



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

**“PROPIEDADES DIELECTRICAS DE UN
MEDIO HOMOGÉNEO USANDO CÁLCULO
FRACCIONARIO”**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA:
M.I. ABRAHAM ORTEGA CONTRERAS

DIRECTORES:
DR. J. JUAN ROSALES GARCÍA
DR. OLEKSIY V. SHULIKA

SALAMANCA, GTO.

ABRIL, 2020

**PROPIEDADES DIELECTRICAS DE UN MEDIO
HOMOGENEO USANDO CALCULO
FRACCIONARIO**

Por

M.I. Abraham Ortega Contreras

Directores

Dr. J. Juan Rosales García

Dr. Oleksiy V. Shulika

Tesis que para obtener el grado de
DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Presenta en la
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

Salamanca, Gto.

Abril, 2020

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

Este trabajo ha sido aprobado por:

Directores:

Dr. J. Juan Rosales García

Dr. Oleksiy V. Shulika

Sinodales:

Dr. Miguel Torres Cisneros

Dr. Juan Gabriel Aviña Cervantes

Dr. Francisco Antonio Godínez Rojano

Dr. Jorge Mario Cruz Duarte

Fecha: Abril, 2020

Propiedades dieléctricas de un medio homogéneo usando cálculo fraccionario

Por

M.I. Abraham Ortega Contreras

Dr. J. Juan Rosales García,

Dr. Oleksiy V. Shulika

Directores

Universidad de Guanajuato, DICIS

Abril, 2020

Resumen

Mientras que el cálculo fraccionario ha tenido un gran crecimiento en las últimas décadas y se ha establecido como una herramienta importante en varias ramas de la ciencia e ingeniería, su uso en otras ramas todavía es relativamente reciente y tiene la oportunidad de ser investigado. Existe una gran cantidad de fenómenos por explorar, por lo cual es posible el descubrir nuevos aspectos de los modelos fraccionarios y sus aplicaciones. La principal ventaja de las derivadas fraccionarias es su no localidad y la incorporación de efectos de memoria y efectos de correlación espacial de largo alcance. En la presente tesis se desarrollan nuevos modelos de propiedades dieléctricas de medios homogéneos usando el cálculo fraccionario. Se obtuvieron la generalización de la conductividad eléctrica, la función dieléctrica compleja, el índice de refracción, la reflectancia y la susceptibilidad eléctrica dentro de los modelos de Drude y Lorentz. Además, se formuló y se estudió un modelo fraccionario de evolución de pulsos láser ultracortos propagándose en una fibra óptica. En los casos anteriores, los parámetros físicos de los sistemas dependen no solo de la frecuencia del campo aplicado, sino también del orden fraccionario de la ecuación diferencial $0 < \alpha \leq 1$. Esto abre la posibilidad de describir con mayor precisión las observaciones experimentales en sistemas complejos [1, 2, 3, 4].

Palabras Clave – *Cálculo fraccionario, modelos fraccionarios de Drude y de Lorentz, pulsos fraccionarios ultracortos*

Dielectric properties of a homogeneous medium using fractional calculus

By

M.I. Abraham Ortega Contreras

Dr. J. Juan Rosales García,

Dr. Oleksiy V. Shulika

Advisors

University of Guanajuato, DICIS

Abril, 2020

Abstract

While fractional calculus has grown tremendously in recent decades and has established itself as an important tool in various branches of science and engineering, its use in other branches is still relatively recent and has an opportunity to be investigated. There are still a large number of phenomena to explore, making it possible to discover new aspects of fractional models and their applications. The main advantage of fractional derivatives is their nonlocality and the incorporation of long-range spatial correlation effects and memory effects. In this thesis, new models of dielectric properties of homogeneous media are developed using fractional calculation. Generalization of electrical conductivity, complex dielectric function, refractive index, reflectance, and electrical susceptibility were obtained within the Drude and Lorentz models. In addition, a fractional evolution model of ultrashort laser pulses propagating on an optical fiber was formulated and studied. In the above cases, the physical parameters of the systems depend not only on the frequency of the applied field, but also on the fractional order of the differential equation $0 < \alpha \leq 1$. This opens up the possibility of more accurately describing experimental observations in complex systems [1, 2, 3, 4].

Keywords – *Fractional calculus, Drude Model, Lorentz Model, ultra short pulses*

Agradecimientos...

A mis padres por confiar en mí, escucharme y darme consejos, reprenderme cuando cometía errores, por siempre anhelar lo mejor para mi futuro. Porque gracias a ustedes apoyándome a lo largo de mi vida, hoy puedo ver alcanzada mi meta.

A mis directores de tesis, **Dr. J. Juan Rosales García** y **Dr. Oleksiy V. Shulika** por permitirme trabajar con ellos, compartir sus conocimientos y el apoyo incondicional para poder finalizar este trabajo.

A mis profesores y colaboradores en el doctorado.

Abraham

Agradecimientos



Campus Irapuato-Salamanca | División de Ingenierías

A la división de ingenierías del Campus Irapuato-Salamanca de la Universidad de Guanajuato, que puso a mi disposición todos los recursos y medios necesarios para continuar mis estudios y desarrollar mi trabajo de Tesis. AL CONACYT por el apoyo económico durante el transcurso de la carrera.



CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Dedicado a mis padres y a mi familia...

Índice general

Índice de figuras	XI
1. Introducción	1
1.1. Justificación	5
1.2. Objetivo	5
1.3. Metas	6
1.4. Plan de la obra	6
2. Introducción al Cálculo Fraccionario	7
2.1. Funciones especiales	7
2.1.1. Función Beta	8
2.1.2. Función de Mittag-Leffler	8

2.1.3.	Transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler de dos parámetros	9
2.2.	Integrales y derivadas fraccionarias	10
2.2.1.	Propiedades de la Integral fraccionaria	11
2.2.2.	La Integral Fraccionaria y la Convolución	12
2.2.3.	Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville	12
2.2.4.	Transformada de Laplace de la Derivada de Riemann-Liouville	13
2.2.5.	Derivada fraccionaria de Caputo	13
2.2.6.	Transformada de Laplace de la Derivada de Caputo	14
2.2.7.	Propiedades de las derivadas fraccionarias	14
2.2.8.	Transformada de Fourier	16
2.2.9.	Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias	17
3.	Pulsos ultracortos	19
3.1.	Envolvente Gaussiana	20
3.1.1.	Pulso Gaussiano con chirp	20
3.2.	Envolvente secante hiperbólica	21
3.2.1.	Pulso secante con chirp	21

4. Casos de Estudio	23
4.1. Modelo de Drude fraccionario	23
4.2. Modelo fraccionario de Lorentz	27
4.3. Modelo fraccionario para pulsos ultracortos	31
4.3.1. Solución	38
5. Conclusiones	48
A. Apéndice	50
A.1. Algunos ejemplos de Integrales fraccionarias	50
A.2. Algunos ejemplos de derivadas fraccionarias	51
Referencias	53

Índice de figuras

1.1. Análisis del número de publicaciones de Cálculo fraccionario por año(Scopus).	2
1.2. Análisis del número de publicaciones por año por fuente(Scopus).	3
1.3. Análisis del porcentaje de publicaciones por disciplina de estudio(Scopus).	3
3.1. Pulso Gaussiano sin chirp	20
3.2. chirp $a = -10$	22
3.3. chirp $a = 10$	22
3.4. Pulsos chirp Gaussianos.	22
3.5. Diferentes perfiles en función del parámetro chirp $a:0,1,2,3$ para $I(\omega) = E(\omega) ^2$. . .	22
4.1. Conductividad real e imaginaria para algunos valores de γ	25
4.2. Permitividad real e imaginaria	26

4.3. Función dieléctrica para $0 < \zeta < 1$, correspondiente al caso subamortiguado para diferentes valores de γ	29
4.4. Función dieléctrica para $\zeta = 0$, correspondiente al caso no amortiguado para diferentes valores de γ	30
4.5. Función dieléctrica para $\zeta = 1$, correspondiente al caso críticamente amortiguado para diferentes valores de γ	30
4.6. Función dieléctrica para $\zeta = 2$, correspondiente al caso sobreamortiguado para diferentes valores de γ	30
4.7. $F(x, y)$	35
4.8. Variación de β_2, D, d_{12} con respecto a la longitud de onda para sílica (β_2, D desaparecen en la región de dispersión cero de longitud de onda en en la proximidad de los $1.27\mu m$	44
4.9. Variación el índice de refracción y del índice de grupo con respecto a la frecuencia para sílica $\beta_1 = \frac{n_g}{c}$	45
4.10. Pérdidas intrínsecas de la sílica	45
4.11. $A(z, t)$ para distintos valores de γ	46

Capítulo 1

Introducción

En el estudio de la naturaleza una de las grandes invenciones del ser humano es el cálculo diferencial e integral de orden entero, el cual se basa en los conceptos de función, derivada e integral. Una derivada de una función en algún punto caracteriza la tasa de cambio de la función en ese punto, es decir, la derivada ordinaria es local. Cualquier proceso que cambie con el tiempo o con el espacio puede ser descrito mediante una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. Luego, resolviendo la ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales dadas, podemos predecir el comportamiento de cualquier sistema. Sin embargo, debido a los avances tecnológicos se cuenta ahora con instrumentos de medición muy precisos, y al comparar los resultados experimentales con lo predicho por la teoría nos damos cuenta que hay cierta discrepancia [3, 5, 6]. Es aquí donde los modelos basados en el cálculo diferencial e integral ordinario ya no funcionan de manera adecuada y da lugar a otras posibles derivadas e integrales, como lo son las derivadas fraccionarias. La parte de la matemática que estudia los operadores diferenciales e integrales de orden fraccionario (no entero) se denomina Cálculo Fraccionario (CF).

El origen del CF se remonta a 1675, cuando Leibniz introduce la noción de la derivada de orden n de una función. Años más tarde, en 1695, cuando los primeros resultados publicados son citados en una carta de L'Hôpital a Leibniz, en la cual L'Hôpital le plantea la cuestión del posible significado de la derivada de orden $n = \frac{1}{2}$, la respuesta intuitiva de Leibniz fue “ *Esto es una aparente paradoja que permitirá en el futuro extraer consecuencias muy útiles*” [7]. Desde entonces, muchos matemáticos

estudiaron sobre el cálculo fraccionario y contribuyeron a su desarrollo; entre ellos Lacroix, Riemann, Liouville, Fourier, Lagrange, Abel, Euler, Cauchy, Caputo, Gründwal Letnikov [8], y más recientemente Caputo-Fabrizio y Atangana-Baleanu entre otros. A diferencia de la derivada ordinaria o de orden entero, la derivada fraccionaria no tiene una interpretación física o geométrica bien sustentada [9]. Por tal motivo, en la literatura podemos encontrar varias definiciones de derivadas fraccionarias, locales y no locales, cada una con sus beneficios y limitaciones. Las derivadas fraccionarias se definen mediante integrales y son operadores no locales. Además, éstas satisfacen la propiedad de linealidad, sin embargo, propiedades, como la regla del producto, la regla del cociente, la regla de la cadena, el teorema de Rolle, el teorema del valor medio y la regla de composición entre otras, no se cumplen en casi todas las derivadas fraccionarias, lo cual hace más difícil su aplicación a problemas físicos [9, 7]. Afortunadamente, con las computadoras y algoritmos computacionales modernos se ha tenido gran avance en la aplicación del CF a problemas científicos y de ingeniería, por ejemplo, desde su éxito en la descripción de la difusión anómala [10], el CF se ha convertido en una herramienta de gran importancia en varias áreas de la física, biología, química, ingeniería y bioingeniería. Los modelos fraccionarios proveen un grados extra de libertad en los modelos así como una excelente descripción de las propiedades hereditarias y de memoria de varios materiales y procesos debido a la existencia de un *término de memoria* en estos modelos [8, 11]. Asimismo, muchos sistemas dinámicos de orden superior y fenómenos complejos no lineales pueden ser representados utilizando un menor número de parámetros [9, 3, 12], dado que el orden fraccionario de la derivada le da un parámetro de ajuste adicional que permite adaptarse a un comportamiento específico [13, 14]. En las siguientes figuras se muestra el desarrollo del cálculo fraccionario:

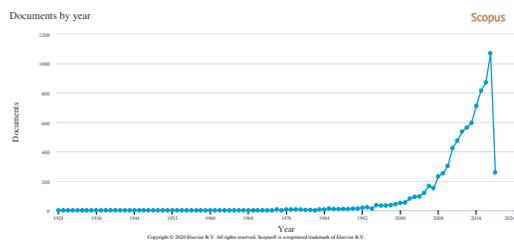


Figura 1.1: Análisis del número de publicaciones de Cálculo fraccionario por año(Scopus).

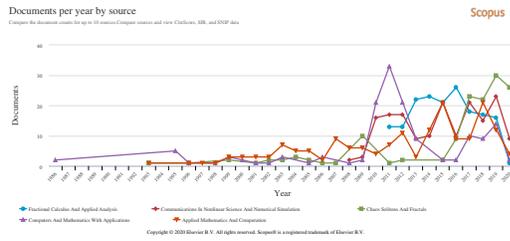


Figura 1.2: Análisis del número de publicaciones por año por fuente(Scopus).

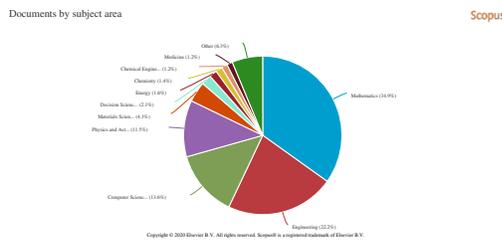


Figura 1.3: Análisis del porcentaje de publicaciones por disciplina de estudio(Scopus).

Entre las ramas en las que se ha aplicado el cálculo fraccionario se encuentran las siguientes:

- Teoría de los materiales: Aplicación y control del comportamiento de los materiales visco-elásticos [3, 12, 13, 14], análisis de modelos visco-elásticos que emplea derivadas de orden fraccionario, que tiene una mejor curva de ajuste que los modelos ordinarios en casos complejos.
- Teoría del transporte: El flujo de contaminantes transportados por aguas subterráneas que atraviesan muy distintos estratos [15, 16], en estos se estudian modelos de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias para aplicarse de manera confiable con interpretaciones hidro-geológicas apropiadas.
- Física, electromagnetismo, termodinámica y mecánica [17, 18, 19, 20]: En estos libros y artículos se analizan diversas aplicaciones del cálculo fraccional en los campos de la mecánica clásica.
- Geología y astrofísica: El control de los cambios de velocidad y dirección del viento en los generadores de electricidad en campos eólicos, en la radiación cósmica, distribuciones de agua y polvo en la atmósfera [21, 22, 23, 24, 25].

- **Biología, química, teoría de control:** En [26] puede verse una revisión (review) sobre los desarrollos y tendencias en la aplicación del cálculo fraccional (FC) en biomedicina y biología, mientras que en [27] se explica la teoría sobre el cálculo fraccionario en control, matemáticas y física, además de presentar ejemplos de modelos de orden fraccionario en estas áreas.

- **Óptica:** correlación fraccionaria, la aplicación de transformadas de raíces y potencias para diseño y procesamiento de señales ópticas, emisión espontánea de un átomo en un cristal fotónico 3D usando un modelo fraccionario, transformada de Fourier fraccionaria en interferometría para la caracterización de pulsos ultra cortos, diferenciador fraccionario óptico usando una rejilla de bragg de fibra desplazada en fase operando en modo de reflexión, aplicación del cálculo fraccionario para introducir soluciones de orden fraccionario a la ecuación de onda paraxial, definición y ejemplos de diferenciación de orden arbitrario, basándose en algunas propiedades de la transformada de fourier, así como modelos de filtros binarios 1D y 2D [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36]

Una característica más de las derivadas fraccionarias es que, éstas dependen del dominio y de las condiciones de contorno. En otras palabras, las derivadas fraccionarias en un punto x no está determinado por los valores de vecindad próximos, sino por los valores de vecindad de largo alcance. Esto hace que el cálculo fraccionario sea una de las mejores herramientas para describir procesos de memoria a largo plazo [37]. Por lo anterior, es de importancia analizar los procesos físicos usando nuevos métodos matemáticos, en particular, el cálculo fraccionario ya que se sabe que los procesos de memoria larga juegan un papel importante en muchas áreas de la ciencia y tecnología.[38].

En este trabajo se plantea el uso de modelos fraccionarios para el análisis de las propiedades dieléctricas de un medio homogéneo, siendo estos el **modelo de Drude**, el cual propone el modelo ordinario de conducción eléctrica para explicar las propiedades de transporte de los electrones en los materiales (especialmente en los metales), el **modelo del oscilador de Lorentz** puede explicar la respuesta de los materiales a las ondas electromagnéticas. Lorentz pensó en la interacción del núcleo del átomo y el electrón como un sistema masa-resorte, el resorte se pondría en movimiento por un campo eléctrico que interactúa con la carga del electrón, siendo ambos de estos parte de los modelos clásicos de interacción luz-átomo. La **evolución de pulsos láser ultracortos en una fibra óptica** es un modelo muy utilizado en comunicaciones. Estos son modelos clásicos muy utilizados en óptica y el modelo generalizado agrega un parámetro de ajuste extra con el cual es posible aportar nuevas propiedades al sistema, el caso ordinario es un caso particular.

1.1. Justificación

En las últimas décadas las ecuaciones diferenciales fraccionarias han asumido un papel importante para modelar la dinámica anómala de varios procesos relacionados con sistemas complejos en muchas áreas de la ciencia y de la ingeniería (como puede verse en el análisis del porcentaje de publicaciones por disciplina de estudio, mostrado en la figura 1.3), siendo un área que está experimentando un gran crecimiento en los últimos años (mostrado en la figura 1.1).

Mientras que el cálculo fraccionario ya se ha establecido como una herramienta importante en varias ramas de la ciencia e ingeniería, su uso en otras ramas es relativamente reciente (como se muestra en la gráfica 1.2). Todavía existen una gran cantidad de fenómenos no locales inexplorados. Por lo tanto, año tras año, es posible el descubrir nuevos aspectos de los modelos fraccionarios y sus aplicaciones [39].

Los operadores fraccionarios constituyen un complemento (no un sustituto) a los modelos clásicos. Esta herramienta matemática ha sido extendida principalmente desde los años 90.

El modelo de Drude es uno de los primeros temas en aparecer en los libros de texto de física de estado sólido, es usado hasta el día de hoy como una forma práctica y rápida de obtener estimados de propiedades que pueden requerir de un análisis complejo. El modelo de Drude es utilizado en conjunto con el modelo de Lorentz para explicar las propiedades ópticas lineales de materiales [40, 41]. La propagación de un haz de luz en una fibra óptica es un problema básico en comunicaciones y óptica. Se espera que un modelo fraccionario los casos mencionados anteriormente permita la posibilidad de describir con mayor precisión los resultados experimentales en sistemas complejos.

1.2. Objetivo

Objetivo: Proponer modelos alternativos que describan fenómenos electromagnéticos interactuando con un medio homogéneo usando el cálculo fraccionario. En particular, analizar las propiedades dieléctricas y ópticas de un medio homogéneo. Además, el modelo fraccionario de evolución de pulsos láser ultracortos en una fibra óptica.

1.3. Metas

- Desarrollar y estudiar de manera sistemática el modelo de Drude fraccionario.
- Desarrollar y estudiar de manera sistemática el modelo de Lorentz fraccionario.
- Desarrollar y estudiar de manera sistemática el modelo fraccionario de evolución de pulsos láser ultracortos en una fibra óptica.

1.4. Plan de la obra

En el Capítulo 2 presentamos una introducción al cálculo fraccionario, en el capítulo 3 se da una breve revisión de los pulsos ultracortos; En el Capítulo 4 se presentan los casos analizados de modelos fraccionarios de la interacción electromagnética y el modelo fraccionario de pulsos ultracortos, finalmente en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y posibles investigaciones futuras.

Capítulo 2

Introducción al Cálculo Fraccionario

2.1. Funciones especiales

En esta sección se analizan algunos conceptos básicos sobre las funciones especiales que son ampliamente usadas en el cálculo fraccionario. Una de las funciones básicas es la función gamma $\Gamma(z)$, a través de esta se generaliza el concepto de la función factorial $n!$ a los números reales y complejos. La función Gamma se define como:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0, \quad (2.1)$$

Esta función es analítica en cualquier punto, excepto en el caso de los enteros negativos y al cero, es decir, tiene polos simples en los puntos $z = \mathbb{Z}_-$. La función gamma se reduce al factorial para un argumento entero positivo \mathbb{Z}_+^* .

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \quad (2.2)$$

Esta igualdad nos muestra la relación de la función con el factorial, por lo que la función Gamma extiende el concepto de factorial a cualquier valor complejo de z . Otra de las propiedades básicas de la función Gamma es que satisface la siguiente igualdad

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.3)$$

La función Gamma puede ser representada también por medio del límite

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \quad (2.4)$$

En donde se asume que $\Re(z) > 0$.

2.1.1. Función Beta

En algunos casos es conveniente utilizar la función Beta en lugar de combinaciones de valores de la función Gamma. La función Beta esta definida como

$$B(z, \omega) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{\omega-1} d\tau, \quad (\Re(z) > 0, \Re(\omega) > 0). \quad (2.5)$$

Una de las propiedades de la función Beta es que esta se relaciona con la función Gamma por mediante la expresión:

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} \quad (2.6)$$

Además, la función Beta satisface la condición de simetría

$$B(z, \omega) = B(\omega, z) \quad (2.7)$$

Con ayuda de la función Beta es posible establecer las siguientes dos relaciones:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (2.8)$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{2z-1} \Gamma(2z) \quad (2z \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (2.9)$$

La ecuación 2.9 es conocida como la fórmula de Legendre [9]. Utilizando las ecuaciones anteriores se pueden deducir dos fórmulas que son de gran utilidad:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (2.10)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} 2n!}{2^{2n} n!} \quad (2.11)$$

2.1.2. Función de Mittag-Leffler

la función exponencial e^z tiene un papel muy importante en la teoría de las ecuaciones diferenciales de orden entero. La función de Mittag-Leffler es una generalización de la función exponencial, por

consiguiente, es de esperar que la función de Mittag-Leffler tenga un rol muy importante en las soluciones de las ecuaciones diferenciales fraccionarias. La función de Mittag-Leffler uniparamétrica [42] se define por

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.12)$$

Una función de dos parámetros del tipo Mittag-Leffler [43] es definida por la serie

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (2.13)$$

Como casos especiales se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} E_{1,m}(z) &= \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\} \\ \cosh(z) &= E_{2,1}(z^2), \\ \frac{\sinh(z)}{z} &= E_{2,2}(z^2) \\ e^{z^2} &= \operatorname{erfc}(-z) \\ E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.1.3. Transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler de dos parámetros

Sea $f(t)$ una función definida para todo $t \geq 0$. Entonces, la transformada de Laplace $F(s)$ de la función $f(t)$ viene dada por la integral impropia

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \equiv F(s) \quad (2.15)$$

Para que la integral exista, la función $f(t)$ debe ser de orden α , es decir, que existen constante positivas M, T tales que:

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M \quad \forall t > T \quad (2.16)$$

La función original $f(t)$ puede ser calculada utilizando la transformada inversa de Laplace

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} dt \quad (2.17)$$

Donde $c = \operatorname{Re}(s) > c_0$, c_0 yace en la mitad derecha del plano de convergencia de la integral de Laplace 2.15 La transformada de Laplace de la convolución de dos funciones se define como

$$L\{f(t) * g(t)\} = F(s) G(s) \quad (2.18)$$

La transformada de Laplace de una derivada ordinaria de orden n de la función $f(t)$, viene dada por

$$L\{f^n(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (2.19)$$

Este resultado se puede obtener a partir de la definición (2.15) e integrando por partes.

Recordemos que la función de Mittag-Leffler es la generalización de la función exponencial, entonces, usaremos la transformada de Laplace de la función exponencial, para calcular la transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler. Para esto, partiremos de la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-t} e^{\pm zt} dt = \frac{1}{1 \mp z}, \quad |z| < 1 \quad (2.20)$$

Derivando ambos lados de la ecuación y usando cambio de variables [9] se obtiene

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^k e^{\pm at} dt = \frac{k!}{(s \mp a)^{k+1}}, \quad \Re(s) > |a| \quad (2.21)$$

Usando este mismo formalismo para obtener la transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler de dos parámetros $E_{\alpha,\beta}$ con $t^{\beta-1}$, resulta

$$L[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a}, \quad \Re(s) > |a|^{1/\alpha}, \quad a > 0 \quad (2.22)$$

Luego, la transformada de Laplace de la k -ésima derivada de la función de Mittag-Leffler con $t^{\alpha k + \beta - 1}$ esta dada por

$$L[t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha)] = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}} \quad \Re(s) > |a|^{1/\alpha}, \quad a > 0 \quad (2.23)$$

Donde que $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) \equiv \frac{d^k}{dz^k} E_{\alpha,\beta}(z)$.

2.2. Integrales y derivadas fraccionarias

Para generalizar el cálculo ordinario a ordenes no enteros hay dos enfoques:

- Partiendo de la integral iterada de una función, y
- Generalizando el concepto de derivada, visto como límite.

Empleando el primer enfoque, es decir, integrales iteradas, se tiene que la integral ordinaria I de una función $f(t)$ se define como

$$If(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.24)$$

Integrando una vez más, resulta

$$I^2 f(t) = \int_0^t \int_0^\tau f(\vartheta) d\vartheta d\tau \quad (2.25)$$

Usando el teorema de Fubini podemos intercambiar las integrales, esto es

$$I^2 f(t) = \int_0^t f(\vartheta) (t - \vartheta) d\vartheta \quad (2.26)$$

Siguiendo este proceso de intercambio de integrales, se llega a obtener una conocida fórmula para integrales iteradas

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\tau) (t - \tau)^{n-1} d\tau \quad (2.27)$$

Ahora, tomando en cuenta la relación del factorial con la función Gamma, es decir, si reemplazamos el factorial $(\nu - 1)!$ por la función $\Gamma(\nu)$, entonces, la integral podrá tomar valores reales $\nu \in \Re$

$$I^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t f(\tau) (t - \tau)^{\nu-1} d\tau \quad (2.28)$$

De esta manera, se ha obtenido la integral fraccionaria para una función arbitraria $f(t)$.

La integral de Riemann-Liouville de orden $\nu \geq 0$ de la función $f(t)$ sobre el intervalo $[a, t]$ se define como

$$I^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t f(\tau) (t - \tau)^{\nu-1} d\tau \quad (2.29)$$

Si los límites son $(-\infty, t]$ entonces, la integral (2.29) es la integral de Liouville, si $[t, \infty)$ la integral se llama de Weyl [9]. El operador I^ν es válido solo para integrales y no es posible el utilizarlo para calcular una derivada fraccionaria. Es decir, no con solo cambiar el signo se calcula una derivada fraccionaria. La derivada fraccionaria se definirá en la siguiente sección.

2.2.1. Propiedades de la Integral fraccionaria

- $I^\nu[I^\mu f(t)] = I^{(\nu+\mu)} f(t)$, semigrupo.
- $I^\nu[I^\mu f(t)] = I^\mu[I^\nu f(t)]$, conmutatividad.
- Si $f(t)$ es una función analítica en $t > 0$, entonces $I^\nu f(t)$ es un operador continuo respecto a ν , esto es

$$\lim_{\mu \rightarrow \nu} I^\mu f(t) = I^\nu f(t).$$

2.2.2. La Integral Fraccionaria y la Convolución

La integral fraccionaria se puede describir usando la convolución de dos funciones, la cual se define como

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (2.30)$$

Ahora, sea la función

$$\Phi_\nu(t) = \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \quad t > 0 \quad (2.31)$$

Entonces,

$$I^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} f(\tau)d\tau = \Phi_\nu(t) * f(t). \quad (2.32)$$

2.2.3. Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville

Sea n un número natural que cumple la desigualdad $n - 1 < \nu \leq n$. Entonces, la derivada fraccionaria de orden ν de Riemann-Liouville se define como

$$D^\nu f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I^{(n-\nu)} f(t) \quad (2.33)$$

donde $I^{(n-\nu)} f(t)$ es una integral fraccionaria de la función $f(t)$. Si $\nu = n$, se tiene

$$D^\nu f(t)|_{\nu=n} = \frac{d^n}{dt^n} I^0 f(t) = f^{(n)}(t) \quad (2.34)$$

Lo que significa que coincide con la derivada de orden entero. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (2.33) se puede escribir como

$$D^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\nu+1-n}} d\tau, \quad n - 1 < \nu \leq n. \quad (2.35)$$

donde $\nu \geq 0$ es el orden real de la derivada en el intervalo $n - 1 < \nu \leq n$, con n entero, además $t > a$. La derivada (2.35) se aplica a funciones $f(t)$ que admiten n derivadas continuas en el intervalo $[a, t]$, tales que $\int_a^t |f(t)|dt < \infty$.

2.2.4. Transformada de Laplace de la Derivada de Riemann-Liouville

Dada la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\nu > 0$ con $a = 0$, (2.35), y aplicando la transformada de Laplace (2.15) [9, 7], resulta

$$L[D_t^\nu f(t)] = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_t^{\nu-k-1} f(t)]_{t=0}, \quad n-1 < \nu < n \quad (2.36)$$

Esta ecuación tiene un problema en la aplicación a problemas físicos, ya que no hay interpretación física, aún, para los valores de la derivada fraccionaria en $t = 0$. Además, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función constante es diferente de cero. Esta es

$$D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} \quad (2.37)$$

Estos dos hechos complican la interpretación física en caso de las aplicaciones a fenómenos naturales. La derivada de Riemann-Liouville es aplicada sin inconvenientes a problemas puramente matemáticos.

2.2.5. Derivada fraccionaria de Caputo

La derivada fraccionaria de Caputo de orden ν se representa como ${}^C D^\nu f(t)$ y está definida por

$${}^C D^\nu f(t) = I^{(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} f(t) \quad (2.38)$$

Si $\nu = n$, se tiene

$${}^C D^\nu f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t). \quad (2.39)$$

La derivada fraccionaria de Caputo la podemos escribir como

$${}^C D^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\nu+1-n}} d\tau, \quad n-1 < \nu \leq n \quad (2.40)$$

La transformada de Laplace de la derivada de Caputo permite el utilizar valores iniciales de derivadas clásicas con interpretaciones físicas conocida, y es fácil notar que la derivada de una constante es cero, ya que dentro de la integral aparecen derivadas ordinarias de la función dada. Por lo tanto, si $f(t) = C$, entonces, ${}^C D^\nu C = 0$. Por este motivo, la derivada de Caputo han sido ampliamente usadas en la descripción de sistemas físicos reales y con muy buenos resultados, siendo preferida para el modelado de los sistemas físicos [44].

2.2.6. Transformada de Laplace de la Derivada de Caputo

La transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo de la función $f(t)$ está dada por

$$L\{ {}^C D^\nu f(t) \} = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\nu-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \nu < n. \quad (2.41)$$

Debido a las definiciones de las derivadas de Riemann-Liouville y de Caputo, existe una relación entre ellas dada por el siguiente teorema.

Teorema: Sea $t > 0$, $\nu \in \mathfrak{R}$, $n-1 < \nu < n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, la siguiente relación entre Riemann-Liouville y Caputo se cumple

$${}^C D^\nu f(t) = D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k+1-\nu)} f^{(k)}(0). \quad (2.42)$$

Esta expresión implica que las derivadas de Caputo y Riemann-Liouville coinciden si y sólo si $f(t)$ junto con sus primeras $n-1$ derivadas se anulan en $t=0$.

Partiendo de la integral fraccionaria de orden ν , se definieron las derivadas fraccionarias de orden ν de Riemann-Liouville y de Caputo. Estas derivadas, en general, no coinciden. Primero, la derivada de Riemann-Liouville de una constante es diferente de cero, mientras que la de Caputo es cero. Además, en el caso de la transformada de Laplace de Riemann-Liouville aparecen como condiciones iniciales derivadas fraccionarias, mientras que en el caso de la derivada de Laplace de la transformada de Fourier de Caputo aparecen condiciones iniciales "no fraccionarias" con significado físico tales como las que se usan en las ecuaciones diferenciales de orden entero

2.2.7. Propiedades de las derivadas fraccionarias

Es necesario describir las propiedades de las derivadas fraccionarias que son utilizadas más frecuentemente en aplicaciones.

- Linealidad: La derivación fraccionaria es lineal $D^\nu (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\nu f(t) + \mu D^\nu g(t)$

- La regla de Leibniz para derivadas fraccionarias: Consideremos dos funciones, $\varphi(t)$, $f(t)$, si $f(\tau)$ es continua en el intervalo $[a, t]$ y $\varphi(\tau)$ tiene $n + 1$ derivadas en el mismo intervalo, la derivada fraccionaria del producto $\varphi(t) f(t)$ viene dada por:

$${}_a D_t^p (\varphi(t) f(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{p-k} f(t) - R_n^p(t) \quad (2.43)$$

Donde $n \geq p + 1$ y

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-p)} \int_a^t (t - \tau)^{-p-1} f(\tau) d\tau \int_\tau^t \varphi^{(n+1)}(\xi) (t - \xi)^n d\xi \quad (2.44)$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ la expresión se ve reducida a:

$${}_a D_t^p (\varphi(t) f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{p-k} f(t) \quad (2.45)$$

La relación anterior es particularmente útil para la evaluación de derivadas fraccionarias que son el producto de un polinomio y una función con una derivada fraccionaria conocida.

- Derivada fraccionaria de una función compuesta: La derivada fraccionaria de una función compuesta viene dada por:

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^p F(h(t)) &= \frac{(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} F(h(t)) + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{p}{k} \frac{k!(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k+1-p)} F(h(t)) \sum_{m=1}^k F^{(m)}(h(t)) \sum \prod_{r=1}^k \frac{1}{a_r!} \left(\frac{h^{(r)}(t)}{r!} \right)
 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Donde \sum se extiende sobre todas las combinaciones de valores a_1, a_2, \dots, a_k (números enteros no negativos) tales que:

$$\sum_{r=1}^k r a_r = k \quad y \quad \sum_{r=1}^k a_r = m$$

- Derivación fraccionaria de Riemann-Liouville de una integral dependiendo de un parámetro: Recordemos que regla para la diferenciación de una integral dependiente de un parámetro con el mismo parámetro en el límite superior, dada por

$$\frac{d}{dt} \int_0^t F(t, \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} d\tau + F(t, t - 0) \quad (2.47)$$

Tiene su análogo para el caso de la derivación fraccionaria, la regla para la derivación fraccionaria de Riemann-Liouville de una integral dependiendo de un parámetro cuando el límite superior también depende del parámetro, es la siguiente:

$${}_0 D_t^\alpha \int_0^t K(t, \tau) d\tau = \int_0^t {}_\tau D_t^\alpha K(t, \tau) d\tau + \lim_{\tau \rightarrow t-0} {}_\tau D_t^{\alpha-1} K(t, \tau) \quad (0 < \alpha < 1) \quad (2.48)$$

- Derivadas fraccionarias sucesivas: Este tipo de derivadas puede aparecer de manera natural en la formulación de varios problemas en física y ciencia aplicada. Miller y Ross llamaron a la ecuación 2.49 diferenciación secuencial y consideraron ecuaciones diferenciales con derivadas de este tipo en su libro [7].

$$D^{n\alpha} f(t) = \underbrace{D^\alpha D^\alpha D^\alpha \dots D^\alpha}_n f(t) \quad (2.49)$$

2.2.8. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función continua $f(t)$ absolutamente integrable en el intervalo $(-\infty, \infty)$ esta definida por

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} h(t) dt \quad (2.50)$$

La función original $h(t)$ puede ser calculada a partir de $H(\omega)$ utilizando la relación

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} H(\omega) d\omega \quad (2.51)$$

La transformada de Fourier de la convolución esta dada por

$$\mathcal{F}\{g(t) * h(t)\} = G(\omega) H(\omega) \quad (2.52)$$

La transformada de Fourier de una derivada esta dada por

$$\mathcal{F}\{h^{(n)}(t)\} = (-i\omega)^n H(\omega) \quad (2.53)$$

La transformada de Fourier es una herramienta muy poderosa en el análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas dinámicos lineales.

Transformada de Fourier de las derivadas fraccionarias

Considerando el límite inferior $a = -\infty$, y considerando un comportamiento razonable (es periódica en un intervalo 2π y puede ser analizada por medio la superposición de un número infinito de ondas senoidales y coseinodales con distintas frecuencias) [45] de $g(t)$ y sus derivadas cuando $t \rightarrow \infty$, se puede hacer una integración por partes y considerar las derivadas de Riemann-Liouville

y Caputo en la misma forma:

$$\left. \begin{array}{l} {}_{-\infty}^C D_t^\alpha g(t) \\ {}_{-\infty} D_t^\alpha g(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{g^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} = {}_{-\infty} D_t^{\alpha-n} g^{(n)}(t)$$

Para $n-1 < \alpha < n$, al aplicar la transformada de Fourier se obtiene la relación:

$$\mathcal{F}\{D^\alpha g(t)\} = (-i\omega)^\alpha G(\omega) \tag{2.54}$$

Donde D^α denota cualquiera de las tres diferenciales fraccionarias anteriores. Por ejemplo, la transformada de Fourier de derivadas fraccionarias ha sido utilizada por Beyer y Kempfle [46].

2.2.9. Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias

Al crear modelos fraccionarios para solucionar problemas de ingeniería, es raro cuando es posible evaluar la solución de un modelo fraccionario dado en su forma cerrada, incluso si una solución analítica es posible. Por lo tanto, es necesario el desarrollar métodos numéricos eficientes y confiables para resolver FPDE generales [47], obteniendo soluciones numéricas con una solución aproximada pero con un error próximo a cero, en un intervalo de tiempo aceptable.

Algunos de los métodos para resolver numéricamente una ecuación diferencial fraccionaria [47] son:

- Métodos directos: Consisten en discretizar directamente el operador fraccionario (tales como los métodos L1, L2 y el producto trapezoidal entre otros).
- Métodos de integración: Considerando una ecuación diferencial ordinaria en la forma:

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = \eta \end{cases} \tag{2.55}$$

Integrando en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ se obtiene

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, u(s)) ds \tag{2.56}$$

La integral puede ser resuelta por métodos numéricos clásicos (la fórmula rectangular, la regla trapezoidal, la fórmula de Simpson entre otros), los cuales pueden ser usados para derivar un método numérico apropiado para la ecuación diferencial fraccionaria.

- Métodos lineales fraccionarios multipasos: Estos son una generalización de los métodos lineales multipasos, los cuales fueron estudiados por primera vez por Lubich[48, 49, 50].

Capítulo 3

Pulsos ultracortos

Los pulsos ultracortos son modelados utilizando una frecuencia portadora modulada por una envolvente temporal. Se acostumbra agrupar las características dependientes de la oscilación rápida dentro de la función de fase, mientras que las características que varían lentamente son agrupadas en la amplitud compleja [51]. La representación de una onda usando variables complejas en su forma polar esta dada por

$$E(A, \Phi) = A \exp(i\Phi) \quad (3.1)$$

Donde A es la amplitud y Φ es la fase, ambas funciones tienen valores reales. En el caso de una onda plana, la fase es una función lineal $\Phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$, donde ω es la frecuencia angular, t representa el tiempo, \vec{k} es el vector de onda y \vec{r} representa su dirección. Una onda plana es descrita como

$$E(\vec{r}, t) = A(t) \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right) \quad (3.2)$$

Los láseres pulsados de Nd:YAG frecuentemente tienen una envolvente Gaussiana, mientras que los láseres Ti:Sa tienen un perfil que se asemeja más a una curva secante hiperbólica[51]. A continuación da un breve descripción de estos dos tipos de envolvente, una descripción más amplia se puede encontrar en [51]

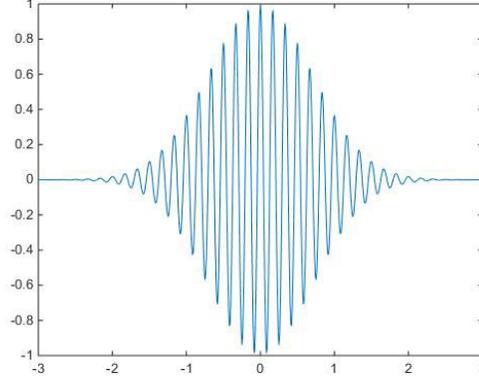


Figura 3.1: Pulso Gaussiano sin chirp

3.1. Envolvente Gaussiana

Una envolvente Gaussiana tiene la forma $A(t) = \exp(-\Upsilon^2 t^2)$, donde $\Upsilon = 1/\tau_G^2$. Así la ecuación 3.2 se reduce a

$$E(t) = A_0 \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau_G}\right)^2\right) \exp(i\omega_l t) \quad (3.3)$$

En la cual, ω_l es una frecuencia constante, La figura 3.1 muestra un pulso Gaussiano, la intensidad de un pulso Gaussiano sin chirp esta definida como:

$$I(t) = A_0^2 \exp\left(-\frac{2t^2}{\tau_G^2}\right) \quad (3.4)$$

La anchura a media altura en el dominio del tiempo (FWHM por sus siglas en inglés) viene dada por

$$\Delta t_{FWHM} = \sqrt{2 \log(2)} \tau_G \cong 1.17741 \tau_G \quad (3.5)$$

3.1.1. Pulso Gaussiano con chirp

Ahora se considera un pulso Gaussiano con una fase cuadrática

$$\Phi(t) = \omega_l t - \frac{1}{2} \frac{a}{\tau_G^2} t^2 \quad (3.6)$$

Con una frecuencia instantánea dada por

$$\omega(t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \omega_l - \frac{a}{\tau_G^2}t \quad (3.7)$$

La frecuencia es dependiente del tiempo, por lo que se dice que el pulso tiene ‘chirp’, donde a es el factor de chirp. La figura 3.4 muestra un pulso Gaussiano con chirp, a es positiva para un chirp hacia abajo (la frecuencia disminuye en el tiempo) y negativa para un chirp hacia arriba (la frecuencia aumenta en el tiempo). El campo eléctrico para un pulso chirp en el tiempo viene dado por

$$E(t) = A_0 \exp \left[- (1 + ia) \frac{t^2}{\tau_G^2} + i\omega_l t \right] \quad (3.8)$$

La transformada de Fourier es

$$\tilde{E}(t) = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \frac{\tau_G}{\sqrt{(1+a^2)}} \exp \left[i\Phi - \frac{\omega^2 \tau_G^2}{4(1+a^2)} \right] \quad (3.9)$$

3.2. Envolverte secante hiperbólica

El campo eléctrico modulado con una envolvente secante hiperbólica esta definido por:

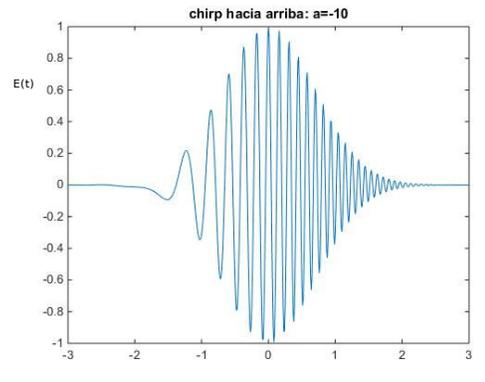
$$E(t) = \operatorname{sech} \left(\frac{t}{\tau_s} \right) e^{i\omega_0 t} \quad (3.10)$$

3.2.1. Pulso secante con chirp

Un pulso de tipo secante con chirp esta definido como:

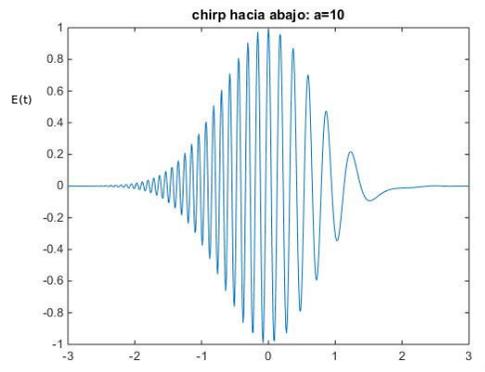
$$E(t) = \operatorname{sech} \left(\frac{t}{\tau_s} \right) \exp \left(i \left(\omega_0 t + \frac{at^2}{\tau_s^2} \right) \right) \quad (3.11)$$

Un pulso secante con varios valores chir es mostrado en la figura 3.5.



(a)

Figura 3.2: chirp $a = -10$



(a)

Figura 3.3: chirp $a = 10$

Figura 3.4: Pulsos chirp Gaussianos.

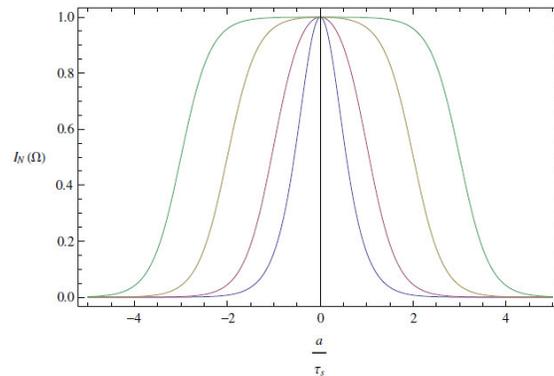


Figura 3.5: Diferentes perfiles en función del parámetro chirp $a:0,1,2,3$ para $I(\omega) = |E(\omega)|^2$

Capítulo 4

Casos de Estudio

En este capítulo presentamos los resultados de nuestra investigación sobre la interacción de las ondas electromagnéticas con medios homogéneos. Se presentan los resultados del modelo fraccionario de Drude, el modelo fraccionario de Lorentz y finalmente los avances que se obtuvieron en el modelado de pulsos ultracortos fraccionarios. Lo anterior se hace usando la derivada fraccionaria de Caputo.

4.1. Modelo de Drude fraccionario

La propagación de ondas electromagnéticas en materiales es determinada por sus parámetros eléctricos, en el caso de los dieléctricos el parámetro más representativo es la permitividad compleja [52]. En esta sección estudiaremos las propiedades ópticas del modelo de Drude dentro del marco del cálculo fraccionario. El modelo de gas de electrones libres en metales fue establecido en 1900 por Drude [53, 40]. A pesar de sus suposiciones simplificadas, el modelo de Drude explica la conductividad eléctrica independiente de alta frecuencia en un rango de frecuencias que abarca desde 0 Hz (corriente directa ó CD) a $\sim 10^{10}$ Hz (microondas) [54]. En el modelo de Drude, los electrones oscilan en respuesta al campo electromagnético aplicado, y su movimiento se amortigua a través de colisiones que ocurren con una frecuencia de colisión característica $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$, τ se conoce como el tiempo de relajación del gas de electrones libres, generalmente es del orden de 10^{-14} s a temperatura ambiente,

correspondiente a $\omega_0 = 100$ THz. El modelo de Drude establece que los electrones oscilan en respuesta a la aplicación de un campo electromagnético, la ecuación de movimiento para los electrones sujetos a un campo eléctrico externo \vec{E} es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + m\omega_0\vec{v} = -e\vec{E}(t) \quad (4.1)$$

Al lado izquierdo en la ecuación 4.1, el primer término expresa la aceleración de las cargas inducidas por el campo eléctrico \vec{E} , el segundo describe el factor de amortiguación debido a la dispersión de electrones. En el lado derecho de la ecuación tenemos el término de conducción, es decir, la fuerza que depende del campo eléctrico \vec{E} que actúa sobre cada electrón con masa m y carga e , y \vec{v} su velocidad promedio.

En [55], se proporciona una forma sistemática para construir ecuaciones diferenciales fraccionarias manteniendo las unidades físicas del sistema. Para pasar de la derivada ordinaria a la fraccionaria, hacemos el siguiente cambio de operador

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \omega_0^{1-\gamma} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \quad 0 < \gamma \leq 1 \quad (4.2)$$

donde ω_0 se mide en s^{-1} , reemplazando esta expresión en la ecuación 4.1 se obtiene la correspondiente ecuación diferencial fraccionaria de orden γ ,

$$\frac{d^\gamma \vec{v}}{dt^\gamma} + \omega_0^\gamma \vec{v} = -\frac{e\omega_0^{\gamma-1}}{m} \vec{E}(t) \quad 0 < \gamma \leq 1 \quad (4.3)$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación 4.3 resulta

$$\vec{v}(\omega; \gamma) = -\frac{e}{m\omega_0[1 + (-i\frac{\omega}{\omega_0})^\gamma]} \vec{E}(\omega) \quad (4.4)$$

Si consideramos un conjunto de estas cargas con densidad N , la densidad de corriente máxima es $\vec{j} = -eN\vec{v}$, entonces tenemos

$$\vec{j} = -Ne\vec{v} = \frac{e^2N}{m\omega_0[1 + (-i\frac{\omega}{\omega_0})^\gamma]} \vec{E}(\omega) \quad (4.5)$$

Debido a que estamos considerando medios lineales, la relación lineal $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ se mantiene. A partir de esta relación se identifica la conductividad eléctrica compleja fraccionaria de Drude

$$\sigma(\omega; \gamma) = \sigma_1 + i\sigma_2 = \frac{\epsilon_0\omega_p^2}{\omega_0[1 + (-i\frac{\omega}{\omega_0})^\gamma]} \quad (4.6)$$

donde $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0m}$ es la frecuencia de plasma de la nube de gas de electrones y ϵ_0 es la permitividad del vacío. En CD ($\omega = 0$) la conductividad es $\sigma_{dc} = Ne^2/m\omega_0$. La conductividad eléctrica fraccionaria compleja $\sigma(\omega; \gamma)$ depende de la frecuencia ω y del orden de la ecuación diferencial fraccionaria γ .

La dependencia de un orden no entero de la conductividad eléctrica se ha probado en [56],[57], para frecuencias muy altas utilizando técnicas ultrarrápidas de THz en opto electrónica. La expresión de Cole-Davidson utilizada en [56, 57] difiere de la obtenida en este trabajo (ecuación 4.6). De la ecuación 4.6 se obtienen las partes real e imaginaria de la conductividad eléctrica:

$$\sigma_1(\omega; \gamma) = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega_0} \frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\gamma} + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)} \quad (4.7)$$

$$\sigma_2(\omega; \gamma) = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega_0} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma \sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\gamma} + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)} \quad (4.8)$$

Dada la conductividad eléctrica σ , podemos encontrar la función dieléctrica ϵ usando la relación:

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = 1 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \sigma(\vec{k}, \omega) \quad (4.9)$$

Como es dada en [58], donde \vec{k} es el vector de onda y ω es la frecuencia angular. En la interacción de la luz con los metales, la forma general de la respuesta dieléctrica $\epsilon(\vec{k}, \omega)$ puede simplificarse como el límite de una respuesta local espacial a través de $\epsilon(\vec{k} = 0, \omega) = \epsilon(\omega)$. Esto en general todavía se cumple en frecuencias ultravioleta [58]. En general $\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega)$, $\sigma(\omega) = \sigma_1(\omega) + i\sigma_2(\omega)$ son funciones complejas evaluadas de frecuencia angular ω , relacionadas entre sí por medio de la ecuación 4.9. Las partes real $\epsilon_1(\omega; \gamma)$ e imaginaria $\epsilon_2(\omega; \gamma)$ de la permitividad están dadas por:

$$\epsilon_1(\omega; \gamma) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_0} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma \sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\gamma} + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)} \quad (4.10)$$

$$\epsilon_2(\omega; \gamma) = \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_0} \frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\gamma} + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)} \quad (4.11)$$

En las figuras 4.1, 4.2 se considera $\omega_p = 2.2 \times 10^{15} s^{-1}$ y $\omega_0 = 10 \times 10^{14} s^{-1}$:

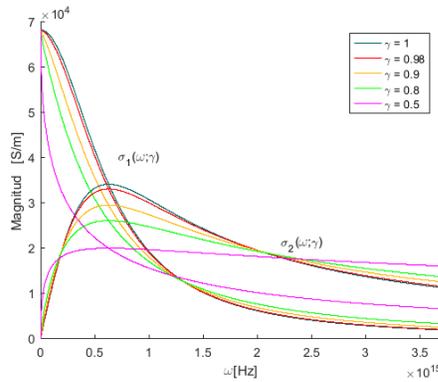


Figura 4.1: Conductividad real e imaginaria para algunos valores de γ .

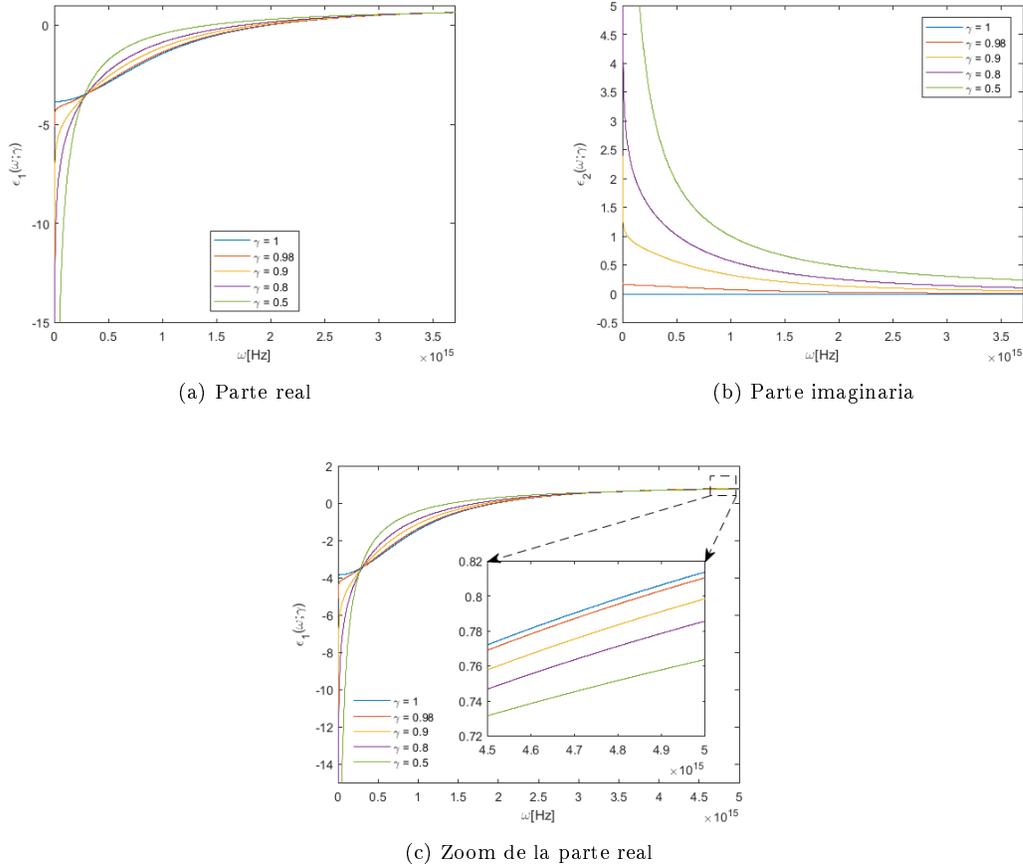


Figura 4.2: Permitividad real e imaginaria

Para el caso de la permitividad compleja, considerando un capacitor ideal en el cual un material dieléctrico con permitividad ϵ es puesto entre las capas . [52]. La gráfica 4.2 corresponde a las ecuaciones 4.10 y 4.11, para algunos valores de γ . Para la función dieléctrica ϵ tenemos que para un menor γ da una mayor magnitud de las parte real ϵ_1 e imaginaria ϵ_2 en el rango de baja frecuencia, y a medida que la frecuencia se hace más grande con respecto a ω_0 tanto ϵ_1 como ϵ_2 tienden a 0.

4.2. Modelo fraccionario de Lorentz

Utilizaremos la derivada fraccionaria de Caputo, como en el caso anterior, esto debido a que la derivada de una constante es cero, y las condiciones iniciales para las ecuaciones diferenciales fraccionarias tienen una interpretación física bien conocida. La respuesta de los materiales dieléctricos a las ondas electromagnéticas se puede explicar utilizando un modelo de oscilador armónico. En dicho modelo [40], se supone que las fuerzas elásticas entre los electrones y los núcleos obedecen la ley de Hooke, de modo que cuando se aplica un campo eléctrico a los materiales dieléctricos, las órbitas de los electrones se distorsionan. La ecuación diferencial de movimiento de este oscilador que interactúa con un campo eléctrico $E(t)$ tiene la forma:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\alpha \frac{d\vec{r}}{dt} + k\vec{r} = -e\vec{E} \quad (4.12)$$

Donde m y e son la masa y la carga de un electrón, respectivamente. El segundo término de esta ecuación es un término de amortiguamiento, proporcional a la velocidad instantánea del electrón, y α es el inverso de la constante de tiempo con la dimensión del inverso del tiempo s^{-1} . El coeficiente α representa la velocidad a la que decaerá la polarización después de eliminar el campo aplicado, su cantidad inversa $\tau = 1/\alpha$ es el tiempo de decaimiento de polarización. La frecuencia de resonancia del oscilador armónico se define como $\omega_0^2 = k/m$, donde k es la constante del resorte de Hooke. Haciendo la siguiente redefinición $\alpha = 2\zeta\omega_0$, donde ζ es un parámetro adimensional, también llamado coeficiente de amortiguamiento, podemos reescribir la ecuación 4.12 de la siguiente manera

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e\vec{E}}{m} \quad (4.13)$$

Cambiando el operador diferencial ordinario por su equivalente fraccionario:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \omega_0^{1-\gamma} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \quad (4.14)$$

Se obtiene la ecuación en forma fraccionaria:

$$\frac{d^{2\gamma} \vec{r}}{dt^{2\gamma}} + 2\zeta\omega_0^\gamma \frac{d^\gamma \vec{r}}{dt^\gamma} + \omega_0^{2\gamma} \vec{r} = -\frac{e\vec{E}}{m\omega_0^{2(1-\gamma)}}, \quad 0 < \gamma \leq 1 \quad (4.15)$$

Suponemos que el campo eléctrico aplicado varía armónicamente en una forma $\vec{E} = \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \}$, como sería el caso de las ondas electromagnéticas, donde ω es la frecuencia angular; este campo está relacionado con la frecuencia de oscilación por $\omega = 2\pi\nu$. El movimiento del electrón seguirá el

campo eléctrico oscilante local, ya que es la fuerza impulsora [59]. Entonces, podemos suponer que la dependencia del tiempo del movimiento de los electrones será similar a la del campo, de modo que $\vec{r} = \text{Re} \{ \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} \}$. Al sustituir estas funciones en la ecuación 4.15, se obtiene una ecuación de la forma:

$$\vec{r}_0(\omega; \gamma) = -\frac{e}{m\omega_0^2} \frac{\vec{E}_0(\omega)}{1 + 2\zeta \left(-i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma + \left(-i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\gamma}} \quad (4.16)$$

Usamos esta ecuación para obtener el vector de polarización fraccionario:

$$\vec{P}(\omega; \gamma) = \frac{Ne^2 \vec{E}_0(\omega)}{m\omega_0^2 \left[1 + 2\zeta \left(-i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma + \left(-i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\gamma} \right]} \quad (4.17)$$

Esta expresión sugiere que la polarización tiene una dependencia de frecuencia significativa en respuesta a un campo eléctrico y también en el orden γ de la ecuación diferencial fraccionaria. La presencia de una parte imaginaria también puede conducir a un cambio de fase en la respuesta bajo ciertas condiciones. Enfatizando que el campo eléctrico \vec{E} , el vector de polarización eléctrica \vec{P} y el desplazamiento dieléctrico \vec{D} en un medio isotrópico y lineal están relacionados por la definición básica de la teoría electromagnética $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}$ se obtiene:

$$\vec{D}(\omega; \gamma) = \left[\varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m\omega_0^2 \left[1 + 2\zeta \left(-i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma + \left(-i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\gamma} \right]} \right] \vec{E}_0(\omega) \quad (4.18)$$

donde ε y ε_0 son la permitividad eléctrica del medio y del espacio libre, respectivamente. Usando la ecuación 4.18 y la relación $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, definimos la permitividad eléctrica fraccionaria del medio:

$$\varepsilon(\omega; \gamma) = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m\omega_0^2 \left[1 + 2\zeta \left(-i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma + \left(-i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\gamma} \right]} \quad 0 < \gamma \leq 1 \quad (4.19)$$

La función dieléctrica compleja fraccionaria, que ahora involucra el parámetro γ , viene dada por $\varepsilon_r(\omega; \gamma) = \frac{\varepsilon(\omega; \gamma)}{\varepsilon_0}$, obteniendo:

$$\varepsilon_r(\omega, \gamma) = 1 + \frac{\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\zeta \left(-i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma + \left(-i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2\gamma}}, \quad 0 < \gamma \leq 1 \quad (4.20)$$

Para separar la parte real e imaginaria de la función dieléctrica compleja $\varepsilon_r = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, se usan las variables $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$ y $\theta = \frac{3\pi\gamma}{2}$; entonces se obtiene:

$$\varepsilon_1(\omega; \gamma) = 1 + \frac{[1 + 2\zeta\eta^\gamma \cos \theta + \eta^{2\gamma} \cos 2\theta] \left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2}{[1 + 2\zeta\eta^\gamma \cos \theta + \eta^{2\gamma} \cos 2\theta]^2 + [2\zeta\eta^\gamma \sin \theta + \eta^{2\gamma} \sin 2\theta]^2} \quad (4.21)$$

$$\varepsilon_2(\omega; \gamma) = 1 + \frac{[1 + 2\zeta\eta^\gamma \cos \theta + \eta^{2\gamma} \cos 2\theta] \left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2}{[1 + 2\zeta\eta^\gamma \cos \theta + \eta^{2\gamma} \cos 2\theta]^2 + [2\zeta\eta^\gamma \sin \theta + \eta^{2\gamma} \sin 2\theta]^2} \quad (4.22)$$

Conociendo la función dieléctrica (ecuación 4.20), podemos determinar otras constantes ópticas, como el índice de refracción $\tilde{n} = n + i\kappa$, reflectancia $R(\omega; \gamma)$ y susceptibilidad eléctrica, usando la relación:

$$\tilde{n}(\omega; \gamma) = \left(n(\omega; \gamma) + i\kappa(\omega; \gamma) \right)^2 = \varepsilon_r(\omega; \gamma) \quad (4.23)$$

donde $n(\omega; \gamma)$ es el índice de refracción fraccionario, κ es el coeficiente de extinción fraccionario, y $\Gamma(\omega; \gamma)$ es el coeficiente de absorción. Reduciendo la ecuación 4.23 se obtiene:

$$n^2(\omega; \gamma) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2} + (\varepsilon_1)^2 \right] \quad (4.24)$$

$$\kappa^2(\omega; \gamma) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2} - (\varepsilon_1)^2 \right] \quad (4.25)$$

$$\Gamma(\omega; \gamma) = \frac{2\omega}{c} \kappa \quad (4.26)$$

$$R(\omega; \gamma) = \frac{\left(n(\omega; \gamma) - 1 \right)^2 + \kappa^2(\omega; \gamma)}{\left(n(\omega; \gamma) + 1 \right)^2 + \kappa^2(\omega; \gamma)} \quad (4.27)$$

Otro parámetro útil, cuando se consideran los efectos en el rango de frecuencia óptica es la susceptibilidad eléctrica compleja $\chi = \chi_1 + i\chi_2$, donde sus partes real e imaginaria están definidas como:

$$\chi_1(\omega; \gamma) = \left(\varepsilon_1 - 1 \right) \left(\frac{\omega_0}{\omega_p} \right)^2 \quad (4.28)$$

$$\chi_2(\omega; \gamma) = \varepsilon_2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_p} \right)^2 \quad (4.29)$$

Se obtienen las gráficas de la función dieléctrica compleja fraccionaria utilizando las ecuaciones 4.21, 4.22:

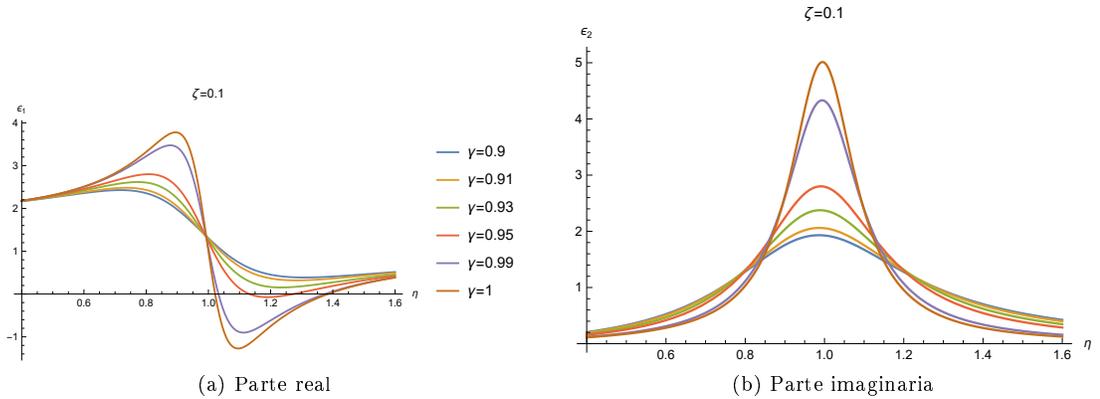


Figura 4.3: Función dieléctrica para $0 < \zeta < 1$, correspondiente al caso subamortiguado para diferentes valores de γ

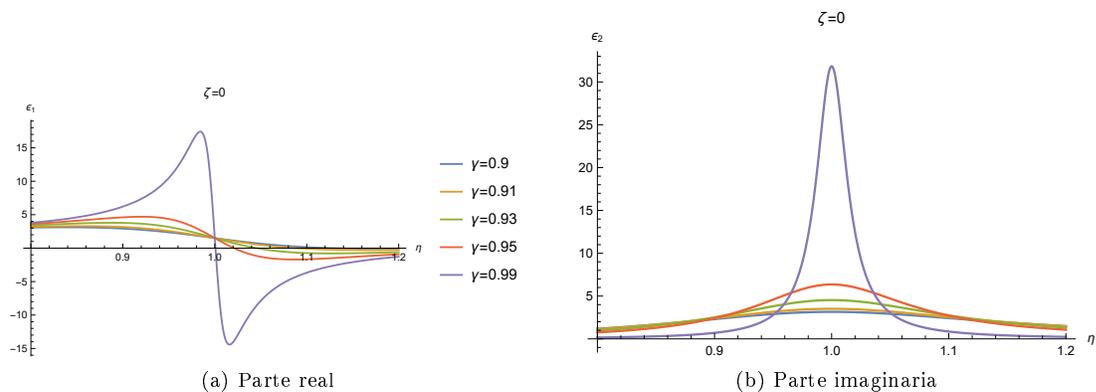


Figura 4.4: Función dieléctrica para $\zeta = 0$, correspondiente al caso no amortiguado para diferentes valores de γ

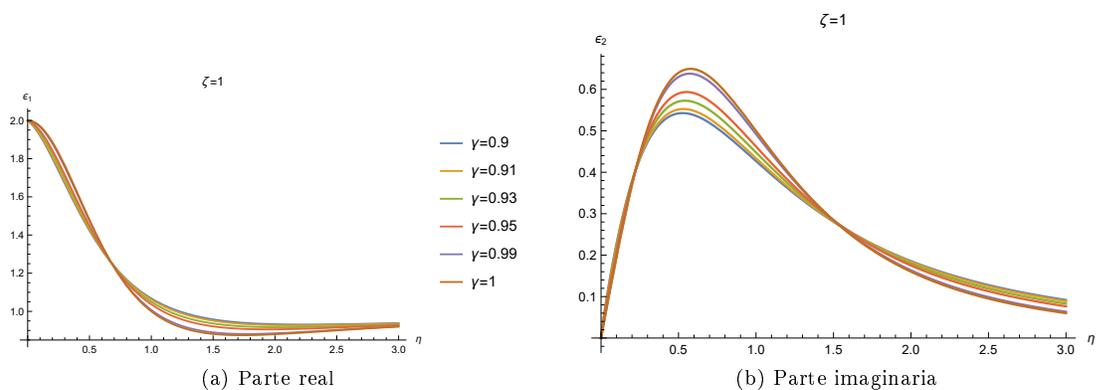


Figura 4.5: Función dieléctrica para $\zeta = 1$, correspondiente al caso críticamente amortiguado para diferentes valores de γ

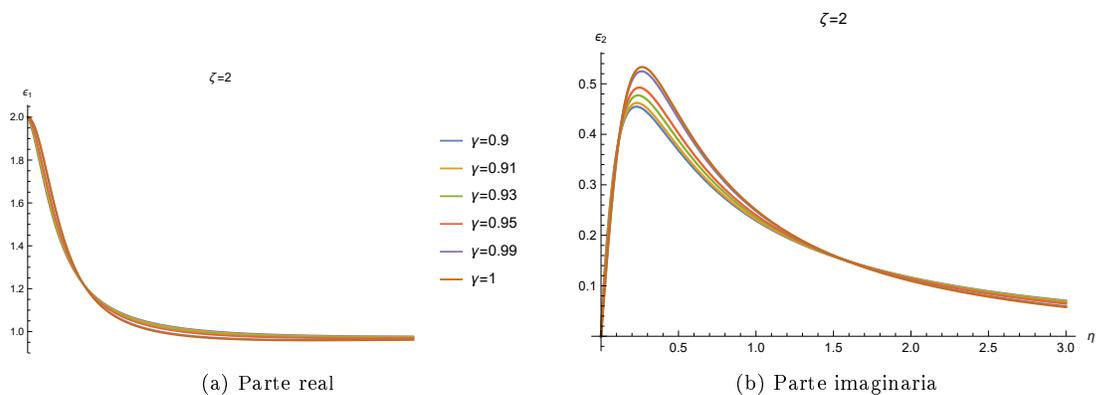


Figura 4.6: Función dieléctrica para $\zeta = 2$, correspondiente al caso sobreamortiguado para diferentes valores de γ

En un sistema masa-resorte como el descrito por la ecuación 4.20 dependiendo del valor del coeficiente de amortiguamiento se tienen soluciones para movimiento subamortiguado, no amortiguado, sobre amortiguado y críticamente amortiguado, mostradas en las figuras 4.3-4.5 respectivamente. Estas funciones dieléctricas (ecuaciones 4.21 y 4.22) dependen de la frecuencia y del orden de la ecuación diferencial fraccionaria $0 < \gamma \leq 1$. De los gráficos podemos ver que para un determinado η podemos describir diferentes escenarios simplemente cambiando el valor de γ , el cual influye en la magnitud y fase de la función dieléctrica. Una vez que se tiene la función dieléctrica, se obtienen otros parámetros ópticos de interés, como el índice de refracción (ecuaciones 4.24 y 4.25), coeficiente de absorción (ecuación 4.26), coeficiente de reflectancia (ecuación 4.27), susceptibilidad eléctrica (ecuaciones 4.28 y 4.29), dado que todas estas constantes están relacionadas con la función dieléctrica por consiguiente estas dependen de la frecuencia del campo aplicado y del orden fraccional de la ecuación diferencial γ .

4.3. Modelo fraccionario para pulsos ultracortos

En esta parte definiremos un modelo fraccionario para pulsos ultracortos utilizando la derivada fraccionaria de Caputo y las ecuaciones de Maxwell. En la notación vectorial y usando las unidades del SI, las ecuaciones de Maxwell, en su forma diferencial, se escriben de la siguiente manera:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (4.30)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) \quad (4.31)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \quad (4.32)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (4.33)$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico medido en [V/m], \vec{H} es el campo magnético en [A/m], \vec{D} es el flujo eléctrico [C/m²], \vec{B} es el flujo magnético [W/m²], \vec{J} es la densidad de corriente [A/m²] y $\rho(\vec{r}, t)$ es la densidad de carga en [C/m³]. Las ecuaciones constitutivas están dadas por las siguientes expresiones

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.34)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (4.35)$$

donde ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y la permeabilidad del vacío, \vec{P} y \vec{M} son las polarizaciones inducidas, eléctrica y magnética. Ahora vamos a transformar las ecuaciones de Maxwell a su forma

fraccionaria temporal manteniendo la homogeneidad de las ecuaciones. Es decir, manteniendo las unidades en los parámetros físicos. Para esto, existe una forma sistemática de pasar de un operador diferencial ordinario a un operador diferencial fraccionario [55], se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1 \quad (4.36)$$

donde σ , en este caso tiene unidades de segundos. Tomando esto en cuenta, las ecuaciones de Maxwell fraccionarias en el tiempo se escriben como

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \vec{B} \quad (4.37)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \vec{D} \quad (4.38)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (4.39)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.40)$$

Este es un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden. Multiplicando la ecuación (4.37), por el operador rotacional, podemos escribir

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} (\nabla \times \vec{B}) \quad (4.41)$$

donde se ha tomado en cuenta la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$. Por otro lado, sustituyendo las expresiones 4.34 y 4.35 en la ecuación 4.38, resulta

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2 \sigma^{1-\gamma}} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \vec{E} + \frac{\mu_0}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \vec{P} + \nabla \times \vec{M} \quad (4.42)$$

Reemplazando 4.42 en la parte derecha de la ecuación 4.41, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} &= -\left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{1-\gamma} \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{2(1-\gamma)} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} \vec{E} - \mu_0 \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{2(1-\gamma)} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} \vec{P} \\ &\quad - \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{1-\gamma} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \nabla \times \vec{M} \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde, debido a las unidades del parámetro $[\sigma] = \text{s}$, hemos escogido $\sigma = \frac{2\pi}{\omega_c}$, donde ω_c es la frecuencia central del pulso. Asumiendo que el medio de propagación es una fibra óptica, se hacen las siguientes consideraciones $\vec{J} = \rho = \vec{M} = 0$, reduciendo la ecuación 4.43 a

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{2(1-\gamma)} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} \vec{E} = \mu_0 \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{2(1-\gamma)} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} \vec{P} \quad (4.44)$$

La polarización inducida es descrita por:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_L(\vec{r}, t) + \vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) \quad (4.45)$$

Reemplazando en la ecuación 4.44 da como resultado:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{2(1-\gamma)} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} \vec{E} = \mu_0 \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{2(1-\gamma)} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} (\vec{P}_L + \vec{P}_{NL}) \quad (4.46)$$

Donde la parte lineal \vec{P}_L y la parte no lineal \vec{P}_{NL} están definidas como:

$$\vec{P}_L(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi^{(1)}(t-t') \cdot E(r, t') dt' \quad (4.47)$$

$$\vec{P}_{NL}(r, t) = \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 \times \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) : \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3) \quad (4.48)$$

Donde $\chi^{(n)}$ es la susceptibilidad de orden n y $:$ es el operador que denota un producto de tensores. Utilizando la aproximación de envolvente que varía lentamente (SVEA por sus siglas en inglés) se tiene que P_{NL} es considerado como una pequeña perturbación a P_L . Esta justificación viene dada por el hecho de que en la práctica los cambios no lineales en el índice de refracción tienen un orden menor a 10^{-6} . Como una segunda consideración se asume que el campo óptico mantiene su polarización mientras viaja a través de la fibra, así que una aproximación escalar es válida. Como tercera consideración se asume que el espectro del pulso, centrado en ω_c , tiene un ancho espectral $\Delta\omega$ tal que $\Delta\omega/\omega_c \ll 1$. Ya que $\omega_c \sim 10^{15} \text{s}^{-1}$, esta consideración es válida para pulsos en el orden de 0.1 ps. En la aproximación SVEA es útil el separar la componente del campo que varía rápidamente al escribirla en la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[\vec{E}(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_c t) + c.c. \right] \quad (4.49)$$

Donde \hat{x} es el vector de polarización unitario, y $E(\vec{r}, t)$ es una función que varía de forma lenta en el tiempo (relativamente al periodo óptico). Las componentes de polarización P_L y P_{NL} son escritas como:

$$\vec{P}_L(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[\vec{P}_L(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_c t) + c.c. \right] \quad (4.50)$$

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_c t) + c.c. \right] \quad (4.51)$$

\vec{P}_L es definido como:

$$\vec{P}_L(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi_{XX}^{(1)}(t-t') \cdot \vec{E}(\vec{r}, t') \exp(i\omega_c \{t-t'\}) dt' \quad (4.52)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^t \tilde{\chi}_{XX}^{(1)}(\omega)(t-t') \cdot \vec{E}(\vec{r}, \omega - \omega_c) \exp(\{\omega - \omega_c\}t) d\omega \quad (4.53)$$

Donde $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ es la transformada de Fourier de $\vec{E}(\vec{r}, t)$, definida como

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) \exp(i\omega t) dt \quad (4.54)$$

y P_{NL} como:

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)}: \vec{E}(\vec{r}, t), \vec{E}(\vec{r}, t), \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (4.55)$$

Usando la ecuación 4.51, $P_{NL}(\vec{r}, t)$ es aproximado mediante:

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (4.56)$$

Para obtener la ecuación de onda para $E(\vec{r}, t)$ es más conveniente trabajar en el espacio de Fourier. Normalmente no es posible debido a que la ecuación 4.44 es no lineal, lo cual es solucionado utilizando una aproximación en la cual ε_{NL} es tratada como una constante durante la derivación de la ecuación [60]. Sustituyendo las ecuaciones 4.49-4.51 en la ecuación, 4.44 obtenemos:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{2(1-\gamma)} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{2(1-\gamma)} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial t^{2\gamma}} (\vec{P}_L + \vec{P}_{NL}) \quad (4.57)$$

Aplicando la transformada de Fourier, resulta

$$\Delta \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_c) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{2(1-\gamma)} (i\omega)^{2\gamma} \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_c) = \mu_0 \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{2(1-\gamma)} (i\omega)^{2\gamma} \tilde{P}(\vec{r}, \omega - \omega_c) \quad (4.58)$$

Usando las aproximaciones $\vec{P}_L = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) E(\vec{r}, t)$, $\vec{P}_{NL} = \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} E(\vec{r}, t)$, obtenemos la siguiente ecuación

$$\Delta \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_c) + k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} \varepsilon(\omega) \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_c) = 0 \quad (4.59)$$

La ecuación 4.59 es la ecuación de Helmholtz fraccionaria con $k_\gamma^2 = \frac{i^2}{c^2} \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{2(1-\gamma)}$ y $\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL}$. En el caso de $\gamma = 1$ se obtiene la conocida expresión de la ecuación de Helmholtz:

$$\Delta \tilde{E}(\omega - \omega_c) + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E}(\omega - \omega_c) = 0 \quad (4.60)$$

Asumiendo una solución con la forma $\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_c) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z)$ donde $\tilde{A}(z, \omega)$ es una función que varía lentamente con el tiempo, y β_0 es el número de onda. Usando la ecuación 4.59:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] \tilde{A} \exp(i\beta_0 z) + F(x, y) \exp(i\beta_0 z) \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} \\ & + F(x, y) \left[-\beta_0^2 \tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z) + 2i\beta_0 \exp(i\beta_0 z) \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} \right] \\ & + k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} \varepsilon(\omega) F(x, y) \tilde{A}(z, \omega) \exp(i\beta_0 z) = 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

Al utilizar la aproximación SVEA se tiene que como $\tilde{A}(z, \omega)$ es una función que varía lentamente con el tiempo, se puede hacer la simplificación $\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} \ll \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z}$, eliminando el segundo término de la ecuación, se tiene:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] \tilde{A} + F \left[-\beta_0^2 \tilde{A}(z, \omega) + 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} \right] + k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} \varepsilon(\omega) F(x, y) \tilde{A}(z, \omega) = 0 \quad (4.62)$$

Multiplicando la identidad por $\frac{1}{F(x,y)\tilde{A}(z,\omega)}$

$$\frac{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]}{F(x,y)} + \frac{\left[-\beta_0^2 \tilde{A}(z,\omega) + 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z}\right]}{\tilde{A}(z,\omega)} + k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} \varepsilon(\omega) = 0 \quad (4.63)$$

Usando separación de variables:

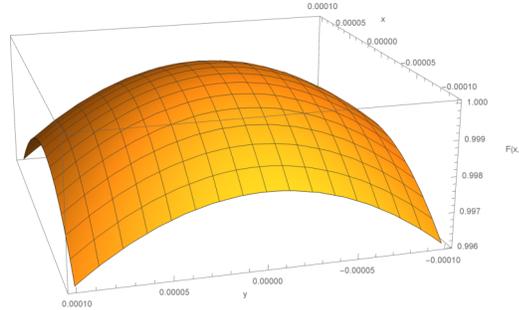
$$\frac{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]}{F(x,y)} + k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} \varepsilon(\omega) = \frac{\left[\beta_0^2 \tilde{A}(z,\omega) - 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z}\right]}{\tilde{A}(z,\omega)} = \tilde{\beta}^2 \quad (4.64)$$

Obteniendo el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left(k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} \varepsilon(\omega) - \tilde{\beta}^2\right) F(x,y) = 0 \quad (4.65)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \left(\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2\right) \tilde{A}(z,\omega) = 0 \quad (4.66)$$

Donde $k_\gamma = \frac{i}{c} \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{(1-\gamma)}$. La ecuación 4.65 puede ser resuelta utilizando teoría de perturbaciones de primer orden [61, 62, 63], el uso del método de perturbaciones es apropiado cuando el problema considerado es muy similar a un problema con una solución exacta, y que el cambio del problema con solución exacta cambia al problema en consideración de forma gradual. El primer paso es reemplazar ε con n^2 y obtener la distribución modal $F(x,y)$ y el número de onda correspondiente $\tilde{\beta}$. El modo fundamental de la fibra es aproximado utilizando una distribución gaussiana $F(x,y) \approx \exp\left[-\frac{(x^2+y^2)}{w}\right]$, como se muestra en la figura 4.7.



(a)

Figura 4.7: $F(x,y)$

Entonces se incluye el efecto de Δn en la ecuación. La constante $\varepsilon(\omega)$ puede ser aproximada por:

$$\varepsilon = (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2\Delta n \quad (4.67)$$

Y Δn es una pequeña perturbación dada por:

$$\Delta n = n_2 |E|^2 + \frac{i\gamma}{2k_\gamma} \quad (4.68)$$

Con:

$$n_2 = \frac{3}{8n} \text{Re} \left(\chi_{xxxx}^{(3)} \right) \quad (4.69)$$

Con $n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \text{Re} [\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)]$ y $\gamma(\omega) = \frac{\omega}{nc} \text{Im} [\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)]$, donde n es el índice de refracción, α es el coeficiente de absorción, χ es la susceptibilidad y n_2 es el coeficiente de índice no lineal. El campo óptico se considera que es linealmente polarizado. En la teoría de perturbaciones de primer orden Δn no afecta la distribución modal, sin embargo el eigenvalor $\tilde{\beta}$ se vuelve:

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta + \Delta\beta \quad (4.70)$$

Donde:

$$\Delta\tilde{\beta} = \frac{\omega n^2(\omega) \int \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n(\omega) |F(x, y)|^2 dx dy}{c^2 \beta(\omega) \int \int_{-\infty}^{\infty} \Delta |F(x, y)| dx dy} \quad (4.71)$$

El campo eléctrico puede ser descrito como:

$$E(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [F(x, y) A(z, t) \exp\{i(\beta_0 z - \omega_c t)\} + c.c.] \quad (4.72)$$

Donde $A(z, t)$ es la envolvente del pulso que varía lentamente con el tiempo. La ecuación 4.66 es reescrita como:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i(\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0) \tilde{A}(z, \omega) \quad (4.73)$$

Con la aproximación $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \approx 2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$. Usando la transformada inversa de Fourier en la ecuación 4.73 para regresar al plano temporal y obtener la ecuación de propagación para $A(z, t)$, con $\beta(\omega)$ definido por una expansión en serie de potencias alrededor de la frecuencia portadora ω_0 :

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0) \beta_1 + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \beta_2 + \frac{1}{6} (\omega - \omega_0)^3 \beta_3 + \dots \quad (4.74)$$

$$\beta_0 \equiv \beta(\omega_0), \beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0} \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.75)$$

Y aplicando la expansión en serie de potencias en forma similar a $\Delta\beta(\omega)$ se obtiene:

$$\Delta\beta(\omega) = \Delta\beta_0 + (\omega - \omega_0) \Delta\beta_1 + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \Delta\beta_2 + \dots \quad (4.76)$$

Substituyendo en la ecuación 4.73:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i(\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0) \tilde{A}(z, \omega) \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i \left((\omega - \omega_0) \beta_1 + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \beta_2 + \Delta\beta_0 \right) \tilde{A}(z, \omega) \quad (4.78)$$

Si el ancho espectral del pulso satisface $\Delta\omega \ll \omega_0$ los términos cúbicos de la ecuación 4.74 son negligibles. La ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i \frac{n_2(\omega)\omega}{cA_{eff}} |A|^2 A \quad (4.79)$$

Donde:

$$\beta = \frac{n(\omega)\omega}{c}, \Delta\beta = \frac{\Delta n(\omega)\omega}{c} \quad (4.80)$$

$$\Delta\beta_0 = \frac{\Delta n(\omega_0)\omega_0}{c} \quad (4.81)$$

$$\Delta n(\omega) = n_2(\omega) |E|^2 + \frac{i\alpha(\omega)}{2k_\gamma} \quad (4.82)$$

Donde α es el coeficiente de atenuación de la fibra con:

$$\alpha(\lambda) = \gamma_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^4 \quad (4.83)$$

Con

$$A_{eff} = \frac{\left(\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy \right)^2}{\int \int_{-\infty}^{\infty} \Delta |F(x, y)|^4 dx dy} \quad (4.84)$$

Si $F(x, y)$ ha sido aproximada por una función gaussiana entonces se tiene que $A_{eff} = \pi w^2$ [61]. La ecuación 4.79 describe la propagación de pulsos ópticos en el rango de picosegundos en fibras de modo único. Esta ecuación se puede transformar utilizando un marco retardado con:

$$T = t - z/v_g \equiv t - \beta_1 z \quad (4.85)$$

Tomando en cuenta la ecuación 4.79:

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i \frac{n_2(\omega)\omega}{cA_{eff}} |A|^2 A \quad (4.86)$$

Usando la regla de la cadena para dos variables, si $x = x(t)$, $y = y(t)$ son diferenciables en t y $z = f(x(t), y(t))$ es diferenciable en $(x(t), y(t))$ entonces $z = f(x(t), y(t))$ es diferenciable en t y:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (4.87)$$

Resultando:

$$\frac{\partial A(z, T)}{\partial z} = \frac{\partial A(z, T)}{\partial z} - \beta_1 \frac{\partial A(z, T)}{\partial T} \quad (4.88)$$

Y:

$$\frac{\partial A(z, t - \beta_1 z)}{\partial t} = \frac{\partial A(z, T)}{\partial T} \quad (4.89)$$

Con lo cual se obtiene la forma simplificada de la ecuación de onda:

$$\frac{\partial A(z, T)}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z, T)}{\partial T^2} + \frac{\alpha}{2} A(z, T) = i \frac{n_2(\omega)\omega}{cA_{eff}} |A(z, T)|^2 A(z, T) \quad (4.90)$$

La amplitud del pulso A se supone normalizada con $|A|^2$ representando la potencia óptica.

$$\Psi = \frac{n_2(\omega)\omega}{cA_{eff}} \quad (4.91)$$

Usando la igualdad 4.91 se obtiene:

$$\frac{\partial A(z, T)}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z, T)}{\partial T^2} + \frac{\alpha}{2} A(z, T) = i\Psi |A(z, T)|^2 A(z, T) \quad (4.92)$$

Dependiendo del ancho inicial T_0 y la potencia pico P_0 del pulso incidente, efectos dispersivos o no lineales pueden dominar a lo largo de la fibra, por lo cual es útil el introducir dos escalas de longitud, las cuales son la longitud de dispersión $L_D = T_0/|\beta_2|$ y la longitud no-lineal $L_{NL} = 1/(\gamma\bar{P}_0)$ donde γ [61] es el parámetro no lineal. Utilizando una escala de tiempo normalizada con la amplitud del pulso T_0 y una amplitud normalizada U definidas como:

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \frac{t - \beta_1 z}{T_0} \quad (4.93)$$

$$A(z, \tau) = \sqrt{P_0} \exp(-\alpha z/2) U(z, \tau) \quad (4.94)$$

Usando las ecuaciones anteriores se determina que $U(z, t)$ satisface:

$$i \frac{dU}{dz} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{d^2U}{d\tau^2} - \frac{\exp(\alpha z)}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (4.95)$$

Dependiendo de las relaciones de magnitud entre L_D, L_{NL} y la longitud de la fibra L se presentaran distintos casos [61]

1. $L \ll L_D$ y $L \ll L_{NL}$ los efectos dispersivo y no lineales no juegan un papel importante durante la propagación del pulso, este mantiene su forma durante la propagación.
2. $L \ll L_{NL}$ y $L \sim L_D$ la evolución del pulso es afectada principalmente por la GVD, los efectos no lineales juegan un papel menor.
3. $L \ll L_D$ y $L \sim L_{NL}$ la evolución del pulso es gobernado por SPM (modulación de fase propia por sus siglas en inglés) que produce cambios en el espectro de pulso.
4. $L \geq L_D$ y $L \geq L_{NL}$ la evolución del pulso es afectada por fenómenos no lineales y la dispersión.

4.3.1. Solución

Para resolver una ecuación con el método de perturbaciones de primer orden se necesita una ecuación en la forma:

$$\nabla^2 \psi(x) + [k^2 - \lambda U(x)] \psi(x) = 0 \quad (4.96)$$

Primero se utilizará la ecuación 4.65 con un valor de $\varepsilon(\omega) = n^2$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left(k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} n^2 - \tilde{\beta}^2 \right) F(x, y) = 0 \quad (4.97)$$

Sustituyendo usando una distribución Gaussiana $F(x, y) \approx \exp\left[-\frac{(x^2+y^2)}{w}\right]$ se obtiene:

$$\frac{2\left(-1 + \frac{2x^2}{w}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w}}}{w} + \frac{2\left(-1 + \frac{2y^2}{w}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w}}}{w} + \left(k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} n^2 - \tilde{\beta}^2 \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w}} = 0 \quad (4.98)$$

La ecuación se reduce a:

$$4x^2 + w^2 k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} n^2 - w^2 \tilde{\beta}^2 - 4w = -4y^2 = \lambda^2 \quad (4.99)$$

Obteniendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x^2 + w^2 k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} n^2 - w^2 \tilde{\beta}^2 - 4w &= \lambda^2 \\ -4y^2 &= \lambda^2 \end{aligned} \quad (4.100)$$

Considerando una fibra óptica con radio a , se imponen como condiciones de frontera $F(0, -a) = F(0, a); G(0)H(-a) = G(0)H(a) = 0$, se resuelve para y , obteniendo:

$$\lambda = 2ia \quad (4.101)$$

y para x :

$$\tilde{\beta}^2 = \left(8a^2 + w^2 k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} n^2 - 4w \right) / w^2 \quad (4.102)$$

Regresando a la ecuación 4.97:

$$\nabla^2 F(x, y) + \left[k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} n^2 - \left(8a^2 + w^2 k_\gamma^2 (i\omega)^{2\gamma} n^2 - 4w \right) / w^2 \right] F(x, y) = 0 \quad (4.103)$$

Donde $\tilde{\beta}^2 = (8a^2 + w^2 k_\gamma^2 n^2 - 4w) / w^2$. Si $\gamma = 1$

$$k_\gamma = i \frac{1}{c} \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{(1-\gamma)} = \frac{i}{c} \quad (4.104)$$

$$\tilde{\beta} = \sqrt{k_1 + k_2 \omega^2}, k_1 = \frac{8a^2 - 4w}{w^2}, k_2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \quad (4.105)$$

Si $k_1 \ll k_2 \omega^2$, entonces

$$\tilde{\beta} \approx \sqrt{\frac{n^2}{c^2} \omega^2}, \tilde{\beta} \approx \frac{n(\omega) \omega}{c} \quad (4.106)$$

Si $\gamma \neq 1$ y $k_1 \ll k_2 \omega^2$, entonces:

$$k_\gamma = -i \frac{1}{c} \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{(1-\gamma)} \quad (4.107)$$

$$\tilde{\beta}(\omega) \approx -i \frac{n(\omega)}{c} \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{(1-\gamma)} (i\omega)^\gamma \quad (4.108)$$

Con $\gamma = 1$

$$\tilde{\beta}(\omega) \approx \frac{n(\omega)\omega}{c} \quad (4.109)$$

El cuál coincide con el valor para la derivada ordinaria. En el caso $\gamma \neq 1$ la aproximación se vuelve $\tilde{\beta}(\omega) \approx -i \frac{n(\omega)}{c} \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{(1-\gamma)} (i\omega)^\gamma$. Evaluando $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ con la aproximación normal:

$$\beta_0(\omega) \approx \frac{n(\omega)\omega}{c} \quad (4.110)$$

$$\beta_1(\omega) \approx \frac{n'(\omega)}{c}\omega + \frac{n(\omega)}{c} \quad (4.111)$$

$$\beta_2(\omega) \approx \frac{n''(\omega)}{c}\omega + 2\frac{n'(\omega)}{c} \quad (4.112)$$

Usando la versión fraccionaria:

$$\beta_0(\omega) \approx -i \frac{n(\omega)}{c} \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{(1-\gamma)} (i\omega)^\gamma \quad (4.113)$$

$$\beta_1(\omega) \approx \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{(1-\gamma)} \left[-i \frac{n'(\omega)}{c} (i\omega)^\gamma + \frac{n(\omega)}{c} \gamma (i\omega)^{\gamma-1} \right] \quad (4.114)$$

$$\beta_2(\omega) \approx \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{(1-\gamma)} \left[-i \frac{n''(\omega)}{c} (i\omega)^\gamma + 2\frac{n'(\omega)}{c} \gamma (i\omega)^{\gamma-1} + \frac{n(\omega)}{c} \gamma(\gamma-1) i (i\omega)^{\gamma-2} \right] \quad (4.115)$$

Considerando $\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}\right\} = i^\gamma (\omega - \omega_0)^\gamma$, $\mathcal{F}\left\{i^\gamma \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}\right\} = (\omega - \omega_0)^\gamma$, usando la aproximación $\tilde{\beta}(\omega) \approx -i \frac{n(\omega)}{c} \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{(1-\gamma)} (i\omega)^\gamma$ y asumiendo que $F(x, y)$ no varía mucho en el ancho de banda del pulso, se procede a utilizar la transformada de Fourier:

$$\tilde{\beta}(\omega) \approx -i \frac{n(\omega)}{c} \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{(1-\gamma)} (i\omega)^\gamma \quad (4.116)$$

$$k_\gamma = -\frac{i}{c} \left(\frac{\omega_c}{2\pi}\right)^{(1-\gamma)} \quad (4.117)$$

Usando la ecuación 4.73 se obtiene:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i(\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0) \tilde{A}(z, \omega) \quad (4.118)$$

A partir de los resultados anteriores se puede ver que $\beta(t)$ incluye términos con potencias fraccionarias ya que su transformada de Fourier $\beta(\omega)$ viene multiplicada por términos $(i\omega)^\gamma$, así que se hace una expansión en series de potencias fraccionarias alrededor de ω_0 [64], definiendo:

$$\beta_0 \equiv \beta(\omega_0), \beta_m = \left(\frac{d^{m\gamma}\beta}{d\omega^{m\gamma}}\right)_{\omega=\omega_0} \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.119)$$

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} (\omega - \omega_0)^\gamma + \beta_2 \frac{1}{\Gamma(2\gamma+1)} (\omega - \omega_0)^{2\gamma} + \beta_3 \frac{1}{\Gamma(3\gamma+1)} (\omega - \omega_0)^{3\gamma} \quad (4.120)$$

Y se obtiene:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i \left(\frac{(\omega - \omega_0)^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \beta_1 + \frac{(\omega - \omega_0)^{2\gamma}}{\Gamma(2\gamma+1)} \beta_2 + \Delta\beta_0 \right) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \quad (4.121)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i \frac{\beta_1}{\Gamma(1+\gamma)} \mathcal{F}^{-1} \left\{ (\omega - \omega_0)^\gamma \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \right\} - i \frac{\beta_2}{\Gamma(1+2\gamma)} \mathcal{F}^{-1} \left\{ (\omega - \omega_0)^{2\gamma} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \right\} = i \mathcal{F}^{-1} \left\{ \Delta \beta_0 \tilde{A}(z, \omega) \right\} \quad (4.122)$$

En este caso el parámetro al obtener la transformada fraccionaria $\sigma^{1-\gamma} \frac{\partial^\gamma A}{\partial t^\gamma}$ se asigna $\omega_0 = 2\pi$ (en este caso ω_0 es el punto alrededor del cual desarrollamos la serie de potencias para β_n), obteniendo un valor unitario y solo se conserva el cambio de unidades para la congruencia, obteniendo como resultado:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i^{1+\gamma} \frac{\beta_1}{\Gamma(1+\gamma)} \frac{\partial^\gamma A}{\partial t^\gamma} - \frac{\beta_2}{\Gamma(1+2\gamma)} i^{1+2\gamma} \frac{\partial^{2\gamma} A}{\partial t^{2\gamma}} + \frac{\alpha}{2} A = \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{(1-\gamma)} \frac{n_2(\omega) (i\omega)^\gamma}{cA_{eff}} |A|^2 A \quad (4.123)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i^{1+\gamma} \frac{\beta_1}{\Gamma(1+\gamma)} \frac{\partial^\gamma A}{\partial t^\gamma} - \frac{\beta_2}{\Gamma(1+2\gamma)} i^{1+2\gamma} \frac{\partial^{2\gamma} A}{\partial t^{2\gamma}} + \frac{\alpha}{2} A = i^\gamma \psi_\gamma(\omega_0) |A|^2 A \quad (4.124)$$

$$\psi_\gamma(\omega) = \left(\frac{\omega_c}{2\pi} \right)^{(1-\gamma)} \frac{n_2(\omega) \omega^\gamma}{cA_{eff}} \quad (4.125)$$

Denotamos como ψ_γ al parámetro no lineal fraccionario, y la longitud no-lineal fraccionaria viene dada por $L_{NL} = 1/(\Psi_\gamma P_0)$. Al intentar obtener una forma simplificada de la ecuación fraccionaria nos encontramos con que al utilizar un tiempo retardado obtenemos:

$$\frac{\partial A(z, T)}{\partial z} = \frac{\partial A(z, T)}{\partial z} - \beta_1 \frac{\partial A(z, T)}{\partial T} \quad (4.126)$$

$$T = t - \beta_1 z, dT^\gamma = dt^\gamma \quad (4.127)$$

$$\frac{\partial A(z, T)}{\partial z} = i^\gamma \Psi_\gamma(\omega_0) |A|^2 A + \frac{\beta_2}{\Gamma(1+2\gamma)} i^{1+2\gamma} \frac{\partial^{2\gamma} A}{\partial T^{2\gamma}} + \frac{\alpha}{2} A + \beta_1 \left(\frac{\partial A(z, T)}{\partial T} + i^{1+\gamma} \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \frac{\partial^\gamma A}{\partial T^\gamma} \right) \quad (4.128)$$

En la cual el término $\frac{\partial A(z, T)}{\partial T} + \frac{i^{1+\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \frac{\partial^\gamma A}{\partial T^\gamma}$ solo desaparece cuando el orden de la derivada es $\gamma = 1$, en consecuencia mientras en el caso ordinario la forma reducida de la ecuación de onda solo es afectada por la dispersión de la velocidad de grupo su equivalente fraccionario es afectada tanto por la velocidad de grupo como su dispersión. Usando la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial T} + \frac{i^{1+\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \frac{\partial^\gamma}{\partial T^\gamma} \right\} = i\omega \tilde{A} + \frac{i^{1+\gamma} (i\omega)^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)} = i\omega + \frac{i^{1+\gamma} (i\omega)^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)} \quad (4.129)$$

Para la solución se utilize el método de Fourier de paso dividido (SSFM por sus siglas en ingles, también llamado como el método de propagación de haz [62] , este método se ha utilizado ampliamente en la solución de problemas de propagación de pulsos en medios dispersivos no lineales [61, 63]) , como paso inicial el efecto lineal y no lineal de la propagación de la onda se dividen:

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = \left(\hat{D} + \hat{N} \right) A(z, t) \quad (4.130)$$

Con:

$$\hat{D}(z, t) = \frac{\beta_2}{\Gamma(1+2\gamma)} i^{1+2\gamma} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial T^{2\gamma}} + \frac{\alpha}{2} + \beta_1 \left(\frac{\partial}{\partial T} + i^{1+\gamma} \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \frac{\partial^\gamma}{\partial T^\gamma} \right) \quad (4.131)$$

$$\hat{N}(z, t) = i^\gamma \Psi_\gamma(\omega_0) |A|^2 \quad (4.132)$$

Donde \hat{D} es un operador diferencial que explica la dispersión y las pérdidas debido a fenómenos lineales y \hat{N} toma en consideración los fenómenos no lineales. Usando el SSFM se puede obtener una aproximación de la propagación el campo óptico sobre una distancia pequeña h considerando que los efectos dispersivos y no lineales actúan de manera independiente. Así la propagación de z a $z+h$ se lleva a cabo en dos pasos, primero la no linealidad actúa sola y $\hat{D} = 0$ en la ecuación 4.130. En el segundo paso, la dispersión actúa sola con $\hat{N} = 0$. Comúnmente el tamaño de la ventana es de 10 a 20 veces el ancho del pulso.

$$A(z+h, t) \approx \exp(h\hat{D}) \exp(h\hat{N}) A(z, t) \quad (4.133)$$

Si \hat{N} es independiente de z . Con:

$$\exp(h\hat{D})B(z, t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp[h\mathcal{F} \{ \hat{D}(z, t) \}] \mathcal{F} \{ B(z, t) \} \right\} \quad (4.134)$$

La precisión del método puede ser mejorada utilizando:

$$A(z+h, t) \approx \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) \exp(h\hat{N}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{D}\right) A(z, t) \quad (4.135)$$

Usando la ecuación 4.130 obtenemos y considerando un intervalo pequeño de tiempo $[t, t + \Delta t]$, asumiendo que $A(z, t)$ es conocida y que \hat{D} es negligible, se obtiene:

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = \hat{N} A(z, T) \quad (4.136)$$

$$\int_z^{z+h} \partial [\ln A(z, t)] = \int_z^{z+h} \hat{N} dz \quad (4.137)$$

$$A(z+h, t) = \exp[h\hat{N}] A(z, t) \quad (4.138)$$

Repitiendo el problema con la condición de que \hat{N} es negligible y usando la transformada de Fourier:

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = \hat{D} A(z, t) \quad (4.139)$$

$$\tilde{A}(z+h, t) = \exp[h\hat{D}(i\omega)] \tilde{A}(z, T) \quad (4.140)$$

La solución en el plano z viene dada por:

$$A(z+h, t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp[h\hat{D}(i\omega)] \mathcal{F} \left(\exp[h\hat{N}] A(z, t) \right) \right\} \quad (4.141)$$

con $\hat{D}(i\omega)$, $\hat{N}(i\omega)$:

$$\hat{D}(i\omega) = \frac{\beta_2}{\Gamma(1+2\gamma)} i^{1+2\gamma} (i\omega)^\gamma + \beta_1 \left(i\omega + \frac{i^{1+\gamma} (i\omega)^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)} \right) + \pi\alpha\delta(\omega) \quad (4.142)$$

$$\hat{N}(i\omega) = i^\gamma \Psi_\gamma(\omega_0) |A|^2 \quad (4.143)$$

A partir de las ecuaciones 4.135, 4.141 se pueden utilizar 2 variantes básicas del SSFM [65, 61].

Caso 1, con error de segundo orden:

Algorithm 1 SSFM

```

1: procedure SSFM( $A_0$ )
2:    $A^{(n)} = A_0$ 
3:    $k = \frac{2\pi}{L} (-N/2 : 1 : N/2 - 1)$ 
4:   for  $n \leftarrow 1$  to  $M$  do
5:      $A^n(z+h, T) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp[h\hat{D}(i\omega)] \mathcal{F} \left( \exp[h\hat{N}] A(z, T) \right) \right\}$ 
6:   end for
7:   return  $A^n$ 
8: end procedure

```

Caso 2, con error de tercer orden:

Algorithm 2 SSFM simétrico

```

1: procedure SSFM( $A_0$ )
2:    $A^{(n)} = A_0$ 
3:    $k = \frac{2\pi}{L} (-N/2 : 1 : N/2 - 1)$ 
4:   for  $n \leftarrow 1$  to  $M$  do
5:      $A^{n+1/2} \leftarrow \exp(h\hat{N}) A^n$ 
6:      $\tilde{A}^{n+1/2} \leftarrow \mathcal{F}(A^{n+1/2})$ 
7:      $\tilde{A}^{n+1} \leftarrow \exp[h\hat{D}(i\omega)] \tilde{A}^{n+1/2}$ 
8:      $A^{n+1} = \mathcal{F}^{-1} \tilde{A}^{n+1}$ 
9:      $A^n = A^{n+1}$ 
10:  end for
11:  return  $A^n$ 
12: end procedure

```

Usando el caso 1 y considerando $z_n = nh$ con $z_0 = 0$

$$A((j+1)h, t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp[h\hat{D}(i\omega)] \mathcal{F} \left(\exp[h\hat{N}] A(jh, t) \right) \right\} \quad (4.144)$$

En el primer caso, con un error de segundo orden, tenemos que el error de truncado local tiene un orden de $O(dt^2)$ [66, 65], mientras que el error global debido a heurística tiene un orden de $O(dt)$ [67], mientras que para el segundo caso estos errores son $O(dt^3)$ citessfm y $O(dt^2)$ [67] respectivamente. Un análisis de la precisión y estabilidad del método para la solución de ecuaciones NLSE ha sido estudiado en [68], debido a la utilización de la FFT en este método su velocidad puede ser hasta 2 ordenes de magnitud más rápido que la mayoría de los métodos de diferencias finitas [61].

Para la NLS fraccionaria se tiene que la relación de dispersión de la parte lineal viene dada por:

$$\omega = k^2 \quad (4.145)$$

Donde ω es la frecuencia y $k \in [-k_{max}, k_{max})$ es el número de onda $k_{max} = \pi/\Delta x$, con una condición de “resonancia” o “coincidencia de fase” dada por:

$$\omega\Delta t = \pi n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.146)$$

El umbral de inestabilidad en este caso es [69]:

$$\Delta t_{umbral} = \frac{\Delta x^2}{\pi} \quad (4.147)$$

Considerando una fibra óptica de sílice para la solución de la NLS fraccionaria se obtienen los valores de los parámetros utilizando las gráficas 4.8,4.9 [61] y 4.10 [70]. Y considerando un pulso

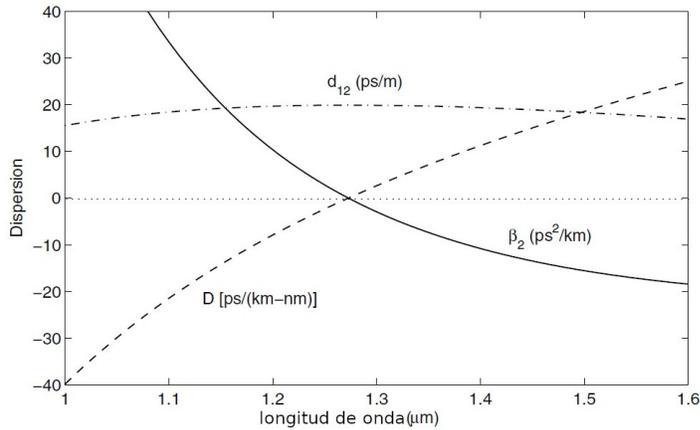


Figura 4.8: Variación de β_2, D, d_{12} con respecto a la longitud de onda para sílice (β_2, D desaparecen en la región de dispersión cero de longitud de onda en la proximidad de los $1.27\mu\text{m}$)

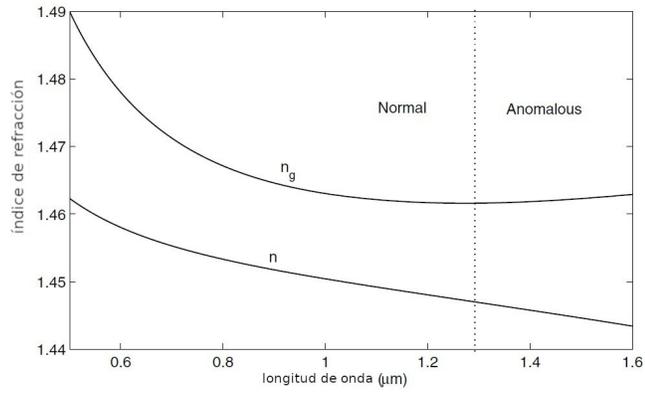


Figura 4.9: Variación el índice de refracción y del índice de grupo con respecto a la frecuencia para sílica $\beta_1 = \frac{n_g}{c}$

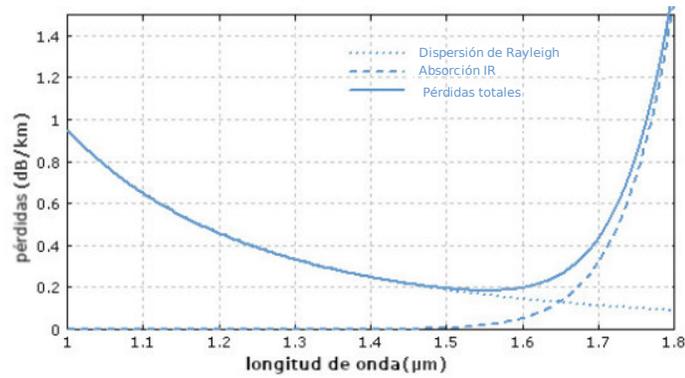
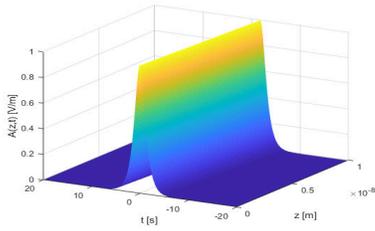


Figura 4.10: Pérdidas intrínsecas de la sílica

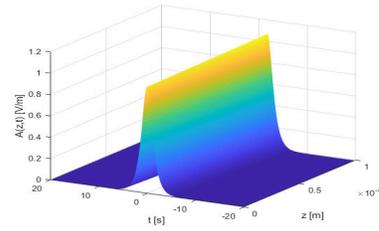
incidente de tipo secante [65] descrito por:

$$u = \exp(i * t) .* \operatorname{sech}(t) \tag{4.148}$$

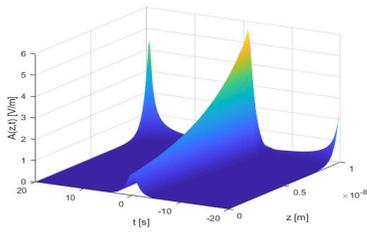
Se obtienen las siguientes gráficas



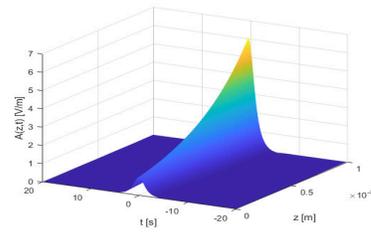
(a) $\gamma = 1$



(b) $\gamma = 0.99$



(c) $\gamma = 0.8$



(d) $\gamma = 0.3$

Figura 4.11: $A(z, t)$ para distintos valores de γ

En la figura 4.11a se puede ver el caso ordinario, Como puede verse en las figuras subsecuentes 4.11b-4.11d al disminuir el orden γ de la NLSE fraccionaria se obtienen en orden de aparición un desfaseamiento, ensanchamiento y ganancia del pulso, esto es debido al valor de β_1 (velocidad de grupo) siendo muy grande en comparación con β_2 (dispersión de velocidad de grupo), por lo cual tenemos que en esta derivación particular de la NLSE fraccionaria es necesario el utilizar valores de $\gamma \approx 1$ para minimizar los efectos de la GVD, la cual puede ser ignorada al trabajar con la conversión directa de la NLSE a la forma fraccionaria por medio del operador fraccionario [55] o usando la forma obtenida anteriormente en [71].

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se realizó un análisis en el dominio de la frecuencia del modelo fraccionario de Lorenz y Drude, así como la ecuación de Helmholtz para el caso de fibras por medio de la derivada fraccionaria de Caputo. En estos casos se obtuvo una generalización de los modelos clásicos y se demuestra que los resultados dependen tanto de la frecuencia como del orden de la derivada, agregando un parámetro de ajuste. De esta manera se analizaron las propiedades de transporte de electrones en materiales por medio del modelo de Drude fraccionario, se generalizó el modelo de Lorentz para obtener la permitividad, índice de refracción y la función dieléctrica. Los resultados se publicaron en [72, 73]. Además, se analizó la ecuación de Helmholtz fraccionaria para el caso de una fibra óptica, obteniéndose la ecuación no lineal fraccionaria de Schroedinger (NLSE). Como trabajo futuro es de interés comprobar los resultados teóricos con los experimentales.

Lista de Publicaciones

1. Leonardo Martínez Jiménez, J. Juan Rosales García, **Abraham Ortega Contreras**, Dumitru Baleanu, *Analysis of Drude model using fractional derivatives without singular kernels*. Open Physics **15**, 627-636, (2017).
2. **A. Ortega**, J.J. Rosales, *Newton's law of cooling with fractional conformable derivative*. Rev. Mex. Fís. **64**, 172-175, (2018).
3. **A. Ortega**, J.J. Rosales, L. Martínez, C.A. Carreño, *Fractional optical properties of Drude*

-
- model. Optik*, **161**, 244-249, (2018).
4. **A. Ortega Contreras**, J.J. Rosales García, L. Martínez Jiménez, J.M. Cruz Duarte, *Analysis of projectile motion in view of conformable derivative*. *Open Physics* **16**, 581-587, (2018).
 5. **A. Ortega**, J.J. Rosales, J.M. Cruz Duarte, M. Guía, *Fractional model of the dielectric dispersion*. *Optik* **180**, 754-759,(2019), doi.org/10.1016/j.ijleo.2018.11.087.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Algunos ejemplos de Integrales fraccionarias

1.- Calcular la integral fraccionaria de $f(t) = 1$:

Usando la definición de Riemann-Liouville, se tiene

$$I^\nu \cdot 1 = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} d\tau = -\frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{(t - \tau)^\nu}{\nu} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}. \quad (\text{A.1})$$

La integral de $\nu = 1/2$ de la función constante $f(t) = 1$.

$$I^{1/2} \cdot 1 = \frac{t^{1/2}}{\Gamma(1/2 + 1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

2.- Calcular la integral fraccionaria de la función $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$.

Usando la definición de la transformada fraccionaria de Riemann-Liouville:

$$I^\nu \cdot t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} \tau^\alpha d\tau \quad 0 < \nu \leq 1 \quad (\text{A.3})$$

Usando el cambio de variables $\tau = \xi t$, $d\tau = t d\xi$:

$$I^\nu \cdot t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^\alpha \int_0^1 \xi^\alpha (t - \xi t)^{\nu-1} t d\xi \quad 0 < \nu \leq 1 \quad (\text{A.4})$$

$$I^\nu \cdot t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 + \nu)} t^{\alpha + \nu} \quad 0 < \nu \leq 1 \quad (\text{A.5})$$

Gracias a esta fórmula y a la linealidad del operador, podemos calcular la integral fraccionaria de cualquier polinomio.

3.- Calcular la integral fraccionaria de la función $f(t) = e^{at}$, $a > 0$. Para esto usamos la serie de Maclaurin

$$I^\nu e^{at} = I^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \frac{k! t^{\nu+k}}{\Gamma(\nu+k+1)} = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(\nu+k+1)} = t^\nu E_{1,\nu+1}(at) \quad (\text{A.6})$$

A.2. Algunos ejemplos de derivadas fraccionarias

1.- Calcular la derivada fraccionaria de $f(t) = 1$:

Usando la definición de Riemann-Liouville se tiene

$$D^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\nu+1-n}} d\tau \quad n-1 < \nu \leq n. \quad (\text{A.7})$$

De la que se obtiene:

$$D^\nu \cdot 1 = \frac{(t-\tau)^{1-(\nu+1-n)}}{1-(\nu+1-n)} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \frac{t^{n-\nu}}{n-\nu} \quad n-1 < \nu \leq n. \quad (\text{A.8})$$

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville para el caso cuando $n = 1$ esta dada por:

$$D^\nu \cdot 1 = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^{1-\nu}}{1-\nu} \right) = \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \quad 0 < \nu \leq 1. \quad (\text{A.9})$$

2.- Calcular la derivada fraccionaria de la función $f(t) = t^\alpha$.

Usando la definición de la derivada fraccionaria de Caputo se obtiene:

$$D^\nu \cdot t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_0^t \frac{(\tau^\alpha)^{(n)}}{(t-\tau)^{\nu+1-n}} d\tau \quad n-1 < \nu \leq n \quad (\text{A.10})$$

Usando el cambio de variable $\tau = \xi t$, $d\tau = t d\xi$:

$$D^\nu \cdot t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-\nu)\Gamma(\alpha+1-n)} \int_0^1 \xi^\alpha (t-\xi t)^{-\nu-1+n} t d\xi \quad n-1 < \nu \leq n \quad (\text{A.11})$$

$$D^\nu \cdot t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - \nu)} t^{\alpha - \nu} \quad (\text{A.12})$$

3.- Calcular la derivada fraccionaria de la función $f(t) = e^{at}$, $a > 0$. Empezando con la definición de la derivada fraccionaria de Caputo se obtiene:

$$D^\nu \cdot e^{at} = \frac{1}{\Gamma(n - \nu)} \int_0^t \frac{(e^{a\tau})^{(n)}}{(t - \tau)^{\nu + 1 - n}} d\tau \quad n - 1 < \nu \leq n \quad (\text{A.13})$$

Usando el cambio de variable $\tau = \xi t$, $d\tau = t d\xi$:

$$D^\nu \cdot e^{at} = \frac{1}{\Gamma(n - \nu)} \alpha^n \frac{1}{\Gamma(k + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \alpha^k (\xi t)^k (t - \xi t)^{-\nu - 1 + n} t d\xi \quad n - 1 < \nu \leq n \quad (\text{A.14})$$

$$D^\nu \cdot e^{at} = \alpha^n t^{n - \nu} E_{1, n - \nu + 1}(\alpha t) \quad n - 1 < \nu \leq n \quad (\text{A.15})$$

Referencias

- [1] Igor Podlubny. Fractional-order systems and fractional-order controllers. *Inst. Exp. Phys., Slovak Acad. Sci.*, 44, March 2003.
- [2] R. Magin, S. Boregowda, and C. Deodhar. Modeling of pulsating peripheral bioheat transfer using fractional calculus and constructal theory. *International Journal of Design & Nature*, 1(1):18–33, jan 2007.
- [3] Faik Meral, Thomas Royston, and Richard Magin. Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15:939–945, April 2010.
- [4] Amita Nandal, Hamurabi Gamboa-Rosales, Arvind Dhaka, Jose M. Celaya-Padilla, Jorge Issac Galvan-Tejada, Carlos Eric Galvan-Tejada, Francisco Javier Martinez-Ruiz, and Cesar Guzman-Valdivia. Image edge detection using fractional calculus with feature and contrast enhancement. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 37(9):3946–3972, jan 2018.
- [5] Hüseyin Ertik, Abdullah Çalık, Hüseyin Şirin, Mürsel Şen, and Buket Öder. Investigation of electrical rc circuit within the framework of fractional calculus. *Revista mexicana de fisica*, 61:58–63, February 2015.
- [6] X Zhou, Osama Abdullah, Dumitru Baleanu, and Richard Magin. Analysis of high b-value diffusion images using fractional order calculus. January 2008.
- [7] Kenneth S. Miller and Bertram Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Wiley and sons,inc, 1993.
- [8] Aleksandar M. Spasic. Theory of electroviscoelasticity. In *Interface Science and Technology*, pages 75–115. Elsevier, 2018.

-
- [9] Slovak Republic) Podlubny Igor (Technical University of Kosice. *Fractional Differential Equations*. Elsevier Science Publishing Co Inc, October 1998.
- [10] Mark Meerschaert. Fractional calculus, anomalous diffusion, and probability. *Fractional Dynamics*, October 2011.
- [11] Maolin Du, Zaihua Wang, and Haiyan Hu. Measuring memory with the order of fractional derivative. *Scientific reports*, 3:3431, December 2013.
- [12] Teodor Atanackovic, Stevan Pilipovic, B. Stankovic, and Dušan Zorica. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes*. January 2014.
- [13] Mario Di Paola, Antonina Pirrotta, and A. Valenza. Viscoelastic behavior through fractional calculus: An easier method for best fitting experimental results. *Mechanics of Materials - MECH MATER*, 43:799–806, December 2011.
- [14] R.L. Bagley and Peter Torvik. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 30, February 1986.
- [15] Abdon Atangana and Rubayyi T Alqahtani. Numerical approximation of the space-time caputo-fabrizio fractional derivative and application to groundwater pollution equation. *Advances in Difference Equations*, 2016(1), June 2016.
- [16] Bingqing Lu, Yong Zhang, Donald Reeves, HongGuang Sun, and Chunmiao Zheng. Application of tempered-stable time fractional-derivative model to upscale subdiffusion for pollutant transport in field-scale discrete fracture networks. *Mathematics*, 6(1):5, January 2018.
- [17] R Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. WORLD SCIENTIFIC, March 2000.
- [18] Won Sang Chung. Fractional newton mechanics with conformable fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 290:150–158, December 2015.
- [19] Teodor M. Atanacković, Stevan Pilipović, Bogoljub Stanković, and Dušan Zorica. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., January 2014.
- [20] J. A. Tenreiro Machado, Isabel S. Jesus, and Alexandra Galhano. A fractional calculus perspective in electromagnetics. In *Volume 6: 5th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, Parts A, B, and C*. ASMEDC, January 2005.
- [21] Aldo Jonathan Munoz-Vazquez, Gerardo Romero-Galvan, Carlos Alberto Anguiano-Gijon, Vicente Parra-Vega, and Anand Sanchez-Orta. Fractional sliding mode control of wind turbines. In *2019 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*. IEEE, August 2019.

-
- [22] Kuo Nan Yu and Chih Kang Liao. Applying novel fractional order incremental conductance algorithm to design and study the maximum power tracking of small wind power systems. *Journal of Applied Research and Technology*, 13(2):238–244, April 2015.
- [23] V. V. Uchaikin. On the fractional derivative model of the transport of cosmic rays in the galaxy. *JETP Letters*, 91(3):105–109, February 2010.
- [24] L. Vázquez, M. Pilar Velasco, José Luis Vázquez-Poletti, Ignácio, Marta Llorente, and David Domínguez Usero. Modeling and simulation of the atmospheric dust dynamic : Fractional calculus and cloud computing. 2017.
- [25] David A. Benson, Mark M. Meerschaert, and Jordan Revielle. Fractional calculus in hydrologic modeling: A numerical perspective. *Advances in Water Resources*, 51:479–497, January 2013.
- [26] C. Ionescu, A. Lopes, D. Copot, J.A.T. Machado, and J.H.T. Bates. The role of fractional calculus in modeling biological phenomena: A review. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 51:141–159, October 2017.
- [27] *Fractional Dynamics and Control*. Springer-Verlag GmbH, 2011.
- [28] Zeev Zalevsky and David Mendlovic. Fractional wiener filter. *Appl. Opt.*, 35(20):3930–3936, July 1996.
- [29] Joseph Shamir and Nir Cohen. Root and power transformations in optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(11):2415–2423, November 1995.
- [30] Szu-Cheng Cheng, Jing-Nuo Wu, Ming-Rung Tsai and Wen-Feng Hsieh. Spontaneous emission near the band edge of a three-dimensional photonic crystal: a fractional calculus approach. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 21(1):015503, 2009.
- [31] Chih-Hsien Huang, Jing-Nuo Wu, Yen-Yin Li, Szu-Cheng Cheng and Wen-Feng Hsieh. Calculation of spontaneous emission from a v-type three-level atom in photonic crystals using fractional calculus. *Phys. Rev. A*, 84:013802, July 2011.
- [32] Jing-Nuo Wu, Chih-Hsien Huang, Szu-Cheng Cheng and Wen-Feng Hsieh. Spontaneous emission from a two-level atom in anisotropic one-band photonic crystals: A fractional calculus approach. *Phys. Rev. A*, 81:023827, February 2010.
- [33] Marc Brunel, Sébastien Coetmellec, Mickael Lelek and Frédéric Louradour. Fractional-order fourier analysis for ultrashort pulse characterization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(6):1641–1646, June 2007.

-
- [34] C. Cuadrado-Laborde and M. V. Andrés. In-fiber all-optical fractional differentiator. *Opt. Lett.*, 34(6):833–835, March 2009.
- [35] Julio C. Gutiérrez-Vega. Fractionalization of optical beams: II. elegant laguerre–gaussian modes. *Opt. Express*, 15(10):6300–6313, May 2007.
- [36] Henryk Kasprzak. Differentiation of a noninteger order and its optical implementation. *Appl. Opt.*, 21(18):3287–3291, September 1982.
- [37] Yong Zhou, JinRong Wang, and Lu Zhang. *Basic Theory of Fractional Differential Equations*. WORLD SCIENTIFIC, August 2016.
- [38] Ivo Petráš and Ján Terpák. Fractional calculus as a simple tool for modeling and analysis of long memory process in industry. *Mathematics*, 7(6):511, June 2019.
- [39] HongGuang Sun, Yong Zhang, Dumitru Baleanu, Wen Chen, and YangQuan Chen. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 64:213–231, November 2018.
- [40] Martin Wegener. *Extreme nonlinear optics : an introduction*. Springer, Berlin New York, 2005.
- [41] N. Mermin Neil W. Ashcroft. *Solid State Physics*. Cengage Learning, Inc, 1976.
- [42] GM Mittag Leffler. Sur la nouvelle fonction $e_\alpha(x)$. *CR Acad. Sci. Paris*, 137:554–558, 1903.
- [43] RP Agarwal. A propos d’une note de m. pierre humbert. *CR Acad. Sci. Paris*, 236(21):2031–2032, 1953.
- [44] Tirumalasetty Chiranjeevi and Raj Biswas. Discrete-time fractional optimal control. *Mathematics*, 5(2):25, April 2017.
- [45] USA) Howell Kenneth B. (The University of Alabama in Huntsville. *Principles of Fourier Analysis*. Taylor and Francis Inc, 2016.
- [46] H.and Kempfle. Definition of physically consistent damping laws with fractional derivatives. *Zamm Journal of applied Mathematics and mechanics*, volume 75, issue 8, pages 623-635, 1995.
- [47] Changpin Li and Fanhai Zeng. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. Chapman and Hall/CRC, 2015.
- [48] Ch. Lubich. Fractional linear multistep methods for abel-volterra integral equations of the second kind. *Mathematics of Computation*, 45(172):463–463, 1985.

-
- [49] Qun Liu, Fanhai Zeng, and Changpin Li. Finite difference method for time-space-fractional schrödinger equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(7):1439–1451, August 2014.
- [50] Ch. Lubich. A stability analysis of convolution quadrature for abel-volterra integral equations. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 6(1):87–101, 1986.
- [51] Igor Peshko. *Laser Pulses: Theory, Technology, and Applications*. BoD–Books on Demand, 2012.
- [52] Gorur Raju. *Dielectrics in electric fields*. Marcel Dekker, New York, 2003.
- [53] P. Drude. *The theory of optics*. Dover Publications, INC. New York, 1982.
- [54] RS Kohlman, Wang YZ Joo J, Pouget JP, Hand Ishiguro T Kaneko, and AJ Epstein. Drude metallic response of polypyrrole. *Physical Review Letters*, 74:773–776, January 1995.
- [55] J.J. Rosales, M. Guía, J.F. Gómez, and V.I. Tkach. Fractional electromagnetic waves. *Disc. Nonl. and Complex*, 4:325–335, 2012.
- [56] Tae-In Jeon and D. Grischkowsky. Nature of conduction in doped silicon. *Phys. Rev. Lett.*, 78:1106–1109, February 1997.
- [57] Tae-In Jeon and D. Grischkowsky. Observation of a cole-davidson type complex conductivity in the limit of very low carrier densities in doped silicon. *Applied Physics Letters*, 72(18):2259–2261, 1998.
- [58] M. Dressel and G. Grüner. *Electrodynamics of solids: optical properties of electrons in matter*. Cambridge University Press, 2002.
- [59] Frederick Wooten. Chapter 3 - absorption and dispersion. In Frederick Wooten, editor, *Optical Properties of Solids*, pages 42 – 84. Academic Press, 1972.
- [60] M Gölles, IM Uzunov, and F Lederer. Break up of n-soliton bound states due to intrapulse raman scattering and third-order dispersion an eigenvalue analysis. *Physics Letters A*, 231(3-4):195–200, 1997.
- [61] Govind Agrawal. Nonlinear fiber optics (fifth edition). In Govind Agrawal, editor, *Nonlinear Fiber Optics (Fifth Edition)*, Optics and Photonics. Academic Press, Boston, fifth edition edition, 2013.
- [62] F. Shimabukuro C. Yeh. *The Essence of Dielectric Waveguides*. Springer US, 2008.

- [63] Enrico Forestieri and Marco Secondini. *Solving the Nonlinear Schrödinger Equation*, pages 3–11. Springer US, Boston, MA, 2005.
- [64] Ming-Fan Li, Ji-Rong Ren, and Tao Zhu. Series expansion in fractional calculus and fractional differential equations, 2009.
- [65] Pablo Suarez. An introduction to the split step fourier method using matlab. September 2015.
- [66] A. Samra and Bedir Yosif. Beam propagation method based on fast fourier transform and finite difference schemes and its application to optical diffraction grating. *J. Mans. Eng MEJ*, 31:67:81, March 2006.
- [67] Richard Palais. *Differential equations, mechanics, and computation*. American Mathematical Society Institute for Advanced Study, Providence, R.I. Princeton, N.J, 2009.
- [68] Hanquan Wang. Numerical studies on the split-step finite difference method for nonlinear schrödinger equations. *Applied Mathematics and Computation*, 170(1):17–35, nov 2005.
- [69] T.I. Lakoba. Study of instability of the fourier split-step method for the massive gross–neveu model. *Journal of Computational Physics*, 402:109100, February 2020.
- [70] W.A. Gambling. The rise and rise of optical fibers. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 6(6):1084–1093, November 2000.
- [71] Lifu Zhang, Chuxin Li, Haizhe Zhong, Changwen Xu, Dajun Lei, Ying Li, and Dianyuan Fan. Propagation dynamics of super-gaussian beams in fractional schrödinger equation: from linear to nonlinear regimes. *Opt. Express*, 24(13):14406–14418, June 2016.
- [72] A. Ortega, J.J. Rosales, L. Martínez, and C.A. Carreño. Fractional optical properties of drude model. *Optik*, 161:244–249, May 2018.
- [73] A. Ortega, J.J. Rosales, J.M. Cruz-Duarte, and M. Guía. Fractional model of the dielectric dispersion. *Optik*, 180:754–759, February 2019.