

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO



DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

**Simulaciones Cosmológicas Rápidas para
Modelos de Materia Oscura**

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestra en Física

presenta

Rebeca Martínez Carrillo.

Asesor

Dr. Luis Arturo Ureña López

León, Guanajuato, Abril 2017

Disclaimer

Declaro que ésta tesis es un trabajo original y no ha sido presentado con anterioridad a ninguna institución para su evaluación. Así mismo, las fuentes consultadas para la realización de este trabajo se encuentran citadas y se incluyen en la sección de la bibliografía.

Rebeca Martínez Carrillo.

Resumen

El proceso de formación de estructura en el Universo puede explicarse por medio de la inestabilidad gravitacional de las diferentes componentes de materia, en particular del campo de materia oscura. En este trabajo el modelo a considerar es la materia oscura descrita por un campo escalar ultraligero mínimamente acoplado a la gravedad y su inestabilidad gravitacional en un universo plano en expansión. El estudio de estos aspectos se realiza con las técnicas usuales para los componentes fluidos de materia estándar, las que incluyen el uso del código L-PICOLA. Se muestran soluciones numéricas y analíticas, considerando la teoría de perturbaciones lineal en la norma síncrona. Además se presentan las funciones de correlación a dos puntos para los regímenes lineal y no-lineal de la materia oscura de campo escalar y su comparación con las soluciones del modelo estándar de materia oscura fría.

Abstract

The process of structure formation in the Universe can be explained by means of the gravitational instability of the different matter components, in particular that of the so-called dark matter field. In this work, we consider a model where the dark matter is described by an ultralight scalar field minimally coupled to gravity, and its gravitational instability in an expanding universe is studied with the help of standard techniques for fluid matter components, which include the L-PICOLA code. Analytical and numerical solutions are shown, considering the (relativistic) theory of linear perturbations in the synchronous gauge. The two-point correlation function of the dark matter as scalar field, for the linear and non-linear regimes are presented and compared with those of the standard cold dark matter model.

Agradecimientos

- A mis papás, por su apoyo en todo lo que va de mi carrera por la física.
- A mi asesor, Luis Ureña, por su paciencia, apoyo y motivación en este trabajo, gracias a él, he enriquecido mi forma de trabajar y ampliado mis horizontes.
- A mis compañeros de la maestría, Alejandro, Araceli, América, Dulce, Mariana y Marco Alan por el apoyo y discusiones en los primeros semestres de la maestría.
- A mis compañeros y amigos Javier y Oleg, por su paciencia, amistad incondicional y toda su ayuda en estos años.
- A Francisco Linares y Francisco Flores por su ayuda en puntos estratégicos de este trabajo.
- A Alma González por sus comentarios y facilidades brindadas.
- A mis amigos, Mitzzy, Lenin, Ceres, Sandra, Diego, Adolfo y Manuel por su amistad y apoyo de tantos años.
- A las personas que conocí (conferencistas y compañeros) en las escuelas y congresos a los que asistí, creo que buena parte de la motivación para seguir trabajando en la ciencia proviene de las personas que conoces en el camino.
- A mis sinodales por tomarse el tiempo de leer y corregir este trabajo.
- A los profesores de la maestría que contribuyeron a mi formación.
- Al Proyecto CONACyT 167335, Fenomenología de Modelos de Inflación, Materia Oscura y Energía Oscura.
- Al CONACyT y Universidad de Guanajuato por el apoyo y facilidades otorgadas.

Índice general

Disclaimer	I
Resumen	II
Abstract	III
Agradecimientos	IV
Índice de figuras	VII
Índice de cuadros	X
1. Introducción	1
2. Introducción a la Cosmología y formación de estructura (lineal): Teoría de perturbaciones Cosmológica	5
2.1. Introducción a la Cosmología	6
2.1.1. Cronología del Universo	9
2.2. Formación de estructura (lineal): Teoría de perturbaciones Cosmológica .	11
2.2.1. Perturbaciones a la métrica	11
2.2.2. Perturbaciones al tensor de energía momento	13
2.2.3. Separación de componentes, escalar, vectorial y tensorial	14
2.2.4. Espacio de Fourier	15
2.2.5. Transformaciones de norma	16
2.2.5.1. Sistema de coordenadas síncrono	17
3. Formación de estructura (no-lineal): Teoría de perturbaciones Newtoniana	20
3.1. Fluido Ideal	20
3.2. Ecuación de Vlasov	23
3.3. Teoría perturbativa Euleriana	25
3.4. Teoría perturbativa Lagrangiana	26
4. Materia Oscura	29
4.1. Evidencia y candidatos más populares a materia oscura	29

4.2. Modelo Λ CDM	32
4.3. Materia oscura como campo escalar	35
5. Simulaciones cosmológicas	43
5.1. L-PICOLA	44
5.1.1. Métodos de COLA	44
5.1.2. Métodos de Partícula-Malla (Particle-Mesh)	45
5.2. Función de Correlación y Espectro de Potencias de Masa	47
5.2.1. CUTE	50
5.2.2. Oscilaciones Bariónicas Acústicas	51
5.3. Pruebas de L-PICOLA	52
5.3.1. Pruebas con Λ CDM	52
5.3.2. Pruebas con CUTE	56
5.3.3. Pruebas con materia oscura como campo escalar	57
5.4. Simulaciones cosmológicas de precisión	62
6. Conclusiones y Perspectivas	68
A. Código de Transformada de Fourier para pasar de $P(k)$ a $\xi(r)$	71
Bibliografía	73

Índice de figuras

4.1.	Contrastes de densidad para diferentes masas del campo escalar, para diferentes números de onda, obtenidos con CLASS. Línea roja $k = 10 \text{ Mpc}^{-1}$, línea azul $k = 1,0 \text{ Mpc}^{-1}$, línea negra $k = 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$, línea verde $k = 0,01 \text{ Mpc}^{-1}$, línea magenta $k = 0,001 \text{ Mpc}^{-1}$	42
5.1.	Tomada de [1](Figura 1.) Comparación de diferentes códigos de N -cuerpos. La captura corresponde a $z = 0$	45
5.2.	Tomada de [2] (Figura 2.). Asignación de densidad de carga a los puntos de la malla, a través del método Cloud in Cell.	47
5.3.	Tomada de [3](Figura 1.). Evolución de una sobredensidad inicial localizada en el origen . Las simbología para las líneas es la siguiente: negra-materia oscura, azul-gas, roja-fotones y verde-neutrinos. Los paneles se describen como sigue: a) En épocas muy tempranas los fotones y bariones estaban acoplados y se propagaban como un pulso. b) Poco antes de la recombinación el pulso de bariones incrementa la perturbación de la materia oscura. c) Una vez en la recombinación, los fotones se desacoplan de los bariones d) Completada la recombinación las perturbaciones de la materia oscura se encuentran cerca del origen y las perturbaciones bariónicas se encuentran en una capa de 150 Mpc. e) Al no tener más influencias de la presión de los fotones, los bariones y materia oscura son atraídos por la gravedad a las sobre densidades f) En épocas tardías la formación de galaxias ocurre cerca del origen y a escalas de 150 Mpc.	53
5.4.	$r^2\xi(r)$ vs. r para el modelo Λ CDM, con diferentes parámetros de la simulación, 1.- Función de correlación lineal. 2.-Función de correlación para $N = 128^3$, $N_m = 128$, Caja=1024 Mpc/h. 3.- Función de correlación para $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja=1024 Mpc/h. 4.- Función de correlación para $N = 128^3$, $N_m = 128$, Caja=512 Mpc/h. 5.-Función de correlación para $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja=512 Mpc/h.	54
5.5.	Capturas correspondientes a las simulaciones del cuadro 5.4	55
5.6.	$r^2\xi(r)$ vs. r para el modelo Λ CDM, empleando los diferentes métodos disponibles de CUTE. 1. Función de correlación lineal. 2.- Función de correlación para el espectro de potencias que incluye el parámetro halofit de CLASS. 3.- Función de correlación calculada con el método de fuerza bruta de CUTE. 4.- Función de correlación calculada con el método Tree de CUTE. 5.- Función de correlación calculada con el método partícula malla de CUTE	56

5.7. Espectros de potencias lineales para materia oscura como campo escalar considerando diferentes valores de la masa del campo escalar, los cuales son los espectros de potencia de entrada para las simulaciones cosmológicas 1.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 2.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 3.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV,5.- $m = 1 \times 10^{-26}$ eV,6.- Espectro de potencias de Λ CDM 57

5.8. Funciones de correlación de los espectros de potencias lineales (espectros de entrada para L-PICOLA) para diferentes masas del campo escalar 1*.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV, 2*.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3*.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4*.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5*.- Λ CDM. 58

5.9. Funciones de correlación para las corridas de L-PICOLA, con $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja = 1024 Mpc/h 1.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV ,2.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5.- Λ CDM. 59

5.10. (Líneas punteadas) Funciones de correlación de los espectros de potencias lineales (espectros de entrada para L-PICOLA) para diferentes masas del campo escalar 1*.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV ,2*.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3*.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4*.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5*.- Λ CDM. (Líneas sólidas) Funciones de correlación para las corridas de L-PICOLA, con $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja = 1024 Mpc/h 1.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV ,2.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5.- Λ CDM. 60

5.11. (Líneas punteadas) Funciones de correlación de los espectros de potencias lineales (espectros de entrada para L-PICOLA) para diferentes masas del campo escalar 1*.- $m = 1 \times 10^{-26}$ eV, 2*.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV ,3*.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 4*.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 5*.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 6*.- Λ CDM. (Líneas sólidas) Funciones de correlación para las corridas de L-PICOLA, con $N = N_m = 256$, Caja = 1024 Mpc/h. 1.- $m = 1 \times 10^{-26}$ eV, 2.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV,3.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 5.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 6.- Λ CDM. 61

5.12. Espectros de potencias para diferentes masas del campo escalar 1.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 2.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 3.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV, 5.- $m = 1 \times 10^{-26}$ eV. 6.- Λ CDM, 7.- Λ CDM cortado a $k \sim 0,1$ h/Mpc, 8.- Λ CDM cortado $k_{min} = 0,1$, 9.- Λ CDM cortado $k_{min} = 10,0$ 61

5.13. Comparación de las funciones de correlación para las simulaciones de L-PICOLA para diferentes masas del campo escalar con las funciones de correlación correspondientes a las simulaciones de L-PICOLA usando espectros de potencias de Λ CDM cortados (Para todas las simulaciones se eligió $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja = 1024 Mpc/h). 1.- $m = 1 \times 10^{-26}$ eV 2.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV 3.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 5.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV 6.- Λ CDM 7.- Λ CDM cortado a $k = 0,1$ h/Mpc 8.- Λ CDM corte $k_{min} = 10,0$ 9.- Λ CDM corte $k_{min} = 0,1$ 62

5.14. Capturas de las simulaciones prueba a $z = 0$, para diferentes masas del campo escalar, con $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja = 1024 Mpc/h 63

5.15. (Líneas punteadas) Funciones de correlación de los espectros de potencias lineales (espectros de entrada para L-PICOLA) para diferentes masas del campo escalar 1*.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV, 2*.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV ,3*.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4*.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5*.- Λ CDM. (Líneas sólidas) Funciones de correlación para las corridas de L-PICOLA, con $N = 256^3$, $N_m = 768$, Caja = 1024 Mpc/h. 1.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV, 2.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5.- Λ CDM. 64

5.16. Funciones de correlación para las simulaciones de L-PICOLA, con $N = 256^3$, $N_m = 768$ Caja=1024 Mpc/h para diferentes masas del campo escalar. 1.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV, 2.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5.- Λ CDM 65

5.17. Capturas de las simulaciones de precisión a $z = 0$, para diferentes masas del campo escalar, con $N = 256^3$, $N_m = 768$, Caja= 1024 Mpc/h 66

5.18. Tomada de [4](Figura 1.) Explicación ilustrativa de la reconstrucción de las oscilaciones bariónicas acústicas. Cada recuadro muestra una captura del campo de densidades cosmológico. (Superior izquierdo) En épocas tempranas la densidad es prácticamente constante. El anillo rojo representa la escala acústica y los puntos centrales en azul. La Gausiana representa la raíz cuadrática media de la distancia entre los puntos medios y los puntos azules. (Superior derecho) Después de evolucionar el sistema (usando la aproximación de Zel'dovich), la estructura se forma y los puntos negros se han cambiado de lugar, provocando un ensachamiento de la escala acústica. El círculo rojo el es radio inicial del anillo, centrado en los puntos azules. En la pequeña gráfica inferior muestra la diferencia entre la raíz cuadrática media de la distancia radial (línea sólida) y la original (línea punteada). (Inferior izquierdo) Las flechas azules muestran los desplazamientos que provocan la formación de estructura. El proceso de reconstrucción se basa en estimar los desplazamientos con el fin de luego mover a las partículas a su configuración inicial. (Inferior derecho) Suavizando el campo de densidad se desplazan las partículas a su posición original. Al no estimar el campo de densidades con toda precisión aún se tiene la estructura a escalas pequeñas. La pequeña gráfica ahora muestra la curva no corregida (línea puntos cortos), la curva original (línea puntos largos) y la curva reconstruida (línea sólida). 67

Índice de cuadros

4.1. Tomado de [5](Cuadro 4, columna 3). Límites de confianza del 68 % para los parámetros cosmológicos del modelo cosmológico Λ CDM del espectro de potencias de Planck CMB, en combinación con lensing y datos externos (BAO+JLA+ H_0).	35
5.1. Corridas de prueba para Λ CDM	52

A mis papás: Ana María y Ramón

Capítulo 1

Introducción

El Universo ha sido objeto de estudio desde épocas muy antiguas, culturas como la maya, griega y egipcia, ya realizaban observaciones astronómicas a simple vista. Con la invención del telescopio y otros instrumentos, el conocimiento del Universo ha tenido un gran desarrollo a lo largo de la historia, ejemplo de ello va desde el descubrimiento de planetas, hasta la detección de las ondas gravitacionales en el 2015, una predicción de la teoría de la Relatividad General de Einstein de 1916. Estos avances son los que han permitido que en la época actual se tenga la llamada Cosmología de precisión.

Descubierta en 1965 por Penzias y Wilson, la radiación cósmica de fondo, también conocida como CMB (por sus siglas en inglés, Cosmic Microwave Background) es la radiación remanente de la época de recombinación, la cual presenta anisotropías del orden de $\sim 10^{-5}$. Al ser la luz más vieja que se tiene del Universo, resulta ser una de las observables más importantes en la Cosmología, pues proporciona información del Universo cuando este tenía una edad aproximada de 375,000 años. El estudio de las anisotropías del CMB es de gran relevancia pues ha permitido determinar la curvatura del Universo y las densidades de materia bariónica¹ y materia oscura.

Precedida por las misiones COBE (1989) y WMAP (2001), Planck (2009) es el mapeo más reciente de las anisotropías en la temperatura del fondo cósmico de radiación, entre sus resultados se encuentran la estimación de los seis parámetros del modelo de materia oscura fría con constante cosmológica Λ CDM (por sus siglas en inglés Lambda- Cold Dark Matter) con la mayor precisión alcanzada hasta el momento, dichos valores son significativamente diferentes a los previamente encontrados.

Gracias a los resultados de las observaciones ya mencionadas, hoy se sabe que el sistema solar e incluso la Vía Láctea no se encuentran en un lugar privilegiado en el Universo.

¹En cosmología se consideran protones, neutrones e incluso electrones como materia bariónica.

Esta afirmación se resume en el Principio Cosmológico que establece que a escalas suficientemente grandes (~ 100 Mpc) el Universo se considera homogéneo e isótropo. Sin embargo, a escalas menores a los 100 Mpc, el Universo es inhomogéneo y anisótropo, y de hecho la estructura observada no puede explicarse si solo se considera que el Universo está compuesto de materia bariónica, que de hecho solo es responsable del 4.8% de la densidad del Universo.

El Universo que se observa hoy en día requiere la inclusión de otros componentes, los que han sido nombrados por la comunidad científica como energía oscura y materia oscura y de los que aun no se tiene certeza de que son. La energía oscura es responsable de la expansión acelerada del Universo y constituye aproximadamente un 69.3% de la densidad del Universo. El presente trabajo deja fuera el estudio de la energía oscura. La materia oscura constituye un 25.8% de la densidad del Universo, y al interactuar a través de la gravedad con la materia bariónica, juega un papel importante en el proceso de formación de estructuras, lo que motiva su estudio en el presente trabajo.

En las últimas décadas se han llevado a cabo simulaciones cosmológicas, las cuales se realizan a través de los códigos de N -cuerpos y han permitido estudiar con más detalle los procesos de formación de galaxias y de estructura a gran escala. Una de las simulaciones más grandes e importantes fue la simulación del Milenio (Millenium Run) en el 2005, cuyo objetivo era estudiar la evolución de la distribución de materia en el Universo, para ello la simulación consideró más de 10^9 partículas en una caja con un tamaño de 2×10^9 años luz por lado e incluyendo solo efectos de la gravedad, se reprodujo la evolución de 20 millones de galaxias.

Otra simulación relevante es Illustris del año 2013, en la que además de considerar la interacción por la gravedad, también se incluyeron efectos por procesos químicos del gas, radiación y campos magnéticos. El objetivo de esta simulación era simular la formación de galaxias usando un modelo físico. Ambas simulaciones tienen en común el hecho de que requirieron de supercómputo para obtener resultados.

El presente trabajo tiene como objetivo dar una descripción de la formación de estructura en el Universo, considerando el modelo de materia oscura como campo escalar, este estudio se realiza a través del uso de códigos rápidos de N -cuerpos, los cuales son una de las herramientas más importantes en el estudio de la formación de estructura a gran escala.

A continuación se presenta de manera breve lo que trata cada uno de los capítulos de este trabajo.

En el segundo capítulo se da una breve introducción a la Cosmología, la cual requiere de la teoría de la Relatividad General, formalismo necesario para describir el Universo

a grandes escalas. También se exponen de forma resumida algunas de las etapas más importantes de la historia del Universo. Además, en este capítulo se aborda la Teoría de Perturbaciones Cosmológica, que permite describir de forma precisa la formación de estructura a orden lineal y la cual requiere de los conceptos de la Relatividad General, expuestos en el primer capítulo. Los conceptos de este capítulo son importantes para resolver las ecuaciones que nos permiten encontrar los espectros de potencias que será utilizado como entrada en los códigos de N -cuerpos.

En el capítulo 3 se analiza la teoría de perturbaciones desde el punto de vista Newtoniano, que permite tener la evolución no lineal de las partículas. Este régimen puede revisarse con dos modelos, el fluido ideal y la ecuación de Vlasov. Ambos modelos encuentran las ecuaciones de evolución para el contraste de densidad y la divergencia de la velocidad de las partículas. Estas ecuaciones pueden resolverse con la teoría perturbativa Euleriana, la cual considera un sistema de coordenadas comóvil, o bien con la teoría perturbativa Lagrangiana, la cual describe las trayectorias de las partículas.

En este capítulo se presentan los dos formalismos, sin embargo la revisión de la teoría perturbativa Lagrangiana cobra mayor importancia para este trabajo, pues las ecuaciones de movimiento que resuelven los códigos de N -cuerpos, como el usado para llevar a cabo las simulaciones de este trabajo, son encontradas a través de esta teoría perturbativa.

El capítulo 4 se dedica a uno de los constituyentes más importantes del Universo, la materia oscura. En este capítulo se expone la evidencia que se tiene de la existencia de la materia oscura, y algunos de los candidatos a materia oscura más populares que se han propuesto, los cuales suelen agruparse en tres categorías: Materia oscura caliente, tibia y fría. Al ser ésta última, la propuesta más aceptada y considerarse el modelo estándar de la Cosmología (Λ CDM), también se describe en este trabajo.

El modelo de materia oscura que se considera en el presente trabajo, es el modelo de materia oscura como campo escalar, el cual ha cobrado importancia en los últimos años debido a que se encuentra en acuerdo con diversas observaciones y además podría resolver los problemas que presenta el modelo estándar de Cosmología Λ CDM.

Así pues, dentro de este capítulo se expone el formalismo para describir la materia oscura como campo escalar, las ecuaciones que lo describen, junto con los cambios de variables que permiten que estas ecuaciones sean resueltas por un método numérico. Estas soluciones son de relevancia, pues permiten encontrar los espectros de potencias para el campo escalar, los cuales serán utilizados para generar las condiciones iniciales de las simulaciones cosmológicas.

En el capítulo 5, se dedica a las simulaciones cosmológicas. Primeramente, se presenta el código de N -cuerpos que será utilizado para llevar a cabo las simulaciones, además una descripción de los métodos numéricos que utiliza dicho código para resolver las ecuaciones de movimiento que dan la evolución no lineal de las partículas y el esquema bajo el que resuelve las mismas.

Por otro lado, se hace una descripción del espectro de potencias, el cual, como ya se mencionó, es requerido para generar las condiciones iniciales de la simulación cosmológica, así mismo se muestra la relación del espectro de potencias con la función de correlación, esto debido a que la función de correlación permite analizar los resultados de las simulaciones cosmológicas. A través de un código numérico, también descrito en este capítulo, es posible encontrar la función de correlación para las capturas de salida de las simulaciones.

Una sección del capítulo 5 se dedica a hablar de las oscilaciones bariónicas acústicas, pues al ser una de las reglas estándar de la Cosmología, su comparación con los resultados de una simulación permite concluir si se tiene un modelo adecuado de materia oscura. Así mismo, se muestran las pruebas realizadas que permitieron ajustar los parámetros iniciales del código para la simulación y las opciones del código de la función de correlación. Para finalmente mostrar los resultados de simulaciones cosmológicas, que consideran como materia oscura el campo escalar.

Finalmente, en el capítulo 6, se presentan conclusiones y perspectivas de este trabajo.

Capítulo 2

Introducción a la Cosmología y formación de estructura (lineal): Teoría de perturbaciones Cosmológica

Como se mencionó en el capítulo 1 el Universo es homogéneo e isótropo a escalas del orden de 100 Mpc. Sin embargo a escalas menores observamos formación de distintas estructuras que van desde estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias.

La formación de estas estructuras comenzó en la etapa de igualdad de materia - radiación, después de la época de inflación en la cual se supone que debido a fluctuaciones cuánticas se originaron las llamadas perturbaciones primordiales [6]. Estas pequeñas perturbaciones primordiales evolucionaron gracias a la inestabilidad gravitacional (también conocida como inestabilidad de Jeans), mecanismo por el cual, las regiones con una sobredensidad se volvían cada vez más densas por la atracción de la fuerza de gravedad. Este proceso se vio afectado por la expansión del Universo, la cual en cierto modo contrarresta los efectos de la gravedad en esas regiones con mayor densidad, dando como resultado las estructuras que observamos hoy día.

En la primera sección de este capítulo se presenta una breve introducción a la cosmología, en la cual se describe el lenguaje de la Teoría de la Relatividad General, que es el marco teórico fundamental en la descripción del Universo, en la sección 2.1.1 se presenta una cronología general del Universo. Las siguientes secciones están dedicadas a la teoría de perturbaciones cosmológica a orden lineal, la cual requiere de la Teoría de Relatividad General. En las secciones 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3 se presenta el formalismo de la teoría de

perturbaciones cosmológica. A continuación, en la sección 2.2.4, se presenta el formalismo de la teoría de perturbaciones en el espacio de Fourier. Finalmente, en la sección 2.2.5, se expone el formalismo matemático de las transformaciones de norma, en la que se establece el sistema de coordenadas que será considerado en el presente trabajo.

2.1. Introducción a la Cosmología

Uno de los resultados de Planck, es la evidencia de que el Universo es plano [7]. En general, para describir un espacio homogéneo e isótropo y en expansión, se adopta la métrica de Friedmann Robertson Lemaître Walker (FRLW), que para el caso plano el elemento de línea tiene la expresión^{1,2}

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala, el cual mide la tasa de expansión del Universo y t es el tiempo cósmico. Se toma la convención de que los índices griegos van de 0 a 3, y representan el tiempo cósmico y las coordenadas comóviles con la expansión del Universo (x, y, z) respectivamente, los índices latinos van de 1 a 3 y representan las coordenadas comóviles (x, y, z).

La métrica solo da información de como medir las distancias en un determinado espacio, son las ecuaciones de campo de Einstein las que ofrecen información acerca de la dinámica del Universo y están dadas por:

$$\bar{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \bar{T}_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde $\bar{G}_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, G es la constante gravitacional y $\bar{T}_{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento.

El tensor de Einstein $\bar{G}_{\mu\nu}$, contiene la información de la curvatura del espacio-tiempo y se define por

$$\bar{G}_{\mu\nu} \equiv \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \bar{g}_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde $\bar{R}_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, y R es el escalar de Ricci. El tensor de Ricci $\bar{R}_{\mu\nu}$ se define por

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \partial_\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\beta - \bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^\beta \bar{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha, \quad (2.4)$$

¹Se tomará la convención de que la velocidad de la luz $c = 1$.

²Todas las cantidades referentes al fondo se denotarán con una barra.

donde $\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ son los símbolos de Christoffel, definidos por

$$\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\mu}(\partial_{\gamma}\bar{g}_{\beta\mu} + \partial_{\beta}\bar{g}_{\mu\gamma} - \partial_{\mu}\bar{g}_{\gamma\beta}). \quad (2.5)$$

El escalar de Ricci se define por $R = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu}$.

El tensor de energía momento $\bar{T}_{\mu\nu}$ describe los componentes materiales del Universo, y estos constituyentes pueden modelarse como un fluidos , de esta forma define el tensor de energía momento para un fluido perfecto

$$\bar{T}_{\mu\nu} = (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}_{\mu}\bar{u}_{\nu} + \bar{p}\bar{g}_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

donde $\bar{\rho}$, \bar{p} y \bar{u}_{μ} son la densidad, presión del fondo y velocidad del fluido, respectivamente.

Dada la métrica en la ecuación (2.1) y el formalismo de las ecuaciones de campo de Einstein, la evolución del factor de escala son las ecuaciones de Friedmann:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\bar{\rho}}{3}, \quad (2.7)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G(\bar{\rho} + \bar{p}), \quad (2.8)$$

donde $H(t)$ es el parámetro de Hubble y las cantidades con punto son derivadas respecto al tiempo cósmico.

De la conservación de la energía $\bar{T}_{\nu;\mu}^{\mu} = 0^3$ se obtiene la ecuación que describe la evolución de los componentes fluidos:

$$\dot{\bar{\rho}} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + 3\bar{p}) = 0. \quad (2.9)$$

La relación entre la densidad $\bar{\rho}$ y presión \bar{p} está dada por la ecuación barotrópica

$$\bar{p} = \omega\bar{\rho}, \quad (2.10)$$

donde ω puede tomar distintos valores, dependiendo del fluido cósmico a considerar:

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{Radiación} \\ 0 & \text{Materia sin presión (Polvo)} \\ -1 & \text{Constante cosmológica } (\Lambda) \end{cases} \quad (2.11)$$

³La derivada covariante es denotada por ;

Si se considera de forma independiente cada una de los componentes fluidas (esto es posible debido a que cada una de ellas domina en distintas épocas), la evolución temporal de la densidad para los distintos fluidos en un Universo plano está dada por

$$\frac{\bar{\rho}_x(t)}{\bar{\rho}_0} = \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^{3(1+\omega)} \quad (2.12)$$

donde las cantidades con subíndice 0, denotan sus valores al día de hoy y x denota los diferentes componentes de Universo (radiación, materia o constante cosmológica).

Al considerar que el Universo es plano se puede definir la densidad crítica como $\rho_c = (3H^2/8\pi G)$, que permite definir el parámetro de densidad Ω_x , la cual es una cantidad adimensional,

$$\Omega_x(t) = \frac{\bar{\rho}_x}{\rho_c}. \quad (2.13)$$

En términos del parámetro de densidad Ω_x , se tiene que la ecuación de Friedman (2.7) que considera todas las componentes fluidas, se expresa como sigue:

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\Omega_{rad,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0}, \quad (2.14)$$

por su complejidad esta ecuación requiere de una solución numérica.

Debido a que el Universo se encuentra en expansión, es conveniente escribir las ecuaciones de campo y de continuidad en términos del tiempo conforme τ , el cual se define por

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.15)$$

el cual permite factorizar el factor de escala del elemento de línea, tomando la forma

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau) \eta_{\mu\nu} = a^2(\tau) [-d\tau^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j]. \quad (2.16)$$

Las ecuaciones de Friedmann en términos del tiempo conforme toman la forma:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G \bar{\rho} a^2}{3}, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3} (\bar{\rho} + 3\bar{p}) a^2, \quad (2.18)$$

y la ecuación de fluido

$$\bar{p}' = -3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p}), \quad (2.19)$$

donde $\mathcal{H} \equiv (a'/a) = aH = \dot{a}$, es el parámetro de Hubble conforme y las cantidades primadas son derivadas respecto al tiempo conforme.

Otras cantidades que son importantes de definir para el desarrollo de este trabajo se definen a continuación:

El corrimiento al rojo z , el cual es un efecto Doppler para las ondas de luz, se define por

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \quad (2.20)$$

donde λ_{em} es la longitud de onda de la luz del punto de emisión y λ_{obs} la longitud de onda de observación. En términos del factor de escala $a(t)$ se relaciona por

$$(1 + z) = \frac{a_0}{a}, \quad (2.21)$$

esta cantidad es útil para describir épocas y distancias de los objetos.

El radio de Hubble d_H se define por

$$d_H \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^{-1} \equiv H(t)^{-1}, \quad (2.22)$$

esta escala de tiempo es el tamaño sobre el cual los procesos físicos operan coherentemente, a esta escala los efectos relativistas se vuelven importantes, a escalas menores la descripción Newtoniana es adecuada.

2.1.1. Cronología del Universo

A continuación se muestra de forma muy general la cronología de las épocas más importantes del Universo [8, 9]:

Big Bang $t = 0$ s

También conocido como la singularidad inicial, es el origen del Universo. En este punto toda la materia del Universo estaba concentrada en un punto de densidad infinita.

Época de Planck $t < 10^{-43}$ s

A las escalas de Planck, el Universo estaba dominado por la gravedad cuántica no perturbativa, tenía una temperaturas del orden de $T > 10^{32}$ K y energías $> 10^{19}$ GeV. Teoría de cuerdas y gravedad cuántica de lazos han buscado dar una mejor explicación a esta época.

Época de Gran Unificación $10^{-43} < t < 10^{-36}$ s

Las fuerzas electrodébil y fuerte están unificadas. La gran unificación ocurre cuando el Universo tenía una energía de 10^{16} GeV. Fue en esta época donde se producen monopolos magnéticos.

Inflación $10^{-36} \text{ s} < t < 10^{-34} \text{ s}$

El Universo se expande acelerada y exponencialmente y se encuentra dominado por radiación. La proposición de inflación surge como solución a los problemas de planitud, horizonte y monopolos magnéticos.

Transición Quark-Gluón $t \sim 10^{-5} \text{ s}$

La temperatura del Universo es $T \sim 200$ MeV. Ocurre la transición quark-gluón en la que los quarks libres y gluones se cofinan para dar paso a la formación hadrones.

Desacoplamiento de Neutrinos $t \sim 0,2 \text{ s}$

Las temperaturas en este punto son de $T \sim 1 - 2$ MeV. Los neutrinos primordiales se desacoplan de otras partículas y se propagan sin dispersión.

Nucleosíntesis $t \simeq 200 \text{ s}$ a $t \simeq 300 \text{ s}$

Debido a reacciones nucleares comienza la formación de los primeros núcleos de elementos ligeros a partir de neutrones y protones libres, por ejemplo el helio. Las temperaturas típicas en el Universo son del orden de $T \sim 0,05$ MeV.

Igualdad Radiación y Materia $t \simeq 10^{11} \text{ s}$

Esta época corresponde a un corrimiento al rojo de $z = 3600$. La densidad de radiación y materia se encuentran en proporciones iguales, el Universo tenía una temperatura $T \sim 1$ MeV.

Recombinación $t \simeq 10^{13} \text{ s}$

En esta etapa se forma el hidrógeno neutro debido a la recombinación de los protones y electrones libres (este mecanismo hace que el Universo sea más transparente). Aquí termina la interacción de los fotones con la materia, no hay más dispersión de los mismos, estos fotones viajan libremente hasta la época actual, esta superficie (Universo observable) del que provienen se conoce como la última superficie de dispersión en la cual el corrimiento al rojo es de $z \sim 1100$. Esta radiación remanente es llamada Radiación Cósmica de Fondo, las fluctuaciones de la temperatura observadas hoy en día se deben a las inhomogeneidades de la materia en la época de recombinación. La temperatura del Universo es del orden de $T \sim 1$ eV.

Reionización y Formación de Estructura $t \sim 10^{16} \text{ s}$

Las primeras estructuras galácticas se originan. Producto del colapso gravitacional se forman los primeros cuasares cuya radiación reioniza el medio. Las galaxias y cúmulos de galaxias se forman a partir de pequeñas perturbaciones debidas a la inestabilidad gravitacional.

Actualidad $t \simeq 13,8 \times 10^9$ años

La temperatura del Universo es de 2,72 K, el corrimiento al rojo $z = 0$, y domina la densidad de constante cosmológica.

2.2. Formación de estructura (lineal): Teoría de perturbaciones Cosmológica

La formación de estructura ocurre principalmente en la época de dominación de materia. Existen dos regímenes en los cuales se puede describir la formación de estructura [10]:

- El régimen temprano, en el cual las perturbaciones se encuentran fuera del horizonte $d_H \gtrsim H^{-1}$, aquí los procesos microfísicos son poco relevantes, y el análisis de fluctuaciones primitivas en sus dos tipos; de curvatura (adiabáticas)⁴ e isocurvatura (isotérmicas)⁵, cobra importancia. Este régimen es descrito por la teoría de perturbaciones cosmológica.
- El régimen tardío, en el cual las perturbaciones se encuentran dentro del horizonte y los procesos microfísicos toman relevancia. Este régimen se puede analizar desde un punto de vista Newtoniano. Este desarrollo se muestra en el capítulo siguiente.

2.2.1. Perturbaciones a la métrica

En la sección 2.1 se describió el formalismo de la Relatividad General, el cual permite describir el Universo no perturbado, es decir el fondo. Ahora bien, se hará la descripción del formalismo matemático para las perturbaciones del Universo, este desarrollo se hará a orden lineal y considerando el tiempo conforme. Esta sección y las siguientes, están basadas en las referencias [11, 12] y siguen su notación.

El objetivo final es escribir las ecuaciones de campo de Einstein para las perturbaciones, a continuación se presentan las definiciones que permiten construir el tensor de Einstein para las perturbaciones.

⁴Determinan las perturbaciones en la densidad de energía total.

⁵Determinan la distribución de la densidad de energía entre los diferentes componentes del fluido cósmico.

Al considerar que el espacio-tiempo se encuentra perturbado respecto a un fondo, la métrica $g_{\mu\nu}$ puede escribirse como la suma de un elemento de fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$, definido en (2.1) más un elemento correspondiente a una perturbación $\delta g_{\mu\nu}$, así pues,

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}), \quad (2.23)$$

y las perturbaciones a la métrica se definen por

$$h_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix}$$

De esta forma el elemento de línea más general, que considera perturbaciones a primer orden se escribe como:

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1 + 2A)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + [(1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}]dx^i dx^j], \quad (2.24)$$

donde $D = -\frac{1}{6}h^i_i = -\frac{1}{6}h$ (h es la traza), y E_{ij} no tiene traza, $\delta^{ij}E_{ij} = 0$. Este elemento de línea es libre de norma, es decir, no está definido para un sistema de coordenadas en particular y con la elección de las funciones A , B_i , D y E_{ij} se hará la elección de la misma.

También es necesario definir los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ para las perturbaciones, los cuales se pueden separar en su valor de fondo $\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$, el cual está definido por la ecuación (2.5), más una perturbación $\delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, la cual se construye de la parte perturbada de la métrica

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha + \delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha. \quad (2.25)$$

Con los símbolos de Christoffel definidos, se puede proceder a construir el tensor de Ricci para las perturbaciones $R_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} \\ &= \bar{R}_{\mu\nu} + \delta\Gamma_{\nu\mu,\alpha}^\alpha - \delta\Gamma_{\alpha\mu,\nu}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\alpha \delta\Gamma_{\nu\mu}^\beta + \bar{\Gamma}_{\nu\mu}^\beta \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\nu\beta}^\alpha \delta\Gamma_{\alpha\mu}^\beta - \bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^\beta - \bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^\beta \delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde $\bar{R}_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci de fondo, definido por la ecuación (2.4) y $\delta R_{\mu\nu}$ es la parte perturbada del tensor de Ricci.

Subiendo un índice de $R_{\mu\nu}$ se encuentra:

$$R_{\nu}^{\mu} = \bar{R}_{\nu}^{\mu} + \delta g^{\mu\alpha} \bar{R}_{\alpha\nu} + \bar{g}^{\mu\alpha} \delta R_{\alpha\nu}. \quad (2.27)$$

Con lo anteriormente establecido, se tiene que el tensor de Einstein G_ν^μ se puede escribir como la suma del tensor de fondo \bar{G}_ν^μ definido en la ecuación (2.3), más una perturbación δG_ν^μ , la cual se construye de los elementos perturbados para el tensor de Ricci,

$$G_\nu^\mu = \bar{G}_\nu^\mu + \delta G_\nu^\mu. \quad (2.28)$$

2.2.2. Perturbaciones al tensor de energía momento

En la sección anterior se describieron las perturbaciones a la parte geométrica de las ecuaciones de campo, es decir, del tensor de Einstein, ahora bien, para escribir de forma completa las ecuaciones de campo de Einstein para las perturbaciones, se requiere perturbar el tensor de energía-momento, el cual guarda la información de los componentes materiales de las ecuaciones de campo.

El tensor de energía-momento T_ν^μ definido por

$$T_\nu^\mu = (\rho + p)u^\mu u_\nu + p\delta_\nu^\mu, \quad (2.29)$$

puede descomponerse en un término de fondo \bar{T}_ν^μ , más un término de perturbación δT_ν^μ

$$T_\nu^\mu = \bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu, \quad (2.30)$$

donde la presión p , densidad ρ y velocidad u_μ se pueden escribir en la suma de su parte correspondiente al fondo más la correspondiente a la perturbación

$$p = \bar{p} + \delta p, \quad (2.31)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \delta \rho, \quad (2.32)$$

$$u^\mu = \bar{u}^\mu + \delta u^\mu, \quad (2.33)$$

$$u_\nu = \bar{u}_\nu + \delta u_\nu. \quad (2.34)$$

Entonces, las perturbaciones al tensor de energía momento se escriben como,

$$\delta T_0^0 = -\delta \rho, \quad (2.35)$$

$$\delta T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i - B_i), \quad (2.36)$$

$$\delta T_0^i = -(\bar{\rho} + \bar{p}), \quad (2.37)$$

$$\delta T_j^i = \delta p \delta_j^i + \Sigma_{ij} \equiv (\delta p + \frac{\Pi_{ij}}{\bar{p}}). \quad (2.38)$$

donde v_i son las perturbaciones a la velocidad, Σ_{ij} es el estrés anisótropo, definido por

$$\Sigma_{ij} \equiv \delta T_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta T_k^k,$$

el cual es nulo para el caso de un fluido perfecto, Π_{ij} se define como el estrés anisótropo adimensional $\Pi_{ij} \equiv \Sigma_{ij}/\bar{p}$.

2.2.3. Separación de componentes, escalar, vectorial y tensorial

Por el teorema de Helmholtz de calculo vectorial se sabe que un campo vectorial tridimensional puede dividirse en dos componentes, una componente vectorial, la cual tiene divergencia nula y una componente escalar con rotacional cero. Análogamente, en la referencia [13] se demuestra que un tensor de rango dos puede separarse en tres componentes irreducibles (tensorial, vectorial y escalar). Como demuestra la referencia [14], las perturbaciones tensoriales, físicamente asociados a las ondas gravitacionales (corresponden a 2 de los 10 grados de libertad de la métrica) y las perturbaciones vectoriales o vórtices, físicamente asociados al gravitomagnetismo (correspondientes a 4 de los 10 grados de libertad de la métrica), se encuentran desacopladas a primer orden, y pueden tratarse separadamente, pues no contribuyen a perturbaciones de la densidad [15], por ello solo se consideran las componentes asociadas a perturbaciones escalares (correspondientes a 4 de los 10 grados de libertad de la métrica), pues son responsables de las perturbaciones a la densidad y dan paso a la inestabilidad gravitacional, a partir de la cual se da la formación de estructura.

De esta forma para nuestras componentes del elemento de línea (2.24), se pueden descomponer como:

$$A = A^S, \tag{2.39}$$

$$B_i = B_i^S + B_i^V, \tag{2.40}$$

$$D = D^S, \tag{2.41}$$

$$E_{ij} = E_{ij}^S + E_{ij}^V + E_{ij}^T, \tag{2.42}$$

las letras S , V y T denotan la parte escalar, vectorial y tensorial respectivamente, donde:

$$B_i^S = -B_{,i} \quad \delta^{ij} B_{i,j}^V = 0, \quad (2.43)$$

$$E_{ij}^S = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) E, \quad (2.44)$$

$$E_{ij}^V = -\frac{1}{2} (E_{i,j} + E_{j,i}), \quad \delta^{ij} E_{i,j} = \nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.45)$$

$$\delta^{ik} E_{ij,k}^T = 0, \quad \delta^{ij} E_{ij}^T = 0. \quad (2.46)$$

Para el caso del tensor de energía-momento las perturbaciones a la densidad $\delta\rho$ y a la presión δp son escalares. La separación en las componentes escalar y vectorial se realiza en las componentes de la velocidad, de la forma:

$$v_i = v_i^S + v_i^V, \quad (2.47)$$

$$v_i^S = -v_{,i} \quad \delta^{ij} v_{i,j}^V = 0, \quad (2.48)$$

y el tensor de anisotropía se separa en sus componentes escalar, vectorial y tensorial como sigue

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^S + \Pi_{ij}^V + \Pi_{ij}^T, \quad (2.49)$$

donde,

$$\Pi_{ij}^S = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) \Pi, \quad (2.50)$$

$$\Pi_{ij}^V = -\frac{1}{2} (\Pi_{i,j} + E_{j,i}), \quad \delta^{ij} \Pi_{i,j} = \nabla \cdot \vec{\Pi} = 0, \quad (2.51)$$

$$\delta^{ik} \Pi_{ij,k}^T = 0, \quad \delta^{ij} \Pi_{ij}^T = 0. \quad (2.52)$$

2.2.4. Espacio de Fourier

Hasta el momento todo el desarrollo matemático se ha realizado en el espacio real, sin embargo, también puede hacerse en el espacio de Fourier, esto está motivado por el hecho de que solo se considera el orden lineal de las ecuaciones, de esta forma las ecuaciones diferenciales parciales transformadas al espacio de Fourier, pueden tratarse como ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales son más fáciles de resolver.

Una perturbación arbitraria $f(\tau, \vec{x})$, puede expandirse en el espacio de Fourier de la forma,

$$f(\tau, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(\tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (2.53)$$

donde \vec{k} es el vector de onda comóvil. De esta forma en el espacio de Fourier las componentes escalares de las perturbaciones a la métrica son

$$B_i^S = -i \frac{k_i}{k} B, \quad (2.54)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}^V = 0, \quad (2.55)$$

$$E_{ij}^S = \left(-\frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{1}{3} \delta_{ij}\right) E, \quad (2.56)$$

$$E_{ij}^V = -\frac{i}{2k} (k_i E_j + k_j E_i), \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.57)$$

$$\delta^{ik} E_{ij,k}^T = 0, \quad \delta^{ij} E_{ij}^T = 0. \quad (2.58)$$

Para las componentes asociadas al tensor de energía momento, se tiene que las velocidades en el espacio de Fourier se escriben como

$$v_i^S = -\frac{ik_i}{k} v, \quad (2.59)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{v}^V = 0, \quad (2.60)$$

y el estrés anisótropo en el espacio de Fourier,

$$\Pi_{ij}^S = \left(-\frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{1}{3} \delta_{ij}\right) \Pi, \quad (2.61)$$

$$\Pi_{ij}^V = -\frac{i}{2k} (k_i \Pi_j + k_j \Pi_i), \quad \vec{k} \cdot \vec{\Pi} = 0, \quad (2.62)$$

$$\delta^{ik} \Pi_{ij,k}^T = 0, \quad \delta^{ij} \Pi_{ij}^T = 0. \quad (2.63)$$

2.2.5. Transformaciones de norma

Como se mencionó anteriormente, la elección de la norma se realiza con la elección de las funciones A , B_i , D y E_{ij} . La relación entre diferentes normas se hace a través de una transformación de norma, que es una transformación de coordenadas que a primer orden esta definida por:

$$\tilde{x}^\alpha = \hat{x}^\alpha + \xi^\alpha, \quad (2.64)$$

donde \tilde{x}^α y \hat{x}^α son coordenadas en el espacio tiempo perturbado. La transformación invariante de norma para las perturbaciones de la métrica está dada por:

$$\tilde{\delta}g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - \xi_{,\mu}^\rho \bar{g}_{\rho\nu} - \xi_{,\nu}^\sigma \bar{g}_{\mu\sigma} - \bar{g}_{\mu\nu,0} \xi^0. \quad (2.65)$$

Usando la ecuación (2.65) podemos relacionar las perturbaciones a la métrica en dos sistemas de coordenadas, a primer orden y en el espacio de Fourier como:

$$\tilde{A} = A - (\xi^0)' - \frac{a'}{a}\xi^0, \quad (2.66)$$

$$\tilde{B}_i = B_i + (\xi^i)' - ik_i\xi^0, \quad (2.67)$$

$$\tilde{D} = D + \frac{1}{3}ik_i\xi^i + \frac{a'}{a}\xi^0, \quad (2.68)$$

$$\tilde{E}_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{2}i(k_i\xi^j + k_j\xi^i) + \frac{1}{3}i\delta_{ij}k_l\xi^l. \quad (2.69)$$

La transformación de la forma

$$\delta\tilde{A}_\nu^\mu = \delta A_\nu^\mu + \xi_{,\rho}^\mu \bar{A}_\nu^\rho - \xi_{,\nu}^\sigma \bar{A}_\sigma^\mu - \bar{A}_{\nu,\alpha}^\mu \xi^\alpha, \quad (2.70)$$

permite encontrar la transformación de norma para las componentes del tensor de energía momento.

$$\delta\tilde{T}_0^0 = -\delta\rho + \bar{\rho}'\xi^0, \quad (2.71)$$

$$\delta\tilde{T}_0^i = -(\bar{\rho} + \bar{p})v_i - \xi_{,0}^i(\bar{\rho} + \bar{p}), \quad (2.72)$$

$$\frac{1}{3}\delta\tilde{T}_l^l = \delta p - \bar{p}'\xi^0, \quad (2.73)$$

$$\delta\tilde{T}_j^i - \frac{1}{3}\delta_j^i\delta\tilde{T}_l^l = \bar{p}\Pi_{ij}. \quad (2.74)$$

2.2.5.1. Sistema de coordenadas síncrono

Hasta el momento no se ha hecho ninguna elección de norma, para el presente trabajo se adopta la norma síncrona, que debido a su sencilla formulación es la más utilizada en códigos de evolución numérica de perturbaciones, los cuales son una herramienta importante en los desarrollos de los siguientes capítulos.

Si se consideran solo las perturbaciones escalares y en el espacio de Fourier, el elemento de línea de la ecuación (2.24) tiene la forma

$$ds^2 = a(\tau)\{-(1 + 2A)d\tau^2 + 2B_{,i}d\tau dx^i + [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j\}, \quad (2.75)$$

donde $\psi = D - \frac{1}{3}E$ y la norma síncrona se define al hacer $A = B = 0$, con lo cual el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = a^2\{-d\tau^2 + [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j\}. \quad (2.76)$$

La notación usual para la norma síncrona es la establecida en la referencia [16], el cambio a esta notación es el siguiente:

$$h \equiv -6D \equiv h_i^i, \quad (2.77)$$

$$\eta \equiv \psi \equiv D + \frac{1}{3}\nabla^2 E, \quad (2.78)$$

$$\mu \equiv 2E. \quad (2.79)$$

lo que lleva a,

$$h_{ij} = \frac{1}{3}h\delta_{ij} + (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)\mu = -2\eta\delta_{ij} + \mu_{,ij}. \quad (2.80)$$

En el espacio de Fourier las perturbaciones a la métrica se expresan como

$$h_{ij} = -2D\delta_{ij} + 2\left(-\frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)E, \quad (2.81)$$

$$= \frac{1}{3}h\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\mu + \frac{1}{3}\mu\delta_{ij}, \quad (2.82)$$

$$= \frac{k_i k_j}{k^2}h + \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)6\eta, \quad (2.83)$$

donde $\mu = -h - 6\eta$.

Las ecuaciones de campo de Einstein para las perturbaciones escalares $\delta G_\nu^\mu = 8\pi G\delta T_\nu^\mu$, a primer orden, en la notación de [16], en el espacio de Fourier son:

$$k^2\eta - \frac{1}{2}\mathcal{H}h' = -4\pi Ga^2\delta\rho, \quad (2.84)$$

$$k^2\eta' = 4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{p})kv, \quad (2.85)$$

$$h'' + 2\mathcal{H}h' - 2k^2\eta = -24\pi Ga^2\delta p, \quad (2.86)$$

$$h'' + 6\eta'' + 2\mathcal{H}h' + 12\mathcal{H}\eta' - 2k^2\eta = -16\pi Ga^2\bar{p}\Pi. \quad (2.87)$$

Las ecuaciones de continuidad $\delta T_{\nu;\mu}^\mu = 0$, [16, 17]

$$\delta' = -(1 + \omega)(kv + \frac{1}{2}h') + 3\mathcal{H}\left(\omega\delta - \frac{\delta p}{\bar{\rho}}\right), \quad (2.88)$$

$$v' = -\mathcal{H}(1 - 3\omega)v - \frac{\omega'}{1 + \omega}v + \frac{k\delta p}{\bar{\rho} + \bar{p}} - \frac{2}{3}\frac{\omega}{1 + \omega}k\Pi. \quad (2.89)$$

donde $\delta = (\delta\rho)/\bar{\rho}$.

El formalismo presentado en este capítulo será usado más adelante en el capítulo 4, para describir el modelo de materia oscura como campo escalar, la solución de ecuaciones equivalentes a (2.88) y (2.89), permitirán encontrar los espectros de potencia lineales

para el campo escalar, los cuales son parámetro de entrada para el código de N -cuerpos, el cual realiza la evolución no lineal del mismo haciendo uso de la teoría perturbativa Lagrangiana, misma que se presenta en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Formación de estructura (no-lineal): Teoría de perturbaciones Newtoniana

La formación de estructura también puede describirse con la teoría de perturbaciones Newtoniana, esta descripción es válida en el régimen tardío, en el cual las perturbaciones se encuentran dentro del horizonte.

En este capítulo, se presenta el tratamiento para la formación de estructura desde la teoría de perturbaciones Newtoniana, esta descripción puede hacerse con dos modelos, el primero de ellos considera a la materia como fluido ideal, este se expone en la sección 3.1, el segundo modelo requiere de la ecuación de Vlasov para describir a la materia, dicho modelo se presenta en la sección 3.2. En las secciones 3.3 y 3.4 se muestran soluciones a las ecuaciones de movimiento obtenidas en las primeras secciones del capítulo, dichas soluciones se obtienen desde dos marcos de referencia, Euleriano y Lagrangiano.

3.1. Fluido Ideal

Este modelo supone que la materia puede tratarse como un fluido ideal, esto es válido si se considera que el camino libre medio de las partículas es corto [18].

La descripción de un fluido ideal no relativista se realiza a través de la ecuación de continuidad o conservación de materia,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + \nabla_{\vec{r}} \cdot \rho \vec{u} = 0, \quad (3.1)$$

la ecuación de Euler,

$$\rho \left[\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_{\vec{r}} + (\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \right] = -\nabla_{\vec{r}} p - \rho \nabla_{\vec{r}} \Phi, \quad (3.2)$$

y la ecuación de Poisson

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (3.3)$$

donde ρ es la densidad de materia, p es la presión de materia (con $p \ll \rho$), \vec{u} es la velocidad del fluido local, Φ es el potencial gravitacional y \vec{r} son las coordenadas físicas.

Así pues, con el objetivo de obtener las ecuaciones para las perturbaciones se sigue la metodología de la referencia [10]. Primero se descomponen las cantidades, en la suma de su valor en el fondo¹, más una pequeña perturbación, de esta forma se tiene

$$\rho(\vec{r}, t) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(\vec{r}, t), \quad (3.4)$$

$$p(\vec{r}, t) = \bar{p}(t) + \delta p(\vec{r}, t), \quad (3.5)$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \bar{\vec{u}}(t) + \delta\vec{u}(\vec{r}, t), \quad (3.6)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \bar{\Phi}(t) + \Phi(\vec{r}, t). \quad (3.7)$$

Tomando en cuenta estas cantidades, considerando el orden lineal y combinando las ecuaciones para la parte perturbada de las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3), se obtiene la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla_{\vec{r}}^2 \delta\rho = 4\pi G \bar{\rho} \delta\rho \quad (3.8)$$

donde c_s^2 es la velocidad del sonido, definida por $c_s^2 \equiv \delta p / \delta\rho$.

Haciendo una expansión en términos de Fourier para $\delta\rho(t, \vec{r})$ de la forma

$$\delta\rho(t, \vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \delta\rho_{\vec{k}}(t), \quad (3.9)$$

es posible encontrar una solución del tipo

$$\delta\rho = A \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \quad (3.10)$$

donde $\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}$.

¹Las cantidades referentes al fondo se denotarán con una barra.

Al tener frecuencias nulas, se encuentra el valor crítico para el número de onda,

$$k_J \equiv \frac{\sqrt{4\pi G\bar{\rho}}}{c_s}, \quad (3.11)$$

del que se deduce la longitud de onda de Jeans λ_J ,

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}}. \quad (3.12)$$

Este desarrollo permite concluir que a escalas pequeñas (longitudes de onda grandes), en las que $k_J > k$, las perturbaciones oscilan como una onda de sonido. Para escalas grandes (longitudes de onda pequeñas), $k < k_J$ las perturbaciones crecen exponencialmente, estos modos crecientes son los que dan lugar a la formación de estructura.

Por otro lado, hasta este punto no se ha considerado la expansión del Universo, para ello, es necesario relacionar las coordenadas físicas \vec{r} con las comóviles a la expansión del Universo \vec{x} , esto es,

$$\vec{r}(t) = a(t)\vec{x}, \quad (3.13)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala. Para el campo de velocidades se tiene,

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = H\vec{r} + \vec{v}(\vec{x}, t), \quad (3.14)$$

donde $H\vec{r}$ es el flujo de Hubble y $\vec{v}(\vec{x}, t)$ son las velocidades peculiares.²

Con la relación establecida en la ecuación (3.13) se pueden reescribir las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) en coordenadas comóviles a la expansión del Universo \vec{x} [18, 19],

$$\delta' + \nabla \cdot [(1 + \delta)\vec{v}] = 0, \quad (3.15)$$

$$\vec{v}' + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\mathcal{H}\vec{v} - \nabla\Phi, \quad (3.16)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta = \frac{3}{2}\Omega_m \mathcal{H}^2 \delta, \quad (3.17)$$

donde el contraste de densidad $\delta(\vec{x}, \tau)$ se define por

$$\delta(\vec{x}, \tau) = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\rho(\vec{x}, \tau) - \bar{\rho}(\tau)}{\bar{\rho}(\tau)}, \quad (3.18)$$

²Estas son velocidades relativas al fondo, las cuales se deben a la interacción gravitacional entre galaxias, la cual es independiente de la expansión del Universo.

el operador ∇ está dado en coordenadas comóviles y las cantidades primadas son derivadas respecto al tiempo conforme.

Finalmente en el espacio de Fourier, a orden lineal, las ecuaciones (3.15) y (3.16) se pueden escribir como [18, 20]

$$\frac{\partial \delta_{\vec{k}}(\tau)}{\partial \tau} + \theta_{\vec{k}}(\tau) = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \theta_{\vec{k}}(\tau)}{\partial \tau} + \mathcal{H}(\tau) \theta_{\vec{k}}(\tau) + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\tau) \Omega_m \delta_{\vec{k}}(\tau) = 0, \quad (3.20)$$

donde se usó la definición

$$\theta \equiv \nabla \cdot \vec{v}. \quad (3.21)$$

3.2. Ecuación de Vlasov

En este modelo se considera que las partículas solo interactúan por medio de la gravedad, entonces su camino libre medio es muy grande [18]. Y si además se considera un número de partículas muy grande en un Universo en expansión, la acción de las partículas sobre una partícula de velocidad \vec{v} a una posición \vec{r} puede tratarse como un potencial gravitacional suave $\phi(\vec{r})$, inducido por una densidad de masa local $\rho(\vec{r})$ [20, 21], definido por

$$\phi(\vec{r}) = G \int \frac{\rho(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3 \vec{r}', \quad (3.22)$$

y su respectiva ecuación de movimiento,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla_{\vec{r}} \phi = G \int \frac{\rho(\vec{r}' - \vec{r})(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 \vec{r}'}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}. \quad (3.23)$$

Ahora bien, es importante tomar cuenta la expansión del Universo y en consecuencia, resulta conveniente escribir las ecuaciones de movimiento en coordenadas cómoviles con la expansión del Universo (definidas en la ecuación (3.13)) y el tiempo conforme (definido en la ecuación (2.15)).

Entonces el campo de velocidades en coordenadas comóviles a la expansión del Universo y en tiempo conforme es

$$u(\vec{x}, \tau) = \mathcal{H} \vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, \tau), \quad (3.24)$$

y el potencial gravitacional

$$\phi(\vec{x}, \tau) \equiv -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} x^2 + \Phi(\vec{x}, \tau), \quad (3.25)$$

donde el primer término $-\mathcal{H}'\left(\frac{x^2}{2}\right)$, es el correspondiente al fondo. De esta forma, el potencial cosmológico gravitacional Φ con fuentes debidas solo a las perturbaciones de la densidad sigue la ecuación

$$\nabla^2\Phi = 4\pi Ga^2\bar{\rho}\delta, \quad (3.26)$$

donde δ está dada por la ecuación (3.18).

El momento de una partícula de masa m es $\vec{p} = ma\vec{v}$, por consiguiente su ecuación de movimiento (3.23) es

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = -am\nabla\Phi(\vec{x}). \quad (3.27)$$

Por la conservación del espacio-fase, el teorema de Liouville y definiendo la densidad de número de partículas en el espacio fase como $f(\vec{x}, \vec{p}, \tau)$, se tiene la ecuación de Vlasov, que es la ecuación de Boltzmann para el caso sin colisiones,

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\vec{p}}{ma} \cdot \nabla f - ma\nabla\Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0. \quad (3.28)$$

La ecuación de Vlasov es una ecuación diferencial parcial, no lineal, con siete variables, la cual por su complejidad en pocas ocasiones es resuelta, no obstante, para los fines del problema de formación de estructura, la evolución de la distribución espacial es suficiente. Dicho lo anterior, tomamos los momentos de la función de distribución. El momento a orden cero (relación de la densidad del espacio fase con el campo de las densidades de masa locales)[18, 20, 21]

$$\int d^3\vec{p}f(\vec{x}, \vec{p}, \tau) \equiv \rho(\vec{x}, \tau), \quad (3.29)$$

el primer y segundo orden

$$\int d^3\vec{p}\frac{\vec{p}}{am}f(\vec{x}, \vec{p}, \tau) \equiv \rho(\vec{x}, \tau)\vec{v}(\vec{x}, \tau), \quad (3.30)$$

$$\int d^3\vec{p}\frac{p_i p_j}{a^2 m^2}f(\vec{x}, \vec{p}, \tau) \equiv \rho(\vec{x}, \tau)\vec{v}_i(\vec{x}, \tau)\vec{v}_j(\vec{x}, \tau) + \sigma_{ij}(\vec{x}, \tau), \quad (3.31)$$

donde el flujo de la velocidad peculiar está denotado por $\vec{v}(\vec{x}, \tau)$ y el tensor de estrés $\sigma_{ij}(\vec{x}, \tau)$, y se relaciona con el tensor de velocidad de dispersión $u_{ij}(\vec{x}, \tau)$, por $\sigma_{ij} \equiv \rho(\vec{x}, \tau)u_{ij}(\vec{x}, \tau)$.

Integrando sobre los momentos de la ecuación de Vlasov sobre el espacio fase se tiene que del momento cero, se encuentra la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \delta(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} + \nabla \cdot [[1 + \delta(\vec{x}, \tau)]\vec{v}(\vec{x}, \tau)] = 0, \quad (3.32)$$

y del primer momento, se puede encontrar la ecuación de Euler (conservación de momento)

$$\frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} + \mathcal{H}(\tau)\vec{x}(\vec{x}, \tau) + \vec{v}(\vec{x}, \tau) \cdot \nabla \vec{v}(\vec{x}, \tau) = -\nabla \Phi(\vec{x}, \tau) - \frac{\nabla_j(\rho \sigma_{ij})}{\rho}. \quad (3.33)$$

Al considerar pequeñas perturbaciones respecto al fondo homogéneo del Universo, es posible linealizar las ecuaciones (3.26), (3.32) y (3.33), las cuales escritas en el espacio de Fourier toman la forma

$$\frac{\partial \delta_{\vec{k}}(\tau)}{\partial \tau} + \theta_{\vec{k}}(\tau) = 0, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \theta_{\vec{k}}}{\partial \tau}(\tau) + \mathcal{H}(\tau)\theta_{\vec{k}}(\tau) + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(\tau)\Omega_m\delta_{\vec{k}}(\tau) = 0, \quad (3.35)$$

donde θ es la variable definida en (3.21).

Las ecuaciones (3.34) y (3.35) son las mismas ecuaciones que se encontraron para el análisis desde el punto de vista de fluido ideal (3.19) y (3.20).

3.3. Teoría perturbativa Euleriana

La teoría de perturbaciones Euleriana, hace su descripción de las perturbaciones de la densidad y campos de velocidad en un sistema coordenado fijo o comóvil en cosmología. En esta sección se presentan las soluciones para las ecuaciones (3.34) y (3.35), las cuales están escritas en este marco de referencia Euleriano.

Así pues, combinando las ecuaciones (3.34) y (3.35) y separando la parte temporal y espacial como $\delta(\vec{k}, \tau) = D_1(\tau)\delta(\vec{k}, 0)$, donde $D_1(\tau)$ es el llamado factor de crecimiento lineal, la parte temporal del crecimiento de las perturbaciones estará regida por

$$\frac{d^2 D_1(\tau)}{d\tau^2} + \mathcal{H}(\tau)\frac{dD_1(\tau)}{d\tau} = -\frac{3}{2}\Omega_m(\tau)\mathcal{H}^2(\tau)D_1(\tau), \quad (3.36)$$

y la evolución de la densidad estará dada por una solución del tipo

$$\delta(\vec{k}, \tau) = D_1^{(+)}(\tau)A(\vec{k}) + D_1^{(-)}(\tau)B(\vec{k}), \quad (3.37)$$

donde $A(\vec{k})$ y $B(\vec{k})$ son dos funciones arbitrarias de la posición definidas por las condiciones iniciales y $D_1^{(+)}(\tau)$ y $D_1^{(-)}(\tau)$ son los modos creciente y decreciente respectivamente.

La solución para la divergencia de la velocidad $\theta(\vec{k}, \tau)$ se obtiene de la ecuación (3.34) y tiene la forma [18, 22]

$$\theta(\vec{k}, \tau) = -\frac{\partial \delta(\vec{k}, \tau)}{\partial \tau} = -\mathcal{H}(\tau) f_1(\tau) D_1(\tau) \delta(\vec{k}), \quad (3.38)$$

donde

$$f_1(\tau) \equiv \frac{d \ln D_1^{(+)}}{d \ln a} = \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d \ln D_1^{(+)}}{d \tau}. \quad (3.39)$$

3.4. Teoría perturbativa Lagrangiana

Por otro lado, se tiene la teoría perturbativa Lagrangiana (2LPT), que hace una descripción de la trayectoria de partículas individuales. Las soluciones para la evolución de las partículas desde este marco de referencia son de relevancia en este trabajo, ya que el código de N -cuerpos que será utilizado, resuelve las ecuaciones de movimiento en este marco de referencia.

La evolución de las partículas en un Universo en expansión, está dada por las ecuaciones de movimiento [22]

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} + \mathcal{H}(\tau) \frac{d\vec{x}}{d\tau} + \nabla \Phi = 0, \quad (3.40)$$

donde Φ es el potencial gravitacional, τ es el tiempo conforme, $\vec{\Psi}$ es el vector desplazamiento de la partícula y relaciona la posición de la partícula Euleriana $\vec{x}(\tau)$ a su posición inicial Lagrangiana \vec{q} , por medio de

$$\vec{x}(\tau) = \vec{q} + \vec{\Psi}(\vec{q}, \tau). \quad (3.41)$$

La densidad en el sistema lagrangiano es la misma que la densidad promedio del Universo, entonces, por la ecuación de continuidad se tiene que

$$\bar{\rho}(\tau) d^3 q = \rho(\vec{x}, \tau) d^3 x = \bar{\rho}(\tau) [1 + \delta(\vec{x}, \tau)] d^3 x, \quad (3.42)$$

y a través del inverso del Jacobiano $J(\vec{q}, \tau) = \det(\delta_{ij} + \Psi_{i,j}(\vec{q}, \tau))$,³ se puede relacionar el contraste de densidad $\delta(\vec{x}, \tau)$ con el vector desplazamiento como

$$1 + \delta(\vec{x}, \tau) = \left| \frac{d^3 q}{d^3 x} \right| = \frac{1}{J(\vec{q}, \tau)}. \quad (3.43)$$

³ Siguiendo la notación de la referencia [19], $\Psi_{i,j} \equiv \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_j}$.

entonces tomando la divergencia de la ecuación 3.40, la relación 3.43 y por la regla de la cadena se tiene que para el vector desplazamiento $\vec{\Psi}$ [19],

$$J(\vec{q}, \tau)[\delta_{ij} + \Psi_{i,j}(\vec{q}, \tau)]^{-1} \left[\frac{d^2 \Psi_{i,j}(\vec{q}, \tau)}{d\tau^2} + \mathcal{H} \frac{d\Psi_{i,j}}{d\tau} \right] = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m [J(\vec{q}, \tau) - 1]. \quad (3.44)$$

Esta última ecuación puede resolverse perturbativamente, para ello se expande el vector desplazamiento $\vec{\Psi}$ como sigue

$$\vec{\Psi}(\vec{q}, \tau) = \vec{\Psi}^{(1)}(\vec{q}, \tau) + \vec{\Psi}^{(2)}(\vec{q}, \tau) + \dots, \quad (3.45)$$

usando esta expansión en la ecuación 3.44, a orden lineal se tiene que $\vec{\Psi}^{(1)}$ cumple

$$\frac{d^2 \Psi_{i,i}^{(1)}}{d\tau^2} + \mathcal{H} \frac{d\Psi_{i,i}^{(1)}}{d\tau} = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m \Psi_{i,i}^{(1)}, \quad (3.46)$$

cuya solución es

$$\nabla_q \cdot \vec{\Psi}^{(1)} = -\delta_1(\vec{x}, \tau), \quad (3.47)$$

donde la parte temporal de δ_1 obedece la expresión

$$D_1''(\tau) + \mathcal{H}(\tau)D_1'(\tau) = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m D_1(\tau). \quad (3.48)$$

Finalmente, las posiciones \vec{x} y velocidades \vec{v} a orden lineal son

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{q} - \nabla_q^{-1} \delta_1(\vec{x}, \tau), \\ \vec{v} &= -\mathcal{H} f_1 \nabla_q^{-1} \delta_1(\vec{x}, \tau) \end{aligned} \quad (3.49)$$

además, usando la condición de que $\nabla \times \vec{\Psi}^{(1)} = 0$, se tiene que $\vec{\Psi}^{(1)} = -\nabla_q \phi^{(1)}(\vec{q}, \tau)$, y entonces la ecuación (3.49) toma la forma [19]

$$\begin{aligned} \vec{x}(\vec{q}, \tau) &= \vec{q} - \nabla_q \phi^{(1)}(\vec{q}, \tau), \\ \vec{v}(\vec{q}, \tau) &= -\mathcal{H} f_1 \nabla_q \phi^{(1)}(\vec{q}, \tau). \end{aligned} \quad (3.50)$$

El desarrollo para encontrar las soluciones de la teoría lagrangiana a segundo orden, es análogo al que se mostró para el primer orden. Así la ecuación para $\vec{\Psi}^{(2)}$ es de la forma

$$\left(\frac{d^2 \Psi_{i,i}^{(2)}}{d\tau^2} + \mathcal{H} \frac{d\Psi_{i,i}^{(2)}}{d\tau} - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m \Psi_{i,i}^{(2)} \right) = -\frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m \left[\frac{1}{2} (\Psi_{k,k}^{(1)})^2 - \frac{1}{2} \Psi_{i,j}^{(1)} \Psi_{j,i}^{(1)} \right], \quad (3.51)$$

la parte temporal obedece la expresión

$$D_2''(\tau) + (H)D_2'(\tau) - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_m D_2(\tau) = -\frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_m [D_1(\tau)]^2, \quad (3.52)$$

y finalmente, las posiciones y velocidades a segundo orden son [19, 20]

$$\vec{x}(\vec{q}, \tau) = \vec{q} - \nabla_{\vec{q}}\phi^{(1)}(\vec{q}, \tau) + \nabla_{\vec{q}}\phi^{(2)}(\vec{q}, \tau), \quad (3.53)$$

$$\vec{v}(\vec{q}, \tau) = -\mathcal{H}f_1\nabla_{\vec{q}}\phi^{(1)}(\vec{q}, \tau) + \mathcal{H}f_2\nabla_{\vec{q}}\phi^{(2)}(\vec{q}, \tau), \quad (3.54)$$

donde $f_2 = \frac{d \ln D_2}{d \ln a}$.

Por medio de la teoría Lagrangiana de perturbaciones, los códigos de N -cuerpos encuentran la evolución no lineal de las partículas, de ahí la importancia de haber presentado su desarrollo. Las capturas finales de una simulación cosmológica contienen las posiciones y velocidades finales de las partículas, es decir las ecuaciones (3.53) y (3.54).

Capítulo 4

Materia Oscura

El 30.6 % de la densidad en el Universo es materia, de ese porcentaje, 25.8 % corresponde a materia oscura, el porcentaje restante corresponde a materia bariónica. Debido a su alta contribución a la densidad de materia del Universo, el estudio de la materia oscura es relevante en el contexto de la formación de estructura, pues a pesar de que se tienen muchos modelos de materia oscura, a la fecha no se tiene un acuerdo sobre que es la materia oscura.

En la sección 4.1 se presentan algunas de las evidencias que se tienen de la existencia de la materia oscura, además de una revisión general de los candidatos a materia oscura más populares en la literatura. En la sección 4.2 se expone el modelo estándar de materia oscura y los valores encontrados por Planck para los diversos parámetros del modelo. Finalmente en la sección 4.3 se muestran las ecuaciones que describen el modelo de materia oscura como campo escalar y sus soluciones, dicho modelo será considerado para llevar a cabo las simulaciones cosmológicas.

4.1. Evidencia y candidatos más populares a materia oscura

Uno de los primeros científicos en considerar la materia oscura como parte de la composición del Universo fue el astrónomo Fritz Zwicky en 1933 quien al comparar la masa del cúmulo Coma estimada con el teorema de virial y la estimada por la relación de masa-luz, concluyó que la mayor parte de su composición era materia oscura [23].

Otra evidencia importante de la existencia de materia oscura, es la discrepancia que hay en la distribución de masa de las galaxias, que se encuentra a partir de las curvas de rotación de la galaxia (que es la velocidad de rotación de las estrellas y gas de una

galaxia como función de su distancia radial al centro de la galaxia [24]) predichas por la fotometría y de las medidas por las observaciones de 21 cm. Algunos trabajos pioneros son [25–27].

A continuación se ofrece una descripción muy general de los candidatos a materia oscura más populares [8, 24, 28–30], los cuales están clasificados en tres categorías; materia oscura fría, tibia y caliente.

- **Materia oscura fría.** Este tipo de materia oscura, ofrece la descripción más simple para materia oscura, al considerar materia con velocidades de dispersión no relativistas.

- **WIMP**

Por sus siglas en inglés Weakly Interactive Massive Particle, son partículas masivas que interactúan débilmente. Este candidato fue propuesto por Steigman y Turner en 1985 [31]. La interacción de estas partículas es a través de la gravedad y la interacción nuclear débil. Son partículas con masas del orden de 100 GeV. Dentro de esta clasificación se incluyen al neutralino supersimétrico y al fotón de Kaluza-Klein, partículas que provienen de teorías del modelo estándar mínimo supersimétrico [32] y dimensiones extras universales [33].

- **Axiones**

Son bosones de Nambu-Goldstone, surgieron como una solución al problema fuerte de carga-paridad de la cromodinámica cuántica (QCD). El Lagrangiano de QCD contiene un término que viola carga-paridad y contribuye al momento eléctrico dipolar del neutrón, el coeficiente de dicho término es $\lesssim 10^9$, términos de ese orden sugieren la existencia de una simetría, la propuesta de Roberto Peccei y Helen Quinn en 1977 [34], fue convertir este coeficiente en un campo dinámico y agregar una simetría global, dicha simetría se rompe espontáneamente (el boson de Goldstone de esta ruptura de simetría global es el axi3n), haciendo cero este término del Lagrangiano.

- **MACHO**

Por sus siglas en inglés Massive Astrophysical Compact Halo Objects, son objetos compactos que pueden o no ser de materia bariónica, algunos ejemplos de estos objetos no luminosos son planetas, estrellas de neutrones, agujeros negros, enanas blancas y marrones. Este candidato a materia oscura es el único que ha sido detectado, esta detección ha sido posible gracias al efecto de lentes gravitacionales. Algunas colaboraciones dedicadas a la detección de este candidato son MACHO, EROS y OGLE. No obstante, los MACHOs solo contribuyen a un pequeño porcentaje de la materia oscura total en la Vía

Láctea, por ejemplo la colaboración EROS [35, 36] concluyó que los MACHOs no contribuyen más de un 8 % a la masa del halo galáctico.

- **Materia Oscura Tibia.** Este tipo de materia tiene velocidades de dispersión intermedias a al régimen relativista con no-relativista.
 - **Neutrinos estériles**

Propuestos en 1993 por Dodelson y Widrow [37] son neutrinos que no interactúan electrodébilmente, tienen masas menores a 10 keV y se acoplan al modelo estándar de partículas a través de su mezcla con los neutrinos ordinarios. Los neutrinos estériles también han sido propuestos como un mecanismo generador de masa para los neutrinos activos [29].
 - **Gravitinos**

Los gravitinos son candidatos que surgen de las teorías supersimétricas, son las partículas super compañeras de los gravitones, no interactúan con el modelo estándar de partículas. Su masa puede ir desde eV a TeV. Los gravitinos con masas menores a keV no favorecen la formación de estructuras pequeñas, de ahí que su tratamiento requiera de otros modelos cosmológicos [29]. Fueron propuestos como candidatos a materia oscura por Pagels y Primack.
- **Materia Oscura Caliente.** Este tipo de materia considera materia oscura con velocidades de dispersión relativistas.
 - **Neutrinos**

Son partículas estables, que existen y forman parte del modelo estándar, no interactúan ni fuerte ni electromagnéticamente. La propuesta fue hecha por Gershtein y Zeldovich en 1966 [38]. Aunque las características previamente mencionadas lo hacen un candidato deseable, al ser una partícula relativista, el neutrino se considera materia oscura caliente, simulaciones numéricas han permitido poner a prueba sistemas con diferentes tipos de materia oscura que evolucionan bajo los efectos de la gravedad. Estas simulaciones han mostrado que partículas de materia oscura caliente colapsan, formando primero grandes estructuras y hasta muy tarde pequeñas estructuras, dando como resultado menos formación de estructura de la observada. Por otro lado la materia oscura fría da paso a formación de estructuras pequeñas a primer instancia, seguido de formación de grandes estructuras, ajustándose así a la estructura observada [24].

4.2. Modelo Λ CDM

El modelo cosmológico estándar de materia oscura fría con constante cosmológica, también conocido como Λ CDM (por sus siglas en inglés Λ Cold Dark Matter) es el modelo más aceptado y considera un Universo en expansión, el cual está regido por la Relatividad General, está conformado principalmente por materia oscura fría y constante cosmológica (Λ) a tiempos tardíos. Esta revisión del modelo Λ CDM está basada principalmente en las referencias [5, 7].

El éxito de este modelo radica en su capacidad para hacer una buena descripción de la radiación cósmica de fondo, la relación magnitud-distancia de supernovas del tipo Ia, las oscilaciones bariónicas acústicas, la estructura a gran escala del Universo, y la distorsión de imágenes de las galaxias distantes debido a los lentes gravitacionales.¹

El modelo de Λ CDM considera materia oscura fría sin presión, estable y no interactuante, con una densidad física $\Omega_c h^2$. La constante de Hubble al día de hoy se toma por $H_0 = 100 h \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. La materia bariónica tiene una densidad $\Omega_b h^2$ y está conformada por hidrógeno y helio, la fracción de masa del Helio se parametriza por $Y_P = 0,2477$. La temperatura de los fotones al tiempo actual es de $T_0 = 2,7255 \pm 0,0006 \text{ K}$.

Este modelo asume equilibrio térmico antes del desacoplamiento de neutrinos. Los neutrinos tienen una densidad de energía adicional debido a que al tiempo de la aniquilación electrón-positrón, no están completamente desacoplados, esta densidad de energía adicional se toma en cuenta al asumir que tiene una distribución térmica con una densidad efectiva del tipo:

$$\rho_\nu = N_{eff} \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \rho_\gamma, \quad (4.1)$$

con $N_{eff} = 3,046$.

El modelo Λ CDM adopta la jerarquía normal para las masas de los neutrinos, aproximada a un solo eigenestado masivo con $m_\nu = 0,06 \text{ eV}$ ($\Omega_\nu h^2 \approx \sum m_\nu / 93,04 \text{ eV} \approx 0,0006$).

En lo concerniente a reionización, se tiene que el punto al que el Universo está mitad reionizado, se parametriza a un corrimiento al rojo de z_{re} . Además se asume que la reionización del hidrógeno y la primera reionización de helio ocurren simultáneamente. Para una reionización completa se tiene $x_e = f \equiv 1 + f_{He} \approx 1,08$, donde f_{He} es la razón de helio-hidrógeno por número. La segunda reionización del Helio se sitúa al corrimiento al rojo $z = 3,5$.

¹En inglés, cosmic shear.

Para este modelo se toman en cuenta solo perturbaciones adiabáticas escalares a tiempos tempranos, su espectro de potencias se parametriza de la forma

$$\mathcal{P}(k) = A_s \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s - 1 + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{dn_s}{d \ln k} \right) \ln \left(\frac{k}{k_0} \right)} \quad (4.2)$$

donde n_s y $\frac{dn_s}{d \ln k}$ son constantes, y escala de pivote $k_0 = 0,05 \text{ Mpc}^{-1}$.

La amplitud lineal del espectro de potencias lineal del CMB a escalas pequeñas es proporcional a $e^{-2\tau} A_s$.

Para los modos tensoriales (por ejemplo: ondas gravitacionales primordiales) su espectro se parametriza como

$$\mathcal{P}_t(k) = A_t \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_t}. \quad (4.3)$$

Respecto a la energía oscura, el modelo básico trata a la energía oscura como una constante cosmológica con un parámetro de densidad Ω_Λ . La ecuación de estado para la constante cosmológica es

$$w \equiv \frac{p}{\rho} = -1. \quad (4.4)$$

La igualdad de materia-radiación z_{eq} se define como el corrimiento al rojo para el cual $\rho_\gamma + \rho_\nu = \rho_c + \rho_b$. El valor del corrimiento al rojo de la última superficie de dispersión z_* , es tal que la profundidad óptica de la dispersión de $z = 0$ a $z = z_*$, (sin reionización) es igual a 1. La profundidad óptica se define por

$$\tau(\eta) \equiv \int_{\eta_0}^{\eta} \dot{\tau} d\eta', \quad (4.5)$$

donde η es el tiempo conforme, $\dot{\tau} = -an_e\sigma_T$, n_e es la densidad de electrones libres y σ_T es la sección transversal de Thomson.

La escala angular del horizonte de sonido en la última dispersión es $\theta_* = r_s(z_*)/D_A(z_*)$, donde r_s es el horizonte de sonido

$$r_s = \int_0^{\eta(z)} \frac{d\eta'}{\sqrt{3(1+R)}},$$

donde $R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$.

Las velocidades de bariones se desacoplan del dipolo de fotón cuando el arrastre de Compton balancea la fuerza gravitacional, es decir $\tau_d \sim 1$, donde $\tau_d(\eta) \equiv \int_{\eta_0}^{\eta} \dot{\tau} d\eta'/R$. El corrimiento al rojo de arrastre se denota por z_{drag} y el horizonte de sonido en la época de arrastre como $r_{drag} = r_s(z_{drag})$.

La longitud de onda característica de amortiguamiento k_D , está dada por

$$k_D^{-2}(\eta) = -\frac{1}{6} \int_0^\eta d\eta' \frac{1}{\dot{\tau}} \frac{R^2 + 16(1+R)/15}{(1+R)^2}. \quad (4.6)$$

La escala angular de amortiguamiento se define por $\theta_D = \pi/(k_D D_A)$, donde D_A es la diámetro angular cómovil a z_* . Otra normalización al espectro de potencias (comúnmente normalizado por A_s), es el valor cuadrático medio de las fluctuaciones en esferas de $8h^{-1}\text{Mpc}$ a $z = 0$. Para el espectro de potencias adimensional \mathcal{P}_m , se tiene

$$\sigma_R^2 = \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_m(k) \left[\frac{3j_1(kR)}{kR} \right]^2, \quad (4.7)$$

donde $R = 8h^{-1}\text{Mpc}$ y j_1 son las funciones esféricas de Bessel de primer orden.

El cuadro 4.1 muestra los valores para los seis parámetros base del modelo ΛCDM con límites de confianza del 68 %, además de otros parámetros derivados que son necesarios para la descripción completa del modelo, estos datos son parte de los resultados del último muestreo dedicado a medir las anisotropías del fondo de radiación cósmica, la misión Planck, la cual concluyó su trabajo en el 2015.

Parámetro	Símbolo	Valor
Densidad bariónica (hoy)	$\Omega_b h^2$	$0,02227 \pm 0,00020$
Densidad materia oscura fría (hoy)	$\Omega_c h^2$	$0,1184 \pm 0,0012$
100× Horizonte de sonido r_*/D_A	$100\theta_{MC}$	$1,04106 \pm 0,00041$
Profundidad óptica de dispersión de Thomson debida a reionización	τ	$0,067 \pm 0,013$
Logaritmo de la amplitud de las perturbaciones de curvatura primordiales	$\ln(10^{10} A_s)$	$3,064 \pm 0,024$
Índice espectral escalar	n_s	$0,9681 \pm 0,0044$
Tasa de expansión actual en $\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$	H_0	$67,90 \pm 0,55$
Densidad de Energía Oscura dividida entre la densidad crítica (hoy)	Ω_Λ	$0,6935 \pm 0,0072$
Densidad de materia (incluidos neutrinos masivos) dividida entre la densidad crítica (hoy)	Ω_m	$0,3065 \pm 0,0072$
Densidad de materia física	$\Omega_m h^2$	$0,1413 \pm 0,0011$
Valor cuadrático medio de las fluctuaciones en la materia total en esferas de $8h^{-1}\text{Mpc}$ a $z = 0$	σ_8	$0,8154 \pm 0,0090$
Corrimiento al rojo al que el Universo esta mitad reionizado	z_{re}	$8,9_{-1,2}^{+1,3}$

$10^9 \times$ espectro de potencias de curvatura adimensional a $k_0 = 0,05 \text{Mpc}^{-1}$	$10^9 A_s$	$2,143 \pm 0,051$
Espectro de potencias lineal de las anisotropías del CMB a escalas pequeñas	$10^9 A_s e^{-2\tau}$	$1,873 \pm 0,011$
Edad del Universo (hoy) (Gyr)	t_0	$13,796 \pm 0,029$
Corrimiento al rojo para el cual la profundidad óptica es igual a la unidad	z_*	$1089,90 \pm 0,30$
Tamaño comóvil del horizonte de sonido a $z = z_*$	r_*	$144,93 \pm 0,30$
$100 \times$ tamaño angular del horizonte de sonido a $z = z_*(r_*/D_A)$	$100\theta_*$	$1,04126 \pm 0,00041$
Corrimiento al rojo al que la profundidad óptica de arrastre de bariones es igual a la unidad	z_{drag}	$1059,60 \pm 0,44$
Tamaño comóvil del horizonte de sonido a $z = z_{drag}$	r_{drag}	$147,63 \pm 0,32$
Amortiguamiento característico de la longitud de onda comóvil (Mpc^{-1})	k_D	$0,14022 \pm 0,00042$
Corrimiento al rojo de la igualdad de materia-radiación (neutrinos sin masa)	z_{eq}	3361 ± 27
Longitud de onda comóvil del modo perturbativo que entró al radio de Hubble el tiempo de igualdad de materia-radiación	k_{eq}	$0,010258 \pm 0,000083$
$100 \times$ Escala angular del horizonte de sonido al tiempo de igualdad materia-radiación	$100\theta_{s,eq}$	$0,4533 \pm 0,0026$

CUADRO 4.1: Tomado de [5](Cuadro 4, columna 3). Límites de confianza del 68 % para los parámetros cosmológicos del modelo cosmológico ΛCDM del espectro de potencias de Planck CMB, en combinación con lensing y datos externos (BAO+JLA+ H_0).

4.3. Materia oscura como campo escalar

A pesar de que ΛCDM es el modelo más aceptado en cosmología este modelo presenta problemas en la descripción de estructuras a escalas pequeñas, entre ellos podemos nombrar [39]:

- El Problema de los satélites faltantes, el cual hace referencia la sobrepoblación de subestructuras predichas por las simulaciones numéricas de N -cuerpos que toman como modelo cosmológico a ΛCDM [40–42].

- El problema de los perfiles de cúspide de las densidades centrales en los halos galácticos, que surge del hecho de que las observaciones indican una densidad de materia oscura aproximadamente constante en el centro de las galaxias, sin embargo las simulaciones numéricas de N -cuerpos predicen un comportamiento del perfil densidad que va como una potencia, los llamados perfiles de densidad cúspide [43, 44].
- El problema “Demasiado grande para fallar”. Este problema hace referencia a que contrario a las observaciones, las simulaciones cosmológicas para Λ CDM indican que los subhalos más masivos de la Vía Láctea son demasiado densos para albergar cualquiera de sus satélites brillantes [45–47].

Motivados por los problemas expuestos, el modelo que se considera en el presente trabajo es la materia oscura como campo escalar. Dicho modelo fue propuesto en 1994 por S. U. Ji y S. J. Sin [48]. Otros trabajos pioneros en este tema son los de Sang-Jin Sin [49], J. Lee y Koh [50], T. Matos y F. Guzmán [51].

La propuesta de este modelo considera a la materia oscura como un campo escalar ϕ , el cual se acopla mínimamente a la gravedad. Este campo escalar también es considerado como un bosón ultra-ligero con una masa del orden $m \sim 1 \times 10^{-22} \text{eV}$, el cual puede formar condensados de Bose-Einstein cuya temperatura crítica de condensación es muy alta $T_c \sim 1/m^{5/3} \sim \text{TeV}$.

Como se presenta en la referencia [52], algunas de las características más notables de este modelo es que ajusta con:

- La evolución de las densidades cosmológicas.
- Los picos acústicos del CMB.
- El corte natural del espectro de potencias del campo escalar suprime las subestructuras en los cúmulos galácticos [53]. Un campo escalar con masas de $m \sim 10^{-22} \text{eV}$ podría resolver el problema de los satélites faltantes.
- Las curvas de rotación de grandes galaxias y galaxias LSB.

Desde el punto de vista de física de partículas la idea de tener un campo escalar ϕ ultra-ligero, esta motivada por una simetría extra, la cual surge del hecho de que para este campo escalar de espín cero, la masa y los autoacoplamientos de ϕ sean exactamente cero. La acción se escribe como:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (4.8)$$

donde el corrimiento de la simetría es $\phi \rightarrow \phi + C$, con C constante. Si se agregan autoacomplamientos $V(\phi)$ del tipo $\frac{1}{2}m^2\phi^2$ esta simetría desaparece. Al estar considerando que el campo escalar de materia oscura tiene una masa muy pequeña ϕ debería tener un corrimiento de simetría aproximado. Campos escalares con potenciales periódicos $V(\phi)$ surgen naturalmente y estos son nombrados campos tipo-axion, las partículas tipo-axion podrían ser el axion de QCD [54].

En particular en este trabajo se considera un Universo espacialmente plano con constante cosmológica, para el cual sus componentes de materia (radiación, bariones, materia oscura, etc.) pueden ser descritos como fluidos a través del tensor de energía momento definido en la ecuación (2.6).

La densidad lagrangiana para materia oscura como campo escalar se escribe como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi), \quad (4.9)$$

El tensor de energía momento para un campo escalar es:

$$T_\nu^\mu = \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi - g_\nu^\mu\mathcal{L}. \quad (4.10)$$

Para el elemento de línea definido en la ecuación (2.1), las ecuaciones de campo de Einstein para el fondo son:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\sum_x \bar{\rho}_x + \rho_\phi \right), \quad (4.11)$$

$$\dot{H} = 4\pi G \left[\sum_x (\bar{\rho}_x + p_x) + (\rho_\phi + p_\phi) \right], \quad (4.12)$$

donde \bar{p}_x y $\bar{\rho}_x$ obedecen la ecuación (2.9) y la ecuación de movimiento para ϕ es de la forma:

$$\ddot{\phi} = -3H\dot{\phi} - \partial_\phi V(\phi), \quad (4.13)$$

al considerar materia oscura tipo fluido, se encuentra que la densidad ρ_ϕ y la presión p_ϕ obedecen las ecuaciones:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (4.14)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4.15)$$

Es posible reescribir la ecuación 4.13, en un sistema de ecuaciones de primer orden, para tal propósito se define un conjunto de variables [55]

$$x \equiv \frac{\kappa \dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad y \equiv \frac{\kappa V^{1/2}}{\sqrt{3}H}, \quad y_1 \equiv -2\sqrt{2} \frac{\partial_\phi V^{1/2}}{H}, \quad y_2 \equiv -4\sqrt{3} \frac{\partial_\phi^2 V^{1/2}}{\kappa H}, \quad (4.16)$$

donde $\kappa = \sqrt{8\pi G}$.

Así la ecuación (4.13) se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que escribimos como:

$$x' = -\left(3 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right)x + \frac{1}{2}yy_1, \quad y' = -\frac{\dot{H}}{H^2}y - \frac{1}{2}xy_1, \quad y_1' = -\frac{\dot{H}}{H^2}y_1 + xy_2, \quad (4.17)$$

donde las cantidades primadas, son derivadas respecto al número de e-foliaciones $N \equiv \ln(a/a_i)$, a y a_i son el factor de escala y el factor de escala inicial del Universo, respectivamente.

De las ecuaciones 4.11 y 4.12, se puede escribir la razón:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}(1 + \omega_{tot}), \quad (4.18)$$

en la que

$$\omega_{tot} \equiv \frac{p_{tot}}{\rho_{tot}} = \frac{\sum_x \bar{p}_x + p_\phi}{\sum_x \bar{\rho}_x + \rho_\phi} = \sum_x \Omega_x \omega_x + \Omega_\phi \omega_\phi, \quad (4.19)$$

donde Ω_x se define en la ecuación (2.13).

Ahora bien, si introducimos un cambio de variable polar de la siguiente forma [56] :

$$x = \Omega_\phi^{1/2} \sin(\theta/2), \quad y = \Omega_\phi^{1/2} \cos(\theta/2), \quad (4.20)$$

donde $\Omega_\phi \equiv (\kappa^2 \rho_\phi)/(3H^2)$ es el parámetro de densidad del campo escalar, con esto la ecuación de estado para el campo escalar se escribe como:

$$\omega_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -\cos \theta, \quad (4.21)$$

lo cual nos da una relación de la variable angular θ con la ecuación de estado para el campo escalar.

Aplicando el cambio de variable polar de la ecuación (4.20) a las ecuaciones (4.17), estas se escriben en la forma [57]:

$$\theta' = -3 \sin \theta + y_1, \quad (4.22)$$

$$y' = \frac{3}{2}(1 + \omega_{tot})y_1 + \Omega_\phi^{1/2} \sin(\theta/2)y_2, \quad (4.23)$$

$$\Omega_\phi' = 3(\omega_{tot} - \omega_\phi)\Omega_\phi, \quad (4.24)$$

este nuevo sistema de ecuaciones es otra representación de la ecuación (4.13).

Considerando la norma síncrona para las perturbaciones a la métrica definida en la ecuación (2.1) y que el campo escalar puede escribirse como $\phi(x, t) = \phi(t) + \varphi(x, t)$, donde $\phi(t)$ es el campo asociado al fondo homogéneo y φ es la perturbación lineal, la ecuación de Klein-Gordon para un modo de Fourier $\varphi(k, t)$ es [58]:

$$\ddot{\varphi} = -3H\dot{\varphi} - (k^2/a^2 + \partial_\phi^2 V)\varphi - \frac{1}{2}\dot{\phi}\dot{h}, \quad (4.25)$$

donde h es la traza de las perturbaciones escalares de la métrica y k es número de onda comóvil. Las perturbaciones a la densidad $\delta\rho_\phi$, presión δp_ϕ y la divergencia de la velocidad Θ_ϕ se escriben como [17]:

$$\begin{aligned} \delta\rho_\phi &= \dot{\phi}\dot{\varphi} + \partial_\phi V \varphi, \\ \delta p_\phi &= \dot{\phi}\dot{\varphi} - \partial_\phi V \varphi, \\ (\rho_\phi + p_\phi)\Theta_\phi &= (k^2/a)\dot{\phi}\varphi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Con una transformación de coordenadas polar, análoga a la propuesta en la ecuación (4.20) para las ecuaciones de fondo:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\kappa\dot{\varphi}}{H} = -\Omega_\phi^{1/2} e^\alpha \cos(\vartheta/2), \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \kappa y_1 \varphi = -\Omega_\phi^{1/2} e^\alpha \sin(\vartheta/2), \quad (4.27)$$

se pueden escribir los contrastes de densidad $\delta_\phi \equiv \delta\rho_\phi/\rho_\phi$, presión $\delta_{p_\phi} \equiv \delta p_\phi/\rho_\phi$ y la perturbación de la divergencia de la velocidad Θ_ϕ en términos de las variables ϑ y α :

$$\begin{aligned} \delta_\phi &= -e^\alpha \sin(\theta/2 - \vartheta/2), \\ \delta_{p_\phi} &= -e^\alpha \sin(\theta/2 + \vartheta/2), \\ (\rho_\phi + p_\phi)\Theta_\phi &= -\frac{2k^2}{aH y_1} \rho_\phi e^\alpha \sin(\theta/2) \sin(\vartheta/2). \end{aligned} \quad (4.28)$$

En términos de las nuevas variables definidas en la ecuación (4.27), la ecuación de Klein-Gordon perturbada (4.25) se puede escribir como dos ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
 \vartheta' &= 3 \sin \vartheta + 2\omega (1 - \cos \vartheta) + y_1 - 2e^{-\alpha} h' \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \\
 &\quad - \Omega_\phi^{1/2} \left[(1 - \cos \vartheta) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin \vartheta \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \frac{y_2}{y_1}, \\
 \alpha' &= -\frac{3}{2} (\cos \vartheta + \cos \theta) - \omega \sin \vartheta + e^{-\alpha} h' \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{\Omega_\phi^{1/2}}{2} \left[(1 - \cos \vartheta) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin \vartheta \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \frac{y_2}{y_1},
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

en la que se introdujo la relación $\omega = k^2/k_J^2$, donde $k_J^2 \equiv 2a^2 H^2 y_1 = -4\sqrt{2}a^2 H \partial_\phi V^{1/2}$ es el número de onda característico para perturbaciones escalares. Por simplicidad numérica se introduce la variable $\tilde{\vartheta} \equiv \theta - \vartheta$ y se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\vartheta}' &= -3 \left[\sin \theta + \sin \left(\theta - \tilde{\vartheta} \right) \right] - 2\omega \left[1 - \cos \left(\theta - \tilde{\vartheta} \right) \right] + e^{-\alpha} h' \left[\cos \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{2} \right) - \cos \left(\theta - \frac{\tilde{\vartheta}}{2} \right) \right] \\
 &\quad + \Omega_\phi^{1/2} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\theta}{2} - \tilde{\vartheta} \right) \right] \frac{y_2}{y_1}, \\
 \alpha' &= -\frac{3}{2} \left[\cos \left(\theta - \tilde{\vartheta} \right) + \cos \theta \right] - \omega \sin \left(\theta - \tilde{\vartheta} \right) + \frac{1}{2} e^{-\alpha} h' \left[\sin \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{2} \right) + \sin \left(\theta - \frac{\tilde{\vartheta}}{2} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\Omega_\phi^{1/2}}{2} \left[\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\theta}{2} - \tilde{\vartheta} \right) \right] \frac{y_2}{y_1}.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Si se define $\delta_0 \equiv -e^\alpha \sin \tilde{\vartheta}/2$ y $\delta_1 \equiv \cos \tilde{\vartheta}/2$, las ecuaciones (4.30) toman la forma

$$\begin{aligned}
 \delta_1' &= \left[-3 \cos \theta - \omega \sin \theta + \Omega_\phi^{1/2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \frac{y_2}{y_1} \right] \delta_1 - \frac{h'}{2} \sin \theta \\
 &\quad + \left[\omega(1 + \cos \theta) - \Omega_\phi^{1/2} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \frac{y_2}{y_1} \right] \delta_0, \\
 \delta_0' &= [-3 \sin \theta - \omega(1 - \cos \theta)] \delta_1 + \omega \sin \theta \delta_0 - \frac{h'}{2} (1 - \cos \theta).
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Y se tiene que los contrastes de densidad y presión y la divergencia de la velocidad ahora se escriben como :

$$\begin{aligned}
 \delta_\phi &= -e^\alpha \sin \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{2} \right) = \delta_0, \\
 \delta_{p_\phi} &= -e^\alpha \sin \left(\theta - \frac{\tilde{\vartheta}}{2} \right) = \delta_1 \sin \theta - \delta_0 \cos \theta, \\
 (\rho_\phi + p_\phi) \theta_\phi &= \frac{k^2}{2am} \rho_\phi [\sin \theta \delta_0 - (1 + \omega_\phi) \delta_1].
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Hasta este punto no se ha definido el potencial $V(\phi)$ con el que se trabajará, para este trabajo se considera un potencial de la forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (4.33)$$

donde m es la escala de masa. Con este potencial, las ecuaciones (4.30), toman la forma presentada en la referencia [59], donde se presenta la solución de las mismas, la cual se encuentra a través de CLASS (por sus siglas en inglés Cosmic Linear Anisotropy Solving System), el cual es un código de Boltzmann cuyo objetivo es simular la evolución de las perturbaciones lineales en el Universo, calcular el CMB y las estructuras observables a grandes escalas [60].

Las soluciones para diferentes masas del campo escalar se muestran en la figura 4.1 y a través de ellas es posible encontrar los espectros de potencias lineales para las diferentes masas del campo escalar, los cuales se muestran en el capítulo 5 y serán usados como parámetro de entrada en los códigos de N -cuerpos.

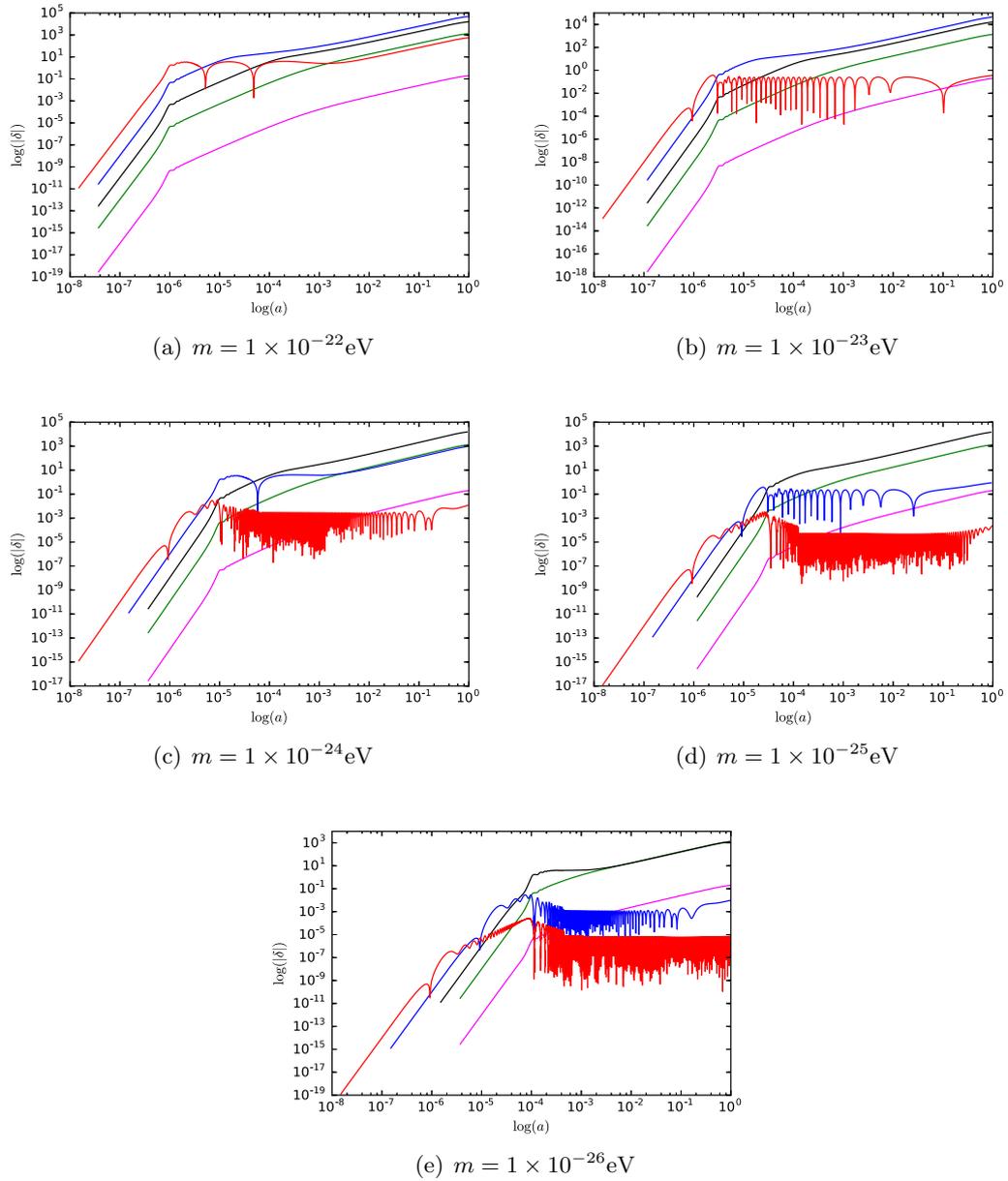


FIGURA 4.1: Contrastes de densidad para diferentes masas del campo escalar, para diferentes números de onda, obtenidos con CLASS. Línea roja $k = 10 \text{ Mpc}^{-1}$, línea azul $k = 1,0 \text{ Mpc}^{-1}$, línea negra $k = 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$, línea verde $k = 0,01 \text{ Mpc}^{-1}$, línea magenta $k = 0,001 \text{ Mpc}^{-1}$.

Capítulo 5

Simulaciones cosmológicas

El Universo hoy en día está compuesto de estructuras a grandes escalas, como son las galaxias y cúmulos de galaxias. La información básica para hacer una descripción de la formación de estructura es [10]:

- La cantidad total de materia no relativista en el Universo, cuantificada por Ω_0 .
- La composición del Universo en términos de la fracción de la densidad crítica.
- El espectro y tipo de perturbaciones primordiales a la densidad.

Sin embargo, el proceso de formación de estas estructuras es no lineal y la única herramienta para estudiar el acumulamiento en el régimen no lineal son las simulaciones cosmológicas [61].

Las simulaciones cosmológicas se llevan a cabo a través de los códigos de N -cuerpos, los cuales a partir de cierta configuración inicial de partículas, calculan la fuerza entre ellas y finalmente encuentran la posición final de las mismas.

Este capítulo está dedicado a las simulaciones cosmológicas y al análisis de las mismas. En la sección 5.1 se presenta el código utilizado para llevar a cabo las simulaciones, el método que usa el código para resolver las ecuaciones de movimiento y el esquema a través del cual calcula la fuerza entre partículas. Después, en la sección 5.2 se describe la función de correlación y el código que permite calcularla, siendo esta, una de las principales herramientas para el análisis de las simulaciones cosmológicas, así mismo se desarrolla de manera breve lo referente a las oscilaciones bariónicas acústicas. A continuación, en la sección 5.3 se presentan los resultados para pruebas realizadas con el código para los modelos de Λ CDM y materia oscura como campo escalar, dichas pruebas permitieron determinar los parámetros adecuados para las simulaciones cosmológicas. Finalmente, en

la sección 5.4 se muestran los resultados para las simulaciones cosmológicas de precisión para el modelo de materia oscura como campo escalar.

5.1. L-PICOLA

L-PICOLA es un código el cual genera y evoluciona condiciones iniciales de un campo de materia oscura, es un código paralelizado, rápido (es más rápido que una simulación completa no lineal de N -cuerpos) [62]. En particular este código usa los llamados métodos de COLA (por sus siglas en inglés Comoving Lagrangian Acceleration), los cuales son usados para producir catálogos simulados comparables en precisión y velocidad con los métodos 2LPT (por sus siglas en inglés 2-Lagrangian Perturbation Theory). La cosmología fiducial que asumiremos en este trabajo considera los parámetros de Planck, los cuales están dados en el cuadro 4.1.

5.1.1. Métodos de COLA

COLA es un método de N -cuerpos, el cual resuelve la estructura a gran escala desde un marco de referencia comóvil con los observadores, y que sigue las trayectorias de la teoría lagrangiana de perturbaciones [1, 63]. Una de las ventajas que presenta sobre otros métodos es la velocidad computacional de cálculo, la cual se adquiere al sacrificar precisión en escalas pequeñas, aunque sin perder precisión a grandes escalas.

A grandes escalas ($> 100 \text{ Mpc/h}$)¹ una descripción correcta puede hacerse con la Teoría de Perturbaciones Lagrangiana, el método de COLA busca desacoplar las escalas grandes y pequeñas de los códigos de N -cuerpos. Esto se logra resolviendo la formación de estructura a grandes escalas con la Teoría Lagrangiana de Perturbaciones de forma precisa y resolviendo numéricamente para escalas pequeñas.

La propuesta de los métodos de COLA consiste en expandir el desplazamiento Lagrangiano $\vec{\Psi}(\vec{x}, \tau)$ de las partículas de la forma [1]

$$\vec{\Psi}(\vec{x}, \tau) = \vec{\Psi}_{LPT}(\vec{x}, \tau) + \vec{\Psi}_{MC}(\vec{x}, \tau), \quad (5.1)$$

donde $\vec{\Psi}_{LPT}(\vec{x}, \tau)$ es el desplazamiento que se obtiene de 2LPT y $\vec{\Psi}_{MC}(\vec{x}, \tau) \equiv \vec{\Psi}(\vec{x}, \tau) - \vec{\Psi}_{LPT}(\vec{x}, \tau)$ es el modo acoplado residual. De esta forma las posiciones \vec{x} desde el marco de referencia Euleriano son

$$\vec{x} = \vec{q} + \vec{\Psi}_{LPT} + \vec{\Psi}_{MC}, \quad (5.2)$$

¹A lo largo de este capítulo algunas cantidades estarán en unidades de Mpc/h , donde h es la parametrización de H_0 .

lo que lleva a la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = -\nabla_{\vec{x}} \Phi, \quad (5.3)$$

que en el marco de referencia comóvil con LPT toma la forma

$$\frac{d^2 \vec{\Psi}_{MC}}{d\tau^2} = -\nabla_{\vec{x}} \Phi - \frac{d^2 \vec{\Psi}_{LPT}}{d\tau^2}. \quad (5.4)$$

El termino $\frac{d^2 \vec{\Psi}_{LPT}}{d\tau^2}$ puede verse como una fuerza ficticia sobre las partículas, pues se está considerando un marco de referencia no inercial.

En general los códigos de N -cuerpos discretizan el operador $d^2/d\tau^2$ en la ecuación (5.3), sin embargo, al seguir esta aproximación es necesario tener suficientes pasos de tiempo a fin de obtener una buena aproximación a grandes escalas, lo cual representa un alto costo computacional. Los métodos de COLA discretizan el operador $d^2/d\tau^2$ solo en el lado izquierdo de la ecuación (5.4), de forma que la fuerza ficticia $d^2 \vec{\Psi}_{LPT}/d\tau^2$ se calcula de forma precisa con la Teoría de perturbaciones Lagrangiana. A suficientes pasos de tiempo, COLA recupera el caso estándar en el que se tiene una solución exacta tanto para el régimen de escalas pequeñas como para grandes escalas. Como demuestran en la referencia [1], (figura 5.1) el código de COLA, a diferencia de otros códigos de N -cuerpos como 2LPT y Gadget, requiere pocos pasos de tiempo para tener suficiente precisión en la simulación.

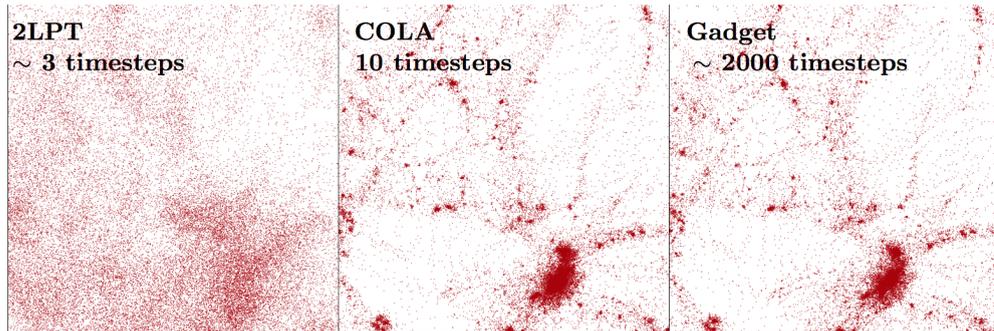


FIGURA 5.1: Tomada de [1](Figura 1.) Comparación de diferentes códigos de N -cuerpos. La captura corresponde a $z = 0$.

5.1.2. Métodos de Partícula-Malla (Particle-Mesh)

Existen diversos métodos para calcular la fuerza entre partículas dentro de la simulación, algunos de ellos y los cuales quedan fuera del alcance de este trabajo son:

- Partícula-Partícula (PP).
- Partícula-partícula/Partícula-malla (P3M).
- Treecode (TC).

Las simulaciones de L-PICOLA utilizan el esquema de Partícula-Malla (PM) para calcular las fuerzas entre partículas. Este método aproxima sus variables (por ejemplo el potencial o las densidades), sobre un arreglo de malla. Los operadores diferenciales se reemplazan por diferencias finitas en la malla. Usando interpolación en la malla se obtienen las fuerzas y potenciales. Las densidades de la malla se obtienen al asignar los atributos de las partículas a los puntos de la malla más próximos.

De forma general los pasos que sigue este esquema son:

- Asignar carga a la malla.
- Resolver la ecuación de Poisson.
- Calcular la fuerza en la malla.
- Interpoliar la fuerza total de la malla, para encontrar la fuerza sobre las partículas.
- Resolver las ecuaciones de movimiento para obtener las posiciones de las partículas.

La asignación de partículas a la malla hecha por L-PICOLA, es a través del método Cloud in a Cell (CIC) (nube en una célula). La densidad de carga se obtiene al repartir la carga debida a una partícula a diferentes puntos. Por ejemplo, si consideramos una malla en 2 dimensiones como en la figura 5.2, las coordenadas (x, y) de la partícula se establecen como el centro de masa (carga), si consideramos una nube del mismo tamaño que las celdas de malla, la carga en el área amarilla, se asigna al punto de malla (i, j) , al punto $(i + 1, j)$ se le asigna el área roja, al punto $(i + 1, j + 1)$, el área rosa y finalmente el área verde corresponde al punto $(i, j + 1)$ [2].

Aunque el método de PM no es el más preciso, presenta ventaja sobre otros por su velocidad de cálculo al no tener que resolver de forma exacta la fuerza entre todas las partículas. Por ejemplo, para N_m puntos de malla y N partículas se requieren del orden de $N_m \log N_m$ operaciones, a diferencia de otros métodos que para el mismo número de partículas requieren del orden de N^2 operaciones.

No obstante, es importante enfatizar que el método solo es útil para sistemas con interacciones de largo alcance (sistemas no correlacionados o sin colisiones), en los cuales las longitudes de onda son más grandes que el espaciado de la malla.

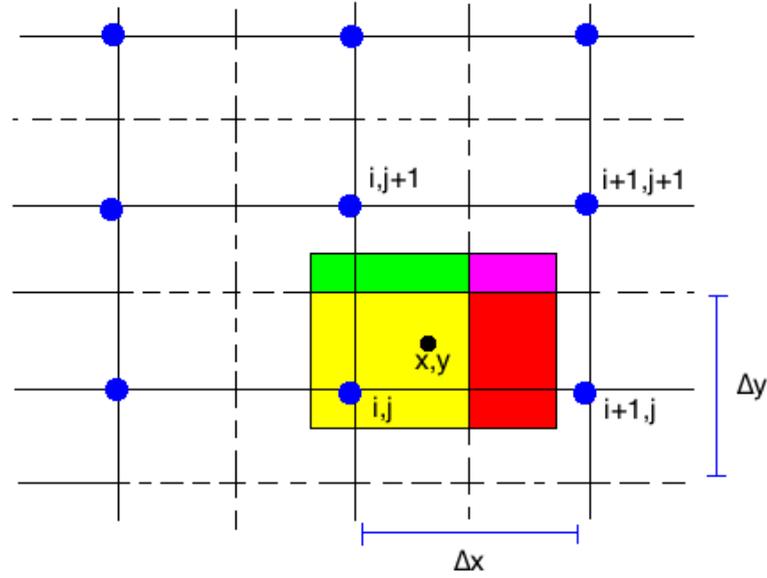


FIGURA 5.2: Tomada de [2] (Figura 2.). Asignación de densidad de carga a los puntos de la malla, a través del método Cloud in Cell.

5.2. Función de Correlación y Espectro de Potencias de Masa

Una cantidad importante para la descripción estadística del Universo, son las funciones de correlación. En una buena aproximación la distribución de la materia puede verse como una conjunto de objetos puntuales (galaxias, cúmulos de galaxias) con una cierta distribución.

La probabilidad δP de encontrar un objeto en un volumen infinitesimal δV es

$$\delta P = n\delta V, \quad (5.5)$$

donde n es la densidad numérica promedio y el valor medio de los objetos en el volumen V es $\langle N \rangle = nV$.

La función de correlación ξ a dos puntos, se define como el exceso de probabilidad de encontrar un objeto en dos elementos de volumen δV_1 y δV_2 a una separación r_{12} y matemáticamente se expresa como [10]

$$\delta P = n^2\delta V_1\delta V_2[1 + \xi(r_{12})]. \quad (5.6)$$

Para una distribución de Poisson las probabilidades de encontrar objetos en δV_1 y δV_2 son independientes, por tanto la correlación ξ , será cero si las posiciones están correlacionadas, y mayor que cero si las posiciones están anticorrelacionadas.

Otra forma de definir la función de correlación es a través del promedio del producto del contraste de densidad $\delta(r_1)$ que se define como $\delta(r_1) = (dP_1)/(ndV) - 1$ y entonces para dos puntos diferentes la función de correlación se expresa como [64]

$$\xi(r_{12}) = \frac{dP}{n^2 dV_1 dV_2} - 1 = \langle \delta(r_1) \delta(r_2) \rangle. \quad (5.7)$$

Otra cantidad importante en este contexto, es el espectro de potencias $\mathcal{P}(k)$, que se define a continuación

$$\mathcal{P}(k) = V |\delta_{\vec{k}}|^2, \quad (5.8)$$

donde se expandió en series de Fourier el contraste de densidad definido en la ecuación (3.18), de la forma

$$\delta_{\vec{k}} = V^{-1} \int \delta(\vec{x}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3x, \quad (5.9)$$

y su transformada inversa tiene la expresión

$$\delta(\vec{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k. \quad (5.10)$$

Por otro lado, considerando que la función de autocorrelación $\xi(\vec{r})$ se define por la expresión [64],

$$\xi(\vec{r}) \equiv \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle, \quad (5.11)$$

sustituyendo 5.9 en 5.8, y usando la definición 5.11 se encuentra que el espectro de potencias es la transformada de Fourier de la función de correlación², cuya relación es

$$\mathcal{P}(k) = \int \xi(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r, \quad (5.12)$$

e inversamente

$$\xi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathcal{P}(k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k. \quad (5.13)$$

²En algunos textos el factor del volumen V se omite.

Asumiendo isotropía del espacio, el espectro de potencias $\mathcal{P}(k)$ se puede expresar de la forma

$$\mathcal{P}(k) = 4\pi \int \xi(r) \frac{\text{sen } kr}{kr} r^2 dr. \quad (5.14)$$

Otra cantidad de interés es el valor cuadrático medio de la fluctuación de masa $(\delta M/M)^2$, y para definirla apropiadamente es necesario definir algunas cantidades. En primer lugar se define el valor cuadrático medio de las fluctuaciones de la densidad $(\delta\rho/\rho)^2$ como [10, 65]

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 = V^{-1} \int_0^\infty \frac{k^3 |\delta_k|^2}{2\pi^2} \frac{dk}{k}. \quad (5.15)$$

Si se considera la contribución a $(\delta\rho/\rho)^2$ de un intervalo logarítmico se tiene que

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_k^2 \approx \Delta^2(k) \equiv V^{-1} \frac{k^3 |\delta_k|^2}{2\pi^2}, \quad (5.16)$$

donde $\Delta^2(k)$ es la varianza, una medida de dispersión.

Luego, con el fin de definir un volumen efectivo en el cual no se tienen efectos debidos a la superficie, se hace uso de la función ventana $W(\vec{r})$ la cual suaviza la superficie, lo que permite escribir el volumen V_W como

$$V_W = 4\pi \int_0^\infty r^2 W(r) dr, \quad (5.17)$$

donde la masa M se relaciona con V_W por $M = \bar{\rho} V_W$.

Con lo establecido, el valor cuadrático medio de la masa se define por [10, 65]

$$\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 = \left\langle \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 \right\rangle \equiv \left\langle \left(\int \delta(\vec{x} + \vec{r}) W(\vec{r}) d^3 r \right)^2 / V_W^2 \right\rangle, \quad (5.18)$$

y con la definición de la ecuación (5.16) el valor cuadrático medio de la masa también puede escribirse como sigue:

$$\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 = \frac{1}{V_W^2} \int \Delta^2(k) |W(k)|^2 \frac{dk}{k}. \quad (5.19)$$

Ahora bien, es posible relacionar $(\delta M/M)^2$ con la función de correlación $\xi(\vec{r})$, para ello se define la integral J_3 como

$$J_3 \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^R \xi(r) d^3 r = \int_0^R r^2 \xi(r) dr = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \xi(\vec{k}) W_k, \quad (5.20)$$

usando que $\xi(\vec{k}) = |\delta_k|^2 V^{-1}$ y la función ventana sombrero de copa W_k , la cual se define por

$$W_k = 4\pi R^3 \left[\frac{\sin kR}{(kR)^3} - \frac{\cos kR}{(kR)^2} \right], \quad (5.21)$$

puede reescribirse J_3 como

$$J_3(R) = R^3 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{|\delta_k|^2}{V} \left[\frac{\sin kR}{(kR)^3} - \frac{\cos kR}{(kR)^2} \right] \cong R^3 \int_0^\infty \frac{dk}{k} \delta_k^2 \left[\frac{\sin kR}{(kR)^3} - \frac{\cos kR}{(kR)^2} \right] \cong \frac{R^3}{3} \int \frac{dk}{k} \delta_k^2, \quad (5.22)$$

entonces se puede escribir [10, 65]

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 \right\rangle = \frac{3J_3(R)}{R^3} = \int_0^\infty 9\Delta^2(k) \left[\frac{\sin kR}{(kR)^3} - \frac{\cos kR}{(kR)^2} \right] \cong \int_0^{R^{-1}} \Delta^2(k) \frac{dk}{k}, \quad (5.23)$$

con lo que se interpreta que la integral $J_3(R)$ es una medida de las fluctuaciones de la masa en la escala R .

5.2.1. CUTE

Motivados por la referencia [66], para el análisis de nuestras simulaciones usaremos la función de correlación, los autores de la misma argumentan que la función de correlación presenta ventajas sobre el espectro de potencias en pequeñas escalas, pues efectos como el “shot noise”³ y la astrofísica intra-halo aún están presentes y separados del régimen lineal de las perturbaciones y efectos acústicos. El espectro de potencias es una buena opción cuando se desea estudiar grandes escalas, pues los modos de Fourier del campo de densidad lineal son estadísticamente independientes.

Para obtener la función de correlación de las capturas de la simulación, se usará el código CUTE (por sus siglas en inglés, Correlation Utilities and Two point Estimation). Dicho código estima la función de correlación a partir de las capturas de la simulación, las cuales contienen las posiciones finales de las partículas. El código ofrece diferentes técnicas para el cálculo de la función de correlación. A continuación se exponen brevemente dichas técnicas, siguiendo la descripción que los autores del código proporcionan en la referencia [67]:

- Algoritmos basados en partículas. En esta clasificación entran el llamado método de Fuerza Bruta y el método de Tree. La diferencia entre estos métodos radica en la forma en que realizan la búsqueda de los vecinos más cercanos. El método de Fuerza Bruta divide la caja en pequeñas cajas las cuales sirven para encontrar

³ Puede referirse al efecto del muestro, ya que es necesario un modelo. También puede referirse al efecto de los auto pares (pares hechos por un solo cuerpo) en la estadística de N -cuerpos.

los vecinos más cercanos de cada partícula. Para el método Tree, la búsqueda de vecinos cercanos está basada en el método de Moore [68]. Pero en general estos métodos proceden como sigue:

- Consideran un par de objetos.
- Calcula la distancia entre ambos objetos.
- Colocan el par en un histograma, según la distancia que hay entre los objetos.
- Este procedimiento se repite hasta terminar con todos los pares existentes y obtener un histograma.
- La función de correlación es estimada por

$$\xi = \left(\frac{V}{v(r)} \right) \left(\frac{DD(r)}{N^2} \right), \quad (5.24)$$

donde $v(r) = \frac{4}{3}\pi \left[\left(\frac{r+dr}{2} \right)^3 - \left(\frac{r-dr}{2} \right)^3 \right]$, $V = (Caja)^3$, N es el número de partículas y DD es el histograma.

- Malla de densidad. Para el cálculo de la función de correlación, la densidad de partícula es interpolada a una malla y las sobredensidades δ se estiman en cada punto de la malla. Los pares de los puntos de malla se correlacionan. Esta estimación se hace por

$$\xi(r) = \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle.$$

5.2.2. Oscilaciones Bariónicas Acústicas

La formación de estructura en el Universo generalmente es descrita a través del mecanismo de inestabilidad gravitacional, por el cual algunas de las sobre densidades en el Universo temprano por efecto de la gravedad crecieron (ganando a la expansión del Universo) hasta colapsar y formar las estructuras que observamos hoy día.

Sin embargo esta descripción no está completa sin hablar de las oscilaciones bariónicas acústicas, cuya huella en la formación de estructura es una de las reglas estándar de la cosmología [69].

El Universo antes de la época de recombinación ($z < 1000$) era mucho más caliente y denso, los fotones del fondo cósmico de radiación y bariones se encontraban acoplados formando un plasma [69]. La fuerza de gravedad y la presión de los fotones interactuaban una en contra de la otra, produciendo ondas de sonido en el plasma, las llamadas oscilaciones bariónicas acústicas. Estas ondas de sonido se propagaron hasta el tiempo de la recombinación, tiempo al que los fotones se desacoplaron de las perturbaciones de

los bariones, a partir de este punto las perturbaciones bariónicas solo quedaron sujetas a la inestabilidad gravitacional [70].

La escala acústica r_s es la distancia que las ondas de sonido pueden viajar desde el Big Bang hasta el tiempo de recombinación [70]

$$r_s = \int_0^{t_*} \frac{c_s(t)}{a(t)} dt = \int_{z_*}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz, \quad (5.25)$$

donde, $H(z)$ va a depender del radio de las densidades de materia y radiación, c_s depende del radio de la presión de radiación y la densidad de energía del fluido barión-fotón. A partir de las mediciones hechas al espectro de potencias del CMB se pueden conocer dichos valores. La escala acústica se ve reflejada en escalas del orden de 150 Mpc en la función de correlación. La figura 5.3 presenta la descripción de la evolución de una perturbación de densidad inicial localizada en un punto.

5.3. Pruebas de L-PICOLA

5.3.1. Pruebas con Λ CDM

Con el objetivo de probar el código de L-PICOLA y ajustar parámetros para corridas finales correctas, se realizaron diversas pruebas con un espectro de potencias de entrada del modelo estándar Λ CDM, el cual fue generado con el código CLASS y se muestra en la figura 5.7.

Las primeras corridas realizadas tenían el objetivo de probar el tamaño de caja y el efecto del número de partículas N sobre la función de correlación de la simulación. El cuadro 5.1 muestra los parámetros tomados en cuenta para las diferentes corridas de prueba.

Corrida	No. Partículas N	Puntos de malla N_m	Caja(Mpc/h)	z inicial
lprueba1	128^3	128	1024	20
lprueba2	256^3	256	1024	20
lprueba3	128^3	128	512	20
lprueba4	256^3	256	512	20

CUADRO 5.1: Corridas de prueba para Λ CDM

Es importante tener un tamaño adecuado de caja ya que este afecta a propiedades como la función de correlación. Una caja demasiado pequeña suprime la contribución de las perturbaciones de gran escala al espectro de potencias, si se pretende caracterizar de

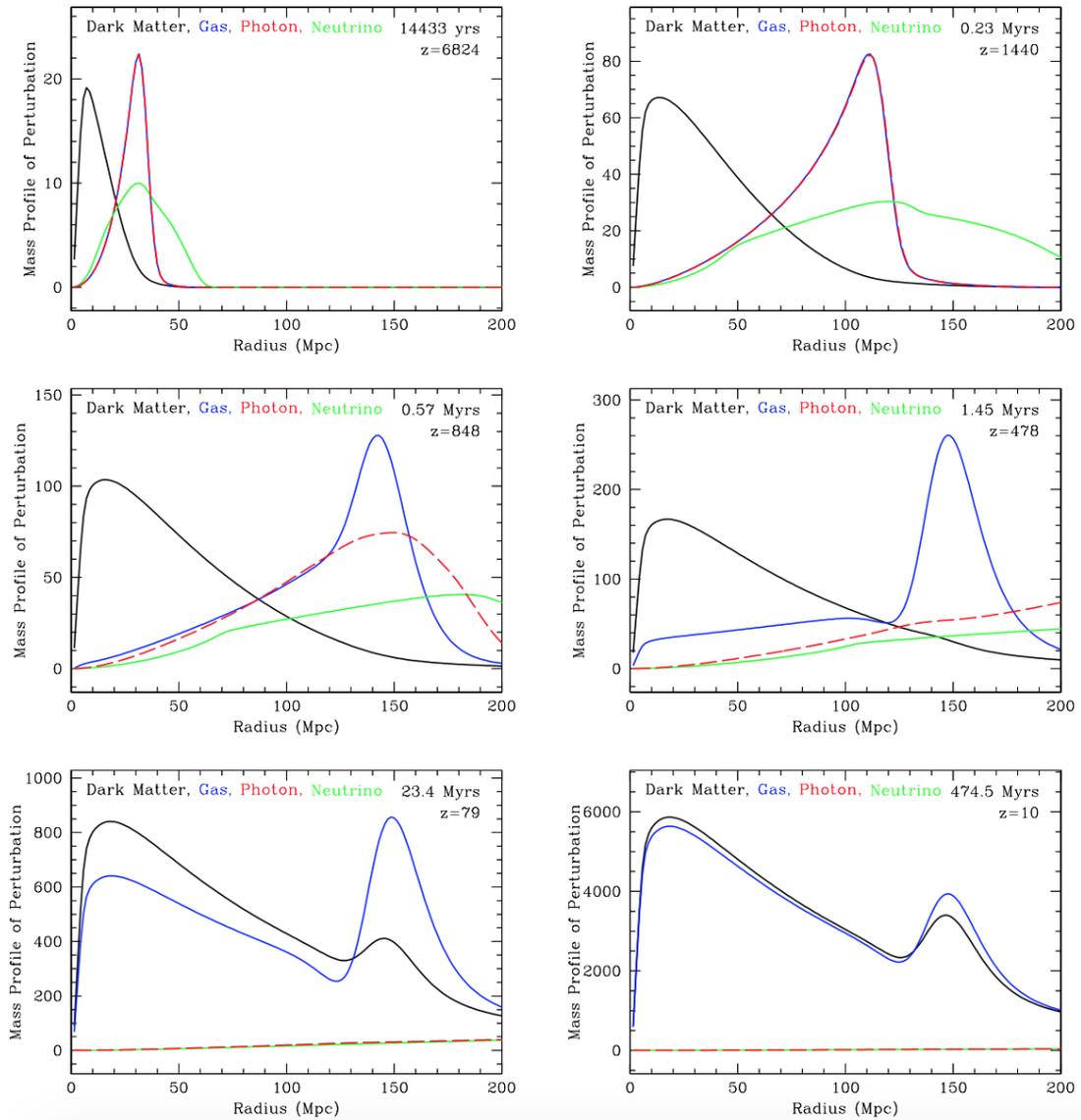


FIGURA 5.3: Tomada de [3](Figura 1.). Evolución de una sobredensidad inicial localizada en el origen . Las simbología para las líneas es la siguiente: negra-materia oscura, azul-gas, roja-fotones y verde-neutrinos. Los paneles se describen como sigue: a) En épocas muy tempranas los fotones y bariones estaban acoplados y se propagaban como un pulso. b) Poco antes de la recombinación el pulso de bariones incrementa la perturbación de la materia oscura. c) Una vez en la recombinación, los fotones se desacoplan de los bariones d) Completada la recombinación las perturbaciones del materia oscura se encuentran cerca del origen y las perturbaciones bariónicas se encuentran en una capa de 150 Mpc. e) Al no tener más influencias de la presión de los fotones, los bariones y materia oscura son atraídos por la gravedad a las sobre densidades f) En épocas tardías la formación de galaxias ocurre cerca del origen y a escalas de 150 Mpc.

manera precisa el acumulamiento de los halos de materia oscura (esto se verá reflejado en la función de correlación) es necesaria una caja grande [71].

En la figura 5.4 se muestran las funciones de correlación para los distintos casos mostrados en el cuadro 5.1, estas funciones de correlación fueron encontradas con el método de Fuerza Bruta de CUTE (en la siguiente sección se muestran más detalles sobre las opciones de CUTE), de esta figura se observa que una caja de 512 Mpc/h no es suficientemente grande, comparando la función de correlación lineal (es decir, el espectro de potencias de entrada⁴) con la función de correlación de salida se observa que el acumulación a grandes escalas no es mapeado adecuadamente. Por otro lado, el aumento en el número de partículas da mayor resolución en la función de correlación, este aumento en la resolución también se observa en las capturas de la simulación mostradas en la figura 5.5.

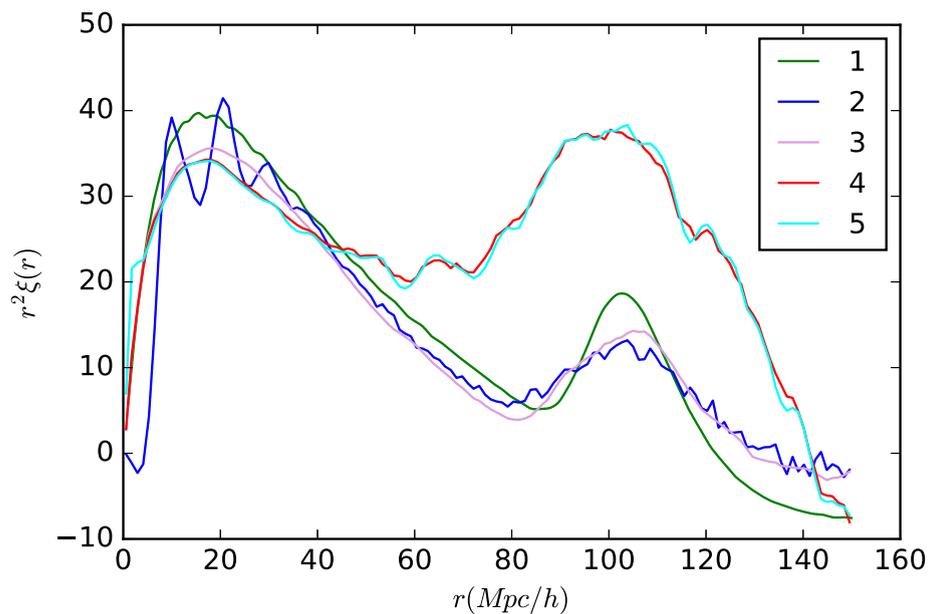


FIGURA 5.4: $r^2\xi(r)$ vs. r para el modelo Λ CDM, con diferentes parámetros de la simulación, 1.- Función de correlación lineal. 2.-Función de correlación para $N = 128^3$, $N_m = 128$, Caja=1024 Mpc/h. 3.- Función de correlación para $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja=1024 Mpc/h. 4.- Función de correlación para $N = 128^3$, $N_m = 128$, Caja=512 Mpc/h. 5.-Función de correlación para $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja=512 Mpc/h.

Para las pruebas realizadas se eligió que el número de puntos de malla sea igual al número de partículas, esto con el fin de realizar corridas rápidas. Sin embargo, una correcta elección del número de puntos de malla debe tomar en cuenta el criterio expuesto en [1], el cual describimos a continuación:

Un halo con N partículas tiene una masa de $(N\bar{\rho}d^3)$, donde d es la distancia promedio comóvil entre partículas, $\bar{\rho}$ es la densidad media comóvil. La masa del halo $(N\bar{\rho}d^3)$ es aproximadamente $M_\delta = \frac{4\pi}{3}R_\delta^3\bar{\rho}\delta$, donde δ es la sobredensidad fraccional a la cual los

⁴Las transformadas de Fourier se realizaron con el código que se encuentra anexo en el apéndice A.

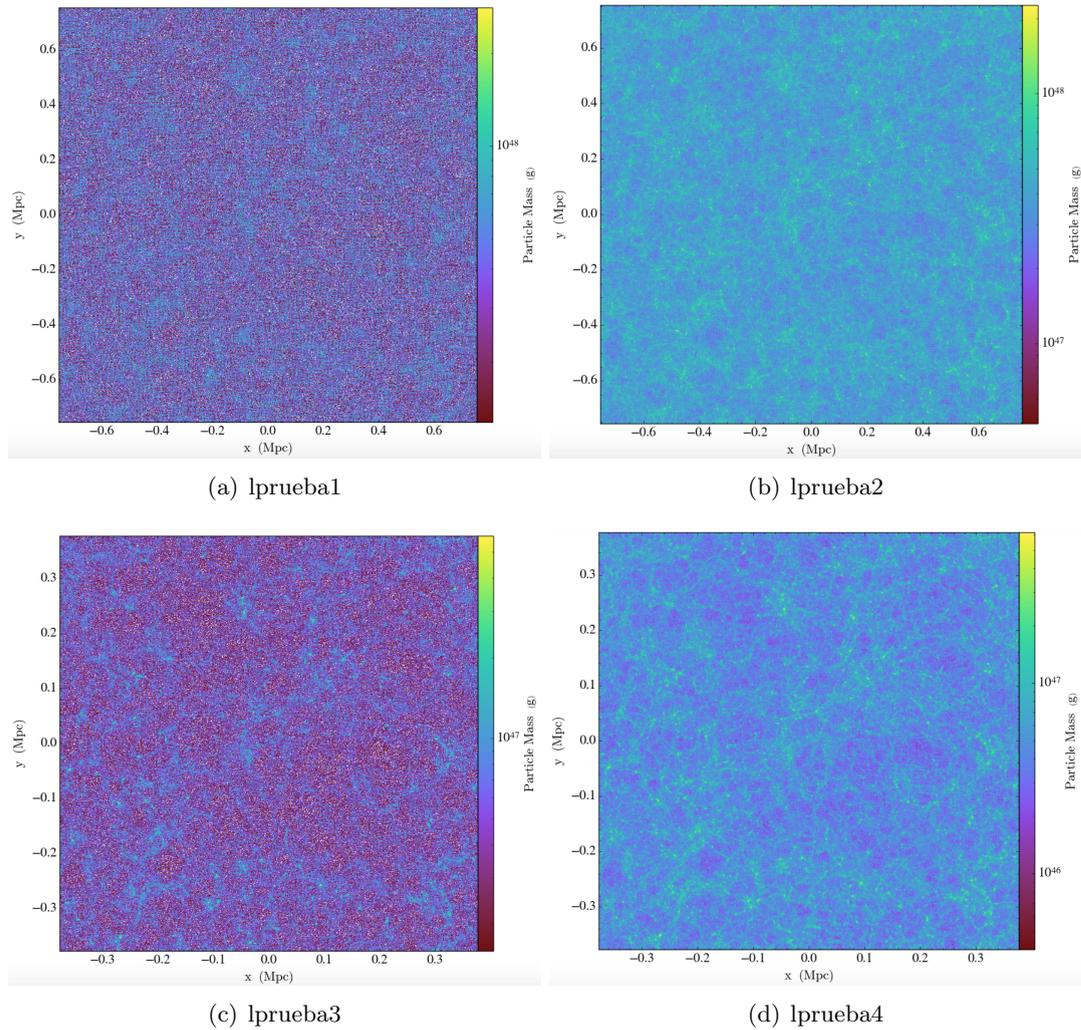


FIGURA 5.5: Capturas correspondientes a las simulaciones del cuadro 5.4

halos dejan de filtrarse. De ahí se encuentra la razón

$$\frac{R_\delta}{d} = \left(\frac{4\pi\delta}{3N} \right)^{-1/3} \approx 0,4 \times \left(\frac{N}{50} \right)^{1/3}, \quad (5.26)$$

donde se uso que $\delta = 200$. Entonces, la razón entre radio del halo R_δ y la distancia media entre partículas, debe ser de 0,4 para una simulación diseñada para catálogos de halos simulados, ya que son necesarias al menos 50 partículas por halo para obtener un perfil radial razonable. De ahí que el número de puntos de malla debe ser al menos tres veces el número de partículas, es decir, tres veces más fino que la distancia media entre partículas.

5.3.2. Pruebas con CUTE

El código de CUTE ofrece tres opciones para el cálculo de la función de correlación a partir de las capturas de la simulación, para probar cual de estas opciones es más precisa, se calculó la función de correlación para las capturas de la simulación “lprueba2” con cada uno de los métodos disponibles.

En la figura 5.6 se pueden observar los resultados de las diferentes pruebas realizadas para determinar que método de CUTE se usará en el análisis de las capturas finales, se muestran las curvas correspondientes a la función de correlación calculada con las tres opciones que ofrece CUTE y a manera de comparación se agregan la función de correlación del caso lineal y la función de correlación que resulta de agregar el parámetro halofit ⁵ en el código CLASS.

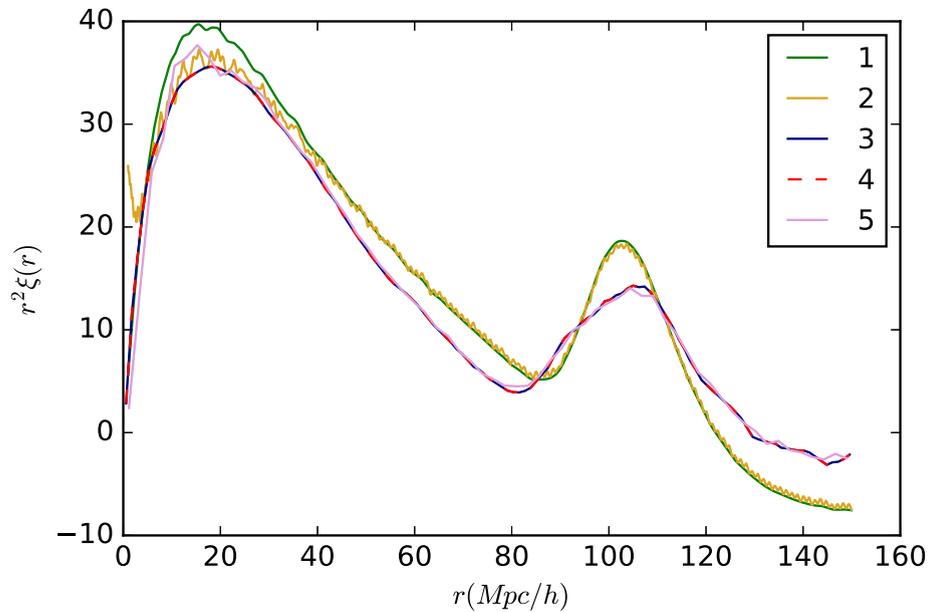


FIGURA 5.6: $r^2\xi(r)$ vs. r para el modelo Λ CDM, empleando los diferentes métodos disponibles de CUTE. 1.- Función de correlación lineal. 2.- Función de correlación para el espectro de potencias que incluye el parámetro halofit de CLASS. 3.- Función de correlación calculada con el método de fuerza bruta de CUTE. 4.- Función de correlación calculada con el método Tree de CUTE. 5.- Función de correlación calculada con el método partícula malla de CUTE

La comparación de las funciones de correlación obtenidas de las capturas de L-PICOLA (líneas 3,4 y 5) con las funciones de correlación para el caso lineal y agregando el parámetro halofit (líneas 1 y 2), en principio no es directa por el tipo de evolución no-lineal que realiza L-PICOLA, no obstante las curvas lineal y de halofit son útiles como guía de lo

⁵Este modelo es usado para predecir el espectro de potencias no lineal de un Universo dominado por materia oscura, tomando como base el modelo de halos [72], [73].

que se espera obtener, de ahí que podamos concluir que para el pico en $r \approx 20 \text{ Mpc}/h$ existe una mejora utilizando el método de partícula-malla para calcular la función de correlación, pues dicha curva se aproxima más a la curva que considera el parámetro halofit, la cual es la aproximación más cercana al régimen no lineal del modelo ΛCDM .

5.3.3. Pruebas con materia oscura como campo escalar

El interés de este trabajo es describir la formación de estructura para un modelo de materia oscura en específico, en este caso materia oscura como campo escalar. En la figura 5.7 se muestran espectros de potencias para diferentes masas del campo escalar (los cuales fueron generados resolviendo las ecuaciones (4.30) a través de un código modificado de CLASS [59]), también se incluye el espectro de potencias lineal de ΛCDM . En dicha figura se observa que conforme va disminuyendo la masa del campo escalar el corte en el espectro de potencias es más pronunciado y dicho corte ocurre a mayores escalas.

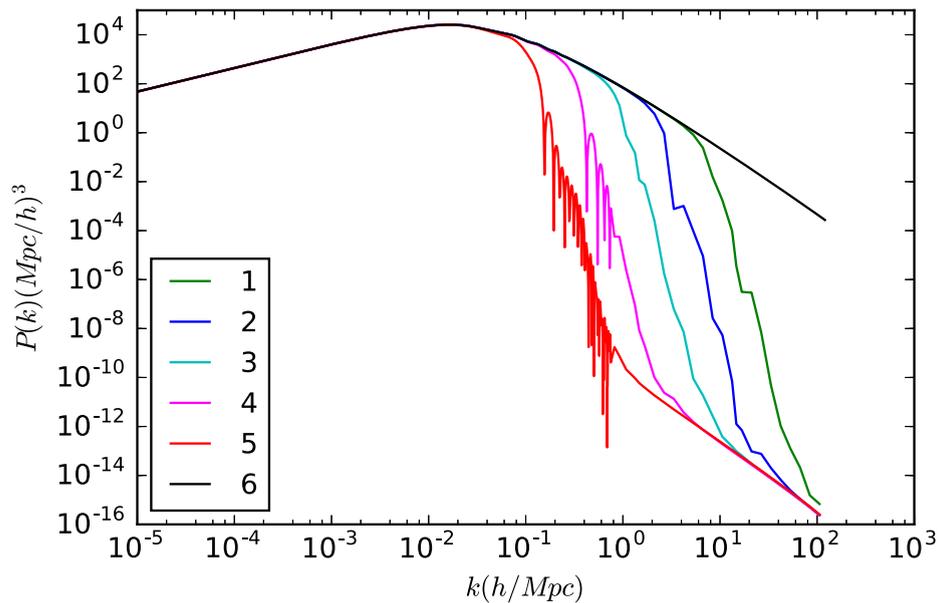


FIGURA 5.7: Espectros de potencias lineales para materia oscura como campo escalar considerando diferentes valores de la masa del campo escalar, los cuales son los espectros de potencia de entrada para las simulaciones cosmológicas 1.- $m = 1 \times 10^{-22} \text{ eV}$. 2.- $m = 1 \times 10^{-23} \text{ eV}$, 3.- $m = 1 \times 10^{-24} \text{ eV}$, 4.- $m = 1 \times 10^{-25} \text{ eV}$, 5.- $m = 1 \times 10^{-26} \text{ eV}$, 6.- Espectro de potencias de ΛCDM

Usando los espectros de potencias de la figura 5.7 como entrada para el código L-PICOLA, se realizaron varias corridas considerando 256^3 partículas, 256 puntos de malla y una caja de $1024 \text{ Mpc}/h$. En la figura 5.14 se muestran las capturas obtenidas

de L-PICOLA. En la figura 5.9 se presentan los resultados obtenidos para la función de correlación que resulta de realizar la simulación de L-PICOLA, mientras que en la figura 5.10 se muestra una comparación entre las funciones de correlaciones lineales (figura 5.8) y no lineales (figura 5.9).

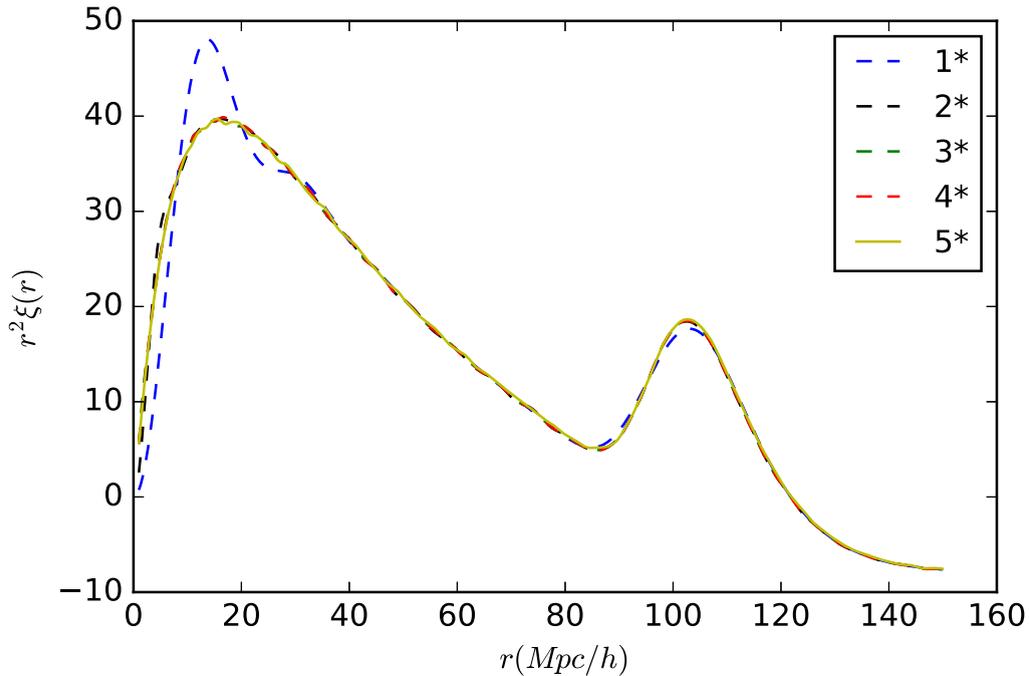


FIGURA 5.8: Funciones de correlación de los espectros de potencias lineales (espectros de entrada para L-PICOLA) para diferentes masas del campo escalar 1*.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV, 2*.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3*.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4*.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5*.- Λ CDM.

Para las masas en el rango de 1×10^{-22} eV a 1×10^{-25} eV las funciones de correlación son consistentes con las funciones de correlación lineales, todo esto tomando como base las pruebas realizadas para Λ CDM, modelo que es bien conocido y estudiado. Además en la figura 5.10 se observa que las funciones de correlación con masas de 1×10^{-22} eV a 1×10^{-24} eV son prácticamente indistinguibles del caso Λ CDM tanto para el régimen lineal (espectros de entrada para L-PICOLA) y para el régimen no-lineal, es decir después de haber corrido las simulaciones con L-PICOLA.

Sin embargo, para la función de correlación del caso del campo escalar con masa de 1×10^{-26} eV, mostrado en la figura 5.11, se observa que la función de correlación aumenta en su amplitud, hecho que se ve reflejado principalmente en el primer pico de la función de correlación.

A fin de dar una explicación al aumento en la amplitud en la función de correlación de la simulación que considera una masa del campo escalar de 1×10^{-26} eV se realizaron

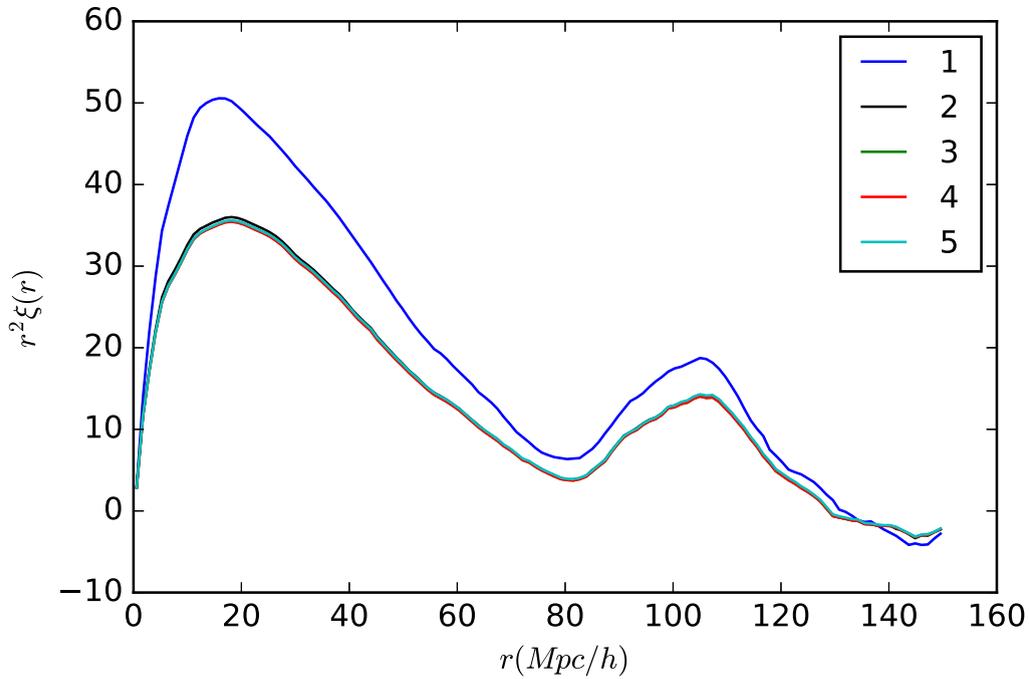


FIGURA 5.9: Funciones de correlación para las corridas de L-PICOLA, con $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja = 1024 Mpc/h 1.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV ,2.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5.- Λ CDM.

diversas pruebas. Dichas pruebas consistieron en hacer cortes sobre el espectro de potencias de Λ CDM con el objetivo de reproducir de forma aproximada el corte que existe en los espectros de potencias de materia oscura como campo escalar.

Una primera aproximación consistió en hacer un corte abrupto sobre el espectro de potencias para Λ CDM a escalas de $k \sim 10^{-1}$ h/Mpc que aproximadamente es donde se produce el corte en el espectro de potencias del campo escalar con masa de 1×10^{-26} eV. Una segunda aproximación se realizó al considerar el espectro de potencias para el campo escalar como el propuesto por [53], para el cual el corte en el espectro de potencias de Λ CDM va como la función

$$\left(\frac{\cos x^3}{1 + x^8} \right)^2,$$

donde $x = k/k_{min}$.

La elección de k_{min} se hizo de tal forma que el corte en el espectro de potencias ocurriera a escalas en las que aproximadamente coincidiera con el corte del espectro de potencias cuando se tienen masas del campo escalar de 1×10^{-22} eV y 1×10^{-26} eV. Para obtener el corte similar al del espectro de potencias de masa 1×10^{-22} eV, se fijó $k_{min} = 10,0$ para el caso el espectro de potencias con masa de 1×10^{-26} eV, se fijó $k_{min} = 0,1$. En la figura 5.12 se muestran los espectros lineales que se usaron como entrada para L-PICOLA,

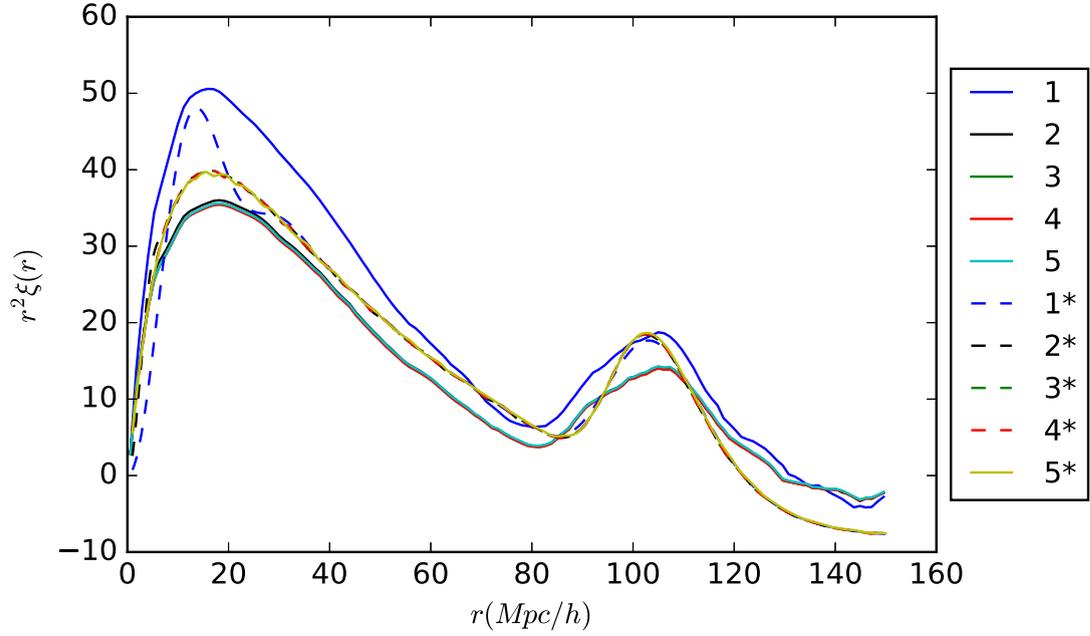


FIGURA 5.10: (Líneas punteadas) Funciones de correlación de los espectros de potencias lineales (espectros de entrada para L-PICOLA) para diferentes masas del campo escalar 1*.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV, 2*.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3*.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4*.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5*.- Λ CDM. (Líneas sólidas) Funciones de correlación para las corridas de L-PICOLA, con $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja = 1024 Mpc/h 1.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV, 2.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5.- Λ CDM.

para las diferentes masas del campo escalar, incluyendo las propuestas de corte para el espectro de potencias de Λ CDM.

En la figura 5.13 se presentan los resultados para la función de correlación de las simulaciones de L-PICOLA para las tres pruebas de cortes en el espectro de potencias de Λ CDM en conjunto con los resultados previamente obtenidos para las funciones de correlación de las simulaciones que consideran diferentes masas del campo escalar. Se observa que la función de correlación para las simulaciones que usaron como entrada un espectro de potencias cortado aproximadamente en las mismas escalas a las que ocurre el corte del espectro de potencias para una masa del campo escalar de 1×10^{-26} eV, también muestran un aumento en su amplitud, presentando un comportamiento similar a la función de correlación de la simulación para el campo escalar con masa de 1×10^{-26} eV. La función de correlación para la simulación que usa el espectro de potencias de entrada de Λ CDM cortado con $k_{min} = 10,0$ presenta un comportamiento similar al de las funciones de correlación que corresponden a las simulaciones con masas de 1×10^{-22} eV a 1×10^{-24} eV.

Por tanto se puede concluir que si el corte en el espectro de potencias se encuentra en escalas del orden de $k \sim 10^{-1}$ h/Mpc o menores, L-PICOLA y CUTE en sus versiones

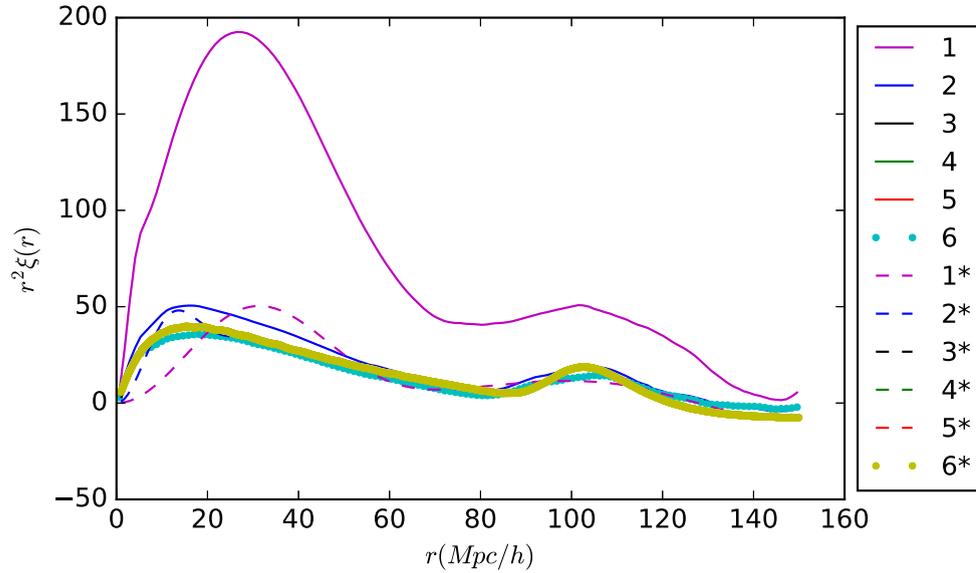


FIGURA 5.11: (Líneas punteadas) Funciones de correlación de los espectros de potencias lineales (espectros de entrada para L-PICOLA) para diferentes masas del campo escalar $1^*.-m = 1 \times 10^{-26}$ eV, $2^*.-m = 1 \times 10^{-25}$ eV, $3^*.-m = 1 \times 10^{-24}$ eV, $4^*.-m = 1 \times 10^{-23}$ eV, $5^*.-m = 1 \times 10^{-22}$ eV, $6^*.-\Lambda$ CDM. (Líneas sólidas) Funciones de correlación para las corridas de L-PICOLA, con $N = N_m = 256$, Caja = 1024 Mpc/h. $1.-m = 1 \times 10^{-26}$ eV, $2.-m = 1 \times 10^{-25}$ eV, $3.-m = 1 \times 10^{-24}$ eV, $4.-m = 1 \times 10^{-23}$ eV, $5.-m = 1 \times 10^{-22}$ eV, $6.-\Lambda$ CDM.

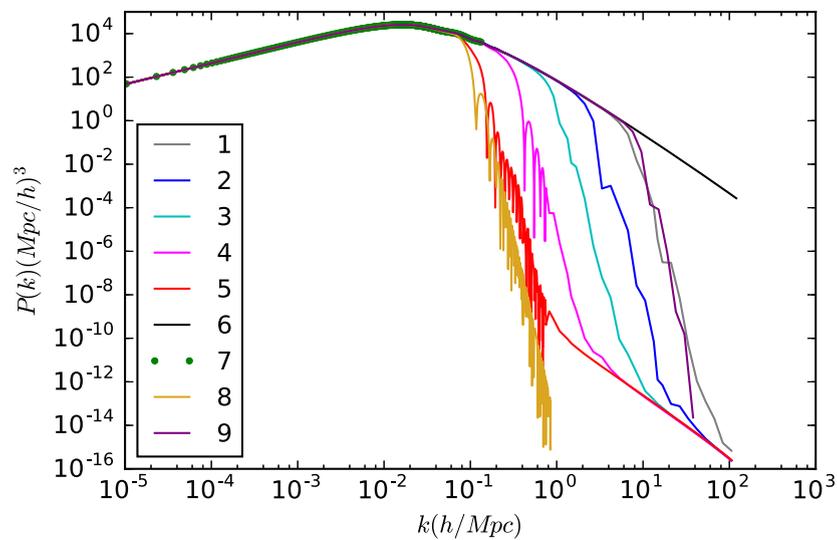


FIGURA 5.12: Espectros de potencias para diferentes masas del campo escalar $1.-m = 1 \times 10^{-22}$ eV, $2.-m = 1 \times 10^{-23}$ eV, $3.-m = 1 \times 10^{-24}$ eV, $4.-m = 1 \times 10^{-25}$ eV, $5.-m = 1 \times 10^{-26}$ eV. $6.-\Lambda$ CDM, $7.-\Lambda$ CDM cortado a $k \sim 0,1$ h/Mpc, $8.-\Lambda$ CDM cortado $k_{min} = 0,1$, $9.-\Lambda$ CDM cortado $k_{min} = 10,0$

originales no son herramientas suficientes para dar una descripción certera de la evolución

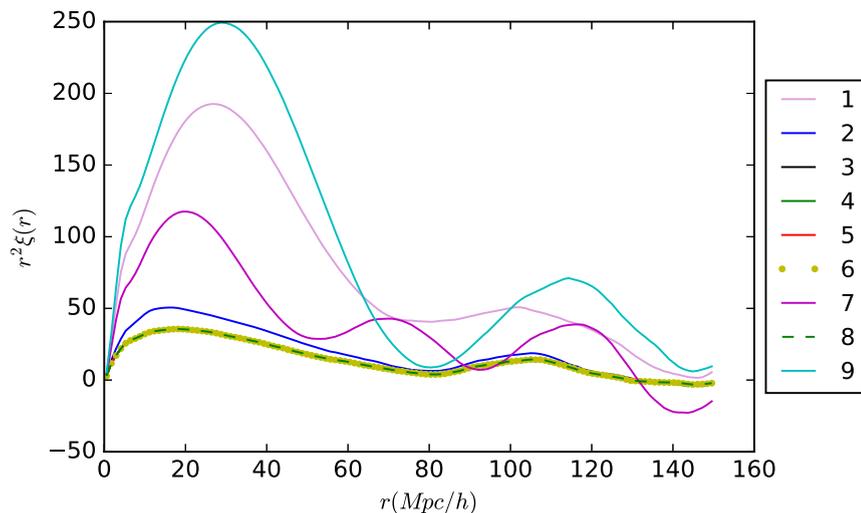


FIGURA 5.13: Comparación de las funciones de correlación para las simulaciones de L-PICOLA para diferentes masas del campo escalar con las funciones de correlación correspondientes a las simulaciones de L-PICOLA usando espectros de potencias de Λ CDM cortados (Para todas las simulaciones se eligió $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja = 1024 Mpc/h). 1.- $m = 1 \times 10^{-26}$ eV 2.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV 3.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 5.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV 6.- Λ CDM 7.- Λ CDM cortado a $k = 0,1$ h/Mpc 8.- Λ CDM corte $k_{min} = 10,0$ 9.- Λ CDM corte $k_{min} = 0,1$

del Universo.

Es evidente que existe un problema con la lectura del corte a esas escalas, sin embargo, no se tienen suficientes pruebas para determinar si el problema se debe a que L-PICOLA no realiza una lectura adecuada de los datos cuando se tienen cortes en el espectro de potencias a esas escalas y por consiguiente la función de correlación que arroja CUTE es incorrecta, o por el contrario que L-PICOLA este realizando una adecuada evolución del espectro de potencias, pero al estar considerando un corte a esas escalas la evolución y agrupamiento final no pueda ser interpretado de forma adecuada por CUTE, dando como resultado una función de correlación con una amplitud no esperada.

5.4. Simulaciones cosmológicas de precisión

Después de las pruebas realizadas se procedió a correr simulaciones de precisión, las cuales toman en cuenta los aspectos considerados en las simulaciones de prueba.

Se consideraron diferentes masas para el campo escalar en un rango de 1×10^{-22} eV a 1×10^{-25} eV, espectros de potencias para el campo escalar con una masa menor no son propiamente leídos por los códigos.

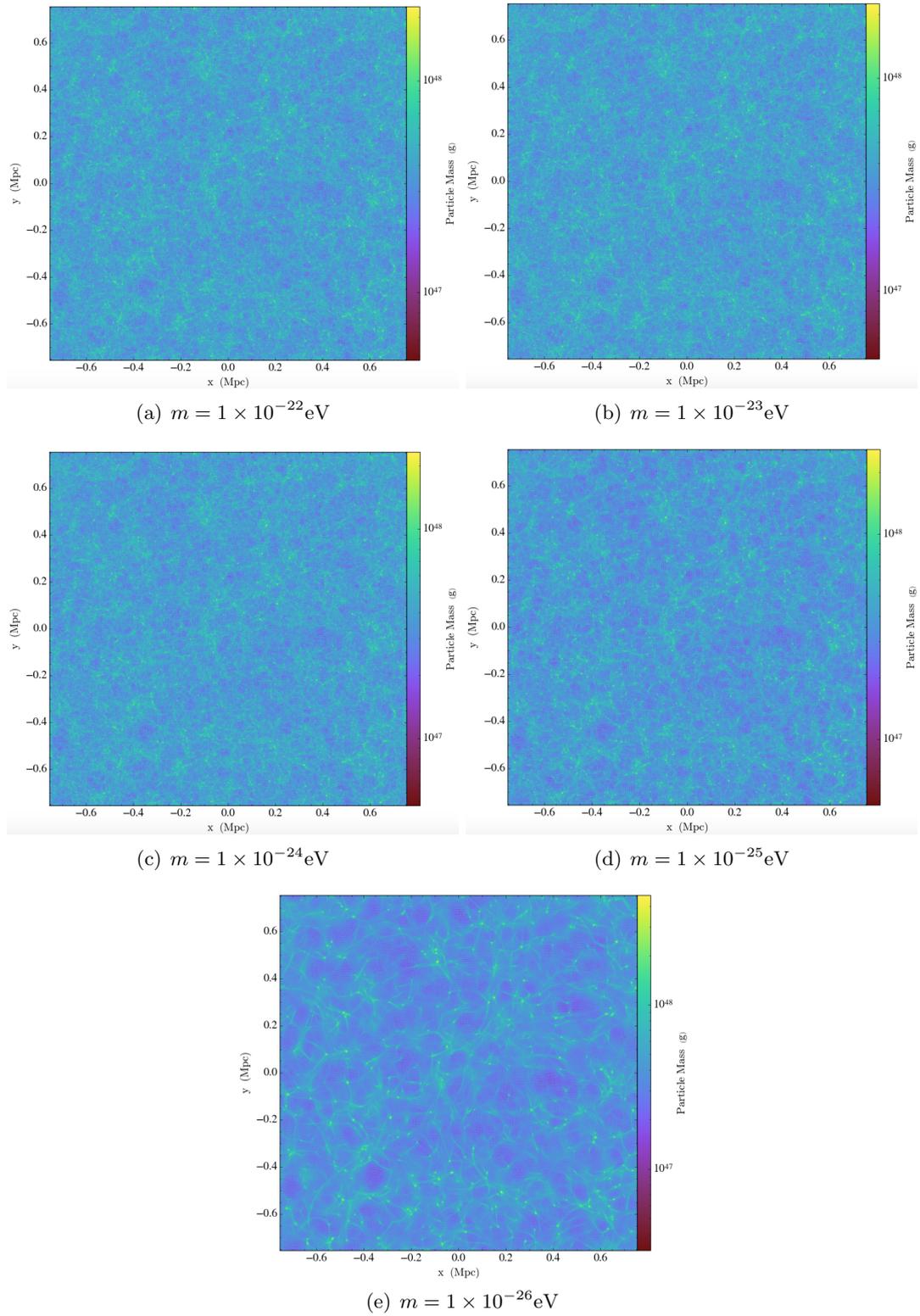


FIGURA 5.14: Capturas de las simulaciones prueba a $z = 0$, para diferentes masas del campo escalar, con $N = 256^3$, $N_m = 256$, Caja = 1024 Mpc/h

El número de partículas de la caja que se eligió fueron 256^3 , siguiendo el criterio de la referencia [1] el número de puntos de malla se estableció en 768, con una caja de tamaño 1024 Mpc/h. Los espectros de potencias de entrada para el campo escalar son los que se muestran en la figura 5.7. Las capturas correspondientes a estas simulaciones se muestran en la figura 5.17.

En la figura 5.15 se muestran los resultados para la función de correlación con los ajustes hechos en los parámetros de entrada de la simulación y para diferentes masas del campo escalar, el análisis de las capturas de la simulación para obtener la función de correlación se realizó con CUTE en la modalidad de Partícula-Malla. En esta figura se muestra la comparación de la función de correlación de los espectros lineales de entrada, con las funciones de correlación no lineales.

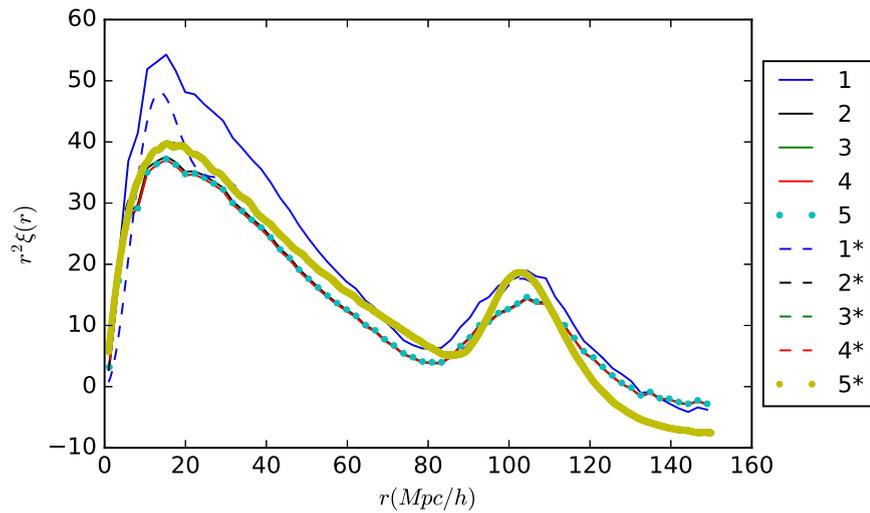


FIGURA 5.15: (Líneas punteadas) Funciones de correlación de los espectros de potencias lineales (espectros de entrada para L-PICOLA) para diferentes masas del campo escalar 1*.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV, 2*.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3*.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4*.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5*.- Λ CDM. (Líneas sólidas) Funciones de correlación para las corridas de L-PICOLA, con $N = 256^3$, $N_m = 768$, Caja = 1024 Mpc/h. 1.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV, 2.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5.- Λ CDM.

En las figuras 5.8 y 5.16 se muestran por separado las funciones de correlación para el caso lineal y las funciones del caso no lineal respectivamente. Al igual que para las pruebas realizadas en la sección 5.3, se observa que para las masas 1×10^{-22} eV a 1×10^{-24} eV, las funciones de correlación tanto para el caso lineal como no lineal son prácticamente indistinguibles de la función de correlación para Λ CDM.

Ahora bien, es importante hacer notar el hecho de que los códigos de N -cuerpos para describir la formación de estructura fueron diseñados considerando el modelo de materia oscura estándar (materia que no colisiona), así pues, para algunos modelos alternativos

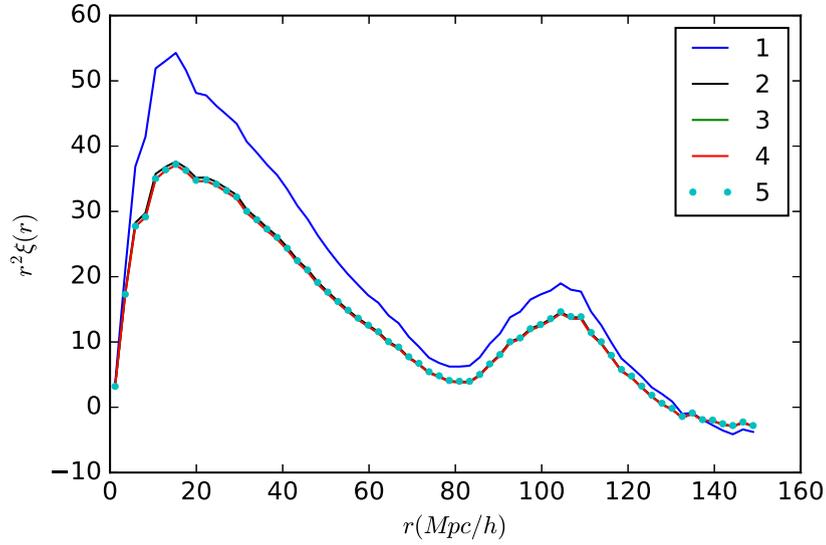


FIGURA 5.16: Funciones de correlación para las simulaciones de L-PICOLA, con $N = 256^3$, $N_m = 768$ Caja=1024 Mpc/h para diferentes masas del campo escalar. 1.- $m = 1 \times 10^{-25}$ eV, 2.- $m = 1 \times 10^{-24}$ eV, 3.- $m = 1 \times 10^{-23}$ eV, 4.- $m = 1 \times 10^{-22}$ eV, 5.- Λ CDM

deben tomarse en cuenta los procesos microfísicos que rigen la dinámica de esa partícula [74].

No obstante, para el modelo de materia como campo escalar se toma en cuenta el argumento expuesto por la referencia [74], en el que demuestran que las escalas de masa y corrimiento al rojo en las cuales se está trabajando, efectos cuánticos tipo onda (los cuales son incluidos a través de una ecuación de Schrödinger-Poisson) no representan un cambio significativo. Sin embargo, para un trabajo futuro deberían tomarse en cuenta con el fin de tener una descripción más completa. Algunos trabajos recientes que han implementado este tipo de correcciones son [75, 76].

Por otro lado, en la sección 5.2.2 se describe que la escala acústica se encuentra aproximadamente en los 150 Mpc. Así pues, es importante enfatizar que debido a que las oscilaciones bariónicas acústicas se encuentran en las grandes escalas, estas no se ven afectadas por la formación de estructura no lineal a pequeñas escalas [70]. El efecto de evolución no lineal de las perturbaciones de densidad es suavizar las oscilaciones bariónicas acústicas en la función de correlación.

Este hecho podría explicar la discrepancia que existe en el pico de BAO en la figura 5.15, donde se observa una diferencia notable entre la función de correlación para el caso lineal y no lineal. Este problema podría resolverse a través del método de reconstrucción. La figura 5.18 presenta una descripción muy ilustrativa de dicho método. Sin embargo, este proceso de reconstrucción queda fuera de los alcances de este trabajo, no obstante sería

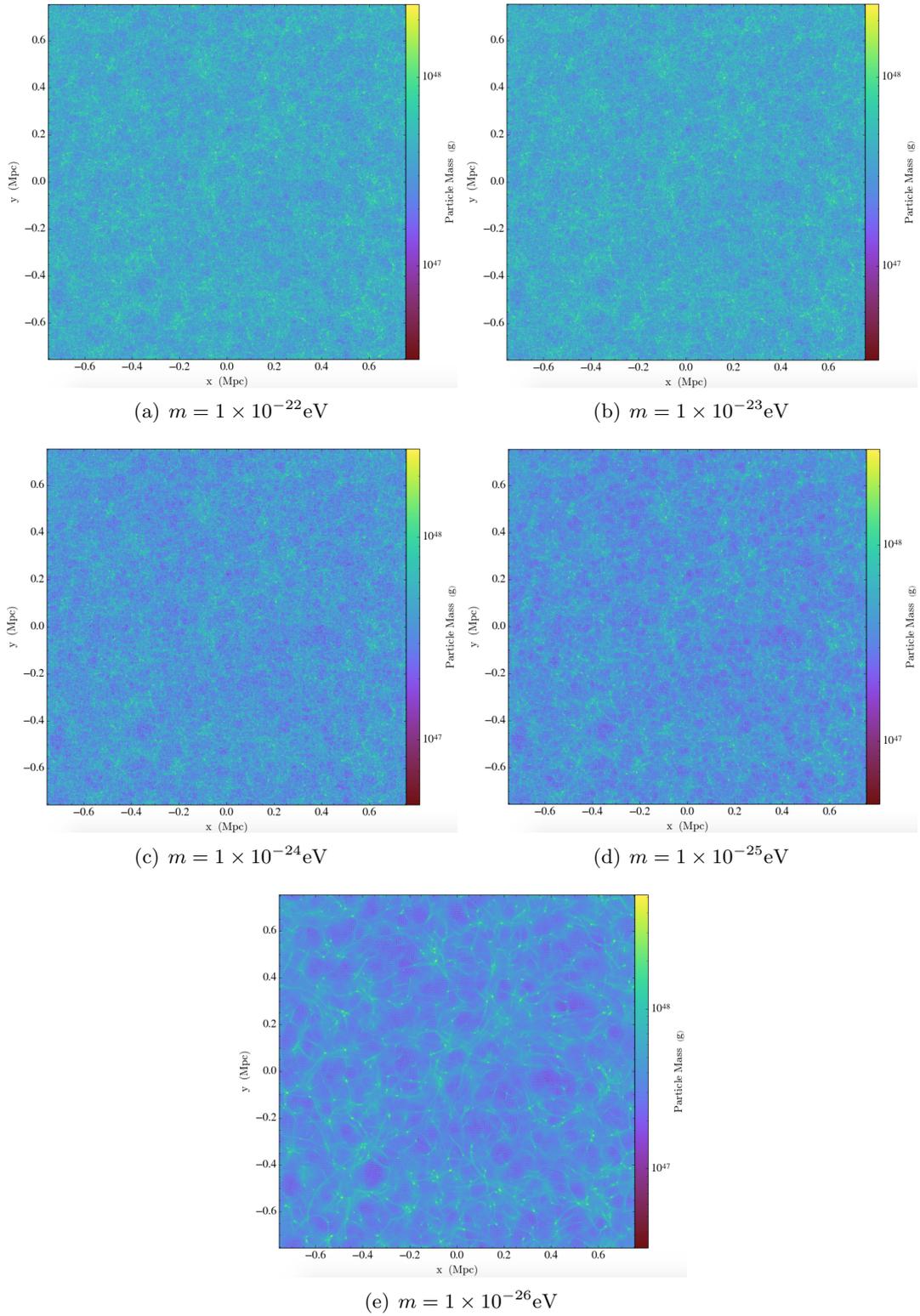


FIGURA 5.17: Capturas de las simulaciones de precisión a $z = 0$, para diferentes masas del campo escalar, con $N = 256^3$, $N_m = 768$, Caja= 1024 Mpc/h

interesante llevarlo a cabo en un trabajo futuro, en la referencia [4] se pueden consultar los pasos generales que deben llevarse a cabo para hacer la reconstrucción de BAO.

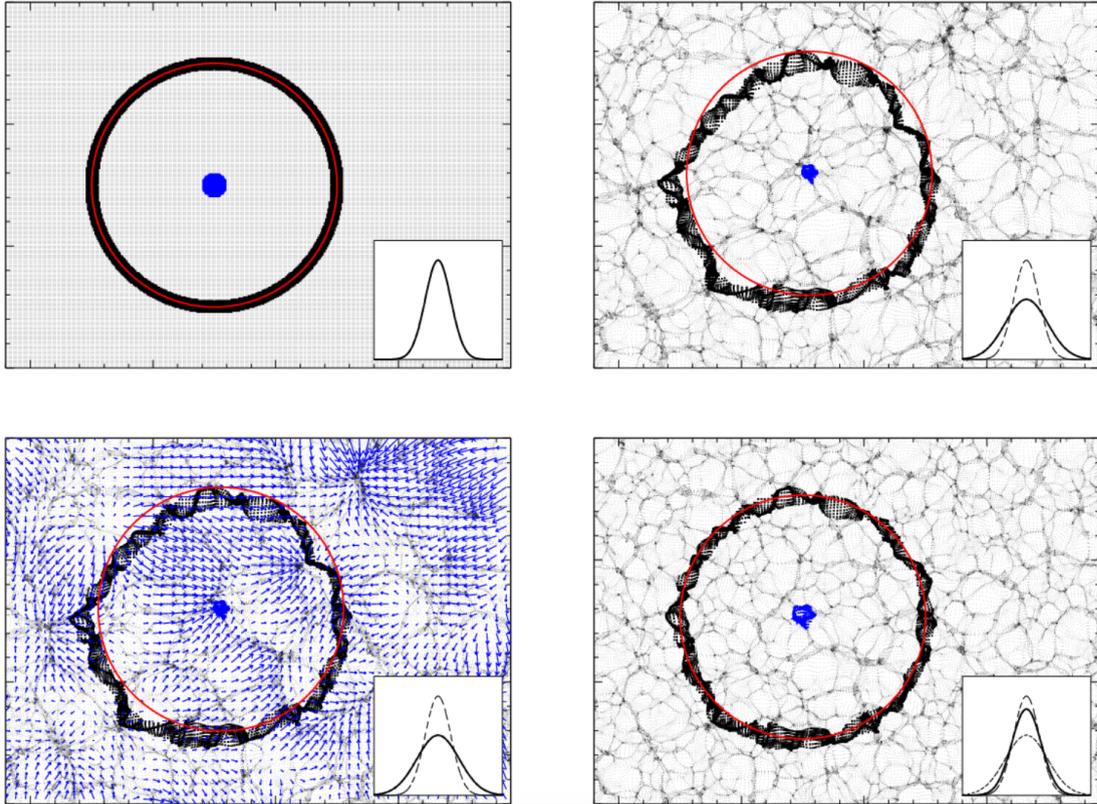


FIGURA 5.18: Tomada de [4](Figura 1.) Explicación ilustrativa de la reconstrucción de las oscilaciones bariónicas acústicas. Cada recuadro muestra una captura del campo de densidades cosmológico. (Superior izquierdo) En épocas tempranas la densidad es prácticamente constante. El anillo rojo representa la escala acústica y los puntos centrales en azul. La Gaussiana representa la raíz cuadrática media de la distancia entre los puntos medios y los puntos azules. (Superior derecho) Después de evolucionar el sistema (usando la aproximación de Zel'dovich), la estructura se forma y los puntos negros se han cambiado de lugar, provocando un ensachamiento de la escala acústica. El círculo rojo el es radio inicial del anillo, centrado en los puntos azules. En la pequeña gráfica inferior muestra la diferencia entre la raíz cuadrática media de la distancia radial (línea sólida) y la original (línea punteada). (Inferior izquierdo) Las flechas azules muestran los desplazamientos que provocan la formación de estructura. El proceso de reconstrucción se basa en estimar los desplazamientos con el fin de luego mover a las partículas a su configuración inicial. (Inferior derecho) Suavizando el campo de densidad se desplazan las partículas a su posición original. Al no estimar el campo de densidades con toda precisión aún se tiene la estructura a escalas pequeñas. La pequeña gráfica ahora muestra la curva no corregida (línea puntos cortos), la curva original (línea puntos largos) y la curva reconstruida (línea sólida).

Capítulo 6

Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo se llevo a cabo un análisis general de la formación de estructura en el Universo para el modelo de materia oscura como campo escalar. En el capítulo 2 se presentó el formalismo de la teoría de perturbaciones cosmológica, la cual permite dar una descripción de la formación de estructura a orden lineal, el desarrollo de este formalismo es importante pues al aplicarlo a un modelo específico de materia oscura, permite encontrar el espectro de potencias lineal, el cual es usado como entrada en los códigos de N -cuerpos que permiten simular el Universo. En el capítulo 3 se expuso el formalismo de la teoría de perturbaciones desde el régimen Newtoniano, mismo que es implementado en los códigos de N -cuerpos, y que permite estudiar la formación de estructura a orden no lineal.

En el capítulo 4, se realizó la descripción de la materia oscura, con una introducción general a los modelos más populares en la literatura, así mismo la descripción del modelo de Λ CDM, el que a pesar de ser el modelo más aceptado en la cosmología para materia oscura, presenta algunos problemas, mismos que propician proponer otras alternativas para materia oscura. Se eligió el modelo de materia como campo escalar, el cual ha cobrado importancia debido a que soluciona de manera parcial los problemas de Λ CDM. Este modelo se describió usando la teoría de perturbaciones cosmológica expuesta en el capítulo 2, y a través del código CLASS se encontraron soluciones numéricas para las ecuaciones de fluido de la materia oscura como campo escalar, estas soluciones permitieron encontrar los espectros de potencias para diferentes masas del campo escalar, los cuales son el parámetro de entrada en las simulaciones cosmológicas.

En el capítulo 5, se mostró lo concerniente a las simulaciones cosmológicas. Para llevar a cabo las simulaciones cosmológicas se eligió el código L-PICOLA, esto debido a la rapidez computacional que ofrece al trabajar bajo el esquema partícula malla y al uso de los métodos de COLA para resolver las ecuaciones de evolución de las partículas.

Con el fin de ajustar los parámetros del código de L-PICOLA para las simulaciones cosmológicas, se realizaron diversas pruebas utilizando como entrada el espectro de potencias de Λ CDM, el cual al estar bien caracterizado en la literatura, permitió determinar el número de partículas, número de puntos de malla y tamaño de caja idóneo para las simulaciones cosmológicas que consideran materia oscura como campo escalar.

En este capítulo también se describió la función de correlación, una de las herramientas de análisis para las simulaciones cosmológicas, de igual forma se describieron las oscilaciones bariónicas acústicas, una escala importante y bien conocida en cosmología. Para encontrar la función de correlación de las simulaciones se utilizó el código CUTE, el cual presenta varias opciones para el cálculo de la misma y para las cuales también se realizaron algunas pruebas que permitieron determinar cual de ellas era la adecuada para las simulaciones a realizar.

Con todos los parámetros ajustados se obtuvo la evolución no lineal para diferentes masas del campo escalar a través de simulaciones cosmológicas realizadas con el código de L-PICOLA. Además se encontró la función de correlación para nuestras simulaciones cosmológicas usando el código de CUTE. Del análisis de la función de correlación para las simulaciones que consideran diversas masas para la materia oscura como campo escalar se encontró que los resultados son consistentes con el modelo de Λ CDM a grandes escalas para las masas de 1×10^{-22} eV a 1×10^{-24} eV, tanto en el régimen lineal como para el régimen no lineal, este resultado era esperado, pues a grandes escalas Λ CDM es un modelo que está de acuerdo con las observaciones.

Para masas menores que 1×10^{-25} eV, se observa un incremento en la amplitud de los picos de la función de correlación. La razón de ello podría ser que la escala a la que ocurre el corte en su espectro de potencias no es interpretado apropiadamente por los códigos L-PICOLA y CUTE, lo que sugiere el uso de otros códigos o inclusive la modificación de L-PICOLA y CUTE, pues en general los códigos de N -cuerpos están diseñados para evolucionar condiciones iniciales de Λ CDM, los cuales no presentan cortes abruptos. La escala de BAO está en el rango de 100 -120 Mpc/h así como lo establecen las observaciones, sin embargo, existe una discrepancia entre el pico de BAO para las funciones de correlación lineal y no lineal, la cual podría corregirse a través del procedimiento de reconstrucción de BAO, estas correcciones quedan como trabajo futuro.

Lo anterior permite concluir que el modelo de materia oscura como campo escalar es un buen candidato a materia oscura, aunque, hasta el momento, con las simulaciones realizadas en este trabajo y sus respectivas funciones de correlación no es posible distinguir entre Λ CDM y materia oscura como campo escalar, es decir no se tiene un criterio para concluir que el modelo de materia oscura como campo escalar es mejor que Λ CDM, esto puede ser consecuencia del hecho de que códigos como L-PICOLA intercambian precisión

a escalas pequeñas por rapidez computacional, además de que no se hicieron modificaciones al código para considerar las pequeñas escalas. En futuros trabajos podría ser relevante comparar los resultados a pequeñas escalas de L-PICOLA, con los de códigos que trabajan bajo otros esquemas.

El siguiente paso en precisión para las simulaciones cosmológicas y que queda como trabajo futuro, es implementar modificaciones a los códigos de N -cuerpos que tomen en cuenta correcciones relativistas, como el acoplamiento de materia y radiación [77], y efectos cuánticos tipo onda, que afectan principalmente la formación de estructura en escalas pequeñas [75, 76].

Apéndice A

Código de Transformada de Fourier para pasar de $P(k)$ a $\xi(r)$

El siguiente código fue proporcionado durante la escuela de Astro Cosmo Statistics por el Dr. Sébastien Fromenteau.

```
#En este bloque se declaran las librerías de python

%matplotlib inline

import sys, platform, os

from matplotlib import pyplot as plt

import numpy as np

from pylab import *

import scipy.integrate as integrate

import scipy.special as special

from scipy.interpolate import interp1d

#En este bloque se importan los datos del espectro de potencias

datos='input_spectrum.dat'

kh_ , pk_=np.loadtxt(datos).T

pkk=interp1d(kh_,pk_)

kh=np.linspace(min(kh_),max(kh_),100000)
```

```
pk=pkk(kh)

#En este bloque se especifican los límites de integración y el paso de la integral

r_start = 1

r_end = 150

r_stepsize = 0.05

r_list = np.arange(r_start, r_end, r_stepsize)

kstart = min(kh_)

kcut = max(kh_)

kcut_ind = np.argmin( abs(kh - kcut))

#En este bloque se realiza la integración

xi = np.zeros(len(r_list))

factor = np.power(kh[kstart:kcut_ind],2) * pk[kstart:kcut_ind] / (kh[kstart:kcut_ind]**2*np.pi**2)

for i in range(0, len(r_list)):

    IntegrandXi0 = factor * np.sin(kh[kstart:kcut_ind]*r_list[i]) / r_list[i]

    xi[i] = np.trapz(IntegrandXi0,kh[kstart:kcut_ind])

#En este bloque se grafican los resultados

fig=figure()

ylabel('$r^2 \xi(r)$')

xlabel('$r(\text{Mpc}/h)$')

plot(r_list, np.power(r_list,2)*xi, 'g',label='$ r^2 \xi(r)$ del $ P(k)_\text{inicial}$')

plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc=2, borderaxespas=0.)
```

Bibliografía

- [1] S. Tassev, M. Zaldarriaga, and D. Eisenstein, *Solving Large Scale Structure in Ten Easy Steps with COLA*, *JCAP* **1306** (2013) 036, [[arXiv:1301.0322](#)].
- [2] C. K. Birdsall and D. Fuss, *Clouds-in-clouds, clouds-in-cells physics for many-body plasma simulation*, *Journal of Computational Physics* **3** (1969) 494–511.
- [3] D. J. Eisenstein, H.-j. Seo, and M. J. White, *On the Robustness of the Acoustic Scale in the Low-Redshift Clustering of Matter*, *Astrophys. J.* **664** (2007) 660–674, [[astro-ph/0604361](#)].
- [4] N. Padmanabhan, X. Xu, D. J. Eisenstein, R. Scalzo, A. J. Cuesta, K. T. Mehta, and E. Kazin, *A 2 per cent distance to $z=0.35$ by reconstructing baryon acoustic oscillations - I. Methods and application to the Sloan Digital Sky Survey*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **427** (2012), no. 3 2132–2145, [[arXiv:1202.0090](#)].
- [5] **Planck** Collaboration, P. A. R. Ade et al., *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, [arXiv:1502.01589](#).
- [6] T. Padmanabhan, *Advanced topics in cosmology: a pedagogical introduction*, *AIP Conf. Proc.* **843** (2006) 111–166, [[astro-ph/0602117](#)].
- [7] **Planck** Collaboration, P. A. R. Ade et al., *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*, *Astron. Astrophys.* **571** (2014) A16, [[arXiv:1303.5076](#)].
- [8] A. R. Liddle, *An introduction to modern cosmology*. 3rd. ed., 1998.
- [9] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, Oxford, 2005.
- [10] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, *Front. Phys.* **69** (1990) 1–547.
- [11] H. Kurki-Suonio, “Cosmological perturbation theory, part 1 (lecture notes).” 2015.
- [12] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. 2009.

- [13] J. M. Stewart, *Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models*, *Class. Quant. Grav.* **7** (1990) 1169–1180.
- [14] P. G. Miedema and W. A. van Leeuwen, *Density perturbations in the early universe*, gr-qc/0303004.
- [15] E. Bertschinger, *Cosmological perturbation theory and structure formation*, in *Cosmology 2000*, pp. 1–25, 2001. astro-ph/0101009.
- [16] C.-P. Ma and E. Bertschinger, *Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges*, *Astrophys. J.* **455** (1995) 7–25, [astro-ph/9506072].
- [17] W. Hu, *Structure formation with generalized dark matter*, *Astrophys. J.* **506** (1998) 485–494, [astro-ph/9801234].
- [18] P. J. E. Peebles, *The Large-Scale Structure of the Universe*. No. ISBN 0-691-08239-1. Princeton University Press, 1980.
- [19] D. Jeong, *Cosmology with high ($z > 1$) redshift galaxy surveys*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 2010.
- [20] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga, and R. Scoccimarro, *Large scale structure of the universe and cosmological perturbation theory*, *Phys. Rept.* **367** (2002) 1–248, [astro-ph/0112551].
- [21] F. Leclercq, *Bayesian large-scale structure inference and cosmic web analysis*. PhD thesis, U. Paris-Saclay, Orsay, 2015. arXiv:1512.04985.
- [22] R. Scoccimarro, *Transients from initial conditions: a perturbative analysis*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **299** (1998) 1097, [astro-ph/9711187].
- [23] F. Zwicky, *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*, *Helv. Phys. Acta* **6** (1933) 110–127.
- [24] G. Bertone and D. Hooper, *A History of Dark Matter*, arXiv:1605.04909.
- [25] K. C. Freeman, *On the disks of spiral and SO Galaxies*, *Astrophys. J.* **160** (1970) 811.
- [26] V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr., *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*, *Astrophys. J.* **159** (1970) 379–403.
- [27] J. P. Ostriker, P. J. E. Peebles, and A. Yahil, *The size and mass of galaxies, and the mass of the universe*, *Astrophys. J.* **193** (1974) L1–L4.

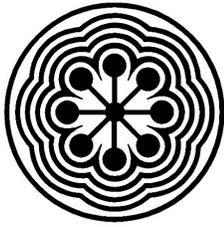
- [28] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, *Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints*, *Phys. Rept.* **405** (2005) 279–390, [hep-ph/0404175].
- [29] A. H. G. Peter, *Dark Matter: A Brief Review*, arXiv:1201.3942.
- [30] G. Bélanger, *Dark matter candidates and dark matter searches*, (LAPTH, Univ. de Savoie, CNRS, B.P. 110, F-74941, Annecy-le-Vieux, France).
- [31] G. Steigman and M. S. Turner, *Cosmological Constraints on the Properties of Weakly Interacting Massive Particles*, *Nucl. Phys.* **B253** (1985) 375–386.
- [32] S. Dimopoulos and H. Georgi, *Softly Broken Supersymmetry and $SU(5)$* , *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 150–162.
- [33] E. W. Kolb and R. Slansky, *Dimensional Reduction in the Early Universe: Where Have the Massive Particles Gone?*, *Phys. Lett.* **B135** (1984) 378.
- [34] R. D. Peccei and H. R. Quinn, *CP Conservation in the Presence of Instantons*, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440–1443.
- [35] **EROS** Collaboration, T. Lasserre, *Not enough stellar mass machos in the galactic halo*, *Astron. Astrophys.* **355** (2000) L39–L42, [astro-ph/0002253].
- [36] **EROS-2** Collaboration, P. Tisserand et al., *Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds*, *Astron. Astrophys.* **469** (2007) 387–404, [astro-ph/0607207].
- [37] S. Dodelson and L. M. Widrow, *Sterile-neutrinos as dark matter*, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 17–20, [hep-ph/9303287].
- [38] S. S. Gershtein and Ya. B. Zeldovich, *Rest Mass of Muonic Neutrino and Cosmology*, *JETP Lett.* **4** (1966) 120–122. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.4,174(1966)].
- [39] A. Del Popolo and M. Le Delliou, *Small scale problems of the Λ CDM model: a short review*, arXiv:1606.07790.
- [40] A. A. Klypin, A. V. Kravtsov, O. Valenzuela, and F. Prada, *Where are the missing Galactic satellites?*, *Astrophys. J.* **522** (1999) 82–92, [astro-ph/9901240].
- [41] X. Du, C. Behrens, and J. C. Niemeyer, *Substructure of fuzzy dark matter halos*, arXiv:1608.02575.
- [42] B. Moore, S. Ghigna, F. Governato, G. Lake, T. R. Quinn, J. Stadel, and P. Tozzi, *Dark matter substructure within galactic halos*, *Astrophys. J.* **524** (1999) L19–L22, [astro-ph/9907411].

- [43] A. N. Baushev, L. del Valle, L. E. Campusano, A. Escala, R. R. Muñoz, and G. A. Palma, *Cusps in the center of galaxies: a real conflict with observations or a numerical artefact of cosmological simulations?*, arXiv:1606.02835.
- [44] W. J. G. de Blok, *The Core-Cusp Problem*, *Adv. Astron.* **2010** (2010) 789293, [arXiv:0910.3538].
- [45] M. Boylan-Kolchin, J. S. Bullock, and M. Kaplinghat, *Too big to fail? The puzzling darkness of massive Milky Way subhaloes*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **415** (2011) L40, [arXiv:1103.0007].
- [46] M. Boylan-Kolchin, J. S. Bullock, and M. Kaplinghat, *The Milky Way's bright satellites as an apparent failure of LCDM*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **422** (2012) 1203–1218, [arXiv:1111.2048].
- [47] E. Papastergis, R. Giovanelli, M. P. Haynes, and F. Shankar, *Is there a ?too big to fail? problem in the field?*, *Astron. Astrophys.* **574** (2015) A113, [arXiv:1407.4665].
- [48] S. U. Ji and S. J. Sin, *Late time phase transition and the galactic halo as a bose liquid: 2. The Effect of visible matter*, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 3655–3659, [hep-ph/9409267].
- [49] S.-J. Sin, *Late time cosmological phase transition and galactic halo as Bose liquid*, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 3650–3654, [hep-ph/9205208].
- [50] J.-w. Lee and I.-g. Koh, *Galactic halos as boson stars*, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 2236–2239, [hep-ph/9507385].
- [51] T. Matos and F. S. Guzman, *Scalar fields as dark matter in spiral galaxies*, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) L9–L16, [gr-qc/9810028].
- [52] A. Suárez, V. H. Robles, and T. Matos, *A Review on the Scalar Field/Bose-Einstein Condensate Dark Matter Model*, *Astrophys. Space Sci. Proc.* **38** (2014) 107–142, [arXiv:1302.0903].
- [53] T. Matos and L. A. Ureña López, *A Further analysis of a cosmological model of quintessence and scalar dark matter*, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 063506, [astro-ph/0006024].
- [54] L. Hui, J. P. Ostriker, S. Tremaine, and E. Witten, *On the hypothesis that cosmological dark matter is composed of ultra-light bosons*, arXiv:1610.08297.
- [55] E. J. Copeland, A. R. Liddle, and D. Wands, *Exponential potentials and cosmological scaling solutions*, *Phys. Rev.* **D57** (1998) 4686–4690, [gr-qc/9711068].

- [56] M. J. Reyes-Ibarra and L. A. Ureña López, *Attractor dynamics of inflationary monomial potentials*, *AIP Conf.Proc.* **1256** (2010) 293–310.
- [57] L. A. Ureña López, *New perturbative method for analytical solutions in single-field models of inflation*, *Phys. Rev.* **D94** (2016), no. 6 063532, [arXiv:1512.07142].
- [58] B. Ratra, *Expressions for linearized perturbations in a massive scalar field dominated cosmological model*, *Phys. Rev.* **D44** (1991) 352–364.
- [59] L. A. Ureña López and A. X. González-Morales, *Towards accurate cosmological predictions for rapidly oscillating scalar fields as dark matter*, *JCAP* **1607** (2016), no. 07 048, [arXiv:1511.08195].
- [60] D. Blas, J. Lesgourgues, and T. Tram, *The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) II: Approximation schemes*, *JCAP* **1107** (2011) 034, [arXiv:1104.2933].
- [61] J. S. Bagla and T. Padmanabhan, *Cosmological N-body simulations*, *Pramana* **49** (1997) 161–192, [astro-ph/0411730].
- [62] C. Howlett, M. Manera, and W. J. Percival, *L-PICOLA: A parallel code for fast dark matter simulation*, arXiv:1506.03737.
- [63] R. Scoccimarro, L. Hui, M. Manera, and K. C. Chan, *Large-scale Bias and Efficient Generation of Initial Conditions for Non-Local Primordial Non-Gaussianity*, *Phys. Rev.* **D85** (2012) 083002, [arXiv:1108.5512].
- [64] L. Amendola, “Statistical methods in cosmology (lecture notes).” 2013.
- [65] T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press, 1993.
- [66] SDSS Collaboration, D. J. Eisenstein et al., *Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies*, *Astrophys. J.* **633** (2005) 560–574, [astro-ph/0501171].
- [67] D. Alonso, *CUTE solutions for two-point correlation functions from large cosmological datasets*, arXiv:1210.1833.
- [68] A. Moore et al., *Fast algorithms and efficient statistics: N-point correlation functions*, astro-ph/0012333.
- [69] H.-J. Seo and D. J. Eisenstein, *Probing dark energy with baryonic acoustic oscillations from future large galaxy redshift surveys*, *Astrophys. J.* **598** (2003) 720–740, [astro-ph/0307460].

- [70] D. H. Weinberg, M. J. Mortonson, D. J. Eisenstein, C. Hirata, A. G. Riess, and E. Rozo, *Observational Probes of Cosmic Acceleration*, *Phys. Rept.* **530** (2013) 87–255, [arXiv:1201.2434].
- [71] C. Power and A. Knebe, *The impact of box size on the properties of dark matter haloes in cosmological simulations*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **370** (2006) 691–701, [astro-ph/0512281].
- [72] **VIRGO Consortium** Collaboration, R. E. Smith, J. A. Peacock, A. Jenkins, S. D. M. White, C. S. Frenk, F. R. Pearce, P. A. Thomas, G. Efstathiou, and H. M. P. Couchmann, *Stable clustering, the halo model and nonlinear cosmological power spectra*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **341** (2003) 1311, [astro-ph/0207664].
- [73] R. Takahashi, M. Sato, T. Nishimichi, A. Taruya, and M. Oguri, *Revising the Halofit Model for the Nonlinear Matter Power Spectrum*, *Astrophys. J.* **761** (2012) 152, [arXiv:1208.2701].
- [74] P. S. Corasaniti, S. Agarwal, D. J. E. Marsh, and S. Das, *Constraints on dark matter scenarios from measurements of the galaxy luminosity function at high redshifts*, arXiv:1611.05892.
- [75] J. Zhang, Y.-L. S. Tsai, K. Cheung, and M.-C. Chu, *Ultra-Light Axion Dark Matter and its impacts on dark halo structure in N -body simulation*, arXiv:1611.00892.
- [76] J. Veltmaat and J. C. Niemeyer, *Cosmological particle-in-cell simulations with ultralight axion dark matter*, *Phys. Rev.* **D94** (2016), no. 12 123523, [arXiv:1608.00802].
- [77] J. Brandbyge, C. Rampf, T. Tram, F. Leclercq, C. Fidler, and S. Hannestad, *Cosmological N -body simulations including radiation perturbations*, arXiv:1610.04236.
- [78] M. A. Rodríguez-Meza, J. Suárez-Cancino, and T. Matos, eds., *Métodos Numéricos en Astrofísica*. Innovación Editorial Lagares, 2015.
- [79] J. Magana and T. Matos, *A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model*, *J. Phys. Conf. Ser.* **378** (2012) 012012, [arXiv:1201.6107].
- [80] H. Pagels and J. R. Primack, *Supersymmetry, Cosmology and New TeV Physics*, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 223.
- [81] T. Matos and L. A. Ureña López, *Quintessence and scalar dark matter in the universe*, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) L75–L81, [astro-ph/0004332].

-
- [82] T. Matos, A. Vázquez-Gonzalez, and J. Magana, ϕ^2 as Dark Matter, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **393** (2009) 1359–1369, [arXiv:0806.0683].
- [83] M. Kopp, C. Skordis, and D. B. Thomas, Extensive investigation of the generalized dark matter model, *Phys. Rev.* **D94** (2016), no. 4 043512, [arXiv:1605.00649].
- [84] D. J. E. Marsh and P. G. Ferreira, Ultra-Light Scalar Fields and the Growth of Structure in the Universe, *Phys. Rev.* **D82** (2010) 103528, [arXiv:1009.3501].
- [85] L. Amendola and R. Barbieri, Dark matter from an ultra-light pseudo-Goldstone-boson, *Phys. Lett.* **B642** (2006) 192–196, [hep-ph/0509257].
- [86] J.-c. Hwang and H. Noh, Axion as a Cold Dark Matter candidate, *Phys. Lett.* **B680** (2009) 1–3, [arXiv:0902.4738].
- [87] L. A. Ureña López, Unveiling the dynamics of the universe, [physics/0609181](#).
- [88] A. D. Rendall, Late-time oscillatory behaviour for self-gravitating scalar fields, *Class. Quant. Grav.* **24** (2007) 667–678, [gr-qc/0611088].
- [89] W. Hu, R. Barkana, and A. Gruzinov, Cold and fuzzy dark matter, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 1158–1161, [astro-ph/0003365].



Centro Nuclear "Nabor Carrillo", 4 de abril de 2017.

Dr. David Yves Ghislain Delepine
Director
División de Ciencias e Ingenierías,
Universidad de Guanajuato

Estimado Dr. David Yves Ghislain Delepine:

Por medio de la presente manifiesto que he revisado la tesis de maestría de la Lic. Rebeca Martínez Carrillo, titulada "Simulaciones Cosmológicas Rápidas para Modelos de Materia Oscura". Le he entregado mis críticas y comentarios para que ésta sea corregida. La Lic. Martínez se ha comprometido a hacer los cambios necesarios, por lo cual doy mi voto para que se proceda al examen de tesis. Si se necesita más información de mi parte o que haga alguna aclaración no dude en hacérmelo saber.

Sin más por el momento le envío un cordial saludos.

Atentamente,

Dr. Mario Alberto Rodríguez-Meza
Investigador
Depto. de Física,
Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares
Km 36.5 Carretera México-Toluca
Ocoyoacac, Estado de México
e-mail: marioalberto.rodriguez@inin.gob.mx



León Guanajuato, a; 6 de Abril de 2017

Dr. David Yves Ghisiain Delepine
Director de la División de Ciencias e Ingenierías
Campus León, Universidad de Guanajuato
PRESENTE

Estimado Dr. Delepine:

Por este medio, me permito informarle que he leído y revisado la tesis titulada “**Simulaciones Cosmológicas Rápidas para Modelos de Materia Oscura**” que realizó la Lic. en Física. **Rebeca Martínez Carrillo**, como requisito para obtener el grado de Maestra en Física.

Considero que el trabajo de tesis realizado por la Lic. **Rebeca Martínez** reúne los requisitos necesarios de calidad e interés académico para que sea defendida en un examen profesional, razón por la cual extiendo mi aval para que así se proceda.

Sin más que agregar, agradezco su atención y aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”

Dra. Argelia Bernal Bautista
Departamento de Física
DCI, Campus León

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. +52 (477) 788-5100 Fax:+52 (477) 788-5100 ext. 8410,
<http://www.ifug.ugto.mx>



Oficio número: IDH-Docencia-3-17
Asunto: Revisión de tesis

León, Gto., a 03 de Abril de 2017

Dr. David Yves Ghislain Delepine
Director de la
División de Ciencias e Ingenierías
P R E S E N T E

Por medio de la presente le informo que he revisado el documento de tesis de maestría de la Lic. en Física **Rebeca Martínez Carrillo**, y entregado mis observaciones para corregirlo, las cuales la estudiante se ha comprometido a incorporar en la versión final. Doy mi aprobación para que se proceda al examen recepcional, una vez que se cumplan los procedimientos administrativos correspondientes.

Sin más por el momento, quedo de Ud. enviándole cordiales saludos.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Isabel Delgadillo Cano".

DRA. MA. ISABEL DELGADILLO CANO

C.c.p. Archivo

Departamento de Ingeniería Física

División de Ciencias e Ingenierías, Campus León

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000, Tel. (477) 788-5100 ext. 8485, Fax:(477) 788-5100 ext. 8411
e-mail: idelgadillo@fisica.ugto.mx, <http://www.ifug.ugto.mx>



Universidad
de Guanajuato

CAMPUS LEÓN
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Asunto: Carta de tesis revisada
León, Gto., Abril de 2017

DR. DAVID Y. G. DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
PRESENTE

Estimado Dr. Delepine:

Por este medio hago constar que he revisado la tesis de investigación *Simulaciones cosmológicas rápidas para modelos de materia oscura*, que presenta la estudiante **Rebeca Martínez Carrillo**, del programa de Maestría en Física de la DCI.

Considero que el contenido de la tesis cumple con los requisitos de una tesis de grado, ya que contiene una exposición suficiente del tema de investigación tratado y presenta incluso resultados originales. Adicionalmente, la estudiante Martínez ha atendido las sugerencias y comentarios que le he indicado, los cuales se ven reflejados en la versión final de la tesis.

Por todo lo anterior, estoy de acuerdo en que la tesis se presente para su defensa ante el comité sinodal designado, en alguna fecha posterior que se considere conveniente.

Agradeciendo su amable atención, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”

DR. LUIS ARTURO UREÑA LÓPEZ
PROFESOR TITULAR B
lurena@ugto.mx