

# Toma de decisiones en el manejo de fugas en redes de agua potable

## Decision making for water leakage management in water distribution systems

Xitlali Virginia Delgado Galván<sup>\*0</sup>, José de Jesús Mora Rodríguez<sup>\*</sup>, Julio Benítez<sup>\*\*</sup>, Rafael Pérez García<sup>^</sup>, Joaquín Izquierdo<sup>\*\*\*</sup>

### RESUMEN

En este trabajo se presenta una aplicación y comprobación del método de jerarquías analíticas (AHP, por sus siglas en inglés) a la toma de decisiones respecto a la gestión de fugas que llevará a cabo una empresa de suministro de agua potable. En la evaluación de alternativas serán considerados no solo los costos del desarrollo del proyecto, sino también algunas externalidades sociales y ambientales, con la finalidad de que la decisión tomada se ajuste más a la realidad de la empresa y su entorno. Para la correcta aplicación de AHP y para la validación de los resultados obtenidos, se hace hincapié en los requisitos que se deben cumplir en la construcción de matrices de comparación para ser consideradas válidas. Estas características son: positividad de sus componentes, homogeneidad, reciprocidad y consistencia, presentando esta última considerable complejidad, lo que ha motivado la generación de opciones para su mejora.

### ABSTRACT

This paper presents an application of analytical hierarchy process (AHP) for decision-making of leakage management in water distribution systems. It will be considered not only costs of project development, but also some social and environmental externalities, in order to achieve that decision making could fit more reality of water supply company and its environment. To apply AHP correctly and for results validation, it is imperative to focus on requirements that must have comparison matrices to be considered valid. These requirements are: positivity of its components, uniformity, reciprocity and consistency, the latter having considerable complexity, which has led to generation of options for improvement and those are shown in this article.

### INTRODUCCIÓN

Uno de los mayores problemas en las empresas de agua potable son las fugas en las redes de abastecimiento, las cuales provocan grandes pérdidas, pues para su manejo se invierte una suma considerable de recursos. La toma de decisiones respecto a la política de gestión de fugas a ejecutar en una empresa representa un reto para los gestores.

Si el problema se observa desde el punto de vista meramente económico, es posible que la opción que se tome esté encaminada a reparar solo las fugas evidentes o reportadas, ya que la inversión que se debe realizar para detectar y reparar suele ser mayor que el valor del agua recuperada, tomando en cuenta que, en la gran mayoría de los casos, la tasa de recuperación o la tarifa cobrada al usuario no llega a cubrir siquiera los costos de operación. Sin embargo, se recomienda considerar una serie de costos y cuestiones, adicionales a los aspectos técnicos y económicos, para que la decisión que se tome sea lo más acertada para la compañía y su entorno. Se propone considerar también algunas cuestiones relacionadas con las externalidades del problema, es decir, que sean considerados los efectos de las acciones de la compañía y se adicione a la toma de decisiones el impacto que tienen en el entorno.

Recibido: 5 de noviembre de 2015

Aceptado: 3 de octubre de 2016

#### Palabras clave:

Fugas; toma de decisiones; AHP; externalidades; consistencia.

#### Keywords:

Leakage; decision making; AHP; externalities; consistency.

#### Cómo citar:

Delgado Galván, X. V., Mora Rodríguez, J. J., Benítez, J., Pérez García, R., & Izquierdo, J. (2016). Toma de decisiones en el manejo de fugas en redes de agua potable. *Acta Universitaria*, 26(NE-3), 35-43. doi: 10.15174/au.2016.1082

<sup>\*</sup> División de Ingenierías, Universidad de Guanajuato. Juárez núm. 77, Zona centro, Guanajuato, Gto., México, C.P. 36000. Tel.: (473) 102 01 00. Correo electrónico: xdelgado@ugto.mx

<sup>\*\*</sup> Instituto Matemático Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València. Camino de Vera s/n, Valencia, España.

<sup>\*\*\*</sup> Flulg-IMM, Universitat Politècnica de València. Camino de Vera s/n, Valencia, España.

<sup>0</sup> Autor de correspondencia.

<sup>^</sup> In memoriam: Rafael Pérez García

Es por ello que se ha recurrido al método de jerarquías analíticas (AHP, por sus siglas en inglés) desarrollado por Tomas L. Saaty (1980, 2003, 2008), el cual ha sido ampliamente utilizado para la toma de decisiones en gran cantidad de campos (Ho, 2008; Omkarprasad & Sushil, 2006), particularmente en la gestión de recursos hídricos (Sabia, Salomon, Sobreira, Marins & Lima, 2015; Srdjevic, 2007), y en redes de agua potable (Sadiq, Kleiner & Rajani, 2007; Delgado-Galván, Pérez-García, Izquierdo & Mora-Rodríguez, 2010). Este método proporciona al tomador de decisiones la posibilidad de observar de forma gráfica un problema multicriterio, jerarquizando niveles (objetivo o problema, criterios y alternativas). Una vez construido el modelo jerárquico, se realizan comparaciones entre pares de elementos (criterios y alternativas) y se atribuyen valores numéricos a las preferencias señaladas por las personas, entregando una síntesis de las mismas mediante la agregación de esos juicios parciales.

La toma de decisiones consiste en un proceso de selección de alternativas, con la finalidad de alcanzar una meta o solucionar un problema. El proceso de toma de decisiones se puede dividir en dos fases: estructura y análisis. Durante la etapa de estructura debe realizarse el planteamiento del problema, considerando una reflexión a fondo del objetivo que se desea alcanzar, identificando las alternativas que se tienen para la consecución del mismo y los diferentes criterios que deben evaluarse en cada una de dichas alternativas. En la etapa del análisis del problema debe tenerse en cuenta que existe una clara diferencia entre el análisis cuantitativo y el cualitativo. En el caso que se presenta, y en vista de la metodología a utilizar, se procede a realizar un análisis cualitativo, ya que se consideran criterios tangibles (claramente cuantificables en términos económicos) e intangibles (algunas las externalidades del problema). Además, por la naturaleza del problema y dada la estructura del mismo, se evalúan elementos objetivos y subjetivos, lo cual redundará en establecer valores de manera cualitativa para llegar a tomar una decisión final.

### Externalidades en las fugas y su gestión

Una externalidad se presenta cuando el estado "natural" de un individuo o un bien se ve afectado de forma positiva o negativa debido al comportamiento de otro. En el caso de la gestión de fugas, debe entenderse por comportamiento las decisiones tomadas por los gestores de la compañía, que se traducen en acciones, realizadas u omitidas. Cuando los impactos son positivos

se considera un beneficio externo; por el contrario, si los impactos son negativos se trata de un costo externo. Los costos y beneficios externos son aquellos impactos adicionales que surgen como resultado de las fugas y/o de las acciones emprendidas por la compañía para su gestión.

Dentro de las fugas y la gestión de las mismas, existen algunos costos y beneficios que pueden ser considerados en la toma de decisiones, como son: energéticos, técnicos, asociados a la calidad del agua, así como externalidades, entre las cuales se pueden mencionar las sociales, ambientales y emisiones de CO<sub>2</sub>. La complejidad de la valoración de cada uno depende, en gran medida, de los métodos que se utilicen. Sin embargo, existen algunos con mayor complejidad para su valoración, lo cual no significa que deban dejar de considerarse en la evaluación de la situación actual de fugas y las alternativas del manejo de las mismas.

Los diferentes impactos pueden traducirse en costos y beneficios sociales, ambientales y emisiones de carbono. Algunos autores clasifican de forma conjunta los impactos ambientales y las emisiones de CO<sub>2</sub>, sin embargo, dada la importancia de estos últimos (Organización de las Naciones Unidas [ONU], 1998, 2005, 2015), se ha decidido considerarlos de forma separada.

La clasificación que a continuación se realiza establece una diferencia entre las externalidades de las fugas y las externalidades de su gestión, desde el punto de vista de la etapa del proceso en el que ocurren y el tipo de externalidad de la que se trata.

La existencia de fugas provoca un uso adicional de agua por parte de la empresa de suministro; se consideran impactos potenciales por emisiones de carbón: el uso de combustible y energía en bombeo para la extracción, uso de energía y combustibles en la planta de tratamiento, uso de combustible y energía en la etapa de distribución, emisión de gases de efecto invernadero de la planta de tratamiento y sus residuos. Los impactos en ríos pueden incurrir en: pesca recreativa y comercial, paseo, admiración de la naturaleza, *camping*, baño, navegación recreativa y comercial, biodiversidad, uso indirecto y valor de no uso, uso agrícola, herencia, precio de propiedades cercanas, entre otros. Las externalidades en embalses pueden tener un efecto en pesca recreativa y comercial, paseo, admiración de la naturaleza, *camping*, baño, navegación recreativa, biodiversidad, uso indirecto y valor de no uso, uso agrícola, herencia, precio de propiedades cercanas,

entre otros. Las externalidades potenciales en humedales o acuíferos son paseo, admiración de la naturaleza, *camping*, biodiversidad, uso indirecto y valor de no uso, uso agrícola, herencia, precio de propiedades cercanas, entre otros. Respecto a los impactos potenciales que directamente pueden experimentar los usuarios de la empresa de agua por la existencia de fugas, se tienen pérdida de presión, cortes de suministro, disminución en calidad de agua que llega a los puntos de consumo, inundaciones, daño a bienes muebles e inmuebles, inversión en instalación y mantenimiento de infraestructura de almacenamiento individual, compra de agua embotellada para diferentes usos, entre otros.

Las actividades de gestión de fugas son: control activo de fugas, reparación de fugas reportadas, gestión de la presión y renovación. Las externalidades sociales referentes a la gestión de fugas pueden englobarse en interrupción del paso de peatones y vehículos, disminución de la presión e interrupción del suministro planeado y no planeado, contaminación auditiva, inconvenientes visuales. Con respecto a las emisiones de CO<sub>2</sub>, las externalidades están relacionadas con el uso de combustibles asociados al transporte, al consumo de combustible en las actividades de reparación en el sitio, a la utilización de materiales en renovación y reparación.

## MATERIALES Y MÉTODOS

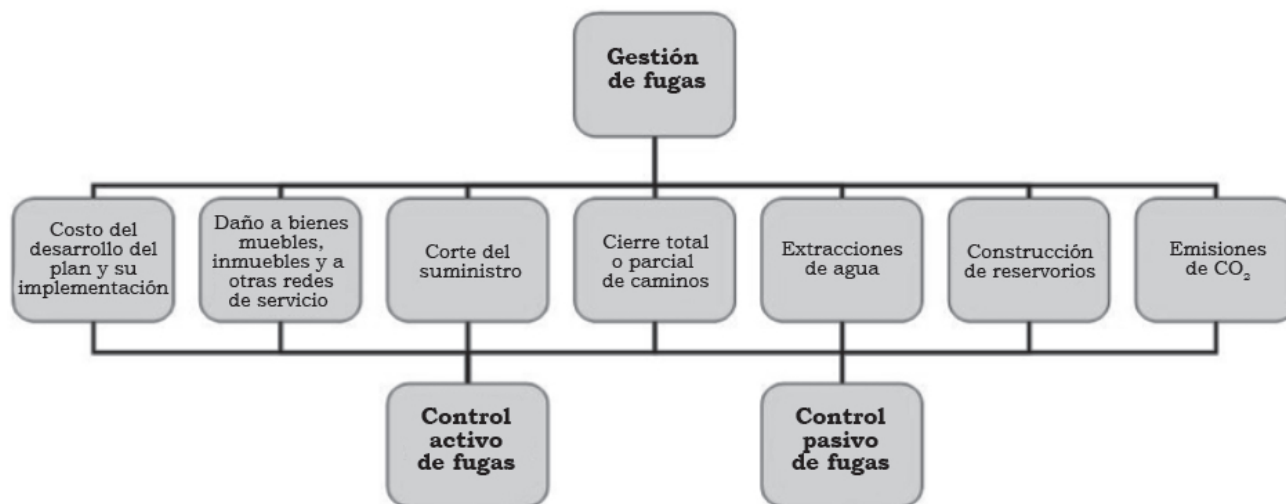
El objetivo de la aplicación consiste en la elección de una política de gestión de fugas, para lo cual se

presentan dos únicas alternativas, considerando las opciones comunes en la evaluación de proyectos: evaluación con proyecto (control activo de fugas [CAF]) y evaluación sin proyecto (control pasivo de fugas [CPF]) (Farley & Trow, 2003). El primero consiste en emprender acciones en todo el sistema de distribución o en distritos hidrométricos individuales para localizar y reparar fugas detectables, pero que no han sido reportadas; y el segundo equivaldría a la realización de acciones de reparación únicamente de fugas reportadas o evidentes.

Para analizar las dos alternativas de gestión de fugas se ha establecido una serie de criterios: costo del desarrollo del plan y su implementación; daño a bienes muebles, inmuebles y a otras redes de servicio; efectos del corte del suministro; inconvenientes debido al cierre total o parcial de caminos; extracciones de agua; construcción de tanques de almacenamiento y reservorios; y emisiones de CO<sub>2</sub>. La construcción gráfica del problema puede observarse en la figura 1.

### Método de jerarquías analíticas (AHP, por sus siglas en inglés)

El AHP fue desarrollado por el matemático Thomas L. Saaty (1980) y consiste en formalizar la comprensión intuitiva de problemas complejos mediante la construcción de un modelo jerárquico. El propósito del método es permitir que el tomador de decisiones pueda estructurar un problema multicriterio en forma visual, de manera jerárquica, que básicamente contiene tres niveles: meta u objetivo, criterios y alternativas.



**Figura 1.** Planteamiento jerárquico de la gestión de fugas  
 Fuente: Elaboración propia.

El fundamento del proceso se basa en el hecho de que permite dar valores numéricos a los juicios dados por las personas, logrando medir cómo contribuye cada elemento de la jerarquía al nivel inmediatamente superior del cual se desprende. Para estas comparaciones se utiliza la escala desarrollada por Saaty (1980), en términos de preferencia o importancia, contenida en la tabla 1. Es posible el uso de valores intermedios a los ahí contenidos.

La justificación de la elección del método de valoración se basa en que permite incluir en el análisis de las alternativas de gestión de fugas, aquellos costos y beneficios externos difíciles de valorar, sin embargo, no se debe omitir en ningún caso el costo económico del proyecto y su implementación. Además, le proporciona al gestor la posibilidad de exponer su opinión respecto a la importancia que tiene cada uno de los elementos, respecto al objetivo general.

Esta metodología precisa de manejar problemas cuyo número de elementos comparativos tengan como máximo  $n = 7 \pm 2$  (Miller, 1955). En caso de exceder ese número, se sugiere la composición de conglomerados, que permiten la creación de un conjunto de elementos utilizando medidas relativas (Escobar & Moreno, 1997).

A partir de la construcción gráfica del problema se crean las matrices de comparación entre pares de criterios y pares de alternativas, donde se concentran los juicios emitidos. Con la finalidad de llevar a cabo una correcta aplicación del método, las matrices deben cumplir ciertas características: positividad de sus componentes, homogeneidad, reciprocidad y consistencia; esta última característica es el objetivo del presente trabajo, porque representa la coherencia de los juicios emitidos en la comparación entre pares.

Tabla 1.  
Escala de valores de Saaty.

Juicio verbal	Escala
Importancia absoluta del elemento $i$ sobre elemento $j$	9
Muy marcada importancia del elemento $i$ sobre elemento $j$	7
Marcada importancia del elemento $i$ sobre elemento $j$	5
Poca importancia del elemento $i$ sobre elemento $j$	3
Indiferencia entre $i$ y $j$	1
Poca importancia del elemento $j$ sobre elemento $i$	1/3
Marcada importancia del elemento $j$ sobre elemento $i$	1/5
Muy marcada importancia del elemento $j$ sobre elemento $i$	1/7
Importancia absoluta del elemento $j$ sobre elemento $i$	1/9

Fuente: Saaty (1980).

El siguiente paso consiste en formar una matriz de comparación entre pares de criterios,  $A = [a_{ij}]$ , con  $1 \leq i, j \leq n$ , en la que el experto compila sus opiniones sobre la importancia que da a cada uno de ellos con respecto a otro, de la siguiente manera. Cada elemento de la matriz,  $a_{ij}$ , representa la comparación entre el elemento  $i$  y el elemento  $j$ . Para ello, las opiniones se basan en una escala numérica contenida en la tabla 1.

El vector propio principal de la matriz de comparación indica el peso o la importancia relativa que cada uno de los criterios utilizados tiene en la valoración del conjunto de alternativas sobre las cuales se va a trabajar (Aznar & Guijarro, 2008; Saaty, 1980). Tal vector propio se obtiene de manera sencilla, por ejemplo, mediante el método de las potencias. La componente mayor del vector propio (normalizado) está relacionada con el criterio de mayor peso en la evaluación de cada alternativa, y la más pequeña tiene relación con el criterio de menor peso en la evaluación.

A continuación, usando la misma escala numérica (tabla 1), deben formarse tantas matrices como criterios, para proceder a la comparación entre pares de alternativas. Con los resultados de las matrices de comparación de alternativas se ponderan los valores obtenidos y se obtiene el vector propio de las alternativas establecidas, donde los resultados indican el peso relativo de cada una. Al agregar adecuadamente se identifica la alternativa preferida.

## Propiedades de las matrices consistentes

Las matrices de comparación tienen las siguientes propiedades, además de la positividad de sus componentes:

**Reciprocidad:** si  $a_{i,j} = x$ , entonces  $a_{j,i} = 1/x$ .

**Homogeneidad:** si los elementos  $i$  y  $j$  son considerados igualmente importantes, entonces se tiene  $a_{i,j} = a_{j,i} = 1$ . En particular,  $a_{i,i} = 1$ , para cada  $i$ .

Además, es esperable que una matriz de comparación tenga también la siguiente propiedad, que expresa la coherencia que debería (en teoría) existir en los juicios emitidos.

**Consistencia:** se satisface que  $a_{i,k}a_{k,j} = a_{i,j}$  para todo  $1 \leq i, j, k \leq n$ .

En vista de la necesidad de que las matrices de comparación verifiquen las características para ser consideradas válidas, se procede a la comprobación de la

consistencia. Para verificar la consistencia, es indispensable conocer el valor propio de Perron  $\lambda_{max}$  que, según la teoría de Perron-Frobenius (ver, por ejemplo, Meyer, 2000), es el mayor y único valor propio de  $A$ , cuyo vector asociado, también denominado de Perron, al ser normalizado, da una estimación del vector de prioridades.

Se asume que regularmente  $A$  no es consistente, porque  $A$  es la síntesis numérica de opiniones que emite un experto al realizar las comparaciones por pares; al tratarse de juicios subjetivos, estos pueden implicar la existencia de pequeñas perturbaciones respecto de valores “correctos”, lo cual conlleva una pequeña perturbación del valor propio de Perron (Stewart & Sun, 1990). Para una matriz recíproca  $A_{n \times n}$ , Saaty (1980) demuestra que  $\lambda_{max} - n$ , y que la igualdad se logra si y solo si  $A$  es consistente. Saaty (1980) propone una medida de desviación de la consistencia, conocida como *índice de consistencia*  $IC = (\lambda_{max} - n)/(n - 1)$ . Una matriz es consistente si y solo si  $IC$  es igual a cero. Sin embargo, dado que es permisible cierto tipo de desviación de los valores que dan como resultado una matriz consistente, para conocer la magnitud de la inconsistencia se compara el valor de  $IC$  con el valor de consistencia aleatorio  $IC^*$  contenido en la tabla 2, que es un valor promedio para cada tamaño de matriz, considerando que los juicios numéricos en la matriz  $A$  fueran aleatorios. Es posible considerar una matriz como válida en cuestiones de consistencia (Saaty, 2003), siempre que la tasa de consistencia  $TC = IC/IC^*$  no supere el 10%. En caso de superarse este valor máximo de inconsistencia permitido, debe procederse a la modificación de los juicios emitidos para lograr una consistencia aceptable. Es precisamente este problema lo que ha originado el desarrollo el presente trabajo.

## Mejora de consistencia

Como ya se ha observado, uno de los principales problemas que se tienen en la aplicación de AHP es que al tratarse de juicios subjetivos es muy probable que las opiniones de los expertos conlleven cierto grado de inconsistencia. El objetivo es encontrar una matriz  $B$  lo más próxima a  $A$  que brinde una solución al menos

aproximada al problema. En vista de la necesidad de cumplir un nivel mínimo de consistencia, algunos autores han desarrollado opciones para mejorar la consistencia (Aznar & Guijarro, 2008; Saaty, 2003). En el presente trabajo se proponen dos opciones:

### Primer método

Aznar & Guijarro (2008) proponen, en primer lugar, clasificar las actividades por un simple orden basado en la ponderación obtenida con la primera matriz y desarrollar una segunda matriz de comparación teniendo en cuenta el orden obtenido. Y en segundo lugar, usar programación por metas para encontrar los valores de comparación ( $w_{ij}$ ) más cercanos a las opiniones dadas ( $a_{ij}$ ), pero que cumplan con las características mencionadas y que provoquen una mejora en  $TC$ . Esto se representa en la expresión que a continuación se observa:

$$\text{Min} \left[ \sum_l (n_l^{(a)} + p_l^{(a)}) + \sum_s (n_s^{(b)} + p_s^{(b)}) + \sum_t (n_t^{(c)} + p_t^{(c)}) \right]$$

El objetivo consiste en minimizar la suma de las desviaciones tanto positivas  $p^{(a)}$ ,  $p^{(b)}$ ,  $p^{(c)}$  como negativas  $n^{(a)}$ ,  $n^{(b)}$ ,  $n^{(c)}$ , considerando que se cumplen todas las características que funcionan como restricciones:

a) Homogeneidad:  $w_{ij} - a_{ij} + n_l^{(a)} - p_l^{(a)} = 0$ ,  $l = 1, 2, \dots, n(n-1)/2$ .

En el caso de la reciprocidad, se toma solamente la mitad superior o inferior, partiendo de la diagonal, de la matriz modificada y la matriz original

b) Reciprocidad:  $w_{ij} w_{ji} + n_s^{(b)} - p_s^{(b)} = 0$ ,  $s = 1, 2, \dots, n(n-1)/2$ .

c) Consistencia:  $w_{ij} w_{jk} - w_{ik} + n_t^{(c)} - p_t^{(c)} = 0$ ,  $t = 1, 2, \dots, V$ .

En este caso,  $V$  es el número de variaciones de los índices  $n$  de las desviaciones negativas (1, 2, ...,  $n$ ). Si son tomados de tres en tres, y ordenados de manera creciente (decreciente), se usa la reciprocidad como ayuda para verificar la consistencia, ya que si  $a_{ij} a_{jk} = a_{i,k}$  es válido para tres (diferentes) índices, la misma relación es válida para cualquier permutación de estos tres índices (Delgado-Galván *et al.*, 2010).

**Tabla 2.**  
Valores de consistencia aleatoria ( $IC^*$ ).

Tamaño matriz ( $n$ )	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>IC aleatoria (<math>IC^*</math>)</b>	0.00	0.00	0.52	0.89	1.11	1.25	1.35	1.40	1.45

Fuente: Saaty (1980).



Segundo método

En vista de que el objetivo a alcanzar es la mejora de la consistencia de la matriz, el problema puede plantearse de esta forma: dado  $A \in M_{n,n}^+$ , debe encontrarse una matriz consistente  $B$  de forma que  $\|A - B\|$  sea lo más pequeño posible. Para ello se propone usar la norma de Frobenius considerando su simplicidad. Dicha norma se define de la siguiente manera:

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i,j} [A]_{ij}^2 \right)^{1/2} = \left( \text{traza}(A^T A) \right)^{1/2}, A \in M_{n,m}.$$

El objetivo es encontrar un vector que logre la minimización de la distancia entre los valores de la matriz  $A$  y la matriz consistente, donde se mantengan las características de homogeneidad y reciprocidad (Benítez, Delgado-Galván, Izquierdo & Pérez-García, 2011).

**Problema 1.** Sea  $A \in M_{n,n}^+$ . Encontrar  $x \in M_{n,1}^+$ , tal que:

$$\min_{y \in M_{n,1}^+} \|A - J(y)y^T\|_F = \|A - J(x)x^T\|_F.$$

Partiendo de las propiedades de las matrices consistentes es posible normalizar el problema 1 de la siguiente forma:

**Problema 2.** Sea  $A \in M_{n,n}^+$ . Encontrar  $x \in M_{n,1}^+$ , tal que  $\|x\|_1 = 1$  y  $\min_{y \in M_{n,1}^+, \|y\|_1 = 1} \|A - J(y)y^T\|_F = \|A - J(x)x^T\|_F$ .

Se propone utilizar la 1-norma en  $\mathbb{R}^n$  (i.e.,  $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ ), ya que para cualquier  $x \in M_{n,1}^+$ , entonces se tiene  $\|x\|_1 = x_1 + \dots + x_n$ , que es una expresión simple y diferenciable. Es posible también utilizar el método de multiplicadores de Lagrange.

Queda claro que si  $x$  es una solución del problema 2, entonces  $\lambda x$  es una solución al problema 1 para cualquier  $\lambda > 0$ . A continuación se demuestra que el conjunto de soluciones al problema 2 es no vacío.

**Teorema 1.** Sea  $A \in M_{n,n}^+$ . Entonces existe  $x \in M_{n,1}^+$ , tal que  $\|x\|_1 = 1$  y  $\min_{y \in M_{n,1}^+, \|y\|_1 = 1} \|A - J(y)y^T\|_F = \|A - J(x)x^T\|_F$ .

**Demostración:** Se establecen los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ :

$$C = \{y \in M_{n,1}^+ : \|y\|_1 = 1\},$$

$$S = \{y [y_1 \dots y_n]^T \in \mathbb{R}^n : \|y\|_1 = 1, \text{ existe un } i \text{ tal que } y_i = 0\}.$$

Sea  $\varepsilon > 0$  tal que cumple las condiciones de  $C \setminus \bigcup_{y \in S} B(y, \varepsilon) \neq \emptyset$  donde  $B(y, \varepsilon)$  representa una bola abierta con centro en  $y$  de radio  $\varepsilon$ . Finalmente sea  $D = C \setminus \bigcup_{y \in S} B(y, \varepsilon)$ .

Obviamente  $D$  está acotado porque  $D \subset C$ . De igual forma,  $D$  es cerrado porque  $C$  es cerrado y  $\bigcup_{y \in S} B(y, \varepsilon)$  es abierto (es una unión arbitraria de bolas abiertas). Por lo tanto,  $D$  es compacto. Además, la función  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(y) = \|A - J(y)y^T\|_F$  es continua, por lo que existe  $x \in D$  tal que  $\min_{y \in D} \|A - J(y)y^T\|_F = \|A - J(x)x^T\|_F$ . Ya que  $\lim_{y \rightarrow p, y \in C} \|A - J(y)y^T\|_F = +\infty$  para cualquier  $p \in S$ , entonces se tiene que  $\min_{y \in C} \|A - J(y)y^T\|_F = \min_{y \in D} \|A - J(y)y^T\|_F$ , lo que concluye la demostración.

## RESULTADOS

La aplicación de AHP se llevó a cabo en un organismo operador del occidente de México, con una población de más 600 000 habitantes y un censo aproximado de 150 000 usuarios. Se basa en las opiniones de los miembros del área de proyectos de rehabilitación y del área de fugas.

El problema a resolver se plantea de la siguiente forma: debe elegirse una política de gestión de fugas. Las alternativas que se analizan parten de la evaluación de proyectos usual, es decir, evaluación con proyecto (CAF) y sin proyecto (CPF). Para analizar las dos alternativas de gestión de fugas, los criterios que se evalúan son:

- $C_1$ : costo del desarrollo del plan y su implementación.
- $C_2$ : daño a bienes muebles, inmuebles y a otras redes de servicio.
- $C_3$ : efectos del corte del suministro.
- $C_4$ : inconvenientes debido al cierre total o parcial de caminos.
- $C_5$ : extracciones de agua.
- $C_6$ : construcción de tanques de almacenamiento y reservorios.
- $C_7$ : emisiones de  $\text{CO}_2$ .

## Aplicación

En la matriz de comparación de criterios, contenida en la tabla 3, pueden observarse las características de positividad de componentes, reciprocidad y homogeneidad.



En vista de que los valores originales de la matriz de comparación de criterios fueron modificados con el propósito de alcanzar la consistencia requerida por el método, se llevó a cabo un intercambio de opiniones con el experto, lo que ha redundado en una mejor comprensión del proceso. Se tuvo la necesidad de modificar algunos valores de la matriz para que fueran más cercanos a los valores originales. El procedimiento y fundamentos matemáticos del proceso de retroalimentación se encuentran disponibles en Benítez, Delgado-Galván, Gutiérrez & Izquierdo (2011). Después de este paso, se ha podido llegar a un acuerdo y el procedimiento ha resultado enriquecedor para ambas partes.

## CONCLUSIONES

La toma de decisiones en ingeniería representa uno de los problemas más complicados, en vista de que para la elección de la opción más adecuada deben incluirse cuestiones tangibles, pero también intangibles o de difícil consideración. El método AHP brinda la oportunidad de desglosar el problema de forma gráfica, observando el objetivo que se desea alcanzar, las alternativas de solución y los criterios que se deben evaluar. Además, permite otorgar de manera simple valores numéricos a juicios u opiniones emitidos por quien debe tomar la decisión, que se concentran en una serie de matrices cuadradas.

La intención de incluir un mayor número de costos asociados a la evaluación del nivel de fugas actual y las alternativas de gestión ha despertado el interés en adentrarse en métodos de valoración alternativos que, si bien pueden ser considerados complementarios a los tradicionales, proporcionan información de relevancia en la toma de decisiones. Los costos y beneficios susceptibles de valoración son aquellos que se desprenden del uso de algún bien, la realización de una mejora o la generación de algún daño. En el caso de las redes de agua potable y las fugas, las externalidades se producen como consecuencia de las fugas, por las actividades para su mitigación y por el efecto de dichas actividades.

Resalta la utilización del método AHP, en vista de la posibilidad que brinda el evaluar problemas complejos, la visualización jerárquica de la problemática, las alternativas de solución y los criterios a evaluar. Sin embargo, cuando se manejan problemas de gran tamaño se sugiere la formación de conglomerados, de forma que las matrices no excedan de  $n = 9$ . Por otro lado, dada exigencia de sus características, es común

que no se cumpla la condición de consistencia, lo que lleva a revisar los juicios emitidos. Cabe mencionar que vista esta dificultad, se ha trabajado en el desarrollo de herramientas matemáticas que permiten encontrar matrices consistentes a partir de la matriz original, lo cual contribuye a encontrar matrices lo más cercanas posibles a las originales, pero que cuentan con las características necesarias para la validación de método y, por tanto, que sustentan eficazmente la toma de decisiones.

Se aplica AHP a la gestión de fugas, porque las fugas en redes de abastecimiento implican costos económicos, pero también algunas externalidades sociales y ambientales que regularmente no se consideran en la evaluación y toma de decisiones. Para una correcta aplicación de AHP deben observarse ciertas características propias del método que, de no cumplirse, se corre el riesgo de no tener una perspectiva coherente durante el proceso, y ello conllevaría a tomar una decisión errónea. Es por eso que se consideran de utilidad las dos opciones de mejora de consistencia propuestas.

## REFERENCIAS

- Aznar, J., & Guijarro, F. (2008). *Nuevos métodos de valoración. Modelos Multicriterio*. España: Universidad Politécnica de Valencia.
- Benítez, J., Delgado-Galván, X., Gutiérrez, J., & Izquierdo, J. (2011). Balancing Consistency and Expert Judgment in AHP. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(7-8), 1785-1790. doi: 10.1016/j.mcm.2010.12.023
- Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., & Pérez-García, R. (2011). Consistent completion of incomplete judgments in decision making using AHP. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 290, 412-422.
- Delgado-Galván, X., Pérez-García, R., Izquierdo, J., & Mora-Rodríguez, J. (2010). An Analytic Hierarchy Process for Assessing Externalities in Water Leakage Management. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(7-8), 1194-1202.
- Escobar, M. T., & Moreno, J. M. (1997). Problemas de gran tamaño en el proceso analítico jerárquico. *Estudios de Economía Aplicada*, (8), 25-40.
- Farley, M., & Trow, S. (2003). *Losses in Water Distribution Networks. A practitioner's guide to assessment, monitoring and control*. IWA publishing: UK.
- Ho, W. (2008). Integrated analytic hierarchy process and its applications – A literature review. *European Journal of Operational Research*, 186(1), 211-228.
- Meyer, C. D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. United States: SIAM.
- Miller, G. A. (1955). The Magical Number Seven, Plus or Minus Two. Some Limits on Our Capacity for Processing Information. *The psychological Review*, (63), 81-97.



- Organización de las Naciones Unidas (ONU). (1998). *Protocolo de Kyoto de la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el cambio climático*. FCCC/INFORMAL/83\* GE.05-61702 (S) 130605. Recuperado el 12 de noviembre de 2009 de <https://unfccc.int/resource/docs/convkp/kpspan.pdf>
- Organización de las Naciones Unidas (ONU). (2005). *Baseline methodology for water pumping efficiency improvements*. *Clean Development Mechanism*. AM0020 / Version 02. Recuperado el 19 de mayo de 2009 de <https://cdm.unfccc.int/EB/018/eb18repan1.pdf>
- Organización de las Naciones Unidas (ONU). (2015). *Clean Development Mechanism Methodology Booklet (7<sup>th</sup> edition)*. Bonn, Germany: ONU. Recuperado el 3 de noviembre de 2015 de [https://cdm.unfccc.int/methodologies/documentation/meth\\_booklet.pdf](https://cdm.unfccc.int/methodologies/documentation/meth_booklet.pdf)
- Omkarprasad, S. V., & Sushil, K. (2006). Analytic hierarchy process: An overview of applications. *European Journal of Operational Research*, 169(1), 1-29.
- Saaty, T. L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*. New York: McGraw-Hill.
- Saaty, T. L. (2003). Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary. *European Journal of Operational Research*, 145(1), 85-91.
- Saaty, T. L. (2008). Relative measurement and its generalization in decision making. Why pairwise comparisons are central in mathematics for the measurement of intangible factors. The analytic hierarchy/network process. *Revista de la Real Academia de Ciencias Ser. A: Mat.*, 102(2), 251-318.
- Sabia, R., Salomon, V., Sobreira, Junior F., Marins, F., & Lima, A. (2015). Determination of the Most Appropriate Policy for River Basin Management. *International Journal of the Analytic Hierarchy Process*, 7(2), 201-210.
- Sadiq, R., Kleiner, Y., & Rajani, B. (2007). Water quality failures in distribution networks – Risk analysis using fuzzy logic and evidential reasoning. *Risk Analysis*, 27(5), 1381-1394.
- Srdjevic, B. (2007). Linking analytic hierarchy process and social choice methods to support group decision-making in water management. *Elsevier Decision Support Systems*, 42(2007), 2261-2273.
- Stewart, G. W., & Sun, J. G. (1990). *Matrix Perturbation Theory*. New York: Academic Press.