_p}} \sum_s (-\bar{u}_p^s [a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5] e^{ip \cdot x} + \bar{v}_p^s [b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5] e^{-ip \cdot x}), \quad (3-58)$$

para $\mu = 0$:

$$[\hat{\psi}, H] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{4m}} \sum_s (-\bar{u}_p^s [a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5] e^{ip \cdot x} + \bar{v}_p^s [b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5] e^{-ip \cdot x}) = i\dot{\hat{\psi}}, \quad (3-59)$$

y para $\mu = j$:

$$[\hat{\psi}, P_j] = -[\hat{\psi}, P^j] = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^j}{\sqrt{4mE_p}} \sum_s (-\bar{u}_p^s [a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5] e^{ip \cdot x} + \bar{v}_p^s [b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5] e^{-ip \cdot x}) = i\nabla_j \hat{\psi}. \quad (3-60)$$

De esta forma, siguiendo el formalismo en [\[18\]](#), cualquier bilineal formado por $\hat{\psi}$ y ψ será invariante ante traslaciones espacio-temporales.

3.4. Simetría CPT

3.4.1. Paridad

Recordemos que los campos fermiónicos de segundo orden tienen la forma

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\chi_1 + \gamma^5 \chi_2), \quad (3-61)$$

con ello, podemos transformar ψ sabiendo como transforman los campos χ_j , los cuales son campos de Dirac y siguen las relaciones [1-90](#), esto es

$$\begin{aligned} \sqrt{2m}(P\psi(x_i, t)P^{-1}) &= P(\chi_1(x_i, t) + \gamma^5 \chi_2(x_i, t))P^{-1} = P\chi_1(x_i, t)P^{-1} + \gamma^5 P\chi_2(x_i, t)P^{-1} = \\ &= \lambda_1 \gamma^0 \chi_1(-x, t) + \lambda_2 \gamma^5 \gamma^0 \chi_2(-x, t) = \lambda_1 \gamma^0 \chi_1 - \lambda_2 \gamma^0 \gamma^5 \chi_2 = \gamma^0 (\lambda_1 \chi_1(-x_i, t) - \lambda_2 \gamma^5 \chi_2(-x_i, t)), \end{aligned} \quad (3-62)$$

en donde observamos que, si en la última línea hacemos $\lambda_1 = -\lambda_2 \equiv \lambda = i$ entonces

$$\gamma^0 i (\chi_1(-x, t) + \gamma^5 \chi_2(-x, t)) = i \gamma^0 \psi(-x, t) \sqrt{2m}, \quad (3-63)$$

es decir,

$$P\psi(x_i, t)P^{-1} = i \gamma^0 \psi(-x_i, t), \quad (3-64)$$

dicha transformación es consistente con lo esperado para campos fermiónicos según la relación [1-90](#). De esta forma, hemos fijado las diferentes fases λ_j de los campos χ_j . Ahora podemos ver como transforma el campo adjunto $\hat{\psi}$

$$\begin{aligned} \sqrt{2m}(P\hat{\psi}(x_i, t)P^{-1}) &= P(\bar{\chi}_1(x_i, t) + \bar{\chi}_2(x_i, t)\gamma^5)P^{-1} = \lambda^*(\bar{\chi}_1(-x_i, t)\gamma^0 - \bar{\chi}_2(-x_i, t)\gamma^0\gamma^5) = \\ &= \lambda^*(\bar{\chi}_1(-x, t) + \bar{\chi}_2(-x_i, t)\gamma^5)\gamma^0 = \lambda^*\hat{\psi}(-x_i, t)\gamma^0 \\ &\quad \therefore \\ P\hat{\psi}(x_i, t)P^{-1} &= -i\hat{\psi}(-x_i, t)\gamma^0, \end{aligned} \quad (3-65)$$

donde vemos que $\hat{\psi}$ transforma como un campo de Dirac convencional aun sin ser uno, como en [1-90](#).

Con lo anterior, tenemos lo necesario para saber si la densidad lagrangiana de fermiones de segundo orden [2-25](#) es invariante ante paridad, viendo por separado como transforman los términos cinético y de masa en [2-25](#) con el nuevo adjunto. Primero, el término

de masa transforma como

$$\begin{aligned}
 P\hat{\psi}(x_i, t)\psi(x_i, t)P^{-1} &= P\hat{\psi}(x_i, t)P^{-1}P\psi(x_i, t)P^{-1} = \lambda^*\hat{\psi}(-x_i, t)\gamma^0\lambda\gamma^0\psi(-x_i, t) = \\
 &= \lambda\lambda^*\hat{\psi}(-x_i, t)\psi(-x_i, t) = \hat{\psi}(-x_i, t)\psi(-x_i, t) \\
 &\quad \vdots \\
 P\hat{\psi}(x_i, t)\psi(x_i, t)P^{-1} &= \hat{\psi}(-x_i, t)\psi(-x_i, t),
 \end{aligned} \tag{3-66}$$

donde usamos el hecho de que $\lambda\lambda^* = 1$. Asimismo, el término cinético transforma como

$$\begin{aligned}
 P\partial^\mu\hat{\psi}(x_i, t)\partial_\mu\psi(x_i, t)P^{-1} &= P\partial^\mu P^{-1}P\hat{\psi}(x_i, t)P^{-1}P\partial_\mu P^{-1}P\psi(x_i, t)P^{-1} = \\
 &= \partial_\mu\lambda^*\hat{\psi}(-x_i, t)\gamma^0\partial^\mu\lambda\gamma^0\psi(-x_i, t) = \partial_\mu\hat{\psi}(-x_i, t)\partial^\mu\psi(-x_i, t) \\
 &\quad \vdots \\
 P\partial^\mu\hat{\psi}(x_i, t)\partial_\mu\psi(x_i, t)P^{-1} &= \partial_\mu\hat{\psi}(-x_i, t)\partial^\mu\psi(-x_i, t),
 \end{aligned} \tag{3-67}$$

donde el cambio en los índices en la derivada corresponden a cambio en el signo de las derivadas espaciales (pues $\partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$).

De esta forma, podemos darnos cuenta que la densidad lagrangiana para fermiones de segundo orden transforma como:

$$\begin{aligned}
 P\mathcal{L}(x_i, t)P^{-1} &= P\left(\partial^\mu\hat{\psi}(x_i, t)\partial_\mu\psi(x_i, t) - m^2\hat{\psi}(x_i, t)\psi(x_i, t)\right)P^{-1} = \\
 &= P\partial^\mu\hat{\psi}(x_i, t)\partial_\mu\psi(x_i, t)P^{-1} - m^2P\hat{\psi}(x_i, t)\psi(x_i, t)P^{-1} = \\
 &= \partial_\mu\hat{\psi}(-x_i, t)\partial^\mu\psi(-x_i, t) - m^2\hat{\psi}(-x_i, t)\psi(-x_i, t) = \mathcal{L}(-x_i, t),
 \end{aligned} \tag{3-68}$$

por lo que concluimos que

$$P\mathcal{L}(x_i, t)P^{-1} = \mathcal{L}(-x_i, t), \tag{3-69}$$

es decir, nuestra teoría de fermiones de segundo orden es invariante ante paridad.

3.4.2. Inversión Temporal

Siguiendo la metodología empleada para comprobar si [2-25](#) es invariante ante P , podemos probar si nuestra teoría es invariante ante la inversión temporal T

Primero, veamos como transforman los campos fermiónicos de segundo orden utilizando las transformaciones para campos de Dirac [1-93](#):

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2m}\left(T\psi(x_i, t)T^{-1}\right) &= T\left(\chi_1(x_i, t) + \gamma^5\chi_2(x_i, t)\right)T^{-1} = T\chi_1(x_i, t)T^{-1} + \gamma^5T\chi_2(x_i, t)T^{-1} = \\
 &= \rho_1 C\gamma^5\chi_1(x_i, -t) + \gamma^5\rho_2 C\gamma^5\chi_2(x_i, -t),
 \end{aligned} \tag{3-70}$$

Podemos elegir $\rho_1 = \rho_2 = 1$ y también se puede probar directamente que $\mathcal{C}\gamma^5 = \gamma^5\mathcal{C}$; de esta forma nos queda

$$\begin{aligned} T\psi(x_i, t)T^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2m}}\mathcal{C}\gamma^5(\chi_1(x_i, -t) + \gamma^5\chi_2(x_i, -t)) = \mathcal{C}\gamma^5\psi(x_i, -t) \\ &\vdots \\ T\psi(x_i, t)T^{-1} &= \mathcal{C}\gamma^5\psi(x_i, -t). \end{aligned} \quad (3-71)$$

Ahora, para el campo adjunto $\hat{\psi}$

$$\begin{aligned} \sqrt{2m}(T\hat{\psi}(x_i, t)T^{-1}) &= T(\bar{\chi}_1(x_i, t) + \bar{\chi}_2(x_i, t)\gamma^5)T^{-1} = T\bar{\chi}_1(x_i, t)T^{-1} + T\bar{\chi}_2(x_i, t)T^{-1}\gamma^5 = \\ &= -\bar{\chi}_1(x_i, -t)\gamma^5\mathcal{C} - \bar{\chi}_1(x_i, -t)\gamma^5\mathcal{C}\gamma^5 = -(\bar{\chi}_1(x_i, -t)\mathcal{C} + \bar{\chi}_1(x_i, -t)\gamma^5)\gamma^5\mathcal{C} = -\hat{\psi}(x_i, -t)\gamma^5\mathcal{C}\sqrt{2m} \\ &\vdots \\ T\hat{\psi}(x_i, t)T^{-1} &= -\hat{\psi}(x_i, -t)\gamma^5\mathcal{C}. \end{aligned} \quad (3-72)$$

Con todo lo anterior, podemos revisar la invariancia de la densidad lagrangiana 2-25 ante T . Como con P , comencemos con el término de masa:

$$\begin{aligned} T\hat{\psi}(x_i, t)\psi(x_i, t)T^{-1} &= T\hat{\psi}(x_i, t)T^{-1}T\psi(x_i, t)T^{-1} = -\hat{\psi}(x_i, -t)\gamma^5\mathcal{C}\gamma^5\psi(x_i, -t) = \\ &= \hat{\psi}(x_i, -t)\gamma^5\gamma^5\psi(x_i, -t) = \hat{\psi}(x_i, -t)\psi(x_i, -t) \\ &\vdots \\ T\hat{\psi}(x_i, t)\psi(x_i, t)T^{-1} &= \hat{\psi}(x_i, -t)\psi(x_i, -t) \end{aligned} \quad (3-73)$$

donde se usó el hecho de que $\mathcal{C}^2 = -\mathbb{I}_{4 \times 4}$. Ahora, el término cinético transforma como sigue:

$$\begin{aligned} T\partial^\mu\hat{\psi}(x_i, t)\partial_\mu\psi(x_i, t)T^{-1} &= T\partial^\mu T^{-1}T\hat{\psi}(x_i, t)T^{-1}T\partial_\mu T^{-1}T\psi(x_i, t)T^{-1} = \\ &= -\partial_\mu\gamma^5\mathcal{C}\partial^\mu\mathcal{C}\gamma^5\psi(x_i, -t)\psi(x_i, -t) = \partial_\mu\hat{\psi}(x_i, -t)\partial^\mu\psi(x_i, -t) \\ &\vdots \\ T\partial^\mu\hat{\psi}(x_i, t)\partial_\mu\psi(x_i, t)T^{-1} &= \partial_\mu\hat{\psi}(x_i, -t)\partial^\mu\psi(x_i, -t). \end{aligned} \quad (3-74)$$

así, la densidad lagrangiana transforma ante T como:

$$\begin{aligned} T\mathcal{L}(x_i, t)T^{-1} &= T\left(\partial^\mu\hat{\psi}(x_i, t)\partial_\mu\psi(x_i, t) - m^2\hat{\psi}(x_i, t)\psi(x_i, t)\right)T^{-1} = \\ &= T\partial^\mu\hat{\psi}(x_i, t)\partial_\mu\psi(x_i, t)T^{-1} - m^2T\hat{\psi}(x_i, t)\psi(x_i, t)T^{-1} = \\ &= \partial_\mu\hat{\psi}(x_i, -t)\partial^\mu\psi(x_i, -t) - m^2\hat{\psi}(x_i, -t)\psi(x_i, -t) = \mathcal{L}(x_i, -t), \end{aligned} \quad (3-75)$$

por lo tanto, vemos que la teoría es invariante ante T , pues

$$T\mathcal{L}(x_i, t)T^{-1} = \mathcal{L}(x_i, -t). \quad (3-76)$$

3.4.3. Conjugación de Carga

Para terminar, siguiendo las transformaciones ante conjugación de carga C de los campos de Dirac en [1-95](#), podemos transformar los campos fermiónicos de segundo orden:

$$\begin{aligned}\sqrt{2m}(C\psi C^{-1}) &= C(\chi_1 + \gamma^5 \chi_2)C^{-1} = C\chi_1 C^{-1} + \gamma^5 C\chi_2 C^{-1} = (\omega_1 \mathcal{C}\bar{\chi}_1^T + \gamma^5 \omega_2 \mathcal{C}\bar{\chi}_2^T) = \\ &= (\omega_1 \mathcal{C}\bar{\chi}_1^T + \omega_2 \mathcal{C}(\gamma^5)^T \bar{\chi}_2^T) = (\omega_1 \mathcal{C}\bar{\chi}_1^T + \omega_2 \mathcal{C}(\bar{\chi}_2 \gamma^5)^T)\end{aligned}\quad (3-77)$$

así como en la transformación T , se puede elegir $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega = 1$, obteniendo como resultado

$$\begin{aligned}C\psi C^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2m}}\mathcal{C}(\bar{\chi}_1 + \bar{\chi}_2 \gamma^5)^T = \mathcal{C}\hat{\psi}^T \\ &\vdots \\ C\psi C^{-1} &= \mathcal{C}\hat{\psi}^T\end{aligned}\quad (3-78)$$

Por otro lado, el campo adjunto $\hat{\psi}$ transforma ante C como:

$$\begin{aligned}\sqrt{2m}(C\hat{\psi} C^{-1}) &= C(\bar{\chi}_1 + \bar{\chi}_2 \gamma^5)C^{-1} = C\bar{\chi}_1 C + C\bar{\chi}_2 C\gamma^5 = \chi^T \mathcal{C} + \chi^T \mathcal{C}\gamma^5 = (\chi_1^T + \chi_2^T \gamma^5)\mathcal{C} = \\ &= (\chi_1^T + \chi_2^T (\gamma^5)^T)\mathcal{C} = (\chi_1^T + (\gamma^5 \chi_2)^T)\mathcal{C} = (\chi_1 + (\gamma^5 \chi_2))^T \mathcal{C} = \psi^T \mathcal{C}\sqrt{2m} \\ &\vdots \\ C\hat{\psi} C^{-1} &= \psi^T \mathcal{C}.\end{aligned}\quad (3-79)$$

Con esto, podemos calcular cómo transforma [2-25](#) ante C . Empezando por el término de masa:

$$C\hat{\psi}\psi C^{-1} = C\hat{\psi} C^{-1} C\psi C^{-1} = \psi^T \mathcal{C}\mathcal{C}\hat{\psi}^T = -\psi^T \hat{\psi}^T, \quad (3-80)$$

en este paso, es importante notar que podemos descomponer en componentes los campos espinoriales, esto es

$$-\psi^T \hat{\psi}^T = -\psi_\alpha^T \hat{\psi}_\alpha^T = -\psi_\alpha \hat{\psi}_\alpha = \hat{\psi}_\alpha \psi_\alpha = \hat{\psi}\psi, \quad (3-81)$$

donde se usó la relación [2-23](#); así pues, podemos concluir qué:

$$C\hat{\psi}\psi C^{-1} = \hat{\psi}\psi. \quad (3-82)$$

Ahora, para el término cinético:

$$\begin{aligned}
C(\partial^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \psi) C^{-1} &= \partial^\mu C \hat{\psi} C^{-1} \partial_\mu C \psi C^{-1} = \partial^\mu \psi^T \lambda^* C \partial_\mu \lambda C \hat{\psi}^T = -\partial^\mu \psi^T \partial_\mu \hat{\psi}^T = \partial^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \psi \\
&\vdots \\
C(\partial^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \psi) C^{-1} &= \partial^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \psi,
\end{aligned} \tag{3-83}$$

de esta forma es fácil ver que la teoría es invariante ante C , explícitamente es

$$\begin{aligned}
C\mathcal{L}C^{-1} &= C(\partial^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \psi - m^2 \hat{\psi} \psi) C^{-1} = C\mathcal{L}C^{-1} = C(\partial^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \psi) C^{-1} - m^2 C \hat{\psi} \psi C^{-1} = \\
&= \partial^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \psi - m^2 \hat{\psi} \psi = \mathcal{L} \\
&\vdots \\
C\mathcal{L}C^{-1} &= \mathcal{L}.
\end{aligned} \tag{3-84}$$

3.4.4. CPT

Con esto podemos ver que, dadas las relaciones de transformación que deben satisfacer los campos de Dirac convencionales χ_j en [2-20](#) y [2-21](#), podemos encontrar como estas últimas transforman, concluyendo que la teoría que describe a los fermiones de segundo orden es invariante ante C , P y T por separado, lo que nos asegura que, no importando cuales de estas tres transformaciones se apliquen simultáneamente, la teoría será invariante ante estas, incluyendo CPT

$$\begin{aligned}
CPT\mathcal{L}(CPT)^{-1} &= CPT\mathcal{L}T^{-1}P^{-1}C^{-1} = CPLP^{-1}C^{-1} = C\mathcal{L}C^{-1} = \mathcal{L} \\
&\vdots \\
CPT\mathcal{L}(CPT)^{-1} &= \mathcal{L}.
\end{aligned} \tag{3-85}$$

3.5. Simetría simpléctica

En adición, esta teoría presenta una *simetría simpléctica*. Para ver a que se refiere una transformación simpléctica, primero hemos de notar que debido a la relación [2-23](#) podemos almacenar ψ y $\hat{\psi}$ en la siguiente matriz:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}^T(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}, \tag{3-86}$$

y haciendo uso de una matriz simpléctica Ω de dimensiones 8×8 escrita en bloques de 4×4 :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} & 1_{4 \times 4} \\ -1_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \end{pmatrix}, \quad (3-87)$$

podemos reescribir la densidad lagrangiana [2-25] como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \Psi^T \Omega \partial_\mu \Psi - \frac{m^2}{2} \Psi^T \Omega \Psi. \quad (3-88)$$

Con la forma de la densidad lagrangiana en [3-88], podemos ver fácilmente que esta es invariante ante la transformación $\Psi \rightarrow \Psi' = S\Psi$ con $S^T \Omega S = \Omega$, es decir, existe una simetría simpléctica. Esta es la relación que se define para un elemento del grupo simpléctico $\text{Sp}(8, \mathbb{C})$, cuya álgebra tiene 36 generadores.

3.6. Renormalización

Según el criterio del grado de divergencia superficial [16] y [19], se puede decir si una teoría con interacciones es *renormalizable* o no. Este criterio, aunque no definitivo, resulta bastante ilustrativo, pues se puede reducir a tres condiciones sobre las constantes de acoplamiento g :

- si $[g] < 0$, la teoría es no renormalizable
- si $[g] = 0$, la teoría es renormalizable
- si $[g] > 0$, la teoría es super-renormalizable

con esto en mente, podemos preguntarnos si esta teoría es renormalizable. Primero y para una comparación la densidad lagrangiana de Dirac es

$$\mathcal{L}_D = \bar{\chi} (i\gamma^u \partial_u - m) \chi, \quad (3-89)$$

sabemos que, en unidades naturales $[\mathcal{L}_D] = 4$ y de esa forma $[\chi] = \frac{3}{2}$, de esta forma podemos escribir la densidad lagrangiana de interacciones para los bilineales de Dirac como

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\lambda_1}{2} (\bar{\chi} \chi)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\bar{\chi} \gamma^5 \chi) (\bar{\chi} \gamma^5 \chi) + \frac{\lambda_3}{2} (\bar{\chi} M^{\mu\nu} \chi) (\bar{\chi} M_{\mu\nu} \chi), \quad (3-90)$$

sin embargo, notemos que las unidades de los bilineales anteriores son: $[Bilineales]^2 = 6$, lo que obliga a las constantes de acoplamiento a ser menores que 0, es decir, ninguno de esos acoplamientos es admisible en una teoría renormalizable.

Por otro lado para la densidad lagrangiana de fermiones de segundo orden:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \hat{\psi} \partial_\mu \psi - m^2 \hat{\psi} \psi, \quad (3-91)$$

las unidades de los campos son $[\psi] = 1$, mientras que la densidad lagrangiana de interacciones para esta teoría es:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\lambda_1}{2} (\hat{\psi} \psi)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\hat{\psi} \gamma^5 \psi) (\hat{\psi} \gamma^5 \psi) + \frac{\lambda_3}{2} (\hat{\psi} M^{\mu\nu} \psi) (\hat{\psi} M_{\mu\nu} \psi), \quad (3-92)$$

lo que se traduce en que las unidades de los términos de interacción sean: $[Bilineales]^2 = 4$, es decir, las unidades de las constantes de acoplamiento son: $[\lambda_i] = 0$, es decir, la teorías de interacción son renormalizables. Es importante destacar el hecho de que los términos en [\[3-92\]](#) son invariantes de Poincaré, pues que los campos ψ y $\hat{\psi}$ sean covariantes de Poincaré en la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ garantizan que esos bilineales también lo sean.

En adición, también notemos que podemos acoplar los campos fermiónicos de segundo orden al campo escalar de Higgs

$$\mathcal{L}_{\psi H} = \frac{\lambda_H}{2} (\hat{\psi} \psi) H^\dagger H, \quad (3-93)$$

donde $[H] = 1$ y por tanto $[\lambda_H] = 0$, es decir, la teoría es renormalizable y por consiguiente, candidato a materia oscura, ya que es estable, pues por las dimensiones de los campos, esta solo puede acoplarse al campo de Higgs, similarmente como ocurre en [\[2\]](#) y [\[6\]](#). La renormalización de fermiones de segundo orden puede estudiarse en [\[21\]](#).

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se estudió la segunda cuantización canónica para partículas masivas con 8 grados de libertad que trasforman ante la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ del grupo homogéneo de Lorentz sujetos a la densidad lagrangiana de Klein-Gordon, es decir, fermiones (de espín $\frac{1}{2}$) de segundo orden. Esto mediante la redefinición del campo adjunto (dual field) [2-19], para la solución a la ecuación de Klein-Gordon para fermiones [2-18], a través de la introducción de un operador hermítico y unitario η [2-38].

La introducción de η , modificó el producto interior del espacio de Fock en el que viven dichos campos fermiónicos de segundo orden [2-31]. Sin embargo, con esto se garantiza una evolución temporal unitaria de los estados [2-33] y un espectro real [2-32] de los observables físicos, incluso cuando la teoría no es hermítica [2-28]; lo anterior es provisto por la introducción de un formalismo pseudohermítico [2-34].

Asimismo la teoría preserva la causalidad, gracias al propagador de Schwinger [3-3]. También los campos son covariantes de Poincaré e invariantes ante paridad, inversión temporal, conjugación de carga y por tanto, ante *CPT*. En adición, esta teoría presenta cantidades conservadas [3.2] asociadas a cantidades físicas propias de los fermiones, como el espín, el cual es $\frac{1}{2}$.

Si bien la segunda cuantización canónica de fermiones de segundo orden es autoconsistente gracias a la adopción del formalismo pseudohermítico propuesto por A. Mostafazadeh [13] y [14]; el problema aparente de la norma negativa expuesto en [2-17] persiste (se observa a partir de las relaciones [2-45] al aplicarlas a un estado). Sin embargo, el origen de este problema ya no es debido a las relaciones de cuantización no canónicas, sino al operador η que redefine aspectos en el espacio de Fock de los estados de partículas.

Esto último abre las puertas a más estudios sobre los fermiones de segundo orden necesarios para estudiar la definición de sus estado cuánticos, trabajando incluso con posibles estados de partículas fantasma, definidos como aquellos que en procesos de dispersión no son estados iniciales o finales. Con esto se abre la oportunidad de estudiar dichos fenómenos de dispersión, así como teoría de perturbaciones necesaria para realizar la renormalización de las interacciones, los diagramas de Feynman e incluso la cuantización por integrales de camino.

A. Anexo: Expresiones útiles

A continuación, se presentan ciertas expresiones para los campos ψ y $\hat{\psi}$ que fueron útiles en los cálculos de este trabajo:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{4mE_p}} \sum_s \left([a_p^{1s} + a_p^{2s} \gamma^5] u_p^s e^{-ip \cdot x} + [b_p^{s\dagger} + b_p^{2s\dagger} \gamma^5] v_p^s e^{ip \cdot x} \right) \quad (\text{A-1})$$

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{4mE_p}} \sum_s \left(\bar{u}_p^s [a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5] e^{ip \cdot x} + \bar{v}_p^s [b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5] e^{-ip \cdot x} \right) \quad (\text{A-2})$$

$$\dot{\psi}(x) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{4m}} \sum_s \left([a_p^{1s} + a_p^{2s} \gamma^5] u_p^s e^{-ip \cdot x} - [b_p^{s\dagger} + b_p^{2s\dagger} \gamma^5] v_p^s e^{ip \cdot x} \right) \quad (\text{A-3})$$

$$\dot{\hat{\psi}}(x) = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{4m}} \sum_s \left(\bar{u}_p^s [a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5] e^{ip \cdot x} - \bar{v}_p^s [b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5] e^{-ip \cdot x} \right) \quad (\text{A-4})$$

$$\nabla \psi(x) = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{4mE_p}} \sum_s \left([a_p^{1s} + a_p^{2s} \gamma^5] u_p^s e^{-ip \cdot x} - [b_p^{s\dagger} + b_p^{2s\dagger} \gamma^5] v_p^s e^{ip \cdot x} \right) \quad (\text{A-5})$$

$$\nabla \hat{\psi}(x) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{4mE_p}} \sum_s \left(\bar{u}_p^s [a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5] e^{ip \cdot x} - \bar{v}_p^s [b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5] e^{-ip \cdot x} \right) \quad (\text{A-6})$$

$$E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (\text{A-7})$$

$$\int d^3p e^{\mp i \mathbf{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{A-8})$$

$$\int d^3x f(\mathbf{q}) e^{\mp i(p \pm q) \cdot x} = (2\pi)^3 f(\mathbf{q}) e^{\mp i(E_p \pm E_q)t} \delta^{(3)}(\mathbf{p} \pm \mathbf{q}) = (2\pi)^3 f(\pm \mathbf{p}) e^{\mp i(E_p \pm E_p)t} \quad (\text{A-9})$$

B. Anexo: Cuantización de fermiones de segundo orden y pseudohermiticidad

Sabiendo como actúa η sobre los campos y, por consiguiente sobre los operadores de creación y aniquilación, podemos encontrar la forma explícita de η .

Primero, recordemos que η en [2-45] solo cambia el signo de los operadores de creación y aniquilación del tipo b , es decir, necesitamos un operador que solo actúe sobre estos. Asimismo η es un operador unitario y hermítico, con esto, podemos proponer un ansatz como en [1]:

Primero, hemos de preguntarnos que operador hermítico es capaz de hacer lo que hace η en [2-45], la respuesta, el operador de número para las partículas tipo a y b :

$$\mathcal{N}_{aj} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} N_{aj}, \quad \mathcal{N}_{bj} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} N_{bj}, \quad (\text{B-1})$$

con:

$$N_{aj} \equiv \sum_s a_p^{js\dagger} a_p^{js}, \quad N_{bj} \equiv \sum_s b_p^{js\dagger} b_p^{js}. \quad (\text{B-2})$$

Podemos definir definir una eigenbase para $\mathcal{N} \equiv \sum_j (\mathcal{N}_{aj} + \mathcal{N}_{bj})$ tal que:

$$\mathcal{N} |n\rangle = n |n\rangle = \sum_j (n_{aj} + n_{bj}) |n\rangle = \sum_j n_j |n\rangle, \quad (\text{B-3})$$

con los n anteriores siendo números naturales incluyendo el cero.

Podemos definir a $\mathcal{N}_2 \equiv \mathcal{N}_{a2} + \mathcal{N}_{b2}$ como candidato para ser el operador η , pues este solo “verá” a los operadores del campo χ_2 , anticonmutando trivialmente con los del campo χ_1 . Dado que η debe ser unitario podríamos esperar que tenga la forma de:

$$\eta = e^{-i\theta\mathcal{O}}, \quad (\text{B-4})$$

Con esto en mente, podemos proponer el siguiente ansatz:

$$\eta \equiv e^{-i\theta\mathcal{N}_2} = e^{-i\theta(\mathcal{N}_{a2} + \mathcal{N}_{b2})} = \exp\left(-i\theta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} + b_p^{2s\dagger} b_p^{2s})\right), \quad (\text{B-5})$$

podemos escribir η como:

$$\eta = e^{-i\theta\mathcal{N}_2} = \sum_m \left(\frac{(-i)^m (\theta\mathcal{N}_2)^m}{m!} \right), \quad (\text{B-6})$$

donde la parte “operacional” de η recae sobre el operador $\mathcal{N}_2$. Ahora hemos de preguntarnos que le hace $\mathcal{N}_2$ a los operadores de creación y aniquilación.

Primero podemos usar la relación de unitariedad que satisface η para calcular el parámetro θ :

$$1 = \eta\eta^\dagger = e^{-i\theta\mathcal{N}_2} e^{i\theta^*\mathcal{N}_2} = e^{-i(\theta-\theta^*)\mathcal{N}_2}, \quad (\text{B-7})$$

lo anterior se ve satisfecho si $\theta = \theta^*$.

Por otro lado, usando las relaciones de anticonmutación 2-22 calculemos primero $\mathcal{N}_2 b_k^{2+r}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2 b_k^{2r+} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} + b_p^{2s\dagger} b_p^{2s}) b_k^{2r+} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} b_k^{2r+} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s b_p^{2s\dagger} b_p^{2s} b_k^{2r+} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} b_k^{2r+} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s b_p^{2s\dagger} (-b_k^{2r+} b_p^{2s} + (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{k})) = \\ &= b_k^{2r+} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} + b_p^{2s\dagger} b_p^{2s}) + b_k^{2r+} = b_k^{2r+} (\mathcal{N}_2 + 1) \\ &\quad \therefore \\ \mathcal{N}_2 b_k^{2+r} &= b_k^{2r+} (\mathcal{N}_2 + 1). \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

Si volvemos aplicar $\mathcal{N}_2$ obtendremos $\mathcal{N}_2^2 b_k^{2+r} = b_k^{2r+} (\mathcal{N}_2 + 1)^2$, por ello, aplicando dicho operador m veces:

$$\mathcal{N}_2^m b_k^{2+r} = b_k^{2r+} (\mathcal{N}_2 + 1)^m, \quad (\text{B-9})$$

notemos que este cálculo es idéntico si cambiamos b_k^{2+r} por a_k^{2+r} . Asimismo, para b_k^{2r} y a_k^{2r} el proceso es similar, pues todo se reduce a utilizar las relaciones de anticonmutación 2-22 en el orden en el que aparecen, aprovechando que solo entre operadores del mismo tipo pueden aparecer deltas de Dirac, esto nos lleva a escribir, para los operadores del campo χ_2

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2^m b_k^{2+r} &= b_k^{2r+} (\mathcal{N}_2 + 1)^m, & \mathcal{N}_2^m a_k^{2+r} &= a_k^{2r+} (\mathcal{N}_2 + 1)^m \\ \mathcal{N}_2^m b_k^{2r} &= b_k^{2r} (\mathcal{N}_2 + 1)^m, & \mathcal{N}_2^m a_k^{2r} &= a_k^{2r} (\mathcal{N}_2 + 1)^m \end{aligned} \quad (\text{B-10})$$

mientras que para los operadores del campo χ_1 anticonmutan con los operadores del campo χ_2 y por consiguiente con η y $\mathcal{N}_2$, es decir se comportan similar a la parte del cálculo B-9 entre el operador $b_k^{2r\dagger}$ y $a_p^{2s\dagger}a_p^{2s}$, con eso en mente nos queda:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_2^m b_k^{1r\dagger} &= b_k^{1r\dagger} \mathcal{N}_2^m, & \mathcal{N}_2^m a_k^{1r\dagger} &= a_k^{1r\dagger} \mathcal{N}_2^m \\ \mathcal{N}_2^m b_k^{1r} &= b_k^{1r} \mathcal{N}_2^m, & \mathcal{N}_2^m a_k^{1r} &= a_k^{1r} \mathcal{N}_2^m.\end{aligned}\quad (\text{B-11})$$

Lo que resta es preguntarnos como η actúa sobre un operador para terminar de encontrar la forma de η . Eligiendo nuevamente a $b_k^{2r\dagger}$ para hacer el cálculo explícito:

$$\eta b_k^{2r\dagger} = e^{-i\theta \mathcal{N}_2} b_k^{2r\dagger} = \sum_m \left(\frac{(-i)^m (\theta \mathcal{N}_2)^m}{m!} \right) b_k^{2r\dagger} = b_k^{2r\dagger} \sum_m \left(\frac{(-i)^m [(\theta)(\mathcal{N}_2 + 1)]^m}{m!} \right) = b_k^{2r\dagger} e^{-i\theta(\mathcal{N}_2+1)}, \quad (\text{B-12})$$

y así, llegamos a que:

$$\eta^{-1} b_k^{2r\dagger} \eta = b_k^{2r\dagger} e^{i\theta(\mathcal{N}_2+1)} \eta = b_k^{2r\dagger} e^{i\theta(\mathcal{N}_2+1)} e^{i\theta \mathcal{N}_2} = b_k^{2r\dagger} e^{-i\theta} = -b_k^{2r\dagger}, \quad (\text{B-13})$$

el último paso es posible si $|\theta| = -\pi$, también notemos que hemos abusado de la notación al escribir el operador identidad como 1. Por lo que, eligiendo $\theta = \pi$, nos queda qué:

$$\eta = e^{i\pi \mathcal{N}_2} = \exp \left(i\pi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} + b_p^{2s\dagger} b_p^{2s}) \right), \quad (\text{B-14})$$

donde esta es la forma explícita de η , la cual es unitaria:

$$\eta \eta^\dagger = e^{i\pi \mathcal{N}_2} e^{-i\pi \mathcal{N}_2} = 1, \quad (\text{B-15})$$

asimismo, η es hermítica, pues:

$$\begin{aligned}\eta |n\rangle &= e^{i\pi \mathcal{N}_2} |n\rangle = e^{i\pi n_2} |n\rangle = |n\rangle = e^{-i\pi n_2} |n\rangle = e^{-i\pi \mathcal{N}_2} |n\rangle = \eta^\dagger |n\rangle \\ &\vdots \\ \eta |n\rangle &= \eta^\dagger |n\rangle\end{aligned}\quad (\text{B-16})$$

En adición, es fácil observar que las relaciones para las transformaciones de los operadores 2-45 se ven satisfechas usando las expresiones B-10 y B-11, por ejemplo, para el caso de un operador del campo χ_1 :

$$\eta^{-1} a_k^{1r} \eta = a_k^{1r} e^{i\pi \mathcal{N}_2} \eta = a_k^{1r} e^{i\pi \mathcal{N}_2} e^{-i\pi \mathcal{N}} = a_k^{1r} e^0 = a_k^{1r}. \quad (\text{B-17})$$

Las relaciones [B-13](#) y [B-17](#) sirven para calcular la forma en la que η actúa sobre estados de una partícula, siendo consistentes con [2-47](#). Solo los estados de una partícula asociadas al campo χ_2 verán un cambio en su signo debido a las relaciones [2-45](#) como se espera.

C. Anexo: Teoría de campo para fermiones de segundo orden

En este anexo se calcularán ciertas expresiones del capítulo 3 empleando en gran medida las propiedades 1-18 para las matrices gamma y las propiedades de los espinores de 1-33, así como las expresiones del Anexo A.

C.1. Relaciones de cuantización canónica

A continuación, se presenta el cálculo explícito de las relaciones de la segunda cuantización canónica 2-23 y 2-24 para los campos fermiónicos de segundo orden, con la correcta elección del adjunto $\hat{\psi}(x)$.

Primero imponemos que

$$\{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\} = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \quad (C-1)$$

es cierto. Ahora expandiendo explícitamente los campos en el anticonmutador nos queda:

$$\begin{aligned} \{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\} = i \int \frac{d^3p d^3q}{4m(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \sum_{s,r} \dots \\ \left\{ [a_p^{1s} u_{pa}^s + a_p^{2s} \gamma_{ac}^5 u_{pc}^s] e^{-ip \cdot x} + [b_p^{s\dagger} v_{pa}^s + b_p^{2s\dagger} \gamma_{ac}^5 v_{pc}^s] e^{ip \cdot x}, [\bar{u}_{qb}^r a_q^{1r\dagger} + a_q^{2r\dagger} \bar{u}_{qd}^r \gamma_{db}^5] e^{iq \cdot y} - [\bar{v}_{qb}^r b_q^{1r} + b_q^{2r} \bar{v}_{qd}^r \gamma_{db}^5] e^{-iq \cdot y} \right\}, \end{aligned} \quad (C-2)$$

a partir aquí podemos escribir explícitamente todos los anticonmutadores entre operadores de creación y aniquilación, sin embargo esto puede resultar un tanto confuso, por lo que primero aprovecharemos que ψ está formado por dos campos distintos, los cuales son independientes entre sí, por lo que una medición de uno no afecta al otro, es decir, crear o no una partícula perteneciente a un campo no afecta a la creación o destrucción de una partícula asociada al otro campo, esto significa que los operadores de creación y aniquilación entre los dos campos deben ser cero:

$$\{a_p^{js}, b_q^{ir\dagger}\} = \{a_p^{js\dagger}, b_q^{ir}\} = \{a_p^{js}, b_q^{ir}\} = \{a_p^{js\dagger}, b_q^{ir\dagger}\} = 0, \forall i \neq j, i, j = 1, 2 \quad (C-3)$$

de esta forma, podemos ver inmediatamente que la cantidad de anticonmutadores (distintos de cero) que hay que escribir se reduce, quedando solamente por definir aquellos que involucran operadores del mismo campo.

También, asumimos que no existe ninguna preferencia del campo y su adjunto por crear o destruir partículas o sus antipartículas, salvo que, al crear o destruir alguna de estas, el orden en el que se crean o destruyen sí importa (principio de exclusión de Pauli), es decir, no existe ninguna preferencia al crear o destruir partículas o antipartículas del mismo campo, solo importa el orden en el que esto ocurre, esto se traduce en términos de operadores como:

$$\{a_p^{jr}, a_q^{js}\} = \{a_p^{j\bar{r}}, a_q^{j\bar{s}}\} = \{b_p^{jr}, b_q^{js}\} = \{b_p^{j\bar{r}}, b_q^{j\bar{s}}\} = 0, j = 1, 2 \quad (\text{C-4})$$

con todo esto

$$\begin{aligned} & \{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\} = \\ &= i \int \frac{d^3p d^3q}{4m(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \sum_{s,r} [(\{a_p^{1s}, a_q^{1r\bar{}}\} u_{pa}^s \bar{u}_{qb}^r + \{a_p^{2s}, a_q^{2r\bar{}}\} \gamma_{ac}^5 u_{pc}^s \bar{u}_{qd}^r \gamma_{db}^5) e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} + \dots \\ & \dots + (-\{b_p^{1s\bar{}}, b_q^{1r}\} v_{pa}^s \bar{v}_{qb}^r - \{b_p^{2s\bar{}}, b_q^{2r}\} \gamma_{ac}^5 v_{pc}^s \bar{v}_{qd}^r) e^{i(p \cdot x - q \cdot y)}] \stackrel{!}{=} i \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (\text{C-5})$$

donde $\stackrel{!}{=}$ indica que queremos probar esa igualdad. Para ello necesitamos realizar ambas integrales, para ello, podemos observar que primero hemos de contraer los espinores, viendo las relaciones 1-33, notamos que necesitamos lo siguiente:

$$\{a_p^{jr}, a_q^{j\bar{s}}\} = \{b_p^{jr}, b_q^{j\bar{s}}\} = (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), j = 1, 2, \quad (\text{C-6})$$

así:

$$\begin{aligned} & \{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\} = \\ &= i \int \frac{d^3p d^3q}{4m(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \sum_{s,r} (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) [(u_{pa}^s \bar{u}_{qb}^r + \gamma_{ac}^5 u_{pc}^s \bar{u}_{qd}^r \gamma_{db}^5) e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} + \dots \\ & \dots + (-v_{pa}^s \bar{v}_{qb}^r - \gamma_{ac}^5 v_{pc}^s \bar{v}_{qd}^r) e^{i(p \cdot x - q \cdot y)}] = \\ &= i \int \frac{d^3p}{4m(2\pi)^3} \sum_s [(u_{pa}^s \bar{u}_{pb}^s + \gamma_{ac}^5 u_{pc}^s \bar{u}_{pd}^s \gamma_{db}^5) e^{-ip \cdot (x-y)} - (v_{pa}^s \bar{v}_{pb}^s + \gamma_{ac}^5 v_{pc}^s \bar{v}_{pd}^s) e^{ip \cdot (x-y)}], \end{aligned} \quad (\text{C-7})$$

de esta forma, podemos hacer uso las relaciones 1-33 y notando que:

$$\gamma_{ac}^5 (\not{p} \pm m)_{cd} \gamma_{db}^5 = \gamma_{ac}^5 (\gamma^\mu \partial_\mu \pm m)_{cd} \gamma_{db}^5 = (-\gamma^\mu \partial_\mu \pm m)_{ab} = (-\not{p} \pm m)_{ab} \quad (\text{C-8})$$

llegamos a:

$$\begin{aligned}
 \{\psi_a(x), \dot{\psi}_b(y)\} &= \\
 &= i \int \frac{d^3 p}{4m(2\pi)^3} \left[((\not{p} + m)_{ab} + (-\not{p} + m)_{ab}) e^{-ip \cdot (x-y)} - ((\not{p} - m)_{ab} + (-\not{p} - m)_{ab}) e^{ip \cdot (x-y)} \right] = \\
 &= i \int \frac{d^3 p}{4m(2\pi)^3} \left[2m\delta_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} + 2m\delta_{ab} e^{ip \cdot (x-y)} \right] \quad (C-9)
 \end{aligned}$$

y recordando que trabajamos a tiempos iguales:

$$\begin{aligned}
 \{\psi_a(x), \dot{\psi}_b(y)\} &= i\delta_{ab} \int \frac{d^3 p}{2(2\pi)^3} \left[e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right] = \frac{i\delta_{ab}}{2} 2\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = i\delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\
 &\quad \therefore \\
 \{\psi_a(x), \dot{\psi}_b(y)\} &= i\delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (C-10)
 \end{aligned}$$

Ahora, debemos asegurarnos de que los anticonmutadores encontrados también satisfagan la relación:

$$\{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\} = 0. \quad (C-11)$$

Expandiendo en modos de Fourier ambos campos:

$$\begin{aligned}
 \{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\} &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{4m(2\pi)^6 \sqrt{E_p E_q}} \sum_{s,r} \dots \\
 &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{4m(2\pi)^6 \sqrt{E_p E_q}} \sum_{s,r} \left[(a_p^{1s}, a_q^{1r}) u_{pa}^s \bar{u}_{qb}^r + (a_p^{2s}, a_q^{2r}) \gamma_{ac}^5 u_{pc}^s \bar{u}_{qd}^r \gamma_{db}^5 e^{-ip \cdot (x-y)} + (v_{pa}^s \bar{v}_{qb}^s + \gamma_{ac}^5 v_{pc}^s \bar{v}_{qd}^s) e^{ip \cdot (x-y)} \right] = \\
 &= \int \frac{d^3 p}{4m(2\pi)^3 E_p} \sum_s \left[(u_{pa}^s \bar{u}_{pb}^s + \gamma_{ac}^5 u_{pc}^s \bar{u}_{pd}^s \gamma_{db}^5) e^{-ip \cdot (x-y)} + (v_{pa}^s \bar{v}_{pb}^s + \gamma_{ac}^5 v_{pc}^s \bar{v}_{pd}^s) e^{ip \cdot (x-y)} \right] = \\
 &= \int \frac{d^3 p}{4m(2\pi)^3 E_p} \left[((\not{p} + m)_{ab} + (-\not{p} + m)_{ab}) e^{-ip \cdot (x-y)} + ((\not{p} - m)_{ab} + (-\not{p} - m)_{ab}) e^{ip \cdot (x-y)} \right] = \\
 &= \delta_{ab} \int \frac{d^3 p}{4m(2\pi)^3 E_p} \left[2m e^{-ip \cdot (x-y)} - 2m e^{ip \cdot (x-y)} \right] = \delta_{ab} \int \frac{d^3 p}{2(2\pi)^3 E_p} \left[e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right] \equiv \delta_{ab} \Delta(x-y), \quad (C-12)
 \end{aligned}$$

en este punto, si no asumimos que tiempos iguales recuperamos el propagador de Schwinger 3-3, por lo que al hacerlo y, al hacer en la segunda exponencial $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, nos queda:

$$\begin{aligned} \{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\} &= \delta_{ab} \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3 E_p} \left[e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right] = \delta_{ab} \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3 E_p} \left[e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} - e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \right] = \\ &\delta_{ab} \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3 E_p} \left[e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} - e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (C-13)$$

$$\{\psi_a(x), \hat{\psi}_b(y)\} = 0 \quad (C-14)$$

De esta forma, al imponer las relaciones de la segunda cuantización canónica [2-23](#) y [2-24](#), se obtienen ciertas contricciones en forma de anticonmutadores [\(2-22\)](#) para los operadores de creación y aniquilación de los campos χ_j que forman la solución de campos de fermiones de segundo orden. [2-20](#)

C.2. Hamiltoniano y 3-momento

C.2.1. Hamiltoniano

Para este cálculo, hemos de ser sumamente cuidadoso y haremos cálculos no explícitos para facilitar la escritura.

Primero, escribamos el hamiltoniano para fermiones de segundo orden:

$$H =: \int d^3x T^{00} := \int d^3x : \dot{\psi} \dot{\psi} + \nabla \tilde{\psi} \cdot \nabla \psi + m^2 \tilde{\psi} \psi :, \quad (\text{C-15})$$

primero, escribamos los bilineales por separado, empezando por el de las derivadas temporales:

$$\begin{aligned} \int d^3x : \dot{\psi}(x) \dot{\psi}(x) &:= \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{\sqrt{E_p E_q}}{4m} \sum_{s,r} : \dots \\ &\dots [\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(p-q) \cdot x} - \bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{i(p+q) \cdot x} + \dots \\ &\dots - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(p+q) \cdot x} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{-i(p-q) \cdot x}] := \\ &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_p E_q}}{4m} \sum_{s,r} : \dots \\ &\dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(E_p - E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{-i(E_p - E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \dots \\ &\dots - (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{i(E_p + E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(E_p + E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q})] := \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{4m} \sum_{s,r} : \dots \\ &\dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\ &\dots - (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t})] :. \quad (\text{C-16}) \end{aligned}$$

Notemos, como en el resultado de arriba, una parte del resultado se contrajo de forma consistente, mientras que otro parecería que no es el caso, pues aun aparecen los exponenciales y los momentos son negativos. Ahora, haciendo explícitamente el término de los gradientes:

$$\begin{aligned}
& \int d^3x : \nabla \hat{\psi}(x) \cdot \nabla \psi(x) := \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{4m\sqrt{E_p E_q}} \sum_{s,r} : \dots \\
& \dots [\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(p-q) \cdot x} - \bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{i(p+q) \cdot x} + \dots \\
& \dots - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(p+q) \cdot x} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{-i(p-q) \cdot x}] := \\
& = \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{4m\sqrt{E_p E_q}} \sum_{s,r} : \dots \\
& \dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(E_p - E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{-i(E_p - E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \dots \\
& \dots - (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{i(E_p + E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(E_p + E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q})] := \\
& = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{4mE_p} \sum_{s,r} : \dots \\
& \dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\
& \dots + (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t})] : \quad (C-17)
\end{aligned}$$

Nuevamente notemos la distinción entre dos agrupaciones de términos. Para terminar, el término de masa:

$$\begin{aligned}
& \int d^3x m^2 : \hat{\psi}(x) \psi(x) := \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{m}{4\sqrt{E_p E_q}} \sum_{s,r} \dots \\
& \dots [\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(p-q) \cdot x} + \bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{i(p+q) \cdot x} + \dots \\
& \dots + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(p+q) \cdot x} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{-i(p-q) \cdot x}] = \\
& = \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m}{4\sqrt{E_p E_q}} \sum_{s,r} : \dots \\
& \dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(E_p - E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{-i(E_p - E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \dots \\
& \dots + (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{i(E_p + E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(E_p + E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q})] := \\
& = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{4E_p} \sum_{s,r} : \dots \\
& \dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\
& \dots + (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t})] : \quad (C-18)
\end{aligned}$$

Con esto, notemos en los tres resultados que existen dos agrupaciones de términos, aquellos que parecen ser los esperados y los que tiene términos $-p$ con una exponencial,

primero lidiemos con estos últimos. Vemos que en los tres casos, los términos extraños tienen los mismos factores, salvo algunos comunes como E_p, m o $\vec{p}^2$ si los sumamos obtenemos:

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 4m} \left(-E_p + \frac{\vec{p}^2}{E_p} + \frac{m^2}{E_p} \right) \sum_{s,r} : \dots$$

$$\dots \left(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t} \right) :,$$
(C-19)

pero $-E_p - \frac{\vec{p}^2}{E_p} + \frac{m^2}{E_p} = 0$, por lo que la expresión de arriba es nula.

Reescribiendo las parte que nos queda del Hamiltoniano:

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 4m} \left(E_p + \frac{\vec{p}^2}{E_p} + \frac{m^2}{E_p} \right) \sum_{s,r} : \dots$$

$$\dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) =$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2m} \sum_{s,r} : \bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r :,$$
(C-20)

para la última expresión, es necesario usar las expresiones 1-33 para los espinores, asimismo, es importante notar que aquellos productos que solo contienen a una γ^5 s anulan, explícitamente:

$$\bar{u}_p^s \gamma^5 u_p^r = u_p^{s\dagger} \gamma^0 \gamma^5 u_p^r = u_p^{s\dagger} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{I}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} u_p^r = \begin{pmatrix} -\xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^r \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \bar{\xi}^r \end{pmatrix} = 0$$
(C-21)

y

$$\bar{v}_p^s \gamma^5 v_p^r = v_p^{s\dagger} \gamma^0 \gamma^5 v_p^r = v_p^{s\dagger} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{I}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} v_p^r = \begin{pmatrix} -\tau^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & -\tau^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \tau^r \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \bar{\tau}^r \end{pmatrix} = 0,$$
(C-22)

con esto

$$\begin{aligned}
H &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2m} \sum_{s,r} : (a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s}) \bar{u}_p^s u_p^r + (b_p^{1s} b_p^{1s\dagger} + b_p^{2s} b_p^{2s\dagger}) \bar{v}_p^s v_p^r : = \\
&\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2m} \sum_{s,r} : (a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s}) 2m \delta^{sr} - (b_p^{1s} b_p^{1s\dagger} + b_p^{2s} b_p^{2s\dagger}) 2m \delta^{sr} : = \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s : a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} - b_p^{1s} b_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} - b_p^{2s} b_p^{2s\dagger} : \quad (C-23)
\end{aligned}$$

por lo tanto, y después del ordenamiento normal

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} + b_p^{1s\dagger} b_p^{1s} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} + b_p^{2s\dagger} b_p^{2s}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_{j,s} (a_p^{j\dagger s} a_p^{js} + b_p^{j\dagger s} b_p^{js}) \quad (C-24)$$

C.2.2. 3-momento

El generador de las translaciones espaciales es:

$$P^j =: \int d^3x T^{0j} := - \int d^3x : \hat{\psi} \nabla_j \psi + \nabla_j \hat{\psi} \psi :, \quad (C-25)$$

de igual forma, expandiendo en modos de Fourier ambos términos en el 3-momento por separado, recordando que, explícitamente se debe escribir $\hat{\psi}_\alpha \nabla \psi_\alpha$

$$\begin{aligned}
& - \int d^3x : \hat{\psi} \nabla \psi := \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6 4m} \vec{q} \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} \sum_{s,r} : \dots \\
& \dots [\bar{u}_p^s (a_p^{1st} + a_p^{2st} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(p-q) \cdot x} - \bar{u}_p^s (a_p^{1st} + a_p^{2st} \gamma^5)] (b_q^{r+} + b_q^{2r+} \gamma^5) v_q^r e^{i(p+q) \cdot x} + \dots \\
& \dots - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(p+q) \cdot x} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r+} + b_q^{2r+} \gamma^5) v_q^r e^{-i(p-q) \cdot x}] := \\
& \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3 4m} \vec{q} \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} \sum_{s,r} : \dots \\
& \dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1st} + a_p^{2st} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(E_p - E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r+} + b_q^{2r+} \gamma^5) v_q^r e^{-i(E_p - E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \dots \\
& \dots - (\bar{u}_p^s (a_p^{1st} + a_p^{2st} \gamma^5) (b_q^{r+} + b_q^{2r+} \gamma^5) v_q^r e^{i(E_p + E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(E_p + E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q})] := \\
& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 4m} \vec{p} \sum_{s,r} : \dots \\
& \dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1st} + a_p^{2st} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r+} + b_p^{2r+} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\
& \dots + (\bar{u}_p^s (a_p^{1st} + a_p^{2st} \gamma^5) (b_{-p}^{r+} + b_{-p}^{2r+} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t})] : . \\
\end{aligned} \tag{C-26}$$

Ahora, explícitamente $\nabla \hat{\psi} \psi$:

$$\begin{aligned}
& - \int d^3x : \nabla \hat{\psi} \psi := \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6 4m} \vec{p} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \sum_{s,r} : \dots \\
& \dots [\bar{u}_p^s (a_p^{1st} + a_p^{2st} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(p-q) \cdot x} - \bar{u}_p^s (a_p^{1st} + a_p^{2st} \gamma^5)] (b_q^{r+} + b_q^{2r+} \gamma^5) v_q^r e^{i(p+q) \cdot x} + \dots \\
& \dots - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(p+q) \cdot x} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r+} + b_q^{2r+} \gamma^5) v_q^r e^{-i(p-q) \cdot x}] := \\
& \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3 4m} \vec{p} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \sum_{s,r} : \dots \\
& \dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1st} + a_p^{2st} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(E_p - E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r+} + b_q^{2r+} \gamma^5) v_q^r e^{-i(E_p - E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \dots \\
& \dots - (\bar{u}_p^s (a_p^{1st} + a_p^{2st} \gamma^5) (b_q^{r+} + b_q^{2r+} \gamma^5) v_q^r e^{i(E_p + E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(E_p + E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q})] := \\
& \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 4m} \vec{q} \sum_{s,r} : \dots \\
& \dots [(\bar{u}_q^s (a_q^{1st} + a_q^{2st} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r + \bar{v}_q^s (b_q^{1s} + b_q^{2s} \gamma^5) (b_q^{r+} + b_q^{2r+} \gamma^5) v_q^r) + \dots \\
& \dots + (\bar{u}_{-q}^s (a_{-q}^{1st} + a_{-q}^{2st} \gamma^5) (b_q^{r+} + b_q^{2r+} \gamma^5) v_q^r e^{2iE_q t} + \bar{v}_{-q}^s (b_{-q}^{1s} + b_{-q}^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-2iE_q t})] : \\
\end{aligned} \tag{C-27}$$

si ahora, en la integral que no contiene exponenciales hacemos $\vec{q} \rightarrow \vec{p}$ y en la que sí las

contiene (los términos de la última línea) hacemos $\vec{q} \rightarrow -\vec{p}$ nos queda:

$$\begin{aligned}
 & - \int d^3x : \nabla \hat{\psi} \dot{\psi} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 4m} \vec{p} \sum_{s,r} : \dots \\
 & \dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\
 & \dots - (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t})] :, \\
 & \hspace{15em} (C-28)
 \end{aligned}$$

ahora, al sumar ambas expresiones:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= - \int d^3x : \dot{\psi} \nabla \psi + \nabla \hat{\psi} \dot{\psi} := \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 4m} \vec{p} \sum_{s,r} : \dots \\
 & \dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\
 & \dots + (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t})] : + \dots \\
 & \dots + [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\
 & \dots - (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t})], \\
 & \hspace{15em} (C-29)
 \end{aligned}$$

los términos que aun contienen exponenciales se anulan trivialmente, mientras que los que no:

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2m} \vec{p} \sum_{s,r} : \bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r : \quad (C-30)$$

dicha expresión es idéntica a la que aparece en el Hamiltoniano C-20, salvo el término $\mathbf{p}$, sin embargo, el cálculo que procede después entre espinores u y v procede igual, dando lugar al generador de traslaciones espaciales:

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \sum_s : a_p^{1\dagger s} a_p^{1s} - b_p^{1s} b_p^{1\dagger s} + a_p^{2\dagger s} a_p^{2s} - b_p^{2s} b_p^{2\dagger s} :, \quad (C-31)$$

por lo que al hacer el ordenamiento normal

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \sum_s (a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} + b_p^{1s\dagger} b_p^{1s} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} + b_p^{2s\dagger} b_p^{2s}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \sum_{j,s} (a_p^{js\dagger} a_p^{js} + b_p^{js\dagger} b_p^{js}) \quad (C-32)$$

del tal forma que, los generadores de traslaciones espacio-temporales queda como:

$$P^\mu = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^\mu \sum_{j,s} (a_p^{js\dagger} a_p^{js} + b_p^{js\dagger} b_p^{js}). \quad (C-33)$$

C.3. Carga

La carga asociada a la simetría de fase global que presenta la teoría es:

$$Q = i \int d^3 x : \hat{\psi} \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \psi :, \quad (C-34)$$

de manera similar a los cálculos anteriores hagamos por separado las integrales de los productos de los campos de Q; iniciando por $\hat{\psi} \dot{\psi}$:

$$\begin{aligned} i \int d^3 x : \hat{\psi} \dot{\psi} &:= \int \frac{d^3 x d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6 4m} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \sum_{s,r} : \dots \\ &\dots [\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(p-q) \cdot x} - \bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{i(p+q) \cdot x} + \dots \\ &\dots + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(p+q) \cdot x} - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{-i(p-q) \cdot x}] := \\ &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^3 4m} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \sum_{s,r} : \dots \\ &\dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(E_p - E_q)t} - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{-i(E_p - E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \dots \\ &\dots + (-\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{i(E_p + E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(E_p + E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q})] := \\ &\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 4m} \sum_{s,r} : \dots \\ &\dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\ &\dots + (-\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t})] :, \quad (C-35) \end{aligned}$$

por otro lado, para $-\hat{\psi}\psi$:

$$\begin{aligned}
-i \int d^3x : \hat{\psi}\psi &:= \int \frac{d^3x d^3p d^3q}{(2\pi)^6 4m} \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} \sum_{s,r} : \dots \\
&\dots [\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(p-q)\cdot x} + \bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{i(p+q)\cdot x} + \dots \\
&\dots - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(p+q)\cdot x} - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{-i(p-q)\cdot x}] := \\
&= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3 4m} \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \sum_{s,r} : \dots \\
&\dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{i(E_p - E_q)t} - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{-i(E_p - E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \dots \\
&\dots - (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_q^{r\dagger} + b_q^{2r\dagger} \gamma^5) v_q^r e^{i(E_p + E_q)t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_q^{1r} + a_q^{2r} \gamma^5) u_q^r e^{-i(E_p + E_q)t}) \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q})] := \\
&\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 4m} \sum_{s,r} : \dots \\
&\dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\
&\dots - (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t})] :. \quad (C-36)
\end{aligned}$$

Ahora, sumando ambas expresiones:

$$\begin{aligned}
Q &= i \int d^3x : \hat{\psi}\hat{\psi} - \hat{\psi}\psi := \\
&\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 4m} \sum_{s,r} : \dots \\
&\dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\
&\dots + (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t}) + \\
&\dots (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\
&\dots - (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t})] := \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2m} \sum_{s,r} : \bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r : \quad (C-37)
\end{aligned}$$

realizando los mismos procedimientos para reescribir los términos de C-20:

$$\begin{aligned}
Q &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s : a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} + b_p^{1s} b_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} + b_p^{2s} b_p^{2s\dagger} : \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_p^{1s\dagger} a_p^{1s} - b_p^{1s\dagger} b_p^{1s} + a_p^{2s\dagger} a_p^{2s} - b_p^{2s\dagger} b_p^{2s}), \quad (C-38)
\end{aligned}$$

por lo tanto, concluimos que las cargas de las partículas tipo a y b son opuestas entre sí, sin importar a que campo pertenezcan:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{j,s} (a_p^{js\dagger} a_p^{js} - b_p^{js\dagger} b_p^{js}). \quad (\text{C-39})$$

C.4. Espín

El cálculo para saber si nuestra teoría describe a fermiones de espín $\frac{1}{2}$ se reduce a calcular, por ejemplo:

$$S^3 a_0^{il\dagger} |0\rangle = [S^3, a_0^{il\dagger}] |0\rangle \stackrel{!}{=} \pm \frac{1}{2} a_0^{il\dagger} |0\rangle, \quad (\text{C-40})$$

para ello, haremos uso de que el conmutador $[S^3, a_0^{il\dagger}]$ se puede reducir bastante gracias a los anticonmutadores [2-22](#). Primero, la componente S^3 es:

$$S^3 = -i \int d^3x : \hat{\psi} J^3 \psi - \hat{\bar{\psi}} J^3 \bar{\psi} :, \quad (\text{C-41})$$

primero, escribamos explícitamente

$$-i \int d^3x : \hat{\psi} J^3 \psi :, a_0^{il\dagger}, \quad (\text{C-42})$$

aprovechando que el cálculo $-\hat{\psi}\psi$ fue calculado anteriormente [C-36](#), pero ahora respetando el hecho de que J^3 opera en el espacio espinorial:

$$\begin{aligned} -i \int d^3x : \hat{\psi} J^3 \psi := & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 4m} \sum_{s,r} : \dots \\ & \dots [(\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) J^3 (a_p^{1r} + a_p^{2r} \gamma^5) u_p^r - \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) J^3 (b_p^{r\dagger} + b_p^{2r\dagger} \gamma^5) v_p^r) + \dots \\ & \dots - (\bar{u}_p^s (a_p^{1s\dagger} + a_p^{2s\dagger} \gamma^5) J^3 (b_{-p}^{r\dagger} + b_{-p}^{2r\dagger} \gamma^5) v_{-p}^r e^{2iE_p t} + \bar{v}_p^s (b_p^{1s} + b_p^{2s} \gamma^5) J^3 (a_{-p}^{1r} + a_{-p}^{2r} \gamma^5) u_{-p}^r e^{-2iE_p t})] :, \end{aligned} \quad (\text{C-43})$$

Notemos que los términos de la integral serán aquellos que conmuten con $a_0^{il\dagger}$, más específicamente, los pares de operadores de creación o aniquilación que se formen conmutaran con $a_0^{il\dagger}$: $[AB, a_0^{il\dagger}]$, donde A y B son dichos operadores. Asimismo, notemos que podemos escribir $[AB, a_0^{il\dagger}] = A\{B, a_0^{il\dagger}\} - \{A, a_0^{il\dagger}\}B$, de esta forma vemos que ciertos pares de operadores conmutarán trivialmente con $a_0^{il\dagger}$, pues sus anticonmutadores son

dicho operador son cero como se ve en 2-22. Vemos que solo si A o B son a_p^{jr} , un anticonmutador será distinto de cero, pero, por otro lado, dado el orden en el que operan los campos solo B puede ser a_p^{js} , por lo que la identidad del conmutador se reduce a: $[Aa_p^{jr}, a_0^{il+}] = A\{a_p^{jr}, a_0^{il+}\} - \{A, a_0^{il+}\}a_p^{jr}$, sin embargo, recordemos que dicho conmutador opera sobre el vacío, por lo que el operador a_0^{jr} no aniquila, dejando de forma efectiva: $[Aa_p^{jr}, a_0^{il+}] = A\{a_p^{jr}, a_0^{il+}\} = A(2\pi)^3 \delta^{ij} \delta^{rl} \delta^{(3)}(\vec{p})$, por lo que al ver la expresión C-43, A puede ser b_p^{js} o a_p^{js+} , descartando rápidamente b_p^{js} pues este aniquila al vacío. Llegando al resultado $[Aa_p^{jr}, a_0^{il+}] = [a_p^{js+} a_p^{jr}, a_0^{il+}] = a_p^{js+} (2\pi)^3 \delta^{ij} \delta^{rl} \delta^{(3)}(\vec{p}) = a_p^{is+} (2\pi)^3 \delta^{rl} \delta^{(3)}(\vec{p})$, de esta forma, nos queda:

$$-i \int d^3x [\hat{\psi} J^3 \psi, a_0^{il+}] |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 4m} \sum_{s,r} : \bar{u}_p^s J^3 u_p^r a_p^{is+} (2\pi)^3 \delta^{rl} \delta^{(3)}(\vec{p}) : |0\rangle = \sum_s \frac{a_p^{is+}}{4m} \bar{u}_0^s J^3 u_0^l |0\rangle, \quad (C-44)$$

asimismo, sabemos que

$$J^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \quad (C-45)$$

y que la matriz de Pauli satisface la ecuación de eigenvalores para el espín:

$$\frac{\sigma^3}{2} \xi^l = \frac{\lambda_l}{2} \xi^l, \quad (C-46)$$

donde $\xi^1 = (1, 0)^T$, $\lambda_1 = 1$ y $\xi^2 = (0, 1)^T$, $\lambda_2 = -1$ con esto, podemos hacer:

$$\frac{J^3}{2} u_0^l = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E_0} \xi^l \\ \sqrt{E_0} \xi^l \end{pmatrix} = \frac{\lambda_l}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{E_0} \xi^l \\ \sqrt{E_0} \xi^l \end{pmatrix} = \frac{\lambda_l}{2} u_0^l. \quad (C-47)$$

Y ahora, usando las propiedades 1-33 y notando que, cuando $\vec{p} = 0$, $E_0 = m$:

$$\begin{aligned} -i \int d^3x [\hat{\psi} J^3 \psi, a_0^{il+}] &= \sum_s \frac{a_p^{is+}}{4m} \bar{u}_0^s J^3 u_0^l |0\rangle = \sum_s \frac{a_p^{is+}}{4m} \bar{u}_0^s \frac{\lambda_l}{2} u_0^l |0\rangle = \sum_s \frac{a_p^{is+} \lambda_l}{8m} \sum_s \bar{u}_0^s u_0^l |0\rangle = \\ &= \sum_s \frac{a_p^{is+} \lambda_l}{8m} 2m \delta^{sl} = \frac{a_p^{il+} \lambda_l}{4} |0\rangle. \end{aligned} \quad (C-48)$$

Con este cálculo hecho, es fácil ver el resultado de la otra componente, ya que como hemos visto en cálculos anteriores (C-35), la única parte que contribuye en el conmutador es la

misma:

$$i \int d^3x [\dot{\psi} J^3 \psi, a_0^{1l+}] |0\rangle = \sum_s \frac{a_p^{is+}}{4m} \bar{u}_0^s J^3 u_0^l |0\rangle = \frac{a_p^{il+} \lambda_l}{4} |0\rangle, \quad (C-49)$$

de esta forma, al sumar:

$$S^3 a_0^{il+} |0\rangle = [S^3, a_p^{il+}] |0\rangle = [-i \int d^3x : \dot{\psi} J^3 \psi - \psi J^3 \dot{\psi} :, a_p^{il+}] |0\rangle = \frac{a_p^{il+} \lambda_l}{2} |0\rangle, \quad (C-50)$$

por lo tanto:

$$S^3 a_0^{il+} |0\rangle = \frac{a_p^{il+} \lambda_l}{2} |0\rangle, \quad (C-51)$$

recordando que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, podemos concluir que las partículas tipo a asociadas a estos campos fermiónicos de segundo orden son $\pm \frac{1}{2}$, lo cual es consistente con el hecho de que son fermiones y el signo solo depende de la polarización de espín. Por otro lado, al hacer el cálculo para partículas tipo b : $S^3 b_0^{il+} |0\rangle$, podemos notar que todo el cálculo anterior es completamente análogo, salvo el hecho de que los espinores que acompañan a los operadores b son espinores tipo v (ver [C-43](#)), por lo que el resultado será:

$$S^3 b_0^{il+} |0\rangle = [S^3, b_p^{il+}] |0\rangle = \sum_s \frac{a_p^{is+}}{2m} \bar{v}_0^s J^3 v_0^l |0\rangle \quad (C-52)$$

sin embargo, como en [\[19\]](#), se asume :

$$\frac{\sigma^3}{2} \tau^l = -\frac{\lambda_l}{2} \tau^l, \quad (C-53)$$

de tal manera que

$$S^3 b_0^{il+} |0\rangle = - \sum_s \frac{b_p^{is+} \lambda_l}{4m} \bar{v}_0^s v_0^l |0\rangle = \frac{b_p^{il+} \lambda_l}{2} |0\rangle \quad (C-54)$$

es decir, las partículas tipo b asociados a esta teoría, también son de espín $\pm \frac{1}{2}$:

$$S^3 b_0^{il+} |0\rangle = \frac{b_p^{il+} \lambda_l}{2} |0\rangle. \quad (C-55)$$

Bibliografía

- [1] D. V. Ahluwalia and C.-Y. Lee. Spin-half bosons with mass dimension three-half: Evading the spin-statistics theorem. *EPL*, 140(2):24001, 2022, [[arXiv 2212.09457 \[hep-th\]](#)]. [doi:10.1209/0295-5075/ac97bd](#). [Erratum: *EPL* 140, 69901 (2022)].
- [2] G. Arcadi, M. Dutra, P. Ghosh, M. Lindner, Y. Mambrini, M. Pierre, S. Profumo, and F. S. Queiroz. The waning of the WIMP? A review of models, searches, and constraints. *Eur. Phys. J. C*, 78(3):203, 2018, [[arXiv 1703.07364 \[hep-ph\]](#)]. [doi:10.1140/epjc/s10052-018-5662-y](#).
- [3] C. M. Bender and S. Boettcher. Real spectra in nonhermitian hamiltonians having pt symmetry. *Physical Review Letters*, 80(24):5243–5246, June 1998. [doi:10.1103/physrevlett.80.5243](#).
- [4] N. Cufaro Petroni, P. Gueret, J. P. Vigiér, and A. Kyprianidis. Second-order wave equation for spin-(1/2) fields. *Phys. Rev. D*, 31:3157–3161, Jun 1985. [doi:10.1103/PhysRevD.31.3157](#).
- [5] P. A. M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 117:610–624, 1928. [doi:10.1098/rspa.1928.0023](#).
- [6] L. Feng, S. Profumo, and L. Ubaldi. Closing in on singlet scalar dark matter: LUX, invisible Higgs decays and gamma-ray lines. *JHEP*, 03:045, 2015, [[arXiv 1412.1105 \[hep-ph\]](#)]. [doi:10.1007/JHEP03\(2015\)045](#).
- [7] R. Ferro-Hernández, J. Olmos, E. Peinado, and C. A. Vaquera-Araujo. Quantization of second-order fermions. *Phys. Rev. D*, 109:085003, Apr 2024. [doi:10.1103/PhysRevD.109.085003](#).
- [8] R. P. Feynman and M. Gell-Mann. Theory of Fermi interaction. *Phys. Rev.*, 109:193–198, 1958. [doi:10.1103/PhysRev.109.193](#).
- [9] T. W. B. Kibble and J. C. Polkinghorne. Higher order spinor lagrangians. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 8(1):74–83, Apr 1958. [doi:10.1007/BF02828852](#).

- [10] P. Langacker. *The Standard Model and Beyond*. Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation. CRC Press, 2009. URL https://books.google.com.mx/books?id=dpANo3e_pS8C.
- [11] C.-Y. Lee. Generalized unitary evolution for symplectic scalar fermions. -, 5 2023, [[arXiv 2305.17712 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2305.17712)].
- [12] M. Maggiore. *A Modern introduction to quantum field theory*. Oxford Master Series in Physics. 2005.
- [13] A. Mostafazadeh. Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, 43(1):205–214, 01 2002. [doi:10.1063/1.1418246](https://doi.org/10.1063/1.1418246).
- [14] A. Mostafazadeh. Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 7:1191–1306, 2010, [[arXiv 0810.5643 \[quant-ph\]](https://arxiv.org/abs/0810.5643)]. [doi:10.1142/S0219887810004816](https://doi.org/10.1142/S0219887810004816).
- [15] R. Penrose. *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Science: Astrophysics. Jonathan Cape, 2004. URL https://books.google.com.mx/books?id=jjG_ngEACAAJ.
- [16] M. Peskin and D. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. CRC Press, 2018. URL <https://books.google.com.mx/books?id=9EpnDwAAQBAJ>.
- [17] D. J. Robinson, E. Kapit, and A. LeClair. Lorentz Symmetric Quantum Field Theory for Symplectic Fermions. *J. Math. Phys.*, 50:112301, 2009, [[arXiv 0903.2399 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0903.2399)]. [doi:10.1063/1.3248256](https://doi.org/10.1063/1.3248256).
- [18] E. Sablevicius and P. Millington. Poincaré symmetries and representations in pseudo-Hermitian quantum field theory. -, 7 2023, [[arXiv 2307.16805 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2307.16805)].
- [19] M. Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2007. URL <https://books.google.com.mx/books?id=50epxIG42B4C>.
- [20] D. Tong. *Quantum Field Theory*. University of Cambridge Part III Mathematical Tripos, 2006–2007.
- [21] C. A. Vaquera-Araujo, M. Napsuciale, and R. Angeles-Martinez. Renormalization of the QED of Self-Interacting Second Order Spin 1/2 Fermions. *JHEP*, 01:011, 2013, [[arXiv 1205.1557 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1205.1557)]. [doi:10.1007/JHEP01\(2013\)011](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2013)011).

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



León, Guanajuato, 11 de junio de 2024

Dr. David Delepine
Director
División de Ciencias e Ingenierías
PRESENTE

Por medio de la presente me permito informar que he leído la tesis titulada **“Cuantización canónica de fermiones de segundo orden”**, que para obtener el grado de Maestría en Física ha sido elaborada por el Lic. **Julio César Olmos Gómez** bajo mi asesoría. En mi opinión, la tesis cumple con los requisitos de calidad correspondientes al grado académico al que se aspira. Las correcciones sugeridas por mi parte han sido atendidas, por lo cual recomiendo se proceda a la defensa de la tesis.

Sin más por el momento quedo a sus órdenes para cualquier aclaración.

Atentamente

Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo
Investigador por México Conahcyt
Departamento de Física
DCI, Campus León
vaquera@fisica.ugto.mx



León, Guanajuato, 13 de mayo de 2024

Dr. David Delepine
Director de la División de Ciencias e Ingenierías
Campus León, Universidad de Guanajuato
PRESENTE

Estimado Dr. Delepine:

Por este medio, me permito informarle que he leído la tesis titulada **“Cuantización canónica de fermiones de segundo orden”** que realizó el Licenciado en Física **Julio César Olmos Gómez** como requisito para obtener el grado de Maestro en Física.

Considero que el trabajo de maestría realizado por Julio es muy completo y que aporta conocimiento de relevancia en el campo un problema fundamental en la formulación de cuantización canónica. Considero que su trabajo reúne los requisitos necesarios de calidad e interés académico para que sea defendida en un examen de grado, razón por la cual extiendo mi aval para que así se proceda.

Sin más que agregar, agradezco su atención y aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”

Dr. Juan Barranco Monarca
División de Ciencias e Ingenierías UG



5 de Junio de 2024

Asunto: Carta de revisión de tesis de Julio César Olmos Gómez

Dr. David Delepine
Director de la División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Universidad de Guanajuato
Presente

Estimado Dr. Delepine,

En mi calidad de miembro del comité sinodal del estudiante de Maestría Julio César Olmos Gómez (NUA: 313702), por este medio informo a usted que he revisado su tesis titulada "*Cuantización canónica de fermiones de segundo orden*" que realizó Julio César con el fin de obtener el grado de Maestro en Física.

El trabajo de Julio César posee el contenido y la relevancia necesaria como trabajo de investigación y Julio ya ha considerado e implementado las correcciones sugeridas por un servidor. Considero que su trabajo de tesis está listo para ser defendido públicamente.

Sin más por el momento, me despido de usted con un cordial saludo.

Dr. José Luis López-Picón
Departamento de Física
División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Universidad de Guanajuato
email: jl_lopez@fisica.ugto.mx



Gustavo Niz Quevedo
Departamento de Física
División de Ciencias e Ingenierías

León, Gto., 7 de Junio de 2024.

Dr. David Yves Ghislain Delepine
Director de la División de Ciencias e Ingenierías
Universidad de Guanajuato

Estimado Dr. David Yves Ghislain Delepine

Por medio de la presente le informo que he recibido, leído y revisado la tesis de Maestría titulada “Cuantización canónica para fermiones de segundo orden” del alumno Julio César Olmos Gómez, bajo la supervisión del Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo.

Después de la atención a ciertas correcciones, creo que el trabajo cumple con los estándares requeridos para la obtención del grado, y apoyo la defensa del mismo en la fecha convenida.

Me pongo a su disposición para cualquier duda sobre la revisión de dicho trabajo de tesis.

Atentamente,

Gustavo Niz