ABCD'ECONOMÍA

ABCD'ECONOMÍA

Alejandro Mosiño
COORDINADOR

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

ABCD'ECONOMÍA

Alejandro Mosiño
coordinador

ABCD'ECONOMÍA

Alejandro Mosiño
coordinador

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

2018

ABCD'ECONOMÍA, Primera edición, 2018

Universidad de Guanajuato, Campus Guanajuato
División de Ciencias Económico Administrativas
Departamento de Economía y Finanzas
Fraccionamiento 1, Col. El Establo, C.P. 36250, Guanajuato, Gto., México

Maquetación y corrección: Luis Villalobos

ISBN: 978-607-441-591-9

Hecho en México - *Made in Mexico*

Índice

Presentación		7
Métodos cuantitativos		
	J. Refugio Vallejo Gutiérrez	11
Microeconomía		
	Lari A. Viianto *Alejandro T. Moreno Okuno*	39
Macroeconomía		
	Fernando García Barragán *B. Édgar Cruz González* *Coralia A. Quintero Rojas*	75
Econometría		
	Alejandro Mosiño *Antonio Baez Morales*	101

Lista de autores

Departamento de Economía y Finanzas

Universidad de Guanajuato

J. Refugio Vallejo Gutiérrez
cuco@ugto.mx

Lari A. Viianto
la.viianto@ugto.mx

Alejandro T. Moreno Okuno
Íatatsuo@hotmail.com

Fernando García Barragán
garcia.barragan@gmail.com

B. Édgar Cruz González
be.cruz@ugto.mx

Coralia A. Quintero Rojas
coralia_azucena@yahoo.com

Alejandro Mosiño
alejandro.Mosino@gmail.com

Antonio Baez Morales
antonio.baez@ugto.mx

Presentación

El presente libro nace como iniciativa de los profesores del Departamento de Economía y Finanzas de la Universidad de Guanajuato y tiene múltiples objetivos. Primero, ofrecer a los *aspirantes a estudiar la Licenciatura en Economía* un panorama general de las principales áreas de estudio a las que se enfrentarán durante los primeros años de su carrera. Segundo, proporcionar a los *estudiantes de la Licenciatura en Economía* una herramienta de consulta que les permita recordar de manera rápida los conceptos más importantes de su área de conocimiento. Tercero, proporcionar una herramienta de nivelación para todos aquellos *aspirantes a estudiar una Maestría en Economía*, especialmente aquellos con formación en áreas no afines a la economía, para que cuenten con los conocimientos mínimos necesarios para comenzar su programa con éxito. Finalmente, dar una idea al *público en general* sobre los quehaceres propios de un economista.

Si bien los objetivos que hemos destacado arriba son de por sí muy ambiciosos, hemos impuesto un reto adicional. Este es que el libro sea corto o *de bolsillo*, tal que las consultas que en él se hagan sean lo más rápidas y eficientes posibles. Esto nos llevó a la conclusión de que era necesario solo incluir las que consideramos son las cuatro grandes áreas de estudio en Economía. Estas son: *Métodos Cuantitativos*, *Microeconomía*, *Macroeconomía* y *Econometría*.

Uno de los errores más comunes que cometen los aspirantes a estudiar una Licenciatura en Economía es el de pensar que, al tratarse de una *ciencia social*, el estudio de las matemáticas será reducido al mínimo; es decir, no más allá de sumar, restar, multiplicar y dividir. Pero... Nada más alejado de la realidad. Para ver esto, basta con darse una vuelta a las publicaciones más recientes en las revistas en Economía de más prestigio a nivel internacional, como *American Economic Review* o *Econometrica*. Este error hace que muchos de los recién ingresados a la carrera de Economía sientan cierta decepción, frustración y desencanto. Por esta razón, el libro comienza con una de las principales herramientas que serán utilizadas durante la carrera: los métodos cuantitativos. Hemos elegido en este primer capítulo limitar nuestro análisis al *Álgebra Lineal* y al *Cálculo Diferencial*. El primero de estos temas nos permitirá recordar algunas de las principales reglas para resolver una ecuación, y luego profundizará para mostrarnos cómo resolver un *sistema de ecuaciones lineales*. Esto es particularmente útil en Economía, porque nos permitirá resolver problemas como el impuesto por el clásico *modelo de la oferta y la demanda*. Luego, el cálculo diferencial nos permitirá recordar el concepto de *derivada*, el cual será utilizado una y otra y otra vez en Economía, comenzando prácticamente desde el primer semestre y específicamente en Microeconomía. Es necesario aclarar que los métodos cuantitativos también incluyen *Cálculo Integral*, *Probabilidad* y *Estadística*, e incluso algunos elementos de *Programación*. Estos, sin embargo, los hemos dejado fuera para no hacer de este un capítulo demasiado extenso y difícil de seguir.

Hablando de Microeconomía, el segundo capítulo comienza con el origen etimológico de la palabra y luego nos lleva paso a paso hacia la definición actual de Economía y qué hace la Economía. Luego nos indica que la Microeconomía es la parte de la Economía que se encarga de estudiar las decisiones, acciones e interacciones de los *agentes económicos* individuales, siendo ejemplos de estos agentes los individuos y las familias. También resalta que el objetivo de los agentes económicos es el de *maximizar su bienestar*. Nos explica también los conceptos de *bienes*, *mercados* y *consumidores*, y termina con el importante tema de las preferencias y las curvas de indiferencia. Si bien estos conceptos son relativamente abstractos, estos serán utilizados en un sinfín de ocasiones durante toda la carrera de Economía y en los cursos de Economía a nivel posgrado.

El tercer capítulo del libro analiza la Macroeconomía, y se enfoca en los principales temas de interés para los macroeconomistas y para mucha gente que está al pendiente del desempeño económico de un país. Estos temas son: el *crecimiento económico*, la *inflación* y el *desempleo*. Primero aprenderemos qué es y cómo se mide el *Producto Interno Bruto*. A partir de esta definición sabremos qué es la tasa de crecimiento del PIB y cómo se calcula. Además, veremos las implicaciones que tienen pequeños cambios en las tasas de crecimiento sobre el nivel de vida. Luego, aprenderemos qué es la inflación y cuáles son las formas que tienen los gobiernos para controlarla. Finalmente, aprenderemos qué es el desempleo y utilizaremos la teoría del emparejamiento en el mercado laboral como una forma de explicar las razones por las que el desempleo existe.

Una de las áreas en Economía que resulta más retadora para la gran mayoría de los estudiantes de la carrera es la Econometría. Esta resulta complicada porque tiene varios elementos que se conjuntan: probabilidad, estadística, álgebra lineal, programación y, por supuesto, toda la teoría y la intuición de los diferentes cursos de Microeconomía y Macroeconomía. En este capítulo analizaremos qué es y para qué sirve la Econometría. Luego estudiaremos el Modelo de Regresión Lineal, el cual constituye el punto de partida para cualquier análisis econométrico. Aprenderemos cuál es su utilidad, además de cuáles son los supuestos sobres los cuales este modelo funciona. Finalmente, veremos cómo reaccionar ante la inevitable posibilidad de que alguno de los supuestos del modelo no se cumpla. A pesar de ser una de las áreas que requieren más esfuerzo por la mayoría de los estudiantes en Economía, es, a la vez, una de las más gratificantes. Esto es porque, como veremos a lo largo de este capítulo, es una de las pocas áreas en las que el uso de datos reales y análisis empírico está más que claro y justificado. Además, constituye una herramienta que nos permite comprobar un sinfín de teorías estudiadas en otras áreas del conocimiento.

A nombre de todos los profesores participantes como autores en este libro, agradezco a todos aquellos quienes nos dan la oportunidad de publicarlo. Pero, más aun, a todos aquellos que nos honren dedicando un poco de tiempo a su lectura. Esperamos que el libro cumpla con sus expectativas y que sea de su interés y utilidad.

Alejandro Mosiño

Métodos cuantitativos

J. Refugio Vallejo Gutiérrez

1 Álgebra

1.1 Sistemas de números

Cada vez que iniciamos un curso introductorio de álgebra lineal es muy importante primero presentar a los estudiantes los *sistemas de números*. Esto les permite conocer la razón por la cual algunas de las reglas que han memorizado desde el bachillerato son válidas. Ejemplos de estas reglas memorizadas son: *para despejar una variable, si está sumando pasa restando, y si está restando pasa sumando; si la variable está multiplicando pasa dividiendo, y si está dividiendo pasa multiplicando*. Cuando el estudiante conozca cuáles son los sistemas de números y su contexto será capaz de despejar correctamente una o varias variables de una o varias ecuaciones donde, por ahora, entenderemos a una ecuación como una expresión que tiene una parte izquierda, un signo de igualdad y una parte derecha. Podemos imaginar una ecuación como si se tratase de una balanza en la cual el centro es el signo de igualdad. Para que esta balanza se mantenga equilibrada, es necesario que lo que quitemos o pongamos en un lado se le ponga o quite en el otro lado.

Algunos ejemplos de ecuaciones son $x+2=7$, $x+1=2$, o, en general:

$$x + a = b. \tag{1}$$

Otro ejemplo de ecuación es $3x + 2 = 7$, o más general:

$$ax + b = c \tag{2}$$

Ejemplos de ecuaciones más complejas son:

$$3x + 2y = 10 + x \tag{3}$$
$$2^{x+1} = 3x + 2 \tag{4}$$
$$x^2 = 2. \tag{5}$$

Notemos que las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5) todas ellas tienen una parte izquierda, un signo de igualdad y una parte derecha. A la x y la y que aparecen en ellas se les conoce como *variables* o *literales*. Cuando hablamos de despejar, estamos intentando encontrar los valores de las literales que cumplen con lo que se está especificando en la ecuación. En otras palabras, deseamos dejar sola la variable (la literal) de un solo lado (izquierdo o derecho).

Para lograr el objetivo anterior, primero presentamos el conjunto de los *números naturales*. Estos son: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Para este conjunto tenemos dos operaciones posibles: la suma ($+$) y el producto ($\times$). Estas satisfacen las siguientes propiedades:

P1. Para cualesquiera dos números a y b en el conjunto $\mathbb{N}$ se satisface que $a + b$ es también un número en el conjunto $\mathbb{N}$.

P2. Para cualesquiera dos números a y b en el conjunto $\mathbb{N}$ se satisface que $a \times b$ es también un número en el conjunto $\mathbb{N}$.

Es importante resaltar que, aunque es posible definir las operaciones resta ($-$) y cociente ($/$), por lo general **no se cumple** que:

- Para cualesquiera dos números a y b en el conjunto $\mathbb{N}$, $a - b$ es también un número en el conjunto $\mathbb{N}$.
- Para cualesquiera dos números a y b en el conjunto $\mathbb{N}$, a/b es también un número en el conjunto $\mathbb{N}$.

Debido a lo anterior, necesitamos extender nuestro sistema de números a un sistema más completo, por ejemplo el sistema de *números enteros*, definido como $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. En este nuevo sistema tenemos dos nuevos elementos importantes que tienen las siguientes propiedades:

P3. Existe un elemento llamado *cero*, 0, el cual satisface que para todo número a en el conjunto $\mathbb{Z}$ se cumple que $a + 0 = a$ y que $a \times 0 = 0$.

P4. Para todo a en $\mathbb{Z}$ existe un $(-a)$ llamado inverso aditivo que satisface que $a + (-a) = 0$.

Además, resulta evidente que para el conjunto de números $\mathbb{Z}$ también se cumplen las propiedades P1 y P2. Esto nos permite resolver expresiones como la ecuación (1), aunque no nos permite resolver expresiones como la ecuación (2).

Dado que aun no podemos resolver ecuaciones más complejas, resulta necesario considerar un sistema de números que nos permita operar con fracciones. Este sistema de números es el de los *números racionales*, el cual se define como $\mathbb{Q} = a/b$, para cualesquier número a en $\mathbb{Z}$ y cualquier número b en $\mathbb{Z}$ exceptuando el cero. Nota que, cuando las fracciones existen, aun se cumplen todas las propiedades P1, P2, P3 y P4. Además, podemos resolver expresiones como las ecuaciones (1), (2) y (3). Sin embargo, aún no nos es posible resolver expresiones como las ecuaciones (4) y (5).

En general, para los temas clásicos de álgebra lineal el sistema de los números racionales resulta suficiente. Sin embargo, para otras áreas, como el cálculo diferencial, cálculo integral, microeconomía y macroeconomía será necesario un sistema de números más completo. Este es el sistema de los números reales, $\mathbb{R}$, el cual cumple con las siguientes propiedades:

R1. Si a, b y c son números en $\mathbb{R}$, entonces: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Esta es la propiedad de la asociatividad de la suma.

R2. Si a, b son números en $\mathbb{R}$, entonces: $a + b = b + a$. Esta es la propiedad de conmutatividad de la suma.

R3. El 0 es el *neutro aditivo*. Es decir, para todo número real a se cumple que $a + 0 = a$.

R4. Cualquier número real a tiene un *inverso aditivo*, $-a$. Este satisface que: $a + (-a) = 0$.

R5. Si a, b y c son números en $\mathbb{R}$, entonces: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. Esta es la propiedad de la asociatividad del producto.

R6. Si a, b son números en $\mathbb{R}$, entonces: $a \times b = b \times a$. Esta es la propiedad de conmutatividad del producto.

R7. El 1 es el *neutro multiplicativo*. Es decir, para todo número real a se cumple $a \times 1 = a$.

R8. Cualquier número real a con $a \neq 0$ tiene un *inverso multiplicativo* denotado por a^{-1} o $1/a$. Este satisface que $a \times (a^{-1}) = 1$.

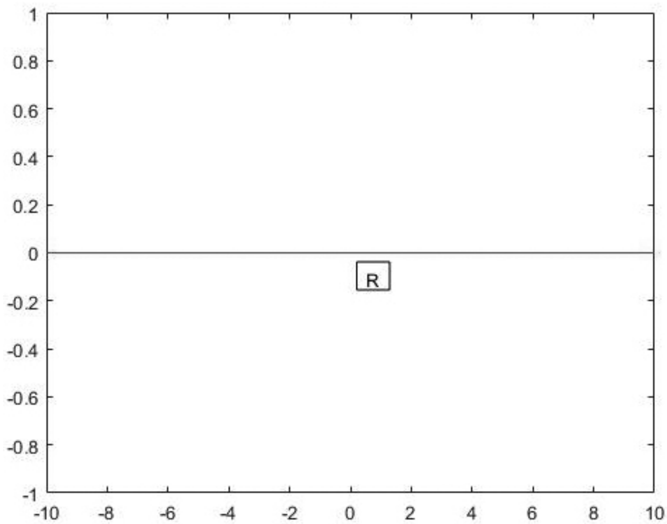


Figura 1: Conjunto de números reales, $\mathbb{R}$.

R9. Si a, b y c son números en $\mathbb{R}$, entonces: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. Esta es la propiedad de la distributividad del producto respecto de la suma.

Observemos que, bajo las propiedades de la R1 a la R9, podemos resolver las ecuaciones simples (1), (2) y (3), además de las ecuaciones más complejas (4) y (5). De hecho, es claro que no es necesario definir las operaciones resta y cociente ni ninguna otra operación adicional. El sistema de los números reales tiene una representación gráfica. Esta la mostramos en la figura 1.

1.2 Reglas de los signos

Las *reglas de los signos* se hacen necesarias cuando trabajamos con una mezcla de números positivos y negativos. Se hacen particularmente importantes cuando deseamos resolver una ecuación, o, en otras palabras, despejar una variable. Las reglas de los signos pueden ser sintetizadas como en el cuadro 1, en el cual también mostramos algunos ejemplos de utilización.[1]

Signos	**Ejemplo**
$+(+) = +$	$+(+5) = +5$
$+(-) = -$	$+(-5) = -5$
$-(-) = +$	$-(-5) = 5$
$+ \times (+) = +$	$(+2) * (+3) = +6$
$+ \times (-) = -$	$(+2) * (-3) = -6$
$- \times (-) = +$	$(-2) * (-3) = +6$
$(+)/(+) = +$	$(+2)/(+3) = +(2/3)$
$(+)/(-) = -$	$(+2)/(-3) = -(2/3)$
$(-)/(+) = +$	$(-2)/(+3) = -(2/3)$
$(-)/(+) = -$	$(-2)/(3) = -(2/3)$
$(-)/(-) = +$	$(-2)/(-3) = +(2/3)$

Cuadro 1: Reglas de los signos.

Para ejemplificar el uso de las reglas de los signos en el contexto de la solución de ecuaciones, consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo: Resolver la ecuación $x + 2 = 7$.

Para encontrar el valor de x que satisface esta ecuación:

- Sumamos a ambos lados de la ecuación el inverso aditivo de 2: $x + 2 + (-2) = 7 + (-2)$.
- Por la propiedad R4 tenemos que $2 + (-2) = 0$. Por lo tanto tenemos: $x + 0 = 5$.
- Por la propiedad R3 tenemos que $x + 0 = x$. Entonces: $x = 5$.

Ejemplo: Resolver la ecuación $3x + 4 = 8$.

Para encontrar el valor de x que satisface esta ecuación:

- Sumamos a ambos lados de la ecuación el inverso aditivo de 4: $3x + 4 + (-4) = 8 + (-4)$.
- Por las propiedades R3 y R4 tenemos que $3x = 4$.
- Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el inverso multiplicativo de 3: $(1/3)(3)x = (1/3)4$. Esto conduce a que: $x = 3/4$.

[1] Estas reglas pueden ser deducidas a partir de las propiedades de los números reales.

Ejemplo: Resolver la ecuación $ax + b = c$.

Este ejemplo es una versión más general de los anteriores. Sean cuales sean los valores de a, b y c, las propiedades de la R1 a la R9 y el uso meticuloso de las reglas de los signos nos permiten encontrar que:

$$x = \frac{c - b}{a}$$

Naturalmente, este resultado implica que el único valor de a que no está permitido es el de 0. Nota, además, que desde el punto de vista geométrico el resultado que hemos obtenido no es más que un punto en la recta de los reales de la figura 1.

1.3 Sistemas de ecuaciones: la técnica de sustitución

Consideremos ahora la ecuación (3). Existen varias combinaciones de valores de x y y que satisfacen esta ecuación. Ejemplos son: $x = 1$ y $y = 4$ o $x = 2$ y $y = 3$. En realidad, es posible encontrar un infinito número de combinaciones de x y y que sean válidos. Para evitar este problema, será necesario tener una segunda ecuación que relacione a las variables involucradas.

En general, para obtener los valores de dos variables desconocidas x y y necesitamos de un *sistema* del tipo:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Existen varias técnicas para resolver este tipo de sistemas. Consideraremos primero la *técnica de sustitución*. Esta consiste en despejar alguna de las variables del sistema utilizando las propiedades de los números reales R1-R9. Por ejemplo, despejamos la variable x de la segunda ecuación del sistema (6):

$$x = \frac{b_2 - a_{22}y}{a_{21}}. \tag{7}$$

Este resultado se sustituye en la primera ecuación del sistema (6), lo cual nos permite obtener una expresión para la variable y:

$$y = \frac{a_{12} \times b2 - a_{21} \times b_1}{a_{11} * a_{22} - a_{12} \times a_{12}}.$$

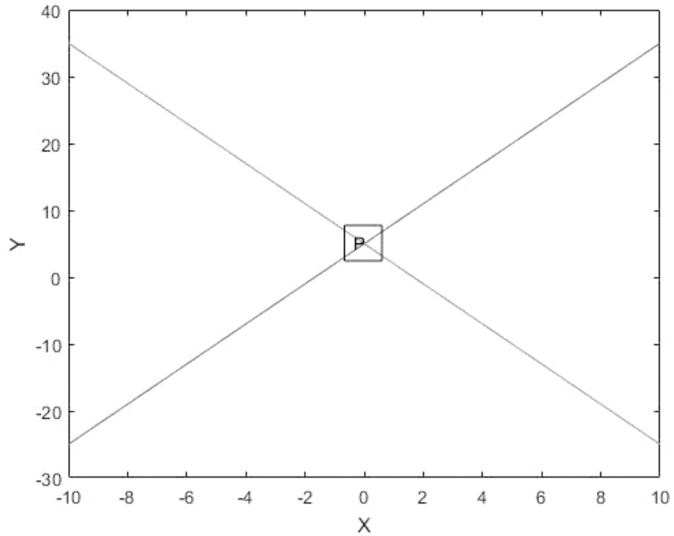


Figura 2: Solución al sistema.

Finalmente, el valor de y que acabamos de encontrar se sustituye en la ecuación (7):

$$x = \frac{a_{22} \times b2 - a_{12} \times b_1}{a_{11} * a_{22} - a_{12} \times a_{12}}.$$

Dejamos que el lector intente demostrar que la solución al sistema (8) es la combinación $x = 10/11$ y $y = 3/11$:

$$\begin{array}{rcl} 3x + y & = & 3 \\ 4x + 5y & = & 5. \end{array} \tag{8}$$

La solución dada a sistemas como el (6) también pueden representarse gráficamente. Recordemos de los cursos de geometría analítica que una ecuación de la forma $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ representa una recta que pasa por los puntos $(b_1/a_{11}, 0)$ y $(0, b_1/a_{12})$. Naturalmente, si tenemos una segunda ecuación $a_{21}x + a_{22}y = b_2$, sabemos que esta representa una recta que pasa por los puntos $(b_2/a_{21}, 0)$ y $(0, b_2/a_{22})$. Si estas líneas se intersectan, entonces habremos encontrado la solución al sistema. Esta solución es el punto P en la figura (2).

El método también puede aplicarse a un sistema de tres ecuaciones y tres variables desconocidas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned} \tag{9}$$

En este caso, usamos alguna de las ecuaciones del sistema (9) para despejar cualquiera de las variables. Por ejemplo, podríamos despejar a x de la primera ecuación del sistema. Una vez que tenemos el valor de x, sustituimos este en las otras *dos* ecuaciones, es decir la segunda y la tercera. Esto resultará en un nuevo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y y z, el cual tiene la misma estructura que el sistema (6). Este sistema resultante se resuelve igual que antes. Una vez que tenemos los valores de y y z sustituimos el resultado en la expresión para x.

Nota que, en esencia, el procedimiento de cálculo es el mismo, solo que un poco más largo y más tedioso. Por otra parte, el significado algebráico de la solución también se complica, pues ahora la solución es un punto que representa la intersección de tres planos.

Cabe destacar que, si no nos es posible encontrar la intersección entre las dos líneas del sistema (6) o de los tres planos en (9) decimos que la solución *no existe*.

1.4 Matrices y el determinante de una matriz

Resulta evidente de la sección anterior que, conforme el sistema de ecuaciones incluye más variables y más ecuaciones, el álgebra para resolver el sistema comienza a complicarse. Para estos casos resulta más conveniente utilizar la metodología conocida como *el método de los determinantes*. Pero, antes de analizar el funcionamiento de esta metodología, conviene definir qué es una *matrix*.

Una matriz es un arreglo de valores que podemos representar como:

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Usualmente, representamos las matrices con letras mayúsculas, y el número de renglones y columnas se especifican como subíndices. Por ejemplo, la matriz de la ecuación (10) la hemos llamado A y tiene n renglones y m columnas. De ahí que esta se represente como $A_{n\times m}$. Si la matrix tiene el mismo número de renglones que de columnas, es decir, $A_{n\times n}$, decimos que la matriz es *cuadrada*.

En los cálculos que siguen será necesario calcular el *determinante de una matriz cuadrada*. Este se denota como $\det(A)$ o bien como $|A|$. Hay varias formas de calcular este determinante, aunque aquí solo utilizaremos el *método de determinante por menores*. Para ver cómo funciona este, considera la matriz cuadrada:

$$A_{n\times n} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Sea A_{ij}^C una matriz que resulta de eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz A en la ecuación (11), y sea $\det(A_{ij}^C)$ su determinante. En este caso:

$$\det(A) = \; a_{11} \times \det(A_{11}^C) - a_{12} \times \det(A_{12}^C) + \cdots + (-1)^{1+j}\det(A_{1j}^C) \tag{12}$$

Antes de mostrar un ejemplo, es importante resaltar que el determinante de un número es el número mismo. Por ejemplo, el determinante del número 3 es 3.[2] Usando esta observación podemos, por ejemplo, calcular el determinante de una matriz con dos filas y dos columnas, $A_{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Usando la definición de determinante, ecuación (12), tenemos que:

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}.$$

Por ejemplo, para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

tenemos que: $\det(A) = 18$.

[2] En realidad, un número puede pensarse como una matriz cuadrada con una fila y una columna.

Para el caso de matrices de 3×3 el procedimiento es el mismo, aunque involucra algunos pasos adicionales. Por ejemplo, consideremos la matriz 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso tenemos:

$$A_{11}^C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12}^C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \quad A_{13}^C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$\det(A) = \;\; 2 \times \det(A_{11}^C) - 4 \times \det(A_{12}^C) + 5 \times \det(A_{13}^C) \;\; .$$

Pero $\det(A_{11}^C) = 7$, $\det(A_{12}^C) = -1$ y $\det(A_{13}^C) = 11$. Por lo tanto: $\det(A) = 73$.

1.5 Solución de sistemas de ecuaciones lineales por determinantes

Una vez que conocemos qué es una matriz y cómo se calcula su determinante, podemos utilizar estos conceptos para resolver un sistema de n ecuaciones y n variables desconocidas. Específicamente, deseamos resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + & a_{3n}x_n = & b_3 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + & a_{nn}x_n = & b_n \end{array} \tag{13}$$

El sistema (13) tiene una *matriz asociada*. Esta se forma a partir de los coeficientes de las n ecuaciones. Para el sistema (13) tenemos:

$$A_{n \times n} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Además, tenemos la matriz del lado derecho del sistema (13). Este es:

$$b_{n\times 1} = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Con esta información podemos obtener el valor de la variable x_1 reemplazando toda la columna 1 de la matriz $A_{n\times n}$ por los los valores del vector b. Esto resulta en la matriz

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces, el valor de $x_1 = \det(B_1)/\det(A)$. Repetimos el procedimiento para la variable x_2. Es decir, formamos la matriz:

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

de tal forma que el valor de $x_2 = \det(B_2)/\det(A)$. Y así sucesivamente.

Ejemplo:

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lc} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = & 7 \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = & 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = & 5 \end{array}$$

Para este sistema, la matriz asociada, A, y el vector de la derecha, b, son:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

El valor de x_1 se obtiene reemplazando la columna 1 de la matriz A por el vector b:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $x_1 = \det(B_1)/\det(A) = 1/3$. Dejamos al lector usar el mismo procedimiento para mostrar que: $x_2 = 1/3$ y $x_3 = 1$.

2 Cálculo diferencial

En economía encontraremos muchas aplicaciones del cálculo diferencial. Esta, junto con el álgebra lineal, puede considerarse como una de las herramientas principales en el arsenal de los economistas. El cálculo diferencial nos permite, por ejemplo, maximizar una función de beneficios, o minimizar una función de costos.

2.1 Funciones, dominio y rango

Antes de llegar al punto de utilizar el cálculo diferencial para algo útil, necesitamos saber qué es una *función* y qué son su *dominio* y su *rango*.

Una función es una regla que asigna *un solo valor*, que llamaremos $f(x)$, a un valor dado de x. Por ejemplo, considera la regla $f(x) = x^2$. A cada valor de x, esta regla asigna el cuadrado de x. Otro ejemplo es la regla que asigna a cada valor de x su raíz cuadrada. Esta es $f(x) = \sqrt{x}$.

Una vez que conocemos la estructura de una función, también debemos saber cuál es su dominio. El dominio de una función puede entenderse como el conjunto de valores de x en la cual la regla $f(x)$ tiene sentido. Por ejemplo, para la función $f(x) = x^2$, la regla tiene sentido en todos los números reales. Esto es porque cualquier número real se puede elevar al cuadrado. Para el caso de la función $f(x) = \sqrt{x}$, la regla solo tiene sentido en los reales positivos. Esto es porque la raíz cuadrada de los números negativos no está definida.

Por su parte, el rango de una función lo definimos como el conjunto de números reales que resulta de la evaluación de una función en su dominio. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es siempre positiva para cualquier número x. Entonces, el rango de la función son los reales positivos. Para el caso de la función $f(x) = \sqrt{x}$, la raíz cuadrada de x es, al mismo tiempo, un número positivo y un número negativo (por ejemplo la raíz cuadrada de 4 es 2 y -2). Sin embargo, no podemos tomar las dos raíces al mismo tiempo porque contradecimos el hecho de que a cada valor en el dominio se le asigna un solo valor en el rango. Usualmente se considera solo la raíz positiva y, por lo tanto, el rango de esta función son los reales positivos.

Consideremos ahora una suma de funciones. En este caso, el dominio es la *intersección* de los dominios de las funciones involucradas. Por ejemplo, sea $f(x) = 3x + \sqrt{x}$.

Aquí tenemos que el dominio de $3x$ está conformado por todos los número reales, y para la función $\sqrt{x}$ tenemos que el dominio son solo los reales positivos. Los dominios de $3x$ y $\sqrt{x}$ coinciden en todos los números reales positivos. Por lo tanto, este será el dominio de $f(x)$. Esta idea también se repite para el rango. Dejaremos al lector que busque cuál es el rango de $f(x) = 3x + \sqrt{x}$.

2.2 Intervalos

En ocasiones será necesario acotar una función a algún intervalo de números reales. Por ejemplo, podríamos interesarnos solo en el intervalo que contiene todos los números reales entre 3 y 5, incluidos el 3 y el 5. Este intervalo se denota como $[3, 5]$. Además, dado que hemos incluido los números extremos, decimos que el intervalo es *cerrado*. Para el caso en el que no se incluyen los extremos, el intervalo se considera *abierto* y se denota por $(3, 5)$.

También podríamos considerar intervalos abiertos solo por la izquierda o solo por la derecha. Por ejemplo, en el intervalo de los números reales entre 3 y 5 podríamos incluir solo el 3, $[3, 5)$, o solo el 5, $(3, 5]$. Estos intervalos se conocen como *semiabiertos* o *semicerrados*.

Finalmente, nota que el límite inferior o el límite superior del intervalo podría no estar acotado. En un intervalo no acotado por la izquierda tendríamos, por ejemplo, $(-\infty, 5]$. Esto quiere decir que todos los números reales *hasta* el número 5, incluido este, deben considerarse. En un intervalo no acotado por la derecha tendríamos, por ejemplo, $[3, \infty)$. Esto quiere decir que todos los números reales *a partir* del número 3, incluido este, deben considerarse.

Existe otra notación posible para los intervalos que involucra el uso de desigualdades. Por ejemplo, el intervalo $[3, 5]$ también se denota por $a \leq x \leq b$. Un resumen de la notación puede verse en el cuadro 2.

Tipo de intervalo	Significado	Notación alternativa
$[a, b]$	Intervalo cerrado	$a \leq x \leq b$
(a, b)	Intervalo abierto	$a < x < b$
$(a, b]$	Intervalo semiabierto por la izquierda	$a < x \leq b$
$[a, b)$	Intervalo semiabierto por la derecha	$a \leq x < b$
$(-\infty, a)$	Menos infinito hasta a, no incluye a	$x < a$
(a, ∞)	Desde a hasta infinito, no incluye a	$x > a$
$(-\infty, a]$	Menos infinito hasta a, incluye a	$x \leq a$
$[a, \infty)$	Desde a hasta infinito, incluye a	$x \geq a$

Cuadro 2: Tipos de intervalos.

2.3 Gráficas de funciones

La gráfica de una función se define como el conjunto de parejas $(x, f(x))$ que resulta de la evaluación de la función en todos los valores x de su dominio y obteniendo los valores $f(x)$ en su rango. La gráfica de una función resulta de ubicar cada pareja posible $(x, f(x))$ en el *plano cartesiano*.

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^2$. Evaluemos esta en los puntos que se muestran en el cuadro 3. Al ubicar cada pareja $(x, f(x))$ en el plano cartesiano, obtenemos los puntos como se muestra en figura 3. Ahora, si evaluamos en muchos más puntos (lo que se denomina un *continuo de puntos*), la gráfica se ve como en la figura 4.

2.4 Límites de funciones

El límite de una función es el valor al que se acerca (aproxima, tiende o converge) $f(x)$ cuando su dominio se acerca a un cierto valor x_0. En otras palabras, el límite de una función, el cual se escribe como: $\lim_{x \to x_0} f(x)$, nos indica el comportamiento de $f(x)$ cuando su argumento, x, se acerca a un punto específico. Por ejemplo, deseamos saber el comportamiento de la función $f(x) = 3x - 1$ cuando x se acerca a 2. En el cuadro 4 asignamos a x diferentes valores cercanos a 2 tanto por la izquierda como por la derecha. Los resultados del cuadro nos indican que $f(x) = 3x - 1$ se acerca a 5. Entonces, decimos que el $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$.

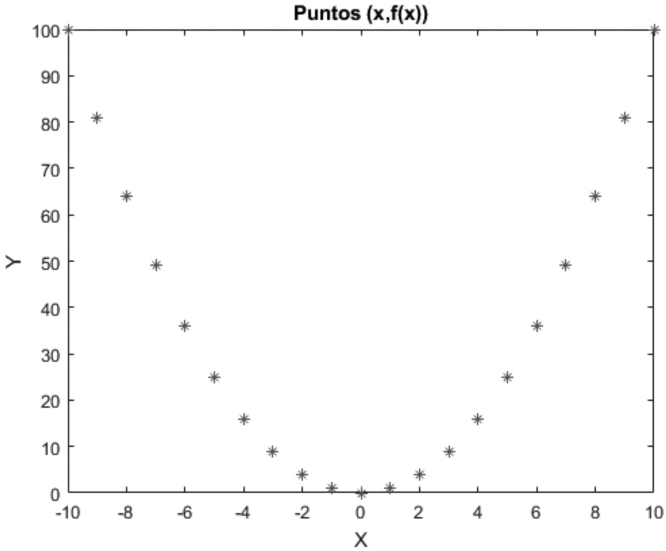


Figura 3: Función $f(x) = x^2$ evaluada en algunos puntos.

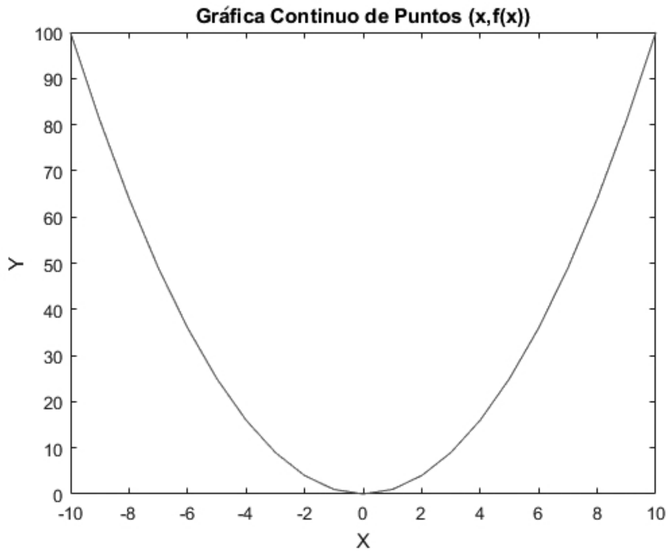


Figura 4: Función continua $f(x) = x^2$.

x	$f(x) = x^2$
-10	100
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
10	100

Cuadro 3: Evaluación de la función $f(x) = x^2$.

Como ejemplo adicional consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Deseamos saber el comportamiento de esta función alrededor de $x = 1$. Nota, sin embargo, que la función no está definida cuando x toma exactamente el valor de 1, por lo que debemos tener cuidado,. Los resultados se muestran en el cuadro 5. De nuestros cálculos podemos concluir que $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

A continuación enumeramos las propiedades de los límites.

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, entonces:
L1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L + M$
L2. $\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = L - M$
L3. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \times g(x)) = L \times M$
L4. Si $M \neq 0$ entonces $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$

Ejemplos

- Calcular el $\lim_{x\to 2} 3x + x^2$.
  Podemos ver que: $\lim_{x\to 2} 3x = 6$ y $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. Entonces tenemos que: $\lim_{x\to 2} 3x + x^2 = 10$.
- Calcular el $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2} \times 3x^2$.

x	$f(x) = 3x - 1$
-5	-16
-3	-10
-1	-4
1	2
1.5	3.5
1.6	3.8
1.7	4.1
1.8	4.4
1.9	4.7
1.999	4.9997
2.0001	5.0003
2.01	5.03
2.1	5.3
2.2	5.6
2.3	5.9
2.4	6.2
2.5	6.5
3	8
4	11
5	14
6	17

Cuadro 4: Evaluación de la función $f(x) = 3x - 1$ alrededor de $x = 2$.

Podemos ver que: $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2} = 0$ y $\lim_{x\to 2} 3x^2 = 12$. Entonces tenemos que: $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2} \times 3x^2 = 12$.

- Calcular el $\lim_{x\to 2} \frac{3x+x^2}{6x-1}$.
  Podemos ver que: $\lim_{x\to 2} 3x + x^2 = 10$ y $\lim_{x\to 2} 6x - 1 = 11$. Entonces tenemos que: $\lim_{x\to 2} \frac{3x+x^2}{6x-1} = \frac{10}{11}$.

Es importante resaltar que en ocasiones no es posible calcular los límites acercándonos tanto por la derecha como por la izquierda. Considera, por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{x-1}$. Nota que para esta función no es posible calcular el límite cuando x tiende a 1 por la izquierda, ya que estaríamos calculando raíces negativas. Para estos casos calculamos los *límites laterales*, los cuales, como su nombre lo indica, implican calcular el límite por un solo lado, ya sea por la izquierda o por la derecha. Para la función de arriba, tenemos que el $\lim_{x\to 1} \sqrt{x-1}$ se puede calcular

x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
0.8	1.82
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999
0.9999	1.9999
1.00001	2.00001
1.001	2.001
1.01	2.01
1.1	2.1
1.2	2.2
1.3	2.3
1.4	2.4
1.5	2.5
1.6	2.6

Cuadro 5: Evaluación de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ alrededor de $x = 1$.

solo por la derecha. Ahora consideremos el $\lim_{x\to 1}\sqrt{1-x^2}$. El límite de esta función solo se puede calcular por la izquierda, porque el límite por la derecha no tiene sentido.

Otra consideración importante tiene que ver con la *simplificación en límites*. Es decir, existen funciones que debemos simplificar *antes* de aplicar los límites. Por ejemplo, debemos tener cuidado con expresiones racionales como $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, en la cual, si aplicamos el límite cuando x tiende 1, tiene una expresión indefinida. Sin embargo, un poco de factorización nos permite darnos cuenta que $f(x)$ se puede reescribir como $f(x) = x + 1$. A esta expresión resultante sí podemos aplicar el limite. Específicamente, tenemos que: $\lim_{x\to 1} x + 1 = 2$.

Por supuesto que también hay expresiones en las que obtenemos valores indeterminados como, por ejemplo, $0/0$ o ∞/∞. Para estos casos tendremos que aplicar algunos otros procesos previos antes de calcular el límite. Sin embargo, por ahora no estamos en posibilidades de hacerlo.

También debemos de estar preparados para funciones en donde el límite no existe para ciertos valores de x. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$. Notemos que $\lim_{x\to 0}$ por la izquierda es -∞ y $\lim_{x\to 0}$ por la derecha es ∞. El hecho de que la función tenga valores distintos cuando nos acercamos al mismo punto quiere decir que la función no tiene límite.

2.5 Continuidad de las funciones

El concepto de *continuidad* se puede entender de forma muy natural una vez que conocemos el significado de los límites. Decimos que una *función es continua* en un punto específico x_0 si el límite por izquierda de la función en x_0 es el mismo que el límite por la derecha. También suele decirse que una función es continua en un punto $(x_0, f(x_0))$ si en el trazo de la gráfica no "levanto el lápiz" cuando paso por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Más formalmente, una función es continua cuando cumple con las siguientes condiciones:

1. $f(x)$ está definida en x_0
2. El $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Estas condiciones deben satisfacerse todas al mismo tiempo, si alguna falla entonces la función no será continua. Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{(x^2-1)}/x$ no es continua en 0 debido a que $f(0)$ no está definida.

Ahora enumeramos las propiedades de las funciones continuas. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un punto x_0:

FC1. La función definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ es continua en x_0.
FC2. La función definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ es continua en x_0.
FC3. La función definida por $h(x) = f(x) \times g(x)$ es continua en x_0.
FC4. La función definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en x_0 solo si $g(x_0) \neq 0$
FC5. Para el caso en que tengamos una función $f(x)$ definida en x_0 que sea continua en x_0 y si una función $g(x)$ también es continua y está definida en la imagen de $f(x)$, entonces la función $h(x) = g(f(x))$ es una función continua en x_0.

Además, si una función es continua en todos los puntos de un intervalo, entonces decimos que la función es continua en el intervalo. Como consecuencia de esto tenemos que: *si una función es continua en un intervalo* $[a, b]$ *en el cual* $f(a) < 0$ *y* $f(b) > 0$ *o en general* $f(a) \times f(b) < 0$ *entonces existe un valor* c *tal que* $a < c < b$ *que satisface que* $f(c) = 0$. *Esto quiere decir que la función tiene por menos una raíz entre* a *y* b. Hay diferentes formas de encontrar dicha raíz, pero una forma muy sencilla es mediante el *método del punto medio*, el cual se describe en el siguiente algoritmo:

```
Datos de entrada: a, b, con f(a)<0  y f(b)>0.
Paso 1:  c=(a+b)/2
Paso 2:  Si f(c)=0 entonces Termina
Paso 3:  si f(a)<0  entonces a=c;b=b: Ir Paso 1
sino a=a;b=c; Ir Paso 1
Paso 4: Termina
```

No veremos el funcionamiento de este algoritmo aquí. Este es sujeto de estudio de la programación.

2.6 Derivadas de las funciones

Primero definamos la *pendiente de una recta* que pasa por dos puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$. Esta es:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Entonces, la pendiente de una función que pasa por las coordenadas $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ es:

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Si definimos h como $h = x_1 - x_0$, entonces:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si calculamos el límite $\lim_{h\to 0} m$, obtenemos la pendiente de la *recta tangente* a la función en x_0. Este límite es lo que se conoce como *derivada de la función* en el punto x_0. Formalmente, la derivada de una función en el punto x_0 se define como:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{14}$$

En varios libros de texto encontrarás diferentes notaciones para la derivada de una función. Algunas de estas son: $f'(x)$, df/dx y f_x .

Dejamos al lector utilizar la definición de derivada para mostrar que:

- La derivada de $f(x) = c$ es $f'(x) = 0$ para cualquier constante c.
- La derivada de $f(x) = x$ es $f'(x) = 1$.
- La derivada de $f(x) = cx$ es $f'(x) = c$ para cualquier constante c.
- La derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$
- La derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = n \times x^{n-1}$ para cualquier valor de n.

2.6.1 Reglas básicas de derivación

Algunas reglas básicas para las derivadas que recomendamos al lector recordar son las siguientes. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, entonces:

1. Si $h(x) = f(x) + g(x)$, entonces $h'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. Si $h(x) = f(x) - g(x)$, entonces $h'(x) = f'(x) - g'(x)$
3. Si $h(x) = f(x) \times g(x)$, entonces $h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
4. Si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, entonces $h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$.
5. Si $h(x) = f(g(x)$, entonces $h'(x) = f'(g(x) \times g'(x)$. Esta se conoce como *regla de la cadena*.

Nuevamente, dejamos que el lector aplique la definición y las reglas para las derivadas para mostrar que:

- La derivada de $h(x) = c + x$, donde c es una constante es $h'(x) = 1$.
- La derivada de $h(x) = a + cx$, donde a y c son constantes es $h'(x) = c$.
- Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x$. Entonces, la derivada de $h(x) = f(x) * g(x)$ es $h'(x) = 2x$.
- Sean $f(x) = 3x$ y $g(x) = 2x - 1$. Entonces, la derivada de $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es $h'(x) = \frac{3(2x-1) - 2(3x)}{(2x-1)^2}$.
- Sean $f(x) = 3x$ y $g(x) = x^3$. Entonces, la derivada de $h(x) = f(g(x)) = 3(x^3)$ es $h'(x) = 3(3x^2)) = 9x^2$.

2.6.2 Funciones trascendentales y funciones trigonométricas

Presentamos ahora las *funciones trascendentales* y sus propiedades:

1. La *función exponencial* es: $f(x) = e^x$. Esta función tiene la propiedad de que $f'(x) = e^x$.
2. La *función logarítmica* es: $f(x) = \ln(x)$. Esta tiene las siguientes propiedades:
   (a) $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
   (b) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.
   (c) $\ln(a^n) = n \ln(a)$.
   (d) La derivada de la función logaritmo es: $\ln(x) = 1/x$.

A la función logaritmo también se le conoce como la inversa de la función exponencial. Esto es porque $e^{\ln(x)} = x$, o bien $\ln(e^x) = x$.

3. La *función seno* es: $f(x) = \sin(x)$. La derivada de esta es: $f'(x) = \cos(x)$.
4. La *función coseno* es: $f(x) = \cos(x)$. La derivada de esta es: $f'(x) = -\sin(x)$.

Dejamos que el lector use las reglas de derivación y las propiedades de las funciones trascendentales para mostrar que:

- La derivada de $f(x) = \ln(x^2 + x)$ es: $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$.
- La derivada de $f(x) = e^{x^2+1}$ es: $f'(x) = (2x) \times e^{x^2+1}$.

2.6.3 Derivadas de mayor orden

Sea $f(x)$ una función. Si esta puede derivarse, entonces $f'(x) = f^1(x)$ se conoce como *primera derivada* de $f(x)$. Si la primera derivada puede derivarse, la derivada de la derivada, $f''(x) = f^2(x)$, se conoce como la *segunda derivada* de $f(x)$. Si la segunda derivada puede derivarse obtenemos $f'''(x) = f^3(x)$, la cual se le conoce como *tercera derivada* de $f(x)$. Y así sucesivamente. Por ejemplo:

- Sea $f(x) = x^3$. Entonces: $f^1(x) = 3x^2$, $f^2(x) = 6x$, $f^3(x) = 6$, $f^4(x) = 0$.
- Sea $f(x) = e^x$. Entonces: $f^1(x) = e^x$, $f^2(x) = e^x$ y, en general, $f^n(x) = e^x$.
- Sea $f(x) = \ln(x)$. Entonces: $f^1(x) = \frac{1}{x}$, $f^2(x) = \frac{-1}{x^2}$.

2.6.4 Derivación logarítmica

En ocasiones resulta muy complicado derivar una función. Sin embargo, el trabajo podría simplificarse si le aplicamos una transformación logarítmica. Para ver cómo funciona esta transformación, recordemos que si $f(x) = \ln(x)$ entonces $f'(x) = 1/x$. Luego, si tenemos una función $h(x) = \ln(f(x))$, podemos hacer uso de la regla de la cadena para obtener que $h'(x) = f'(x)/f(x)$.

Por ejemplificar, sea la función $f(x) = x^2$. Si aplicamos la función logaritmo en ambos lados obtenemos que $\ln f(x) = 2\ln(x)$. Ahora, derivamos ambos lados con respecto de x para obtener que:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x}.$$

Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2 \times f(x)}{x}.$$

Sustituyendo $f(x) = x^2$, obtenemos que $f'(x) = 2x$.

Dejamos que el lector utilice esta herramienta para mostrar que la derivada de $f(x) = x^x$ es $f'(x) = x^x\,(\ln(x) + 1)$.

2.7 Aplicaciones de la derivada

Una de las aplicaciones más importantes de la derivada es la obtención de los *puntos críticos* de las funciones. Tenemos un punto crítico cuando la derivada de una función se vuelve cero. Específicamente, un punto x_0 es crítico si $f'(x_0) = 0$.

Una vez que hemos encontrado un punto crítico, también nos interesa saber su tipo. Estos pueden ser un *máximo*, un *mínimo* o un *punto de inflexión*.

- Si x_0 es un punto crítico y $f''(x_0) = 0$, entonces x_0 es un punto de inflexión.
- Si x_0 es un punto crítico y $f''(x_0) > 0$, entonces el punto crítico es un mínimo.
- Si x_0 es un punto crítico y $f''(x_0) < 0$, entonces el punto crítico es un máximo.

Otra de las aplicaciones de la derivada es que esta nos permite identificar si una función es *creciente, decreciente, cóncava* o *convexa*. Esto se resume a continuación:

- Dado un intervalo (a, b), decimos que la función es decreciente en (a, b) si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$.
- Dado un intervalo (a, b), decimos que la función es creciente en (a, b) si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.
- Dado un intervalo (a, b), decimos que la función es convexa en (a, b) si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.

- Dado un intervalo (a,b), decimos que la función es cóncava en (a,b) si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$.

Ejemplo

Consideremos la función $p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$. Busquemos los puntos críticos de esta función y su tipo. Además, encontremos los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

- Para encontrar los puntos críticos calculemos la primera derivada de $p(x)$. Esta es $p'(x) = x^2 - x - 2$. Recordemos que los puntos críticos son aquellos en los que $p'(x) = 0$. Entonces, buscamos los puntos tales que $x^2 - x - 2 = 0$. Estos son $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$.
- La segunda derivada de $p(x)$ es $p''(x) = 2x - 1$. Evaluamos $p''(x_1 = -1)$, lo cual resulta en $p''(x_1 = -1) = 2(-1) - 1 = -3$. Dado que $p''(x_1 = -1) < 0$, entonces x_1 es un máximo.
- Evaluamos $p''(x_2 = 2)$, lo cual resulta en $p''(x_2 = 2) = 2(2) - 1 = 1$. Como $p''(x_2 = 1) > 0$ entonces x_2 es un mínimo.
- Para determinar los intervalos en los que la función es cóncava o convexa encontremos el punto en el que $p''(x) = 0$. Este es el punto $x_3 = 1/2$. Nota que x_3 es un punto de inflexión.
- Observemos ahora que si $x < 1/2$, tenemos que $f''(x) < 0$. Por lo tanto, tenemos que la función $p(x)$ es cóncava en $(-\infty, 1/2)$.
- Observemos que si $x > 1/2$, tenemos que $f''(x) > 0$. Por lo tanto, tenemos que la función es convexa en $(1/2, \infty)$.
- Ahora, notemos que $p'(x) > 0$ en $(-\infty, -1)$. Por lo tanto la función es creciente en ese intervalo.
- También observemos que $p'(x) < 0$ en $(-1, 2)$. Por lo tanto la función es decreciente en ese intervalo $(-1, 2)$.
- Finalmente, observemos que $p'(x) > 0$ en $(2, \infty)$. Por lo tanto la función es creciente en $(2, \infty)$.

Las conclusiones anteriores pueden corroborarse obsevando la gráfica de $p(x)$, la cual se muestra en la figura 5.

Dejamos que el lector intente repetir el ejercicio utilizando la función:

$$p(x) = \frac{-x^3}{3} + 4x.$$

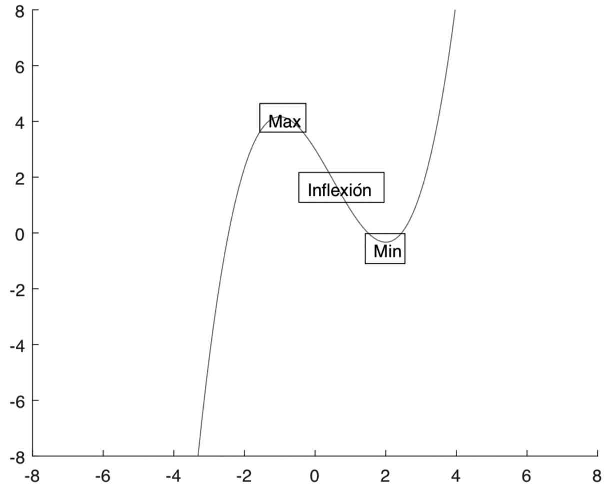


Figura 5: Ejemplo de función: máximos, mínimos y punto de inflexión.

2.8 Expansión en series de Taylor y aproximación de funciones

En ocasiones deseamos utilizar un polinomio para aproximar el valor de una función en un cierto punto. El polinomio utilizado se conoce como *expansión es series de Taylor* o, simplemente, *polinomio de Taylor*. Formalmente, dada una función $f(x)$ cuya n-ésima derivada, $f^n(x)$, existe y un punto x_0, donde la función y sus derivadas están definidas, el polinomio de Taylor se puede expresar como:

$$P(x) = f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)^2\frac{f'(x_0)}{2!}+(x-x_0)^3\frac{f'(x_0)}{3!}+\ldots+ (x-x_0)^n\frac{f'(x_0)}{n!}.$$

Para ver el funcionamiento de esta regla consideremos los siguientes ejemplos:

- Deseamos aproximar la función $f(x) = e^x$ alrededor del punto $x_0 = 0$. Como $f'(x) = e^x$ y, en general, $f^n(x) = e^x$ para todo x, tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= 1 \\
f''(0) &= 1 \\
&\vdots \\
f^n(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Entonces el polinomio de Taylor de orden n para la función $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ es

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

o también lo podemos expresar como:

$$P(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!}.$$

- Deseamos aproximar $f(x) = \ln(x)$ alrededor del punto $x_0 = 1$. Como $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ y $f^4(x) = \frac{-6}{x^4}$ para todo x, tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0 \\
f'(1) &= 1 \\
f''(1) &= -1 \\
f'''(1) &= 1 \\
f^4(1) &= -1.
\end{aligned}$$

Entonces el polinomio de Taylor de orden 4 para la función $f(x) = \ln(x)$ en $x_0 = 1$ es:

$$P(x) = (x-1) - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}.$$

3 Conclusión

En este capítulo hemos descrito una parte básica del álgebra lineal que todo estudiante de licenciatura debe de saber: la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Este conocimiento es particularmente importante para los estudiantes de economía, ya que constituye una parte fundamental del conocimiento necesario para abordar varios temas del programa, tales como cálculo vectorial, programación y econometría. Lo mismo ocurre con el cálculo diferencial, cuyo conocimiento será indispensable para estudiar microeconomía, macroeconomía, matemáticas, programación, estadística y econometría.

Por supuesto, tanto el álgebra lineal como el cálculo diferencial han sido presentados a un nivel exploratorio, por lo que el lector interesado tendrá que consultar bibliografía más especializada que le permita profundizar en los diferentes temas.

4 Lecturas recomendadas

Existen muchos libros de álgebra y cálculo que pueden consultarse para extender los temas que aquí hemos expuesto. Algunas recomendaciones para álgebra lineal son:

- Serge Lang y H.D. Sherali (1993). *Introducción al álgebra lineal*, segunda edición. Limusa, México.
- Dantzig, G.B. y P. Wolf (1960). Decomposition principle for linear programs. *Operations Research*, 8, pp. 101–111.

Una recomendación para revisar y extender el material de cálculo es:

- Leithold, L. (1994). *El cálculo*, séptima edición. Oxford University Press.

Microeconomía

Lari A. Viianto

Alejandro T. Moreno Okuno

1 Preámbulo

1.1 La economía

1.1.1 ¿Qué es la economía?

Desde un punto de vista etimológico, el origen de la palabra economía es griego, surge de la combinación de las palabras griegas *οικος* (“casa” o “patrimonio”) y *υεμευιω* (“administrar”). Así, literalmente significa “la administración del patrimonio”. En concreto, el origen es un discurso de Jenofonte[1] sobre la correcta administración de las propiedades agrarias, la base de propiedad y producción de la época, y es uno de los primeros escritos sobre economía que conocemos (siglo IV a. C.). Esta idea de la economía como la administración de la propiedad coincide casi plenamente con la primera acepción de la palabra *economía*, según a Real Academia Española (RAE): “Administración eficaz y razonable de los bienes”. Esta definición incluye los términos *eficiente y razonable*, algo que encontraremos a menudo vinculado con el concepto *económico*, y es muy cercana a lo que podríamos considerar como administración y dirección (de empresas), que no deja de ser parte muy importante de la economía. Sin embargo, la economía es actualmente un concepto bastante más amplio, como veremos más adelante. Siguiendo con las definiciones de la RAE, la economía como ciencia sería algo parecido la tercera acepción que nos ofrece: “Ciencia que estudia los métodos más eficaces para satisfacer las necesidades humanas materiales, mediante el empleo de bienes escasos”. Esta descripción de la RAE, a su vez, coincide con una que se utiliza comúnmente en la mayoría de libros para descri-

[1] Filósofo, historiador y militar griego (431 a. C.-354 a. C.).

bir la economía como ciencia: “El estudio de la asignación eficiente de recursos escasos”.

Ambas descripciones son parcialmente correctas y ampliamente utilizadas, pero no son del todo acertadas para el campo más extenso de la economía, de tal forma que en realidad se quedan cortas en el objetivo, ya que en la actualidad podemos considerar la economía como una ciencia muy amplia. Una mejor aproximación sería la siguiente: “La economía es el estudio de las relaciones sociales implicadas en los procesos de producción, distribución, intercambio y consumo de bienes y servicios”.

La diferencia básica con las definiciones anteriores es la ausencia de los conceptos *eficiente*, *material* y *escaso*. La economía en realidad se encarga del estudio de los sistemas sociales relacionados en particular con los procesos productivos y de consumo, independientemente de si éstos son o no eficientes. Sin embargo, en la economía sí se tiene la tendencia de remarcar e intentar corregir estos fallos o, en su defecto, minimizar los efectos negativos derivados de los mismos, pero la ciencia económica no se limita a las asignaciones eficientes. Como ejemplo, simplemente mencionamos la existencia y estudio de monopolios y oligopolios, que implican siempre ineficiencias económicas.

Asimismo, los conceptos económicos son perfectamente aplicables también a bienes no escasos, cuando existe alguna ineficiencia de mercado que lo justifique. En estos casos, de modo normal se produce o surge una escasez artificial derivada de los fallos de mercado, pero el bien en sí no requiere ser escaso. Para el interés económico, el acceso al bien debe estar limitado, por lo que se puede considerar que cierto tipo de escasez ha de existir, aunque sea de manera artificial, pero que no necesariamente es una característica básica del bien en sí. Incluso, en el hipotético caso de tener en realidad una disposición infinita de recursos, el problema económico no desaparecería por completo, todavía quedaría una serie de decisiones muy importantes sobre qué hacer con esos recursos infinitos, en qué orden, de qué manera y en qué momento. Cierto es que al tener recursos infinitos se soluciona el problema de los usos alternos, esto es, no tenemos que preocuparnos porque al usar un recurso éste ya no pueda ser utilizado de otra manera, y se produzca lo que en economía se conoce como un *trade-off*, castellanizado como *solución de compromiso o sacrificio*, se trata de la pérdida (sacrificio) asociada a los hipotéticos usos alternativos que tendrían los recursos.

Normalmente se suele incluir también en exceso el concepto de *necesidad* dentro de las descripciones realizadas de la economía. Este concepto también es superfluo o mal utilizado, pues la economía comprende la producción, distribución y consumo de muchos bienes y servicios que distan mucho de ser definidos como necesarios o que contenten una necesidad tal y como se suele concebir la necesidad, vinculado con algo indispensable para la vida o básico para el mínimo bienestar. La producción, distribución y consumo de diamantes es una actividad económica importante que difícilmente se vincula con alguna necesidad. Sin embargo, como sociedad, demandamos diamantes. La economía trata, más bien, con la satisfacción de los deseos, bienes que son deseados, al menos por alguien, lo cual es obviamente aplicable a los bienes necesarios, pero es mucho más amplio. Algo parecido es aplicable al término *material*, pues se estudia dentro de la economía la provisión de bienes y servicios que pueden distar mucho del concepto *material*, como puede ser la asesoría (económica, fiscal, psicológica o espiritual), los sistemas organizativos, la creación de sinergias o las relaciones personales, conceptos que por lo regular no asociamos con lo material.

Cabe comentar también que la economía moderna se ha extendido mucho más allá de los límites de lo que podemos considerar la actividad económica, entendida como producción, distribución, intercambio y consumo. Se aplican conceptos económicos y se estudian desde un punto de vista económico a temas tan dispares como los llamados mercados maritales, las redes sociales, las normas sociales, los flujos de información y muchos comportamientos humanos aparentemente distantes de lo que se podría considerar la actividad económica desde un punto de vista tradicional.

Una concepción amplia y ambiciosa de la economía la ofreced el Dr. Lionel Robbins (1898-1984), economista británico, director del departamento de economía de la London School of Economics: “[La economía es] la ciencia que estudia la conducta humana como una relación entre fines y medios escasos con usos alternativos”. Si bien, vuelve a incorporar el concepto de escasez. De esta manera, podríamos, de manera muy amplia, definir la economía como:

> La economía es el estudio de las acciones y decisiones humanas, relaciones sociales, instituciones, y mecanismos construidos para la satisfacción de deseos encaminados a la obtención de bienestar, ya sea este personal o social, individual o agregado.

En efecto, esta última definición es quizás demasiado amplia, sí describe bien lo que podemos entender por la economía actual, incluyendo esos temas novedosos, como relaciones personales, normas y redes sociales, instituciones, así como diversas vertientes del comportamiento humano que la economía ha estudiado últimamente.

Se trata, pues, de un estudio amplio del comportamiento humano, más bien centrado en lo referente al bienestar material, aunque no necesariamente de manera exclusiva.

Como ciencia, el objetivo de la economía es tener la capacidad para explicar los fenómenos que observamos en la realidad. Para ello, tendremos que modelar el comportamiento económico de los seres humanos, lo que en muchas ocasiones no es demasiado complicado. En muchos casos, la economía es una simple cuestión de sentido común, si bien para poder trabajar es necesario incurrir en una serie de simplificaciones no exentas de polémica y discusión, pero que permiten el tratamiento del problema y que han demostrado cumplirse en una gran mayoría de casos, permitiendo explicar satisfactoriamente una gran parte de los fenómenos que observamos en la realidad. Si los modelos recogen de manera veraz estos comportamientos, servirán a su vez para la realización de predicciones y para anticipar (dentro de lo posible) la respuesta de la sociedad ante cambios en el entorno económico.

Cabe recordar que como ciencia social la economía se ve sujeta a continuos reajustes y revisiones de su modelación. Como sociedad, y como individuos que formamos parte de dicha sociedad, somos volubles y versátiles, y soluciones que pudieron ser óptimas en algún momento del tiempo no necesariamente funcionan para el momento actual, ni las que funcionan para el momento actual lo harán en cualquier momento futuro. Por esto, nuestro estudio del comportamiento económico no tiene necesariamente un punto final, y la predicción realizada bajo cualquier modelo económico solo será válida si no existen cambios que alteren la conducta de los individuos o la sociedad. Como individuos somos adaptativos, y alteramos de modo constante nuestras conductas, cambiando, por lo tanto, también el modelo.

Si bien la economía puede ser tremendamente amplia, durante este libro nos limitaremos a sus aspectos más básicos, por lo que a efectos prácticos podemos limitarnos a la siguiente acepción: "La economía es el estudio de las relaciones sociales implicadas en los procesos de producción, distribución, intercambio y consumo de bienes y servicios".

Además, durante este capítulo, nos restringiremos a una de las dos ramas principales de la economía: la microeconomía.

1.2 La microeconomía

1.2.1 ¿Qué es la microeconomía?

Etimológicamente hablando se trata de la pequeña economía o administración del pequeño patrimonio, lo que sería el estudio a pequeña escala de la economía. Esto puede resultar un poco confuso, pues algunos de los objetos estudiados por la microeconomía pueden llegar a ser considerados muy grandes, incluso del tamaño de países.

En realidad, la microeconomía es la parte de la economía que se encarga de estudiar las decisiones, acciones e interacciones de los agentes económicos individuales. Como pueden ser, por ejemplo, sus decisiones de producción, consumo, ahorro o inversión, siempre de manera individual.

Estos agentes individuales interactúan entre ellos a través de lo que llamamos *mercados*. Estos mercados no son en realidad lugares físicos, sino que están representados por el conjunto de sistemas de distribución, compra y venta, que conectan al consumidor final del bien con el productor del mismo, en ocasiones a través de varios intermediarios. Si bien, la compra final puede efectuarse en un lugar físico determinado, como el supermercado de la esquina, el mercado es un conjunto mucho más amplio y complejo, que incluirá a todos los locales de producción, distribución, venta, así como a todos lo potenciales compradores del bien y todos los medios alternativos para la adquisición del mismo, como por ejemplo Internet.

En contraposición a la microeconomía, la macroeconomía se encarga de estudiar los agregados económicos que resultan de las interacciones individuales, como puede ser la demanda total, la producción nacional u otros agregados como la tasa de desempleo, la cantidad de dinero en la economía, etcétera.

Para entender mejor todo esto vamos a definir un poco mejor los elementos básicos de estudio en la microeconomía, empezando por el agente económico.

1.3 Los agentes económicos

Consideraremos *agente económico* a la unidad de decisión, capaz de actuar dentro del marco económico e institucional, y a quien podemos adjudicar o asumir un objetivo concreto, que permita realiza un estudio de su comportamiento.

Resulta obvio que una persona es un agente económico. Es una unidad de decisión, capaz de actuar, y que normalmente realiza sus actividades con algún objetivo, por lo general el de maximizar su propio bienestar. Éste parece un objetivo loable y razonable para el individuo, aunque posteriormente profundizaremos aún más para entender mejor qué quiere decir exactamente *bienestar* y qué es lo que persiguen las personas con sus acciones.

Ahora bien, existen muchos otros agentes económicos que no resultan tan obvios y que en realidad presentan bastantes complicaciones, en las que no vamos a entrar en profundidad a lo largo de este capítulo, pero que merecen ser mencionadas.

Podemos considerar, por ejemplo, a la familia como un agente económico. Obviamente una familia está formada por más de una única persona y dentro de cada familia, cada persona tendrá sus propios intereses. Sin embargo, muchas decisiones relevantes se pueden considerar como decisiones familiares y no individuales. Esto no implica que existan reuniones familiares para tomar determinadas decisiones, sino que las personas que forman la familia no toman sus decisiones de manera individual, pensando solo en su propio bienestar, las toman con el objeto de maximizar el bienestar de la familia, considerando el bienestar familiar (donde se incluye el propio, pero también el de los demás). De no ser así, muchos padres preferirían incrementar su propio consumo (y con ello su bienestar material) antes que pagar la educación superior de sus hijos. A la hora de comprar una casa o un coche, el individuo que toma la decisión considerará no solo sus propios intereses y deseos, sino que ponderará lo que él considera que son los intereses y deseos de la familia y sus miembros.

Consideraremos que individuos y familias forman un tipo de agente económico, cuyo objetivo será el de maximizar su bienestar.

El problema estriba en que desconocemos qué es el bienestar, y aunque conozcamos plenamente lo que para nosotros significa bienestar, esta definición no es única, y existen quizá tantas definiciones de *bienestar* como personas. Sin embargo, resulta ser irrelevante.

Vamos a estudiar las acciones que toman los agentes, cuando en realidad desconocemos el motivo ulterior por el que toman dichas decisiones. No obstante, pensemos un momento en nosotros mismos, quiénes somos, a dónde vamos y por qué tomamos las decisiones que tomamos. Cada día tomamos cientos de decisiones, algunas de manera automática, otras tras considerar las alternativas y cavilar sobre los resultados, pero cuando decidimos algo normalmente tomaremos una acción (observable) acorde con dicha decisión. Por lo general, cuando decidimos algo, es porque consideramos que es la mejor opción de las que teníamos disponibles, ¿pero mejor para qué? Personalmente suelo decidir las cosas que creo que me van a beneficiar, ya sea como individuo o como parte de un colectivo. Y no necesariamente beneficiar de manera económica, quizás buscaba un beneficio emocional, o para mi salud (física o mental) o espiritual (sentirme bien conmigo mismo). Sea lo que sea mi concepto de *bienestar*, decido considerando este concepto personal sobre lo que es o no bueno para mí, la sociedad en la que vivo, mi contexto particular. Busco maximizar un concepto personal y particular de bienestar que solo se puede entender enclavado en un contexto socio-económico y cultural particular.

Si yo tomo decisiones de esta manera, maximizando mi concepto particular de *bienestar*, lo natural es que, a pesar de que desconozco lo que puedan pensar otras personas, haga extensible esta idea hacia el resto de la sociedad. Las personas buscan su bienestar, con énfasis en *su*, ya que se trata de su propia concepción de bienestar. Esto no quiere decir que la gente no pueda ser engañada o manipulada, sino que para ser engañada o manipulada,tiene que estar convencida de que sus acciones son acordes con lo que es su idea de bienestar.

Observando las acciones que tomamos, desde el exterior se puede configurar, de manera imperfecta, una idea sobre qué es lo que deseamos y cuáles son los objetivos que perseguimos. Le llamamos *bienestar* porque es congruente con lo que pensamos de nosotros mismos, y parece más lógico que aseverar que las acciones que tomamos nos generan malestar. Sin embargo, no es demasiado problemático expresar otras razones ulteriores para la toma de decisiones, que no necesariamente coincidan con un concepto de *bienestar*. A pesar de ello, suele ser más difícil hacer estas motivaciones extensibles hacia el resto de la sociedad en su conjunto, sobre todo si no las compartimos.

Otro de los agentes económicos importantes son las empresas que consideraremos como unidades de decisión. Las empresas en realidad son una entelequia administrativa, una persona jurídica (en contraposición a una persona física), formada por un gran número de individuos (personas físicas) que guardan entre sí diversos tipos de relaciones contractuales, organizadas regularmente de manera jerárquica dentro de un organigrama, donde se especificarán deberes y obligaciones, así como quién es responsable de qué decisiones. Obviamente existe dentro de la empresa una gran cantidad de intereses individuales contrapuestos, y la toma de decisiones de una empresa dista mucho de ser un asunto simple. Sin embargo, podemos simplificar esto y considerar que la empresa, a grandes rasgos, se comporta como un individuo en el marco económico e institucional, hasta el punto de que comúnmente se les otorga de personalidad, capacidad de decisión y acción (por ello surgen frases del tipo "has visto lo que ha hecho McDonalds", "Toyota sacó su nuevo modelo" o "Philips abrió una nueva fábrica"), y desde un punto de vista legal se las considera como personas jurídicas con responsabilidad ante la ley (como institución). Si lo pensamos bien nos daremos cuanta de que una empresa puede tener muchos y muy diversos objetivos, pero podemos simplificarlo en uno solo: la empresa busca maximizar sus beneficios.

Existen lógicamente alternativas válidas para este objetivo, como por ejemplo, busca maximizar su valor en bolsa, busca maximizar su valor contable o maximizar los dividendos de sus accionistas. No obstante, muchas de éstas están directamente relacionadas con el objetivo básico de maximizar los beneficios, así que utilizaremos este último.

Estos dos agentes básicos, individuos-familias y empresas, formarán la base de nuestro estudio. Pero hay toda otra serie de agentes que podríamos analizar y que tienen influencia en el contexto económico.

Un grupo de agentes sería, por ejemplo, el gobierno (en sus diferentes niveles). Es una institución que, desde luego, toma decisiones en el ámbito económico, muchas de ellas muy relevantes. Obviamente el gobierno es otra entelequia administrativa, formada a efectos prácticos por el conjunto de personas (ya sea este electo o no) y el marco administrativo-legal en el que opera. Son los individuos que lo forman quienes toman decisiones, dentro del marco legislativo y administrativo dispuesto, y como personas tienen sus propios intereses, que se solapan y contraponen a la hora de ejercer el gobierno. Podemos, a pesar de ello, tratar el gobierno como un único ente, un único agente económico. Sin embargo, el sistema administrativo genera diferentes niveles de gobierno, y en casi cada país se pueden identificar al menos tres niveles de gobierno (el equivalente a municipal, estatal y federal).

Resulta más complicado saber cuál es el objetivo del gobierno, pero en la literatura se suelen utilizar básicamente los siguientes: maximizar el bienestar de la sociedad, maximizar la recaudación, o bien, ganar las siguientes elecciones (seguir en el gobierno); lamentablemente este último objetivo parece ser el dominante muchas más veces que el primero, que sería el ideal. En un sistema democrático eficiente, con votantes informados y sensibilizados, si el gobierno falla al momento de buscar un concepto de bienestar social que esté acorde con el pensamiento de la mayoría de los votantes, muy posiblemente perdería las siguientes elecciones, por lo que el comportamiento de los votantes puede ligar el primer objetivo con el último. Si el votante vota de manera desinformada, buscando su propio interés y no el social, o vota por un comportamiento "partisano" (votar por un partido por ser seguidor acérrimo del mismo, independientemente de su labor de gobierno), se desvinculan los dos objetivos y podemos mantener el poder con redes clientelares, sin buscar el bienestar social en su conjunto.

Si el bienestar particular es un concepto complejo, el bienestar social lo es todavía más (ver los teoremas de imposibilidad de Arrow en Internet).Empero, por imposible que resulte la construcción conjunta y agregada de un concepto de *bienestar social* que sea matemáticamente estable (racional), cada uno de nosotros tiene, además de un concepto de *bienestar individual*, un concepto de *bienestar social*. De la misma manera que nuestros conceptos de *bienestar* son diferentes entre individuos, nuestros conceptos de *bienestar social* también lo serán, y lo que creamos que es bueno para la sociedad en general no será compartido por nuestros congéneres. Sin embargo, un gobierno cuyas acciones sean cercanas a mi propio concepto de bienestar social debería ser para mí el preferido con respecto a un gobierno cuyas acciones sean reprochables dado mi concepto de bienestar social. Observando las acciones (y promesas de acción) de un gobierno, debería votar por aquel que se acerque más a lo que yo deseo.

Otro ejemplo de agente económico puede ser cualquier asociación u organismo no gubernamental. Como por ejemplo Green Peace o Caritas. De nuevo son conjuntos de personas, pero que en este caso se han asociado libremente para conseguir un objetivo común y compartido, si bien para su consecución han establecido también instituciones y sistemas organizativos, algunas veces incluso contractuales. Es por ello que puede ser tratado como un agente económico.

Una asociación criminal es también un agente económico. Un grupo de personas, de nuevo organizado internamente de alguna manera, a través de acuerdos tácitos, cuya observancia se impone por la fuerza y por un reparto de responsabilidades.

Podríamos poner muchos ejemplos más de agentes, pero los dos primeros grupos, familias y empresas, serán suficientes para este capítulo.

El conjunto de decisiones que puede realizar un agente como el descrito es tremendamente amplio, pero vamos a simplificarlo en una serie de decisiones de relevancia económica, que son las que más nos van a interesar.

Decisiones de consumo: Aquellos bienes y servicios que los agentes deciden adquirir para su consumo, ya sea consumo final o intermedio, siendo el consumidor final el que piensa consumir (utilizar) de manera final o última el producto y el consumidor intermedio el que utiliza el bien para incorporarlo en algún producto que el mismo no consumirá, sino que pasará hacia delante, ya sea a un consumidor final u a otro consumidor intermedio. Un ejemplo de consumo final sería el individuo que adquiere alimentos para comer, mientras que un consumidor intermedio es un restaurante que compra alimentos para elaborar los platos que venderá a sus clientes.

Decisiones de inversión: La compra de lo que llamaremos bienes de capital, con la finalidad de obtener un beneficio de ellos, utilizarlos en un sistema productivo. Una inversión implica la esperanza de un retorno, aunque una inversión no necesariamente sale bien. Una empresa comprando maquinaria está invirtiendo, un individuo comprando una casa se considera inversión.

Decisiones de ahorro (*deuda*): La decisión de retrasar o adelantar el consumo guardando dinero para un futuro o pidiendo un préstamo para consumir hoy. Las motivaciones para el ahorro pueden ser diversas, pero generalmente implican un consumo futuro (que puede realizarse o no). Podemos ahorrar para una compra futura conocida (comprar una casa o un coche) o para poder permitirnos un posible gasto que cubra eventos no deseados (ahorro por precaución), como pagar gastos médicos o cubrir los consumos en caso de ser despedido. Está profundamente relacionado con la inversión y en la mayoría de los casos se las considera idénticas. Sin embargo, para la transformación del ahorro en inversión se suele requerir de un intermediario financiero (Banco). En el caso de México, el ahorro en tandas, en casa u otros sistemas informales pueden dificultar la transformación del ahorro en inversión.

Decisiones de producción: Qué producir, qué cantidad producir, cuándo producir, dónde producir y de qué manera producir.

Decisiones laborales: Dónde trabajar, cuánto trabajar y cuántos trabajadores contratar.

Estas cuatro decisiones (consumo, inversión, producción y trabajo, asumiendo que ahorro=inversión) son las que consideraremos básicas para la economía.

Obviamente el *set* de decisiones que tiene un individuo es muchísimo más extenso, pero muchas decisiones que en apariencia no están incluidas dentro de estas cuatro, son en realidad decisiones de consumo, ahorro o inversión.

La decisión educacional, por ejemplo, puede ser tratada bien como una decisión de inversión, cuando ésta se toma con la esperanza de un mayor salario futuro o un mejor bienestar futuro (no necesariamente vinculado con un salario mayor), o bien, una decisión de consumo, cuando se disfruta de la educación recibida.

Nuestras relaciones sociales pueden entenderse como una decisión de consumo, cuando la finalidad es disfrutar de la vida social, o una decisión de inversión cuando el fin es el uso provechoso de nuestras redes sociales.

Adquirir un seguro puede considerarse una decisión de ahorro, no temporal, sino entre diferentes estados de la realidad, con el objeto de evitar situaciones imprevistas e indeseables. En lugar de ahorrar por precaución por una posible enfermedad, cubro un posible gasto futuro contratando un seguro médico.

Existen, sin embargo, otras muchas decisiones relevantes que son estudiadas, o son susceptibles de ser estudiadas, desde un punto de vista económico. Algunos ejemplos son:

Decisiones de locación: dónde vivir o dónde localizar una empresa. Esta decisión tiene que ver con el bienestar de las familias, pero de manera multidimensional y compleja. Tiene que ver con las posibilidades de empleo en la zona, aunque también con las posibilidades de consumo en la misma. Las posibilidades educativas para los niños. La seguridad de la zona, etcétera.

Decisiones maritales: Casarse o no, cuándo y con quién.

Decisiones políticas: por quién votar o qué sistema político implantar o defender.

Decisiones ambientales: de qué manera, dónde y cuándo contaminar, cuánto contaminar (no contaminar no es una opción, lamentablemente, pues solo el respirar produce contaminación).

Muchas de estas decisiones tienen ramas propias de investigación dentro de la microeconomía, y pueden ser estudiadas individualmente. A lo largo de este capítulo nos vamos a centrar en dos decisiones básicas: consumo y producción.

Prácticamente todos los agentes económicos producen y consumen, o son susceptibles de consumir y producir. Como individuos somos mayoritariamente consumidores, pero solemos producir cosas en el hogar, aunque son en su mayoría destinadas a consumo propio. Las empresas, además de producir, son consumidoras de gran cantidad de bienes. Sin embargo, por simplicidad, vamos a asumir a lo largo del curso que los individuos y las familias son consumidores de manera exclusiva (cosa bastante real) y que ellos formarán el lado de la demanda, pues demandan productos para su consumo. Por el mismo supuesto de simplicidad, asumiremos que las empresas son productoras de manera exclusiva, y que por lo tanto no realizan demanda (cosa menos real), sino que simplemente producen, formando el lado de la oferta, pues ofrecen sus productos para ser consumidos.

Este último supuesto de que las empresas no demandan es bastante alejado de la realidad, mas no dista de ser cierto si lo aplicamos a determinados mercados. Normalmente las empresas demandan en mercados diferentes a los consumidores, por lo tanto en cada mercado el lado de la demanda estará dado casi de modo exclusivo por individuos o familias, o bien, casi por empresas. Lo importante es que por lo común no se dan casos donde un mismo agente esté activo en ambos lados, o bien, forma parte de la oferta de un mercado, o bien, forma parte de la demanda de un mercado (si bien puede estar en lados diferentes en momentos temporales diferentes).

Relacionaremos, entonces, los siguientes conceptos:

$$\text{Individuos y familias} = \text{Consumidores} = \text{Demanda}$$
$$\text{Empresas} = \text{Productores} = \text{Oferta}$$

1.4 Los bienes

Las decisiones de consumo y producción están ligadas a los bienes. Son bienes (resumimos en este término bienes y servicios) lo que se suelen producir y consumir en las economías.

Pero, ¿qué es exactamente un bien? Un bien es intuitivamente aquello que consumimos, y así se considera en muchos casos, pero desde un punto de vista económico tenemos que considerar como bien aquello por lo que estamos dispuestos a pagar o a renunciar a algo con tal de obtenerlo. Podríamos definirlo como algo que deseamos, pero no sería del todo cierto, pues compramos cosas que en realidad no deseamos, como fármacos cuando estamos enfermos. En general, podríamos decir que un bien como aquello, material o no, que nos reconforta, da bienestar, nos hace sentir bien, que nos hace sentir menos mal, que nos alivia o que deseamos consumir por efectos beneficiosos que puede tener para otros aspectos de la vida (mucha gente consume productos *light*, no por que le gusten o los desee, sino porque lo que desea es adelgazar y el consumo de estos productos le ayuda para obtener aquello que desea). Por simplicidad se suele considerar que los bienes incrementan nuestro bienestar, aunque sea de forma indirecta.

La cualidad más importante de los bienes es nuestra disposición a pagar por ellos o, en su defecto, a renunciar o sacrificar algo para conseguirlos. Eso no implica que tengamos que pagar por ellos o sacrificar algo para conseguirlos, sino que existe una disposición a ello. Esta cualidad es la que posibilita la existencia de mercados, de intercambio. Si no existe disposición a pagar por parte de nadie no existiría intercambio y no habría mercado. Tampoco existiría producción, pues si no estamos dispuestos a sacrificar tiempo para la producción tampoco produciríamos.

Retomemos la definición que hemos dado de *bien*: "Un bien es aquello por lo que estamos dispuestos a pagar o a renunciar a algo con tal de obtenerlo". Veamos ahora cómo esta definición se adapta mejor a la realidad que la idea intuitiva de que un bien es aquello que consumimos para incrementar nuestro bienestar.

Pongamos por ejemplo la compra de un bien para su posterior distribución, compro un bien, no por que pretenda consumirlo, o que en realidad lo necesite o vaya a incrementar mi bienestar, sino que lo compro para después poder venderlo más caro y sacar un beneficio, que si es susceptible de ser utilizado para comprar bienes que si vayan a incrementar mi bienestar.

Otro ejemplo son algunas de las compras realizadas por las empresas. Supongamos, entonces, que somos restauradores o tenemos una pequeña tienda o algún negocio particular y unipersonal, debido a eso compro los materiales y utensilios que requiero, pagando por ellos, no porque ellos impliquen un incremento de mi bienestar, ni porque desee consumirlos, sino porque los requiero para realizar una actividad que me reportara beneficios, que son susceptibles de ser usados para incrementar mi bienestar. O en el caso de una gran empresa, se compra bienes para ser incluidos en el proceso productivo, con el objeto de ser vendidos e incrementar los beneficios de la empresa.

Existen también los consumos “sociales”, aquellos derivados de nuestra pertenencia a una sociedad donde deseamos encajar y cuadrar. Quizás la ropa que llevamos no sea en realidad la que preferiríamos llevar, si fuéramos individuos aislados y viviéramos solos, pero compramos cierto tipo de ropa porque es la que la sociedad o nuestro grupo de amigos espera ver o espera que tengamos (o la que nuestra pareja quiere que llevemos). Dentro de ese tipo de decisiones podemos incluir el consumo suntuoso, que es aquel destinado a ostentar nuestro estatus social. Normalmente bienes de lujo que uno desea más para mostrar a los demás que por interés propio. En estos casos el objetivo sigue siendo incrementar nuestro bienestar, aunque no sea el objeto en sí lo que permite obtener el bienestar, sino que el bienestar se obtiene por la aceptación social.

Un último ejemplo sería ciertas compras obligatorias. Quizás no deseo la rueda de repuesto de mi vehículo, no deseo el seguro de mi vehículo o no quiero llevar casco cuando voy en moto, pero prefiero obtenerlos porque de no tenerlos sería sancionado, prefiero pagar por el seguro antes que arriesgarme a sufrir la sanción, lo que implicaría una pérdida de bienestar.

Estos casos expuestos nos permiten diferenciar entre dos tipos de bienes: los bienes finales y los bienes intermedios.

Los “bienes finales” son aquellos destinados a nuestro consumo, y son normalmente estos los que con su consumo permiten incrementar el bienestar (o aliviar un mal). Los “bienes intermedios” son aquellos que formarán parte en la construcción o elaboración de un bien final u otro bien intermedio. Se adquieren no para ser consumidos, sino para ser incluidos en otro producto, o alternativamente para ser distribuidos.

De todas maneras, obsérvese que la adquisición de ambos tipos de bien tiene como última finalidad incrementar el bienestar, o bien, incrementar el beneficio, por lo que se mantiene la búsqueda del objetivo expuesto para cada agente económico.

En contraposición a los bienes existen los males. La definición de *mal* es muy parecida, pero inversa, a la definición de bien. Se define: “Un mal es aquello por lo que querríamos ser pagados o gratificados para consumirlo o aceptarlo”.

Los males existen, y hay mercados para ellos. El trabajo es un mal, han de pagarnos para que decidamos trabajar (hemos de obtener algo a cambio del trabajo, si no normalmente no lo haríamos). Existen grupos de prueba para fármacos que cobran por el riesgo que aceptan a la hora de formar parte del experimento. La contaminación es un mal.

Por norma general, el estudio se suele limitar al estudio de bienes. También nos limitaremos a bienes homogéneos y unidimensionales. Hablaremos de comida, ropa, coches, quesos, etcétera, y la cantidad de los mismos. Normalmente asumiremos que mayor cantidad es mejor.

Ahora bien, si miramos la realidad, veremos que un bien es algo mucho más complejo. Es algo multidimensional que incluye variables relativas al bien. Por ejemplo, para un queso podemos hablar de calidad, color, sabor, olor, gusto, tamaño, cremosidad, etcétera. O para un coche podemos hablar de diseño, color, motor, marchas, consumo de gasolina, etcétera.

Pero no solo deberíamos incluir las variables relativas al bien, sino muchas variables externas, como por ejemplo temporales (momento del día, del año...), de entorno (llueve, hace sol, hace calor o frío...), anímicas (estoy contento, estoy triste...), entre otras.

De la misma manera, a veces un bien no es un único concepto (queso, coche...), sino que incluye toda una variedad de elementos relacionados con varios bienes. O sea, que el bien es una canasta de bienes. Ir de vacaciones a Nueva York o a Los Ángeles incluye todos aquellos bienes que podemos relacionar o esperar encontrar en la visita. Sin embargo, a la hora de decidir forman parte de un único bien: el paquete turístico.

Ahora bien, por lo regular podremos decir que lo que nosotros llamaremos cantidad es una ponderación de todos estos conceptos en una medida única. Considérelo como mapeo de un espacio muy complejo a R_1 y que nosotros trabajaremos con la variable resultante.

1.5 Los mercados

Compradores, distribuidores, vendedores y productores interactúan y realizan sus transacciones comerciales (compras y ventas mayormente) a través de lo que llamamos *mercados*. Líneas arriba hemos comentado que los mercados son algo mucho más complejo que un simple lugar físico donde tienen lugar los intercambios entre productores y consumidores. Observando la realidad podemos ver que son escasas las veces en que un productor llega a ver a un consumidor final, entre ellos suele existir una compleja red de distribución y venta, además de una diferencia temporal y espacial considerable.

Podemos considerar que el mercado es cualquier institución u organización social a través de la cual los productores y consumidores entran en relación comercial con el fin de realizar transacciones comerciales, por lo regular abundantes y continúas en el tiempo.

Un mercado puede, y normalmente lo hace, incluir entonces un gran número de lugares y un número abundante de empresas (no solo productoras) y consumidores. Incluso, a veces no implica un lugar, sino que se hace mediante medios como el teléfono, el fax, el correo o Internet, desapareciendo el lugar físico donde se realizaba la ultima transacción (tienda), siendo sustituido éste por un medio de comunicación.

Es importante a la hora de hablar de un mercado definirlo bien. Para ello hay que definir de forma pertinente el bien del que se trata, así como su grado de agregación, quiénes son los agentes que intervienen en el mercado y cuál es el ámbito de relevancia de dicho mercado.

Un mercado puede definirse según el bien a muy diferentes niveles. Podemos hablar, por ejemplo, del mercado de alimentos, o dentro de éste del mercado de bebidas, o dentro de éste el mercado de bebidas no-alcohólicas, o dentro de éste el mercado de refrescos, o aun dentro de éste del mercado refrescos de cola. Cada uno de estos mercados existe, de manera inclusiva (el siguiente siempre incluido en el anterior), pero no es lo mismo estudiar uno que otro. Obsérvense, por ejemplo, las características diferentes que existen entre el mercado de refrescos y el mercado de refrescos de cola, o entre el mercado de bebidas y el mercado de refrescos.

Los agentes que intervienen dependerán de cuál ha sido el grado de agregación que hemos considerado en el apartado anterior y tendrán que ser definidos en consecuencia. En el mercado de bebidas existe una enorme cantidad de empresas productoras y distribuidoras, mientras que en el mercado de refrescos de cola tenemos prácticamente un oligopolio formado por Coca-cola y Pepsi, más algunas compañías menores.

Asimismo, tenemos que definir cuál es el ámbito donde opera el mercado, puede ser un mercado local, estatal, nacional o internacional. Un restaurante en el centro de una ciudad ofrece servicio a las personas que se encuentran en la misma, sin importarle o ser influenciado por los agentes que se encuentran en otra ciudad lejana. De la misma manera, quienes ofrecen servicio de restauración en otras ciudades guardan poca relación con los que ofrecen el servicio de restauración en ésta. En el caso de restauración se trata de un mercado local, limitado en función de la movilidad de la gente, ya que no nos iremos a comer a otra ciudad, por ejemplo. Esto es, incluso, cierto para cadenas que tienen presencia en diversas ciudades, de forma que la misma empresa de restauración tiene diversas sucursales a lo largo de muchas ciudades, pero éstas solo compiten con las que están presentes a su alrededor.

Para comprar un coche, la gente sí está dispuesta a desplazarse grandes distancias. Un concesionario de coches en Guanajuato tiene su competencia con los concesionarios de León, por poner un ejemplo. Sería éste, pues, un caso de mercado estatal o incluso nacional en algunos casos.

Las bolsas de valores serían un ejemplo de mercado nacional e internacional, así como los mercados de petróleo y otras materias primas. Antes estos mercados internacionales estaban prácticamente limitados al uso de empresas y grandes inversores. Pero el Internet ha internacionalizado muchos conceptos, entre ellos algunos mercados. Podríamos decir que, a efectos prácticos, el mercado de libros, discos y material informático es prácticamente un mercado internacional accesible a cualquier usuario con conexión a Internet y a una tarjeta de crédito.

Es en el mercado donde se encuentran la oferta y la demanda, donde se fijan los precios de transacción y las cantidades compradas y vendidas. Eso influye, a su vez, en las decisiones de los diferentes agentes que forman parte del mercado. El cuerpo básico de la microeconomía introductoria será la construcción de la oferta, de la demanda y de confrontar a ambas en diferentes mercados, analizando la formación de precios, las cantidades consumidas, aproximando de alguna manera el bienestar generado y estudiar los efectos de diferentes políticas sobre los mercados.

Para ello construiremos de manera independiente la oferta y la demanda para después unirlos en el mercado.

2 Los consumidores

Para construir el mercado empezaremos por el lado de la demanda, el cual formaremos por los consumidores y, a su vez, asumiremos que estos consumidores son simple y llanamente consumidores finales, individuos y familias. Estos supuestos, aunque restrictivos, tienen bastante lógica, y relajarlos (permitir por ejemplo la compra de bienes intermedios o empresas como consumidores) no cambia sustancialmente los resultados, lo que implica que los resultados se podrán extrapolar a otro tipo de demandas más complejas.

Asimilamos, pues, el concepto de *consumidor* con el de individuo o familia, y que se trata de un consumo cuya finalidad es la de incrementar el bienestar mediante el consumo del bien. Entonces, trataremos aquí el comportamiento de personas, de individuos.

2.1 Preferencias

La principal característica que utilizaremos de los individuos son sus preferencias. Los individuos tienen preferencias, prefieren una cosa sobre otra, así de simple. La preferencia no es más que la indicación de que se prefiere un bien a otro. Si una persona puede escoger entre dos cosas (situaciones) diferentes, normalmente escogerá una, pues la prefiere, al menos débilmente, sobre la otra. Esto es lo que llamamos preferencia, entre A y B, el individuo prefiere A si escoge A sobre B. Lo que nos indica que A es, para nosotros, al menos igual de bueno o mejor que B. Si esto último no fuera cierto, entonces deberíamos preferir B. Esta preferencia la indicaremos de la siguiente manera:

$$A \succeq B$$

Es obvio que todos tenemos preferencias, todos podemos escoger entre dos posibles situaciones, y se supone que escogeremos aquella que nos beneficie o satisfaga más, aquella que "preferimos".

En este momento estamos vinculando la preferencia con el bienestar, a través del término de "satisfacción". Aunque el individuo no busque su bienestar y tenga otra motivación ulterior para su toma de decisiones, seguirá teniendo preferencias, y lo que necesitamos para la construcción de su demanda son estas preferencias. Asimilamos éstas al bienestar por la lógica que conduce a pensar que tendemos a querer sentirnos bien a través de nuestras elecciones.

Es importante recalcar que la preferencia es una relación entre dos elementos y no más, o sea que se trata de una comparativa binomial. Se prefiere A sobre B, pero eso no implica, de momento, nada respecto a terceras opciones. Toda preferencia se define sobre la comparación o ponderación sobre dos bienes o dos cestas de bienes o dos situaciones.

Es importante comprender que A y B son en realidad dos descripciones completas de realidades, la diferencia entre estas realidades puede ser muy amplia y compleja, o muy simple.

Una situación simple sería decidir si comprar o no un producto estando en una tienda: ya estamos en la tienda, estamos ante el cajero y decidimos si comprar o no un producto, lo único que elegimos es tener o no un producto, y tener o no la cantidad de dinero que cuesta dicho producto. Si compramos pierdo una cantidad de dinero a cambio de un producto. Si no, mantenemos el dinero (para cualquier uso alternativo) y no tenemos el producto, así de simple. Nada más cambió (es el mismo día, el mismo clima, estamos en el mismo lugar).

Un poco más complejo es decidir si ir a comprar o no un producto. Ir a comprar el producto ahora implica también utilizar un cierto nivel de tiempo y esfuerzo para trasladarnos hasta la tienda (para lo cual ahora será importante el clima, por ejemplo), y la propia compra anterior del producto.

Más complejo aun es ir o no de vacaciones. Tengo que desembolsar una cantidad de dinero, desplazarme a otro lugar, usar tiempo y esfuerzo, no sé qué clima tendré, no sé si me gustará, ni cuánto me gustará el lugar, si la gente será amable o no, etcétera.

O realmente complejo. Tengo que decidir si acepto o no un trabajo en Kuala-Lumpur. Aceptarlo implica irme a vivir a otro lugar, con otro clima, con otra cultura, otro tipo de comida, lejos de mi familia, con determinado salario, con determinadas responsabilidades, con opciones de futuro diferentes a las que tengo ahora.

Sin embargo, por complejas o simples que sean las diferencias entre A y B, tenemos la capacidad de tomar una decisión, si bien ésta puede necesitar algo más de tiempo en función de lo complejo de la situación.

Entonces, si entre A y B escogemos A, diremos que A es preferido a B $A \succeq B$, y si entre B y C elegimos B diremos que B es preferido a C ($B \succeq C$).

Con este concepto simple de “preferencia” podemos construir dos conceptos más concretos. Preferencia estricta e indiferencia.

Diremos que A y B son indiferentes ($A \sim B$) si A es preferido a B y B es también preferido a A. Ello indica que me da igual uno que otro, que puedo escoger cualquiera de los dos indiferentemente, ya que son igual de buenos.

$$Si\ A \succeq B\ y\ B \succeq A \rightarrow A \sim B$$

En contraposición a la indiferencia, establecemos la preferencia estricta ($A \succ B$). A es estrictamente preferido a B, si A es preferido a B, pero B no es preferido a A. Esto indicaría que A es mejor que B.

$$Si \succeq A\ B\ pero\ \overline{B \succeq A} \rightarrow A \succ B$$

Vemos entonces que estos dos conceptos son excluyentes entre sí: si A es estrictamente preferido a B, no pueden ser indiferentes. Y si son diferentes uno no puede ser estrictamente preferido al otro. Combinados, forman la preferencia, ya que A preferido a B implica que o bien A es estrictamente preferido a B, o A es indiferente a B (A es al menos tan bueno como B).

Ahora bien, si una preferencia cumple ciertas condiciones, la llamaremos *preferencia racional*, y las preferencias racionales nos permitirán trabajar de manera más amplia, que simplemente comparando bienes uno a uno.

Las condiciones básicas que requerimos para que una preferencia sea racional son:

- Completitud: las preferencias han de ser completas.
- Reflexivas: las preferencias han de ser reflexivas.
- Transitividad: las preferencias han de ser transitivas.

Completitud: las preferencias han de ser completas. Esto implica que tenemos que tener preferencias sobre cualquier combinación de bienes. A la hora de decidir, tenemos que tener preferencias. Si las preferencias no son completas existirían casos en los que no se puede decidir. Esto no quiere decir que no pueda existir indiferencia, o sea, me da igual una cosa que otra, eso ya indica una preferencia. Lo que no puede ser es que no sepamos, no podamos establecer una preferencia, y que por lo tanto no podamos tomar una decisión.

$$Completa : o\ A \succeq B, o\ B \succeq A\ (o\ ambas)$$

Reflexiva, una canasta de bienes ha de ser preferida a sí misma. Esto es A es preferido a A. Puede sonar muy simple, pero implica la capacidad de decidir entre iguales. El hecho de que dos cosas o situaciones sean idénticas no implica la incapacidad de tomar decisiones (buscar en Internet el asno de Buridán).

$$Reflexiva : A \succeq A$$

Transitividad. Si A es preferido a B, y B es preferido a C, entonces A necesariamente ha de ser preferido a C.

$$Si\ A \succeq B\ y\ B \succeq C \rightarrow A \succeq C$$

Esto implica una consistencia interna en las preferencias del individuo, que permitirán extender la relación binomial que representa la preferencia a grupos más extensos de opciones. Si la transitividad no se cumple, el individuo es capaz de escoger uno a uno, pero sería incapaz de escoger entre tres o más opciones, ya que si prefiere A a B, B a C, pero prefiere C a A, no podría decidirse entre A, B y C, pero sería capaz de decidir entre A y B (A), entre B y C (B) y entre A y C (C), lo que sería inconsistente.

Si una preferencia cumple estas condiciones (completa, reflexiva y transitiva), entonces podemos asegurar toda una serie de propiedades que emanan directamente de éstas.

La completitud junto a la reflexividad garantizan que se podrá tomar una elección en cualquier caso, y que no existen situaciones donde la toma de una decisión esté imposibilitada.

La transitividad nos garantiza la extensión de la capacidad de tomar decisiones uno a uno, a la toma de decisiones en general entre una cantidad cualquiera de opciones alternativas.

Dado un conjunto de posibles situaciones, éstas se pueden agrupar en conjuntos que sean indiferentes entre sí, y éstos al mismo tiempo se pueden ordenar en función de su preferencia estricta entre ellas. Esto ordena la posible toma de decisiones entre elementos que son indiferentes entre sí, pero a su vez preferidos a cualquier otro conjunto de posibilidades. En el caso de que todos los elementos del primer conjunto no estuvieran disponibles, la elección recaería en algún elemento del segundo conjunto de elemento indiferentes entre sí, pero preferidos al resto, y así sucesivamente.

Si se cumplen estos tres axiomas diremos que las preferencias son racionales y que el individuo tiene la capacidad de decidir. Esto supone que nuestra definición de *racionalidad* es una definición muy simple, que solo implica la capacidad de tomar decisiones en cualquier situación, ya sea entre dos o más opciones, y la consistencia de esas decisiones. No se trata de una definición estándar de *racionalidad* (la capacidad de evaluar y razonar a la hora de tomar decisiones), ya que se pueden observar los tres axiomas requeridos (completas, reflexivas y transitivas) en comportamientos que fácilmente se puede definir como irracionales. Y no es necesario razonar y evaluar para obtener un comportamiento económicamente racional, un animal actuando por instinto genera comportamientos racionales desde un punto de vista del análisis económico. Esto no implica que más adelante no ampliemos estas acepciones a elementos más complejos, y hablemos de racionalidad limitada al referirnos a comportamientos que son racionales (completas, reflexivas y transitivas), pero en las cuales la limitación humana para razonar de manera completa (ya sea por falta de tiempo y otros elementos) nos lleva a tomar decisiones que son subóptimas a la hora de conseguir el objetivo deseado (maximizar el bienestar), y escogemos no lo que era estrictamente mejor para nosotros, por la incapacidad de determinar a la perfección lo que es mejor, por la falta de información, falta de capacidad para procesar la información, elementos aleatorios (riesgos) involucrados en el proceso, u otras limitantes de carácter psicológico (aversión al cambio, puntos fijos, sesgos de percepción, etcétera).

Como ya comentamos, la combinación de los tres axiomas garantiza la capacidad del individuo de decidir en cualquier situación, ya sea entre dos o entre varios bienes o situaciones alternativas. Esto es suficiente para poder trabajar la teoría de la decisión, pero como ya hemos expuesto requeriría un trabajo de acuerdo con las teorías de conjuntos.

Para trabajar de una manera más intuitiva a como se trabajaría en la teoría de conjuntos, exigiremos el axioma de continuidad. Para poder aplicar el axioma se requiere primero definir un espacio continuo sobre el que trabajar. Como estamos hablando, de momento, de consumos, se trata de un espacio multidimensional finito, definido por tantas dimensiones como bienes (o males) existan a disposición del consumidor (una cantidad enorme, pero finita, de bienes).

Cada uno de estos bienes deberá determinar una dimensión continua. Esto implica el poder consumir el bien en cualquier cantidad. En la práctica eso involucra la posibilidad de consumir (y comprar) medio coche, un tercio de ordenador o un quinto de casa. Esto parecería de salida algo imposible e irreal. Pero no lo es tanto si nos preguntamos qué es una unidad de coche. Por ejemplo, un vocho es un coche, pero ¿representa una unidad de coche? Porque si un vocho es una unidad de coche, un coche con mejores características que un vocho ¿sería más que un coche? Y si definimos que una unidad de coche es un Bugatti Veyron o un Aston Martin Valkyrie, ¿el vocho sería menos que un coche? A grandes rasgos, sí. Una vez definido qué es una unidad de coche, un coche con características peores, sería menos que un coche, y un coche con características mejores sería más que un coche.

Como se comentó con anterioridad, un bien es un concepto multidimensional y complejo, pero a la hora de medir la cantidad de bienes tenemos que realizar una proyección desde este espacio multidimensional sobre una única dimensión. Dado que dentro de un concepto de bien (un coche) se localizan muchos elementos que son el mismo bien (todos son coches), cada uno de ellos representará, una vez proyectado sobre el espacio unidimensional del bien (el espacio "coche") una cantidad diferente del bien (o sea, coche y medio, coche y un cuarto, dos coches y un tercio...), de forma que el concepto multidimensional, ambiguo y difuso que representa el bien (coche) se concretiza de manera cuantitativa sobre un continuo.

Esto es aún más cierto si en vez de un concepto de bien determinado (como coche) utilizamos un concepto más genérico, que engloba varios bienes (trasporte). Si consideramos estos conceptos genéricos (vestimenta, alimentación, transporte, vivienda...), es aún más fácil visualizar la continuidad que existe para dichos bienes genéricos. Asumir la continuidad de los bienes no es entonces una simplificación insustancial.

Si además vamos a hablar de consumo o producción, ésta necesariamente se ha de expresar en cantidades positivas (o cero). Puedo no consumir algo (consumo cero), pero no puedo consumir cantidades negativas (o "des-consumir"), un consumo negativo implicaría la creación a partir de la nada, consumir una cantidad de menos un Ferrari, técnicamente implicaría que debería aparecer un Ferrari de la nada. Podemos producir un Ferrari, pero eso es producción (lo que requiere insumos, tiempo, etc.), pero no podemos "des-consumir" uno. De la misma manera ocurre con la producción, destruir un Ferrari no es una producción negativa, sino la disminución de la cantidad producida en uno (de forma que la cantidad existente tiene que ser positiva o cero, no puede existir una cantidad negativa de Ferrari).

Entonces, el espacio de bienes (ya sea consumidos o producidos) es un espacio continuo, n dimensional (donde n es el número de bienes existente), y considerando solo el cuadrante positivo de dicho espacio. En la mayor parte de los libros y ejemplos, se utilizan solo dos bienes, porque la representación gráfica en tres dimensiones se complica, y en más de tres es imposible.

De manera gráfica en dos dimensiones podríamos considera, por ejemplo, vestimenta y alimentación (figura 1).

Y en tres dimensiones vestimenta, alimentación y vivienda (figura 2).

Ahora, dentro de este espacio continuo, la continuidad se establece como las relaciones que guardan entre sí conjuntos (cestas) de estos bienes.

Siendo X_n y Y_n dos sucesiones convergentes de cestas de bienes, la continuidad implica que, si X_n es preferido a Y_n, para todo valor de n, entonces en el límite cuando n tiende a infinito esta relación se ha de mantener. O sea:

$$Si\, X_n \succeq Y_n \, \forall n \, \rightarrow \lim_{n \to \infty} X_n \succeq \lim_{n \to \infty} Y_n$$

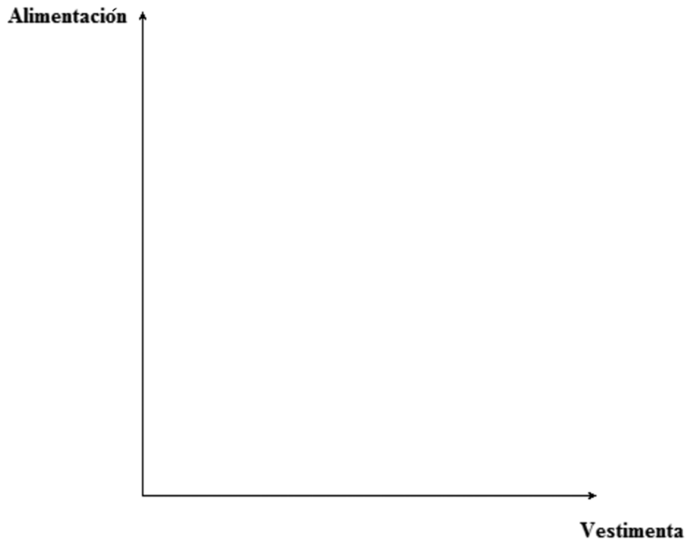


Figura 1

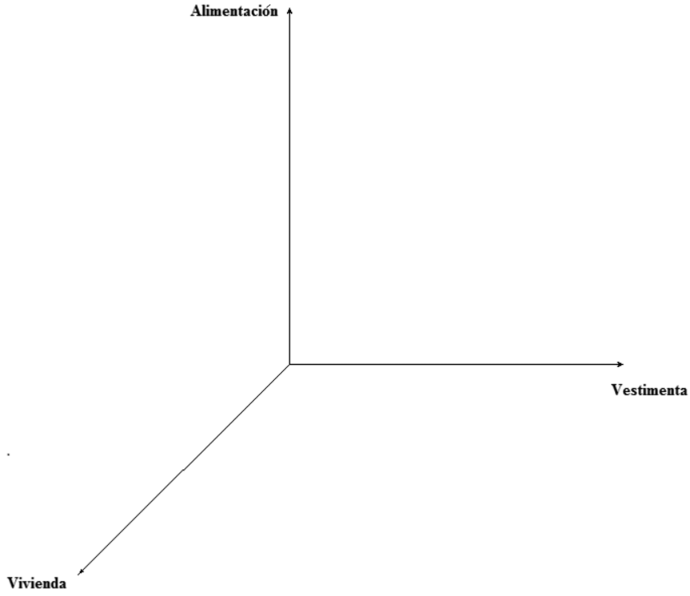


Figura 2

La continuidad conlleva lo siguiente:

- Si la preferencia es continua, en cualquier vecindario, por pequeño que sea, de una cesta de bienes, tiene que existir al menos otra cesta de bienes que sea indiferente a ésta.
- Esto significa que existen conjuntos de bienes indiferentes entre sí, infinitamente cercanos.
- Esto implica que, juntando esos puntos, se generan curvas de indiferencia continuas.
- Que por cada punto del espacio pasa una, y solo una, curva de indiferencia (completas).
- Que la curva de indiferencia continua separa el espacio en dos subespacios cerrados, dejando a un lado lo que es estrictamente preferido a la curva, y al otro lado lo que es no es estrictamente preferido a ella misma. Dicho de otra manera, a un lado queda lo que es mejor, y al otro lo que es peor.

En otras palabras, la continuidad supone que, dada una determinada cesta, el espacio queda completamente mapeado con la curva de indiferencia (lo que es indiferente a esta cesta), lo que es mejor y lo que es peor. Aún no sabemos cuál sería la forma de esta curva, ni a qué lado queda lo mejor y a qué lado queda lo peor (figura 3).

El axioma de Monotonicidad Creciente indica que trabajaremos con bienes, como explicamos antes. Se puede resumir como "más es mejor, o al menos igual de bueno". Tener más cosas es mejor que tener menos cosas. Esto excluye lo que se conoce como *saciabilidad local,* que alguno de los bienes, al alcanzar su consumo un cierto nivel, se transforme en un mal, y que el consumo adicional genere disminuciones en el nivel de bienestar. A veces, el axioma se conoce como no *saciabilidad local*.

Con este axioma ahora podemos limitar las formas de las curvas de indiferencia. Si las preferencias cumplen con el axioma de Monotonicidad Creciente no puede tener pendientes positivas, solo pendientes negativas o cero. Además, ahora permite localizar como lo que es preferido a la curva en el área que queda sobre y a la derecha de la curva, mientras que lo que no es preferido a la curva queda debajo y a la izquierda de la curva (figura 4).

Sin embargo, aún quedan muchas posibles curvas, entre ellas curvas como en la figura 5:

Una curva como ésta representa unas preferencias que tienen una particularidad no deseable, y que pocas veces se observa en la realidad.

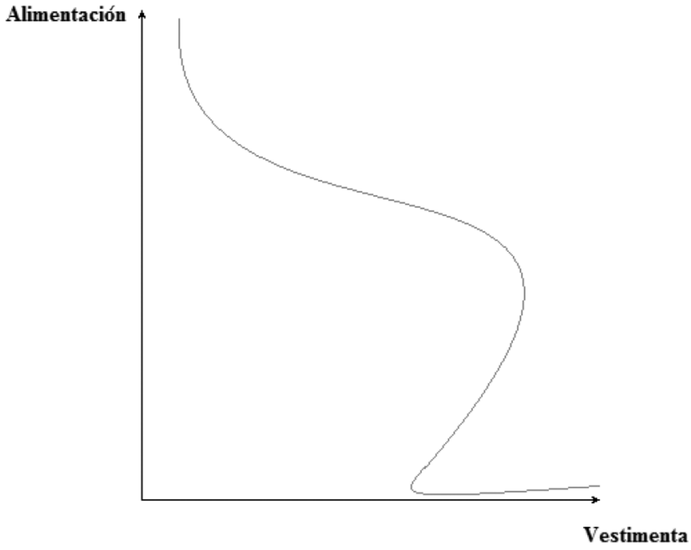


Figura 3

Figura 4

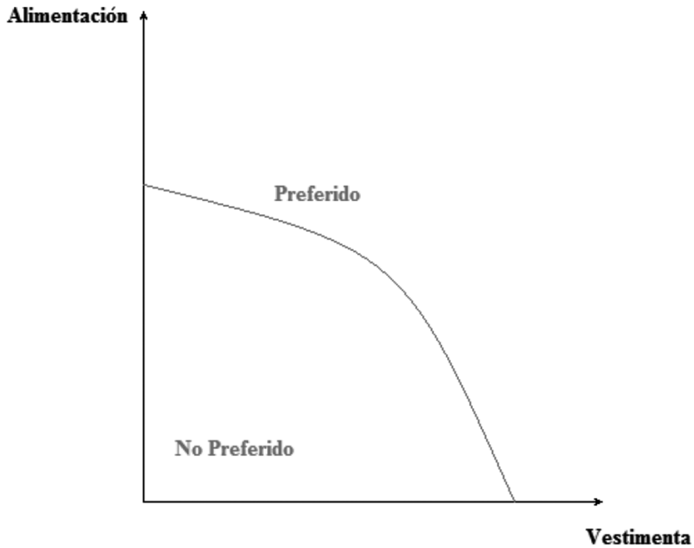


Figura 5

Dadas estas preferencias, el individuo valora más aquello de lo que tiene más, de forma que si tiene mucho alimento (o vestidos) tiene poca disposición a cambiar este bien por el otro (una relación de sustitución baja). Lo normal es que si tenemos más de un bien que de otro, valoremos más una unidad adicional del bien que no tenemos que una unidad del bien del que tenemos una gran cantidad. Para evitar esto vamos a exigir a las preferencias una relación de sustitución decreciente. Esto es, la cantidad por la que estoy dispuesto a sustituir una unidad de un determinado bien por otro disminuye con la cantidad acumulada del bien. Cuanto más tengo de un bien, menos necesito del otro para sustituir, dentro de la indiferencia, una unidad perdida del primero. En la práctica esto también conlleva que el bienestar que consigo de un determinado bien disminuye con la cantidad consumida, esto es, valoro más las primeras unidades de consumo que las subsiguientes. El beneficio obtenido con el consumo disminuye con la cantidad consumida. Esto se traducirá más tarde en el concepto de *Utilidad Marginal Decreciente*.

¿Cuándo no se cumple este axioma en la realidad? Un claro ejemplo sería cualquier adicción. El adicto valora cada vez más aquello que causa su adicción. Esto indica que cada unidad incrementa su valor con el consumo, y que cada unidad consumida genera más bienestar (desde este esquema que hemos construido) que la anterior (técnicamente necesita cada vez más unidades para obtener el bienestar que busca). Éste es un caso muy real, pero que lleva justamente a las consecuencias que queremos evitar, el adicto utiliza todos sus recursos para el consumo de aquello que causa su adicción, reduciendo los consumos de cualquier otra cosa. Esta situación extrema se considera como algo socialmente indeseable y se cataloga como enfermedad. Esto no quiere decir que no se estudie, si se estudia, pero a la hora de describir comportamientos generales, que es lo que nos interesa, buscaremos preferencias que se ajusten al comportamiento más general que observamos, esto es, consumos moderados y variados, donde los individuos consumen de manera variada, sin que se produzcan grandísimos excesos o disparidades en los mismos. Esto no quiere decir que no podamos consumir grandes cantidades, sino que, si consumimos grandes cantidades, tenderemos a consumir grandes cantidades de todo (de todo aquello que ese individuo considere que es un bien).

Una vez que nos limitamos a este caso (relación de sustitución decreciente), las curvas de indiferencia tienen que ser necesariamente convexas. Aún existe una infinidad de formas disponibles para estas curvas, pero serán de pendiente negativa (o cero) y convexas (figura 6).

Cada persona, de acuerdo con sus preferencias, tendrá una curva diferente, lo que expresa cuál es el deseo particular de esa persona con respecto al consumo de los bienes representados en la gráfica, o respecto de todos los bienes si consideramos todo el posible espacio de consumos. Esta representación es válida de manera general para la representación de todos los bienes, y lo que las personas desean.

Dado que hemos supuesto la no saciabilidad local o "más es mejor", lo que desean en la práctica las personas es todo. Como somos insaciables, queremos siempre más (si pudiéramos obtenerlo sin esfuerzo ni sacrificio alguno). Esto no es incompatible con alcanzar niveles de consumo en los cuales uno ya no quiere sacrificarse más, esto es, no está dispuesto a trabajar más horas (sacrificando su ocio, que es un bien) para conseguir más dinero que le permita consumir cosas que se pueden comprar (cuando el ocio, el tiempo, que son ambos bienes, no pueden comprarse). Esto sugiere que si nos cayera el dinero del cielo (nos tocara la lotería, una herencia inesperada, un incremento de salario que no implique más trabajo, etcétera) tomaríamos ese dinero para utilizarlo en algo, ese dinero incrementaría nuestro bienestar (una vez transformado en aquello que deseamos realizar con ese dinero). Eso incluye cosas como dar ese dinero

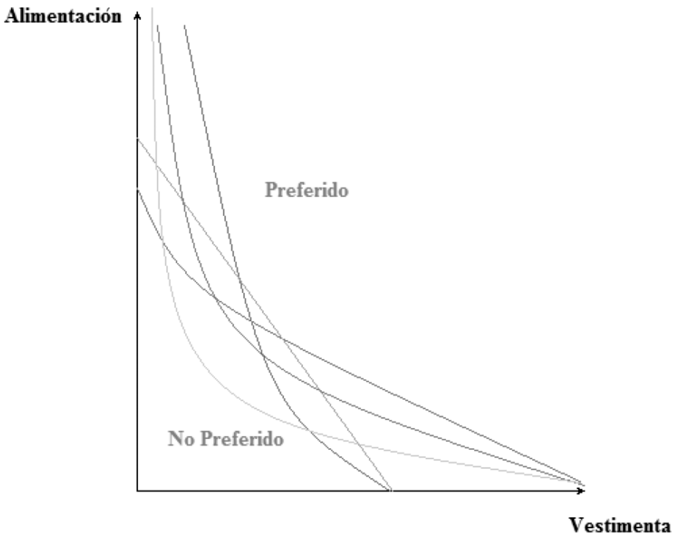


Figura 6

a la beneficencia (y sentirme bien por ello), compartirlo con familiares o amigos (y sentirme bien por ello). Lo que sí es cierto es que es posible que nos saciemos en alguna dimensión en particular y no deseemos consumir más bienes de esa dimensión, pero siempre existirá alguna dimensión en la que todavía no estemos saciados, y mientras esa dimensión en la que queremos consumir más exista, podremos dedicar esfuerzos y recursos a satisfacer ese deseo. En caso contrario (lo cual puede ocurrir), habremos alcanzado un punto de realización completo (al menos en las dimensiones consideradas) y cualquier alteración de ese estado (en cualquier dirección) sería en detrimento de nuestro bienestar (o realización). Se podría argumentar que es posible que algunos ermitaños, gurús, chamanes y asimilables puedan haber alcanzado dicho estado de realización y es por ello que nada necesitan, e incluso se aíslan para no ser alterados de dicho estado. La mayoría de los mortales seguimos insatisfechos, en al menos alguna dimensión.

Esto es notorio si comparamos nuestra situación actual con lo que ha sido la situación de la humanidad a lo largo de la historia. Alcanzamos ahora mismo niveles de satisfacción en toda una serie de dimensiones que eran completamente impensables en otros momentos de la historia.

Nuestras posibilidades de consumo son más variadas y accedemos a bienes antes no disponibles, pero además se observan mejoras sanitarias, educacionales, políticas, de entretenimiento, transporte, acceso a información, entre muchas otras. El rubro donde hemos empeorado notoriamente es en la calidad ambiental, pero en casi todos los demás rubros se alcanzan niveles de satisfacción muchísimo más altos de los que tuvieron las generaciones previas, sin hablar de la situación del mundo hace tan solo unos 200 o 300 años atrás (y cualquier época anterior a esa). Sin embargo, no parece que estemos satisfechos ni de manera personal ni de manera colectiva, y reclamamos aún más posibilidades y opciones de consumo, y más mejoras en prácticamente todos los rubros. Si estuviera a nuestro alcance construiríamos un mundo adaptado a nuestras preferencias (lo cual posiblemente explica el éxito de diversas plataformas de juegos que permiten generar vidas y mundos virtuales a nuestro gusto, personalizados).

Ahora bien, podemos querer más (y mejor), pero tenemos limitaciones, tenemos que considerar que es lo que podemos alcanzar, lo que podemos obtener, y dentro de aquello que podemos, escoger aquello que más deseamos. Esto es una descripción del entorno y sus limitaciones. La realidad nos limita en aquello que podemos conseguir o alcanzar. Uno de los grandes esfuerzos de la humanidad ha consistido justamente en cambiar o alterar este entorno a nuestro favor, para poder alcanzar más cosas (herramientas, el fuego, uso de metales, agricultura, domesticación de animales, construcción y arquitectura) y reducir la dependencia de agentes externos, así como reducir los posibles efectos negativos sobre nuestras vidas.

Mover la frontera de posibilidades es, no obstante, un proceso lento, y de momento nos limitaremos a considerar las limitaciones que nos afectan. Podemos hablar de limitaciones temporales (el tiempo es limitado), físicas (las limitaciones de nuestro cuerpo), sociales (las limitaciones de la sociedad), pero nos interesa ahora mismo la limitación económica.

En el mundo moderno y en la sociedad que hemos construido, la principal (pero no única) limitación económica que afecta al consumidor consiste en la limitación de nuestra capacidad adquisitiva. Solo vamos a poder comprar aquello que podemos pagar[2]. A esta restricción la conocemos como restricción presupuestaria.

[2] Al aplicar este supuesto estamos eliminando la posibilidad del robo (consumir sin pagar), lo que incluye también excluir el desfalco, el impago de deudas y acciones similares.

Si disponemos de una cantidad monetaria, que llamaremos w; ésta tiene que cubrir cualquier posible consumo que pensemos realizar. Matemáticamente:

$$w \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \;\; con \;\; x_i \geq 0 \; \forall i$$

Donde x_i son las cantidades consumidas (no negativas) de cada bien (de los n disponibles) y p_i el precio correspondiente[3].

Si se trata de solo dos bienes (para poder realizar un gráfico) y los llamamos x y y, tenemos:

$$w \geq p_x x + p_y y \;\; con \;\; x \geq 0 \; y \; \geq 0$$

Esto genera gráficamente un triángulo de posibilidades de consumo. El triángulo está definido por los ejes (como consumos cero de x o de y) y los puntos máximos que podemos consumir de cada bien, esto es, la cantidad máxima que podemos consumir de x (si no consumimos nada de y) $x = w/p_x$ y la cantidad máxima que podemos consumir de y (si no consumimos nada de x) $y = w/p_y$, la línea que une estos dos puntos (las combinaciones de consumos máximos posibles), definida por $y = w/p_y - (p_x/p_y)x$ que se obtiene despejando de la restricción cuando se cumple con igualdad. Esta línea cruza el eje en y máxima y tiene como pendiente, en valor absoluto, p_x/p_y (figura 7).

Podemos ver que los elementos principales que definen esta restricción triangular son el origen (siempre es posible el no consumir nada, no debería ser óptimo, pero es posible), los consumos máximos $y = w/p_y$ y $x = w/p_x$, y la pendiente p_x/p_y.

Esto es ilustrativo para observar lo siguiente, ninguno de estos puntos está generado por alguna variable aislada. Si bien, los componentes son los precios y la cantidad de dinero disponible, ninguna de ellas es relevante por sí sola. Las dos primeras: $(w/p_y, w/p_x)$ nos expresan el ingreso relativo. No importa la cantidad de dinero que tengamos disponible, sino lo que se pueda comprar con ese dinero. Tengo que considerar los diferentes precios para determinar la capacidad adquisitiva. La tercera: (p_x/p_y) son los precios relativos (solo hay dos bienes, eso genera un único precio relativo, pero si fueran tres bienes se generarían tres precios relativos, y con cuatro bienes se generarían seis precios relativos). Las

[3]Esta función, de manera implícita, está tomando los precios como algo independiente de las cantidades. Esto presupone que no hay precios al mayoreo, descuentos por rappel y similares. Éstos se pueden incorporar, complicando la función, pero no de manera severa.

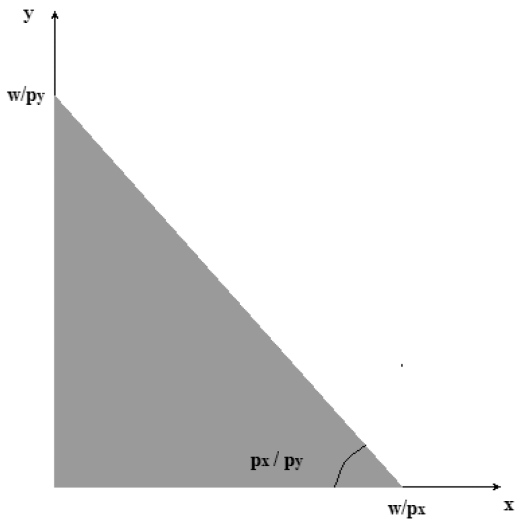


Figura 7

cosas son caras o baratas no por su precio, sino en función de su relación con el precio del resto de bienes disponibles. Esto es importante y se relaciona con un elemento importante en las comparativas internacionales utilizadas en macroeconomía, la paridad de poder adquisitivo. Como ejemplo, no es lo mismo tener cierta cantidad de dinero en México, que esa misma cantidad de dinero en Noruega (posiblemente el país más caro del mundo). Pero, incluso, dentro de México, según la zona donde uno viva, el dinero rinde más o rinde menos.

Una vez que tenemos esta restricción, el individuo debería decidir su consumo óptimo, teniendo en cuenta sus preferencias, su ingreso y el nivel de precios, o sea, de lo que se puede, lo que se prefiere. Para ello, buscaremos la curva de indiferencia más alejada del origen, que aun toque la restricción presupuestaria (figura 8).

Para este caso expuesto gráficamente, para este individuo, dadas estas preferencias (representadas en las curvas de indiferencia) y su realidad económica, expresada en la restricción presupuestaria. Su elección óptima es el punto D. El punto C sería mejor, está en una curva de indiferencia hacia arriba y a la derecha, o sea, preferida a la curva donde se encuentra el punto D, pero es inalcanzable, encontrándose el punto

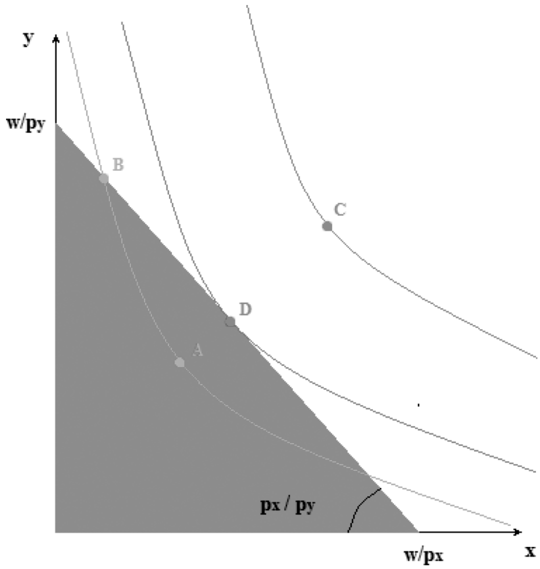


Figura 8

C fuera del conjunto de posibilidades. Los puntos A y B son alcanzables, pueden comprarse, pero no serían óptimos, pues hay consumos por encima y a la derecha de la curva de indiferencia donde se encuentran, que por lo tanto son preferibles, pero que también se encuentran en las posibilidades de consumo. Si vemos la curva de indiferencia donde se encuentra el punto D, ningún punto del conjunto de posibilidades está por encima o a la derecha de la curva, esto es, no existe ningún consumo posible que sea preferido a alguno que se encuentre en dicha curva, y en este caso, solo un punto de la curva (el punto D) se encuentra en el conjunto de posibilidades. Dadas estas preferencias, el punto D representa el consumo óptimo de esta persona. Si se trata de otra persona (que tiene otras preferencias) su elección será diferente (figura 9).

En este caso, el individuo con preferencias representadas en las curvas de indiferencia más inclinadas escogerá el consumo representado en el punto A, mientras que el individuo con preferencias representadas en las curvas de indiferencia más planas escogerá el consumo representado en el punto B. No es necesario consumir de ambos bienes (dependerá de las preferencias de cada uno), y no es preciso que exista tangencia entre la

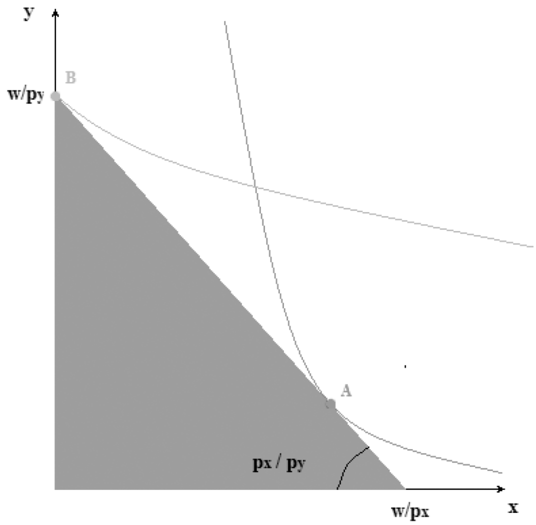


Figura 9

curva de indiferencia y la restricción presupuestaria (si bien suele ser el caso en muchas ocasiones). El punto B se conoce matemáticamente como solución de esquina, ya que el individuo quizá desearía hacer consumos negativos de x para poder consumir más, pero no le está permitido, ya que se saldría del conjunto de posibilidades.

Una vez establecida esta elección, ésta se vincula con los deseos del agente económico, expresados en sus curvas de indiferencia, y las posibilidades del agente económico, expresadas en la restricción.

Lo siguiente es ver cómo cambia la decisión si cambian los elementos que determinan el entorno económico. Las preferencias también pueden cambiar, pero en la práctica las preferencias cambian muy lentamente (no cambiamos de gustos, deseos ni necesidades con facilidad), mientras que el entorno cambia muy rápido. Además, desde un punto de vista de la teoría económica, si un individuo cambia sus preferencias, técnicamente es otro individuo. Esto también ocurre en la realidad, si una persona cambia mucho (lo que se refleja en los cambios que realiza al tomar decisiones) solemos expresarlo como “ya no te conozco”, “ya no eres el mismo”, “cambiaste”, “¿quién eres tú y qué has hecho con **?”, que dan a entender que si una persona cambia en sus preferencias, es como si fuera otra persona, diferente a la que era antes. Entonces, de manera principal, analizaremos el cambio en la decisión óptima (en este caso de consumo), si cambia alguno de los precios, si cambia el nivel de ingreso o si cambia todo, pero normalmente desglosando los efectos en los cambios individuales.

De esta manera podemos determinar, por ejemplo, la demanda del individuo (relación entre el precio de un bien y la cantidad consumida).

Este mismo tipo de modelación es extensible a otras decisiones, o incluso extensible a cuestiones discretas (no continuas), aplicando la misma lógica, y analizar decisiones laborales, de localización (dónde vivir) o incluso de voto político. Se trata, simplemente, de describir correctamente las opciones posibles (la restricción, el entorno) y determinar las preferencias del individuo.

En la práctica no podremos ver las curvas de indiferencia, pero las acciones del individuo suelen ser completamente observables, así que podemos ver el resultado de la interacción entre el conjunto de posibilidades y las preferencias del individuo, de forma tal que la opción que toma el individuo debe ser su preferida, dada el conjunto de posibilidades, que también suele ser observable. Teniendo en cuenta, entonces, el conjunto de alternativas de las que dispone el individuo y su acción, se obtiene información sobre sus preferencias (lo que se conoce como *preferencias reveladas*), si observamos suficientes decisiones del mismo individuo en situaciones similares (o incluso bastante diferentes) podremos ir construyendo una buena aproximación de sus preferencias (lo que se consigue con técnicas econométricas). Nuestras acciones revelan nuestra naturaleza (nuestras preferencias). Esto es visible en el hecho de que si convivimos mucho con otras personas conoceremos sus gustos y podremos anticipar sus decisiones. También es notorio en el uso de la información en Internet, donde complejos algoritmos son capaces de realizar sugerencias (por lo general muy acertadas) basándose en la información de nuestras búsquedas, compras, visualizaciones, etcétera, realizadas con anterioridad.

3 Conclusión

El objetivo de este capítulo fue introducir los principios básicos de la microeconomía sin dar una introducción completa de las partes que la forman. Elegimos enfocarnos en la teoría del consumidor, dejando de lado la teoría del productor (cuyas isocuantas se analizan de forma “paralela” a las curvas de indiferencia). Asimismo, la microeconomía incluye muchas ramas que por restricciones de espacio no podemos incluir. Falta, por ejemplo, ver fallas de mercado, como son externalidades y bienes públicos, los cuales justifican la intervención del gobierno en la economía. Falta ver Teoría de Juegos, la cual analiza la interacción entre diferentes agentes económicos cuando sus acciones afectan el pago que obtienen los otros agentes. Asimismo, no vimos el Equilibrio General, el cual estudia la economía de manera integral, analizando la interrelación de los diferentes mercados y los efectos que tienen entre sí. No vimos elección bajo incertidumbre, en donde se analiza cómo toman decisiones los individuos cuando hay algún tipo de incertidumbre. También están los modelos de Principal-Agente, donde se analizan los contratos óptimos entre un empleador (Principal) y un empleado (Agente) cuando existe información asimétrica, esto es, que el Agente tiene una mayor información del mercado (o de sí mismo) que el Principal. Falta por ver los diferentes modelos de competencia que analizan cómo compiten las empresas al variar la estructura del mercado (varía el número de empresas, mercados en los que las empresas pueden decidir su cantidad producida contra mercados en los que pueden decidir su precio, etcétera). Y faltan muchas otras ramas en la enorme disciplina de la microeconomía.

Esperamos retomar algunas de estas ramas en trabajos futuros y esperamos que la introducción que presentamos en este capítulo sea suficiente para dar un conocimiento básico de lo que es la microeconomía e incrementar el interés de los lectores por conocer más de esta disciplina.

4 Lecturas recomendadas

Algunas referencias básicas:

- Pindyck, R. S. y Rubinfeld D. L. (1998). *Microeconomía*. USA: Prentice Hall.
- Mankiw, G. (1998). *Principios de economía*. Madrid: McGraw Hill.
- Varian, H. R. (2010). *Intermediate Microeconomics, A Modern Approach*. USA: W. W. Norton (Eighth Edition).

  Algunas referencias para profundizar en la técnica:
- Mas Colell, A., M. D. Whinston y J. Green (1995). *Microeconomic Theory*. England: Oxford University Press.
- Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis*. USA: W. W. Norton (Third Edition).
- Kreps, David A. (2013). *Microeconomics Foundations I: Choice and Competitive Markets*. USA: Princeton University Press.

Macroeconomía

Fernando García Barragán

B. Édgar Cruz González

Coralia A. Quintero Rojas

1 Introducción

En este capítulo describiremos los conocimientos básicos necesarios para poder entender el campo de la macroeconomía. A nivel etimológico, la macroeconomía proviene de las palabras griegas *makro* que quiere decir "grande", *oikos*, "casa" y *nomos*, "el estudio de". La macroeconomía es una parte de la ciencia económica que trata del estudio de los agregados económicos. A diferencia de la microeconomía que estudia las decisiones individuales de los agentes económicos, en la macroeconomía se estudian todas esas decisiones desde un punto global. Los principales agregados económicos a estudiar en este capítulo están relacionados con las decisiones de producción y consumo de las empresas y los individuos, así como con cuestiones del mercado de trabajo que repercuten en la producción: producto interno bruto, inflación y desempleo.

Dentro de los orígenes del estudio macroeconómico nos podemos remontar a Keynes (1936), quien se refiere a la gran depresión de 1930 como un fenómeno económico en el cual la oferta es insuficiente con respecto a la demanda. Este es un buen ejemplo sobre modelación básica con la oferta y la demanda como principales conceptos de la actividad económica. La demanda, por un lado, determinada por las decisiones de compra de los consumidores según los precios; y la oferta, por el otro, resultante de la decisión de los productores (o vendedores), acerca de sus intenciones de venta con relación a los precios. Otro ejemplo es el de Hicks (1937), quien utiliza el modelo IS-LM [1] que muestra la rela-

[1] IS representa la curva de puntos de equilibrio entre ahorro e inversión y LM la curva de equilibrio entre liquidez y suministro de dinero.

ción entre los mercados de bienes (IS) y de dinero (LM) para explicar las dinámicas de demanda, oferta y precios.

La popularidad de las teorías keynesianas duró varias décadas. Durante todo este periodo se desarrollaron modelos macroeconómicos para realizar un análisis sobre las políticas a implementar. Fue después cuando las críticas llegaron, destacándose las de Milton Friedman y Robert Lucas. El primero cuestionaba la conclusión que relacionaba negativamente la inflación y el desempleo. Y el segundo aseguraba que en el proceso de decisiones de los agentes económicos se debía tomar en cuenta la formación de expectativas. No obstante los debates y evolución que como toda ciencia social enfrenta, la macroeconomía estudia tres fenómenos básicos, mismos que serán presentados a continuación: la producción y el crecimiento económico, la inflación y el desempleo. Asimismo, exploraremos diferentes aplicaciones y enfoques teóricos que buscan explicar dichos fenómenos económicos. Finalmente, cada tema se ilustrará con datos trimestrales para México, Estados Unidos y Canadá durante el periodo 2010-2017.

1.1 Producto interno bruto

El producto interno bruto (PIB) es el valor de mercado agregado de todos los bienes y servicios finales producidos en una demarcación geográfica (estado, país, región, etcétera), en un periodo determinado (anual, cuatrimestral, semestral, etcétera). El motivo de contabilizar solo productos y servicios finales es para evitar la doble contabilización, esto es, no valuar los bienes intermedios producidos que podrían ser utilizados como insumos.

La contabilización del PIB no distingue nacionalidades de productores ni consumidores, este solo representa la producción dentro de un área, generalmente un país. Sin embargo, también existe otra medida que es el producto nacional bruto (PNB), el cual toma en cuenta el PIB y le añade las rentas de los connacionales obtenidas en el extranjero y elimina las rentas obtenidas por extranjeros dentro del país en cual el PIB se acota.

Existen tres formas de contabilizar el PIB: mediante el gasto en bienes y servicios finales por los consumidores, con el valor de la producción final de todos los bienes y servicios finales de la economía, y tomando en cuenta los ingresos de los agentes económicos.

La forma más simple para expresar matemáticamente el PIB con la medición del gasto es:

$$PIB = C + G + I + XN, \tag{1}$$

donde *C* es el total del gasto en consumo de los hogares, *G* es el gasto hecho por el gobierno, *I* es el total de inversión tanto pública como privada y *XN* son las exportaciones netas (exportaciones menos importaciones). Las exportaciones netas también son conocidas como la balanza comercial que tiene un país (cuando se tiene intercambio comercial con otros países).

Para la realizar la medición del PIB bajo el segundo enfoque, debemos de contabilizar el valor agregado del total de producción de bienes y servicios. El valor agregado se refiere al valor del bien final descontando el valor de los insumos que se utilizaron para producirlo. Por ejemplo, si para producir chocolates solo se necesita cacao, al valor del chocolate se le descuenta el valor del cacao y así lo restante es el valor agregado en la producción de chocolates.

Por último, la tercera alternativa para medir el PIB, por medio del ingreso, implica identificar qué agentes reciben ingresos en la economía. Los hogares reciben un salario; las empresas obtienen ingresos por medio de sus ventas; algunos agentes dueños de capital, como maquinaria, reciben ingresos por la renta de esta maquinaria; además, el gobierno tiene ingresos por los impuestos que carga a los agentes. La suma de todos estos ingresos da como total el PIB.

La figura 1 muestra el PIB para las tres economías ubicadas en América del Norte: EEUU, México y Canadá. En esta figura podemos notar el uso del PIB per cápita, esto es, el total del PIB de cada nación dividida entre el número de sus habitantes. Esta medida es útil para imaginarnos cuánto de ese total del PIB le correspondería, en promedio, a cada ciudadano de estos países y así poder hacer comparables la medida del PIB entre naciones. Es notoria la diferencia entre México, Estados Unidos y Canadá, en los cuales los niveles del PIB per cápita son mucho mayores.

1.2 Inflación

Hasta ahora, hemos definido al PIB como el valor de todos los bienes y servicios finales ofrecidos y consumidos en una economía, pero, ¿qué le da ese valor? Este valor puede ser simplemente el precio que se paga por dicho bien y servicio, entonces, el PIB en cuestión estaría expresado en

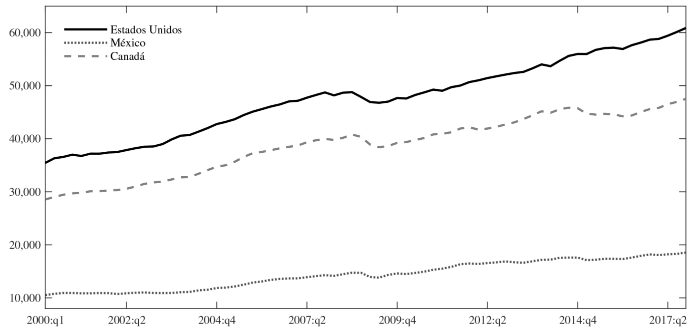


Figura 1: Producto interno bruto per cápita de Estados Unidos, México y Canadá. Valores trimestrales expresados en dólares. *Fuente*: OECD Quarterly National Accounts Statistics.

términos nominales. Otra opción es expresar el PIB en términos reales. Esto es, ajustando su valor al incremento o reducción de los precios. El fenómeno de incremento en los precios está definido como inflación, por el otro lado, una reducción se define como deflación.

Resulta bastante intuitivo el efecto de alzas en los precios sobre los hogares. Ante procesos inflacionarios, el salario o ingreso de los hogares se ve afectado negativamente, ya que su poder adquisitivo disminuye. Esto se traduce al mismo tiempo en una reducción en la demanda, ya que los hogares tienen menos capacidad de compra de bienes y servicios. Por el lado de la oferta tenemos una mezcla de efectos. Primero podríamos decir que precios más altos podrían incentivar a ciertos vendedores a ingresar a un sector para vender dichos bienes o servicios; sin embargo, ellos también pueden notar la baja en la demanda de sus bienes, y sus incentivos se ven reducidos. En suma, si el efecto negativo sobre la demanda es bastante pronunciado, entonces la cantidad ofrecida de bienes y servicios se vería reducida.

En la figura 2 podemos revisar las tasas de inflación para los mismos países antes analizados. Podemos notar que para los tres países, la inflación no ha sobrepasado el 3 %. Es común para los tres países que se busque que la variación en precios no sea muy grande, sino que más bien se mantenga en los niveles mas bajos posibles. En general, existen autoridades monetarias con un mandato constitucional que toma medidas o políticas monetarias para mantener la inflación a niveles comúnmente aceptables.

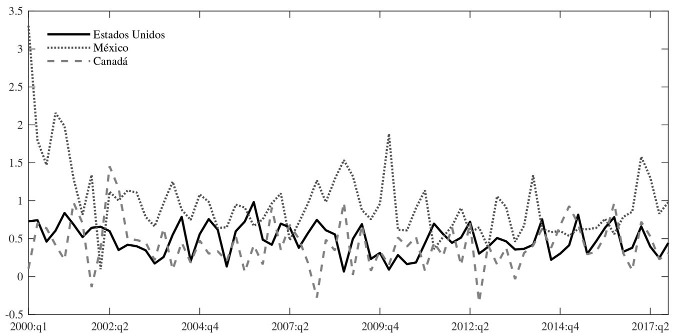


Figura 2: Inflación en Estados Unidos, México y Canadá. Valores trimestrales expresados en porcentajes. *Fuente*: FRED Federal Reserve of St Louis, serie: CPI growth.

1.3 Desempleo

Finalmente, el desempleo es un fenómeno que también está estrechamente relacionado con la actividad económica, pues cuando existe desempleo, la producción es menor a lo que potencialmente se podría obtener. El indicador más usual es la tasa de desempleo, que mide la proporción de personas que están en edad de trabajar que no encuentran empleo. Esto es, para calcularlo, se debe primero separar a la población que tiene la edad legal mínima para trabajar (PET), entre los individuos que participan en el mercado laboral y los que no. El primer grupo conforma la fuerza laboral o población económicamente activa (PEA), ya que se refiere a los individuos que están empleados, o bien, a aquellos que no cuentan con un empleo pero buscan activamente uno y están disponibles para trabajar. Por el contrario, el segundo grupo consta de la población inactiva, es decir, de los individuos que aún teniendo edad para trabajar no tienen empleo, pero tampoco buscan uno.

La figura 3 nos muestra las tasas de desempleo de los mismos países antes estudiados. Puede observarse que un poco después de 2007-2008, las tasas de desempleo son más altas para Estados Unidos. La crisis financiera tuvo un impacto considerable en Estados Unidos y parece menor para México y Canadá, siendo este ultimo el más estable en este rubro.

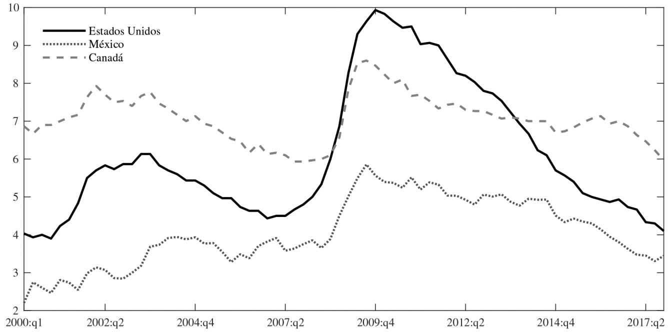


Figura 3: Desempleo en Estados Unidos, México y Canadá. Valores trimestrales expresados en porcentajes. *Fuente*: OECD Statistics 2018, serie: harmonised unemployment rate.

Las razones para que exista desempleo son varias; por ejemplo, las personas que buscan trabajar tardan tiempo en encontrar aquel empleo que satisface sus gustos y que además se adapta a sus capacidades; o están de tránsito entre un empleo y otro, y entretanto están desempleados. Otro ejemplo es el desempleo estacional que, como su nombre lo sugiere, se relaciona con actividades que solo pueden ejercerse en ciertas épocas del año (por ejemplo, los Santa Claus en los centros comerciales o los servicios turísticos en las vacaciones). En una sección posterior se verán con más detalle las causas y explicaciones teóricas del desempleo.

2 Introducción al crecimiento económico

Una noticia recurrente es la constante preocupación de los gobiernos por promover el crecimiento económico en sus países. Esta preocupación consiste en identificar y fomentar los factores políticos, sociales y económicos que generen un incremento continuo en el volumen de los bienes y servicios que son producidos en el país año tras año. La importancia que tiene el crecimiento económico sostenido para los gobiernos radica en las significativas implicaciones que tienen las pequeñas variaciones en la tasa de crecimiento sobre el nivel de vida de la población.

Para reflexionar sobre la importancia del crecimiento económico en los estándares de vida, observemos la evolución del PIB real per cápita de los Estados Unidos de América durante los últimos 150 años. La figura 4 muestra el valor en dólares del volumen de bienes y servicios, que le correspondería a cada ciudadano, producidos en la economía estadounidense cada año desde 1867. Como puede apreciarse, el PIB real per cápita ha aumentado sostenidamente durante el periodo (línea negra de la figura). En 1867, el valor de la producción per cápita fue de 3,700 dólares, mientras que el valor de la producción en 2017 fue de aproximadamente de 53,000 dólares. Es decir, el nivel de ingreso de un ciudadano americano promedio se multiplicó en aproximadamente 14 veces en 150 años. Este incremento en el nivel de renta per cápita conlleva un aumento significativo en los niveles consumo, ahorro e inversión, los cuales se materializan en mayores niveles de vida.[2] Más importante aún, la figura 4 también muestra la importancia del impacto de las pequeñas diferencias en la tasa de crecimiento sobre el nivel de vida.

Durante el periodo 1867-2016, el PIB real estadounidense creció a una tasa anual promedio de 1.8 %. La línea gris muestra el nivel de PIB estadounidense asumiendo que la tasa de crecimiento anual promedio es de 1 %, una diferencia de solo 0.8 puntos porcentuales. Bajo este escenario hipotético, el ingreso per cápita se habría multiplicado en 4 en lugar de 14 veces respecto al nivel de ingreso inicial como realmente sucedió. Es decir, una diferencia de solo 0.8 puntos porcentuales en la tasa de crecimiento del PIB hubiese implicado una gran pérdida de nivel de ingreso para el ciudadano promedio en 2016 y, de modo consecuente, una reducción significativa en el nivel de vida que actualmente dispone. Con base en este simple análisis, podemos entender la relevancia que el crecimiento económico tiene para el bienestar social.

Hasta este punto, hemos hecho uso del concepto de *crecimiento económico* de forma genérica para referirnos al incremento del volumen de los bienes y servicios producidos en una economía en un periodo dado.

[2] En este capítulo, nos referimos a niveles de vida como el nivel de riqueza que proporcionan las condiciones materiales para satisfacer las necesidades básicas de los individuos y facilitar un grado de confort en una sociedad y periodo de tiempo determinado. En este punto cabe señalar las diferencias entre *crecimiento* y *desarrollo económico*. El primer concepto está relacionado a la mejor de las condiciones materiales (bienestar material) mientras que segundo concepto está relacionado con el proceso de mejora en las condiciones sociales y políticas, además de las condiciones materiales, que permiten a las personas expandir sus capacidades en una sociedad. Ver Sen. (2000).

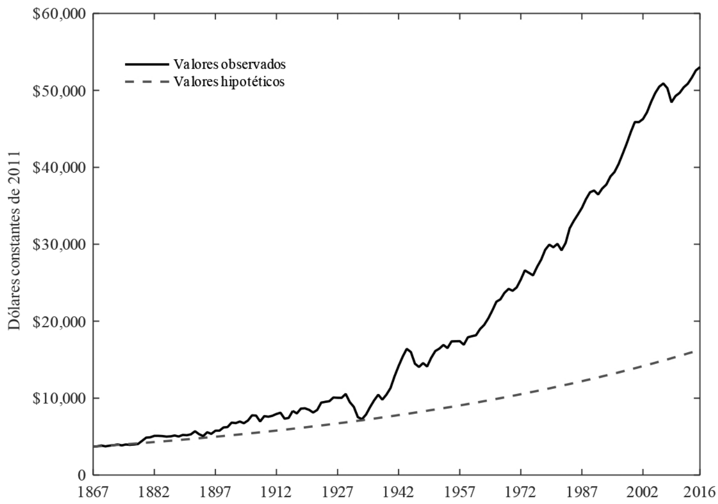


Figura 4: PIB per cápita de Estado Unidos (1867-2016). La línea sólida muestra los valores del PIB per cápita. La línea de puntos muestra los valores hipotéticos generados bajo el supuesto de crecimiento anual promedio de 1 %. *Fuente*: Cálculos de los autores basados en datos en Maddison Project Database, version 2018.

En la siguiente sección proporcionamos una definición precisa del crecimiento económico, así como de un instrumento gráfico para el análisis de la evolución de la tasa de crecimiento.

2.1 La tasa de crecimiento del PIB

La figura 4 muestra que el nivel de PIB per cápita tiende a variar año tras año. La variación anual del PIB puede expresarse como una variación proporcional al nivel del PIB de un año en particular. Sea y_t el nivel del ingreso per cápita. Entonces, la variación del ingreso per cápita entre un año a otro está dada por:

$$y_{t+1} - y_t = g * y_t,$$

donde y_{t+1} es el ingreso per cápita en años siguientes y g es el factor de proporcionalidad. Al dividir ambos lados de esta ecuación por el nivel de ingreso del año pasado, y_t, podemos encontrar reescribir esta relación como:

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = g,$$

donde el lado izquierdo de la ecuación es el cambio porcentual del ingreso per cápita. Esta ecuación expresa que el cambio porcentual es constante, y este cambio porcentual es lo que denominamos tasa de crecimiento del PIB. Con base en la ecuación anterior, podemos encontrar que el nivel de ingreso per cápita en el periodo t+1 es igual a:

$$y_{t+1} = (1 + g)y_t. \tag{2}$$

Esta expresión es de particular utilidad dado que esta ecuación determina el nivel de ingreso per cápita en el año siguiente si conocemos el valor del ingreso en el año anterior (t) y la tasa de crecimiento. En nuestro ejemplo hipotético en la figura 4, hemos asumido que la tasa de crecimiento fue igual a 1 % y que el PIB per cápita es igual al nivel observado en 1867 (3,700 dólares). Por tanto, si el año inicial es 1867 ($t = 0$), tenemos que $y_0 = 3,700$ y $g = 0.01$ (la tasa de crecimiento). Podemos calcular cuál sería el nivel de ingreso en el año 1868 ($t = 1$) mediante la ecuación (2) de la siguiente forma:

$$y_1 = (1 + g)y_0 = (1.01)\,(3,700) = 3,737.$$

Bajo estos supuestos, ¿cuál sería el ingreso per cápita dentro de 150 años? Para averiguarlo, observa que en el valor PIB per cápita en 1869 ($t = 2$) es calculado usando la ecuación (2) y el resultado anterior. Es decir,

$$y_2 = (1 + g)y_1,$$

sustituyendo y_1, tenemos:

$$y_2 = (1 + g)(1 + g)y_0 = (1 + g)^2 y_0,$$

y usando los valores asumidos, observamos que en 1868 ($t = 2$) el nivel del PIB per cápita es aproximadamente igual a:

$$y_2 = (1.01)^2\,(\$3,700) \approx \$3,774.$$

Para calcular el PIB de 1869 ($t = 3$), usamos de nueva cuenta la ecuación (2) y el resultado anterior, para obtener

$$y_3 = (1 + g)(1 + g)(1 + g)y_0 = (1 + g)^3 y_0.$$

En este punto, comienza a observarse un patrón. El nivel del PIB en el año t es igual al producto entre el valor del PIB en el año inicial y $(1+g)^t$. Por tanto, el nivel de PIB per cápita que observaríamos en 150 años ($t = 150$) está determinado por

$$y_{150} = (1.01)^{150}\,(\$3,700) = \$16,296.$$

Este ejemplo ilustra la regla de un proceso que sigue un crecimiento constante. Es particular, la regla de crecimiento constante está dada por:

$$y_t = y_0(1+g)^t. \tag{3}$$

La ecuación (3) nos permite calcular el nivel de PIB per cápita en cualquier año t.

2.2 Análisis gráfico y cómputo de la tasa de crecimiento

¿Qué tan buena es la regla de crecimiento constante para describir el crecimiento económico observado en los Estado Unidos? Observando la evolución del PIB per cápita en la figura 4, no es posible advertir la tasa de crecimiento y, consecuentemente, no es posible determinar si la tasa de crecimiento promedio es constante o varía durante el periodo 1867-2016. Un método gráfico que permite analizar los cambios en la tasa de crecimiento es el gráfico basado en escala de proporción (*ratio scale* o *logarithmic scale*).

Para mostrar la construcción de este gráfico, primero nos preguntamos cuántos años deben transcurrir para que el PIB duplique su valor. Esto es, si la economía inicia con el nivel de ingreso y_0, nos preguntamos cuántos años deben transcurrir para que $y_t = 2y_0$. Sabemos por la ecuación (3) que el nivel de PIB en el año t es $y_t = y_0(1+g)^t$. Por tanto, el PIB per cápita será el doble cuando:

$$y_t = 2y_0 = y_0(1+g)^t,$$

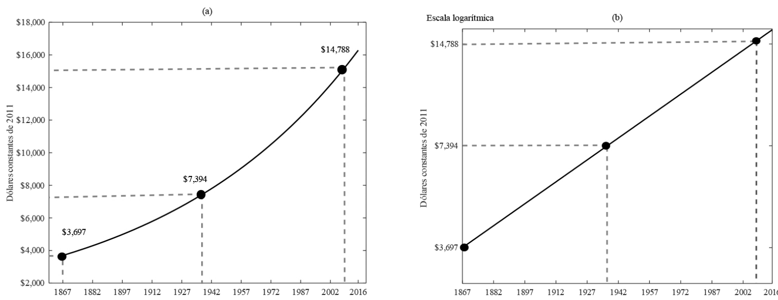
que implica:

$$2 = (1+g)^t.$$

Es decir, si el ingreso per cápita crece a la tasa g, entonces el número de años necesarios para duplicar el ingreso es el valor de t tal que satisface la ecuación anterior. La solución de esta ecuación esta dada por[3]

$$t \approx \frac{0.70}{g}. \tag{4}$$

Usando la información sobre la economía hipotética, tenemos que la tasa de crecimiento promedio anual es de 1 % y, por tanto, deben transcurrir aproximadamente setenta años para que el PIB o ingreso per cápita duplique su volumen. Este resultado se muestra en la figura (a) en el cuadro 1.



Cuadro 1: PIB per cápita de una economía hipotética. La figura (a) muestra el nivel del PIB per cápita de una economía que crece a una tasa anual promedio de 1 %. La figura (b) muestra el nivel del PIB per cápita en los periodos en los cuales el nivel del PIB se duplica. *Fuente*: Cálculos de los autores.

Como puede observarse, el PIB duplica su tamaño en los años 1937 y 2007, transcurridos setenta años. Ahora considere qué sucede si "aplastamos" el eje vertical del cuadro para mostrar los valores en los cuales el PIB per cápita se duplica y que estos puntos tengan la misma distancia entre sí. Es decir, etiquetar en el eje vertical valores tales que cada punto sea el doble del anterior. El resultado de "aplastar" el eje vertical se muestra en la figura (b) en el cuadro 1. Note que cada periodo de setenta años, el valor del PIB per cápita es el doble, tal como predice la ecuación (4). De este resultado podemos deducir que para una variable

[3]Para resolver esta ecuación es necesario tomar el logarítmo natural en ambos lados de la ecuación para obtener:

$$\ln 2 = t \ln (1+g),$$

observe que $\ln 2 \approx 0.70$ y $\ln(1+g) \approx g$. Finalmente, resolviendo para t obtenemos el resultado en la ecuación (4).

que crece a una tasa constante su gráfico, en escala logarítmica, es una línea recta.

Este tipo de gráficos nos permiten analizar directamente los cambios en la tasa de crecimiento de una variable. En el caso del PIB per cápita, si el PIB crece a una tasa constante, entonces los valores observados del PIB deben encontrarse sobre una línea recta en un gráfico en escala logarítmica. Por lo contrario, si la tasa de crecimiento crece (disminuye) debemos observar que la pendiente de la recta aumenta (disminuye) entre dos puntos.

La figura 5 muestra la evolución del PIB per cápita de la economía estadounidense en escala logarítmica. Como puede apreciarse, los datos sobre PIB se encuentran distribuidos muy cerca de la línea recta que muestra una pendiente constante igual a 0.018 año tras año. Dado que no observamos cambios en la pendiente de la recta, el valor de la pendiente nos aproxima al valor de la tasa de crecimiento anual promedio que registró la economía estadounidense en periodo 1867-2016, es decir, un 1.8 % anual.

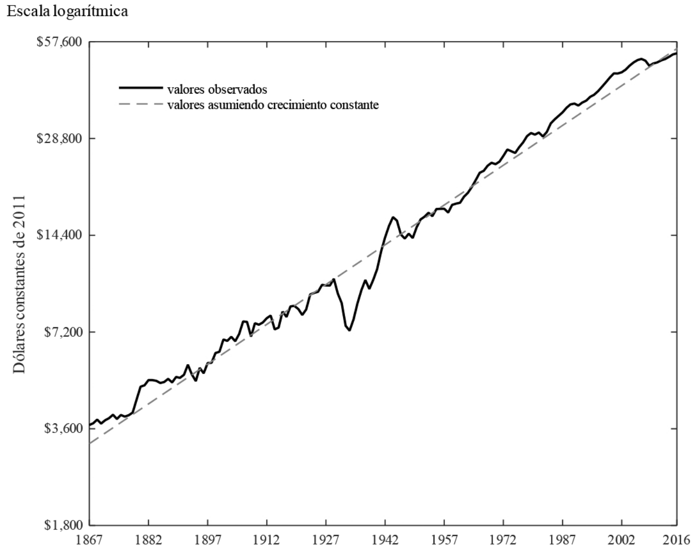


Figura 5: PIB per cápita de Estados Unidos (1867-2016), escala logarítmica. La línea solida muestra los valores observados. La línea de puntos muestra los valores generados bajo el supuesto de una tasa de crecimiento constante. *Fuente*: Cálculos de los autores basados en datos en Maddison Project Database.

Podemos confirmar este resultado calculando la tasa de crecimiento anual promedio mediante la ecuación (5). En particular, debemos resolver la ecuación para encontrar el valor de la tasa de crecimiento, g, que satisface la igualdad. Despejando g, obtenemos que la tasa de crecimiento anual promedio es igual a:

$$g = \left(\frac{y_t}{y_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1. \tag{5}$$

Sustituyendo los datos del PIB per cápita estadounidense en la ecuación (5), obtenemos el valor de la tasa de crecimiento anual promedio durante el periodo es:

$$g = \left(\frac{53,015}{3,697}\right)^{\frac{1}{150}} - 1 = 0.018.$$

Este resultado nos confirma que el crecimiento de la economía estadounidense es caracterizado por un crecimiento sostenido (sin cambios en la tasa de crecimiento promedio).

2.3 Caso de estudio: la evolución del PIB en la economía mexicana

En esta sección aplicamos el método gráfico para analizar la evolución de la tasa de crecimiento del PIB per cápita de la economía mexicana durante el periodo 1895-2016. La figura 6 muestra el PIB per cápita en escala logarítmica. Una simple exploración de los datos nos indica que la tasa de crecimiento de la economía ha variado a lo largo de ciento veintiún años. En particular, podemos distinguir tres regímenes durante los cuales la economía mexicana creció a diferentes velocidades. Durante el primer régimen (1895-1928), la economía mexicana creció a una tasa anual promedio igual a 1.22 %. En el segundo régimen (1929-1981), el PIB per cápita creció a una tasa promedio de 3.14 %, mientras que durante el tercer régimen (1982-2016) la economía redujo su tasa de crecimiento a un promedio anual a 1.18 %.[4]

Para dimensionar los efectos de las variaciones en la tasa de crecimiento del PIB y las implicaciones sobre el nivel de vida, realizamos un par de experimentos. El primero consiste es calcular cuál habría sido el nivel de

[4] Para un análisis sobre los factores socio políticos que promovieron el desarrollo económico mexicano durante el siglo XX, ver Cárdenas, (1994) y (1996).

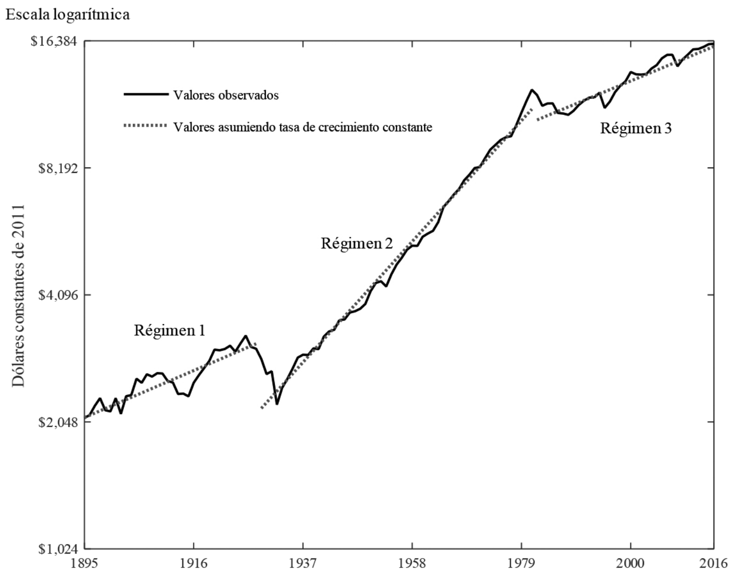


Figura 6: PIB per cápita de México (1867-2016), escala logarítmica. La línea sólida muestra los valores del PIB per cápita. La línea de puntos evidencia los valores generados bajo el supuesto de crecimiento constante anual promedio en cada régimen. *Fuente*: Cálculos de los autores basados en datos en Maddison Project Database.

PIB per cápita en la economía mexicana si la tasa de crecimiento del tercer régimen hubiese sido igual a la tasa de crecimiento anual promedio observada durante el segundo régimen. El segundo experimento consiste en calcular cuál habría sido el nivel del PIB per cápita si la tasa de crecimiento del segundo régimen hubiese sido igual a la tasa de crecimiento promedio anual observada durante el segundo régimen, manteniendo la tasa de crecimiento anual promedio del tercer régimen. La figura 7 muestra la evolución del PIB percápita de Estado Unidos y México durante el periodo 1895-2016 y los resultados de los dos experimentos o ejercicio contrafactuales.

La simple observación de los datos muestra las significativas diferencias en ingreso per cápita entre Estados Unidos y México. En 1895, el ingreso per cápita de Estados Unidos fue 2.5 veces mayor que el ingreso en México. En contraste, en 2016, el ingreso per cápita fue de 3.3 veces mayor que el ingreso mexicano. Estas diferencias en ingreso son explicadas por las variaciones en la tasa de crecimiento de la economía mexicana, dado que la tasa de crecimiento anual promedio de Estados Unidos es constante durante el periodo de estudio. Nuestros experimentos muestran la magnitud del efecto de las variaciones en la tasa de crecimiento.

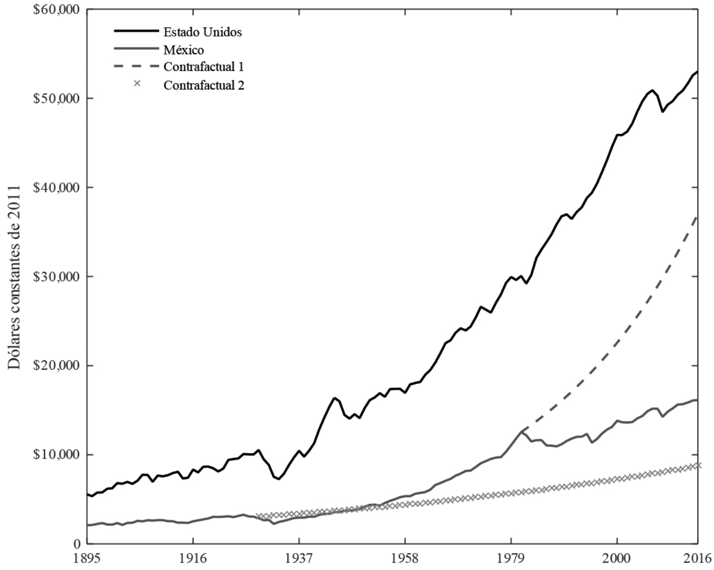


Figura 7: PIB per cápita (1895-2016), escala logarítmica. Las líneas solidas muestra observados. La línea de puntos muestra los valores generados bajo los supuestos del contrafactual 1, mientras que la linea con cruces muestra los valores generados bajo los supuestos del contrafactual 2 *Fuente*: Cálculos de los autores.

El resultado del primer experimento (línea punteada) muestra cual habría sido el nivel de PIB per cápita en México si la tasa de crecimiento durante el segundo régimen (1982-2016) hubiese sido igual a 3.14 %. En este escenario, el ingreso per cápita de Estado Unidos hubiese sido 1.4 veces mayor que el ingreso de percápita en México en 2016. El resultado del segundo experimento (línea con cruces) muestra cual habría sido el nivel de PIB per cápita en México si la tasa de crecimiento durante el segundo régimen (1929-1981) hubiese sido igual a la tasa de crecimiento observado en el tercer régimen (1982-2016). En este escenario, el ingreso per cápita de Estado Unidos hubiese sido poco más que seis veces mayor que el ingreso en México en 2016. En resumen, estos experimentos muestran la importancia de variaciones de la tasa de crecimiento.

La moderna literatura sobre crecimiento económico se enfoca en analizar los factores económicos, tecnológicos y sociales que fomentan el crecimiento sostenido y conducen los cambios de la tasa de crecimiento que observamos en varios países. En particular, en esta línea de investigación, el análisis se enfoca en estudiar el efecto de la educación (capital humano), innovación tecnológica, las instituciones y la asignación eficiente de recursos, entre otros factores, sobre los principales motores del crecimiento económico, a saber, la acumulación de capital físico en la economía y el progreso tecnológico.

3 Medidas y políticas contra la inflación

En esta sección describiremos brevemente dos medidas que buscan reducir procesos inflacionarios o deflacionarios: tasa de interés y operaciones de mercado abierto. Lo que intentan estas medidas o políticas monetarias es precisamente controlar los niveles de circulante o dinero en una economía. Pueden ser expansivas o restrictivas, esto es, hacer que haya más o menos dinero circulante.

3.1 Reglas de Taylor y McCallum

Las autoridades monetarias de los países, en su gran mayoría bancos centrales, buscan que los cambios en los precios se mantengan bajos y estables, o en otras palabras, que la inflación sea la mínima posible y con baja variabilidad. Entre sus medidas o políticas monetarias se encuentran la tasa de interés de referencia o interbancaria, o tasa de interés que se paga sobre los bonos gubernamentales. Esta tasa en principio responde a la situación de la economía, donde Taylor (1993) recomienda ajustarla cuando el PIB real y la inflación cambien. Dicha recomendación ha sido estudiada e implementada por diversos bancos centrales (Fortuno y Perrotini, 2007). Sin embargo, los ajustes en esta tasa de interés también pueden estar basados en cambios del circulante o moneda diferente a un objetivo, o si no, también ajustados cuando el tipo de cambio estén por debajo o encima de un valor que se toma como referencia (ver Bryant, Hooper y Mann, 1993). Hasta el momento no hay un completo consenso en cuál debería ser el criterio exacto para ajustar dicha política monetaria.

Una tasa de interés que sigue la recomendación de Taylor (1993) puede expresarse de la siguiente forma:

$$r_t = \pi_t + 0.5\left(\frac{PIB_t - PIB^*}{PIB^*}\right)100 + 0.5(\pi_t - 2) + 2, \tag{6}$$

donde *r* es la tasa de interés, y el primer término a la derecha de la ecuación es π refiriéndose a la inflación, el segundo término está relacionado con la variación porcentual del *PIB* real con respecto a un nivel esperado de producto interno bruto real (PIB^*), y el tercer término es la desviación de la inflación con respecto a un nivel objetivo, en este caso 2 %.

La formulación nos dice que hay que incrementar la tasa de interés cuando la inflación se encuentra por encima de la inflación objetivo (2 %) y cuando el PIB real es mayor al valor del PIB real objetivo. Cuando la inflación y el PIB real se encuentran en los niveles objetivos entonces la tasa de interés sera igual a 4 %.

Para describir de una forma bastante sencilla lo que pasa en una economía, imaginemos escenarios donde la tasa de interés aumenta o reduce, y su impacto sobre las decisiones de los agentes económicos. Cuando el banco central aumenta la tasa de interés, lo que intenta es reducir el nivel de circulante en la economía. Viéndolo desde el punto de vista de personas ahorradoras, cuando se está ofreciendo una tasa mayor, los hogares prefieren ahorrar antes que consumir debido a tasas de interés más atractivas. Es así que la demanda de bienes y servicios se reduce y como resultado los precios van a disminuir. Este mismo ejemplo se puede deducir cuando las tasas de interés se reducen, la demanda de bienes y servicios aumentara y así los precios con ello.

En México, el Banco de Mexico (BdeM), banco central del país, ha transitado por diversos periodos, los cuales podemos dividir entre antes y después de su autonomía en 1994. Después de 1994, el BdeM estableció un objetivo de inflación del 13 %, dejando atrás un periodo de discrecionalidad donde no existía dicho punto de referencia inflacionaria. Y con esto, la regla de Taylor se empezó a implementar como su principal política, donde, desde el 2002, la inflación objetivo es de 3 % anual.

Como alternativa a la regla de Taylor, podemos resaltar la regla de McCallum (véase McCallum, 1990). Esta regla define niveles de circulante con respecto al PNB, esto es:

$$\Delta B_t = \Delta B_{t-1} - \lambda(PNB_{t-1} - PNB^*_{t-1}), \tag{7}$$

donde B_t es el logaritmo de la base monetaria durante el periodo t, y ΔB_t es el cambio que hay de dicha variable entre t y t-1. Y λ es un parámetro de reacción, que mueve la base monetaria cuando el *PNB* es diferente al *PNB* meta (PNB^*_{t-1}). La regla nos dice en palabras simples que hay que aumentar la base monetaria cuando el PNB está bajando, esto con el objetivo de incrementar el circulante e incentivar la demanda.

3.2 Operaciones de mercado abierto

Las operaciones de mercado abierto (OMA) son otra política que puede seguir un banco central y, que entre otras cosas, se basa en la venta y compra de bonos gubernamentales. Estos bonos son pagarés que emite un gobierno con tal de obtener recursos y prometiendo a cambio una tasa de interés. Las OMA intentan controlar la liquidez de corto plazo sin afectar la situación financiera (o tasas de interés en el mercado de dinero).

En el caso de deflación, el banco central intentará comprar deuda publica (o pagarés) con el objetivo de hacer líquido todos estos bonos de gobierno. Con esto, los que tienen bonos y los intercambian por dinero pueden gastarlo y así fomentar el consumo. El aumento en el consumo es visto como una aumento de la demanda, y a mayor demanda, los precios pueden regresar a niveles más cercanos al objetivo. Por el otro lado, en eventos inflacionarios, la lógica de la política monetaria funcionará a la inversa. El banco central colocara bonos de deuda del gobierno para así restringir el circulante mediante la reducción de la demanda de los consumidores.

Para el caso particular de México, todos los días se pronostica la cantidad de circulante que debe de existir en la economía. [5] Se utilizan operaciones para inyectar recursos por medio de subastas de crédito; para retirar circulante se hacen subastas de depósitos o venta de valores. Se determina viendo las cuentas de los bancos y así se estima que día a día sus cuentas no tengan sobregiros o excedentes.

[5] Información en la pagina web http://www.banxico.org.mx/politica-monetaria/d/%7BFE14C513-3019-978E-55A7-3112824E905E%7D.pdf

4 La teoría de búsqueda y emparejamiento en el mercado laboral

4.1 Ineficiencia del mercado laboral

Cuando una economía presenta altos niveles de desempleo, se dice que su mercado de trabajo no está siendo eficiente, dado que está desaprovechando uno de los factores productivos más importantes: el trabajo. Por eso, uno de los principales objetivos macroeconómicos de los gobiernos es reducir la tasa de desempleo. Idealmente, se busca alcanzar el "pleno empleo", de modo que todos los individuos que están en edad y en condiciones de trabajar, y están en busca de un empleo, lo encuentren.

En esas circunstancias, el mercado laboral estaría en perfecto equilibrio, con la oferta de trabajo igual a la demanda. Sin embargo, este concepto es más bien teórico, pues en la realidad no existe ningún caso en que el desempleo sea nulo. Incluso, en la mejor coyuntura económica existe cierto nivel de desempleo, lo que da lugar a una pregunta relevante: ¿por qué puede haber gente sin empleo, a la vez que hay un gran número de ofertas de trabajo?.

Esto se debe en parte a que el mercado laboral es dinámico y constantemente hay flujos de personas que entran o salen del mercado laboral por diversas razones, afectando las mediciones de la población económicamente activa y la tasa de desempleo. Otra posibilidad es que el cambio tecnológico o en los gustos y preferencias de los consumidores conduzcan a una situación donde haya vacantes, pero los postulantes no cuentan con las habilidades requeridas.

No obstante, aun cuando no hubiese ese desfase entre la oferta y la demanda, los trabajadores necesitan tiempo para encontrar el puesto de trabajo que mejor se ajuste a sus deseos: buscan ofertas de trabajo en diferentes medios (amigos, familiares, redes sociales, bolsas de trabajo, etcétera), mandan currículos, participan en entrevistas, etcétera. Similarmente, a las empresas les toma tiempo encontrar el candidato idóneo para cubrir una vacante: deben anunciarla, realizar un proceso de selección (entrevistar a varios candidatos, evaluarlos, etcétera) y hacer ofertas; a veces incluso se deben negociar los salarios, la jornada, las prestaciones, el tipo de contrato, etcétera. En ese proceso, ambas partes deben calcular si su emparejamiento será mutuamente beneficioso o si es preferible esperar a encontrar una mejor opción.

En el enfoque clásico de la economía esas fricciones no existen, ya que se supone que el mercado laboral es perfectamente competitivo y que los agentes son homogéneos. Al disponer además de toda la información sobre las vacantes disponibles y tomar el salario como dado, los agentes económicos realizan los intercambios que terminan por ajustar la oferta y la demanda. Estos supuestos tan irreales aseguran el pleno empleo, pues los trabajadores y los puestos vacantes se encuentran y emparejan sin costo ni dilación alguna. Sin embargo, la realidad es otra muy diferente.

4.2 El desempleo de equilibrio

Los economistas Peter Diamond, Dale Mortensen y Christopher Pissarides recibieron el Premio Nobel de economía en 2010 por sus aportaciones al estudio del mercado laboral en presencia de fricciones e incertidumbre que impiden su ajuste. Su teoría de búsqueda y emparejamiento (*search and matching*) se desarrolló bajo los supuestos mucho más realistas de que los trabajadores y las empresas tienen información limitada, además de que invierten tiempo e incurren en costos en la búsqueda para encontrarse y emparejarse. Debido a esas fricciones y a la incertidumbre, no todos los trabajadores y empresas se emparejan. Una vez que tiene lugar el encuentro, ambas partes negocian el salario de acuerdo con sus poderes de negociación relativos. Si llegan a un acuerdo, la vacante se vuelve un empleo productivo; si no, se continúa con el proceso de búsqueda y emparejamiento.

Los trabajadores, teniendo en cuenta la incertidumbre sobre los empleos disponibles y el costo de buscar trabajo, buscan hasta encontrar un empleo que en términos esperados les proporcione el máximo nivel posible de ingreso laboral futuro. Para ello, fijan un "salario de reserva.[a] partir del cual están dispuestos a aceptar el trabajo. Por su parte, las empresas crean puestos vacantes en función del costo y de los beneficios esperados de crearlas; los beneficios dependen a su vez de los salarios a pagar y de otros costes laborales, así como de la productividad esperada de los trabajadores.

El emparejamiento y los flujos en el mercado de trabajo. Mortensen y Pissarides (1994) representaron el proceso de encuentro entre trabajadores y empresas mediante una función de emparejamiento, $M(U, V)$, que relaciona el número de nuevas contrataciones, M, con el número de trabajadores desempleados, U, y el número de vacantes disponibles V. Los supuestos usuales sobre esta función son los siguientes: M es creciente en ambos argumentos, continuamente diferenciable, homogénea de grado 1 y satisface las condiciones de Inada.

El supuesto de homogeneidad permite expresar la probabilidad de llenar una vacante, q, como función de la tensión en el mercado de trabajo, dada por $\theta = V/U$. Entonces, un puesto vacante es llenado con probabilidad $q(\theta) = M(U,V)/V = M(U/V,1) = M(1/\theta,1)$. Similarmente, la probabilidad p de que un trabajador desempleado encuentre trabajo está dada por $p(\theta) = M(U,V)/U = \theta q(\theta)$. Los demás supuestos sobre la función de emparejamiento implican que $\partial q(\theta)/\partial\theta \leq 0$ y $\partial p(\theta)/\partial\theta \geq 0$, reproduciendo así la existencia de efectos de congestión en el mercado de trabajo.

La dependencia de las probabilidades p y q en el número relativo de demandantes y oferentes de trabajo evidencia la existencia de una externalidad en el mercado, debido a que el salario no es el único mecanismo de asignación. Así, existe una probabilidad $1 - q(\theta) > 0$ de que alguna empresa no llene su vacante, mientras que con una probabilidad $1 - p(\theta) >$ algún desempleado no encontrará trabajo.

Por otra parte, el tránsito hacia el desempleo (ruptura de parejas empleado - puesto) obedece a que cada periodo un cierto número de empleos es destruido a una tasa exógena s. La evolución del desempleo medio se obtiene entonces al restar el flujo de los que encuentran empleo de los que lo pierden:

$$\dot{U} = s(1-U) - p(\theta)U. \tag{8}$$

En el estado estacionario todas la variables son constantes, por lo que el desempleo queda determinado por las dos tasas de transición (desde y hacia el desempleo):

$$s(1-U) = p(\theta)U \Leftrightarrow U = \frac{s}{s+p(\theta)}. \tag{9}$$

Por lo tanto, existe un cierto nivel de desempleo incluso al equilibrio. Esta ecuación fundamental del modelo de búsqueda y apareamiento puede representarse en el espacio $U - V$. A la relación resultante se llama *curva de Beveridge*, la cual muestra la relación negativa entre la tasa de desempleo y el número de vacantes sin cubrir respecto del total de empleos. Esta curva pone en evidencia entonces la existencia simultánea de trabajadores desempleados y de puestos sin cubrir en una determinada economía.

4.3 Relevancia y limitaciones

La riqueza y flexibilidad del modelo de búsqueda y emparejamiento ha permitido analizar de forma rigurosa los determinantes del desempleo, incluyendo los efectos de las instituciones laborales presentes en la mayoría de las economías de mercado, tales como el salario mínimo, los impuestos, los sindicatos, el seguro de desempleo, los costos de contratación y despido, etcétera. Asimismo, se ha podido abordar una amplia gama de cuestiones, por ejemplo: ¿por qué los trabajadores optan a veces por permanecer desempleados?, ¿qué determina la duración de los períodos de empleo y desempleo?, ¿por qué hay rotación de trabajadores?

Sin embargo, como toda teoría presenta ciertas limitaciones. En el marco básico, el proceso de formación de trabajos productivos genera un excedente que debe ser repartido de alguna forma entre la empresa y el trabajador, lo que se traduce en que los salarios negociados no reflejan la productividad marginal. Además, existen ciertas externalidades debido a que las decisiones de los agentes afectan las posibilidades de emparejamiento del resto de los participantes en el mercado. Por ejemplo, cada nueva vacante facilita la salida del desempleo para los trabajadores, pero a la vez aumenta el número de empresas en busca de un trabajador, por lo que cada empresa tendrá más dificultades para llenar su puesto vacante.

Por otra parte, el modelo combina los supuestos de búsqueda aleatoria y negociación ex-post de salarios. La negociación bilateral implica que los salarios no juegan ningún papel como señal, ya que al momento del emparejamiento los costos de la búsqueda son irrecuperables y no influyen en las negociaciones. No obstante, tanto el ingreso esperado de los trabajadores desempleados como de las empresas depende del salario y de la tasa de emparejamiento. Así, ambas partes determinan la combinación óptima de salarios y tasas de emparejamiento, pero el supuesto de búsqueda aleatoria hace muy improbable que se alcance dicho nivel, ya que las tasas son las mismas para todos y dependen exclusivamente de variables agregadas como la tensión del mercado laboral.

Por último, en la realidad la mayoría de los anuncios de vacantes incluyen información relevante como el salario, las prestaciones o el tipo de contrato. Esto influye en las estrategias de búsqueda de empleo, ya que los desempleados pueden discriminar entre las ofertas disponibles. De ahí que en las aportaciones más recientes a este enfoque, la hipótesis de búsqueda dirigida (*directed search*) ha reemplazado paulatinamente a los supuestos de búsqueda aleatoria y negociación ex-post de salarios. En estos modelos, las empresas anuncian públicamente sus ofertas salariales y los trabajadores orientan su búsqueda hacia las ofertas más atractivas. En consecuencia, la tasa de emparejamiento ya no es necesariamente la misma para todos los agentes. Además, la búsqueda es competitiva, pues las empresas anticipan que pueden cubrir un puesto de trabajo con mayor rapidez si anuncian un salario más alto; mientras que los trabajadores anticipan que se enfrentarán a una mayor competencia por una vacante conforme el salario sea más alto. En este contexto, Shimer (1996) demostró que la asignación de equilibrio es eficiente; resultado que se extiende incluso a economías con agentes heterogéneos e información perfecta, en las que los trabajadores más productivos tienden a optar a los mejores puestos de trabajo (Shimer 2005).

Existen también avances relevantes en otras direcciones, entre otros: modelos con agentes adversos al riesgo (Acemoglu y Shimer, 1999); con selección adversa (Guerrieri, Shimer y Wright, 2010), o con búsqueda por parte de trabajadores empleados (Pissarides, 1994; Cahuc, Postel-Vinay y Robin, 2006). En cuanto a su integración en la modelación macroeconómica dinámica, Andolfatto (1996) y Merz (1995) demostraron que la introducción de fricciones de búsqueda mejora de modo sustancial las predicciones del modelo neoclásico de ciclos reales. Finalmente, cabe destacar que, al ofrecer fundamentos más sólidos sobre el funcionamiento del mercado de trabajo, la teoría de búsqueda y emparejamiento ha resultado de gran utilidad en el el análisis y planteamiento de políticas públicas orientadas a reducir las tasas de desempleo que han venido enfrentando la mayoría de las economías industrializadas en las últimas décadas.

5 Conclusiones

En este capítulo se esbozaron tres cuestiones fundamentales de la macroeconomía: producción y crecimiento, inflación y desempleo. Sin embargo, la macroeconomía aborda otros fenómenos de gran importancia para un país, tales como el ciclo económico y la productividad; el déficit público; la deuda externa y la competitividad; la intervención del Estado en la economía; las políticas fiscal y monetaria, etcétera. Asimismo, el progreso del análisis macroecónomico es notorio hoy más que nunca. La crisis financiera de 2007-2008 ha hecho que se incorporen aspectos financieros a modelos tradicionales. Desafortunadamente la importancia del sector bancario o financiero había sido reducido a lo mas mínimo y solo pocos modelos analizaban esta parte de la economía (ver Diamond y Dybvig, 1983; Bernanke y Gertler, 1989; Kiyotaki y Moore, 1997). Hoy en día, podemos encontrar infinidad de modelos más sofisticados con este sector financiero (por ejemplo, Bianchi, 2011; Gertler y Kiyotaki, 2011; Brunnermeier y Sannikov, 2014), y más importante aun, riesgos financieros y sus impactos en las decisiones de los agentes y las implicaciones a nivel macroeconómico.

6 Referencias

- Acemoglu, D. y R. Shimer (1999), “Efficient Unemployment Insurance", *Journal of Political Economy*, vol. 107, pp. 893-928.
- Andolfatto, D. (1996), “Business Cycles and Labor Market Search”, *American Economic Review*, vol. 81(1), pp. 112-132.
- Bennett T. McCallum, (1990), “Chapter 18 Inflation: Theory and evidence”, *Handbook of Monetary Economics*, vol. 2, pp. 963-1012.
- Bernanke, B., y Gertler, M., (1989), “Agency Costs, Net Worth and Business Fluctuations”, *American Economic Review*, vol. 79, pp. 14-31.
- Bianchi, J., (2011), “Overborrowing and Systemic Externalities in the Business Cycle”, *American Economic Review*, vol. 101, pp. 3400-3426.
- Bryant, R. C., Hooper, P. and Mann, C. L. (1993), “Evaluating Policy Regimes”, The Brookings Institution, Washington DC, USA, *Journal of Public Policy*, vol. 13(4), pp 397-398.
- Cahuc, P., Postel-Vinay, F., y Robin, J. M. (2006). “Wage bargaining with on-the-job search: Theory and evidence”, *Econometrica*, vol. 74(2), pp. 323-364.
- Cárdenas, E. (1994). *La hacienda pública y la política económica, 1929-1958* (1.st ed., Sección de obras de historia). México: El Colegio de México, Fideicomiso Historia de las Américas/FCE.
- Cárdenas, E. (1996). *La política económica en México, 1950-1994* (1.st ed., Sección de obras de historia). México: Colegio de México: Fideicomiso Historia de las Américas : FCE.

- Brunnermeier, M. K., y Pedersen, L., (2009), “Market Liquidity and Funding Liquidity”, *Review of Financial Studies*, vol. 22, pp. 2201-2238.
- Diamond, D., y Dybvig, P., (1983), “Bank Runs, Deposit Insurance, y Liquidity”, *Journal of Political Economy*, vol. 91, pp. 401-419.
- Fortuno, J. y Perrotini, I. (2007), “Inflación, tipo de cambio y regla de Taylor en México 1983-2006”, Equilibrio Económico, año VIII, vol. 3, núm. I, pp. 27-54.
- Gertler, M., y Karadi, P., (2011). “A Model of Unconventional Monetary Policy”, *Journal of Monetary Economics*, January.
- Guerrieri, V., R. Shimer y R. Wright (2010), “Adverse Selection in Competitive Search Equilibrium", Econometrica, Vol. 78(6), pp. 1823-1862.
- Hicks, J. (1937), “Mr. Keynes and the “Classics”; A Suggested Interpretation”, Econometrica, Vol. 5, No. 2, pp. 147–159.
- Keynes, J. (1936), “The General Theory of Employment, Interest and Money”, McMillan and Co.
- Kiyotaki, N., y Moore, J., (1997), “Credit Cycles”, *Journal of Political Economy*, vol. 105, pp. 211-248.
- Maddison Project Database, version 2018. Bolt, Jutta, Robert Inklaar, Herman de Jong y Jan Luiten van Zanden (2018), “Rebasing ‘Maddison’: new income comparisons and the shape of long-run economic development”.
- Merz, M. (1995), “Search in the Labor Market and the Real Business Cycle", *Journal of Monetary Economics*, vol. 36(2), pp. 269-300.
- Mortensen, D. T. y C. A. Pissarides (1994), “Job Creation and Job Destruction", *Review of Economic Studies*, vol. 61(3), pp. 397-415.
- Pissarides, C. A. (1994). “Search unemployment with on-the-job search”, *The Review of Economic Studies*, vol. 61(3), pp. 457-475.
- Sen, A. (2000). *Development as freedom* (1st Anchor Books ed.). New York: Anchor Books.
- Shimer, R. (1996), “Essays in Search Theor”, Ph.D. dissertation, MIT, MA Cambridge.
- Shimer, R. (2005), “The Assignment of Workers to Jobs in an Economy with Coordination Frictions", *Journal of Political Economy*, vol. 113(5), pp. 996-1025.
- Taylor, John B. (1993), “Discretion versus policy rules in practice", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, vol. 39, 1993, pp 195-214.

Econometría

Alejandro Mosiño

Antonio Baez Morales

1 Introducción

¿Qué es econometría? Literalmente, *econometría* significa "medición económica". Más precisamente, la econometría es una rama de la economía que utiliza métodos estadísticos para estudiar y cuantificar mediante datos reales los fenómenos económicos,[1] ya sea microeconómicos o macroeconómicos. La econometría consiste en una combinación de economía matemática, teoría de probabilidad y estadística, datos económicos y, claro está, teoría económica. La econometría, sin embargo, tiene un carácter más amplio. A parte de estudiar y cuantificar fenómenos económicos, también se ha utilizado para estudiar problemas en otras disciplinas, tales como contabilidad, finanzas, *marketing*, historia, ciencia política, sociología, entre otras.

Para entender qué hace la econometría consideremos un ejemplo. Todo comienza con una teoría que involucra al menos dos variables: una variable que deseamos explicar y una o varias variables que la explican. Por ejemplo, nos interesa saber cuál es la relación que existe entre el ingreso per cápita y la esperanza de vida en un país. Nuestra teoría indica que el ingreso es la variable que explica y la esperanza de vida es la variable que queremos a explicar, de tal manera que:

$$\text{Esperanza} = f(\text{Ingreso}),$$

es decir, la esperanza de vida es una *función* del ingreso per cápita.

Para analizar y eventualmente probar que esta relación existe, lo primero es tener a la mano algunos datos. Consideremos, por ejemplo, la

[1] Ventosa-Santaulària, D. (2006). "¿Qué es la econometría", *Acta Universitaria*, 16(3), 47–51.

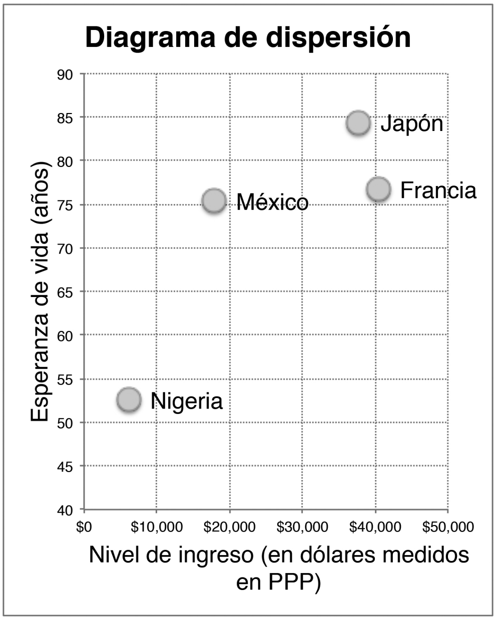


Figura 1: Relación entre el ingreso per cápita y la esperanza de vida. Cuatro países seleccionados.

información contenida en el cuadro 1. Si graficamos esta información como en la figura 1, podemos apreciar que los países ricos parecen tener una esperanza de vida más elevada que los países pobres. En econometría, la forma más común de modelar formalmente esta relación es mediante la fórmula lineal:

$$\text{Esperanza}_i = \beta_1 + \beta_2 \text{ Ingreso}_i$$

Dado que el cuadro 1 tiene muy pocas observaciones, no podemos asegurar que la relación entre las variables que consideramos sea la correcta. Conviene entonces repetir el experimento usando más observaciones. Esto se ve en la figura 2, en la cual la relación positiva entre el ingreso per cápita y la esperanza de vida se hace mucho más evidente. En la gráfica hemos incluido, además, una línea trazada a partir de la fórmula lineal que hemos expuesto arriba. Uno de los objetivos de la econometría es saber cómo trazarla. En otras palabras, deseamos saber qué valores tienen

País	Ingreso per cápita	Esperanza de vida
Francia	$40,400	76.79
Japón	$37,700	84.46
México	$17,900	75.43
Nigeria	$6,100	52.62

Cuadro 1: Fuente: CIA World Factbook.

los coeficientes β_1 y β_2. El método más común para encontrar estos será analizado en la sección 2.

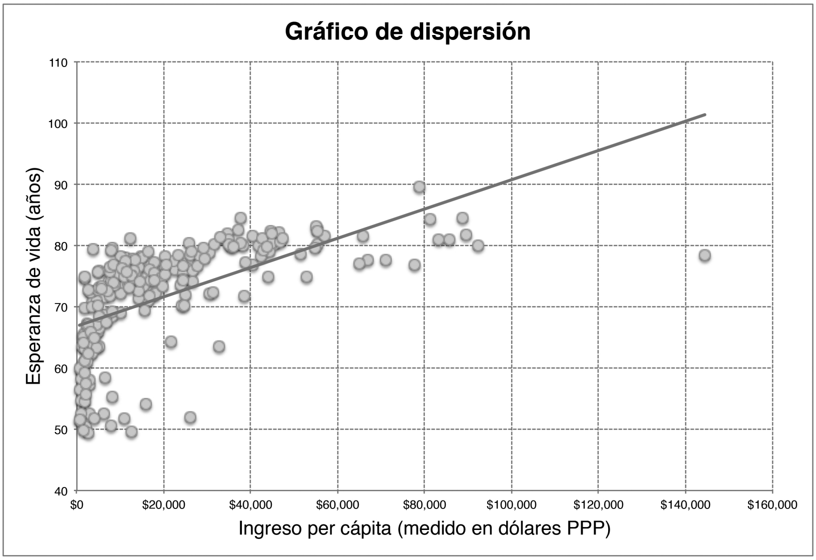


Figura 2: Relación entre el ingreso per cápita y la esperanza de vida.

Luego de realizar la estimación de los parámetros, es necesario saber si los resultados obtenidos respaldan o no la teoría económica. Por ejemplo, la teoría (y la intuición) nos indican que la esperanza de vida aumenta conforme aumenta el nivel de ingreso per capita. Si esto es cierto, el coeficiente β_2 debe ser positivo. Pero, además, es necesario saber si el resultado de la estimación está lo suficientemente lejos de cero como para ser válido. Esto también será analizado en la sección 2.

Naturalmente, podríamos considerar otras variables que sean coherentes con la teoría económica. Por ejemplo, aparte del ingreso per cápita podrían existir otros elementos que colaboren con la determinación de la esperanza de vida de un país como, por ejemplo, la dieta, el entorno social, etcétera. Esto forma parte de la correcta especificación de un modelo econométrico, lo cual será analizado en la Sección 3.

Como veremos, para que el modelo funcione correctamente es necesario que se cumplan ciertos supuestos. Si esto no ocurre, tendremos que aplicar algunos métodos correctivos, los cuales serán analizados en las secciones 4, 5 y 6.

2 El modelo de regresión lineal (MRL)

Una de las herramientas principales en econometría es el *modelo de regresión lineal* (MRL). En su forma general, este modelo se lee:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i. \tag{1}$$

En la ecuación (1), $i = 1, 2, \ldots, N$ hace referencia a la observación i-ésima; esto es, tenemos N observaciones. La variable y se conoce como *variable dependiente* o *regresando*, y las variables x se conocen como *regresores*, *variables explicativas* o *variables independientes*. Nota, además, que tenemos k regresores, incluyendo una $x_{1i} = 1$ para todo i; cuando $k = 2$ nos referimos al MRL como *modelo de regresión simple*. El término u es un elemento estocástico (aleatorio), conocido como *término de error*, que debe cumplir ciertas propiedades de las cuales hablaremos más adelante.

Nota que el modelo en la ecuación (1) tiene dos componentes: un componente determinista, $\beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_k x_{ki}$, y un componente aleatorio, u_i. Además, el componente determinista puede interpretarse como el valor de y *condicional* a los valores de x, es decir: $\mathbb{E}(y|x)$.

Consideremos ahora el coeficiente β_k de la variable x_{ki} y supongamos que el resto de las variables se mantienen constantes.[2] En ese caso, la ecuación (1) se reduciría a la fórmula de una línea que parte de β_1, conocido con *intercepto* y tiene *pendiente* de β_k. Por esa razón los β_k son conocidos como *coeficientes de tendencia* o *coeficientes de regresión*.

[2] Este es el conocido supuesto del *ceteris paribus*, el cual resulta clave no solo en econometría sino en economía en general.

El problema es que en la práctica no observamos los valores de estos coeficientes, por lo que es necesario encontrar una técnica para estimarlos.

Antes de analizar la técnica de estimación de los coeficientes, es necesario listar las razones por las cuales se incluye el término de error, u_i. Algunas de estas son:

1. La posible omisión de variables explicativas.
2. Una posible agregación incorrecta de las variables.
3. Una posible especificación incorrecta del modelo.
4. La posible elección de una forma funcional incorrecta.
5. Por posibles errores de medición en las variables.

Además, es importante señalar que la especificación de la ecuación (1) debe tener *siempre* un sustento en la teoría económica y/o en la intuición.

2.1 El método de los mínimos cuadrados ordinarios (MCO)

Como hemos dicho, los coeficientes de regresión son desconocidos, por lo que el valor de las pendientes en la ecuación (1) tienen que estimarse. Sean $b_1, b_2, ..., b_k$ estos estimadores. Estos nos permiten calcular el valor de y_i como:

$$y_i = b_1 + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + \cdots + b_k x_{ki} + e_i, \tag{2}$$

donde el elemento e_i se conoce como el *residual de estimación*. Este puede considerarse como un estimador de u_i en la ecuación (1) y es, por lo tanto, un elemento aleatorio. Nota que, dada la existencia de e_i, no nos es posible calcular el valor de y_i a partir de esta ecuación, por lo que su uso es meramente teórico. Sin embargo, sí nos es posible calcular:

$$\widehat{y}_i = b_1 + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + \cdots + b_k x_{ki}, \tag{3}$$

el cual es un estimador de la parte determinista en la ecuación (1). Si combinamos las ecuaciones (2) y (3) obtenemos:

$$y_i = \widehat{y}_i + e_i.$$

Este resultado nos permite utilizar un procedimiento, conocido como el de *mínimos cuadrados ordinarios* (MCO), para encontrar el valor de las b en la ecuación (2). Este consiste en calcular las b tales que se minimice la *suma del cuadrado de los residuales* (RSS, por sus siglas en inglés). Matemáticamente:

$$\begin{aligned}
&\min_{b_1,b_2,\ldots,b_k} \sum_{i=1}^{N} e_i^2 \\
&= \min_{b_1,b_2,\ldots,b_k} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \widehat{y}_i)^2 \\
&= \min_{b_1,b_2,\ldots,b_k} \sum_{i=1}^{N} (y_i - b_1 - b_2x_{2i} - b_3x_{3i} - \cdots - b_kx_{ki})^2 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Nota que los valores de las b en las ecuaciones (2), (3) y (4) son variables aleatorias. Esto es porque su valor cambia en tanto cambie la muestra utilizada para calcularlos. En cambio, los β en la ecuación (1) son deterministas, puesto que provienen de una única población. Por otro lado, es claro que el problema en la ecuación (4) es más complejo en tanto más sea el número de regresores que incluyamos en la ecuación (1). Afortunadamente, este es un problema que pueden resolver un gran número de programas econométricos para computadora.[3] Por ejemplo, el cuadro 2 muestra la relación que existe entre el ingreso per cápita (PerCapitaGDP) y la esperanza de vida (LifeExpectancy) para una muestra de 222 países. Los estimadores de MCO se muestran en la columna Coeficientes; la variable const es el estimador de β_1 y la variable PerCapitaGDP es el estimador de β_2, de tal forma que la ecuación estimada es:

$$\widehat{\text{Esperanza}}_i = 68.23 + 0.0002013 \text{ Ingreso}_i$$

Las ecuaciones anteriores nos reflejan cuál es el primer objetivo de realizar un *análisis de regresión*: estimar los coeficientes de la ecuación (1). Sin embargo, existe otro aun más importante para los economistas: interpretar estos coeficientes estimados. En general, podemos decir que si la variable x_k se incrementa en una unidad, el valor estimado de y, es decir $\widehat{y}$, se incrementa (o disminuye, según el signo del coeficiente) en b_k unidades. Si todos los regresores x_k son iguales a cero, el valor de $\widehat{y}$ es igual a b_1. En el cuadro 2 tenemos, por ejemplo, que un aumento del

[3] Algunos ejemplos de programas especializados son: Stata, Eviews, Gretl y R, los últimos dos de distribución libre.

MCO, usando las observaciones 1–222
Variable dependiente: LifeExpectancy

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p
const	68.2303	0.571816	119.3	0.0000
PerCapitaGDP	0.000201314	1.65512e–05	12.16	0.0000

Media de la vble. dep.	73.03108	D.T. de la vble. dep.	7.954314
Suma de cuad. residuos	8360.681	D.T. de la regresión	6.164665
R^2	0.402079	R^2 corregido	0.399361
$F(1, 220)$	147.9415	Valor p (de F)	2.27e–26
Log-verosimilitud	-717.7809	Criterio de Akaike	1439.562
Criterio de Schwarz	1446.367	Hannan–Quinn	1442.309

Cuadro 2: Modelo de regresión lineal estimado por el método de los MCO. La variable dependiente es la esperanza de vida, la variable explicativa es el ingreso per cápita medido en miles dólares.

ingreso per cápita de 1 dólar aumenta en 0.000201 años la esperanza de vida. Un país con cero ingresos tiene una esperanza de vida de 68.23 años.[4]

2.2 Supuestos del modelo de regresión lineal

Hemos visto que una forma de encontrar el valor estimado de los coeficientes de la ecuación (1) es el método de los MCO. Sin embargo, para poder utilizar este método es necesario que se cumplan los siguientes supuestos:

- **S1** El modelo de regresión es *lineal en sus coeficientes* como en la ecuación (1), y podría ser o no lineal en y y en las x.
- **S2** El modelo de regresión de la ecuación (1) está *bien especificado*.
- **S3** No existe una *relación lineal exacta* entre las x de la ecuación (1). Por ejemplo, no se permiten relaciones como $x_5 = 2x_3 + 4x_4$.
- **S4** Dados los valores de x: $\mathbf{E}(u) = 0$.
- **S5** La varianza de u_i dado x_i es constante: $\text{var}(u_i) = \sigma^2$. Este es el supuesto de *homoscedasticidad* o de no *heteroscedasticidad*.

[4] Naturalmente esto es una incoherencia técnica, la cual puede corregirse mediante un perfeccionamiento de la especificación del modelo. Esto lo veremos en la sección 3.

S6 La covarianza de u_i con respecto a u_j para $i \neq j$, es cero: $\text{cov}(u_i, u_j) = 0$. Este es el supuesto de no *autocorrelación*.

S7 Las x y el elemento u_i son independientes. Esto puede ocurrir, por ejemplo, cuando las x son deterministas: $\text{cov}(u_i, x_k) = 0$.

S8 Finalmente, es común suponer *por conveniencia* que u_i sigue una distribución normal: $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Este supuesto, sin embargo, no altera las principales propiedades que tienen los estimadores del modelo de regresión lineal.

Si se cumplen los supuestos S1 a S7 se puede demostrar que los estimadores del método de los MCO son los *mejores estimadores lineales insesgados* (MELI), resultado que se conoce normalmente como *teorema de Gauss Markov*. [5]

2.3 Error estándar de la regresión

Nota que, aparte de los coeficientes de regresión, existe otro elemento en el modelo de regresión lineal que aun no conocemos —y que será necesario más adelante—. Este es el valor de σ^2, el cual es la varianza de u_i.[6] Se puede demostrar que un estimador insesgado de σ^2, al cual denotaremos como $\widehat{\sigma}^2$, es:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{N-k}, \tag{5}$$

donde RSS no es más que la suma del cuadrado de los residuales, N es el número de observaciones y k es el número de coeficientes estimados en la regresión. El número $N-k$ se conoce como los *grados de libertad* de la regresión. Además, también podemos calcular la raíz cuadrada de $\widehat{\sigma}^2$ en la ecuación (5). A este se le conoce como *error estándar de la regresión* (o, simplemente, se por sus siglas en inglés).

Tanto la varianza como el error estándar de la regresión nos permiten estimar la varianza y los errores estándar de los estimadores de MCO. Recordemos que el supuesto S8 indica que el término estocástico u_i sigue una distribución normal. Aunque no lo demostraremos aquí, esto implica que también los estimadores de MCO siguen una distribución normal

[5] Específicamente, los estimadores que obtenemos usando el método de los MCO son *insesgados*, lo que quiere decir que convergen en valor esperado a su valor verdadero. Además son *eficientes*, lo que quiere decir que no existen otros estimadores insesgados con una varianza más pequeña.

[6] Naturalmente, dado que u_i es desconocido, σ^2 también lo es.

con media igual al valor verdadero del coeficiente (porque son insesgados) y una varianza que es función de $\widehat{\sigma}^2$. A pesar de que la derivación de las fórmulas de las varianzas de los estimadores de MCO no es difícil, aquí no vamos a hacer este cálculo debido a que este es realizado automáticamente por los diferentes programas econométricos. Sin embargo, sí podemos decir que un estimador es más *preciso* entre más pequeño sea su error estándar.

En el cuadro 2 tenemos el cáculo de la RSS indicado como SUMA DE CUAD. RESIDUOS. Para este ejemplo, el valor del RSS es de 8,360.68, mientras que $N = 222$ y $k = 2$. Esta información nos permite calcular $\widehat{\sigma}^2$. Sin embargo, este cálculo no tenemos que hacerlo de forma manual. El cuadro 2 indica el como D.T. DE LA REGRESIÓN al valor de $\widehat{\sigma}$ el cual, en este caso es igual a 6.165.

Como hemos dicho, el error estándar de la regresión nos permite calcular el error estándar de los coeficientes. Este se muestra en la columna DESV. TÍPICA, justo junto a la columna de los coeficientes. El error estándar de la constante es 0.5718, y la desviación estándar del ingreso per-cápita es 1.65e-05. Ambos valores parecen ser relativamente bajos, por lo que la estimación de estos parece ser relativamente precisa. Más adelante en esta sección veremos que el valor que toman estos errores estándar es crucial para probar la pertinencia de las variables incluidas.

2.4 Bondad de ajuste

Una vez que hemos estimado los coeficientes del modelo de regresión lineal, estamos interesados en saber qué tan bien se ha ajustado este modelo a los datos utilizados, es decir, necesitamos una medida de *bondad de ajuste*. Una medida tradicional en econometría se construye calculando primero:

$$TSS = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2$$

$$ESS = \sum_{i=1}^{N} (\widehat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$RSS = \sum_{i=1}^{N} e_i^2,$$

donde $\bar{y}$ se refiere al promedio de la variable dependiente, TSS es la *suma de los cuadrados total* (TSS por sus siglas en inglés), ESS es la *suma de los cuadrados explicada* —por el modelo— (ESS por sus siglas en inglés), y, naturalmente, RSS es la suma del cuadrado de los residuales. Es posible demostrar que estos tres están relacionados por:

$$TSS = ESS + RSS.$$

El *coeficiente de determinación*, el cual se denota simplemente como R^2, es una de las medidas de bondad de ajuste más utilizadas en la literatura. Este se define como:

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{ESS}{TSS} \\ &= 1 - \frac{RSS}{TSS}. \end{aligned} \tag{6}$$

La R^2 es un número que se encuentra entre cero y uno. Entre más cercano a uno mejor es el ajuste del modelo. Si la R^2 es igual a uno, tenemos que el modelo fue capaz de explicar el 100 % de la variabilidad de la variable dependiente. Esto es, tenemos un modelo perfecto. Naturalmente, si $R^2 = 0$ el modelo tiene que replantearse por completo.

Una desventaja que tiene la R^2 es que esta es una función creciente del número de regresores. Esto es, si incluimos un regresor más en el modelo, la R^2 tiende a incrementarse. Esto implica que podríamos tener la *tentación* de incrementar artificialmente el valor de la R^2 incluyendo un gran número de regresores aun cuando muchos de estos no tengan relación teórica ni intuitiva con la variable dependiente del modelo. Para evitar esto, se prefiere calcular la R^2 *ajustada*, la cual se denota como $\bar{R}^2$. La fórmula de la $\bar{R}^2$ es:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{N-1}{N-k}. \tag{7}$$

La $\bar{R}^2$ tiene dos características que pueden confirmarse analizando las ecuaciones (6) y (7):

1. Si $k > 1, \bar{R}^2 < R^2$. Esto es, si el número de regresores en el modelo se incrementan la R^2 se hace más grande que la $\bar{R}^2$. Entonces, la $\bar{R}^2$ penaliza la inclusión de regresores irrelevantes.
2. La R^2 siempre es positiva. Sin embargo, la $\bar{R}^2$ podría ser negativa.

El cuadro 2 indica tanto la R^2 como la $\bar{R}^2$ (indicada como R^2 CORREGIDO). Estas son, respectivamente, iguales a 0.4021 y 0.3994, lo cual muestra un ajuste excelente tomando en cuenta que solo tenemos una variable explicativa. Naturalmente, este resultado aun se puede mejorar poniendo un poco más de esfuerzo en la especificación del modelo.

Cabe señalar que, además de la bondad de ajuste, la $\bar{R}^2$ suele utilizarse para comparar dos o más modelos que tienen la misma variable dependiente. Por supuesto, esta no es la única manera de compararlos. Analizaremos esto más adelante.

2.5 Pruebas de hipótesis: la prueba t

Supongamos que deseamos probar la hipótesis que el coeficiente verdadero, β_k, es igual a cero. Para probar esta hipótesis usamos el estadístico t.[7] Este es:

$$t_k = \frac{b_k}{se(b_k)}, \tag{8}$$

donde b_k es el k-ésimo coeficiente estimado por MCO y $se(b_k)$ es su error estándar. Este estadístico sigue una distribución t con $N - k$ grados de libertad. Esto implica que, una vez calculado el estadístico t, tenemos que observar en las tablas de la distribución t cuál es la probabilidad de encontrar el valor t_k o más. Si la probabilidad de obtener el valor t_k es muy baja (por ejemplo 10 % o menos), podemos rechazar la hipótesis nula de que $\beta_k = 0$. En este caso decimos que el valor b_k estimado es estadísticamente significativo, o, en otras palabras, estadísticamente diferente de cero. En la práctica, la prueba de hipótesis se hace utilizando las probabilidades 10 %, 5 % y 1 %. Estos valores se conocen como *valores de significancia* y se denotan con la letra griega α.

Si esta prueba se hace muy confusa, tenemos la alternativa de calcular en su lugar el *valor p de la prueba*. El valor p de la prueba indica el nivel de significancia más bajo en el que el valor observado del estadístico t_k es significativo. La regla de decisión es simple: si el valor p de la prueba es menor a 10 % rechazamos la hipótesis nula. No rechazamos en caso contrario.

En el cuadro 2, junto a la columna de los coeficientes y la desviación estándar, tenemos un par de columnas que nos indican el valor del estadístico t para la prueba de significatividad del coeficiente (columna

[7] El uso de este estadístico también está asociado al supuesto S8 del modelo regresión lineal. De hecho, si la varianza de u_i fuera conocida, la hipótesis de que el coeficiente $\beta_k =$ es igual a cero se probaría utilizando una distribución normal estándar.

Estadístico *t*) y, a la derecha, su valor p (columna valor *p*). En el caso del ejemplo, vemos que tanto la constante como el coeficiente del ingreso per cápita son muy inferiores al 10 %, de hecho son iguales a cero, lo que implica que ambos son importantes en la determinación de la esperanza de vida (o, más formalmente, hay evidencia estadística de que los coeficientes son diferentes de cero).

2.6 Pruebas de hipótesis: la prueba F

Ahora supongamos que deseamos probar que todos los coeficientes de la regresión en su conjunto son iguales a cero contra la alternativa de que al menos uno es diferente de cero. En este caso usamos el estadístico F. Este es:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(N-k)}, \tag{9}$$

donde R^2 es, naturalmente, la R cuadrada de la regresión definida en la ecuación (6). Se puede demostrar que el estadístico F sigue una distribución F con $k-1$ grados de libertad en el numerador y $N-k$ grados de libertad en el denominador. Al igual que con el estadístico t, tenemos que comparar el estadístico de la ecuación (9) con el valor crítico en las tablas F para un nivel de significancia de α. Si el estadístico F es mayor que el de las tablas, se rechaza la hipótesis nula de que todos los coeficientes del modelo, en su conjunto, son estadísticamente iguales a cero.

Igual que antes, también podemos calcular el valor p de la prueba F. Esta tiene exactamente la misma lógica que en el caso de la prueba t.[8] En particular: si el valor p de la prueba es menor a 10 % rechazamos la hipótesis nula. No rechazamos en caso contrario. Tanto el valor del estadístico F como el valor p de la prueba son calculados automáticamente por el programa de econometría de nuestra preferencia.

El estadístico F y el valor p de la prueba F también aparecen en el cuadro 2, justo debajo de la R^2 y R^2 ajustada, y están marcados como *F*(1,220) y Valor p (de *F*), respectivamente. La tabla indica que se ha calculado el estadístico F con 1 grado de libertad en el numerador y 220 en el denominador ($k-1$ y $N-k$, respectivamente); en el ejemplo que hemos venido analizando este vale 147.94. El valor p de la prueba

[8] De hecho, el valor p de cualquier prueba con cualquier estadístico siempre se lee de la misma forma y se interpreta igual, por lo que la regla de decisión siempre es la misma.

es 2.27e-26, el cual, dado que es menor a 10 %, nos permite rechazar la hipótesis de que los coeficientes en conjunto son iguales a cero. Nota que en este ejemplo sólo tenemos una variable explicando la esperanza de vida, por lo que la prueba F no aporta mucho más información que la prueba t. La prueba F se vuelve más importante cuando tenemos más de una variable explicativa.

3 Perfeccionamiento del modelo y pruebas de especificación

Como hemos dicho líneas arriba, un modelo econométrico debe tener un buen sustento teórico e intuitivo. Esto podría implicar el incluir variables que no necesariamente entran en el modelo de forma lineal, así como variables dicotómicas. También es necesario que revisemos si no hemos incluido en el modelo variables irrelevantes o si bien hemos omitido variables relevantes. Analizaremos esto a continuación.

3.1 Modelos no lineales

Considera el siguiente modelo:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i}^2 + \beta_3 \sqrt{x_{3i}} + \beta_4 \ln(x_{4i}).$$

Quizás podríamos preguntarnos si con esta especificación podemos estimar los coeficientes utilizando el método de los MCO. Observa que esta especificación no viola el supuesto S1 del modelo de regresión lineal, ya que, aunque las variables explicativas son no lineales, los coeficientes sí lo son. De hecho, nota que podemos reescribir el modelo como:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 z_{2i} + \beta_3 z_{3i} + \beta_4 z_{4i},$$

donde $z_{2i} = x_{2i}^2$, $z_{3i} = \sqrt{x_{3i}}$ y $z_{4i} = \ln(x_{4i})$. Este modelo tiene la misma estructura de los modelos que ya conocemos y, por supuesto, puede estimarse de la misma forma.

En la literatura podemos encontrar algunos modelos no lineales que son útiles por su interpretación y que pueden estimarse usando la misma lógica que en el ejemplo anterior. Estos son:

- **El modelo *log-log***. En este modelo tanto la variable dependiente como los regresores tienen una forma logarítmica. En particular:

$$\ln(y_i) = \beta_1 + \beta_2 \ln(x_{2i}) + \cdots + \beta_k \ln(x_{ki}) + u_i.$$

  Este modelo tiene la ventaja de que los β's pueden interpretarse como *elasticidades*. Esto es, β_k indica el cambio porcentual en y_i cuando x_{ik} cambia en 1 %.

- **El modelo *log-lin***. En este modelo la variable dependiente se expresa en logaritmos y los regresores en forma lineal:

$$\ln(y_i) = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i.$$

  En este modelo los β's pueden interpretarse como *semi-elasticidades*. En particular, β_k indica el cambio porcentual en y_i cuando x_{ik} cambia en 1 *unidad*.

- **El modelo *lin-log***. En este modelo la variable dependiente es lineal y los regresores se expresan en logaritmos:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln(x_{2i}) + \cdots + \beta_k \ln(x_{ki}) + u_i.$$

  En este modelo la elasticidad de x_{ik} sobre y_i es una función de y_i. Es decir, el impacto de x_{ik} dependerá del valor que tome la variable dependiente.

- **El modelo *recíproco***. En este modelo tenemos:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{x_{2i}} + \cdots + \beta_k \frac{1}{x_{ki}} + u_i.$$

  Este modelo tiene la ventaja de que, contrario a lo que sucede en el modelo tradicional, el valor estimado de y_i no converge a ∞ cuando los valores de x_{ik} sean muy grandes. Esto resulta particularmente útil en algunos casos. Por ejemplo cuando la variable dependiente es la esperanza de vida.

- **Modelo con variables polinómicas**. Un ejemplo de modelo con variables polinómicas es:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{2i}^2 + u_i.$$

Este tiene la ventaja de que el efecto marginal de la variable x_{2i} sobre y_i no es constante (es decir no es igual a β_2). De hecho, depende del valor particular que tome la variable x_{2i}. En este ejemplo hemos usado una variable al cuadrado, pero el orden de la potencia puede ser cualquiera dependiendo del efecto que intentemos capturar.

- **Modelo con variables interactivas**. Un ejemplo de modelo con variables interactivas es:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{2i} x_{3i} + u_i,$$

donde hemos introducido la interacción entre las variables x_{2i} y x_{3i}. En este caso, al igual que en el caso de las variables polinómicas, el efecto marginal de x_{2i} y x_{3i} sobre y_i no es constante. En este caso, el efecto de x_{2i} sobre y_i depende de x_{3i}, y el efecto de x_{3i} sobre y_i depende de x_{2i}. Nota, además, que el ejemplo de las variables polinómicas no es más que un caso de interacción entre una variable y ella misma.

Para ver un ejemplo de cómo la no linealidades podrían ayudarnos a perfeccionar un modelo econométrico, volvamos a considerar el ejemplo del ingreso per cápita como variable explicativa de la esperanza de vida. Sin embargo, en este caso, consideremos un modelo recíproco. Es decir, ahora tenemos que estimar los coeficientes del modelo:

$$\text{Esperanza}_i = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\text{Ingreso}_i} + u_i.$$

Los resultados de estimación utilizando el método de los MCO se pueden ver en el cuadro 3. Como puede constatarse, los coeficientes son estadísticamente significativos (valores p inferiores a 10 %), y el estadístico F también implica que los coeficientes en conjunto son diferentes de cero. Además, tanto la R^2 como la R^2 ajustada se han incrementado ligeramente. Sin embargo, es importante resaltar que este modelo conlleva una mejora considerable en términos de interpretación. Para ver esto, considera un país como México, el cual tenía un PIB per cápita de 19,900 dólares anuales en 2017. Si usamos el modelo lineal, la esperanza de vida para un mexicano promedio es, de acuerdo con nuestro modelo de:

$$\widehat{\text{Esperanza}}_i = 68.23 + 0.0002013 \times 19,900 = 68.61,$$

lo cual parece muy coherente. Sin embargo, considera a Qatar, uno de los países con ingresos per cápita más altos de la muestra. Este tiene un ingreso per cápita promedio anual de 124,500 dólares. Ello se traduce en:

$$\widehat{\text{Esperanza}}_i = 68.23 + 0.0002013 \times 124,500 = 93.39.$$

Claramente, entre más el ingreso, más la esperanza de vida. El problema es que el modelo lineal podría, eventualmente, implicar esperanzas de vida superiores a los 200 años (o más). El modelo recíproco resuelve este problema ya que, en el límite, un país no puede tener una esperanza de vida superior a 76.83 años. Por ejemplo Qatar:

$$\widehat{\text{Esperanza}}_i = 76.83 - 23,236.6 \times \frac{1}{124,500} = 76.81.$$

Así pues, en el modelo recíproco, la constante juega el papel del límite superior que puede tomar la variable dependiente.

MCO, usando las observaciones 1–222
Variable dependiente: LifeExpectancy

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p
const	76.8347	0.483389	159.0	0.0000
RecPerCapitaGDP	−23236.6	1708.05	−13.60	0.0000

Media de la vble. dep.	73.03108	D.T. de la vble. dep.	7.954314
Suma de cuad. residuos	7594.282	D.T. de la regresión	5.875327
R^2	0.456889	R^2 corregido	0.454420
$F(1, 220)$	185.0734	Valor p (de F)	5.44e–31
Log-verosimilitud	−707.1089	Criterio de Akaike	1418.218
Criterio de Schwarz	1425.023	Hannan–Quinn	1420.965

Cuadro 3: Modelo de regresión lineal estimado por el método de los MCO. La variable dependiente es la esperanza de vida, la variable explicativa es el recíproco del ingreso per cápita medido en miles dólares.

3.2 Variables dicotómicas

Una forma en que podemos mejorar un modelo econométrico consiste en incluir variables de carácter cualitativo. Estas pueden ser, por ejemplo, variables de género, religión, nacionalidad, etcétera. Frecuentemente, esta información se presenta en forma dicotómica, es decir, con dos posibles respuestas: hombre y mujer, creyente o ateo, mexicano o extranjero, etcétera. Estas variables se conocen como *variables dicotómicas* o *variables dummy*. Para ver el funcionamiento de las variables dicotómicas, consideremos el modelo:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i.$$

Para ser más específicos, supongamos que la variable dependiente y_i es el ingreso y la variable explicativa x_i es el nivel educativo. Además, consideremos una variable dicotómica que nos permita capturar la posible existencia de discriminación de género. Por ejemplo, supongamos que nuestra hipótesis es que las mujeres ganan menos que los hombres para cualquier nivel de estudios. Sea D_i esta variable, la cual se define como:

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es mujer} \\ 0 & \text{si } i \text{ es hombre} \end{cases}.$$

En este caso, el modelo a estimar sería:

$$y_i = \beta_1 + \delta D_i + \beta_2 x_i + u_i,$$

y el modelo estimado sería:

$$\widehat{y}_i = \begin{cases} b_1 + d + b_2 x_i & \text{si } i \text{ es mujer} \\ b_1 + b_2 x_i & \text{si } i \text{ es hombre} \end{cases}. \tag{10}$$

De esta forma, tenemos un intercepto diferente para hombres y para mujeres. En caso de haber discriminación, el valor del coeficiente d tendría que ser negativo (y estadísticamente significativo).

Una versión más refinada del modelo anterior implicaría introducir, además de la variable dicotómica, una interacción de esta con la variable x_i:

$$
\begin{aligned}
y_i &= \beta_1 + \delta D_i + \beta_2 x_i + \lambda D_i x_i + u_i \\
&= \beta_1 + \delta D_i + (\beta_2 + \lambda D_i) x_i + u_i,
\end{aligned}
$$

de tal forma que el modelo estimado implicaría:

$$
\widehat{y}_i = \begin{cases} b_1 + d + (b_2 + \widehat{\lambda}) x_i & \text{si } i \text{ es mujer} \\ b_1 + b_2 x_i & \text{si } i \text{ es hombre} \end{cases}.
$$

En este caso podríamos probar la hipótesis que la mujer no solo tiene un salario menor que el de los hombres para cualquier nivel educativo, sino que, además, su salario crece a una tasa más lenta.

En el cuadro 4 modelamos la relación entre el salario por hora (WAGE), las variables explicativas son los años de experiencia (EXPER) y los años de educación (EDUCATION), así como tres variables dicotómicas que indican el género (FEMALE), la raza (NONWHITE) y si la persona está sindicalizada (UNION). La primera vale 1 cuando la observación es una mujer y 0 cuando es hombre, la segunda vale 1 cuando la observación es una persona de raza diferente a la blanca y 0 en caso contrario, y la tercera vale 1 cuando la persona está sindicalizada y 0 si no.

Los resultados indican que un año más de educación incrementa el salario en 1.37 dólares por hora, mientras que la experiencia lo hace en 0.17 dólares. Los signos negativos de la variables dicotómicas para el género y raza indican claramente el efecto discriminario en la muestra. En particular, para cualquier nivel de educación y experiencia, las mujeres ganan en promedio 3.07 dólares menos por hora que los hombres y las personas de raza diferente a la blanca 1.56 dólares menos.

Por su parte, las personas sindicalizadas ganan 1.09 dólares más por hora. Nota, además, que todos los coeficientes son estadísticamente diferentes de cero.

3.3 Variables relevantes omitidas

Una parte muy importante de la formulación de un modelo consiste en incluir todas aquellas variables que consideremos relevantes. En ocasiones, sin embargo, existirán variables que no se pueden incluir debido a

MCO, usando las observaciones 1–1289
Variable dependiente: wage

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p
const	-7.18334	1.01579	-7.072	0.0000
female	-3.07488	0.364616	-8.433	0.0000
nonwhite	-1.56531	0.509188	-3.074	0.0022
union	1.09598	0.506078	2.166	0.0305
education	1.37030	0.0659042	20.79	0.0000
exper	0.166607	0.0160476	10.38	0.0000

Media de la vble. dep.	12.36585	D.T. de la vble. dep.	7.896350
Suma de cuad. residuos	54342.54	D.T. de la regresión	6.508137
R^2	0.323339	R^2 corregido	0.320702
$F(5, 1283)$	122.6149	Valor p (de F)	3.5e–106
Log-verosimilitud	-4240.370	Criterio de Akaike	8492.741
Criterio de Schwarz	8523.710	Hannan–Quinn	8504.365

Cuadro 4: Modelo de regresión lineal estimado por el método de los MCO. La variable dependiente es el salario, las variables explicativas son los años de experiencia, los años de educación y tres variables dicotómicas, una que indica el género, otra que indica si la persona es de raza blanca y otra que indica si la persona está sindicalizada.

que no contamos con los datos o porque la teoría que intentamos comprobar no está bien estudiada. ¿Cuáles son las consecuencias de omitir variables relevantes?

- Si la variable (o variables) omitidas tienen relación (están correlacionadas) con las variables incluidas en el modelo, los coeficientes estimados por el método de los MCO no serán insesgados. Este sesgo no desaparece aun cuando la muestra sea muy grande.
- Si la variable (o variables) omitidas no tienen relación con las variables incluidas en el modelo, los coeficientes estimados por el método de los MCO serán insesgados, excepto el del intercepto.
- El estimador de la varianzas de los errores $\widehat{\sigma}^2$ será incorrecto.
- Las varianzas de los coeficientes estimados también serán incorrectos, al igual que sus errores estándar.

- Las pruebas estadísticas relacionadas con los errores estándar de los coeficientes, t y F, no serán confiables.

Lo anterior implica que las consecuencias de omitir una variable relevante son muy serias. La pregunta es: ¿qué podemos hacer para evitar este problema? Tenemos dos posibilidades:

1. Si sabemos que tenemos una variable relevante, pero no contamos con los datos para incluirla en el modelo, la solución es incluir en su lugar una *variable proxy*. Una variable proxy es una variable con una fuerte relación (lineal) con la variable omitida. Podemos demostrar que una variable proxy resuelve todos los problemas listados anteriormente. La elección de la variable proxy, por supuesto, dependerá de la astucia del investigador.
2. Si no sabemos que estamos omitiendo una variable relevante, no nos daremos cuenta que nuestro modelo sufre de sesgos en la estimación. Por esa razón, siempre es conveniente realizar una prueba de especificación y, en su defecto, estimar modelos alternativos.

Para ver el efecto de las variables omitidas, consideremos nuevamente el ejemplo de la determinación del salario. En relación con el ejemplo de la sección anterior, incluiremos ahora una variable polínomica: la experiencia al cuadrado, la cual podría indicar que el salario crece más o menos rápido conforme la experiencia crece. Los resultados se muetran en el cuadro 5. Como podemos constatar, el cuadrado del salario (SQ_EXPER) es estadísticamente significativo y negativo. Esto implica que, conforme se gana experiencia, el incremento en el salario derivado de un año más de experiencia en cada vez más pequeño.

Si comparamos los cuadros 4 y 5 podemos, además, ver cómo la omisión de la variable relevante SQ_EXPER introduce sesgo en el resto de las variables del modelo. Esto se ve en las importantes diferencias que existen entre los coeficientes de uno y otro modelos. Asimismo, los errores estándar de los coeficientes son un tanto diferentes.

3.4 Variables irrelevantes

Como hemos dicho anteriormente, es posible caer en la tentación de incluir muchas variables en el modelo con el fin de incrementar artificialmente la R^2. Sin embargo, muchas de estas variables podrían no tener un

MCO, usando las observaciones 1–1289
Variable dependiente: wage

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p
const	−8.41904	1.03571	−8.129	0.0000
female	−3.00936	0.361432	−8.326	0.0000
nonwhite	−1.53608	0.504448	−3.045	0.0024
union	1.02698	0.501521	2.048	0.0408
education	1.32375	0.0659368	20.08	0.0000
exper	0.424463	0.0535797	7.922	0.0000
sq_exper	−0.00618329	0.00122697	−5.039	0.0000

Media de la vble. dep.	12.36585	D.T. de la vble. dep.	7.896350
Suma de cuad. residuos	53286.93	D.T. de la regresión	6.447128
R^2	0.336483	R^2 corregido	0.333378
$F(6, 1282)$	108.3548	Valor p (de F)	1.5e–110
Log-verosimilitud	−4227.728	Criterio de Akaike	8469.455
Criterio de Schwarz	8505.586	Hannan–Quinn	8483.017

Cuadro 5: Modelo de regresión lineal estimado por el método de los MCO. La variable dependiente es el salario, las variables explicativas son los años de experiencia, los años de educación y tres variables dicotómicas, una que indica el género, otra que indica si la persona es de raza blanca y otra que indica si la persona está sindicalizada. Incluimos, además, una variable polinómica.

significado económico o simplemente no ser coherentes con el modelo. Nos preguntamos si existe alguna consecuencia adicional al incluir estas variables irrelevantes. Se puede demostrar que en presencia de variables irrelevantes:

- Los estimadores de MCO continúan siendo insesgados.
- El estimador de la varianzas de los errores $\widehat{\sigma}^2$ será correcto.
- Las varianzas de los coeficientes estimados también serán correctos, al igual que sus errores estándar.
- Las pruebas estadísticas relacionadas con los errores estándar de los coeficientes, t y F, serán, de hecho, confiables.

Entonces, no existe ninguna consecuencia al incluir variables irrelevantes en el modelo. Y, en todo caso, la presencia de estas puede ser detectada muy fácilmente mediante las pruebas de significatividad t y F.

3.5 Selección del modelo y prueba de especificación

Hemos dicho antes que para estar seguros de estar estimando el mejor modelo posible resulta conveniente estimar varios modelos alternativos, así como realizar alguna prueba de especificación. El proceso de selección de un modelo puede resumirse como sigue:

1. Usamos la teoría económica y la intuición para elegir las variables y la forma funcional. Este paso depende, como siempre, de la pericia del investigador.
2. Si la ecuación estimada resulta en estimadores con signos inesperados o de magnitudes poco realistas podemos sospechar de la omisión de alguna variable relevante.
3. Realizar las pruebas pertinentes (t o F) para descartar variables irrelevantes.
4. Comparar los diferentes modelos con base en los diferentes criterios de selección. El más común en la literatura es la R^2 ajustada, pero existen otros que la mayor parte de los programas econométricos arrojan automáticamente. Estos son: 1) el criterio de Akaike (AIC, por sus siglas en inglés) y el criterio de Schwartz (BIC o SIC, por sus siglas en inglés). Las fórmulas de estos son:

$$AIC = \ln\left(\frac{RSS}{N}\right) + \frac{2k}{N}$$
$$BIC = \ln\left(\frac{RSS}{N}\right) + \frac{k\ln(N)}{N},$$

   donde RSS se refiere a la suma del cuadrado de los residuales del modelo, k es el número de coeficientes estimados y N es el número de observaciones. Usando estos criterios, preferimos el modelo que tenga los valores AIC y BIC más bajos posibles.
5. Realizar una prueba de especificación para saber si nuestro modelo es apropiado, es decir, si no tiene variables omitidas, si tiene la forma funcional adecuada, etcétera.

Una de las pruebas de especificación más utilizadas en la práctica es la prueba RESET (que viene de las iniciales de Regression Specification Error Test). Esta prueba requiere seguir los siguientes pasos:

- Estimamos nuestro mejor modelo, es decir, aquel que haya pasado por todos los filtros de la lista anterior. Calculamos el valor estimado de la variable dependiente:

$$
\begin{aligned}
y_i &= \beta_1 + \beta_2 x_2 + u_i \\
\Rightarrow \widehat{y}_i &= b_1 + b_2 x_2.
\end{aligned}
$$

- Calculamos y guardamos la R^2 del modelo. Denotaremos esta como R_1^2:

$$R_1^2 = 1 - \frac{RSS_1}{TSS_1}.$$

- Estimamos alguna de las ecuaciones siguientes (o ambas):

  1. $y_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 \widehat{y}_i^2 + \upsilon_i$
  2. $y_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 \widehat{y}_i^2 + \alpha_4 \widehat{y}_i^3 + \upsilon_i.$

- Calculamos y guardamos la R^2 del nuevo modelo. Llamaremos a esta R_2^2:

$$R_2^2 = 1 - \frac{RSS_2}{TSS_2}.$$

- Definimos k_n como el número de regresores adicionales en el modelo. Calculamos el estadístico F:

$$F = \frac{(R_2^2 - R_1^2)/k_n}{(1 - R_1^2)/(n - k_n)}.$$

  Este estadístico lo comparamos con las tablas de la distribución F con grados de libertad k_n en el numerador y $(N - k_n)$ en el denominador, o bien, calculamos el valor p de la prueba. Como siempre, si el valor p de la prueba es más pequeño que 10 % rechazamos la hipótesis nula de que el modelo está correctamente especificado.

Si comparamos los cuadros 4 y 5 podemos usar los diferentes criterios para seleccionar cuál es el mejor de ellos. Nota que la R^2 ajustada del modelo en el cuadro 5 es mayor, y los criterios AIC y BIC son inferiores. Esto significa que deberíamos preferir esta la segunda especificación.

Para concluir, apliquemos la prueba de especificación al modelo en el cuadro 5. En esta el estadístico F de la prueba es igual a 23.31. El valor p de esta prueba es igual a $1.14e - 10$ (cero). Por lo tanto, podemos rechazar la hipótesis nula de que el modelo está bien especificado.

4 Violación de los supuestos al modelo de regresión lineal: multicolinealidad

Recordemos el supuesto S3 del modelo de regresión lineal: no existe una relación lineal exacta entre las x de la ecuación (1). Si esto ocurriera (si encontráramos una relación lineal entre dos o más variables del modelo) nos enfrentaríamos al problema de multicolinealidad, o simplemente colinealidad.

Tenemos que distinguir entre *multicolinealidad perfecta* y *multicolinealidad imperfecta*. La primera existe cuando la relación entre dos o más variables es exacta. Por ejemplo: $x_4 = 3x_2 + 5x_3$. Este problema, aunque grave, es muy simple de detectar. En realidad, cuando tenemos multicolinealidad perfecta no será posible calcular los estimadores de MCO. Afortunadamente, el problema de multicolinealidad perfecta no es muy común en la práctica y, aun cuando este ocurre, es posible que en algunos casos pueda ser resuelto automáticamente por el programa econométrico de nuestra preferencia.

Tenemos multicolinealidad imperfecta cuando, por ejemplo: $x_4 = 3x_2 + 5x_3 + \nu_i$, donde ν_i es un término aleatorio. La existencia de este último término hace que la relación entre las variables x_2, x_3 y x_4 sea muy cercana, pero no exacta. Dado que ν_i es un término inobservable, tenemos que hacer un poco más de esfuerzo para detectar qué tan cercana es la relación entre las variables involucradas y si esta relación implica que el estimador de MCO ya no es confiable.

Podemos resumir las consecuencias de la multicolinealidad imperfecta como sigue:

- Los estimadores de MCO siguen siendo MELI, pero tienen varianzas y covarianzas más grandes de lo normal. Esto hace que sean menos precisos.
- Como consecuencia de lo anterior, los estadísticos t de uno o más coeficientes tienden a ser más pequeños de lo normal —ver ecuación (8)—. Esto hace más probable que los coeficientes resulten ser estadísticamente iguales a cero.
- Aun cuando los estadísticos t son pequeños y los coeficientes iguales a cero, la regresión podría tener una R^2 muy alta, lo cual constituye una contradicción.
- Los estimadores de MCO y sus errores estándar resultan ser muy sensibles a pequeños cambios en los datos (y y las x).

- Cuando agregamos una variable que guarda una relación lineal muy cercana con otras variables del modelo los coeficientes estimados de todas las variables podrían verse afectados.

No demostraremos los puntos anteriores aquí. Más bien, enfocaremos nuestros esfuerzos en explicar la forma de detectar la multicolinealidad y algunas medidas correctivas.

4.1 Detección de la multicolinealidad

Como veremos, para detectar cualquier problema que pueda surgir antes de hacer la estimación de los coeficientes de un modelo, es necesario hacer varias pruebas. Estas pueden ser meramente visuales o pueden ser pruebas estadísticas más serias. Este es el caso de la detección de la multicolinealidad. Algunas de las pruebas que se han utilizado más comúnmente en la literatura son:

1. **Resultados contradictorios**. Antes mencionamos que una de las consecuencias de la multicolinealidad es que los estadísticos t de los coeficientes tienden a ser más pequeños de lo normal, lo cual dificulta que estos pasen las pruebas de significatividad. Esto, junto con una R^2 alta, resulta en un resultado contradictorio que es un primer indicativo de la posible presencia de multicolinealidad en el modelo.
2. **Correlación simple entre los regresores**. También podemos calcular la correlación simple entre los regresores que incluiremos en el modelo. Recordemos que el coeficiente de correlación entre dos variables es un número entre 1 y -1, indicando correlación perfecta positiva y correlación perfecta negativa, respectivamente. Entre más cercana a estos límites se encuentre la correlación entre dos o más regresores del modelo, más es la probabilidad de tener un problema de multicolinealidad.
3. **Regresiones auxiliares**. Podemos correr (usando MCO) varias regresiones auxiliares de la forma:

   $$x_{ij} = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i2} + \cdots + \alpha_{j-1} x_{ij-1} + \alpha_{j+1} x_{ij+1} + \cdots + \alpha_k x_{ik} + \nu_i,$$

   para $j = 1, \ldots, k$, es decir, una regresión de cada regresor del modelo contra el resto de los regresores. Aquí la regla de oro es: si la $R^2 > 0.90$ para alguna de las regresiones auxiliares, es muy probable que exista un problema de multicolinealidad en el modelo.

Por supuesto, también es posible hacer una prueba F de significatividad conjunta de los coeficientes para cada regresión auxiliar. En este caso tendríamos un problema de multicolinalidad si en al menos una de las regresiones auxiliares rechazamos la hipótesis nula de que los coeficientes en conjunto son iguales a cero.

4. **Factor de inflación de la varianza**. El factor de inflación de la varianza (vif, por sus siglas en inglés) está muy relacionado con el método anterior. Este consiste en calcular las mismas regresiones auxiliares de antes, pero, en lugar de calcular la R^2 calculamos:

$$vif_j = \frac{1}{1 - R^2}.$$

Aquí la regla de decisión es: tenemos un problema de multicolinealidad en el modelo si el $vif > 10$ para alguna de las regresiones auxiliares. Nota que esto ocurre justamente cuando la $R^2 > 0.90$.

En el cuadro 6 mostramos la matriz de correlación entre las millas por galón (MPG), número de cilindros (CYL), tamaño del motor (ENG) y peso del vehículo (WGT). Vemos que hay variables que tienen una correlación muy alta, por ejemplo el tamaño del motor y el peso del vehículo (correlación de 0.933). Esto podría implicar un problema de multicolinealidad en el modelo presentado en el cuadro 7.

Para comprobar lo anterior, observemos que el modelo del cuadro 7 presenta una R^2 alta y coeficientes en su mayoría no significativos, lo cual es el primer síntoma de la presencia de multicolinealidad. Luego, si calculamos el vif, obtenemos los resultados del cuadro 8. Nota que para las variables CYL y ENG, el $vif > 10$, lo cual confirma las sospechas de multicolinealidad.

4.2 Remedios para la multicolinealidad

Parece simple, pero en ocasiones el mejor remedio para la multicolinealidad (imperfecta) es no hacer nada. Esto es porque la multicolinealidad es un problema específico de los datos y no un problema del modelo en sí. Sin embargo, a veces vale la pena volver a pensar en la estructura del modelo para asegurarnos de que las variables que hemos incluido en verdad deben estar. Si la respuesta es sí, entonces podemos presentar los resultados obtenidos junto con las pruebas de multicolinealidad correspondientes (o al menos una alerta al lector para que tenga en cuenta la presencia de multicolinealidad en el modelo).

Coeficientes de correlación, usando las observaciones 1 - 392
valor crítico al 5 % (a dos colas) = 0.0991 para n = 392

mpg	cyl	eng	wgt	
1.0000	−0.7776	−0.8051	−0.8322	mpg
	1.0000	0.9508	0.8975	cyl
		1.0000	0.9330	eng
			1.0000	wgt

Cuadro 6: Matriz de correlación entre las millas por galón, número de cilindros, tamaño del motor (pulgadas cúbicas)y peso del vehículo.

MCO, usando las observaciones 1–392
Variable dependiente: mpg

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p
const	44.3710	1.48069	29.97	0.0000
cyl	−0.267797	0.413067	−0.6483	0.5172
eng	−0.0126740	0.00825007	−1.536	0.1253
wgt	−0.00570788	0.000713919	−7.995	0.0000

Media de la vble. dep.	23.44592	D.T. de la vble. dep.	7.805007
Suma de cuad. residuos	7162.549	D.T. de la regresión	4.296531
R^2	0.699293	R^2 corregido	0.696967
$F(3, 388)$	300.7635	Valor p (de F)	7.6e–101
Log-verosimilitud	−1125.674	Criterio de Akaike	2259.349
Criterio de Schwarz	2275.234	Hannan–Quinn	2265.644

Cuadro 7: Modelo de regresión lineal estimado por el método de los MCO. Variable dependiente es el rendimiento del vehículo, y las variables explicativas el número de cilindros, tamaño del motor y peso del vehículo.

5 Violación de los supuestos al modelo de regresión lineal: heteroscedasticidad

Uno de los problemas más comunes cuando trabajamos con datos de sección cruzada es el problema de la heteroscedasticidad. Como hemos dicho, este problema es una violación al supuesto S5 del modelo de regresión lineal. Existen varias razones para este problema, por ejemplo la presencia de *outliers* —datos fuera de lo común o extremos—, la forma

Factores de inflación de varianza (VIF)
Mínimo valor posible = 1.0
Valores mayores que 10.0 pueden
indicar un problema de colinealidad

cyl	10.516
eng	15.786
wgt	7.789

$VIF(j) = 1/(1 - R(j)^2)$, donde $R(j)$ es el coeficiente de correlación múltiple entre la variable j y las demás variables independientes .

Cuadro 8: Factores de inflación de la varianza.

funcional incorrecta del modelo, una transformación incorrecta de los datos, el uso de datos medidos en diferentes escalas, entre otros.

Las consecuencias de la heteroscedasticidad se resumen como sigue:

- Los estimadores de MCO siguen siendo insesgados y consistentes aun en presencia de heteroscedasticidad. Sin embargo dejan de ser eficientes. En resumen, los estimadores de MCO dejan de ser MELI.
- Dabido a la ineficiencia de los estimadores —es decir, debido a que su varianza es más grande de lo normal—, los estadísticos t y F dejan de ser confiables, lo cual puede conducir a errores con respecto a la significatividad estadística de los coeficientes de regresión.

Debido a la ineficiencia de los coeficientes obtenidos mediante método de los MCO, es necesario un método diferente de estimación. Sin embargo, antes de analizar este, veremos cuáles pruebas existen en la literatura para detectar la presencia de heteroscedasticidad.

5.1 Detección de la heteroscedasticidad

Como hemos dicho, existen varias pruebas que debemos hacer antes de estar seguros de que la heteroscedasticidad existe en nuestro modelo. Uno de los métodos más fáciles de detección es el gráfico, el cual consiste en estimar el modelo por el método de los MCO, calcular los residuales, elevarlos al cuadrado y graficarlos ya sea en un histograma o contra la variable dependiente estimada. Por ejemplo, consideremos un modelo en el cual modelamos el gasto en alimentación semanal como función del ingreso. La ecuación tiene la forma:

$$\text{Alimentación}_i = \beta_1 + \beta_2 \text{Ingreso}_i + u_i.$$

Si estimamos los coeficientes por MCO, calculamos los residuales al cuadrado y graficamos contra la variable ingreso, observamos un patrón identificable que bien podría considerarse un síntoma de la presencia de heteroscedasticidad. Como se muestra en la figura 3, el cuadrado de los residuales no solamente tienen una tendencia creciente, sino que las distancias se van haciendo cada vez más grandes conforme crece el ingreso semanal.

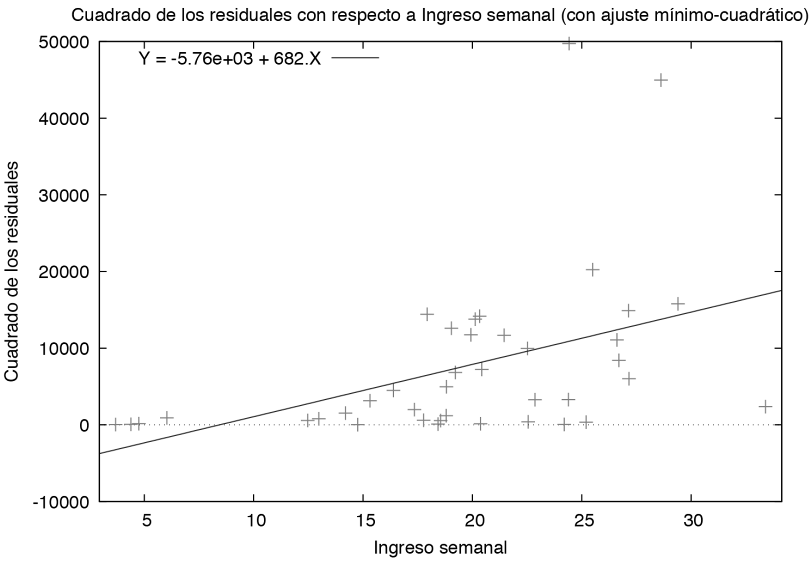


Figura 3: Cuadrado de los residuales contra el ingreso para un ejemplo estimado por MCO.

Sin embargo, aun cuando el método gráfico constituye una forma relativamente sencilla de detectar la heteroscedasticidad, conviene hacer otras pruebas más formales. Entre estas se encuentran la prueba de Breusch-Pagan (BP) y la prueba de White.

Prueba de Breusch-Pagan (BP)

En la prueba de BP se plantea la hipótesis nula de homoscedasticidad; es decir, $H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2$. Esta prueba requiere de varios pasos:

Contraste de heterocedasticidad de Breusch-Pagan MCO, usando las observaciones 1-40 Variable dependiente: uhat^2 escalado

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p
const	-0.756949	0.633618	-1.195	0.2396
income	0.0896185	0.0305534	2.933	0.0057

Suma de cuadrados explicada = 14.6879

Estadístico de contraste: LM = 7.343935,
con valor p = P(Chi-cuadrado(1) $>$ 7.343935) = 0.006729

Cuadro 9: Prueba de Breusch-Pagan.

- Estimamos el modelo mediante el método de los MCO.
- Calculamos y guardamos los residuales e_i.
- Calculamos y guardamos el cuadrado de los residuales e_i^2.
- Volvemos a utilizar MCO para estimar el modelo:

$$e_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 z_{2i} + \alpha_3 z_{3i} + \cdots + \alpha_s z_{si} + \nu_i.$$

- Calculamos el estadístico de BP:

$$BP = NR^2,$$

  donde N es el número de observaciones y R^2 el coeficiente de determinación del modelo estimado en el punto anterior.
- Comparamos el valor del estadístico BP contra las tablas de una distribución chi-cuadrada con $s-1$ grados de libertad, o bien, calculamos el valor p de esta prueba. Como siempre, si el valor p de la prueba es inferior a 10 % rechazamos la hipótesis nula de homescedasticidad.

En el ejemplo del gasto de alimentación tenemos los resultados que se muestran en el cuadro 9. El valor p de la prueba es 0.0067, el cual es menor que 10 %. Esto implica que la hipótesis nula de homoscedasticidad se rechaza. En otras palabras tenemos heteroscedasticidad.

Uno de los problemas que presenta la prueba de BP es la elección de las variables z en la regresión del cuadrado de los residuales. La opción que se usa en la literatura es utilizar las mismas variables que el modelo estimado en la primera parte de la prueba. Sin embargo, podríamos utilizar cualquier otra variable.

Contraste de heterocedasticidad de White MCO, usando las observaciones 1-40
Variable dependiente: uhat^2

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p
const	-2908.78	8100.11	-0.3591	0.7216
income	291.746	915.846	0.3186	0.7519
sq_income	11.1653	25.3095	0.4411	0.6617

R-cuadrado = 0.188877

Estadístico de contraste: TR^2 = 7.555079,
con valor p = P(Chi-cuadrado(2) $>$ 7.555079) = 0.022879

Cuadro 10: Prueba de White.

Prueba de White

La prueba de White es virtualmente idéntica que la prueba de BP, solo que es más específica en las variables z utilizadas en la regresión del cuadrado de los residuales. Para ejemplificar, considera el siguiente modelo de regresión:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i.$$

En este caso:

$$z_2 = x_2;\ z_3 = x_3;\ z_4 = x_2^2;\ z_5 = x_3^2;\ z_6 = x_2 x_3.$$

Esto es, la prueba de White toma en cuenta los regresores del modelo, además del cuadrado de estos y su producto cruzado. Para el ejemplo del gasto en alimentación tenemos los resultados que se muestran en el cuadro 10. Nota que el valor p de la prueba es 0.0229, el cual es menor que 10 %. Esto supone que la hipótesis nula de homoscedasticidad se rechace.

5.2 Remedios para la heteroscedasticidad

El problema con la heteroscedasticidad es que no conocemos su verdadera naturaleza. Esto es porque la varianza de los errores, σ^2, es desconocida. Si pudiéramos observarla, obtendríamos estimadores MELI si transformamos los datos dividiéndolos entre σ y estimando el modelo resultante por el método de los MCO. Este método de estimación se conoce como mínimos cuadrados ponderados (MCP, o WLS por sus siglas en inglés). Naturalmente, dado que σ^2 no es observable, no podemos aplicar de forma directa este método. Entonces, en la práctica se acostumbra intentar adivinar la forma que tiene σ^2 para poder así aplicar el método de los MCP.

Estimaciones de MCO
Variable dependiente: food_exp

	(1)	(2)
const	83.42^{*}	83.42^{**}
	(43.41)	(27.46)
income	10.21^{**}	10.21^{**}
	(2.093)	(1.809)
n	40	40
R^2	0.3850	0.3850
ℓ	-235.5	-235.5

Desviaciones típicas entre paréntesis
* indica significativo al nivel del 10 %
** indica significativo al nivel del 5 %

Cuadro 11: Comparación del método de los MCO y el método de los MCO con errores estándar robustos.

Debido a que el procedimiento de los MCP tiende a ser relativamente complejo, también es posible utilizar el procedimiento propuesto por White, el cual consiste en estimar el modelo por MCO, pero con los errores estándar corregidos para contemplar la heteroscedasticidad. En la literatura, estos errores estándar corregidos se conocen como errores estándar robustos.

La demostración de cómo calcular estos errores estándar robustos es relativamente compleja, pero muchos programas econométricos tienen la opción de hacer este cálculo de manera muy simple (comúnmente el usuario tiene la opción de estimar el modelo con o sin estándar errores estándar robustos según sea necesario). Cuando se estima el modelo de esta forma, si bien el problema de heteroscedasticidad no desaparece, al menos podemos confiar en que, dado que los errores estándar están corregidos, todas las pruebas de hipótesis, t o F son confiables. En el cuadro 11 mostramos el modelo del gasto en alimentación estimado por el método de los MCO, modelo (1) y el método de los MCO con errores estándar robustos, modelo (2). El cuadro muestra los coeficientes estimados y debajo, entre paréntesis, los errores estándar. Nota como los coeficientes en ambos casos son virtualmente iguales, lo que muestra que los estimadores son insesgados aun en presencia de heteroscedasticidad. Sin embargo, es claro que el error estándar es mucho más grande en caso del modelo (1).

6 Violación de los supuestos al modelo de regresión lineal: autocorrelación

El problema de la autocorrelación aparece más comúnmente cuando trabajamos con series temporales. Este representa una violación al supuesto S6 del modelo de regresión lineal y significa que existe alguna relación entre el error del periodo t, u_t y el error del periodo $t-1$, u_{t-1} o el error de cualquier otro periodo. Si los términos de error están relacionados:

- Los estimadores de MCO siguen siendo insesgados y consistentes. Si, además se cumple el supuesto S9 del modelo de regresión lineal, los estimadores de MCO siguen siendo normales para muestras grandes.
- Los estimadores de MCO dejan de ser eficientes —su varianza es más grande de lo normal—. Por lo tanto, los estadísticos t y F dejan de ser confiables, lo cual puede conducir a errores con respecto a la significatividad estadística de los coeficientes de regresión.

Igual que en el caso de la heteroscedasticidad, necesitamos saber si el problema de la autocorrelación existe para luego tomar las medidas preventivas necesarias. Analizaremos esto a continuación.

6.1 Detección de la autocorrelación

La forma más simple de detectar la presencia de autocorrelación es utilizando un gráfico. Aunque este método no es el más preciso (debido a que confiamos en nuestro ojo e intuición de los resultados), hacer un gráfico de los residuales del modelo contra el tiempo siempre es una buena práctica. Si los residuales del modelo son como debieran ser, no debería existir un patrón identificable en la gráfica. De otra forma tendríamos que concluir que la autocorrelación existe.

Por ejemplo, consideremos una versión simple de la curva de Phillips, la cual modela la relación entre la tasa de inflación y la tasa de desempleo (usando datos de Australia). La ecuación a estimar es:

$$inf_t = \beta_1 + \beta_2 tasa\_desempleo_t + u_t.$$

Estimamos la ecuación por MCO y graficamos los residuales contra el tiempo. El resultado se muestra en la figura 4. Se observa claramente un patrón identificable que bien podría considerarse un síntoma de la presencia de autocorrelación.

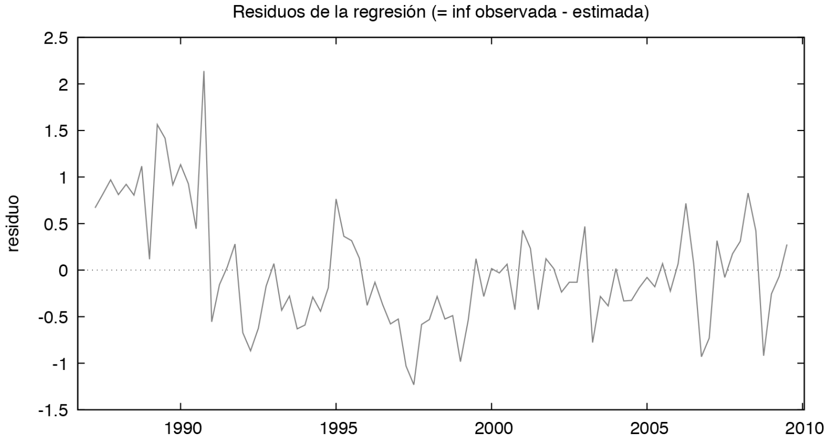


Figura 4: Gráfica de los residuales contra el tiempo para un ejemplo estimado por MCO.

Otras pruebas más formales para detectar la autocorrelación que se utilizan en la literatura son la prueba de Durbin-Watson (DW) y la prueba Breusch-Godfrey (BG).

Prueba de Durbin Watson (DW)

La prueba de DW es quizás la prueba más utilizada para identificar la presencia de autocorrelación en los errores. A pesar de esto, la prueba es también una de las más limitadas. Esto es porque se basa en varios supuestos difíciles de satisfacer en la práctica. No nos detendremos a analizar estos supuestos aquí. En su lugar, analizaremos cómo se calcula el estadístico de la prueba y cómo se interpreta este.

El estadístico de la prueba DW, que llamaremos d, se calcula como:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{t=N} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{t=N} e_t^2}$$

Primero, nota que este estadístico toma valores que se encuentran entre 0 y 4. Segundo, es muy difícil saber cuál es la distribución de d; esto se debe a que los valores que tome dependen de la muestra de datos considerada. Sin embargo, Durbin y Watson lograron establecer dos valores críticos, que denotaremos como d_L y d_U que nos ayudan a tomar decisiones con respecto a la existencia o no de autocorrelación. En particular:

- Si $d < d_L$, tenemos evidencia de autocorrelación positiva.
- Si $d > d_U$, no hay evidencia de autocorrelación positiva.
- Si $d_L < d < d_U$, no es posible hacer una conclusión sobre la existencia de autocorrelación positiva.
- Si $d_U < d < 4-d_U$, no hay evidencia ni de autocorrelación positiva ni de autocorrelación negativa.
- Si $4 - d_U < d < 4 - d_L$, no es posible hacer una conclusión sobre la existencia de autocorrelación negativa.
- Si $4 - d_L < d < 4$, tenemos evidencia de autocorrelación negativa.

Para obtener los valores críticos podemos usar los valores de las tablas de Durbin y Watson, las cuales consideran niveles de significancia de 10 %, 5 % y 1 % y permiten muestras de hasta 200 observaciones.

Si las reglas que acabamos de listar te parecen difíciles de recordar, nota que estas se pueden resumir en lo siguiente: entre más cercano a cero es el estadístico d mayor es la evidencia de autocorrelación positiva, y entre más cercano a 4 mayor es la evidencia de autocorrelación negativa. Si d es cercano a 2 no hay evidencia de ningún tipo de autocorrelación. El cuadro 12, por ejemplo, muestra que el estadístico de DW es 0.88, lo cual es un indicador de la existencia de una posible autocorrelación negativa en los residuales.

Prueba de Breusch-Godfrey (BG)

La prueba de BG es mucho menos restrictiva que la de DW. Esta requiere del siguiente procedimiento:

MCO, usando las observaciones 1987:2–2009:3 (T = 90)
Variable dependiente: inf

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p
const	0.777621	0.0658249	11.81	0.0000
d_u	−0.527864	0.229405	−2.301	0.0238

Media de la vble. dep.	0.791111	D.T. de la vble. dep.	0.636819
Suma de cuad. residuos	34.04454	D.T. de la regresión	0.621989
R^2	0.056752	R^2 corregido	0.046033
$F(1, 88)$	5.294666	Valor p (de F)	0.023754
Log-verosimilitud	−83.95817	Criterio de Akaike	171.9163
Criterio de Schwarz	176.9160	Hannan–Quinn	173.9325
$\hat{\rho}$	0.549882	Durbin–Watson	0.887289

Cuadro 12: Estimación por MCO. Versión simple de la curva de Phillips.

- Estimamos el modelo mediante el método de los MCO.
- Calculamos y guardamos los residuales, e_t.
- Utilizamos el método de los MCO para estimar el modelo:

$$e_t = \gamma + \delta_2 x_{2t} + \delta_3 x_{3t} + \cdots + \delta_k x_{kt} + \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \cdots + \rho_L e_{t-L} + \epsilon_t.$$

- Calculamos el estadístico de BG:

$$BG = TR^2,$$

  donde T es el número de observaciones y R^2 el coeficiente de determinación del modelo estimado en el punto anterior.
- Comparamos el estadístico BG contra las tablas de una distribución chi-cuadrada con L grados de libertad, donde L es el número de retardos de e_t incluidos en la regresión anterior, o bien, calculamos el valor p de esta prueba. Como siempre, si el valor p de la prueba es inferior a 10 % rechazamos la hipótesis nula de no autocorrelación.

Si aplicamos la prueba de BG a la estimación de la curva de Phillips obtenemos los resultados del cuadro 13. El valor p de la prueba (indicado en la tabla 13) como TRˆ2 es 5.15e-09 (cero) lo cual implica que la hipótesis nula de no autocorrelación se rechaza fácilmente. Existen otras pruebas adicionales que aparecen en el cuadro 13. No daremos detalles aquí; basta con decir que los valores p de estas pruebas también son muy cercanos a cero, reforzando la conclusión de autocorrelación en los residuales de la curva de Phillips.

Contraste Breusch-Godfrey de autocorrelación hasta el orden 4 MCO, usando las observaciones 1987:2-2009:3 (T = 90) Variable dependiente: uhat

	Coeficiente	Desv. Típica	Estadístico t	valor p
const	-0.0130019	0.0519579	-0.2502	0.8030
d_u	-0.473812	0.201371	-2.353	0.0210
uhat_1	0.325470	0.106438	3.058	0.0030
uhat_2	0.155441	0.111806	1.390	0.1681
uhat_3	0.169392	0.112812	1.502	0.1370
uhat_4	0.201361	0.109935	1.832	0.0706

R-cuadrado = 0.407466

Estadístico de contraste: LMF = 14.440976,
con valor p = P(F(4,84) >14.441) = 5.15e-09

Estadístico alternativo: TR^2 = 36.671897,
con valor p = P(Chi-cuadrado(4) $>$ 36.6719) = 2.1e-07

Ljung-Box Q' = 82.4327,
con valor p = P(Chi-cuadrado(4) $>$ 82.4327) = 5.31e-17

Cuadro 13: Prueba de Breusch-Godfrey.

6.2 Remedios para la autocorrelación

Si logramos mostrar que nuestro modelo presenta problemas de autocorrelación, el siguiente paso es aplicar alguna medida correctiva. Algunas formas relativamente simples de hacer esto son las siguientes:

- Supongamos que el modelo es:

  $$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + u_t,$$

  y que encontramos evidencia de autocorrelación en los errores. Una solución simple consiste en calcular primeras diferencias al modelo. Esto es:

  $$y_t - y_{t-1} = \beta_2(x_{2t} - x_{2t-1}) + \beta_3(x_{3t} - x_{3t-1}) + (u_t - u_{t-1}).$$

  Es fácil demostrar que esta versión del modelo no presenta problemas de autocorrelación. Sin embargo, este debe estimarse sin incluir el intercepto, β_1, el cual desaparece cuando hacemos la transformación del modelo. Esta transformación es realizada con facilidad por prácticamente cualquier programa econométrico.

- Otra transformación menos restrictiva que la anterior consiste en calcular:

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_{2t} - \rho x_{2t-1}) + \beta_3(x_{3t} - \rho x_{3t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1}),$$

donde el ρ puede estimarse por MCO a partir de la ecuación:

$$e_t = \rho e_{t-1} + \nu_t,$$

donde e_t es el residual de la ecuación que deseamos estimar. Este método se conoce como *mínimos cuadrados generalizados factibles*. Otro método para encontrar ρ que resulta más conveniente en muchos casos consiste en utilizar el estadístico de DW. En este caso:

$$\rho = 1 - \frac{d}{2}.$$

- Finalmente, al igual que en caso de la heteroscedasticidad, también es posible estimar el modelo por MCO, pero con errores estándar corregidos para contemplar la autocorrelación. Ahora, sin embargo, encontramos los errores estándar robustos a partir del procedimiento de Newey-West. Estos se conocen en la literatura como *errores estándar robustos para heteroscedasticidad y autocorrelación* (HAC, por sus siglas en inglés).
Al igual que antes, muchos programas econométricos tienen la opción de hacer la estimación de los coeficientes de MCO con errores estándar HAC. Cuando se estima el modelo de esta forma podemos confiar en que, dado que los errores estándar están corregidos, todas las pruebas de hipótesis t o F serán confiables.

En el cuadro 14 mostramos la curva de Phillips estimada por el método de los MCO, modelo (1) y por el método de los MCO con errores estándar robustos, modelo (2). El cuadro muestra los coeficientes estimados y debajo, entre paréntesis, los errores estándar. Al igual que en el caso de la heteroscedasticidad, los coeficientes en ambos casos son virtualmente los mismos, pero no así los errores estándar. En el modelo (2) los errores estándar son más grandes, lo que hace que pasar las pruebas t y F sea más difícil y, por tanto, los resultados sean más confiables.

Estimaciones de MCO
Variable dependiente: inf

	(1)	(2)
const	0.7776**	0.7776**
	(0.06582)	(0.1018)
d_u	$-$0.5279**	$-$0.5279*
	(0.2294)	(0.3092)
n	90	90
R^2	0.0568	0.0568
ℓ	$-$83.96	$-$83.96

Desviaciones típicas entre paréntesis
* indica significativo al nivel del 10 %
** indica significativo al nivel del 5 %

Cuadro 14: Curva de Phillips. Coeficientes estimados por MCO y por MCO con errores estándar robustos.

7 Conclusión

En este capítulo hemos revisado los fundamentos de la econometría. Hemos visto qué es y para qué sirve el modelo de regresión lineal, así como los supuestos necesarios para que el modelo funcione correctamente. Además, hemos visto qué pasa cuando los principales supuestos del modelo de regresión lineal no se satisfacen y cómo podemos corregirlos. El conocimiento de este material nos permite realizar una gran cantidad de análisis para probar teorías o nuestra intuición.

La econometría, sin embargo, tiene más métodos qué conocer. Por ejemplo, no hemos analizado problemas de ecuaciones simultáneas, los cuáles generan un problema de endogeneidad. Tampoco hemos analizado los problemas con paneles de datos. Aun nos interesan los modelos con variables dependientes cualitativas y modelos de series temporales más formales. No obstante, el conocimiento del material que aquí presentamos hace que el estudio de estos modelos sea más sencillo y su aprendizaje y compresión sea más natural.

8 Lecturas recomendadas

Existen muchos libros de texto que desarrollan los temas que aquí hemos repasado. Algunos son más intuitivos, otros prácticos y otros con una orientación más hacia las matemáticas. Los textos más utilizados para estudios a nivel de licenciatura son:

- Gujarati, D., y Porter, D. (2010). *Econometría*, Quinta edición. México. McGraw-Hill Latinoamerica.
- Wooldridge, J. (2015). *Introducción a la econometría, un enfoque moderno*, Quinta edición. EU. Cengage Learning.

Un libro de texto con un carácter más práctico es:

- Gujarati, D. (2014). *Econometrics by Example*, 2nd Edition. USA. Palgrave Macmillan.

Finalmente, los libros de texto recomendados para profundizar en la técnica incluyen:

- Baltagi, B. (2011). *Econometrics*, 5th Edition. USA. Springer.
- Greene, W. (2018). *Econometric Analysis*, 8th Edition. USA. Prentice Hall.

El presente libro nace como iniciativa de los profesores del Departamento de Economía y Finanzas de la Universidad de Guanajuato y tiene múltiples objetivos. Primero, ofrecer a los aspirantes a estudiar la Licenciatura en Economía un panorama general de las principales áreas de estudio a las que se enfrentarán durante los primeros años de su carrera. Segundo, proporcionar a los estudiantes de la Licenciatura en Economía una herramienta de consulta que les permita recordar de manera rápida los conceptos más importantes de su área de conocimiento. Tercero, proporcionar una herramienta de nivelación para todos aquellos aspirantes a estudiar una Maestría en Economía, especialmente aquellos con formación en áreas no afines a la economía, para que cuenten con los conocimientos mínimos necesarios para comenzar con éxito su programa. Finalmente, dar una idea al público general sobre los quehaceres propios de un economista.

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

ISBN: 978-607-441-591-9
9 786074 415919