

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS



TESIS DE MAESTRÍA EN FÍSICA

**Ajuste de parámetros de la materia oscura en las
curvas de rotación de la Vía Láctea.**

Presenta

Atalia Navarro Boullosa

Asesora

Dra. Alma Xóchitl González Morales

Co-asesor

Dr. Luis Arturo Ureña López

Declaratoria.

Yo, Atalia Navarro Boullosa declaro que esta tesis de maestría en Física titulado "Ajuste de parámetros de la materia oscura en las curvas de rotación de la Vía Láctea" es propia al igual que el trabajo presentado en ella.

Los trabajos en los que está basado este trabajo están debidamente citados.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'ATALIA NAVARRO BOULLOSA', with a horizontal line drawn through the middle of the text.

Atalia Navarro Boullosa

Fecha: 26 - julio - 2019.

Resumen

El estudio de las curvas de rotación de las galaxias es importante ya que nos ha permitido inferir la distribución de la materia contenida en ellas, en particular la correspondiente a la materia oscura. Actualmente existen esfuerzos en la comunidad científica para obtener mejores mediciones sobre la distribución de materia que compone a las galaxias y específicamente a la Vía Láctea, ya que a pesar de que podemos observar a simple vista a la galaxia en la noche, nuestra posición en la galaxia solamente nos permite ver al vecindario cercano.

En este trabajo realizamos el ajuste de parámetros de distintos modelos de materia oscura usando observaciones de la Vía Láctea. Usaremos *galKin*, una compilación de las mediciones de la cinemática (curvas de rotación) de nuestra galaxia, tomando radios entre 3 y 20 kpc, y modelamos la distribución de materia en la Vía Láctea a partir de cuatro componentes: el bulbo, el disco estelar, el medio interestelar y el halo de materia oscura. A partir de los perfiles de densidad de cada componente obtenemos su potencial y así su velocidad circular correspondiente. Presentamos los resultados del ajuste de parámetros usando un método de mínimos cuadrados, para dos modelos del perfil de densidad asociado a la materia oscura: Navarro-Frenk-White y Campo escalar.

Agradecimientos

A mi madre Virginia del Navarro Boullosa por apoyarme siempre, brindarme su amor y consejos.

A mis asesores Dra. Alma Xóchitl González Morales y Dr. Luis Ureña por guiarme, explicarme y ayudarme.

A CONACYT por brindarme la beca de maestría que hizo posible parte de mi manutención durante este período.

Índice general

Resumen

Agradecimientos

Introducción	2
1. Potenciales.	4
1.1. Bases.	5
1.2. Sistemas esféricos	6
1.2.1. Modelo de ley de potencias	8
1.3. Sistemas esferoidales	11
1.3.1. Cascarones esferoidales	12
1.3.2. Esferoides	15
1.4. Discos galácticos.	18
1.4.1. Homoides	18
1.4.2. Disco exponencial	20
1.4.3. Discos gruesos	21
2. Vía Láctea	23
2.1. Bulbo	23
2.2. Disco estelar.	25
2.3. Medio interestelar	27
2.4. Halo de materia oscura	30
2.4.1. Perfil de densidad de Navarro-Frenk-White.	31
2.4.2. Perfil de densidad de campo escalar.	32
2.5. Modelo completo.	36
2.5.1. Velocidad circular total.	38
2.5.2. Densidad superficial.	38

2.5.3. Masa total.	39
3. Ajuste de parámetros.	42
3.1. Ajuste para NFW.	44
3.1.1. Un parámetro	44
3.1.2. Ajuste de los parámetros del Halo de Materia Oscura	45
3.2. Ajuste para campo escalar.	48
Conclusiones	52
Bibliografía	54
A. Otros modelos.	59
A.1. Sistemas con simetría esférica.	59
A.1.1. Modelo Plummer	59
A.1.2. Modelo Isocrono	60
A.1.3. Ley de potencias	61
A.2. Sistemas planos	61
A.2.1. Modelo Kuzmin	62
A.2.2. Modelo de Miyamoto y Garai	63
A.2.3. Modelo logarítmico	63
A.3. Discos galácticos.	65
A.3.1. Disco Mestel	65
B. Medio interestelar.	67
C. Análisis en Python	71

Introducción

En los años 1920 Jan Oort midió las velocidades relativas de las estrellas en la Vía Láctea, lo cual le permitió calcular su distancia desde el centro galáctico. Además, sugirió que las discrepancias entre los cúmulos globulares podían deberse a una "absorción oscura" de la materia en la Vía Láctea [1, 2]. En 1937 Fritz Zwicky [3, 4] fue el primero en usar el teorema del virial en el cúmulo de galaxias Coma para inferir la materia no visible, y la denominó *materia oscura*. En 1970 [3, 5] Vera Rubin y Kent Ford notaron que la velocidad máxima de las galaxias se daba a un mayor radio de lo predicho por la teoría, lo cual dio lugar a que había "materia faltante" en las galaxias.

Estas observaciones dieron lugar a una de las incógnitas más importantes de la actualidad: el origen la materia oscura. Lo cual ha llevado a múltiples propuestas que cumplan con las observaciones de la dinámica galáctica, la formación de estructura a grandes escalas del universo, y otras propiedades [3].

Actualmente existen esfuerzos en la comunidad científica para obtener mejores mediciones sobre la distribución de materia que compone a las galaxias y específicamente a la Vía Láctea, ya que a pesar de que podemos observar a simple vista a la galaxia en la noche, nuestra posición en la galaxia solamente nos permite ver al vecindario cercano. Algunas de las misiones que observan u observarán a la Vía Láctea son: Gaia (Global Astrometric Interferometer for Astrophysics) [6], APOGEE (Apache Point Observatory Galactic Evolution Experiment) [7], 4MOST (4-metre Multi-Object Spectroscopic Telescope) [8], VVV (Vista Variables in the Via Lactea) [9] y MOONS (Multi Object Optical and Near-infrared Spectrograph for the VLT) [10].

En este trabajo nos centraremos en el estudio de las curvas de rotación de la Vía Láctea para poder obtener información correspondiente a la materia oscura. Para ello usaremos `galKin` [11], una compilación de las mediciones de la cinemática (curvas de rotación) de nuestra galaxia, tomando radios entre 3 y 20 kpc, y modelamos una distribución de materia en la Vía Láctea a partir de cuatro componentes: el bulbo (la

parte central de la galaxia), el disco estelar, el medio interestelar (el gas de la galaxia que también compone una parte del disco) y el halo de materia oscura.

Por otro lado, nos centraremos en modelar dichas curvas de rotación a partir del perfil de densidad asociado a dos modelos de materia oscura: "Navarro-Frenk-White" [12] obtenido a partir de simulaciones de N-cuerpos de materia oscura fría, el cual será explicado más a detalle en 2.4.1 y un modelo llamado "campo escalar" ya que se modela a una partícula conocida como axión [13], dicho modelo será explicado en 2.4.2.

Finalmente, contrastamos los modelos mencionados con los datos obtenidos para la Vía Láctea realizando un ajuste de parámetros de los perfiles de densidad del halo de materia oscura y el bulbo, a partir del método de mínimos cuadrados.

Este trabajo está estructurado de la siguiente forma: en el capítulo 1 realizamos una revisión de la teoría de potenciales en diferentes geometrías que será necesaria para cada una de las componentes en las que descompondremos a la Vía Láctea. Los resultados obtenidos de este capítulo son usados directamente en el capítulo 2, donde se explica detalladamente la contribución total de las componentes a la Vía Láctea y cada una de ellas: el bulbo, el disco estelar, el medio interestelar y el halo de materia oscura. Finalmente, en el capítulo 3 se reportan los resultados correspondientes del ajuste de los parámetros. ρ_b , ρ_h y a_h para el modelo "Navarro-Frenk-White", y m_a , $r_{ho_{sol}}$, ϵ y r_s para el modelo de "campo escalar".

Capítulo 1

Potenciales.

En este trabajo usaremos la información obtenida de la dinámica de la Vía Láctea para poder obtener información de la materia oscura en esta galaxia y poder discernir entre diferentes modelos. Para ello consideraremos a la Vía Láctea como un conjunto de componentes que podemos modelar por separado: un bulbo central, un disco estelar, un medio interestelar y un halo de materia oscura, dichos componentes serán explicados con detalle en el capítulo 2.

En este capítulo se explicará de manera general el procedimiento a seguir para obtener la información dinámica de una partícula de prueba en presencia de un campo gravitacional. Dicho campo puede ser descrito a través de un potencial, para después ser aplicado a sistemas esféricos en la sección 1.2. Los sistemas esféricos al igual que los esferoidales (sección 1.3) serán de utilidad para modelar tanto el bulbo como al halo de materia oscura de la galaxia.

Finalmente, en la sección 1.4 obtendremos la información dinámica de discos delgados y gruesos, los cuales serán usados para modelar al disco estelar y al medio interestelar.

Esta sección está inspirada en el desarrollo del libro [14]. Otros modelos con distintas simetrías que han sido revisados en la literatura y que no han sido utilizados en este trabajo para la Vía Láctea pueden ser consultados en el apéndice A.

1.1. Bases.

La ley de gravitación de Newton nos dice que la fuerza entre dos masas puntuales m_1 y m_2 , separadas por $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ es proporcional al producto entre las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, es decir,

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}, \quad (1.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal de Newton y $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ es el vector unitario.

Consideremos una partícula de prueba en la posición \vec{x} con masa m_a , la cual es sometida a un campo gravitacional generado por una distribución de masa con densidad $\rho(\vec{x}')$. Al hacer la suma sobre todas las pequeñas contribuciones de cada elemento de volumen d^3x' en x' tenemos

$$\vec{F}(\vec{x}) = m_a\vec{g} = m_aG \int \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \rho(\vec{x}') d^3x', \quad (1.2)$$

donde \vec{g} es el campo gravitacional local. Cuya componente en la dirección radial nos dará la velocidad circular del sistema, esta será una propiedad importante en este trabajo y será explicada más adelante en la sección 1.2.

Se define al potencial gravitacional al que es sometida la partícula de prueba de la siguiente forma

$$\Phi(\vec{x}) \equiv -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3x'. \quad (1.3)$$

Donde al obtener el gradiente del potencial anterior respecto de \vec{x} , $\nabla_{\vec{x}}$, obtenemos que es igual a \vec{g} , lo que nos permite escribir

$$m_a\vec{g} = -m_a\nabla\Phi \longrightarrow \vec{F} = -m_a\nabla\Phi. \quad (1.4)$$

Si igualamos la ecuación anterior con la segunda ley de Newton las masas se cancelarán, indicándonos que el movimiento de un objeto en un potencial gravitacional externo no depende de su masa.

La ecuación de Poisson nos describe el campo debido a una distribución de masa, es decir, establece una relación entre el potencial gravitacional y la densidad; por lo que será de gran importancia a lo largo de este trabajo, está dada por

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.5)$$

Si $\rho = 0$ entonces obtenemos la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad (1.6)$$

la cual da la ecuación diferencial parcial que será de gran utilidad para obtener la solución homogénea al potencial Φ .

1.2. Sistemas esféricos

En esta sección se obtendrá la información dinámica de una partícula de prueba en presencia de una distribución de masa con simetría esférica. Se explorará el modelo de ley de potencias cuyo caso de particular importancia es el modelo Navarro-Frenk-White. Este es usado principalmente para el halo de materia oscura como veremos en la sección 2.4.1.

Se tomarán en cuenta los siguientes teoremas y su respectivo corolario. Estos fueron probados por Newton y son de gran importancia para una distribución de masa con simetría esférica [14]:

Primer teorema de Newton: *Un cuerpo que está dentro de un cascarón esférico de materia no experimenta fuerza gravitacional neta debido al cascarón.*

Segundo Teorema de Newton: *La fuerza gravitacional en un cuerpo que se encuentra fuera de una capa esférica es la misma que si tuviera toda la masa de la capa concentrada en su centro.*

Corolario: *El potencial gravitacional dentro de la capa esférica es constante, ya que $\nabla\Phi = -\vec{g} = 0$.*

El primer teorema de Newton nos dice que para una distribución de masa esférica, la masa fuera del radio de un cuerpo no tiene influencia en el movimiento de ese cuerpo.

Consideremos un cascarón esférico de masa M y radio r , cuyo centro de masa se encuentra en el punto O. Queremos calcular el potencial del sistema en el punto externo $Q(\vec{x}')$, donde se encuentra una partícula de prueba. Denotaremos a la distancia entre O y Q como r' , y a la distancia entre Q y un punto $P(\vec{x})$ sobre la superficie del cascarón como $|\vec{x}' - \vec{x}| = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \theta}$, donde θ es el ángulo formado entre el vector al punto P y el eje coordenado y . Usando la expresión (1.3) para calcular el potencial cuyo diferencial de volumen es $d^3\vec{x}' = r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi$, tenemos

$$\Phi(r) = -G \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{\rho(r')}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \theta}} r'^2 \sin \theta d\theta dr' d\phi. \quad (1.7)$$

Al realizar las integrales respecto de ϕ y θ obtenemos

$$\Phi(r) = -4\pi G \left[\frac{1}{r} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' + \int_r^\infty r' \rho(r') dr' \right], \quad (1.8)$$

donde hemos separado en dos integrales a la integral respecto a r' . La primera integral corresponde a las contribuciones de $r < r'$, mientras que la segunda integral corresponde a las contribuciones de $r > r'$.

La ecuación (1.8) nos permite tener una expresión para una distribución de masa $\rho(r)$ de la siguiente forma

$$M(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr', \quad (1.9)$$

ya que $dM = \rho dV$ y así poder escribir al potencial (1.8) en términos de ésta

$$\Phi(r) = -\frac{G}{r} \int_0^r dM(r) - G \int_r^\infty \frac{dM(r')}{r'}. \quad (1.10)$$

Debido a la geometría esférica la única componente del campo gravitacional que no es cero es la componente radial y está definida por su masa interior en r

$$\vec{g}_r(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{e}_r. \quad (1.11)$$

Una cantidad importante para este trabajo es la velocidad circular, $v_c(r)$, ya que la usaremos para la obtención de la observable a estudiar, la curva de rotación. La velocidad circular es la velocidad de una partícula de prueba en una órbita circular a un radio r ; y la podemos encontrar a partir de la aceleración centrípeta al igualarla a la atracción gravitacional con la ecuación (1.11)

$$\frac{v_c^2}{r} = |\vec{g}| = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \longrightarrow v_c^2 = r |\vec{g}| = r \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{z=0}. \quad (1.12)$$

Al utilizar la ecuación (1.8) en la ecuación (1.12) tenemos

$$v_c^2 = -4\pi Gr \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \right) = 4\pi Gr \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = \frac{GM(r)}{r}. \quad (1.13)$$

Las ecuaciones (1.12) y (1.13) serán de suma importancia a lo largo de este trabajo, al utilizarse para obtener los perfiles de velocidad.

Es importante señalar que la velocidad circular es la magnitud de la velocidad de una partícula en órbita circular a cierto radio, por lo que en la literatura también puede ser encontrada como rapidez circular. En este trabajo llamaremos a esta cantidad velocidad circular.

El sistema más simple que podamos tener es una partícula puntual con masa M , cuyo potencial puede ser calculado fácilmente al usar la ecuación (1.8), donde únicamente son importantes las contribuciones de $r < r'$

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (1.14)$$

Por lo que al usar la ecuación (1.13) obtenemos directamente que su velocidad circular es

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (1.15)$$

Podemos notar que la velocidad circular al cuadrado decae como $1/r$. Dicho decaimiento de la velocidad se esperaba observar en las galaxias a radios mayores a la parte luminosa de la galaxia. Esta curva es conocida como kepleriana, ya que la tercera ley de Kepler [15] nos da la expresión (1.15).

1.2.1. Modelo de ley de potencias

Observaciones fotométricas del Telescopio espacial Hubble dieron a conocer tres características básicas de la distribución de masa de la parte central de la galaxia. Esto es un pico central en el perfil de densidad radial y un posible agujero negro masivo en el centro [16]. Así, Hernquist presentó una generalización de la familia que forman los perfiles de densidad de ley de potencias tal que modelara protuberancias galácticas y núcleos con perfiles de densidad radial, de la siguiente forma [16, 17]

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^\gamma \left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha\right]^{-\left(\frac{\gamma-1}{\alpha}\right)}}, \quad (1.16)$$

donde el parámetro α nos indica la transición de la forma funcional interior a la exterior $-\gamma$, ρ_0 es la densidad central y r_0 es el radio de escala.

Al estar tomando simetría esférica podemos encontrar la masa contenida dentro de un radio r a través de la ecuación (1.9)

$$M(r) = 4\pi\rho_0 \int_0^r \frac{r'^2}{\left(\frac{r'}{r_0}\right)^\gamma \left[1 + \left(\frac{r'}{r_0}\right)^\alpha\right]^{-\left(\frac{\gamma-3}{\alpha}\right)}} dr', \quad (1.17)$$

donde al hacer el cambio de variable $s = r/r_0$ con diferencial $ds = dr/r_0$ tenemos

$$\begin{aligned} M(r) &= 4\pi\rho_0 r_0^3 \int_0^{r/r_0} \frac{s^{2-\gamma}}{(1+s^\alpha)^{-\left(\frac{\gamma-3}{\alpha}\right)}} ds \\ &= \frac{4\pi\rho_0 r_0^3}{3-\gamma} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{3-\gamma} {}_2F_1\left(\frac{3-\gamma}{\alpha}, \frac{3-\gamma}{\alpha}; \frac{\alpha-\gamma+3}{\alpha}; -\left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha\right), \end{aligned} \quad (1.18)$$

con ${}_2F_1$ la función hipergeométrica de Gauss. A partir de la ecuación anterior se puede encontrar fácilmente la velocidad circular cuadrática a través de la ecuación (1.13). Dependiendo de los valores elegidos para los parámetros α y γ se tendrán distintas propiedades.

Nos centraremos en dos modelos de Dehnen, llamados así porque en [18] se presenta una familia de pares potencial-densidad esféricos, los cuales se notó que entraban en dos modelos conocidos en la literatura, los modelos Jaffe y Hernquist, aquellos con $\gamma = (0.6, 2)$ los cuales proveen modelos razonables para los centros de galaxias elípticas [18]; y en un modelo obtenido a través de simulaciones de N-cuerpos de materia oscura fría conocido como Navarro-Frenk-White tomando $\alpha = \gamma = 1$. Este último modelo será de gran importancia para el halo de materia oscura de la Vía Láctea. Para una revisión más detallada de los distintos perfiles de densidad provenientes de la familia dada por (1.16) se puede consultar [16].

Modelo de Jaffe.

A partir de observaciones de las intensidades luminosas de distintas galaxias esféricas se obtuvo una expresión analítica para la distribución tridimensional de la masa [19], conocido como Modelo de Jaffe.

Para obtener la expresión de este modelo tomamos $\gamma = 2$ y $\alpha = 1/2$, por lo que la ecuación (1.18) queda de la siguiente forma

$$M(r) = 4\pi\rho_0r_0^3\frac{r/r_0}{1+r/r_0}. \quad (1.19)$$

La velocidad circular cuadrática de este modelo puede ser encontrada directamente al usar las ecuaciones (1.13) y (1.19)

$$v_c^2(r) = 4\pi G\rho_0r_0^2\frac{1}{1+\frac{r}{r_0}}. \quad (1.20)$$

Puede encontrarse mayor descripción de este modelo en el apéndice A.1.3.

Modelo de Hernquist.

El modelo de Hernquist fue presentado como una alternativa analítica a la ley empírica obtenida en [20] a partir de observaciones microfotométricas de galaxias espirales para bulbos y galaxias elípticas, y al modelo de Jaffe [17].

Al tomar $\gamma = 1$ y $\alpha = 2/3$ obtenemos el modelo de Hernquist, cuya masa contenida dentro de un radio r es obtenida al usar la ecuación (1.18)

$$M(r) = 4\pi\rho_0r_0^3\frac{(r/r_0)^2}{2(r/r_0+1)^2}. \quad (1.21)$$

La velocidad circular cuadrática de este modelo se obtiene de forma directa al usar la ecuación anterior y (1.13)

$$v_c^2(r) = 4\pi G\rho_0 r_0^2 \frac{r_0 r}{2(1 + \frac{r}{r_0})^2}. \quad (1.22)$$

Los detalles de los cálculos de este potencial pueden ser consultados en el apéndice A.1.3.

Modelo de Navarro-Frenk-White.

Por otro lado, los halos de materia oscura también pueden ser modelados al utilizar la ecuación (1.16) al tomar $\alpha \sim 1$ y $\gamma = (1, 1.5)$. Particularmente, si $\alpha = \gamma = 1$ el modelo es conocido como modelo NFW, ya que en 1996 Julio Navarro, Carlos Frenk y Simon White [12] a partir de simulaciones de N-cuerpos obtuvieron que los halos de materia oscura fría (CDM, por sus siglas en inglés) tienen un perfil de densidad universal[12]

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{r_0}\right) \left[1 + \frac{r}{r_0}\right]^2}. \quad (1.23)$$

Al evaluar la ecuación (1.18) para $\alpha = \gamma = 1$ obtenemos que la masa contenida dentro de un radio r para el modelo NFW es

$$M(r) = 4\pi\rho_0 r_0^3 \left(\ln(r/r_0 + 1) - \frac{r/r_0}{r_0 + 1} \right). \quad (1.24)$$

Para encontrar el potencial correspondiente a este modelo a partir de (1.24) podemos utilizar la ecuación (1.10)

$$\Phi(r) = -4\pi G\rho_0 r_0^3 \left[\int_r^\infty dr' \frac{\ln(1 + \frac{r'}{r_0})}{r'^2} - \int_r^\infty dr' \frac{r'/r_0}{r'^2(1 + \frac{r'}{r_0})} \right], \quad (1.25)$$

donde podemos notar que la primera integral puede ser resuelta al integrar por partes y la segunda puede ser resuelta usando fracciones parciales, simplificando obtenemos que el potencial es

$$\Phi(r) = -4\pi G\rho_0 r_0^2 \frac{\ln(1 + \frac{r}{r_0})}{r/r_0}. \quad (1.26)$$

Al utilizar la ecuación (1.13) con la masa contenida dentro de un radio r para este modelo (1.24) obtenemos que la velocidad circular cuadrática es

$$v_c^2(r) = 4\pi G\rho_0 r_0^2 \left[\frac{1}{r} \ln(1 + \frac{r}{r_0}) - \frac{1}{\frac{r}{r_0} + 1} \right]. \quad (1.27)$$

En la gráfica de la figura 1.1 se muestran las velocidades circulares anteriormente obtenidas, donde la línea azul corresponde al modelo de Jaffe (1.20), la naranja al modelo de Hernquist (1.22), la línea verde al modelo NFW (1.27) y la línea roja a una partícula puntual (1.15). Podemos notar que todas las curvas decaen como $1/r^{1/2}$, sobre todo a un mayor radio. La velocidad circular correspondiente a una partícula puntual decrece más rápidamente que los otros modelos y le sigue el modelo de Jaffe. Por otro lado, la velocidad circular del modelo de Hernquist es cero cuando $r \rightarrow 0$ y para el modelo NFW su velocidad circular diverge en el límite $r \rightarrow 0$. A diferencia de la partícula puntual y del modelo de Jaffe, estos dos últimos modelos concuerdan mejor con las observaciones de los perfiles de velocidad de las galaxias discutidas en un inicio.

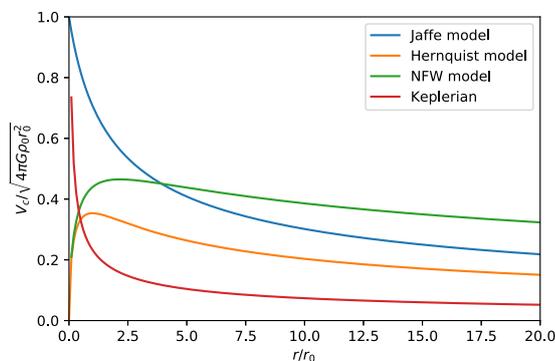


Figura 1.1: Velocidad circular de los modelos Jaffe (1.20), Hernquist (1.22), Navarro-Frenk-White (1.27) y una partícula puntual (1.15). Línea azul, naranja, verde y roja, respectivamente.

1.3. Sistemas esferoidales

Debido a las observaciones fotométricas de la Vía Láctea [21, 22] se ha llegado a modelar al bulbo como un esferoide, lo que nos da lugar a explorar a la dinámica de una partícula de prueba en presencia de este tipo de sistemas. Resolveremos la ecuación de Laplace (1.6) para sistemas con geometría oblata¹ para obtener su potencial, comenzando con cascarones esféricos (subsección 1.3.1) para después generalizar a esferoides (subsección 1.3.2). Después, a partir del potencial obtendremos la densidad superficial para después tener la masa contenida dentro de un radio R .

El estudio de los sistemas esferoidales será útil en la sección 1.4 ya que los discos pue-

¹Un esferoide oblato es una superficie de revolución obtenida girando una elipse sobre su eje menor [23].

den ser vistos como un esferoide en el que su extensión en uno de los ejes tiende a cero.

Los teoremas de Newton mencionados al inicio de la sección anterior pueden ser generalizados a sistemas esferoidales y elipsoidales en los siguientes teoremas, cuya demostración puede ser revisada en [14]:

Teorema del homoide²: *Las superficies isopotenciales exteriores de una homoide delgada son las esferoides que son confocales con el cascarón mismo. Dentro del cascarón el potencial es constante.*

Tercer teorema de Newton: *Una masa que está dentro de un homoide no experimenta una fuerza gravitacional neta del homoide.*

Los teoremas anteriores nos explican cualitativamente al potencial de un cuerpo esferoidal inhomogéneo, ya que cada cascarón del cuerpo hace una contribución al potencial que es constante al interior del cascarón y en él. Debido a que el esferoide está compuesto por homoides, es decir, cascarones delgados. Los cascarones más cercanos al interior del esferoide serán más redondas mientras que las más lejanas serán esferoidales [14].

1.3.1. Cascarones esferoidales

Para poder obtener una expresión para el potencial de un esferoide es necesario realizar el mismo procedimiento que en los sistemas esféricos, es decir, considerar cascarones con geometría oblata y después realizar la suma de todas las contribuciones.

Tomaremos un esferoide oblato con ejes principales a y c con $a \geq c$, tal que esté alineado con el sistema de referencia en el eje z , y éste sea eje menor de la esferoide. Por lo que el ángulo azimutal ϕ corresponderá al de las coordenadas cilíndricas y , R y z transformarán de la siguiente forma

$$R = \Delta \cosh u \sin v; z = \Delta \sinh u \cos v, \quad (1.28)$$

donde $u \geq 0$, $\pi \geq v \geq 0$ y Δ es una constante. u y v son coordenadas que parametrizan al esferoide oblato.

A partir del cambio de coordenadas anterior, se pueden encontrar los factores de escala y sus vectores unitarios para usarlos en la expresión del gradiente generalizado,

²En tres dimensiones un homoide es un cascarón limitado por dos elipsoides concéntricos y similares [24].

hacer el producto punto y encontrar que el Laplaciano en coordenadas oblatas está dado por

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\Delta^2(\sinh^2 u + \cos^2 v)} \left[\frac{1}{\cosh u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\cosh u \frac{\partial\Phi}{\partial u} \right) + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sin v \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right) \right] + \frac{1}{\Delta^2 \cosh^2 u \sin^2 v} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}. \quad (1.29)$$

Utilizaremos la expresión anterior para resolver la ecuación de Laplace (1.6) y obtener el potencial.

Tomaremos en cuenta que el potencial únicamente depende de u , $\Phi(u)$, entonces la ecuación de Laplace en coordenadas oblatas (1.29) se reduce a

$$\frac{d}{du} \left(\cosh u \frac{d\Phi}{du} \right) = 0, \quad (1.30)$$

por lo que podemos tomar la solución trivial $\Phi = \Phi_0 = \text{constante}$ o $\frac{d\Phi}{du} = A \operatorname{sech} u$, con A una constante. Resolviendo la ecuación diferencial de la solución no trivial tenemos

$$\Phi = 2A \tan^{-1} \tanh \frac{u}{2} + B = -A \sin^{-1} \operatorname{sech} u + B, \quad (1.31)$$

donde si u es muy grande entonces $\operatorname{sech} u \rightarrow \frac{\Delta}{r} \rightarrow 0$, con r el radio en coordenadas esféricas. Así

$$\Phi_0 = \Phi \sim -A \operatorname{sech} u + B \rightarrow -\frac{A\Delta}{r} + B. \quad (1.32)$$

Si $B = 0$ y $A = \frac{G\delta M}{\Delta}$ el potencial de la ecuación diferencial tiende a cero en ∞ como el potencial gravitacional de un cascarón de masa δM .

Por lo que el potencial es

$$\Phi = -\frac{G\delta M}{\Delta} \begin{cases} \sin^{-1} \operatorname{sech} u_0 & \text{si } u < u_0 \\ \sin^{-1} \operatorname{sech} u & \text{si } u \geq u_0 \end{cases}, \quad (1.33)$$

siendo un potencial continuo que es solución a la ecuación de Laplace (1.6) excepto en $u = u_0$. Dicho punto corresponde al cascarón con semiejes principales $a \equiv \Delta \cosh u_0$ y $c \equiv \Delta \sinh u_0$.

Por otro lado, la excentricidad está definida como

$$e \equiv \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}, \quad (1.34)$$

por lo que podemos sustituir los semiejes principales mencionados anteriormente en la excentricidad y obtener

$$e = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2 \sinh^2 u_0}{\Delta^2 \cosh^2 u_0}} = \operatorname{sech} u_0, \quad (1.35)$$

donde hemos usado la identidad trigonométrica $1 - \tanh^2 u_0 = \operatorname{sech} u_0$. Con la expresión (1.35) para la excentricidad podemos escribir al potencial (1.33) de la forma

$$\Phi = -\frac{G\delta M}{ae} \begin{cases} \sin^{-1} e & \text{si } u < u_0 \\ \sin^{-1} \operatorname{sech} u & \text{si } u \geq u_0 \end{cases}. \quad (1.36)$$

La densidad superficial es toda la masa por unidad de volumen de un cascarón delgado de densidad uniforme ρ encerrada por dos superficies contenida en un cascarón. Puede ser encontrada usando el teorema de Gauss y la ecuación de Poisson 1.5 con el potencial anterior (1.36)

$$\int d^3\vec{x} \nabla^2 \Phi = \int d^2\vec{S} \cdot \nabla \Phi \rightarrow \int_S d^2\vec{S} \cdot \nabla \Phi = 4\pi G \int \Sigma dS, \quad (1.37)$$

entonces

$$\Sigma(v) = \frac{\nabla \Phi \cdot \hat{e}_u}{4\pi G} = \frac{1}{4\pi G \Delta \sqrt{\sinh^2 u_0 + \cos^2 v}} \left(\frac{d\Phi}{du} \right) \Big|_{u=u_0} \hat{e}_u \cdot \hat{e}_u, \quad (1.38)$$

donde $\hat{e}_u = (\sinh u \cos v \cos \phi \hat{i} + \sinh u \cos v \sin \phi \hat{j} + \cosh u \sin v \hat{k}) / \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$. Como $\nabla \Phi = 0$ en $u = u_0$ y el potencial únicamente depende de u , hemos usado la componente en \hat{e}_u del gradiente del potencial en coordenadas oblatas.

Al usar el cambio de variable $x = \operatorname{sech} u$ para obtener la derivada del potencial Φ respecto de u y evaluando en $u = u_0$ la expresión completa

$$\Sigma(v) = \frac{1}{4\pi G \Delta \sqrt{\sinh^2 u_0 + \cos^2 v}} \frac{G\delta M}{ae} \operatorname{sech} u_0, \quad (1.39)$$

donde sabemos que los ejes principales son $a \equiv \Delta \cosh u_0$ y $c \equiv \Delta \sinh u_0$, y la excentricidad es $e = \operatorname{sech} u_0$, entonces

$$\Sigma(v) = \frac{\delta M}{4\pi a \Delta \sqrt{\sinh^2 u_0 + \cos^2 v}} \frac{\operatorname{sech} u_0}{\operatorname{sech} u_0}. \quad (1.40)$$

Finalmente, usando la identidad trigonométrica $\cosh^2 u_0 - 1 = \sinh^2 u_0$ en la ecuación anterior y posteriormente $\cos^2 v - 1 = -\sin^2 v$ obtenemos que la densidad superficial del cascarón es

$$\Sigma(v) = \frac{\delta M}{4\pi a^2 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 v}}. \quad (1.41)$$

Por otro lado, se puede encontrar una relación de la masa encerrada entre dos superficies esferoides, β y $\beta + \delta\beta$, con ecuación

$$\frac{R^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \beta^2. \quad (1.42)$$

Usando la excentricidad, el volumen de un esferoide oblato, $R = \beta a \sin v$, $z = \beta c \cos v$ y $\delta M = \rho \delta V$; al tomar un vector perpendicular que pasa entre las superficies mencionadas. Dicha derivación puede ser consultada en [14]. Nosotros usaremos la relación de la masa entre las superficies para poder obtener el potencial de un esferoide

$$\delta M = 4\pi\rho a^3 \sqrt{1-e^2} \beta^2 \delta\beta. \quad (1.43)$$

1.3.2. Esferoides

Calcularemos el potencial para un esferoide formado por cascarones similares tal que su densidad es $\rho = \rho(m^2)$ y su ecuación es

$$R^2 + \frac{z^2}{1-e^2} \equiv m^2 = \text{constante}. \quad (1.44)$$

Al comparar la ecuación anterior (1.44) con la ecuación de un homoide delgado (1.42) podemos notar que $m = \beta a$ y la masa de la capa entre m y $m + \delta m$ está dada por la ecuación (1.43) de la forma

$$\delta M = 4\pi\rho(m^2)\sqrt{1-e^2}m^2\delta m, \quad (1.45)$$

Consideremos un miembro de una familia de homoides u_m que pasa por el punto (R_0, z_0) donde queremos calcular el potencial. Si el punto (R_0, z_0) está dentro del homoide m entonces estaremos tomando $a = m$ en el potencial (1.36) con δM (1.45) y la contribución de m al potencial será

$$\delta\Phi_{int} \equiv \delta\Phi(R_0, z_0) = -\frac{G\delta M}{ae} \sin^{-1} e = -4\pi G\rho(m^2)m\delta m \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sin^{-1} e, \quad (1.46)$$

y si (R_0, z_0) se encuentra fuera del homoide m

$$\delta\Phi_{ext} \equiv \delta\Phi(R_0, z_0) = -\frac{G\delta M}{ae} \sin^{-1} \text{sech } u = -4\pi G\rho(m^2)m\delta m \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sin^{-1} \text{sech } u_m. \quad (1.47)$$

El potencial total será la suma de todas las contribuciones, por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{m>m_0} \delta\Phi_{int} &= -2\pi G \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sin^{-1} e \left[\int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) - \int_0^{m_0^2} dm^2 \rho(m^2) \right] \\ &= -2\pi G \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sin^{-1} e [\psi(\infty) - \psi(m_0)], \end{aligned} \quad (1.48)$$

donde hemos hecho

$$\psi(m) \equiv \int_0^{m^2} dm^2 \rho(m^2) \quad (1.49)$$

y m_0^2 es la ecuación correspondiente al homóide (1.44) en el punto (R_0, z_0) .

De manera análoga

$$\sum_{m < m_0} \delta\Phi_{ext} = -2\pi G \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \int_0^{m_0^2} dm^2 \rho(m^2) \sin^{-1} \operatorname{sech} u_m, \quad (1.50)$$

donde al integrar por partes tenemos

$$\sum_{m < m_0} \delta\Phi_{ext} = -2\pi G \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[\psi(m) \sin^{-1} \operatorname{sech} u_m \Big|_{m=0}^{m_0} - \int_{m=0}^{m_0} \frac{\psi(m) d(\operatorname{sech} u_m)}{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2 u_m}} \right]. \quad (1.51)$$

Al tomar al parámetro Δ_m de la familia de esferoides confocales con m igual a una constante y u_m como el homóide m dentro de la familia, podemos escribir

$$m = \Delta_m \cosh u_m; \Delta_m \sinh u_m = \sqrt{1-e^2} m \longrightarrow \Delta_m = m e \quad (1.52)$$

Así podemos obtener las siguientes ecuaciones del esferoide de la siguiente forma

$$\frac{R_0^2}{1 + \sinh^2 u_m} + \frac{z_0^2}{\Delta_m^2 \sinh^2 u_m} = \Delta_m^2 = m^2 e^2 \quad (1.53)$$

donde si $m = 0$ entonces $\sinh u_m \rightarrow \infty$ y si $m = m_0$ entonces $\sinh u_m = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}$. Usando los límites anteriores en la ecuación (1.51) tenemos

$$\sum_{m < m_0} \delta\Phi_{ext} = -2G \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[\psi(m_0) \sin^{-1} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} - \psi(0) \sin^{-1} \infty - \int_{m=0}^{m_0} \frac{\psi_m d(\operatorname{sech} u_m)}{\tanh u_m} \right]. \quad (1.54)$$

Al sumar la contribución interior con la exterior obtenemos que el potencial $\Phi(R_0, z_0)$ es

$$\Phi(R_0, z_0) = -2\pi G \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[\psi(\infty) \sin^{-1} e - \int_{\sinh u_m = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}}^{\infty} \psi(m) \frac{d(\sinh u_m)}{1 + \sinh^2 u_m} \right]. \quad (1.55)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\tau = a_0^2 e^2 \left[\sinh^2 u_m - \left(\frac{1}{e^2} \right) \right] \quad \text{con} \quad d\tau = 2a_0^2 e^2 \sinh u_m d(\sinh u_m), \quad (1.56)$$

y al despejar del cambio de variable propuesto (1.56) $\sinh u_m$, podemos reescribir la ecuación del esferoide en las coordenadas (R_0, z_0) (1.53)

$$\frac{R_0^2}{\tau + a_0^2} + \frac{z_0^2}{\tau + c_0^2} = \frac{m_0}{a_0^2}, \quad (1.57)$$

donde hemos hecho $c_0^2 = a_0^2 \sqrt{1-e^2}$; y al potencial (1.55) de la siguiente forma

$$\Phi(R_0, z_0) = -2\pi G \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[\psi(\infty) \sin^{-1} e - \int_0^{\infty} d\tau \frac{ea_0}{2} \frac{\psi(\infty)}{(\tau + a_0^2) \sqrt{\tau + c_0^2}} \right]. \quad (1.58)$$

La segunda integral nos da las contribuciones al potencial de aquellas homoides en las que (R_0, z_0) es un punto exterior. $\tau = 0$ corresponde a la homoide en (R_0, z_0) y $\tau \rightarrow \infty$ a las homoides más pequeñas.

Podemos evaluar la ecuación (1.49) para homoides con semiejes a_1 y $a_3 = \sqrt{1 - e^2}a_1$, y densidad $\rho = \rho_0$

$$\psi(m) \equiv \int_0^{m^2} dm^2 \rho(m^2) = \rho_0 m^2 \Big|_0^{m^2} = \rho_0 \begin{cases} m^2 & m^2 < a_1^2 \\ a_1^2 & m^2 \geq a_1^2. \end{cases} \quad (1.59)$$

Podemos obtener el campo gravitacional generado por el sistema de la siguiente forma

$$g = -\nabla\Phi = \pi G a_0 \sqrt{1 - e^2} \nabla \left[\int_0^\infty d\tau \frac{\psi(m)}{(\tau + a_0^2) \sqrt{\tau + c_0^2}} \right], \quad (1.60)$$

donde m^2 en la expresión (1.49) está expresado a continuación con su respectivo gradiente

$$m^2 = a_0^2 \left(\frac{R^2}{\tau + a_0^2} \hat{e}_r + \frac{z^2}{\tau + c_0^2} \hat{e}_z \right) \rightarrow \nabla m^2 = 2a_0^2 \left(\frac{R}{\tau + a_0^2} \hat{e}_r + \frac{z}{\tau + c_0^2} \hat{e}_z \right), \quad (1.61)$$

por lo que el campo gravitacional es

$$g = -\pi G a_0 \sqrt{1 - e^2} \int_0^\infty d\tau \frac{\rho(m^2) \nabla m^2}{(\tau + a_0^2) \sqrt{\tau + c_0^2}}. \quad (1.62)$$

A partir de la ecuación anterior (1.62) podemos encontrar la velocidad circular con su componente radial

$$g_R(R, z) = -2\pi G \sqrt{1 - e^2} a_0^3 R \int_0^\infty d\tau \frac{\rho(m^2)}{(\tau + a_0^2)^2 \sqrt{\tau + c_0^2}}. \quad (1.63)$$

En el plano ecuatorial $z = 0$, el potencial nos lleva a que

$$m = \frac{a_0 R}{\sqrt{\tau + a_0^2}} \quad (1.64)$$

de donde podemos despejar a τ y por lo tanto su diferencial es

$$\frac{2m}{R^2 a_0^2} = -\frac{d\tau}{(\tau + a_0^2)^2}. \quad (1.65)$$

Sustituyendo a τ y a su diferencial en la componente radial del campo gravitacional obtenemos que su velocidad circular cuadrática es

$$v_c^2(R) = R g_R(R, 0) = 4\pi G \sqrt{1 - e^2} \int_0^R dm \frac{m^2 \rho(m^2)}{\sqrt{R^2 - m^2 e^2}}. \quad (1.66)$$

1.4. Discos galácticos.

Uno de los componentes importantes de las galaxias espirales como la Vía Láctea es el disco estelar, ya que la mayor parte de la luz emitida por la galaxia proviene de las estrellas que forman el disco. Por ello comenzaremos por calcular el potencial para un esferoide muy plano partiendo de su función de masa para después obtener una expresión para la velocidad circular cuadrática. Finalmente calcularemos el potencial gravitacional de un disco grueso, es decir, con $z \neq 0$ usando el desarrollo para un disco delgado, $z = 0$. Esto para usarse en el modelo de disco exponencial que será usado para la Vía Láctea.

El desarrollo para otro tipo de modelos de discos se encuentra en el apéndice [A.3](#).

1.4.1. Homoides

Consideremos un disco tal que sea un esferoide muy plano, con densidad homogénea ρ , semiejes a y c , con radio axial $q = c/a$. Por lo que para encontrar el potencial seguiremos el formalismo de la sección [1.3.1](#).

La masa del sistema es

$$M(a) = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho qa^3, \quad (1.67)$$

y la densidad superficial es

$$\Sigma(a, R) = 2\rho q\sqrt{a^2 - R^2}. \quad (1.68)$$

Debido a que queremos tomar un homoide infinitamente aplanado tenemos que diferenciar las expresiones anteriores respecto de a para obtener un homoide con grosor δa y tomar a $q \rightarrow 0$ con $\Sigma_0 = 2\rho qa$ como constante

$$\delta M(a) = 2\pi a \Sigma_0 \delta a; \delta \Sigma(a, R) = \frac{\Sigma_0 \delta a}{\sqrt{a^2 - R^2}}. \quad (1.69)$$

Para construir una función de la densidad superficial de un disco infinitamente delgado como una navaja debemos encontrar a la familia de homoides tal que su densidad superficial es $\Sigma(R)$ a todo R , es decir, encontrar a la función $\Sigma_0(a)$ que satisface

$$\Sigma(R) = \sum_{a \geq R} \delta \Sigma(a, R) = \int_R^\infty da \frac{\Sigma_0(a)}{\sqrt{a^2 - R^2}}. \quad (1.70)$$

La integral anterior es una ecuación integral de Abel, lo que nos permite usar lo siguiente para poder obtener a la función deseada $\Sigma_0(a)$. Sea

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{dtg(t)}{(t-x)^\alpha}, \quad (1.71)$$

donde $0 < \alpha < 1$, entonces

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{dx f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &= -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_t^\infty \frac{dx}{(x-t)^{1-\alpha}} \frac{df(x)}{dx}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Así la función $\Sigma_0(a)$ es

$$\Sigma_0(a) = -\frac{2 \sin \frac{\pi}{2}}{\pi} \frac{d}{da} \int_a^\infty dR \frac{R \Sigma(R)}{\sqrt{R^2 - a^2}} = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{da} \int_a^\infty dR \frac{R \Sigma(R)}{\sqrt{R^2 - a^2}}. \quad (1.73)$$

Ahora calcularemos el potencial del disco delgado sumando las contribuciones de los homoides delgados.

Del teorema de Gauss, el campo gravitacional es discontinuo a lo largo de una sábana con densidad superficial finita, pero el potencial es continuo. Por lo tanto el potencial en el plano ecuatorial difiere infinitesimalmente del potencial arriba o abajo del disco. Así, solamente necesitamos calcular el potencial en puntos externos a todos los homoides y tomar el límite $z \rightarrow 0$ para el potencial en el plano.

La ecuación (1.36) es el potencial fuera del homoide de masa M , donde tomaremos $e = 1$ para un homoide completamente plano y la masa (1.67)

$$\Phi(R, z) = -\frac{G\delta M}{ae} \sin^{-1} \operatorname{sech} u \rightarrow \delta\Phi(R, z) = -\frac{2\pi G \Sigma_0 a \delta a}{a} \sin^{-1} \operatorname{sech} u. \quad (1.74)$$

Es importante recordar el cambio a coordenadas oblatas realizado al principio de la sección 1.3.1, al usar la ecuación (1.28) en conjunto con las identidades trigonométricas $1 = \cos^2 v + \sin^2 v$ y $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ podemos obtener una ecuación cuadrática para el $\cosh^2 u$

$$a^2 \cosh^4 u - (a^2 + R^2 + z^2) \cosh^2 u + R^2 = 0, \quad (1.75)$$

cuya soluciones pueden ser obtenidas fácilmente al usar la fórmula general. Tomaremos aquella solución que cumpla con $\cosh^2 u \geq 1$

$$\cosh^2 u = \frac{1}{4a^2} \left(\sqrt{z^2 + (a+R)^2} + \sqrt{z^2 + (a-R)^2} \right)^2. \quad (1.76)$$

Como $\operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u}$, debemos sacar la raíz cuadrada de la expresión anterior (1.76) para poder sustituirla en el potencial (1.74) y así obtener

$$\delta\Phi = -2\pi G \Sigma_0 \delta a \sin^{-1} \left[\frac{2a}{\sqrt{z^2 + (a+R)^2} + \sqrt{z^2 + (a-R)^2}} \right]. \quad (1.77)$$

Con la ecuación anterior y (1.73) tenemos el potencial de un disco axisimétrico con densidad superficial arbitraria

$$\Phi(R, z) = -2\pi G \int_0^\infty da \sin^{-1} \left(\frac{2a}{\sqrt{+} + \sqrt{-}} \right) \left[\frac{-2}{\pi} \frac{d}{da} \int_a^\infty dR' \frac{R' \Sigma(R')}{\sqrt{R'^2 - a^2}} \right], \quad (1.78)$$

donde hemos hecho $\sqrt{\pm} \equiv \sqrt{z^2 + (a \pm R)^2}$. Finalmente

$$\Phi(R, z) = 4G \int_0^\infty da \sin^{-1} \left(\frac{2a}{\sqrt{+} + \sqrt{-}} \right) \frac{d}{da} \int_a^\infty dR' \frac{R' \Sigma(R')}{\sqrt{R'^2 - a^2}}. \quad (1.79)$$

Para obtener el potencial en el plano ecuatorial basta con evaluar el potencial anterior en $z \rightarrow 0$, lo que nos lleva a

$$\Phi(R, 0) = 4G \int_0^\infty da \sin^{-1} \left(\frac{2a}{(a+R) + |a-R|} \right) \frac{d}{da} \int_a^\infty dR' \frac{R' \Sigma(R')}{\sqrt{R'^2 - a^2}} \quad (1.80)$$

donde si $R < a$ el argumento del \sin^{-1} es igual a 1 y a/R de otra forma.

Para poder obtener la velocidad circular en el plano ecuatorial basta con diferenciar respecto de R la ecuación anterior, siendo el argumento del \sin^{-1} el único término que depende de R .

Al hacer el cambio de variable $u = \frac{2a}{(a+R)+|a-R|}$ la derivada es

$$\frac{\partial \sin^{-1} u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial R} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\partial u}{\partial R} = - \frac{2a \left(1 - \frac{a-R}{|a-R|} \right)}{\left((a+R) + |a-R| \right)^2 \sqrt{1 - \frac{4a^2}{\left((a+R) + |a-R| \right)^2}}}. \quad (1.81)$$

Por lo que la velocidad circular al cuadrado para este sistema es

$$v_c^2(R) = R \frac{\partial \Phi}{\partial R} = -4G \int_0^R da \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} \frac{d}{da} \int_a^\infty dR' \frac{R' \Sigma(R')}{\sqrt{R'^2 - a^2}}. \quad (1.82)$$

1.4.2. Disco exponencial

Debido a que muchos de los discos galácticos son aproximados mediante perfiles de densidad exponenciales, probaremos con un perfil de densidad superficial de la forma

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d}. \quad (1.83)$$

El potencial correspondiente a este perfil de densidad puede ser encontrado a través de la ecuación (1.79) donde solamente debemos de sustituir (1.83)

$$\Phi(R, z = 0) = -4G \int_0^R da \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} \frac{d}{da} \int_a^\infty dR' \frac{R \Sigma_0 e^{-R'/R_d}}{\sqrt{R'^2 - a^2}}, \quad (1.84)$$

podemos notar que la integral respecto de R' corresponde a una integral cuya solución es conocida.

$$\int_u^\infty dx \frac{x e^{-\mu x}}{(x^2 - u^2)^{1-\nu}} = \frac{2^{\nu-1/2}(\nu-1)! u^{\nu+1/2}}{\sqrt{\pi} \mu^{\nu-1/2}} K_{\nu-1/2}(u\mu) \quad (1.85)$$

donde la función es válida para $u > 0$, $\text{Re}(\mu)$, $\nu > 0$, en nuestro caso $u = a$, $x = R'$, $\mu = 1/R_d$ y $\nu = 1/2$. Por lo que

$$\int_a^\infty dR' \frac{R' \Sigma_0 e^{-R'/R_d}}{\sqrt{R'^2 - a^2}} = \Sigma_0 a K_1\left(\frac{a}{R_d}\right), \quad (1.86)$$

siendo K_1 una función de Bessel modificada.

Sustituyendo la integral respecto de R' (1.86) en el potencial

$$\Phi(R, 0) = -4G\Sigma_0 \int_0^R da \frac{a K_1\left(\frac{a}{R_d}\right)}{\sqrt{R^2 - a^2}} = -\pi G \Sigma_0 R \left[-I_1\left(\frac{R}{2R_d}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_d}\right) \right], \quad (1.87)$$

donde hemos usado la solución conocida para la integral

$$\int_0^b dy y^{-\nu} (b^2 - y^2)^{\nu-3/2} K_\nu(y) = 2^{\nu-3} \sqrt{\pi} \left(\nu - \frac{3}{2}\right)! b^{2\nu-1} \left[I_{\nu-1}\left(\frac{b}{2}\right) K_\nu\left(\frac{b}{2}\right) - I_\nu\left(\frac{b}{2}\right) K_{\nu-1}\left(\frac{b}{2}\right) \right] \quad (1.88)$$

con $\text{Re}\nu > -1/2$, $\nu = 1$, $y = a/R_d$ y $b = R$ en este caso.

Como se ha realizado en otras secciones, la velocidad circular al cuadrado es obtenida al derivar el potencial del sistema respecto de la coordenada radial, por lo que en este caso al derivar la ecuación (1.87) obtenemos

$$v_c^2(R) = 4\pi G \Sigma_0 R_d \left(\frac{R}{2R_d}\right)^2 \left[I_0\left(\frac{R}{2R_d}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_d}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_d}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_d}\right) \right]. \quad (1.89)$$

1.4.3. Discos gruesos

En el principio de la sección vimos que podemos tomar a un disco galáctico tan delgado como una navaja, sin embargo, esta aproximación podría darnos una dinámica diferente del sistema. A continuación calcularemos el potencial de un disco grueso, siendo una técnica útil principalmente para galaxias con un disco de canto.

Tomaremos a la densidad volumétrica de la forma

$$\rho(R, z) = \Sigma(R)\zeta(z), \quad (1.90)$$

donde la función $\zeta(z)$ está normalizada tal que $\int_{-\infty}^{\infty} dz' \zeta(z') = 1$, así $\Sigma(R)$ es la densidad superficial total y si integramos respecto de z a la densidad, es decir,

$$\int dz \rho(R, z) = \int dz \Sigma(R)\zeta(z), \quad (1.91)$$

obtenemos la densidad superficial de una capa de grosor dz a una distancia z arriba del plano ecuatorial.

Comencemos por tomar el potencial de un disco delgado como una navaja en $z = 0$, por lo que el potencial en (R, z) generado por la capa en z' del plano ecuatorial será

$$d\Phi(R, z) = dz' \Phi_0(R, z - z') \zeta(z'). \quad (1.92)$$

Integrando de ambos lados la ecuación anterior para tener la suma de todas las contribuciones de cada capa del potencial

$$\Phi(R, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \Phi_0(R, z - z') \zeta(z'), \quad (1.93)$$

donde Φ_0 corresponde al potencial de un disco delgado como una navaja.

Por ejemplo, podemos tomar el caso del disco exponencial dado por la densidad superficial (1.83), donde Φ_0 está dado por la ecuación (1.79) con la sustitución $z \rightarrow z - z'$

$$\Phi_0(R, z - z') = 4G \int_0^{\infty} da \sin^{-1} \left(\frac{2a}{\sqrt{+} + \sqrt{-}} \right) \frac{d}{da} \left(\Sigma_0 a K_1 \left(\frac{a}{R_d} \right) \right). \quad (1.94)$$

La derivada respecto de a de la ecuación anterior es

$$\frac{d}{da} \left(\Sigma_0 a K_1 \left(\frac{a}{R_d} \right) \right) = -\Sigma_0 \frac{a}{R_d} K_0 \left(\frac{a}{R_d} \right), \quad (1.95)$$

al sustituir la derivada en Φ_0 con la ecuación (1.93) obtenemos la expresión para el potencial de un disco grueso con densidad superficial exponencial (1.83)

$$\Phi(R, z) = -\frac{4G\Sigma_0}{R_d} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \zeta(z') \int_0^{\infty} da \sin^{-1} \left(\frac{2a}{\sqrt{+} + \sqrt{-}} \right) a K_0 \left(\frac{a}{R_d} \right). \quad (1.96)$$

Capítulo 2

Vía Láctea

A partir de las observaciones del gas de las galaxias y su distribución central se infiere un perfil de densidad, con ello se puede calcular el potencial gravitacional total asociado y así obtener la cinemática de la galaxia la cual es representada a través de las curvas de rotación.

La Vía Láctea puede ser modelada como un conjunto de componentes, por lo que tomaremos los siguientes componentes: un bulbo, un halo de materia oscura, un disco estelar y un disco gaseoso.

En esta sección usaremos los desarrollos del Capítulo 1 para cada una de las componentes de la Vía Láctea, donde se suele tomar como restricción la información fotométrica, particularmente, asumimos que cada componente por la que está formada la galaxia tiene una tasa de masa-luz Υ que es independiente de la posición. Este procedimiento nos permite tener potenciales galácticos concretos y así tener predicciones que pueden ser probadas respecto a la cinemática del gas y las estrellas.

En este trabajo tomaremos dos casos, uno donde la cinemática es dominada por el disco estelar y otro donde es dominada por el halo de materia oscura, a estos casos los denominaremos Modelo I y Modelo II, respectivamente. En la tabla 2.1 se encuentran los parámetros de estos dos modelos que han sido tomados de [14, 25], los cuales serán usados para realizar las gráficas ilustrativas de cada componente.

2.1. Bulbo

El bulbo de la galaxia describe a la nube de estrellas cercanas al centro galáctico. Observaciones fotométricas de estas estrellas han llevado a modelar al bulbo de for-

Parámetro	Modelo I	Modelo II
$\rho_b[\text{M}_\odot\text{kpc}^{-3}]$	0.427×10^9	0.3×10^9
$\rho_h[\text{M}_\odot\text{kpc}^{-3}]$	0.711×10^9	0.266×10^9
a_h [kpc]	3.83	1.9
α_h	-2	1.63
β_h	2.96	2.17
R_d [kpc]	2.0	3.2
$\Sigma_d[\text{M}_\odot\text{kpc}^{-2}]$	1.4287×10^9	4.02×10^8
$\Sigma_g[\text{M}_\odot\text{kpc}^{-2}]$	4.7625×10^8	1.34×10^8

Tabla 2.1: Parámetros libres de los modelos I y II. Se ha calculado el porcentaje correspondiente a la densidad superficial total del disco y al medio interestelar, donde 75 % corresponde a las estrellas que forman el disco, de las cuales el 5 % se encuentra en el disco grueso; el 25 % restante corresponde al medio interestelar[14]. Ambos modelos pueden ser encontrados en [25] como modelo 1 y 4, respectivamente.

ma triaxial [26], es decir, un elipsoide cuyos ejes tienen longitudes distintas [27]. Sin embargo, el modelo axisimétrico¹ del bulbo también se ajusta muy bien a las observaciones fotométricas infrarojas cercanas[21, 22], por lo que, por simplicidad en este trabajo tomaremos el modelo axisimétrico del bulbo cuyo perfil de densidad es [14, 25]

$$\rho_b(R, z) = \rho_{b,0} \left(\frac{m}{a_b} \right)^{-\alpha_b} e^{-m^2/r_b^2}, \quad (2.1)$$

donde R y z corresponden a las coordenadas cilíndricas. $m = \sqrt{R^2 + \frac{z^2}{q_b^2}}$. Si $q_b = 1$ recuperamos el caso esféricamente simétrico, si $q_b < 1$ tendremos una geometría oblata y si $q_b > 1$ una geometría prolata. Particularmente tomaremos $q_b = 0.6$. r_b es el radio exterior en donde trunca la ley de potencias y será tomado como $r_b = 1.9$ kpc. $\rho_{b,0}$ es la densidad volumétrica central del bulbo la cual será determinada en el ajuste de parámetros, $a_b = 1$ kpc es el radio de escala y $\alpha_b = 1.8$ nos da la forma funcional del perfil de densidad.

Debido a la geometría esferoidal del sistema utilizaremos la ecuación (1.58) para

¹Axisimétrico quiere decir que es simétrico respecto a un eje, en este caso quiere decir que tenemos simetría azimutal.

obtener el potencial correspondiente al bulbo

$$\Phi(R_0, z_0) = -2\pi G \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[\Psi(\infty) \sin^{-1} e - \frac{a_0 e}{2} \int_0^\infty d\tau \frac{\Psi(m)}{(\tau + a_0^2) \sqrt{\tau + c_0^2}} \right] \quad (2.2)$$

y su velocidad circular cuadrática (1.66)

$$v_c^2(R) = 4\pi G \sqrt{1-e^2} \int_0^R dm \frac{m^2 \rho(m^2)}{\sqrt{R^2 - m^2 e^2}}, \quad (2.3)$$

donde $e = \sqrt{1 - q_b^2}$ y para este caso

$$\rho(m^2) = \rho_{b,0} \left(\frac{\sqrt{m^2}}{a_b} \right)^{-\alpha_b} e^{-m^2/r_b^2}. \quad (2.4)$$

Al sustituir (2.4) en la ecuación (1.66) tenemos

$$v_c^2(R) = 4\pi G \rho_{b,0} \sqrt{1-e^2} \int_0^R dm \frac{m^2 \left(\frac{m}{a_b} \right)^{-\alpha_b} e^{m^2/r_b^2}}{\sqrt{R^2 - m^2 e^2}}. \quad (2.5)$$

Haremos el cambio de variable $x = m/R$ con diferencial $dm = R dx$ para tener límites de integración definidos y simplificando la velocidad circular cuadrática del bulbo queda como

$$v_c^2(R) = 4\pi G q_b \rho_{b,0} R^2 \left(\frac{R}{a_b} \right)^{-\alpha_b} \int_0^1 dx \frac{x^{2-\alpha_b}}{\sqrt{1-x^2 e^2}} e^{-R^2 x^2 / r_b^2}, \quad (2.6)$$

cuya integral puede ser resuelta numéricamente.

La gráfica de la figura 2.1 ilustra las curvas de rotación del bulbo calculadas con la ecuación (2.6) y con los parámetros de la tabla 2.1. La línea azul corresponde al modelo dominado por el disco estelar, modelo I y la línea naranja al modelo II donde domina el halo de materia oscura. Donde podemos notar que la mayor contribución de esta componente es en el centro galáctico y decae rápidamente como $1/r^{1/2}$.

2.2. Disco estelar.

Basado en las observaciones como las de [28] se asume que la densidad del disco estelar de la galaxia decrece exponencialmente con el radio y que depende de la distancia al plano medio z a través de la suma de dos exponenciales, resultando en la suma de un disco delgado y un disco grueso [14]

$$\rho_d(R, z) = \Sigma_d e^{-R/R_d} \left(\frac{\alpha_0}{2z_0} e^{-|z|/z_0} + \frac{\alpha_1}{2z_1} e^{-|z|/z_1} \right), \quad (2.7)$$

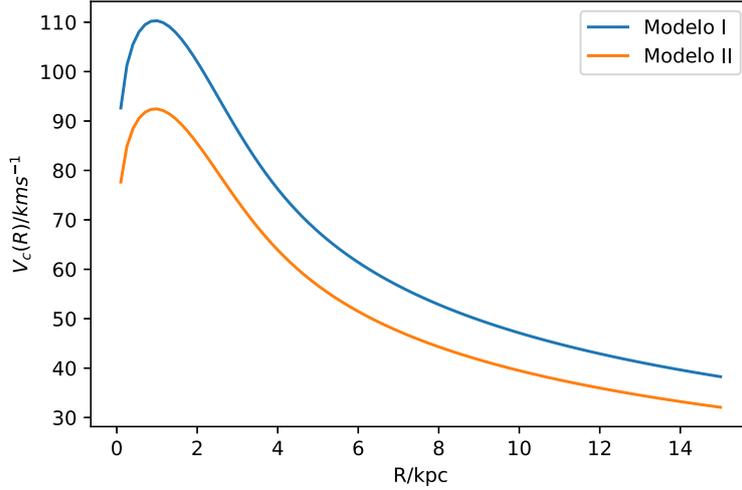


Figura 2.1: Velocidad circular del modelo para el bulbo galáctico. La línea azul representa al modelo I y la línea naranja al modelo II.

donde se cumple la relación $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$, R_d es la escala de longitud del disco, $z_0 = 0.3$ kpc es la altura de escala para el disco delgado, $z_1 = 1$ kpc es la altura de escala para el disco grueso y Σ_d corresponde a la densidad superficial central del disco.

Al estar tomando la suma de un disco delgado con un disco grueso tomaremos al perfil de densidad de la forma (1.90)

$$\rho_d(R, z) = \Sigma(R)\zeta(z), \quad (2.8)$$

donde en este caso

$$\Sigma(R) = \Sigma_d e^{-R/R_d} \text{ y } \zeta(z) = \frac{\alpha_0}{2z_0} e^{-|z|/z_0} + \frac{\alpha_1}{2z_1} e^{-|z|/z_1}. \quad (2.9)$$

La función $\zeta(z)$ cumple con la normalización indicada en la sección 1.4.3 y la expresión para $\Sigma(R)$ es la misma que para el disco exponencial (1.83), por lo que el potencial correspondiente a esta distribución de densidad está dado por la ecuación (1.96) con el cambio $z \rightarrow z - z'$

$$\Phi(R, z) = -\frac{4G\Sigma_d}{R_d} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \xi(z') \int_0^{\infty} da \sin^{-1} \left(\frac{2a}{\sqrt{(z-z')^2 + (a+R)^2} + \sqrt{(z-z')^2 + (a-R)^2}} \right) a K_0 \left(\frac{a}{R_d} \right). \quad (2.10)$$

Para la función $\zeta(z')$ usaremos la relación para la suma $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$

$$\zeta(z') = \frac{1}{2z_0} \left(e^{-|z'|/z_0} - \alpha_1 e^{-|z'|/z_0} + \frac{\alpha_1 z_0}{z_1} e^{-|z'|/z_1} \right) \quad (2.11)$$

y tomaremos la convención

$$\zeta(z') = \frac{1}{2z_0} \hat{\zeta}(z') = \frac{1}{2z_0} \left(e^{-|z'|/z_0} - \alpha_1 e^{-|z'|/z_0} + \frac{\alpha_1 z_0}{z_1} e^{-|z'|/z_1} \right). \quad (2.12)$$

En la expresión para el potencial (2.10) podemos notar que el único término que depende de R es el argumento del \sin^{-1} , por lo que para obtener su velocidad circular cuadrática con la ecuación (1.12) solamente debemos derivar este término,

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[\sin^{-1} \left(\frac{2a}{\sqrt{(z-z')^2 + (a+R)^2} + \sqrt{(z-z')^2 + (a-R)^2}} \right) \right] = \frac{\partial \sin^{-1} u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial R}, \quad (2.13)$$

donde hemos hecho $u = \left(\frac{2a}{\sqrt{(z-z')^2 + (a+R)^2} + \sqrt{(z-z')^2 + (a-R)^2}} \right)$. Las derivadas anteriores serán escritas en términos explícitos de u para una forma más simplificada

$$\frac{\partial \sin^{-1} u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial R} = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\left(\frac{a+R}{\sqrt{(z-z')^2 + (a+R)^2}} - \frac{a-R}{\sqrt{(z-z')^2 + (a-R)^2}} \right)}{\sqrt{(z-z')^2 + (a+R)^2} + \sqrt{(z-z')^2 + (a-R)^2}}. \quad (2.14)$$

Por lo que al sustituir las derivadas escritas de la forma (2.14) en la expresión del potencial (2.10) y evaluando en $z = 0$ para obtener la velocidad circular cuadrática del disco estelar en conjunto con la expresión para $\hat{\zeta}(z')$ (2.12) tenemos

$$\begin{aligned} v_c^2 &= R \frac{\partial \Phi(R, z=0)}{\partial R} = \frac{2GR\Sigma_d}{z_0 R_d} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left(e^{-|z'|/z_0} - \alpha_1 e^{-|z'|/z_0} + \frac{\alpha_1 z_0}{z_1} e^{-|z'|/z_1} \right) \\ &\times \int_0^{\infty} da K_0 \left(\frac{a}{R_d} \right) a \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\left(\frac{a-R}{\sqrt{(z-z')^2 + (a-R)^2}} - \frac{a+R}{\sqrt{(z-z')^2 + (a+R)^2}} \right)}{\sqrt{(z-z')^2 + (a+R)^2} + \sqrt{(z-z')^2 + (a-R)^2}} \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En la gráfica de la figura 2.2 está representada la velocidad circular para el disco estelar (2.15) donde se ha tomado a $\alpha_1 = 0.5$, $R_d = 2$ kpc para el modelo I y $R_d = 3.2$ kpc para el modelo II, valores que se encuentran en la tabla 2.1. Podemos notar que al tener mayor amplitud la línea azul correspondiente al modelo I se trata del modelo que tiene mayor contribución de esta componente, mientras que la línea naranja correspondiente al modelo II al tener una amplitud menor, es decir, una menor contribución a la curva de rotación de la galaxia. Ambas curvas decaen de tal forma que se encontrarán en un radio mayor.

2.3. Medio interestelar

El medio interestelar o ISM como abreviación en inglés, es el espacio entre las estrellas formado por gas y polvo. El disco formado por el medio interestelar de la

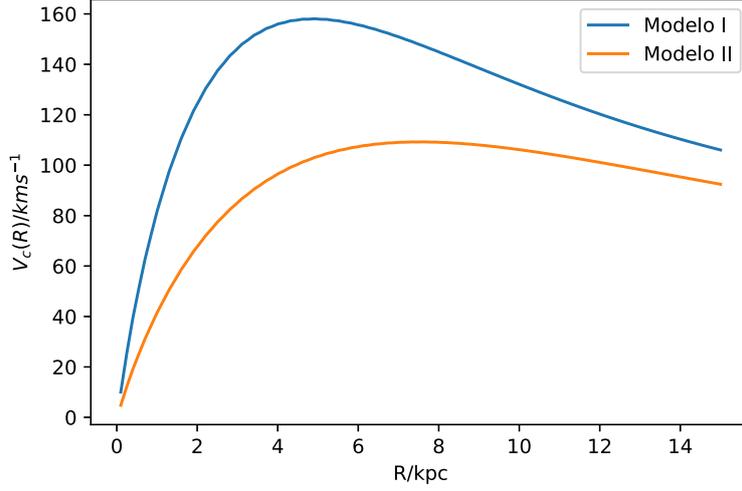


Figura 2.2: Velocidad circular del disco estelar. La línea azul representa al modelo I y la línea naranja al modelo II como lo indica la leyenda.

galaxia es más extenso radialmente y más delgado que el disco estelar.

Basados en las observaciones de [29] donde reportan que hay muy poco gas interestelar entre el anillo molecular en $R = 4 - 5\text{kpc}$, lo cual se traduce en una depresión en la densidad superficial central del medio interestelar. Se propuso el siguiente perfil de densidad donde el parámetro R_m permite que exista la depresión observada [14, 25]

$$\rho_g(R, z) = \frac{\Sigma_g}{2z_g} \exp\left(-\frac{R}{R_g} - \frac{R_m}{R} - \frac{|z|}{z_g}\right), \quad (2.16)$$

donde $R_m = 4\text{kpc}$, $z_g = 0.08\text{kpc}$ es la escala de altura, $R_g = 2R_d$ es la escala de longitud del medio interestelar y Σ_g es la densidad superficial central cuya contribución total a la densidad superficial total será de 25%, es decir, $\Sigma_g = 0.25(\Sigma_d + \Sigma_g)$.

Debido a que estamos tomando un disco delgado con $z_g = 0.08\text{kpc}$ podemos tomar la aproximación $z = 0$, es decir, hacer una proyección del disco en el plano $z = 0$ por lo que la única dependencia del perfil de densidad es en la coordenada radial. Así, podemos usar la ecuación (1.13) para calcular la velocidad circular cuadrática de esta componente. En el apéndice B se encuentran los cálculos y discusión correspondientes a resolver el perfil de densidad (2.16) siguiendo el desarrollo de la sección 1.4.3.

Primero debemos hacer la proyección de la densidad volumétrica en el plano $z = 0$ para encontrar la función de la densidad superficial y a partir de ella encontrar la masa contenida dentro de un radio R , por lo que integraremos la ecuación (2.16)

respecto de z

$$\Sigma_g(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_g(R, z) dz \quad (2.17)$$

debido a la simetría del sistema podemos escribir

$$\Sigma_g(R) = 2 \int_0^{\infty} \rho_g(R, z) dz = \frac{2\Sigma_g}{2z_g} \int_0^{\infty} e^{-R/R_g - R_m/R - |z|/z_g} dz = \frac{\Sigma_g}{z_g} e^{-R/R_g - R_m/R} z_g \quad (2.18)$$

y simplificando términos obtenemos la densidad superficial del medio interestelar

$$\Sigma_g(R) = \Sigma_g e^{-R/R_g - R_m/R}. \quad (2.19)$$

Para obtener $M(R)$ integramos la expresión anterior (2.19) con el diferencial de área en coordenadas cilíndricas

$$M(R) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \Sigma_g(R') R' dR' d\phi = 2\pi \Sigma_g \int_0^R e^{-R'/R_g - R_m/R'} R' dR', \quad (2.20)$$

podemos notar que la integral no puede ser resuelta analíticamente, por lo que realizaremos un cambio de variable y después se resolverá numéricamente. Haciendo $u = R'/R$ con diferencial $dR' = R du$

$$M(R) = 2\pi \Sigma_g R^2 \int_0^1 u e^{-Ru/R_g - R_m/Ru} du. \quad (2.21)$$

Finalmente, usando la ecuación (1.13) tenemos que la velocidad circular cuadrática es

$$v_c^2 \sim \frac{2\pi G \Sigma_g R^2 \int_0^1 u e^{-Ru/R_g - R_m/Ru} du}{R} = 2\pi G \Sigma_g R \int_0^1 u e^{-Ru/R_g - R_m/Ru} du. \quad (2.22)$$

Por otro lado, la expresión que nos da la velocidad circular cuadrática para el medio interestelar al seguir la sección 1.4.3, es

$$v_c^2(R) = -\frac{4G \Sigma_g R^2}{R_g} \int_0^1 \frac{dh}{\sqrt{1-h^2}} \int_1^{\infty} ds \frac{e^{-\frac{Rhs}{R_g} - \frac{R_m}{Rhs}}}{\sqrt{s^2-1}} \left(\frac{R_m R_g}{R^2 s^2} - h^2 \right), \quad (2.23)$$

cuya derivación puede ser consultada en el apéndice B.

En la gráfica de la figura 2.3 está representada la velocidad circular correspondiente al medio interestelar donde en el modelo I se está tomando $R_g = 4$ kpc y en el modelo II $R_g = 6.4$ kpc. Donde al existir la relación entre el radio del disco y el medio interestelar, $R_g = 2R_d$, la línea azul que corresponde al modelo I tiene una mayor amplitud ya que corresponde a tomar una mayor contribución por el disco estelar. La línea naranja del modelo II tiene una menor amplitud al tomar una mayor contribución por parte del halo de materia oscura. Además, se puede observar la depresión en el centro galáctico.

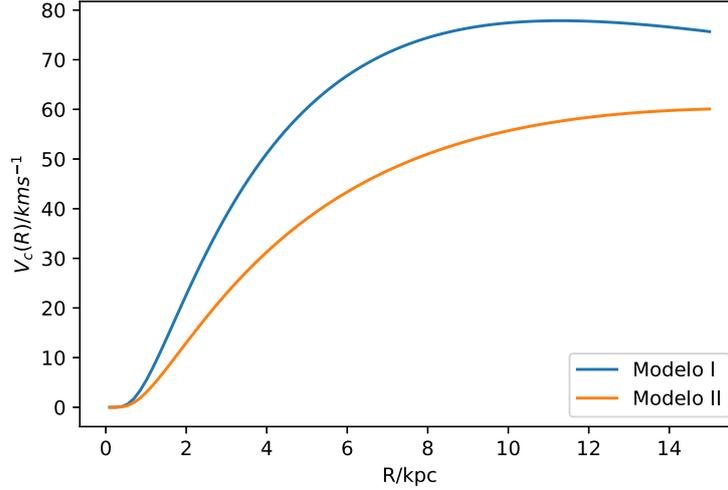


Figura 2.3: Velocidad circular del medio interestelar. La línea azul representa al modelo I y la línea naranja al modelo II.

En las gráficas de la figura 2.4 se muestran las curvas de la velocidad circular cuadrática obtenidas a partir de la ecuación (2.22), línea naranja y (2.23), línea azul. La gráfica de la izquierda corresponde al modelo I y la gráfica de la derecha corresponde al modelo II. Podemos notar que en ambos existe una gran diferencia entre las dos curvas. Sin embargo, la contribución del medio interestelar a la curva de rotación total de la Vía Láctea es tal que la diferencia entre tomar a la ecuación (2.22) y (2.23) es mínima, 3.82 % para el modelo I y 1.46 % para el modelo II. Las gráficas correspondientes a las curvas de rotación de la Vía Láctea para el modelo I y II, tomando (2.22) y (2.23) se encuentran en la figura B.2 del apéndice B.

Es importante señalar que debido a la depresión que representa el parámetro R_m en la ecuación (2.16), una partícula de prueba cercana o en la depresión experimenta una fuerza neta hacia afuera y esto se ve reflejado en tener una velocidad circular cuadrática negativa (2.23). En la literatura de las curvas de rotación se suele reportar las velocidades circulares imaginarias únicamente de forma ilustrativa para mostrar la fuerza efectiva en una partícula de prueba [30, 31].

2.4. Halo de materia oscura

El halo de materia oscura es el halo de materia no observable que contiene el disco galáctico y se extiende más allá de la materia visible de la galaxia. Como se ha

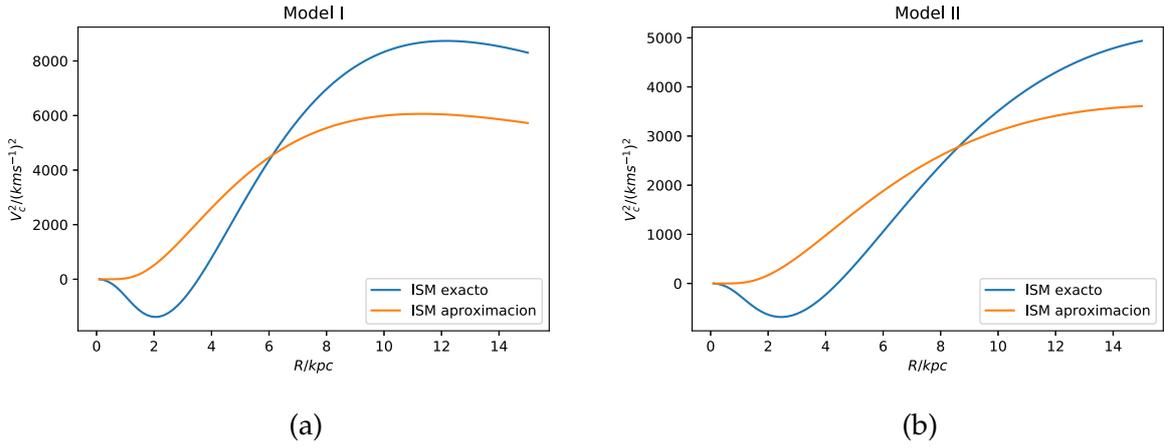


Figura 2.4: Velocidad circular cuadrática del medio interestelar. La gráfica (a) corresponde al modelo I y la gráfica (b) corresponde al modelo II. Las líneas azules representan la velocidad circular obtenida a partir de la ecuación (2.23) y las líneas naranjas a partir de la ecuación (2.22).

mencionando, la materia oscura es inferida a través de las observaciones de la dinámica de las galaxias.

Consideraremos dos perfiles de densidad asociados a dos modelos de materia oscura, un modelo conocido como Navarro-Frenk-White y un modelo conocido como campo escalar, los cuales serán explicados a continuación.

2.4.1. Perfil de densidad de Navarro-Frenk-White.

En 1996 Julio Navarro, Carlos Frenk y Simon White [12] a partir de simulaciones de N-cuerpos de materia oscura fría; llamada fría debido a que consiste en partículas con velocidades no relativistas[32]. Obtuvieron que los halos tenían un perfil de densidad "universal", dado por una doble ley de potencias [12]

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{\rho_i}{\left(\frac{r}{r_s}\right) \left[1 + \frac{r}{r_s}\right]^2}, \quad (2.24)$$

donde $r_s = r_{200}/c$ es el radio característico del halo, r_{200} determina la masa del halo, c es un parámetro adimensional el cual nos indica la concentración de masa del halo y $\rho_i = \delta_c \rho_{\text{crit}}$ está relacionada con la densidad del universo en el tiempo del colapso [12, 32].

Nosotros tomaremos una generalización del perfil de densidad obtenido por Navarro-

Frenk-White, dado de la siguiente forma [14, 25]

$$\rho_h(R, z) = \rho_{h,0} \left(\frac{m}{a_h} \right)^{-\alpha_h} \left(1 + \frac{m}{a_h} \right)^{\alpha_h - \beta_h}, \quad (2.25)$$

donde R y z son las coordenadas cilíndricas, $m = \sqrt{R^2 + \frac{z^2}{q_h^2}}$, $e = \sqrt{1 - q_h^2}$, α_h y β_h nos indican la rapidez del decaimiento, notando que para $r \ll a_h$ la densidad varía como $r^{-\alpha_h}$ y como $r^{-\beta_h}$ para valores grandes de r . Particularmente tomaremos a $q_h = 0.8$ teniendo geometría oblata al igual que en el bulbo galáctico, tomaremos tres valores particulares para α_h y β_h los cuales serán especificados en la sección 3.1.2. Teniendo únicamente como parámetros libres a ρ_h y a_h .

Debido a que el potencial correspondiente a esta componente es el mismo que en el bulbo por su geometría oblata, la velocidad circular se obtiene también a partir de la ecuación (1.66), donde en este caso

$$\rho(m^2) = \rho_{h,0} \left(\frac{\sqrt{m^2}}{a_h} \right)^{-\alpha_h} \left(1 + \frac{\sqrt{m^2}}{a_h} \right)^{\alpha_h - \beta_h}. \quad (2.26)$$

Así la velocidad circular correspondiente al halo de materia oscura es

$$v_c^2(R) = 4\pi G \rho_{h,0} \sqrt{1 - e^2} \int_0^R dm \frac{m^2 \left(\frac{\sqrt{m^2}}{a_h} \right)^{-\alpha_h} \left(1 + \frac{\sqrt{m^2}}{a_h} \right)^{\alpha_h - \beta_h}}{\sqrt{R^2 - m^2 e^2}}. \quad (2.27)$$

Volveremos a hacer el cambio de variable $x = m/R$ con $dm = R dx$ y simplificando podemos escribir a la velocidad circular cuadrática para el halo de materia oscura de la siguiente forma

$$v_c^2(R) = 4\pi G q_h R^2 \rho_{h,0} \left(\frac{R}{a_h} \right)^{-\alpha_h} \int_0^1 dx \frac{x^{2-\alpha_h}}{\sqrt{1 - x^2 e^2}} \left(1 + \frac{Rx}{a_h} \right)^{\alpha_h - \beta_h}, \quad (2.28)$$

cuya gráfica está en la figura 2.5, donde se tomaron a $\alpha_h = -2, 1.63$ y $\beta_h = 2.96, 2.17$ [14, 25] para los modelos I y II, respectivamente.

Podemos notar que para el modelo I, aquel en el que la mayor contribución corresponde al disco estelar; el halo de materia oscura empieza a contribuir a radios mayores. En el modelo II, el halo de materia oscura contribuye casi de manera constante a cualquier distancia del centro galáctico ya que en este modelo la mayor contribución a la curva de rotación de la Vía Láctea corresponde a esta componente.

2.4.2. Perfil de densidad de campo escalar.

Las simulaciones de N-cuerpos de la materia oscura fría han mostrado ciertas discrepancias con las observaciones, particularmente a pequeña escala muestran una

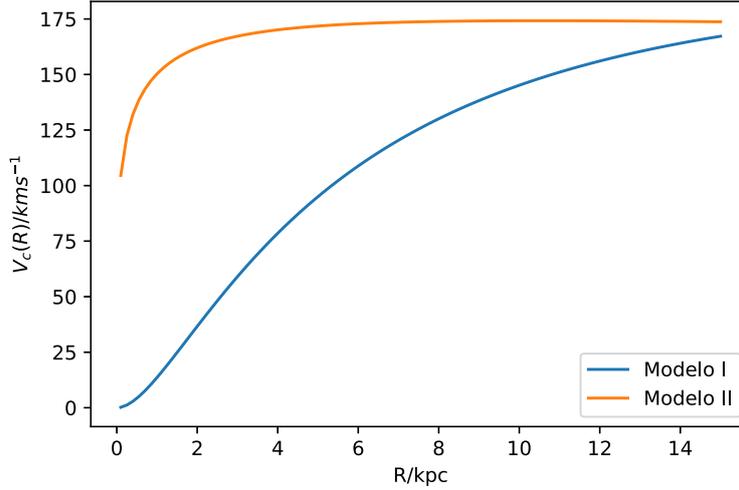


Figura 2.5: Velocidad circular del modelo NFW para el halo de materia Oscura. La línea azul representa al modelo I y la línea naranja al modelo II como lo indica la leyenda.

gran cantidad de satélites en galaxias tipo Vía Láctea y la información obtenida de las observaciones hasta el momento nos ha indicado que solamente tiene unos pocos [32, 33].

En este trabajo usaremos una de las alternativas a los modelos de materia oscura fría conocida como axiones ultraligeros ya que su masa se encuentra entre los ordenes de magnitud $10^{-18}\text{eV} > m_a > 10^{-26}\text{eV}$ [13] y es modelada como un campo escalar. A diferencia del perfil de densidad de la materia oscura fría, el del campo escalar proveniente de los axiones es suave el centro por lo que representa una buena alternativa a explorar.

Por otro lado, para poder resolver la dinámica y obtener el perfil de densidad correspondiente a un campo escalar es necesario resolver las ecuaciones de Schrödinger-Poisson [34], de las cuales se obtiene un solitón en el núcleo². Su respectivo desarrollo no será obtenido en este trabajo y puede ser consultado en [36, 37, 38].

Usaremos el perfil de densidad obtenido por [39, 40] en simulaciones de forma-

²Corresponde a una solución de un estado cuasi-estacionario de las ecuaciones de movimiento de materia oscura ultraligera, cuyo perfil de densidad puede ser obtenido analíticamente [35]. Un solitón es básicamente un paquete de ondas que mantiene su forma mientras se propaga con velocidad constante.

ción de estructura con axiones ultraligeros

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho_{\text{sol}}}{[1+(r/r_{\text{sol}})^2]^8} & r < r_\epsilon \\ \frac{\rho_{\text{NFW}}}{(1+r/r_s)^2(r/r_s)} & r \geq r_\epsilon \end{cases}, \quad (2.29)$$

donde r_{sol} es el radio característico del núcleo del solitón y ρ_{sol} la densidad central. Ambas cantidades están relacionadas con la masa del axión (m_a) de la siguiente forma [41]

$$r_{\text{sol}} = \left[\frac{\rho_{\text{sol}}}{2.42 \times 10^9 \text{M}_\odot \text{kpc}^{-3}} \left(\frac{m_a}{10^{-22} \text{eV}} \right)^2 \right]^{-0.25} \text{kpc}. \quad (2.30)$$

En la ecuación (2.29) el parámetro ρ_{NFW} corresponde a la densidad central del perfil externo y r_s es el radio de escala respectivo. r_ϵ es el radio de transición del solitón al perfil NFW.

En el trabajo realizado por [41] para enanas esferoidales imponen continuidad a partir de la relación de densidad

$$\frac{\rho_{\text{sol}}}{[1+(r/r_{\text{sol}})^2]^8} = \epsilon \rho_{\text{sol}} = \frac{\rho_{\text{NFW}}}{(1+r/r_s)^2(r/r_s)}, \quad (2.31)$$

lo que permite reescribir al perfil de densidad (2.29) de la forma [41]

$$\rho(r) = \rho_{\text{sol}} \begin{cases} \frac{1}{[1+(r/r_{\text{sol}})^2]^8} & r < r_\epsilon \\ \frac{\delta_{\text{NFW}}}{(1+r/r_s)^2(r/r_s)} & r \geq r_\epsilon \end{cases}, \quad (2.32)$$

con

$$r_\epsilon = r_{\text{sol}} \sqrt{\epsilon^{-1/8} - 1} \quad (2.33)$$

y

$$\delta_{\text{NFW}} = \epsilon \left[\frac{r_\epsilon}{r_s} \left(1 + \frac{r_\epsilon}{r_s} \right)^2 \right] = \frac{\epsilon r_\epsilon}{r_s^3} (r_s + r_\epsilon)^2, \quad (2.34)$$

teniendo como parámetros libres $m_a [\text{eV}]$, $\rho_{\text{sol}} [\text{M}_\odot \text{kpc}^{-3}]$, ϵ y $r_s [\text{kpc}]$.

Al tratarse del caso esféricamente simétrico podemos usar la ecuación (1.13) para calcular la velocidad circular, por lo que primero debemos calcular la masa contenida dentro de un radio $M(r)$ con la ecuación (1.9)

$$M(r) = 4\pi \rho_{\text{sol}} \begin{cases} \int_0^r \frac{r'^2}{[1+(r'/r_{\text{sol}})^2]^8} dr' & r < r_\epsilon \\ \int_0^{r_\epsilon} \frac{r'^2}{[1+(r'/r_{\text{sol}})^2]^8} dr' + \int_{r_\epsilon}^r \frac{\delta_{\text{NFW}}}{(1+r'/r_s)^2} \frac{r'}{r_s} r'^2 dr' & r \geq r_\epsilon \end{cases} \quad (2.35)$$

Para $r < r_\epsilon$ llamaremos a la masa contenida $M_{\text{menor}}(r)$

$$M_{\text{menor}}(r) = 4\pi\rho_{\text{sol}} \int_0^r \frac{r'^2}{\left[1 + \left(\frac{r'}{r_{\text{sol}}}\right)^2\right]^8} dr', \quad (2.36)$$

donde haremos el cambio de variable $x = r'/r_{\text{sol}}$ con diferencial $dr' = r_{\text{sol}}dx$

$$M_{\text{menor}}(r) = 4\pi\rho_{\text{sol}}r_{\text{sol}}^3 \int_0^{r/r_{\text{sol}}} \frac{x^2}{(1+x^2)^8} dx \quad (2.37)$$

cuya solución puede ser encontrada por fracciones parciales. Así

$$M_{\text{menor}}(r) = 4\pi\rho_{\text{sol}}r_{\text{sol}}^3 \left[\int_0^{r/r_{\text{sol}}} \frac{1}{(x^2+1)^7} dx - \int_0^{r/r_{\text{sol}}} \frac{1}{(x^2+1)^8} dx \right], \quad (2.38)$$

donde volveremos a hacer un cambio de variable para poder resolver más fácilmente las integrales $x = \tan u$ con diferencial $dx = \sec^2 u$

$$M_{\text{menor}}(r) = 4\pi\rho_{\text{sol}}r_{\text{sol}}^3 \left[\int_0^{\arctan \frac{r}{r_{\text{sol}}}} \cos^{12} u \, du - \int_0^{\arctan \frac{r}{r_{\text{sol}}}} \cos^{14} u \, du \right], \quad (2.39)$$

donde hemos usado la identidad trigonométrica $\tan^2 u + 1 = \sec^2 u$. Las integrales anteriores pueden ser resueltas al integrar por partes varias veces o usando las ecuaciones 2.513-3 o 2.512-2 del libro de tabla de integrales [42]. Regresando al cambio de variables realizado, la masa contenida a un radio r para $r < r_\epsilon$ es

$$M_{\text{menor}}(r) = \frac{4\pi r_{\text{sol}}^3 \rho_{\text{sol}}}{215040(r^2 + r_{\text{sol}}^2)^7} (5465r^{13}r_{\text{sol}} + 23100r^{11}r_{\text{sol}}^3 + 65373r^9r_{\text{sol}}^5 + 101376r^7r_{\text{sol}}^7 + 92323r^5r_{\text{sol}}^9 + 48580r^3r_{\text{sol}}^{11} - 3465rr_{\text{sol}}^{13} + 3465(r^2 + r_{\text{sol}}^2)^7 \tan^{-1} \frac{r}{r_{\text{sol}}}). \quad (2.40)$$

Para la región $r \geq r_\epsilon$ llamaremos $M_{\text{mayor}}(r)$ a la masa contenida y es de la forma

$$M_{\text{mayor}}(r) = M_{\text{menor}}(r) \Big|_{r=r_\epsilon} + M(r), \quad (2.41)$$

donde la primera función es la ecuación (2.40) evaluada en $r = r_\epsilon$, quedándonos por calcular la función $M(r)$

$$M(r) = 4\pi\rho_{\text{sol}} \int_{r_\epsilon}^r \frac{\delta_{\text{NFW}}}{\left(1 + \frac{r'}{r_s}\right)^2} \frac{r'}{r_s} dr' = 4\pi\rho_{\text{sol}}\delta_{\text{NFW}}r_s^3 \int_{r_\epsilon}^r \frac{r'}{(r_s + r')^2} dr', \quad (2.42)$$

cuya integral puede ser resuelta por fracciones parciales, así la masa contenida a un radio $M(r)$ es

$$M(r) = 4\pi\rho_{\text{sol}}\delta_{\text{NFW}}r_s^3 \int_{r_\epsilon}^r \left[\frac{1}{r' + r_s} - \frac{r_s}{(r' + r_s)^2} \right]. \quad (2.43)$$

Haciendo el cambio de variable $u = r' + r_s$ con diferencial $du = dr'$ para realizar las integrales más fácilmente obtenemos que $M(r)$ es

$$M(r) = 4\pi\rho_{\text{sol}}\delta_{\text{NFW}}r_s^3 \left[\frac{r_s + (r + r_s) \ln(r + r_s)}{r + r_s} - \frac{r_s + (r_s + r_\epsilon) \ln(r_s + r_\epsilon)}{r_s + r_\epsilon} \right]. \quad (2.44)$$

Al sumar las ecuaciones (2.40) y (2.44) para obtener a la función de masa (2.41) para $r \geq r_\epsilon$

$$M_{\text{mayor}}(r) = M_{\text{menor}}(r) \Big|_{r=r_\epsilon} + 4\pi\rho_{\text{sol}}\delta_{\text{NFW}}r_s^3 \left(\frac{r_s + (r + r_s) \ln(r + r_s)}{r + r_s} - \frac{r_s + (r_s + r_\epsilon) \ln(r_s + r_\epsilon)}{r_s + r_\epsilon} \right). \quad (2.45)$$

Por lo que la velocidad circular cuadrática para el halo de materia oscura como campo escalar es

$$v_c^2(r) = \begin{cases} \frac{GM_{\text{menor}}(r)}{r} & r < r_\epsilon \\ \frac{GM_{\text{mayor}}(r)}{r} & r \geq r_\epsilon \end{cases}, \quad (2.46)$$

con $M_{\text{menor}}(r)$ dada por la ecuación (2.40) y $M_{\text{mayor}}(r)$ por (2.45).

2.5. Modelo completo.

En las secciones anteriores hemos descrito como obtener la velocidad circular cuadrática de cada uno de los componentes en los que estamos descomponiendo a la Vía Láctea, sin embargo, estamos interesados en la cinemática de la galaxia completa. Para ello tomaremos en cuenta que se cumple el principio de superposición ya que el potencial asociado a una distribución de masa es la superposición de los potenciales de las masas puntuales. Visto de otra forma, podemos tomar a la distribución de densidad total de la Vía Láctea de la siguiente forma

$$\rho_{\text{total}} = \rho_{\text{Bulbo}} + \rho_{\text{Halo}} + \rho_{\text{Disco}} + \rho_{\text{ISM}}, \quad (2.47)$$

por lo que el potencial total de la galaxia también puede ser escrito como una combinación lineal de los potenciales de cada una de las componentes

$$\Phi_{\text{total}} = \Phi_{\text{Bulbo}} + \Phi_{\text{Halo}} + \Phi_{\text{Disco}} + \Phi_{\text{ISM}}. \quad (2.48)$$

Debido a que la información de la cinemática de la galaxia nos la da la velocidad circular y esta depende directamente del potencial (1.12), el cual a su vez depende de

la distribución de densidad (1.3) podemos obtener la velocidad circular total a partir de la siguiente ecuación

$$v_{c,\text{total}}^2 = v_{c,\text{Bulbo}}^2 + v_{c,\text{Halo}}^2 + v_{c,\text{Disco}}^2 + v_{c,\text{ISM}}^2. \quad (2.49)$$

Así la velocidad circular total es simplemente la raíz cuadrada de la expresión anterior

$$v_{c,\text{total}} = \sqrt{v_{c,\text{Bulbo}}^2 + v_{c,\text{Halo}}^2 + v_{c,\text{Disco}}^2 + v_{c,\text{ISM}}^2}. \quad (2.50)$$

En las gráficas de la figura 2.6 la línea morada representa la velocidad circular total obtenida a través de la ecuación (2.50), mientras que la línea azul correspondiente al bulbo galáctico ha sido obtenida a partir de la ecuación (2.6), la línea naranja corresponde al halo de materia oscura (2.28), la línea verde al disco estelar (2.15) y la línea roja al medio interestelar (2.22). Los parámetros usados para realizar ambas gráficas se encuentran en la tabla 2.1 y han sido tomados de [14, 25].

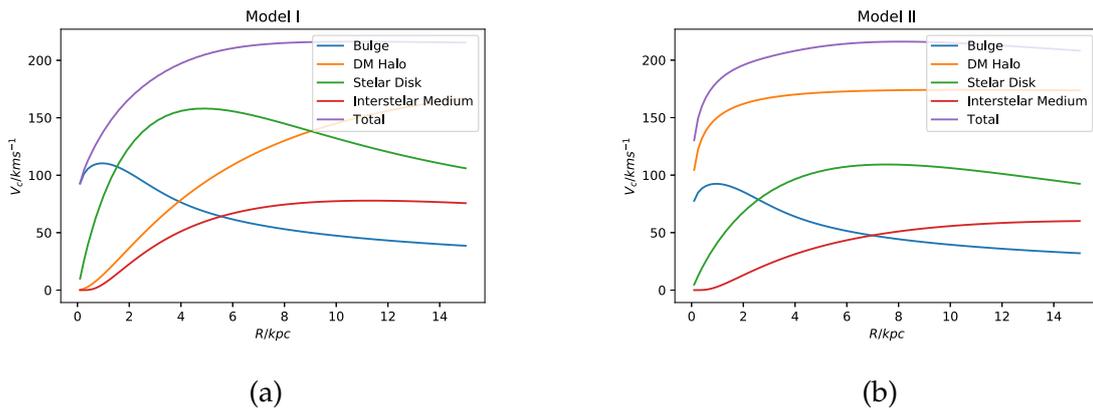


Figura 2.6: Velocidad circular de los modelos I y II con cada uno de sus componentes. La gráfica (a) corresponde al modelo I y la gráfica (b) al modelo II.

Para que un modelo sea viable es importante que reproduzca las observaciones, en el caso de la Vía Láctea nos centraremos en reproducir las siguientes:

- La velocidad circular total al radio solar $R_0 = 8$ kpc.
- La densidad superficial total dentro de 1.1kpc del plano galáctico cercano al sol ($\Sigma_{1.1}(R_0)$).
- La masa total dentro de 100kpc del centro galáctico.

2.5.1. Velocidad circular total.

En la gráfica de la figura 2.7 están representadas la velocidad circular total para el modelo I y el modelo II, donde la línea negra vertical se encuentra en $R_0 = 8$ kpc y la línea horizontal en $v_c(R_0) = 220$ km/s, ya que nos hemos basado en el modelo planteado en [25] donde para el modelo I obtienen $v_c(R_0) = 220$ km/s y para el modelo II $v_c(R_0) = 222$ km/s. La cercanía de las líneas azul y naranja al punto donde se intersectan las líneas negras nos dice que el modelo es bastante viable.

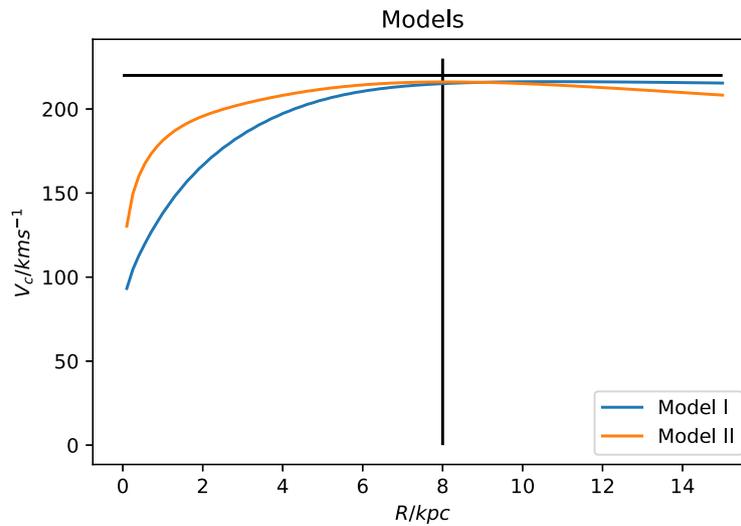


Figura 2.7: Velocidad circular total de los modelos I y II. Las líneas negras indican el radio solar tomado en $R_0 = 8$ kpc y velocidad circular en el radio solar en $v_c(R_0) = 220$ km/s.

2.5.2. Densidad superficial.

Calcularemos la densidad superficial dentro de 1.1 kpc, para ello debemos de obtener las expresiones correspondientes a la densidad superficial de cada componente.

El bulbo y el halo de materia oscura comparten el mismo potencial debido a la geometría elegida para estas componentes. Por ello usaremos la ecuación (1.41) para obtener la densidad superficial en conjunto con la expresión (1.45) para δM , con $m = \beta a$ y usando $R = \beta a \sin v = m \sin v$ para sustituir el seno cuadrado $\sin^2 v = R/m$

obtenemos

$$\Sigma(m) = \frac{\rho(m^2)\sqrt{1-e^2}\delta m}{\sqrt{1-\frac{e^2 R^2}{m^2}}}. \quad (2.51)$$

Simplificando la ecuación anterior obtenemos la siguiente expresión

$$\Sigma(m) = \frac{\rho(m^2)\sqrt{1-e^2}m\delta m}{\sqrt{m^2-e^2 R^2}}. \quad (2.52)$$

Al usar la ecuación (2.52) en conjunto con (2.4) y hacer suma sobre todos los homoides, para obtener la densidad superficial del bulbo

$$\Sigma_{\text{Bulbo}}(R) = \sqrt{1-e^2}\rho_{b,0} \int_0^R \frac{\left(\frac{m}{a_b}\right)^{-\alpha_b} e^{m^2/r_b^2} m}{\sqrt{m^2-e^2 R^2}} dm. \quad (2.53)$$

Haciendo el cambio de variable $x = m/R$ cuyo diferencial es $dm = Rdx$ la expresión para la densidad superficial queda como

$$\Sigma_{\text{Bulbo}}(R) = \sqrt{1-e^2}\rho_{b,0} \left(\frac{R}{a_b}\right)^{-\alpha_b} R \int_0^1 \frac{x^{1-\alpha_b} e^{-R^2 x^2/r_b^2}}{\sqrt{x^2-e^2}} dx. \quad (2.54)$$

Para obtener la densidad superficial del halo de materia oscura sustituiremos la ecuación (2.26) en (2.52) donde volveremos a hacer el cambio de variable $x = m/R$ y simplificando obtenemos

$$\Sigma_{\text{Halo}}(R) = \sqrt{1-e^2}\rho_{h,0} \left(\frac{R}{a_h}\right)^{-\alpha_h} R \int_0^1 \frac{x^{1-\alpha_h} \left(1 + \frac{Rx}{a_h}\right)^{\alpha_h-\beta_h}}{\sqrt{x^2-e^2}} dx. \quad (2.55)$$

La densidad superficial del disco estelar está dada por la ecuación (2.9) y la del medio interestelar por (2.19). Por lo que la densidad superficial de la galaxia está dada por

$$\Sigma(R) = \Sigma_{\text{Bulbo}}(R) + \Sigma_{\text{Halo}}(R) + \Sigma_d e^{-R/R_d} + \Sigma_g e^{-R/R_g - R_m/R}. \quad (2.56)$$

Al ser evaluada la expresión anterior en la vecindad solar a $\pm 1.1\text{kpc}$ tenemos que la densidad superficial para el modelo I es de $83.45M_{\odot}\text{pc}^2$ y para el modelo II de $73.0327M_{\odot}\text{pc}^2$, coincidiendo con lo obtenido en la Tabla 1.1 de [14].

2.5.3. Masa total.

Calcularemos a la masa contenida dentro de un radio de 100kpc del centro galáctico, para ello usaremos la ecuación (2.47)

$$M_{\text{total}} = \int \rho_{\text{Bulbo}} dV + \int \rho_{\text{Halo}} dV + \int \rho_{\text{Disco}} dV + \int \rho_{\text{ISM}} dV, \quad (2.57)$$

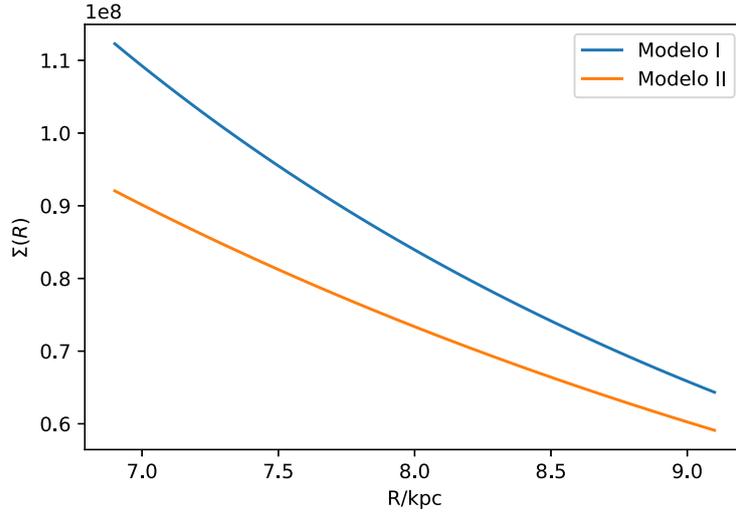


Figura 2.8: Densidad superficial total dentro de la vecindad solar. La línea azul corresponde a evaluar la función (2.56) con los parámetros correspondientes al modelo I y la línea naranja al modelo II como lo indica la leyenda.

donde ρ_{Bulbo} está dada por la ecuación (2.1), ρ_{Halo} por (2.25), ρ_{Disco} por (2.7) y ρ_{ISM} por (2.16).

En la sección anterior ya hemos obtenido la masa correspondiente al medio interestelar (2.21), restándonos tres perfiles de masa por calcular.

El potencial correspondiente al bulbo y al halo de materia oscura fue encontrado en la sección 1.3.2, por lo que usaremos la ecuación (1.43) para encontrar la masa para estos dos componentes.

Para el bulbo la función $\rho(m^2)$ está dada por la ecuación (2.4) por lo que al sustituirla en la función (1.43) tenemos

$$\delta M_{\text{Bulbo}} = 4\pi\rho_{b,0} \left(\frac{\sqrt{m^2}}{a_b} \right)^{-\alpha_b} e^{-m^2/r_b^2} \sqrt{1 - e^2 m^2} \delta m, \quad (2.58)$$

integrando de ambos lados y haciendo el cambio de variable $x = m/R$ cuyo diferencial es $dm = Rdx$

$$M_{\text{Bulbo}}(R) = 4\pi q_b \rho_{b,0} R^3 \left(\frac{R}{a_b} \right)^{-\alpha_b} \int_0^1 dx x^{2-\alpha_b} e^{-R^2 x^2 / r_b^2}. \quad (2.59)$$

Repetiremos el procedimiento anterior para el halo de materia oscura, donde la función $\rho(m^2)$ es la ecuación (2.26) y obtenemos

$$M_{\text{Halo}}(R) = 4\pi\rho_{h,0} q_h R^3 \left(\frac{R}{a_h} \right)^{-\alpha_h} \int_0^1 x^{2-\alpha_h} \left(1 + \frac{Rx}{a_h} \right)^{\alpha_h - \beta_h} dx. \quad (2.60)$$

Debido a que el potencial correspondiente a al perfil de densidad del disco estelar está dado por la ecuación (1.96) y se ha separado la densidad de la forma (2.9), donde la función $\zeta(z)$ cumple con normalización, podemos escribir

$$M_{\text{Disco}}(R) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \Sigma(R') R' dR' d\phi = 2\pi \Sigma_d \int_0^R e^{-R'/R_d} R' dR'. \quad (2.61)$$

Cuya solución es encontrada al integrar por partes

$$M_{\text{Disco}}(R) = -2\pi \Sigma_d [R e^{-R/R_d} + R_d e^{R/R_d} - R_d]. \quad (2.62)$$

Así, al sumar todas las contribuciones a la galaxia la masa de la galaxia contenida a un radio R está dada por

$$M(R) = M_{\text{Bulbo}}(R) + M_{\text{Halo}}(R) + M_{\text{Disco}}(R) + 2\pi \Sigma_g R^2 \int_0^1 u e^{-ru/R_g - R_m/Ru} du \quad (2.63)$$

y al ser evaluada en $R = 100\text{kpc}$ obtenemos que para el modelo I $M(R = 100\text{kpc}) = 6.65 \times 10^{11} M_{\odot}$ y para el modelo II $M(R = 100\text{kpc}) = 6.09 \times 10^{11} M_{\odot}$, lo cual concuerda con la cota de $M(R < 100\text{kpc}) = 5 - 10 \times 10^{11} M_{\odot}$ [14, 43].

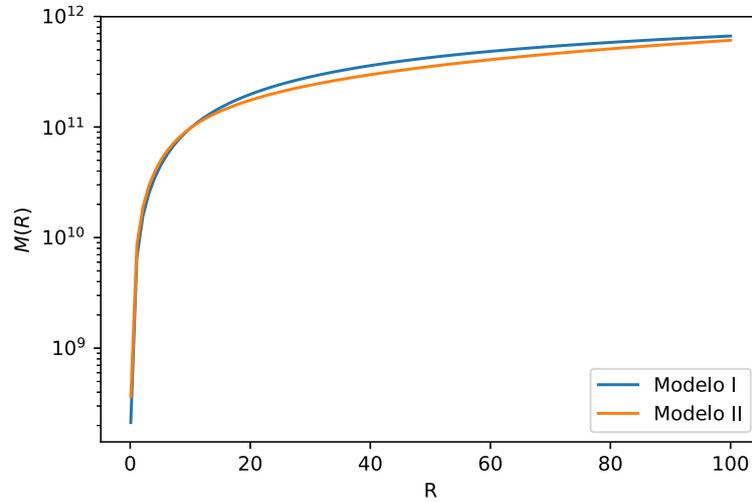


Figura 2.9: Masa contenida dentro de un radio de la galaxia. La línea azul corresponde a evaluar la función (2.63) con los parámetros correspondientes al modelo I y la línea naranja al modelo II como lo indica la leyenda.

Capítulo 3

Ajuste de parámetros.

En este capítulo contrastaremos las observaciones con nuestros modelos por medio del ajuste de parámetros de los modelos con el uso de `galkin` [11]. Este constituye una compilación de las mediciones de la cinemática (curvas de rotación) de nuestra galaxia de al rededor de cuatro décadas de literatura y optimizada en un rango de 3 a 20 kpc del radio galocéntrico. Es una herramienta construida de manera modular, lo cual permite al usuario agregar o quitar datos.

`galkin` está dividido en tres categorías principales: cinemática del gas, cinemática de las estrellas y masers¹. Dentro de la cinemática del gas incluyen a los siguientes trazadores: Velocidades terminales de HI, espesor de HI, velocidades terminales de la banda espectral de CO, regiones de HII y nubes moleculares gigantes. En la cinemática de las estrellas incluyen: cúmulos abiertos, nebulosas planetarias, cefeidas y estrellas de carbono.

Elegimos como trazadores a los conjuntos de estrellas que tenían un mayor rango en el radio desde el centro galáctico, para la cinemática estelar usamos las cefeidas en el rango 5.1 – 14.4 kpc [45] y; para la cinemática del gas elegimos regiones de HII en un rango de 3.5 – 15.5 kpc [46] y velocidades terminales de la banda espectral de CO en un rango de 0.6 – 7.8 kpc [47], este último fue elegido para tener mayor información para acotar el bulbo galáctico.

Para poder utilizar los datos contenidos en `galkin` requerimos introducir cinco parámetros ($R_0, v_0, U_\odot, V_\odot, W_\odot$), los cuales nos permiten definir un sistema de referencia. En la Vía Láctea se hace a través de la velocidad de la órbita más cercana dentro

¹Amplificación de microondas por emisión de radiación estimulada, MASER por sus siglas en inglés [44].

del plano que pasa a través de la localización actual del Sol y es conocida como sistema de reposo local (LSR por sus siglas en inglés) [14, 22]. El sistema de reposo local es definido a través de las constantes R_0 , radio en el que se encuentra el sol del centro galáctico y $v_0 = V_c(R_0)$, velocidad circular al radio solar. Se suelen reportar las mediciones de la velocidad heliocéntrica² en términos de la línea de visión en el sistema de reposo local a un movimiento solar fijo $(U, V, W)_\odot$. $U_\odot \equiv v_x$, $V_\odot \equiv v_y$ y $W_\odot \equiv v_z$ nos dicen el movimiento relativo al LSR del sol en cada dirección. Los datos usados con sus respectivos errores se pueden observar en la gráfica de la figura 3.1, donde nos quedaremos con la convención usada en `galkin` [11] para el sistema de referencia, $R_0 = 8\text{kpc}$, $v_0 = 230\text{km/s}$ y $(U, V, W)_\odot = (11.10, 12.24, 7.25)\text{km/s}$ [48].

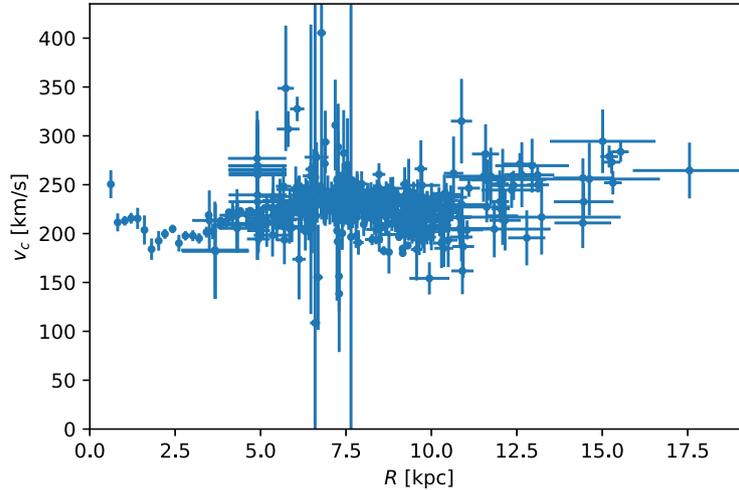


Figura 3.1: Datos de `galkin` usados. Velocidad circular como función del radio galactocéntrico. Se muestran los datos usados de `galkin` con sus respectivos errores, donde se está tomando $R_0 = 8\text{kpc}$, $v_0 = 230\text{km/s}$ y $(U, V, W)_\odot = (11.10, 12.24, 7.25)\text{km/s}$ [48, 11].

El ajuste de parámetros fue hecho con mínimos cuadrados, es decir, minimizando el error a través de la expresión

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - y(x_i, \theta))^2}{\sigma_{y_i}^2}, \quad (3.1)$$

donde y_i son las observaciones, $\sigma_{y_i}^2$ es la varianza en y_i , θ son los parámetros libres y y es el modelo cuyos parámetros serán determinados.

²Velocidad medida desde un marco de referencia en el cual el Sol está en reposo.

En este trabajo nos centraremos en dos modelos de los perfiles de densidad de materia oscura, por lo que los ajustes están divididos en dos secciones principales. La sección 3.1 contiene todos los ajustes correspondientes a tomar varios casos del perfil NFW. En la sección 3.2 tomamos a los parámetros del perfil de densidad de campo escalar como libres y el resto de la galaxia fijo. El código correspondiente al ajuste de parámetros se puede consultar en [github](#)³ y en el apéndice C.

3.1. Ajuste para NFW.

En el capítulo 2 mencionamos los componentes que tomaremos en cuenta como parte de la Vía Láctea, en esta sección se muestran los resultados del ajuste de parámetros de cada uno de los parámetros libres de cada componente y ciertas combinaciones de ellos. Nos enfocaremos en el modelo para materia oscura con un perfil de densidad Navarro-Frenk-White (2.25).

3.1.1. Un parámetro

En la tabla 3.1 se encuentran los respectivos ajustes tomando en cuenta un solo parámetro libre a la vez de cada una de las componentes en la Vía Láctea. En las columnas segunda y cuarta se muestra la diferencia relativa (D.R.) entre el ajuste obtenido de cada parámetro y los datos de la tabla 2.1, reportados en [14, 25].

A partir de este simple ejercicio se decidió por simplicidad dejar a los parámetros α_h y β_h que nos indican la pendiente del perfil de materia oscura (2.25) fijos, tomando en cuenta cuatro posibilidades que serán detalladas en la siguiente sección.

³https://github.com/atalianb/ParaTesis_1/blob/master/Complete_Analysis.ipynb

Parámetro libre	Modelo I		Modelo II	
		D. R.		D. R.
$\rho_b [10^9 M_\odot / \text{kpc}^3]$	1.30	-0.67	0.986	-0.69
$\rho_h [10^9 M_\odot / \text{kpc}^3]$	1.02	-0.30	0.32	-0.16
$a_h [\text{kpc}]$	5.71	-0.32	2.08	-0.09
α_h	-1.34	0.48	2.06	-0.20
β_h	2.58	0.14	1.99	0.08
$R_d [\text{kpc}]$	2.32	-0.14	4.7734	-0.32
$\Sigma_d [10^9 M_\odot / \text{kpc}^2]$	1.90	-0.25	0.615	-0.34
$\Sigma_g [10^9 M_\odot / \text{kpc}^2]$	1.11	-0.57	0.471	-0.71

Tabla 3.1: Ajustes con un solo parámetro libre a la vez. En la primera columna se muestra el parámetro que se decidió dejar libre y posteriormente su respectiva diferencia relativa (D. R.) con los ajustes obtenidos en [14, 25] para el modelo I y el modelo II.

3.1.2. Ajuste de los parámetros del Halo de Materia Oscura

Para el ajuste de los parámetros de materia oscura se eligió dejar fijos los parámetros α_h y β_h de la ecuación (2.28) tomando los siguientes cuatro casos

$$\alpha_h = \begin{cases} 1 & \text{NFW} \\ -2 & \text{Modelo I} \\ 1.63 & \text{Modelo II} \end{cases} \quad \text{y} \quad \beta_h = \begin{cases} 3 & \text{NFW} \\ 2.96 & \text{Modelo I} \\ 2.17 & \text{Modelo II} \end{cases} \quad (3.2)$$

Denominaremos NFW I al caso correspondiente a tomar los respectivos valores para los parámetros α_h y β_h con el resto de los parámetros de cada componente fijos (al menos que se indique lo contrario) del modelo I (segunda columna de la tabla 2.1), y NFW II al tomar el resto de los parámetros del modelo II (tercera columna de la tabla 2.1).

Se comenzó por tomar como parámetros libres de la velocidad circular del halo de materia oscura a a_h y ρ_h , uno a la vez, con todos los demás parámetros del modelo fijos, estos resultados se encuentran en las dos primeras filas de las tablas 3.2 y 3.3.

Sin embargo, queremos obtener ajustes más realistas y eso lo podemos lograr al considerar la mayor cantidad de parámetros libres posibles. El siguiente paso para ello

fue tomar a los parámetros a_h y ρ_h libres simultáneamente, encontrando el conjunto de parámetros que mejor se ajusta los mostrados en la tercera fila de las tablas 3.2 y 3.3. Posteriormente se decidió dejar libres los parámetros de otras componentes de la galaxia, como el bulbo. Al tomar libres a los parámetros de la velocidad circular del halo de materia oscura y el bulbo en conjunto obtenemos como mejor combinación de parámetros aquellos que se encuentran en la cuarta fila de las tablas 3.2 y 3.3.

Parámetro libre	Modelo I		Modelo II	
	D. R.		D. R.	
ρ_h	1.16	-0.38	3.35	-0.92
a_h	6.76	-0.43	2.14	-0.11
(ρ_h, a_h)	(4.18, 1.32)	(-0.83, 1.88)	(0.50, 1.51)	(-0.46, 0.25)
(ρ_b, ρ_h, a_h)	(0.98, 1.24, 2.62)	(-0.56, -0.42, 0.46)	(1.26, 1.19, 1.00)	(1.36, -0.77, 0.89)

Tabla 3.2: Ajuste de parámetros para los modelos I y II. En la primera columna se encuentran los parámetros que se dejaron libres, donde ρ_h y ρ_b están reportados en [$10^9 M_\odot / \text{kpc}^3$], y a_h en [kpc]. La columna D. R. indica la diferencia relativa entre cada uno de los ajustes de parámetros obtenidos con los reportados en [14, 25].

Parámetro libre	NFW I	NFW II
ρ_h	0.17	1.12
a_h	1.97	3.77
(ρ_h, a_h)	(0.0352, 8.59)	(0.462, 2.81)
(ρ_b, ρ_h, a_h)	$(1.27 \times 10^{-5}, 0.275, 3.05)$	(0.738, 0.165, 4.48)

Tabla 3.3: Ajuste de parámetros de los modelos NFW I y NFW II. Los parámetros indicados en la primera columna son los parámetros que se dejaron libres para ser ajustados. ρ_h y ρ_b están reportados en [$10^9 M_\odot / \text{kpc}^3$], y a_h en [kpc].

En las tablas 3.4 y 3.5 se encuentran reportadas las combinaciones de parámetros que mejor se ajustan tomando al medio interestelar de la forma (2.23). Donde las diferencias relativas en la tabla 3.4 corresponden a la diferencia entre el ajuste obtenido y los reportados en [14, 25], mientras que en la tabla 3.5 corresponden a la diferencia

entre tomar al medio interestelar de forma aproximada (2.22), reportados en la tabla 3.3 y al medio interestelar de la forma exacta (2.23).

Las diferencias relativas entre los ajustes obtenidos en la cuarta fila de la tabla 3.2, es decir, al tomar al medio interestelar de la forma aproximada (2.22) y los obtenidos al tomar al medio interestelar como (2.23) (tabla 3.4) son $(\rho_b, \rho_h, a_h) = (0.057, 0.16, 0.20)$ para el modelo I y para el modelo II $(\rho_b, \rho_h, a_h) = (0.32, 0.00, 0.00)$. Las diferencias relativas nos indican la variación de un ajuste respecto a otro, en este caso nos dice la diferencia entre tomar a la contribución del medio interestelar a la velocidad circular total de la galaxia de forma aproximada (2.22) y tomarla de manera exacta (2.23). Obteniendo una mayor diferencia en el parámetro ρ_b para el modelo II y una diferencia de 20 % para el parámetro a_h del modelo I.

Parámetros	Modelo I		Modelo II	
		D. R.		D. R.
(ρ_b, ρ_h, a_h)	(1.04, 1.49, 2.18)	(-0.59, -0.52, 0.75)	(0.188, 1.19, 1.00)	(0.59, -0.77, 0.89)

Tabla 3.4: Ajuste de parámetros para los modelos I y II. En la primera columna se indican los parámetros que se dejaron libres. Los parámetros ρ_b y ρ_h están reportados en [$10^9 M_\odot / \text{kpc}^3$], y a_h en [kpc]. Este ajuste corresponde a tomar al medio interestelar de la forma 2.23. La columna D.R. corresponde a la diferencia relativa de nuestros ajustes obtenidos y los ajustes reportados en [14, 25].

Parámetros libres	NFW I	NFW II
(ρ_b, ρ_h, a_h)	$(1.26 \times 10^{-5}, 0.680, 1.97)$	(0.675, 0.234, 3.80)
D. R.	(0.0075, -0.59, 0.54)	(0.09, -0.29, 0.18)

Tabla 3.5: Ajuste de parámetros de los modelos NFW I y NFW II. Los parámetros que se dejaron libres para el halo fueron a_h y ρ_h , mientras que para el bulbo únicamente se tomó a ρ_h . Se tomaron $\alpha_h = 1$ y $\beta_h = 3$. En este ajuste se tomó al medio interestelar de la forma 2.23. ρ_b y ρ_h están reportados en [$10^9 M_\odot / \text{kpc}^3$], y a_h en [kpc]. En la fila D. R. se reportan las diferencias relativas entre el conjunto de parámetros encontrado en el ajuste al tomar al medio interestelar de la forma 2.23 y los reportados en la tabla 3.3.

En las gráficas de la figura 3.2 se muestran las respectivas curvas de rotación de cada una de las combinaciones de parámetros obtenida, donde en la gráfica 3.2a estamos tomando el resto de los parámetros del modelo I, es decir, el caso en el que domina

el disco estelar y en la gráfica 3.2c únicamente se cambiaron los valores de los parámetros α_h y β_h a los correspondientes al perfil de densidad NFW. En la gráfica 3.2b se están tomando el caso dominado por el halo de materia oscura, es decir, el modelo II y en la gráfica 3.2d solamente se cambiaron los parámetros α_h y β_h , como se indicó al principio.

Es importante notar que en los cuatro casos se logra reproducir satisfactoriamente la velocidad circular total al radio solar, lo que nos indica que fue un buen ajuste a pesar de ciertas discrepancias en el orden de magnitud para el ajuste del parámetro ρ_b al tomar el caso dominado por el disco estelar y el perfil de materia oscura NFW, como podemos notar en la cuarta fila de la tabla 3.3 y en la gráfica 3.2c.

En los casos en donde domina el halo de materia oscura podemos notar un cambio significativo en la amplitud del bulbo (gráficas 3.2b y 3.2d), la cual es dada a partir del parámetro ρ_b , en la cuarta fila de las tablas 3.4 y 3.3 dicho parámetro es del mismo orden de magnitud en ambos casos.

3.2. Ajuste para campo escalar.

En este análisis se decidió dejar al bulbo, disco estelar y medio interestelar fijos como primera aproximación debido a que el modelo de campo escalar de materia oscura para la velocidad circular (2.46) tiene cuatro parámetros libres, ρ_{sol} , m_a , ϵ y r_s , así podemos ver como contribuye cada parámetro.

Para refinar los rangos para obtener un mejor resultado se realizó una malla de 10 elementos por cada parámetro libre en los siguientes rangos:

- $\rho_{\text{sol}} = (\ln(1 \times 10^7), \ln(9 \times 10^{13})) [\text{M}_{\odot} \text{kpc}^{-3}]$.
- $m_a = (\ln(1 \times 10^{-21}), \ln(9 \times 10^{-20})) [\text{eV}]$.
- $\epsilon = (1 \times 10^{-4}, 0.2)$.

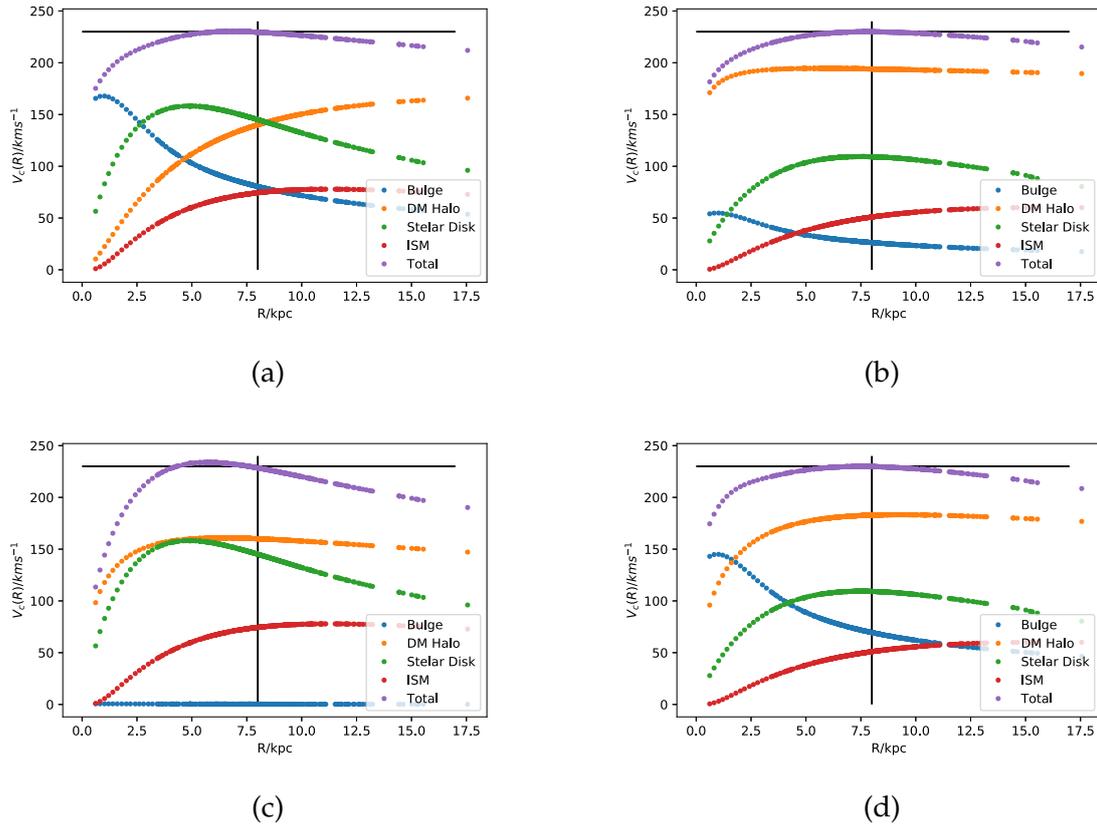


Figura 3.2: Curvas de rotación al hacer el ajuste de parámetros del bulbo y del halo de materia oscura en conjunto. Los puntos azules representan al bulbo con el ajuste de parámetros indicado en la cuarta fila de las tablas 3.2 y 3.3, los naranjas al halo de materia oscura, los verdes al disco estelar, los rojos al medio interestelar y los puntos morados representan la curva de rotación de la galaxia completa. La intersección de las líneas negras nos indica la velocidad circular al radio solar.

- $r_s = (0.1, 15.)$ [kpc].

El rango del parámetro correspondiente a la masa del axi3n (m_a) fue elegido en el rango de $(10^{-22}, 10^{-21})$ eV aproximadamente, lo cual coincide con las cotas mencionadas en [35, 36, 49, 50] y para el parámetro ϵ se decidi3n dejar un rango de $(0.001, 0.1)$ ya que para valores de ϵ mayores a 0.1 no se pod3a obtener informaci3n de la χ^2 . Los parámetros ρ_{sol} y r_s fueron acotados a los rangos $(10^{10}, 9 \times 10^{11}) \text{ M}_{\odot}/\text{kpc}^3$ y $(5, 10)$ kpc al ser aquellos con mayor probabilidad de minimizar la χ^2 .

Los ajustes obtenidos al tomar las consideraciones anteriores se encuentran en la tabla 3.6, donde podemos notar que obtenemos un buen ajuste para la masa del axi3n (m_a) y que el valor para la χ^2 en ambos modelos es del mismo orden, teniendo una diferencia entre ambas de 70.04. Lo anterior nos indica que obtenemos un mejor ajuste para el modelo II con mayor contribuci3n del halo de materia oscura, sin embargo, esto no nos permite descartar el modelo I.

Parámetros libres	Modelo I	χ^2	Modelo II	χ^2
$(\rho_{\text{sol}}, m_a, \epsilon, r_s)$	(3.79, 1.19, 8.94, 7.11)	2391.02	(4.24, 0.104, 9.14, 2.28)	2320.98

Tabla 3.6: Ajuste de parámetros del halo de materia oscura de campo escalar. En la primera columna se indican los parámetros libres del halo de materia oscura, donde ρ_{sol} está reportado en $[10^{10}\text{M}_{\odot}/\text{kpc}^3]$, m_a en $[10^{-21} \text{ eV}]$, r_s en [kpc] y ϵ es una cantidad adimensional reportada en 10^{-2} . En las columnas tres y cinco se reporta el respectivo valor de la χ^2 al realizar el ajuste de parámetros para los modelos I y II.

En las gráficas de la figura 3.3 se muestran las curvas de rotaci3n de cada una de las componentes de la galaxia y la curva total, donde es importante destacar la curva correspondiente al halo de materia oscura (color morado) y la curva de rotaci3n total de la galaxia (color azul), la cual al pasar por la intersecci3n de las líneas negras nos indica que estamos realizando un buen ajuste, ya que las líneas negras nos indican la velocidad circular al radio solar.

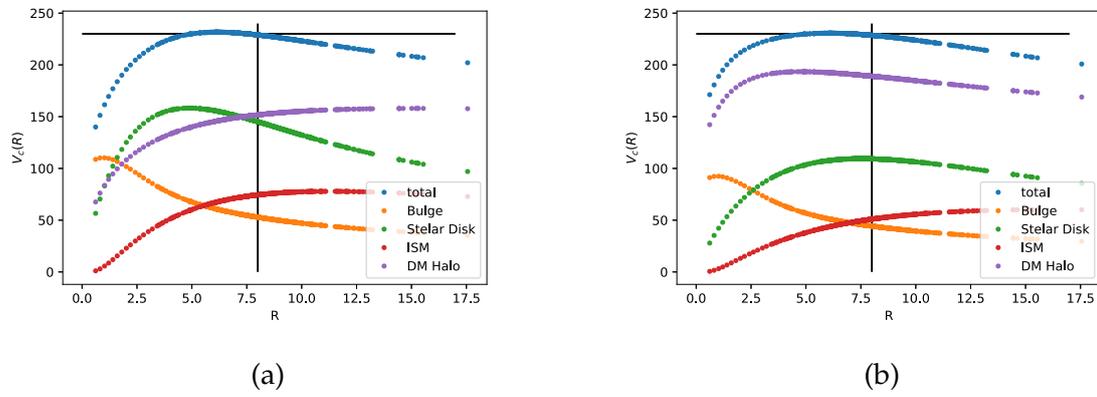


Figura 3.3: Ajuste de parámetros del halo de materia oscura como campo escalar. Los puntos naranjas corresponden al bulbo, los verdes al disco estelar, los rojos al medio interestelar, los morados al halo de materia oscura y los puntos azules representan la curva de rotación total de la galaxia como lo indica la leyenda. La intersección de las líneas negras nos indica la velocidad circular al radio solar como se fijó en un principio.

Conclusiones

Los ajustes de parámetros obtenidos para los dos modelos de materia oscura considerados fueron bastante buenos ya que se obtuvo una relación entre la velocidad circular y el radio solar satisfactoriamente. Sin embargo, idealmente deberíamos de poder realizar el ajuste de todos los parámetros libres de cada una de las componentes del modelo de la Vía Láctea, esto resultaría muy costoso computacionalmente por lo que este trabajo es una muy buena primera aproximación.

El modelo de la Vía Láctea es un modelo degenerado, debido a que la dinámica observada solamente puede ser reproducida teóricamente al tener mayor densidad, por lo que las formas de hacerlo es incrementar la densidad del disco estelar o del halo de materia oscura, haciendo el ajuste de parámetros de estos dos componentes en conjunto es complicado. Por lo anterior se decidió únicamente realizar el ajuste de los parámetros correspondientes a la dinámica del bulbo y del halo de materia oscura del perfil NFW[12] conjuntamente, obteniendo un buen ajuste de la curva de rotación al radio solar para todos los casos propuestos de los parámetros α_h y β_h del halo de materia oscura.

En el caso de la dinámica correspondiente al campo escalar de materia oscura únicamente se dejaron libres los parámetros del mismo, obteniendo un buen ajuste de la velocidad circular al radio solar para los cuatro parámetros. Por otro lado, existe una tensión entre los rangos en los que debería de estar la masa del axi3n debido a observaciones cosmol3gicas[51, 52], esto nos puede llegar a excluir ciertos 3rdenes de magnitud en la masa, lo que llevaría a rechazar o aceptar el ajuste obtenido en este trabajo, y as3 reducir esta tensi3n.

Un siguiente paso para mejorar el ajuste de parámetros adem3s de incrementar los grados de libertad y utilizar datos m3s actuales de los trazadores, ser3a utilizar

estadística bayesiana, ya que nos provee de herramientas que nos permiten discernir mejor entre un modelo y otro. Además de realizar un Monte Carlo Markov Chain, por ejemplo utilizando el algoritmo metropolis-hasting. Lo anterior consiste en generar números aleatoriamente tal que en el siguiente paso de tiempo los siguientes números estén influenciados por su valor anterior, si la probabilidad de que dado el primer paso pase el siguiente es mayor, entonces aceptamos ese número dado por el paso de tiempo y así sucesivamente hasta llegar al punto de convergencia en nuestro espacio de parámetros [53].

Bibliografía

- [1] John Noble Wilford. Jan h. oort, dutch astronomer in forefront of field, dies at 92. *The New York Times*, pages Section B, Page 15, 11 1992. Consultado el 16 de abril de 2019.
- [2] J. H. Oort. On a possible relation between globular clusters and stars of high velocity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 10(6):256–260, 1924.
- [3] J. G. de Swart, G. Bertone, and J. van Dongen. How dark matter came to matter. *Nature Astronomy*, 1:0059, Mar 2017.
- [4] F. Zwicky. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *apj*, 86:217, October 1937.
- [5] V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *apj*, 159:379, February 1970.
- [6] ESA. European Space Agency. Gaia. <http://sci.esa.int/gaia/28820-summary/>, April 2017. Accessed on 2019-06-15.
- [7] SDSS colaboration. Apogee overview. apache point observatory galactic evolution experiment (apogee). <https://www.sdss.org/dr12/irspec/>. Accessed on 2019-06-15.
- [8] 4MOST Colobotation. 4most — 4-metre multi-object spectroscopic telescope. <https://www.4most.eu/cms/>. Accessed on 2019-06-15.
- [9] European Southern Observatory. ESO. About the vvv survey. <https://vvvsurvey.org/about/about-vvv/>. Accessed on 2019-06-15.
- [10] European Southern Observatory. ESO. Moons - multi object optical and near-infrared spectrograph for the vlt. <https://www.eso.org/sci/facilities/develop/instruments/MOONS.html>. Accessed on 2019-06-15.

- [11] Miguel Pato and Fabio Iocco. *galkin*: A new compilation of Milky Way rotation curve data. *SoftwareX*, 6:54–62, Jan 2017.
- [12] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. The Structure of Cold Dark Matter Halos. *apj*, 462:563, May 1996.
- [13] Francisco Xavier Linares Cedeño. *Cosmological Evolution of Scalar Field Dark Matter with an Axion-like Potential*. PhD thesis, Universidad de Guanajuato, 02 2019.
- [14] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton University Press, 2008.
- [15] David P. Stern. Kepler’s three laws of planetary motion. an overview for science teachers. <https://www-istp.gsfc.nasa.gov/stargaze/Kep3laws.htm>, Abril 2014. Accessed on 2019-07-29.
- [16] H. Zhao. Analytical models for galactic nuclei. *mnras*, 278:488–496, January 1996.
- [17] L. Hernquist. An analytical model for spherical galaxies and bulges. *apj*, 356:359–364, June 1990.
- [18] W. Dehnen. A Family of Potential-Density Pairs for Spherical Galaxies and Bulges. *mnras*, 265:250, November 1993.
- [19] W. Jaffe. A simple model for the distribution of light in spherical galaxies. *mnras*, 202:995–999, March 1983.
- [20] G. de Vaucouleurs. Recherches sur les Nebuleuses Extragalactiques. *Annales d’Astrophysique*, 11:247, January 1948.
- [21] S. M. Kent, T. M. Dame, and G. Fazio. Galactic structure from the Spacelab infrared telescope. II - Luminosity models of the Milky Way. *apj*, 378:131–138, September 1991.
- [22] J. Binney and M. Merrifield. *Galactic Astronomy*. Princeton University Press, 1998.
- [23] Wolfram. MathWorld. Oblate spheroid. <http://mathworld.wolfram.com/OblateSpheroid.html>. Accessed on 2019-09-25.
- [24] J. Awrejcewicz. *Classical Mechanics: Dynamics*. Advances in Mechanics and Mathematics. Springer New York, 2012.

- [25] Walter Dehnen and James Binney. Mass models of the Milky Way. *mnras*, 294(3):429–438, Mar 1998.
- [26] H. T. Freudenreich. A COBE Model of the Galactic Bar and Disk. *apj*, 492:495–510, January 1998.
- [27] Wolfram. MathWorld. Ellipsoid. <http://mathworld.wolfram.com/Ellipsoid.html>. Accessed on 2019-09-25.
- [28] G. Gilmore and N. Reid. New light on faint stars. III - Galactic structure towards the South Pole and the Galactic thick disc. *mnras*, 202:1025–1047, March 1983.
- [29] T. M. Dame, H. Ungerechts, R. S. Cohen, E. J. de Geus, I. A. Grenier, J. May, D. C. Murphy, L.-A. Nyman, and P. Thaddeus. A composite CO survey of the entire Milky Way. *apj*, 322:706–720, November 1987.
- [30] Rob P. Olling and Michael R. Merrifield. Two measures of the shape of the dark halo of the Milky Way. *mnras*, 311(2):361–369, Jan 2000.
- [31] W. J. G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, C. Trachternach, S. H. Oh, and Jr. Kennicutt, R. C. High-Resolution Rotation Curves and Galaxy Mass Models from THINGS. *aj*, 136(6):2648–2719, Dec 2008.
- [32] Erik Zackrisson. *Quasars and Low Surface Brightness Galaxies as Probes of Dark Matter*. PhD thesis, Uppsala University, 2005 (Consultado el 14 de agosto de 2019). ISBN: 91-554-6273-1.
- [33] Juan Magaña and Tonatiuh Matos. A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model. In *Journal of Physics Conference Series*, volume 378 of *Journal of Physics Conference Series*, page 012012, Aug 2012.
- [34] Remo Ruffini and Silvano Bonazolla. Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783, Nov 1969.
- [35] Nitsan Bar, Diego Blas, Kfir Blum, and Sergey Sibiryakov. Galactic rotation curves versus ultralight dark matter: Implications of the soliton-host halo relation. *prd*, 98(8):083027, Oct 2018.

- [36] Nitsan Bar, Kfir Blum, Joshua Eby, and Ryosuke Sato. Ultralight dark matter in disk galaxies. *prd*, 99(10):103020, May 2019.
- [37] Mattia Mina, David F. Mota, and Hans A. Winther. SCALAR: an AMR code to simulate axion-like dark matter models. *arXiv e-prints*, page arXiv:1906.12160, Jun 2019.
- [38] Matteo Nori and Marco Baldi. AX-GADGET: a new code for cosmological simulations of Fuzzy Dark Matter and Axion models. *mnras*, 478(3):3935–3951, Aug 2018.
- [39] H.-Y. Schive, T. Chiueh, and T. Broadhurst. Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave. *Nature Physics*, 10:496–499, July 2014.
- [40] Hsi-Yu Schive, Ming-Hsuan Liao, Tak-Pong Woo, Shing-Kwong Wong, Tzihong Chiueh, Tom Broadhurst, and W-Y. Pauchy Hwang. Understanding the core-halo relation of quantum wave dark matter from 3d simulations. *Phys. Rev. Lett.*, 113:261302, Dec 2014.
- [41] Alma X. González-Morales, David J. E. Marsh, Jorge Peñarrubia, and Luis A. Ureña-López. Unbiased constraints on ultralight axion mass from dwarf spheroidal galaxies. *mnras*, 472(2):1346–1360, Dec 2017.
- [42] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, A. Jeffrey, and D. Zwillinger. *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier Academic Press, 2007.
- [43] M. I. Wilkinson and N. W. Evans. The present and future mass of the Milky Way halo. *mnras*, 310:645–662, December 1999.
- [44] Swinburne University of Technology. Cosmos - the sao encyclopedia of astronomy. <http://astronomy.swin.edu.au/cosmos/M/Masers>. Accessed on 2019-09-01.
- [45] F. Pont, M. Mayor, and G. Burki. New radial velocities for classical cepheids. Local galactic rotation revisited. *aap*, 285:415–439, May 1994.
- [46] L. G. Hou, J. L. Han, and W. B. Shi. The spiral structure of our Milky Way Galaxy. *aap*, 499(2):473–482, May 2009.

- [47] G. R. Knapp, A. A. Stark, and R. W. Wilson. The global properties of the Galaxy. III - Maps of the (C-12)(O) emission in the first quadrant of the Galaxy. , 90:254–300, February 1985.
- [48] Ralph Schönrich, James Binney, and Walter Dehnen. Local kinematics and the local standard of rest. *mnras*, 403(4):1829–1833, Apr 2010.
- [49] Ivan De Martino, Tom Broadhurst, S. H. Henry Tye, Tzihong Chiueh, and Hsi-Yu Schive. Dynamical Evidence of a Solitonic Core of $10^9 M_{\odot}$ in the Milky Way. *arXiv e-prints*, page arXiv:1807.08153, Jul 2018.
- [50] Brandon Bozek, David J. E. Marsh, Joseph Silk, and Rosemary F. G. Wyse. Galaxy UV-luminosity function and reionization constraints on axion dark matter. *mnras*, 450(1):209–222, Jun 2015.
- [51] Eric Armengaud, Nathalie Palanque-Delabrouille, Christophe Yèche, David J. E. Marsh, and Julien Baur. Constraining the mass of light bosonic dark matter using SDSS Lyman- α forest. *mnras*, 471(4):4606–4614, Nov 2017.
- [52] Takeshi Kobayashi, Riccardo Murgia, Andrea De Simone, Vid Iršič, and Matteo Viel. Lyman- α constraints on ultralight scalar dark matter: Implications for the early and late universe. *prd*, 96(12):123514, Dec 2017.
- [53] Maurie Kathan. Towards data science: Monte carlo markov chain. <https://towardsdatascience.com/markov-chain-monte-carlo-291d8a5975ae>, Febrero 2019. Accessed on 2019-06-09.
- [54] H. C. Plummer. On the problem of distribution in globular star clusters. *mnras*, 71:460–470, March 1911.
- [55] M. Miyamoto and R. Nagai. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *pasj*, 27:533–543, 1975.
- [56] L. Mestel. On the galactic law of rotation. *mnras*, 126:553, 1963.

Apéndice A

Otros modelos.

En este apéndice se presentan con detalle distintos modelos revisados en la literatura y al igual que en el capítulo 1 comenzaremos con aquellos con simetría esférica, para después continuar con sistemas planos. Por último en la sección A.3 realizamos una revisión de soluciones utilizadas para discos.

A.1. Sistemas con simetría esférica.

A.1.1. Modelo Plummer

En varios sistemas esféricos la densidad es raramente constante cerca del centro y tiende a cero en un radio más grande. Por lo que el potencial de un sistema de este tipo debería ser proporcional a $r^2 + cte$ a un radio pequeño y a $1/r$ a un mayor radio. Un modelo simple de un potencial con estas propiedades es el modelo de Plummer, propuesto para que se ajustara adecuadamente a las observaciones de cúmulos globulares [14, 54]

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}, \quad (\text{A.1})$$

donde M es la masa total del sistema y b es la escala de Plummer, la escala lineal del sistema que genera el potencial.

Para obtener el perfil de densidad generado por el potencial de la ecuación (A.1) usaremos la ecuación de Poisson en coordenadas esféricas

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right), \quad (\text{A.2})$$

donde al hacer las derivadas de la ecuación (A.1) tenemos

$$\nabla^2\Phi = \frac{3GMb^2}{(r^2 + b^2)^{5/2}}. \quad (\text{A.3})$$

De la ecuación de Poisson (1.5) podemos obtener la densidad correspondiente a este potencial al igualar con el resultado anterior (A.3)

$$\nabla^2\Phi = \frac{3GMb^2}{(r^2 + b^2)^{5/2}} = 4\pi G\rho \quad (\text{A.4})$$

y al despejar la densidad ρ tenemos

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi} \left(\frac{r^2}{b^2} + 1 \right)^{-5/2}. \quad (\text{A.5})$$

A.1.2. Modelo Isocrono

La posición de una estrella orbitando en un potencial de Plummer no puede ser dada en términos de funciones simples, razón por la que se propuso el potencial Isocrono, un potencial en el que todas las órbitas son analíticas [14]

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}. \quad (\text{A.6})$$

Usando la ecuación (1.12), derivaremos el potencial (A.6) respecto de r y haremos el cambio de variable $u = b + \sqrt{b^2 + r^2}$ con diferencial $du = -\frac{r}{\sqrt{b^2 + r^2}}dr$ para obtener la velocidad circular

$$v_c^2 = \frac{GMr^2}{(b + a)^2a}, \quad (\text{A.7})$$

donde hemos hecho $a = \sqrt{b^2 + r^2}$.

Podemos notar que r es demasiado grande en la ecuación (A.7) recuperamos la ecuación (1.13)

$$v_c^2 \sim \frac{GM}{r}. \quad (\text{A.8})$$

Debido a que la dependencia del potencial Isocrono (A.6) es únicamente en r , al usar la ecuación de Poisson (1.5) y despejar la densidad

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right), \quad (\text{A.9})$$

donde al realizar la derivada y reacomodando términos la densidad es

$$\rho(r) = M \left[\frac{3(b+a)a^2 - r^2(b+3a)}{4\pi(b+a)^3a^3} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Evaluando la ecuación (A.10) en $r = 0$ podemos obtener su densidad central,

$$\rho(r=0) = \frac{M}{4\pi} \frac{3(b+b)b^2}{(b+b)^3(b^2)^{3/2}} = \frac{M}{4\pi} \frac{6b^3}{8b^3b^3} = \frac{3M}{16\pi b^3}, \quad (\text{A.11})$$

y tomando el caso para un radio grande, es decir, $r \gg b$ la densidad es

$$\rho(r) \sim \frac{M}{4\pi} \left[\frac{3r^2(b+r) - r^2(b+3r)}{r^3(b+r)^3} \right] \sim \frac{M}{4\pi} \left[\frac{3r^2b + 3r^3 - r^2b - 3r^3}{r^6} \right] = \frac{Mb}{2\pi r^4}. \quad (\text{A.12})$$

A.1.3. Ley de potencias

Modelo de Jaffe

Al tomar $\gamma = 2$ y $\alpha = 1/2$, la ecuación (1.16) queda de la siguiente forma

$$M(r) = 4\pi\rho_0r_0^3 \frac{r/r_0}{1 + r/r_0}. \quad (\text{A.13})$$

Con la ecuación (1.10) y la ecuación anterior (1.19) podemos obtener el respectivo potencial a este modelo,

$$\Phi(r) = -4\pi G\rho_0r_0^3 \int_r^\infty dr' \frac{r/r_0}{(1 + \frac{r}{r_0})r'^2}. \quad (\text{A.14})$$

Cuya integral puede ser resuelta usando fracciones parciales, obteniendo

$$\Phi(r) = -4\pi G\rho_0r_0^2(\ln(r + r_0) - \ln r). \quad (\text{A.15})$$

Modelo de Hernquist.

Al tomar $\gamma = 1$ y $\alpha = 2/3$ obtenemos el modelo de Hernquist, cuya función de masa es obtenida al usar la ecuación (1.16)

$$M(r) = 4\pi\rho_0r_0^3 \frac{(r/r_0)^2}{2(r/r_0 + 1)^2}. \quad (\text{A.16})$$

Usando la ecuación anterior y la ecuación (1.10) podemos obtener el potencial para este modelo de la misma forma que con el modelo de Jaffe

$$\Phi(r) = -G \int_r^\infty dr' \frac{M(r')}{r'^2} = \frac{-4\pi G\rho_0r_0^3}{2} \int_r^\infty \frac{(r'/r_0)^2}{r'^2(1 + \frac{r'}{r_0})^2} dr', \quad (\text{A.17})$$

al eliminar términos y haciendo el cambio de variable $u = r' + r_0$ el potencial es

$$\Phi(r) = -4\pi G\rho_0r_0^2 \frac{1}{2(1 + \frac{r}{r_0})}. \quad (\text{A.18})$$

A.2. Sistemas planos

Describiremos las familias de potenciales que son generados por distribuciones de densidades axisimétricas, lo cual usaremos posteriormente para ilustrar características de la dinámica en galaxias axisimétricas.

A.2.1. Modelo Kuzmin

Considerando el potencial axisimétrico

$$\Phi_K(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}}, \quad (\text{A.19})$$

con $a \geq 0$. En $z < 0$ el potencial (A.19) es igual al potencial de una masa puntual localizada en $(R, z) = (0, a)$, si $z > 0$ entonces el potencial coincide con el generado por una masa puntual en $(0, -a)$. Por lo anterior, el laplaciano del potencial desaparece excepto en el plano $z = 0$.

Integrando la ecuación de Poisson (1.5) sobre un volumen, donde tomaremos a densidad de la siguiente forma

$$\rho(R, \phi, z) = \Sigma(R, \phi)\delta(z). \quad (\text{A.20})$$

En coordenadas cilíndricas

$$\int_V \nabla^2 \Phi(R, z) dR d\phi dz = 4\pi G \int \Sigma(R) dR d\phi, \quad (\text{A.21})$$

y usando el teorema de la divergencia en la ecuación anterior tenemos

$$\int_S \nabla \Phi(R, z) \cdot dS = 4\pi G \int \Sigma(R) dR d\phi. \quad (\text{A.22})$$

Elegiremos al volumen de integración tal que esté centrado en $z = 0$, incluyendo una pequeña parte del plano en $z = 0$, por lo que suponemos que $\Sigma(R)$ no varía sobre él y que se extiende la misma altura al rededor del plano. Así las contribuciones a la integral de superficie con R constante se cancelan entre ellas. Las contribuciones en ϕ son cero ya que el potencial es axisimétrico. Si el volumen delgado va a cero tendríamos

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 2\pi G \Sigma(R), \quad (\text{A.23})$$

donde

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{GM}{(R^2 + (a + |z|)^2)^{3/2}} \left(-\frac{1}{2} 2(a + |z|) \right) \Big|_{z=0} = \frac{GMa}{(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (\text{A.24})$$

La derivada parcial del potencial respecto de z , evaluada en $z = 0$ (A.24) corresponde al lado izquierdo de la ecuación (A.23), por lo que al despejar $\Sigma(R)$ obtenemos una expresión para la densidad superficial del modelo de Kuzmin

$$\Sigma(R) = \frac{Ma}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (\text{A.25})$$

A.2.2. Modelo de Miyamoto y Garai

Consideremos el siguiente potencial [55]

$$\Phi_M(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}, \quad (\text{A.26})$$

donde podemos notar que si tomamos $a = 0$ el potencial $\Phi_M(R, z)$ se reduce al modelo de Plummer (A.1) y si $b = 0$ tenemos el modelo de Kuzmin (A.19), es decir, dependiendo de la elección de los parámetros a y b el potencial $\Phi_M(R, z)$ puede representar un disco infinitesimalmente delgado o un sistema esférico.

Usando la ecuación de Poisson (1.5) en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho \quad (\text{A.27})$$

podemos encontrar una expresión para la densidad volumétrica correspondiente a éste modelo. Al no tener dependencia en ϕ el potencial $\Phi_M(R, z)$ su derivada respecto a ϕ es cero, por lo que al realizar las derivadas respecto a R y z podemos despejar ρ de la ecuación de Poisson en coordenadas cilíndricas y obtenemos la siguiente expresión para el perfil de densidad del modelo de Miyamoto y Garai

$$\rho(R, z) = \frac{b^2 M}{4\pi} \left[\frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{(z^2 + b^2)^{3/2}(R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2)^{5/2}} \right]. \quad (\text{A.28})$$

A.2.3. Modelo logarítmico

En los modelos descritos anteriormente la masa es finita, por lo que la velocidad circular asociada a estos potenciales decae como $v_c \propto R^{1/2}$ con R grande. Por otro lado, se ha visto que las curvas de rotación de las galaxias espirales tienden a ser planas a un radio grande. Si a R grande la velocidad circular es v_0 entonces de la ecuación (1.12) podemos notar que

$$\frac{d\Phi}{dR} = \frac{v_0^2}{R}, \quad (\text{A.29})$$

por lo que al resolver la ecuación diferencial el potencial es

$$\Phi \propto v_0^2 \ln R + C \quad (\text{A.30})$$

en esa región.

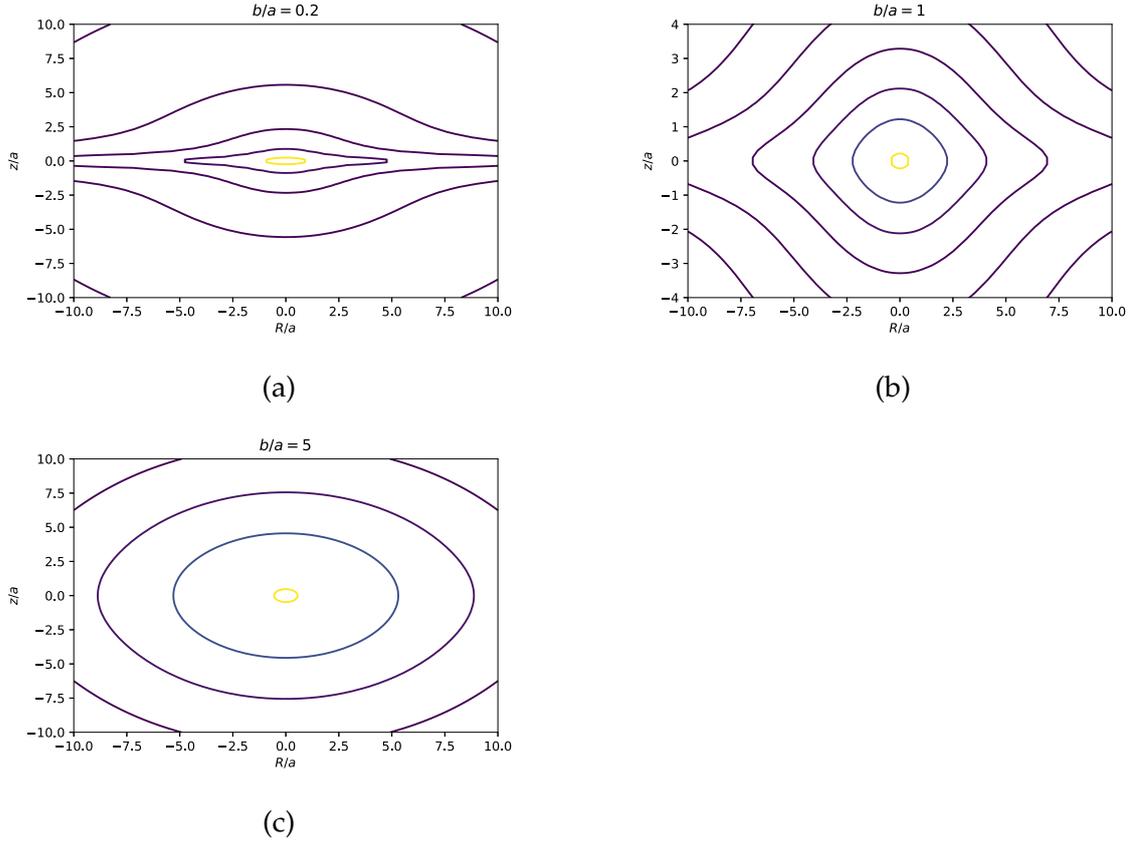


Figura A.1: **Líneas equipotenciales del modelo Miyamoto y Garai.** La gráfica (a) corresponde a tomar $b/a = 0.2$, la gráfica (b) a $b/a = 1$ y la gráfica (c) a tomar $b/a = 5$. Las gráficas están normalizadas respecto al parámetro a , sin embargo, están hechas con un valor de a arbitrario, $a = 1$.

Tomemos el siguiente potencial

$$\Phi = \frac{1}{2}v_0^2 \ln \left(R_c^2 + R^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} \right) + C, \quad (\text{A.31})$$

donde R_c, v_0 son constantes y q_Φ es el radio de la superficies equipotenciales.

Para obtener el perfil de densidad asociado a este potencial usaremos la ecuación de Poisson en coordenadas cilíndricas (A.27), donde el segundo término correspondiente a la segunda derivada parcial respecto de ϕ es igual a cero. Al realizar las otras derivadas y despejar ρ de la ecuación de Poisson (A.27) obtenemos que el perfil de densidad para el modelo logarítmico es

$$\rho(R, z) = \frac{v_0^2}{4\pi G q_\Phi^2} \left[\frac{R_c^2(1 + 2q_\Phi^2) + R^2 + z^2(2 - \frac{1}{q_\Phi^2})}{(R_c^2 + R^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2})^2} \right]. \quad (\text{A.32})$$

Finalmente, la velocidad circular para este modelo puede ser obtenida a partir de la ecuación (1.12), donde en este caso no es una derivada total del potencial respecto de

R sino una derivada parcial

$$v_c^2 = R \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{Rv_0^2}{2} \frac{2R}{R_c^2 + R^2 + \frac{z^2}{q_\Phi}}, \quad (\text{A.33})$$

en el plano ecuatorial, es decir, en $z = 0$

$$v_c = \frac{v_0 R}{\sqrt{R_c^2 + R^2}}. \quad (\text{A.34})$$

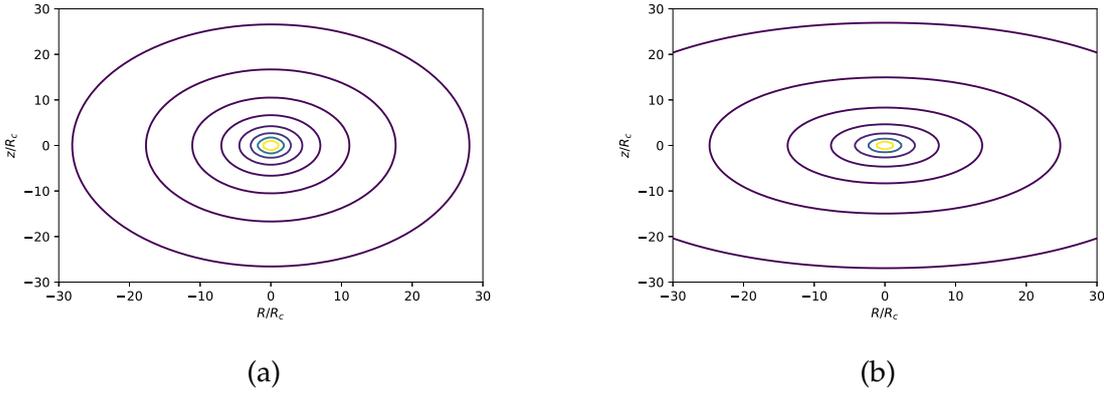


Figura A.2: **Líneas equipotenciales del modelo logarítmico.** El eje x correspondiente a R está normalizado con R_c al igual que el eje y correspondiente a z , en este caso tomamos un valor arbitrario, $R_c = 1$. La gráfica (a) corresponde a $q_\Phi = 0.95$ y la gráfica (b) a $q_\Phi = 0.7$.

A.3. Discos galácticos.

A.3.1. Disco Mestel

Consideremos la siguiente densidad superficial [56]

$$\Sigma(R) = \begin{cases} \frac{v_0^2}{2\pi GR} & R < R_{max} \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

donde v_0 es una constante con unidades de velocidad y R_{max} una constante con unidades de longitud. Al sustituir la densidad superficial en la ecuación (1.82) para obtener la velocidad circular cuadrática correspondiente

$$v_c^2(R) = -\frac{2v_0^2}{\pi} \int_0^R da \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} \frac{d}{da} \int_{a=R_{max}}^\infty \frac{dR'}{\sqrt{R'^2 - a^2}}, \quad (\text{A.36})$$

donde la integral respecto de R' es proporcional a $\cosh^{-1}\left(\frac{R_{max}}{a}\right)$, por lo que

$$\frac{d}{da} \left(\cosh^{-1} \left(\frac{R_{max}}{a} \right) \right) = -\frac{R_{max}}{a\sqrt{R_{max}^2 - a^2}}. \quad (\text{A.37})$$

Al tomar el límite del radio exterior $R_{max} \rightarrow \infty$

$$\lim_{R_{max} \rightarrow \infty} \frac{d}{da} \left(\cosh^{-1} \left(\frac{R_{max}}{a} \right) \right) = -\frac{1}{a}, \quad (\text{A.38})$$

a lo cual se le suele llamar disco de Mestel.

Sustituyendo en la expresión para la velocidad circular (A.36) el resultado anterior

$$v_c^2 = -\frac{2v_0^2}{\pi} \int_0^R da \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} \left(-\frac{1}{a} \right) = \frac{2v_0^2}{\pi} \int_0^R \frac{da}{\sqrt{R^2 - a^2}} = v_0^2. \quad (\text{A.39})$$

La velocidad circular de un disco en donde la densidad superficial es inversamente proporcional al radio, es independiente del radio. Por lo que para esta densidad superficial la velocidad circular está dada por

$$v_c^2(R) = \frac{GM(R)}{R}, \quad (\text{A.40})$$

donde

$$M(R) = 2\pi \int_0^R dR' R' \Sigma(R') = \frac{v_0^2 R}{G} \quad (\text{A.41})$$

es la masa en el interior de R .

El caso anteriormente descrito es un caso particular donde la velocidad circular cuadrática (A.40) corresponde a un sistema esféricamente simétrico.

Apéndice B

Medio interestelar.

Debido a la relación mencionada entre el disco galáctico y el medio interestelar resulta conveniente obtener su velocidad circular cuadrática de la misma forma que el disco galáctico, siguiendo el desarrollo de la sección 1.4.3.

Tomaremos al perfil de densidad del medio interestelar (2.16) de la forma (1.90), donde

$$\zeta(z) = \frac{1}{2z_g} e^{-|z|/z_g} \text{ y } \Sigma(R) = \Sigma_g e^{-R/R_g - R_m/R}. \quad (\text{B.1})$$

Así el potencial está dado de la forma (1.93) con $\Phi_0(R, z - z')$ dado por la ecuación (1.79) con la sustitución $z \rightarrow z - z'$, haremos la siguiente distinción para la derivada de la segunda integral

$$F(a) \equiv \frac{d}{da} \int_a^\infty dR' \frac{R' \Sigma(R')}{\sqrt{R'^2 - a^2}} = \frac{d}{da} \int_a^\infty dR' \frac{R' \Sigma_g e^{-R'/R_g - R_m/R'}}{\sqrt{R'^2 - a^2}}. \quad (\text{B.2})$$

Para la función $F(a)$ usaremos una de las propiedades de las integrales de Abel, pero primero haremos un cambio de variable para ser consistentes. Tomaremos a $x = R'^2$ con diferencial $dx = 2R' dR'$

$$F(a) = \frac{d}{da} \int_{a^2}^\infty \frac{1}{2} dx \frac{\Sigma_g e^{-x^{1/2}/R_g - R_m/x^{1/2}}}{\sqrt{x - a^2}} \quad (\text{B.3})$$

y haciendo otro cambio de variable $t = a^2$ con diferencial $dt = 2ada$, por regla de la cadena $\frac{d}{da} = \frac{dt}{da} \frac{d}{dt} = 2a \frac{d}{dt}$, así la función $F(a)$ es

$$F(a) = \Sigma_g \frac{2a}{2} \frac{d}{dt} \int_t^\infty dx \frac{e^{-x^{1/2}/R_g - R_m/x^{1/2}}}{\sqrt{x - t}}. \quad (\text{B.4})$$

Aplicaremos la siguiente propiedad a la función anterior

$$g(t) = -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{dx f(x)}{(x - t)^{1-\alpha}} \quad (\text{B.5})$$

$$= -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_t^\infty \frac{dx f(x)}{(x - t)^{1-\alpha}} \frac{df(x)}{dx}, \quad (\text{B.6})$$

donde en este caso $F(a)$ tiene la forma de $g(t)$ excepto por el factor π y $\alpha = 1/2$ por lo que

$$F(a) = \Sigma_g a \int_t^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-t}} \frac{1}{2x^{1/2}} e^{-x^{1/2}/R_g - R_m/x^{1/2}} \left(\frac{R_m}{x} - \frac{1}{R_g} \right). \quad (\text{B.7})$$

Ahora regresaremos los cambios de variable realizados, de $t \rightarrow a^2$

$$F(a) = \Sigma_g a \int_{a^2}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-a^2}} \frac{1}{2x^{1/2}} e^{-x^{1/2}/R_g - R_m/x^{1/2}} \left(\frac{R_m}{x} - \frac{1}{R_g} \right) \quad (\text{B.8})$$

y finalmente, regresando a $x = R'^2$

$$F(a) = \Sigma_g a \int_a^\infty \frac{2R' dR'}{\sqrt{R'^2 - a^2}} \frac{1}{2R'} e^{-R'/R_g - R_m/R'} \left(\frac{R_m}{R'^2} - \frac{1}{R_g} \right). \quad (\text{B.9})$$

Al sustituir la función $F(a)$ escrita de la forma anterior tenemos que el potencial (1.79) está dado de la siguiente forma

$$\Phi_0(R, z-z') = 4\Sigma_g \int_0^\infty da \sin^{-1} \left(\frac{2a}{\sqrt{+} + \sqrt{-}} \right) \int_a^\infty \frac{dR'}{\sqrt{R'^2 - a^2}} e^{-R'/R_g - R_m/R'} \left(\frac{R_m}{R'^2} - \frac{1}{R_g} \right), \quad (\text{B.10})$$

por lo que el potencial total del sistema es

$$\Phi(R, z) = \frac{4G\Sigma_g}{2z_g} \int_{-\infty}^\infty dz' e^{-|z'|/z_g} \int_0^\infty da \sin^{-1} \left(\frac{2a}{\sqrt{+} + \sqrt{-}} \right) \times \int_a^\infty \frac{dR'}{\sqrt{R'^2 - a^2}} e^{-R'/R_g - R_m/R'} \left(\frac{R_m}{R'^2} - \frac{1}{R_g} \right). \quad (\text{B.11})$$

Al hacer el cambio de variable en la segunda integral $l = R'/a$ con diferencial $dR' = a dl$ el potencial anterior puede ser escrito como

$$\Phi(R, z) = \frac{4G\Sigma_g}{2z_g R_g} \int_{-\infty}^\infty dz' e^{-|z'|/z_g} \int_0^\infty da \sin^{-1} \left(\frac{2a}{\sqrt{+} + \sqrt{-}} \right) \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{al}{R_g} - \frac{R_m}{al}}}{\sqrt{l^2 - 1}} \left(\frac{R_m R_g}{a^2 l^2 - 1} \right). \quad (\text{B.12})$$

Igual que con el disco estelar, el único término que depende de R es el argumento del \sin^{-1} por lo que para encontrar la velocidad circular cuadrática solamente debemos derivar ese término. Las derivadas de este término son la ecuación (2.14), por lo que la velocidad circular es

$$v_c^2(R, z=0) = R \frac{\partial \Phi(R, z=0)}{\partial R} = -\frac{4G\Sigma_g R}{2z_g R_g} \int_{-\infty}^\infty dz' e^{-|z'|/z_g} \times \int_0^\infty da \frac{au}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\frac{a+R}{\sqrt{(z-z')^2 + (a+R)^2}} - \frac{a-R}{\sqrt{(z-z')^2 + (a-R)^2}}}{\sqrt{(z-z')^2 + (a+R)^2} + \sqrt{(z-z')^2 + (a-R)^2}} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{al}{R_g} - \frac{R_m}{al}}}{\sqrt{l^2 - 1}} \left(\frac{R_m R_g}{a^2 l^2 - 1} \right) \Big|_{z=0}. \quad (\text{B.13})$$

La ecuación anterior nos da la velocidad circular cuadrática del medio interestelar, sin embargo, resolver las tres integrales numéricamente es costoso por lo que optaremos por usar la ecuación (1.82) para obtener la velocidad circular de esta componente,

donde daremos el mismo tratamiento a la derivada de la segunda integral (B.2). Sustituyendo la función $F(a)$ (B.9) en la ecuación (1.82)

$$v_c^2(R) = -\frac{4G\Sigma_g R^2}{R_g} \int_0^R da \frac{a^2}{\sqrt{R^2 - a^2}} \int_a^\infty dR' \frac{e^{-R'/R_g - R_m/R'}}{\sqrt{R'^2 - a^2}} \left(\frac{R_m R_g}{R'^2} - 1 \right). \quad (\text{B.14})$$

Haremos dos cambios de variables, el primero $s = R'/a$ con diferencial $dR' = ads$

$$v_c^2(R) = -\frac{4G\Sigma_g R^2}{R_g} \int_0^R da \frac{a^2}{\sqrt{R^2 - a^2}} \int_1^\infty ds \frac{ae^{-\frac{as}{R_g} - \frac{R_m}{as}}}{\sqrt{a^2 s^2 - a^2}} \left(\frac{R_m R_g}{a^2 s^2} - 1 \right) \quad (\text{B.15})$$

y el segundo $h = a/R$ con diferencial $da = Rdh$

$$v_c^2(R) = -\frac{4G\Sigma_g R^2}{R_g} \int_0^1 Rdh \frac{R^2 h^2}{\sqrt{R^2 - R^2 h^2}} \int_1^\infty ds \frac{e^{-\frac{Rhs}{R_g} - \frac{R_m}{Rhs}}}{\sqrt{s^2 - 1}} \left(\frac{R_m R_g}{R^2 h^2 s^2} - 1 \right). \quad (\text{B.16})$$

La expresión final que nos da la velocidad circular del medio interestelar tomando la ecuación (1.82) es

$$v_c^2(R) = -\frac{4G\Sigma_g R^2}{R_g} \int_0^1 \frac{dh}{\sqrt{1 - h^2}} \int_1^\infty ds \frac{e^{-\frac{Rhs}{R_g} - \frac{R_m}{Rhs}}}{\sqrt{s^2 - 1}} \left(\frac{R_m R_g}{R^2 s^2} - h^2 \right), \quad (\text{B.17})$$

es importante notar que la ecuación(2.23) no tiene dependencia en z' a diferencia de (B.13),esto quiere decir que al usar la ecuación (2.23) estamos tomando al medio interestelar como un disco delgado como una navaja, sin embargo, al comparar ambas expresiones cualitativamente en las gráficas de la figura (B.1) podemos notar que sus diferencias son mínimas tanto para el modelo I como para el modelo II, permitiéndonos tomar la aproximación para esta componente.

En la figura 2.4 tenemos las gráficas para los modelos I y II de la velocidad circular cuadrática del medio interestelar al tomar la ecuación (2.23), línea color azul y (2.22), línea color naranja. Podemos notar una diferencia significativa entre tomar a la ecuación (2.23) y (2.22), pero al comparar la contribución de ambas a la velocidad circular total de la Vía Láctea resulta en una diferencia muy pequeña que podemos observar en las gráficas de la figura B.2. Optando por tomar la forma más simple que describe la cinemática de la galaxia.

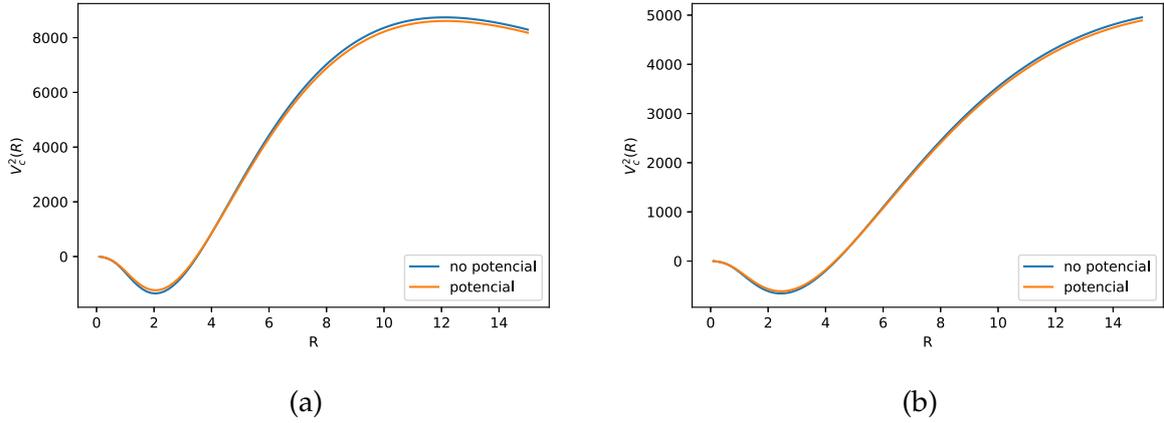


Figura B.1: **Velocidad circular cuadrática del medio interestelar.** La gráfica (a) corresponde al modelo I y la gráfica (b) corresponde al modelo II. Las líneas azules representan la velocidad circular obtenida a partir de la ecuación (2.23) y las líneas naranjas a partir de la ecuación (B.13)

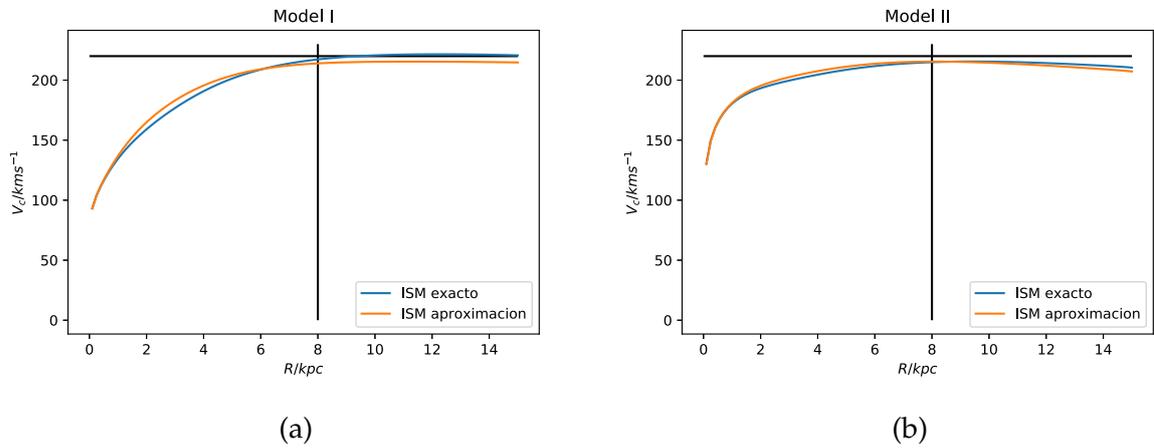


Figura B.2: **Velocidad circular total de la Vía Láctea.** La gráfica (a) corresponde al modelo I y la gráfica (b) corresponde al modelo II. Las líneas azules representan la velocidad circular total al tomar a la velocidad circular cuadrática del medio interestelar con la ecuación (2.23) y las líneas naranjas a partir de la ecuación (2.22). Las líneas negras indican el radio solar tomado en $R_0 = 8\text{kpc}$ y la velocidad circular en el radio solar $v_c(R_0) = 220\text{km/s}$.

Apéndice C

Análisis en Python

A continuación se muestra el notebook de python con el que se realizaron los ajustes, dicho notebook también puede ser consultado en https://github.com/atalianb/ParaTesis_1/blob/master/Complete_Analysis.ipynb. El resto de los notebooks realizados se encuentran en https://github.com/atalianb/ParaTesis_1.

```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import integrate
from scipy.special import kn
from scipy.optimize import minimize
import galkin
import galkin.processdata # routines to process kinematic data
import galkin.readparsFile # routines to read and check input parameters
%pylab inline
```

Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib

```
In [2]: #10.3, 15.3, 7.7 from the paper
# Galactic parameters
RO=8.0# Galactocentric distance (kpc)
VO=230.# local circular velocity (km/s)
UsunINUSE=11.10# solar motion in the U-direction (km/s), e.g. from Schoenrich+ '10,
VsunINUSE=12.24# solar motion in the V-direction (km/s), e.g. from Schoenrich+ '10,
WsunINUSE=07.25# solar motion in the W-direction (km/s), e.g. from Schoenrich+ '10,
SYSTDISP=0.# systematic dispersion due to spiral arm streaming (km/s)
```

```
In [3]: # Flags
flagPROPERMOTIONS=0 # proper motions not supported
flagHITERMINAL=0 # whether to use HI terminal velocity
flagFich89tab2=0 # whether to use Fich+ '89, ApJ 342
flagMalhotra95=0 # whether to use Malhotra '95, ApJ
flagMcClureGriffithsDickey07=0 # whether to use McClure-Grij
flagHITHICKNESS=0 # whether to use the HI thickness
flagHonmaSofue97=0 # whether to use Honma & Sofue '97
flagCOTERMINAL=1 # whether to use CO terminal velocity
flagBurtonGordon78=0 # whether to use Burton & Gordon '78
flagClemens85=0 # whether to use Clemens '85
flagKnapp85=1 # whether to use Knapp+ '85, M
flagLuna06=0 # whether to use Luna+ '06, Ap
flagHIIREGIONS=1 # whether to use HII regions
flagBlitz79=0 # whether to use Blitz '79, Ap
flagFich89tab1=0 # whether to use Fich+ '89, ApJ 342
flagTurbideMoffat93=0 # whether to use Turbide & Moffat '93
flagBrandBlitz93=0 # whether to use Brand & Blitz '93
flagHou09tabA1=1 # whether to use Hou+ '09, A&A 499,
flagGMC=0 # whether to use giant molecular clouds
flagHou09tabA2=0 # whether to use Hou+ '09, A&A 499,
##
flagOPENCLUSTERS=0 # whether to use open clusters
flagFrinchaboyMajewski08=0 # whether to use Frinchaboy & Maj
flagPLANETARYNEBULAE=0 # whether to use planetary ne
flagDurand98=0 # whether to use Durand+ '98,
flagCEPHEIDS=1 # whether to use classical ce
flagPont94=1 # whether to use Pont+ '94, A&
flagPont97=0 # whether to use Pont+ '97, A&
flagCSTARS=0 # whether to use carbon stars
flagDemersBattinelli07=0 # whether to use Demers & Battinelli
flagBattinelli12=0 # whether to use Battinelli+ '12,
```

```

###
flagMASERS=0 # whether to use masers
flagReid14=0 # whether to use Reid+ '14, Ap.
flagHonma12=0 # whether to use Honma+ '12, I
flagStepanishchevBobylev11=0 # whether to use Stepanishchev
flagXu13=0 # whether to use Xu+ '13, ApJ 769
flagBobylevBajkova13=0 # whether to use Bobylev & Ba
##
flagastropy=0 # whether to use astropy for

```

In [4]: inputpars=(R0,V0,UsunINUSE,VsunINUSE,WsunINUSE,SYSTDISP, flagPROPERMOTIONS,flagHITE

In [5]: galkin.readparsFile.CheckAndPrintParameters(inputpars)

```

checking validity of input parameters...
printing input parameters...
R0= 8.0 kpc
V0= 230.0 km/s
(Usun,Vsun,Wsun) = ( 11.1 , 12.24 , 7.25 ) km/s
systematic dispersion = 0.0 km/s
use HI terminal velocities? 0
use HI thickness method? 0
use CO terminal velocities? 1
  use Burton & Gordon 78? 0
  use Clemens 85? 0
  use Knapp+ 85? 1
  use Luna+ 06? 0
use HII regions? 1
  use Blitz 79? 0
  use Fich+ 89 (Table 1)? 0
  use Turbide & Moffat 93? 0
  use Brand & Blitz 93? 0
  use Hou+ 09 (Table A1)? 1
use giant molecular clouds? 0
use open clusters? 0
use planetary nebulae? 0
use cepheids? 1
  use Pont+ 94? 1
  use Pont+ 97? 0
use C stars? 0
use masers? 0
use astropy? 0

```

In [6]: vecout=galkin.processsdata.ProcessData(inputpars)
totallistvc=vecout[0]

```

processing CO terminal velocities...
  processing Knapp+ 85...
    selected 37 CO terminal velocities
processing HII regions...
  processing Hou+ 09 (Table A1)...
    selected 316 out of the total sample of 815 HII regions
processing classical cepheids...
  processing Pont+ 94...

```

selected 245 out of the total sample of 278 cepheids

```
In [7]: vecRp      = np.array([row[0] for row in totallistvc])# galactocentric distance [kpc]
vecerrRp = np.array([row[1] for row in totallistvc])# error in galactocentric disto
vecvRp   = np.array([row[2] for row in totallistvc])# rotation velocity [km/s]
vecerrvRp= np.array([row[3] for row in totallistvc])# error in rotation velocity [k
```

```
In [8]: rho_soliton = 2.42e9#SM*kpc-3
m_axion = 2.44e-22#eV
#Constants
G = 4.302e-6#kpc/SM(km/s)^2
q_b = 0.6
r_b = 1.9#kpc
a_b = 1.#kpc
q_h = 0.8
alpha_b = 1.8
R_m = 4.#kpc
#parameters model I
rho_b_I = 0.427e9#sM/kpc^3
a_h_I = 3.83#kpc
rho_h_I = 0.711e9#SM/kpc^3
alpha_h_I = -2.
beta_h_I = 2.96
R_d_I = 2.0#kpc
R_d_II = 3.2#kpc
Sigma_d_SD_I = (1905.0e6)*0.75#SM/kpc^2
Sigma_g_ISM_I = (1905.0e6)*0.25#SM/kpc^2
#parameters model II
rho_b_II = 0.3e9#sM/kpc^3
a_h_II = 1.9#kpc
rho_h_II = 0.266e9#SM/kpc^3
alpha_h_II = 1.63
beta_h_II = 2.17
R_d_II = 3.2#kpc
Sigma_d_SD_II = (536.0e6)*0.75#SM/kpc^2
Sigma_g_ISM_II = (536.0e6)*0.25#SM/kpc^2
```

```
In [9]: def Vc2_b(R,rho_b,q_b=q_b,alpha_b=alpha_b,r_b=r_b,a_b=a_b):
def I_b(x,R):
    e = np.sqrt(1. - q_b**2.)
    n = x**(2.-alpha_b)*np.exp(-(R**2.*x**2.)/r_b**2.)
    d = np.sqrt(1.-x**2.*e**2.)
    t = R**2.*(R/a_b)**(-alpha_b)
    return (t*n)/d
Rx = R.reshape(-1, 1)
yp = np.linspace(0.,1.,100).reshape(1,-1)#integration limits
dx = yp[0,1] - yp[0,0]
fun = I_b(yp,Rx)
res_int = integrate.simps(fun,dx=dx)
return 4.*np.pi*G*q_b*rho_b*res_int
```

```
In [10]: Vc2_b_I = Vc2_b(vecRp,rho_b=rho_b_I)
Vc2_b_II = Vc2_b(vecRp,rho_b=rho_b_II)
```

```

In [11]: def Vc2_DM(R,a_h,rho_h,alpha_h,beta_h,q_h=q_h):
def I_h(x,R):
    e = np.sqrt(1.- q_h**2.)
    n = x**(2.-alpha_h)*(1.+ (x*R)/(a_h))**(alpha_h-beta_h)
    d = np.sqrt(1-x**2.*e**2)
    t = R**2.*(R/a_h)**(-alpha_h)
    result = (t*n)/d
    return result
Rx = R.reshape(-1, 1)
yp = np.linspace(0.,1.,100).reshape(1,-1)#integration limits
dx = yp[0,1] - yp[0,0]
fun = I_h(yp,Rx)
res_int = integrate.simps(fun,dx=dx)
return 4.*np.pi*G*q_h*rho_h*res_int

In [12]: Vc2_DM_I = Vc2_DM(vecRp,a_h_I,rho_h_I,alpha_h_I,beta_h_I)
Vc2_DM_II = Vc2_DM(vecRp,a_h_II,rho_h_II,alpha_h_II,beta_h_II)

In [13]: def Vc2_SD_simps(R,R_d,Sigma_d_SD,z=0.,alpha_0=0.5,z1=1.,z0=0.3):
def I_SD(zp,a,R):
    d = np.sqrt((a+R)**2. + (z-zp)**2.) + np.sqrt((a-R)**2. + (z-zp)**2.)
    u = (2.*a)/d
    t2 = u/np.sqrt(1-u**2.)
    t1 = (a+R)/(np.sqrt((a+R)**2. + (z-zp)**2.)) - (a-R)/(np.sqrt((a-R)**2. +
g = -a*kn(0,a/R_d)*t2*t1/d
f = (alpha_0*np.exp(-abs(zp)/z0))/(2.*z0) + np.exp(-abs(zp)/z1)/(2.*z1) -
    return R*f*g
Integral_SD_simps = []
a_lims = np.linspace(0.1, 15.0,len(R))
zp_lims = np.linspace(-15.0,15.0,len(R))
fun_zp = np.zeros(len(R))
for k in range(0,len(R)):
    for i in range(0,len(R)):
        fun_zp[i] = integrate.simps(I_SD(zp_lims[i],a_lims,R[k]),a_lims)
    result = integrate.simps(fun_zp,zp_lims)
    Integral_SD_simps.append(result)
return -4.*G*Sigma_d_SD*np.array(Integral_SD_simps)/R_d

In [14]: Vc2_SD_I=Vc2_SD_simps(vecRp,R_d_I,Sigma_d_SD_I)
Vc2_SD_II=Vc2_SD_simps(vecRp,R_d_II,Sigma_d_SD_II)

In [15]: def Vc2_ISM(R,R_d,Sigma_g_ISM,R_m=R_m):
def M_g_ISM(u,R):
    return R*u*np.exp(-((R*u)/(2.*R_d))-(R_m/(R*u)))
Integral_M_g = []
for i in range(0,len(R)):
    result = integrate.quad(M_g_ISM,0,1,args=(R[i]))[0]
    Integral_M_g.append(result)
return 2.*np.pi*Sigma_g_ISM*G*np.array(Integral_M_g)

In [16]: Vc2_ISM_I=Vc2_ISM(vecRp,R_d_I,Sigma_g_ISM_I)
Vc2_ISM_II=Vc2_ISM(vecRp,R_d_II,Sigma_g_ISM_II)

In [17]: Vc_tot_I = np.sqrt(Vc2_b_I + Vc2_DM_I + Vc2_SD_I + Vc2_ISM_I)
Vc_tot_II = np.sqrt(Vc2_b_II + Vc2_DM_II + Vc2_SD_II + Vc2_ISM_II)

```

1 Un solo parámetro del modelo

ρ_b

```
In [18]: def Vc_tot_rho_b_I(R,param):
         rho_b = param
         suma = Vc2_b(R,rho_b) + Vc2_DM_I + Vc2_SD_I + Vc2_ISM_I
         return np.sqrt(suma)

In [19]: def Vc_tot_rho_b_II(R,param):
         rho_b = param
         suma = Vc2_b(R,rho_b) + Vc2_DM_II + Vc2_SD_II + Vc2_ISM_II
         return np.sqrt(suma)

In [20]: #def Vc_tot_rho_b_I(R,param,params):
         # rho_b = param
         # a_h,rho_h,alpha_h,beta_h,R_d,Sigma_d_SD,Sigma_g_ISM = params
         # suma = Vc2_b(R,rho_b) + Vc2_DM(R,a_h,rho_h,alpha_h,beta_h) + Vc2_SD_simps(R,l
         # return np.sqrt(suma)

In [25]: def Xi2_rho_b_I(parameters):
         rho_b = np.exp(parameters)
         model = Vc_tot_rho_b_I(vecRp,rho_b)
         xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
         return xi

In [26]: def Xi2_rho_b_II(parameters):
         rho_b = np.exp(parameters)
         model = Vc_tot_rho_b_II(vecRp,rho_b)
         xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
         return xi

In [27]: x0_rho_b = np.array(np.log(1.0e8))
         LS_rho_b_I = minimize(Xi2_rho_b_I,x0_rho_b,method='L-BFGS-B',bounds=((np.log(1.0e8
         print LS_rho_b_I

         fun: 2330.5099908761063
         hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
         jac: array([0.0003638])
         message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= FACTR*EPSMCH'
         nfev: 14
         nit: 3
         status: 0
         success: True
         x: array([20.98647195])

In [28]: LS_rho_b_II = minimize(Xi2_rho_b_II,x0_rho_b,method='L-BFGS-B',bounds=((np.log(1.0e8
         print LS_rho_b_II

         fun: 2681.270120762674
         hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
         jac: array([-0.0001819])
         message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= FACTR*EPSMCH'
         nfev: 18
```

```

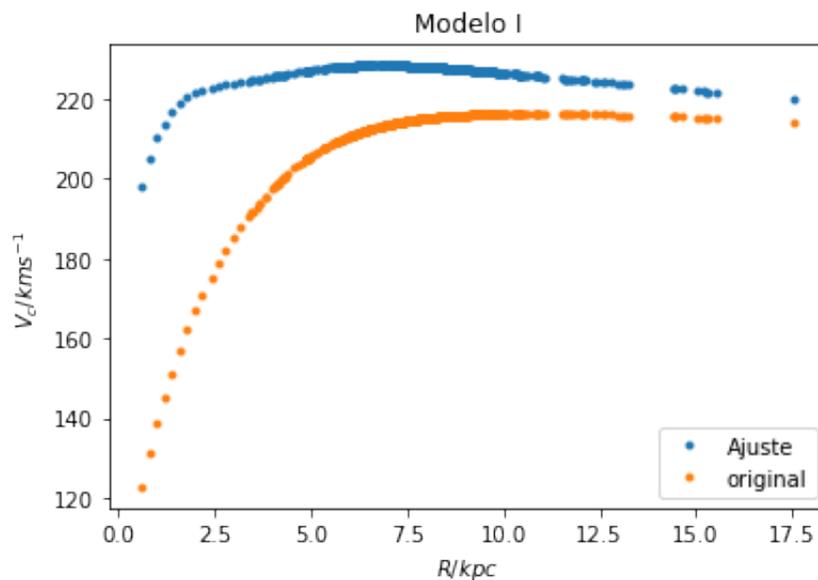
nit: 5
status: 0
success: True
x: array([20.7099686])

```

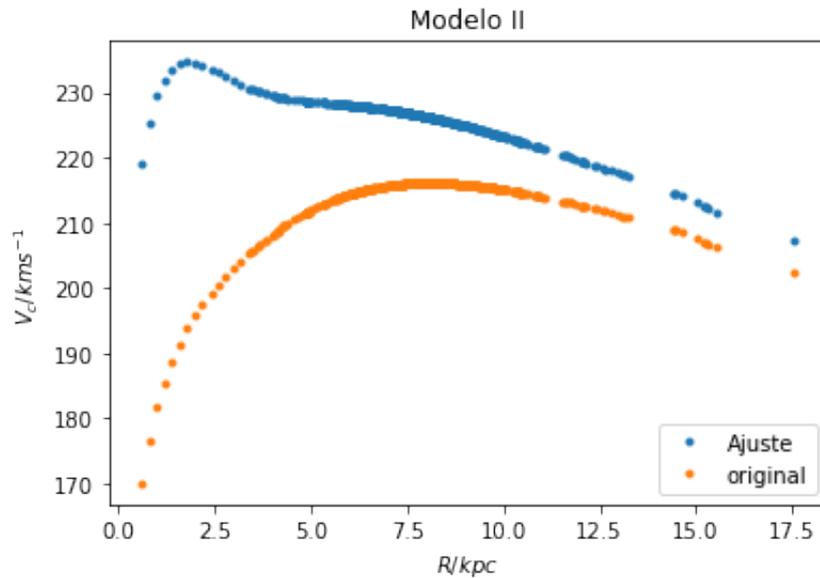
```
In [29]: print np.exp(LS_rho_b_I.x), np.exp(LS_rho_b_II.x)
```

```
[1.30109486e+09] [9.86790777e+08]
```

```
In [30]: plt.plot(vecRp, Vc_tot_rho_b_I(vecRp, np.asscalar(np.exp(LS_rho_b_I.x))), '.', label='
plt.plot(vecRp, Vc_tot_I, '.', label='original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo I')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_rho_b_I.pdf')
```



```
In [31]: plt.plot(vecRp, Vc_tot_rho_b_II(vecRp, np.asscalar(np.exp(LS_rho_b_II.x))), '.', label
plt.plot(vecRp, Vc_tot_II, '.', label='original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo II')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_rho_b_II.pdf')
```



a_h

```
In [32]: def Vc_tot_a_h_I(R,param):
    a_h = param
    suma = Vc2_b_I + Vc2_DM(R,a_h,rho_h_I,alpha_h_I,beta_h_I) + Vc2_SD_I + Vc2_ISM
    return np.sqrt(suma)

In [33]: def Vc_tot_a_h_II(R,param):
    a_h = param
    suma = Vc2_b_II + Vc2_DM(R,a_h,rho_h_II,alpha_h_II,beta_h_II) + Vc2_SD_II + Vc
    return np.sqrt(suma)

In [34]: def Xi2_a_hI(parameters):
    a_h = parameters
    model = Vc_tot_a_h_I(vecRp,a_h)
    xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
    return xi

In [35]: def Xi2_a_hII(parameters):
    a_h = parameters
    model = Vc_tot_a_h_II(vecRp,a_h)
    xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
    return xi

In [36]: x0_a_h = np.array(1.0)
    LS_a_h_I = minimize(Xi2_a_hI,x0_a_h,method='L-BFGS-B',bounds=((1.0,9.)),)
    print LS_a_h_I

    fun: 4656.750683819073
    hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
    jac: array([0.]
```

```

message: 'CONVERGENCE: NORM_OF_PROJECTED_GRADIENT_<=_PGTOL'
nfev: 18
nit: 5
status: 0
success: True
x: array([5.71212142])

```

```

In [37]: LS_a_h_II = minimize(Xi2_a_hII,x0_a_h,method='L-BFGS-B',bounds=((1.0,9.)),)
print LS_a_h_II

```

```

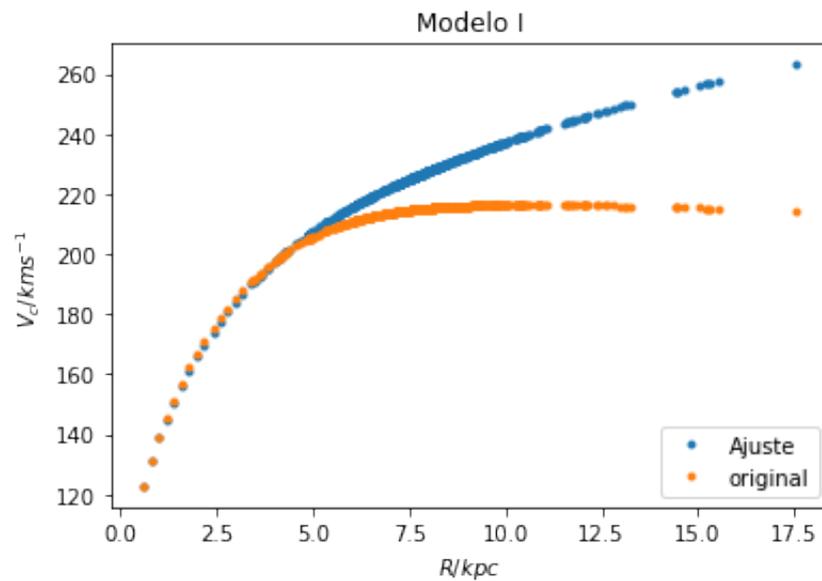
fun: 2266.942281435001
hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
jac: array([-4.54747351e-05])
message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<=_FACTR*EPSMCH'
nfev: 16
nit: 6
status: 0
success: True
x: array([2.0898071])

```

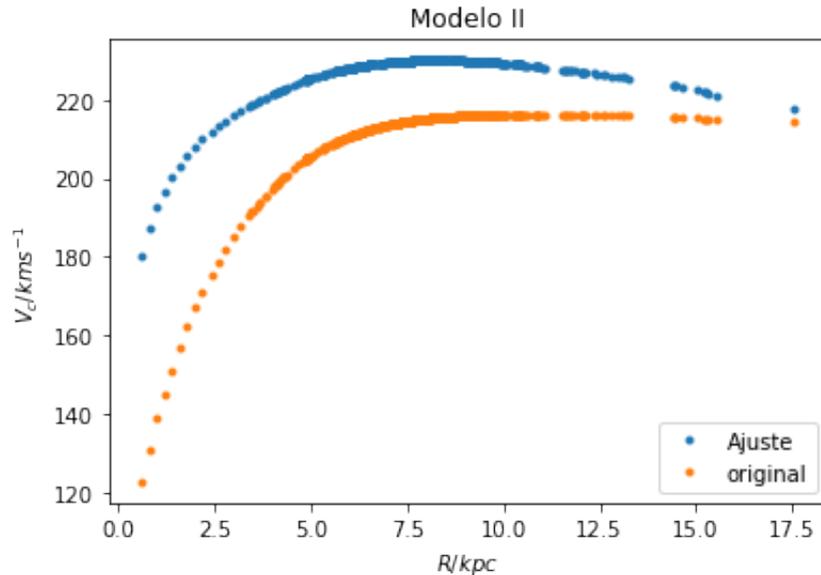
```

In [38]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_a_h_I(vecRp,np.asscalar(LS_a_h_I.x)),'.',label='Ajuste')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_I, '.',label='original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo I')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_a_h_I.pdf')

```



```
In [39]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_a_h_II(vecRp,np.asscalar(LS_a_h_II.x)),'.',label='Ajuste')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_I, '.',label='original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo II')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_a_h_II.pdf')
```



ρ_h

```
In [49]: def Vc_tot_rho_h_I(R,param):
rho_h = param
suma = Vc2_b_I + Vc2_DM(R,a_h_I,rho_h,alpha_h_I,beta_h_I) + Vc2_SD_I + Vc2_ISM
return np.sqrt(suma)
```

```
In [56]: def Vc_tot_rho_h_II(R,param):
rho_h = param
suma = Vc2_b_II + Vc2_DM(R,a_h_II,rho_h,alpha_h_II,beta_h_II) + Vc2_SD_II + Vc
return np.sqrt(suma)
```

```
In [57]: def Xi2_rho_h_I(parameters):
rho_h = np.exp(parameters)
model = Vc_tot_rho_h_I(vecRp,rho_h)
xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrRp)**2.)
return xi
```

```
In [58]: def Xi2_rho_h_II(parameters):
rho_h = np.exp(parameters)
model = Vc_tot_rho_h_II(vecRp,rho_h)
xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrRp)**2.)
return xi
```

```

In [59]: x0_rho_h = np.array(np.log(1.0e8))
         LS_rho_h_I = minimize(Xi2_rho_h_I,x0_rho_h,method='L-BFGS-B',bounds=((np.log(1.0e8),
         print LS_rho_h_I

         fun: 3481.3481004159257
hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
         jac: array([-0.00163709])
message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= _FACTR*EPSMCH'
         nfev: 16
         nit: 3
         status: 0
         success: True
         x: array([20.74110992])

In [60]: LS_rho_h_II = minimize(Xi2_rho_h_II,x0_rho_h,method='L-BFGS-B',bounds=((np.log(1.0e8),
         print LS_rho_h_II

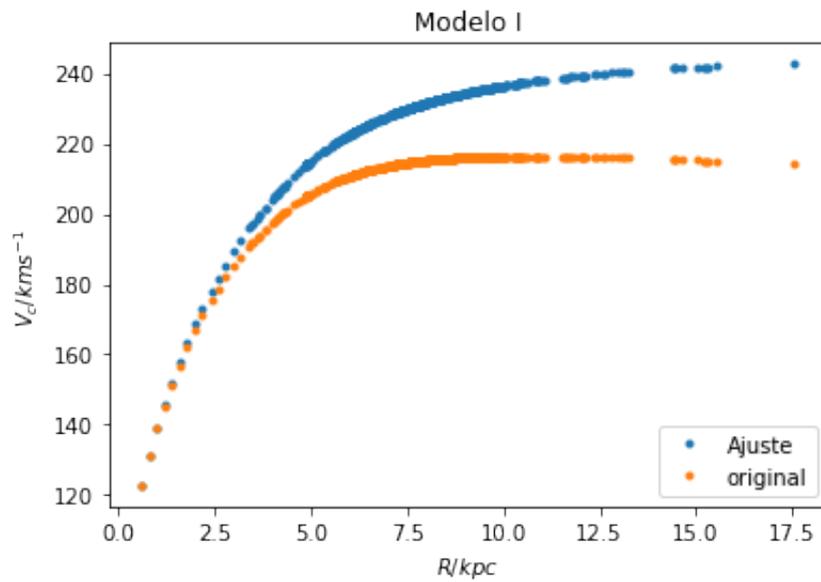
         fun: 2262.254355845996
hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
         jac: array([-0.00040927])
message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= _FACTR*EPSMCH'
         nfev: 16
         nit: 5
         status: 0
         success: True
         x: array([19.58533238])

In [61]: print np.exp(LS_rho_h_I.x),np.exp(LS_rho_h_II.x)

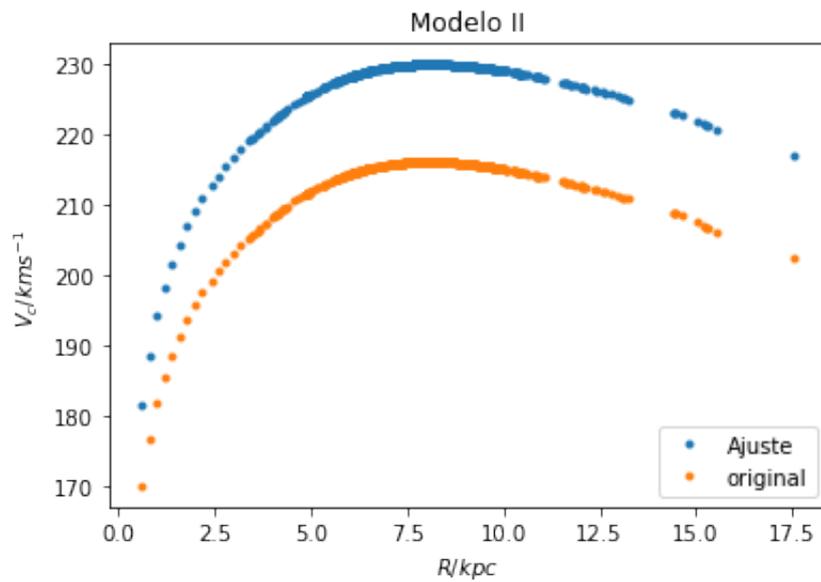
[1.01800424e+09] [3.20480626e+08]

In [62]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_rho_h_I(vecRp,np.asscalar(np.exp(LS_rho_h_I.x))),'.',label='
         plt.plot(vecRp,Vc_tot_I, '.',label='original')
         plt.xlabel(r'$R/kpc$')
         plt.ylabel(r'$V_{c}/km s^{-1}$')
         plt.title('Modelo I')
         plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
         plt.savefig('Fit_rho_h_I.pdf')

```



```
In [63]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_rho_h_II(vecRp,np.asscalar(np.exp(LS_rho_h_II.x))),'.',label=
plt.plot(vecRp,Vc_tot_II, '.',label='original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo II')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_rho_h_II.pdf')
```



```

 $\alpha_h$ 
In [64]: def Vc_tot_alpha_h_I(R,param):
        alpha_h = param
        suma = Vc2_b_I + Vc2_DM(R,a_h_I,rho_h_I,alpha_h,beta_h_I) + Vc2_SD_I + Vc2_ISM
        return np.sqrt(suma)

In [65]: def Vc_tot_alpha_h_II(R,param):
        alpha_h = param
        suma = Vc2_b_II + Vc2_DM(R,a_h_II,rho_h_II,alpha_h,beta_h_II) + Vc2_SD_II + Vc
        return np.sqrt(suma)

In [66]: def Xi2_alpha_h_I(parameters):
        alpha_h = parameters
        model = Vc_tot_alpha_h_I(vecRp,alpha_h)
        xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
        return xi

In [75]: def Xi2_alpha_h_II(parameters):
        alpha_h = parameters
        model = Vc_tot_alpha_h_II(vecRp,alpha_h)
        xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
        return xi

In [70]: x0_alpha_h = np.array(-3.)
        LS_alpha_h_I = minimize(Xi2_alpha_h_I,x0_alpha_h,method='TNC',bounds=((-3.,3.),))
        print LS_alpha_h_I

        fun: 3051.261701021752
        jac: array([-9.09494702e-05])
        message: 'Converged (|f_n-f_{n-1}| ~ 0)'
        nfev: 18
        nit: 6
        status: 1
        success: True
        x: array([-1.34313742])

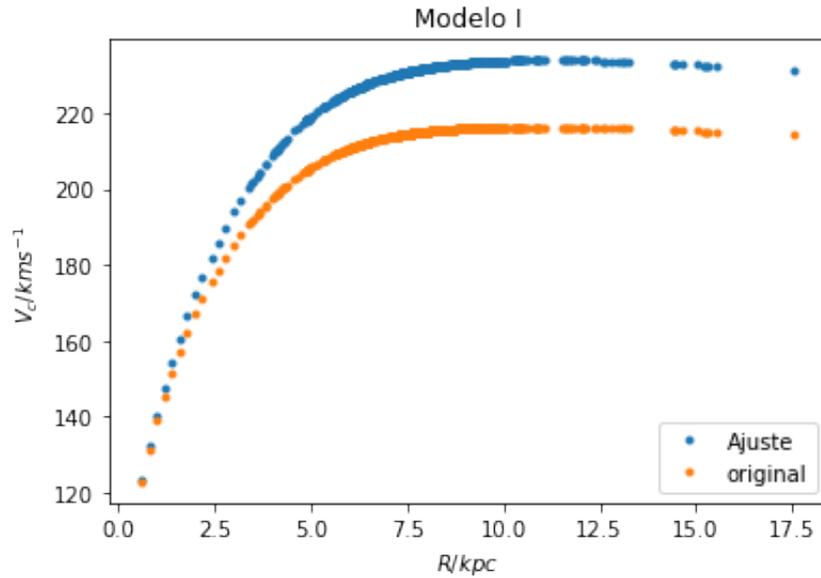
In [76]: x0_alpha_h_II = np.array(-10.)
        LS_alpha_h_II = minimize(Xi2_alpha_h_II,x0_alpha_h,method='TNC',bounds=((-3.,3.),))
        print LS_alpha_h_II

/Users/atalia/miniconda2/lib/python2.7/site-packages/ipykernel_launcher.py:4: RuntimeWarnin
after removing the cwd from sys.path.

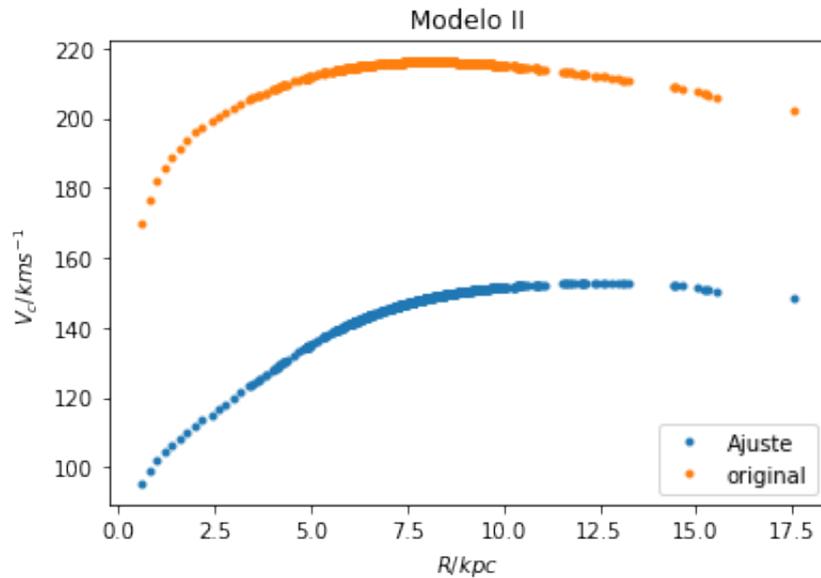
        fun: 123549.78104984072
        jac: array([-15441.71391288])
        message: 'Linear search failed'
        nfev: 66
        nit: 0
        status: 4
        success: False
        x: array([-3.])

```

```
In [77]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_alpha_h_I(vecRp,np.asscalar(LS_alpha_h_I.x)),'.',label='Ajuste')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_I, '.',label='original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo I')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_alpha_h_I.pdf')
```



```
In [78]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_alpha_h_II(vecRp,np.asscalar(LS_alpha_h_II.x)),'.',label='Aj')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_II, '.',label='original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo II')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_alpha_h_II.pdf')
```



β_h

```
In [79]: def Vc_tot_beta_h_I(R,param):
        beta_h = param
        suma = Vc2_b_I + Vc2_DM(R,a_h_I,rho_h_I,alpha_h_I,beta_h) + Vc2_SD_I + Vc2_ISM
        return np.sqrt(suma)

In [80]: def Vc_tot_beta_h_II(R,param):
        beta_h = param
        suma = Vc2_b_II + Vc2_DM(R,a_h_II,rho_h_II,alpha_h_II,beta_h) + Vc2_SD_II + Vc
        return np.sqrt(suma)

In [84]: def Xi2_beta_h_I(parameters):
        beta_h = parameters
        model = Vc_tot_beta_h_I(vecRp,beta_h)
        xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
        return xi

In [88]: def Xi2_beta_h_II(parameters):
        beta_h = parameters
        model = Vc_tot_beta_h_II(vecRp,beta_h)
        xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
        return xi

In [86]: x0_beta_h = np.array(1.)
        LS_beta_h_I = minimize(Xi2_beta_h_I,x0_beta_h,method='L-BFGS-B',bounds=((1.,3.),))
        print LS_beta_h_I

        fun: 3882.201546383615
        hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
        jac: array([0.0003638])
```

```

message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<=_FACTR*EPSMCH'
nfev: 18
nit: 7
status: 0
success: True
x: array([2.58140777])

```

```

In [89]: LS_beta_h_II = minimize(Xi2_beta_h_II,x0_beta_h,method='L-BFGS-B',bounds=((1.,3.),
print LS_beta_h_II

```

```

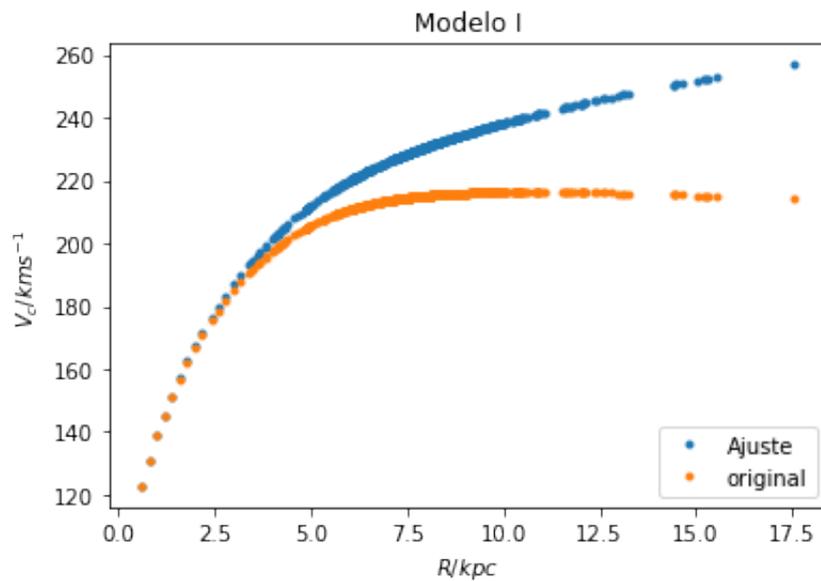
fun: 2367.086155154032
hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
jac: array([0.])
message: 'CONVERGENCE: NORM_OF_PROJECTED_GRADIENT_<=_PGTOL'
nfev: 24
nit: 8
status: 0
success: True
x: array([1.99731338])

```

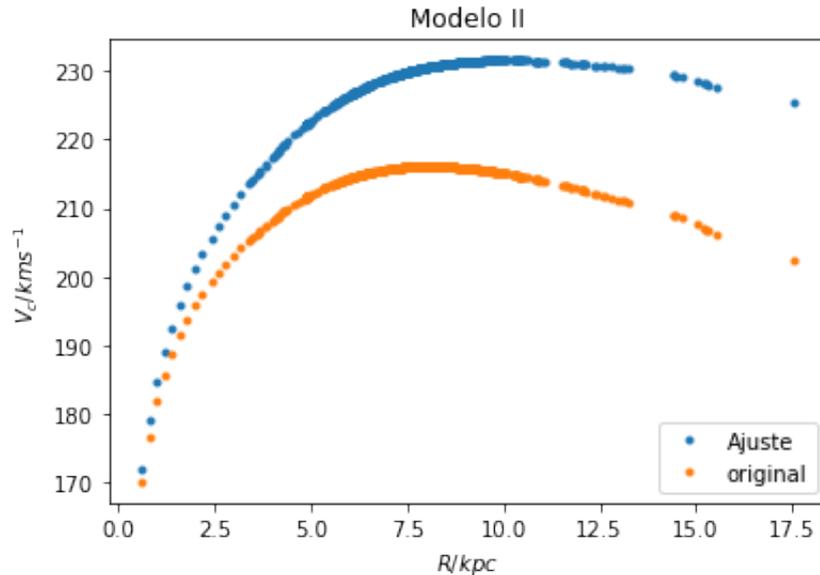
```

In [90]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_beta_h_I(vecRp,np.asscalar(LS_beta_h_I.x)),'.',label='Ajuste')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_I, '.',label='original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km\ s^{-1}$')
plt.title('Modelo I')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_beta_h_I.pdf')

```



```
In [91]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_beta_h_II(vecRp,np.asscalar(LS_beta_h_II.x)),'.',label='Ajuste')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_II, '.',label='original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo II')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_beta_h_II.pdf')
```



R_d

```
In [92]: def Vc_tot_R_d_I(R,param):
R_d = param
suma = Vc2_b_I + Vc2_DM_I + Vc2_SD_simps(R,R_d,Sigma_d_SD_I) + Vc2_ISM(R,R_d,Sigma_d_SD_I)
return np.sqrt(suma)
```

```
In [93]: def Vc_tot_R_d_II(R,param):
R_d = param
suma = Vc2_b_II + Vc2_DM_II + Vc2_SD_simps(R,R_d,Sigma_d_SD_II) + Vc2_ISM(R,R_d,Sigma_d_SD_II)
return np.sqrt(suma)
```

```
In [94]: def Xi2_R_d_I(parameters):
R_d = parameters
model = Vc_tot_R_d_I(vecRp,R_d)
xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
return xi
```

```
In [95]: def Xi2_R_d_II(parameters):
R_d = parameters
model = Vc_tot_R_d_II(vecRp,R_d)
xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
return xi
```

```

In [96]: x0_R_d = np.array(1.0)
         LS_R_d_I = minimize(Xi2_R_d_I,x0_R_d,method='L-BFGS-B',bounds=((1.0,4.)),)
         print LS_R_d_I

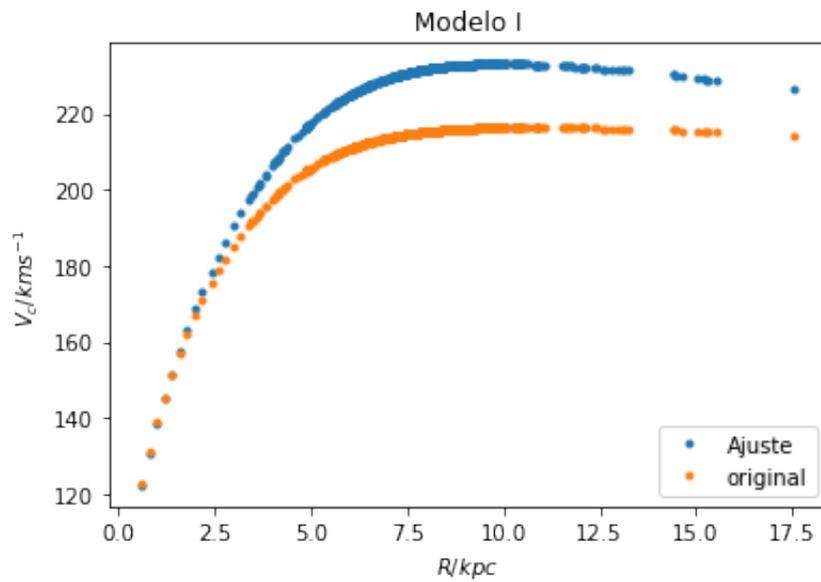
         fun: 3179.3575550916
hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
         jac: array([4.54747351e-05])
message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= _FACTR*EPSMCH'
         nfev: 22
         nit: 8
         status: 0
         success: True
         x: array([2.32916685])

In [101]: LS_R_d_II = minimize(Xi2_R_d_II,x0_R_d,method='L-BFGS-B',bounds=((1.0,7.)),)
         print LS_R_d_II

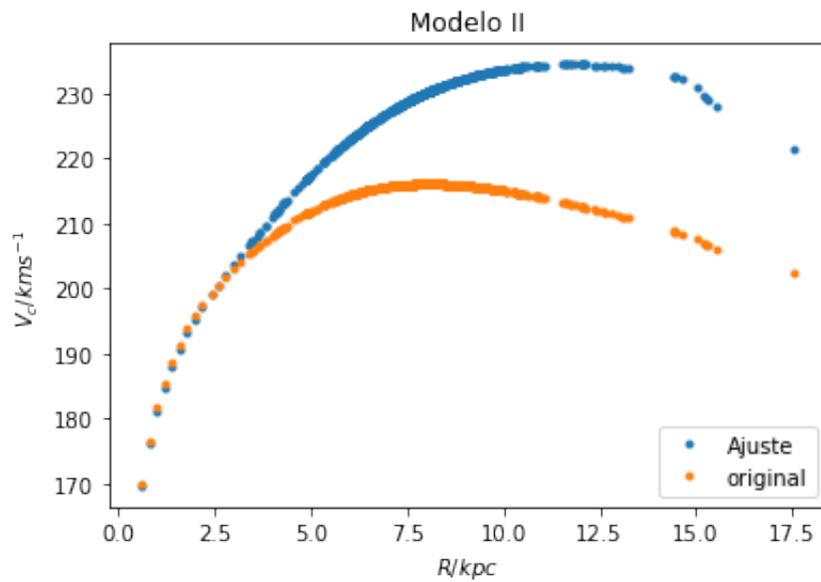
         fun: 2712.3996983165016
hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
         jac: array([0.])
message: 'CONVERGENCE: NORM_OF_PROJECTED_GRADIENT_<= _PGTOL'
         nfev: 22
         nit: 6
         status: 0
         success: True
         x: array([4.77344661])

In [102]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_R_d_I(vecRp,np.asscalar(LS_R_d_I.x)),'.',label='Ajuste')
         plt.plot(vecRp,Vc_tot_I, '.',label='original')
         plt.xlabel(r'$R/kpc$')
         plt.ylabel(r'$V_{c}/km s^{-1}$')
         plt.title('Modelo I')
         plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
         plt.savefig('Fit_R_d_I.pdf')

```



```
In [104]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_R_d_II(vecRp,np.asarray(LS_R_d_II.x)),'.',label='Ajuste')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_II, '.',label='original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_{c}/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo II')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_R_d_II.pdf')
```



Σ_d

```
In [110]: def Vc_tot_Sigma_d_I(R,param):
          Sigma_d_SD = param
          suma = Vc2_b_I + Vc2_DM_I + Vc2_SD_simps(R,R_d_I,Sigma_d_SD) + Vc2_ISM_I
          return np.sqrt(suma)

In [111]: def Vc_tot_Sigma_d_II(R,param):
          Sigma_d_SD = param
          suma = Vc2_b_II + Vc2_DM_II + Vc2_SD_simps(R,R_d_II,Sigma_d_SD) + Vc2_ISM_II
          return np.sqrt(suma)

In [112]: def Xi2_Sigma_d_I(parameters):
          Sigma_d_SD = np.exp(parameters)
          model = Vc_tot_Sigma_d_I(vecRp,Sigma_d_SD)
          xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
          return xi

In [113]: def Xi2_Sigma_d_II(parameters):
          Sigma_d_SD = np.exp(parameters)
          model = Vc_tot_Sigma_d_II(vecRp,Sigma_d_SD)
          xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
          return xi

In [115]: x0_Sigma_d = np.array(np.log(0.15e9))
          LS_Sigma_d_I = minimize(Xi2_Sigma_d_I,x0_Sigma_d,method='L-BFGS-B',bounds=((np.lc
          print LS_Sigma_d_I

          fun: 2570.7514262513205
          hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
          jac: array([-0.00013642])
          message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= _FACTR*EPSMCH'
          nfev: 22
          nit: 5
          status: 0
          success: True
          x: array([21.36789835])

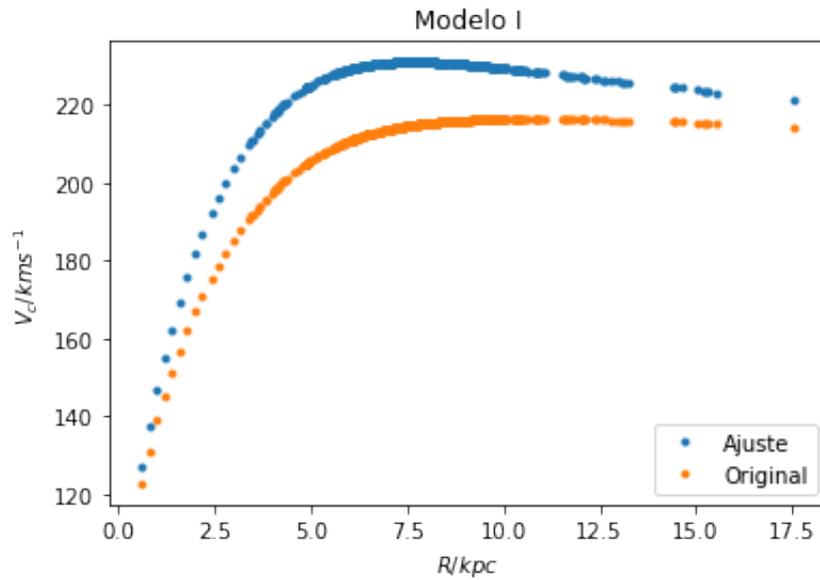
In [116]: LS_Sigma_d_II = minimize(Xi2_Sigma_d_II,x0_Sigma_d,method='L-BFGS-B',bounds=((np.
          print LS_Sigma_d_II

          fun: 2265.154336768537
          hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
          jac: array([-0.00077307])
          message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= _FACTR*EPSMCH'
          nfev: 20
          nit: 5
          status: 0
          success: True
          x: array([20.23855419])

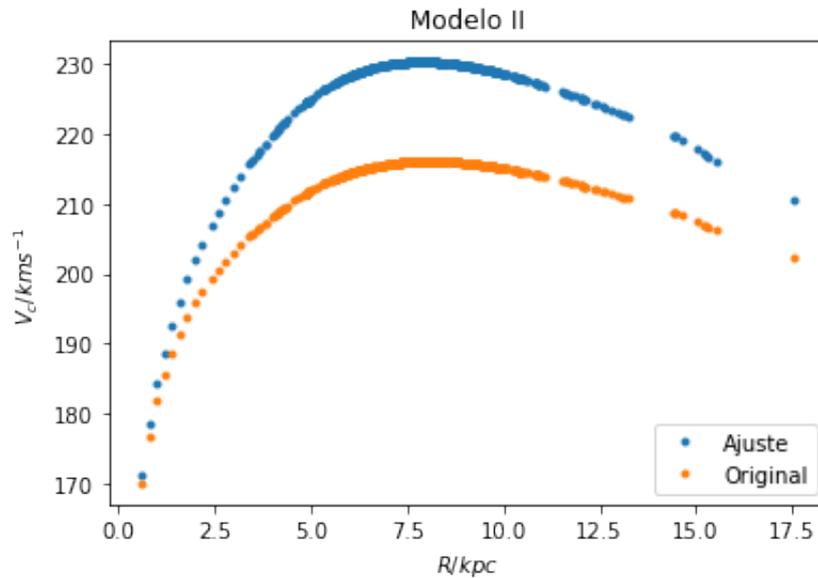
In [117]: print np.exp(LS_Sigma_d_I.x),np.exp(LS_Sigma_d_II.x)
```

[1.90528673e+09] [6.15874762e+08]

```
In [118]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_Sigma_d_I(vecRp,np.asscalar(np.exp(LS_Sigma_d_I.x))),'.',label='Ajuste')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_I, '.',label='Original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo I')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_Sigma_d_I.pdf')
```



```
In [119]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_Sigma_d_II(vecRp,np.asscalar(np.exp(LS_Sigma_d_II.x))),'.',label='Ajuste')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_II, '.',label='Original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo II')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_Sigma_d_II.pdf')
```



Σ_g

```
In [120]: def Vc_tot_Sigma_g_I(R,param):
           Sigma_g_ISM = param
           suma = Vc2_b_I + Vc2_DM_I + Vc2_SD_I + Vc2_ISM(R,R_d_I,Sigma_g_ISM)
           return np.sqrt(suma)

In [121]: def Vc_tot_Sigma_g_II(R,param):
           Sigma_g_ISM = param
           suma = Vc2_b_II + Vc2_DM_II + Vc2_SD_II + Vc2_ISM(R,R_d_II,Sigma_g_ISM)
           return np.sqrt(suma)

In [122]: def Xi2_Sigma_g_I(parameters):
           Sigma_g_ISM = np.exp(parameters)
           model = Vc_tot_Sigma_g_I(vecRp,Sigma_g_ISM)
           xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
           return xi

In [123]: def Xi2_Sigma_g_II(parameters):
           Sigma_g_ISM = np.exp(parameters)
           model = Vc_tot_Sigma_g_II(vecRp,Sigma_g_ISM)
           xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
           return xi

In [124]: x0_Sigma_g = np.array(np.log(1.0e8))
           LS_Sigma_g_I = minimize(Xi2_Sigma_g_I,x0_Sigma_g,method='L-BFGS-B',bounds=((np.lc
           print LS_Sigma_g_I

           fun: 3226.1629486152788
           hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
           jac: array([0.]
```

```

message: 'CONVERGENCE: NORM_OF_PROJECTED_GRADIENT_<= PG TOL'
nfev: 20
nit: 5
status: 0
success: True
x: array([20.83104254])

```

```

In [125]: LS_Sigma_g_II = minimize(Xi2_Sigma_g_II,x0_Sigma_g,method='L-BFGS-B',bounds=((np.
print LS_Sigma_g_II

```

```

fun: 2486.0039212887727
hess_inv: <1x1 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
jac: array([0.])
message: 'CONVERGENCE: NORM_OF_PROJECTED_GRADIENT_<= PG TOL'
nfev: 20
nit: 5
status: 0
success: True
x: array([19.97104902])

```

```

In [126]: print np.exp(LS_Sigma_g_I.x),np.exp(LS_Sigma_g_II.x)

```

```

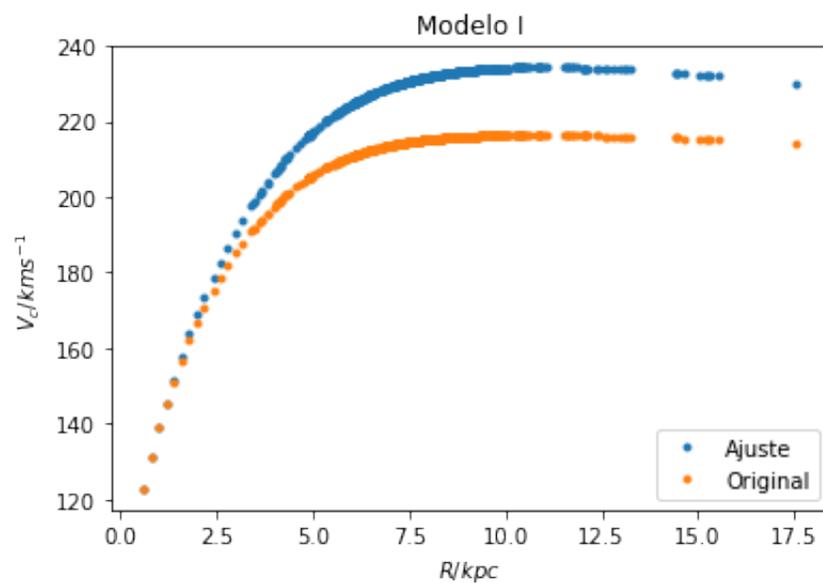
[1.113799e+09] [4.71320564e+08]

```

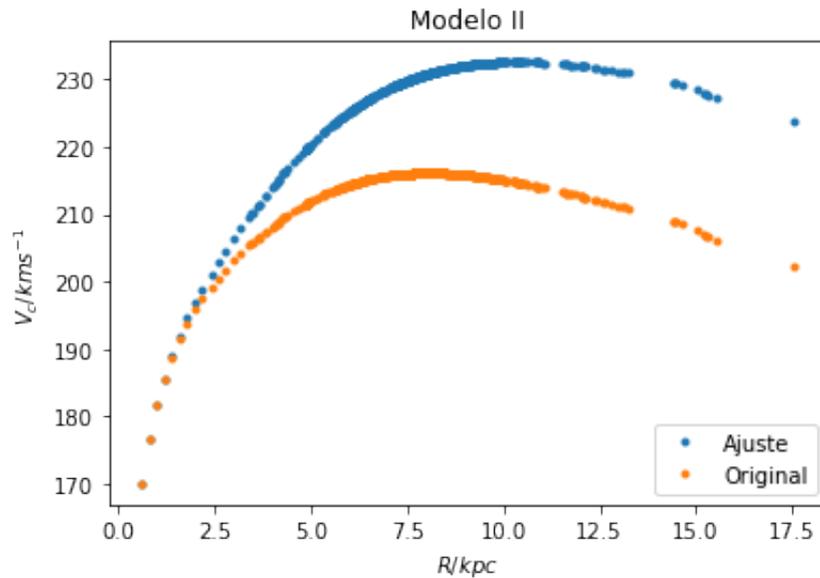
```

In [127]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_Sigma_g_I(vecRp,np.asscalar(np.exp(LS_Sigma_g_I.x))),'.',label='Original')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_I('. ',label='Original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_{c}/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo I')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_Sigma_g_I.pdf')

```



```
In [128]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_Sigma_g_II(vecRp,np.asarray(np.exp(LS_Sigma_g_II.x))),'.',
plt.plot(vecRp,Vc_tot_II, '.',label='Original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_c/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo II')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_Sigma_g_II.pdf')
```



2 Dos parámetros

a_h y ρ_h

```
In [129]: def Vc_tot_a_h_rho_h_I(R,params):
a_h,rho_h = params
suma = Vc2_b_I + Vc2_DM(R,a_h,rho_h,alpha_h_I,beta_h_I) + Vc2_SD_I + Vc2_ISM_
return np.sqrt(suma)
```

```
In [130]: def Vc_tot_a_h_rho_h_II(R,params):
a_h,rho_h = params
suma = Vc2_b_II + Vc2_DM(R,a_h,rho_h,alpha_h_II,beta_h_II) +Vc2_SD_II + Vc2_I
return np.sqrt(suma)
```

```
In [131]: def Xi2_a_h_rho_h_I(parameters):
a_h,rho_h = parameters
par = a_h,np.exp(rho_h)
model = Vc_tot_a_h_rho_h_I(vecRp,par)
xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
return xi
```

```

In [132]: def Xi2_a_h_rho_h_II(parameters):
           a_h,rho_h = parameters
           par = a_h,np.exp(rho_h)
           model = Vc_tot_a_h_rho_h_II(vecRp,par)
           xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
           return xi

In [138]: x0_a_h_rho_h = np.array([1.0,np.log(1.0e8)])
           LS_a_h_rho_h_I = minimize(Xi2_a_h_rho_h_I,x0_a_h_rho_h,method='L-BFGS-B',bounds=(
           print LS_a_h_rho_h_I

           fun: 2520.0713647512684
           hess_inv: <2x2 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
           jac: array([-9.09494702e-05, -4.54747351e-05])
           message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= _FACTR*EPSMCH'
           nfev: 105
           nit: 24
           status: 0
           success: True
           x: array([ 1.32637895, 22.1557697 ])

In [139]: pars_a_h_rho_h_I_min = np.array([LS_a_h_rho_h_I.x[0],np.exp(LS_a_h_rho_h_I.x[1])])
           print pars_a_h_rho_h_I_min

[1.32637895e+00 4.18917520e+09]

In [140]: LS_a_h_rho_h_II = minimize(Xi2_a_h_rho_h_II,x0_a_h_rho_h,method='L-BFGS-B',bounds=
           print LS_a_h_rho_h_II

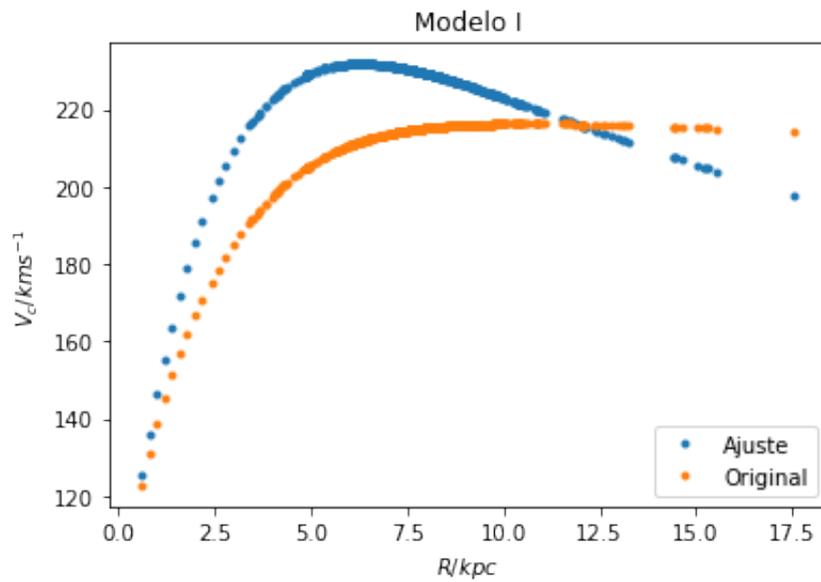
           fun: 2257.7286794271035
           hess_inv: <2x2 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
           jac: array([-0.29581315, -0.22937456])
           message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= _FACTR*EPSMCH'
           nfev: 135
           nit: 30
           status: 0
           success: True
           x: array([ 1.51448883, 20.03241529])

In [141]: pars_a_h_rho_h_II_min = np.array([LS_a_h_rho_h_II.x[0],np.exp(LS_a_h_rho_h_II.x[1
           print pars_a_h_rho_h_II_min

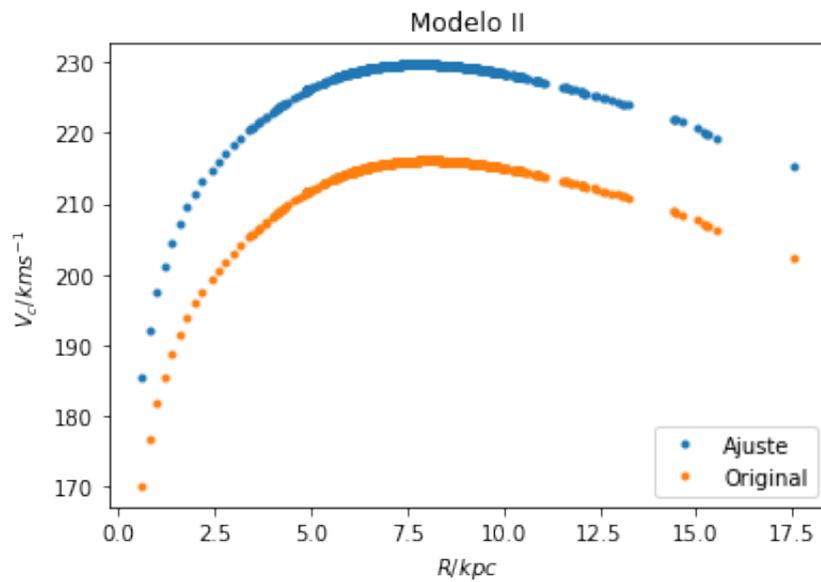
[1.51448883e+00 5.01149638e+08]

In [142]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_a_h_rho_h_I(vecRp,pars_a_h_rho_h_I_min),'.',label='Ajuste')
           plt.plot(vecRp,Vc_tot_I, '.',label='Original')
           plt.xlabel(r'$R/kpc$')
           plt.ylabel(r'$V_{c}/km s^{-1}$')
           plt.title('Modelo I')
           plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
           plt.savefig('Fit_a_h_rho_h_I.pdf')

```



```
In [143]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_a_h_rho_h_II(vecRp,pars_a_h_rho_h_II_min),'.',label='Ajuste')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_II, '.',label='Original')
plt.xlabel(r'$R/kpc$')
plt.ylabel(r'$V_{c}/km s^{-1}$')
plt.title('Modelo II')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.savefig('Fit_a_h_rho_h_II.pdf')
```



3 Tres parámetros, bulbo y halo de materia oscura

a_h, ρ_h y ρ_b

Modelo I

```
In [150]: def Vc_tot_a_h_rho_h_rho_b_I(R,params,parameters):
          a_h,rho_h,rho_b = params
          alpha_h,beta_h= parameters
          suma = Vc2_b(R,rho_b) + Vc2_DM(R,a_h,rho_h,alpha_h,beta_h) + Vc2_SD_I + Vc2_I
          return np.sqrt(suma)

In [151]: par_wo_a_h_rho_h_rho_b_I = np.array([alpha_h_I,beta_h_I])
          par_wo_a_h_rho_h_rho_b_II = np.array([alpha_h_II,beta_h_II])
          par_wo_a_h_rho_h_rho_b_NFW = np.array([1.,3.])

In [152]: def Xi2_a_rho_h_rho_b_I(parameters):
          a_h,rho_h,rho_b = parameters
          par = a_h,np.exp(rho_h),np.exp(rho_b)
          model = Vc_tot_a_h_rho_h_rho_b_I(vecRp,par,par_wo_a_h_rho_h_rho_b_I)
          xi = np.sum((vecvRp-model)**2./((vecerrvRp)**2.))
          return xi

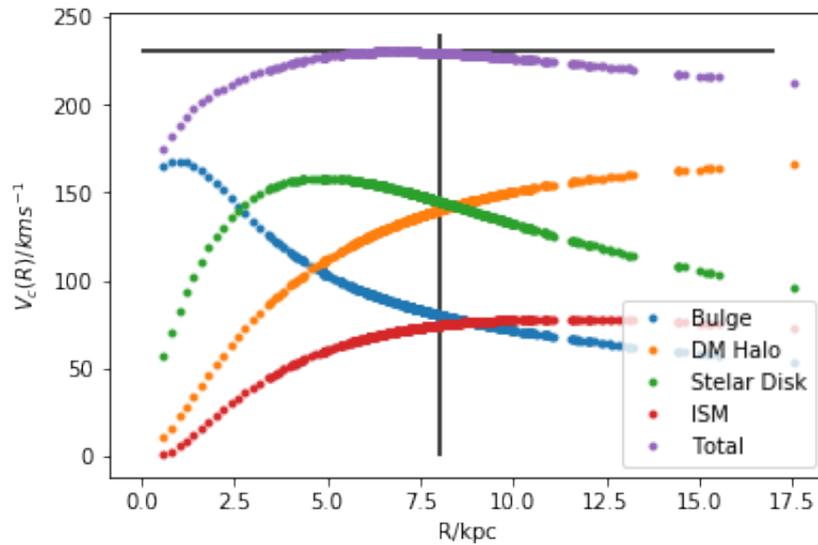
In [153]: x0_a_rho_h_rho_b = np.array([0.01,np.log(1.0e8),np.log(1.0e8)])
          LS_a_rho_h_rho_b_I = minimize(Xi2_a_rho_h_rho_b_I,x0_a_rho_h_rho_b,method='L-BFGS')
          print LS_a_rho_h_rho_b_I

          fun: 2205.3938880068736
          hess_inv: <3x3 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
          jac: array([0.00000000e+00, 0.00000000e+00, 4.54747351e-05])
          message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= _FACTR*EPSMCH'
          nfev: 144
          nit: 27
          status: 0
          success: True
          x: array([ 2.62194958, 20.94276355, 20.71227158])

In [154]: pars_a_rho_h_rho_b_min_I = np.array([LS_a_rho_h_rho_b_I.x[0],np.exp(LS_a_rho_h_rho_b_min_I
          print pars_a_rho_h_rho_b_min_I

[2.62194958e+00 1.24545100e+09 9.89065955e+08])

In [155]: plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_b(vecRp,np.asscalar(np.exp(LS_a_rho_h_rho_b_min_I.x[2])))))
          plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_DM(vecRp,np.asscalar(LS_a_rho_h_rho_b_min_I.x[0]),np.asscalar(LS_a_rho_h_rho_b_min_I.x[1])))
          plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_SD_I),'.',label='Stellar Disk')
          plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_ISM_I),'.',label='ISM')
          plt.plot(vecRp,Vc_tot_a_h_rho_h_rho_b_I(vecRp,pars_a_rho_h_rho_b_min_I,par_wo_a_h_rho_h_rho_b_min_I))
          plt.xlabel('R/kpc')
          plt.ylabel(r'$V_{fc}(R)/\text{kms}^{-1}$')
          plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
          plt.hlines(230,0,17)
          plt.vlines(8,0,240)
          plt.savefig('Fit_rho_b_rho_h_a_h_I_v2.pdf')
```



Modelo II

```
In [156]: def Vc_tot_a_rho_h_rho_b_II(R,params,parameters):
    a_h,rho_h,rho_b = params
    alpha_h,beta_h= parameters
    suma = Vc2_b(R,rho_b) + Vc2_DM(R,a_h,rho_h,alpha_h,beta_h) + Vc2_SD_II + Vc2_
    return np.sqrt(suma)

In [157]: def Xi2_a_rho_h_rho_b_II(parameters):
    a_h,rho_h,rho_b = parameters
    par = a_h,np.exp(rho_h),np.exp(rho_b)
    model = Vc_tot_a_rho_h_rho_b_II(vecRp,par,par_wo_a_rho_h_rho_b_II)
    xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
    return xi

In [158]: x0_a_rho_h_rho_b_II = np.array([0.01,np.log(1.0e8),np.log(1.0e8)])

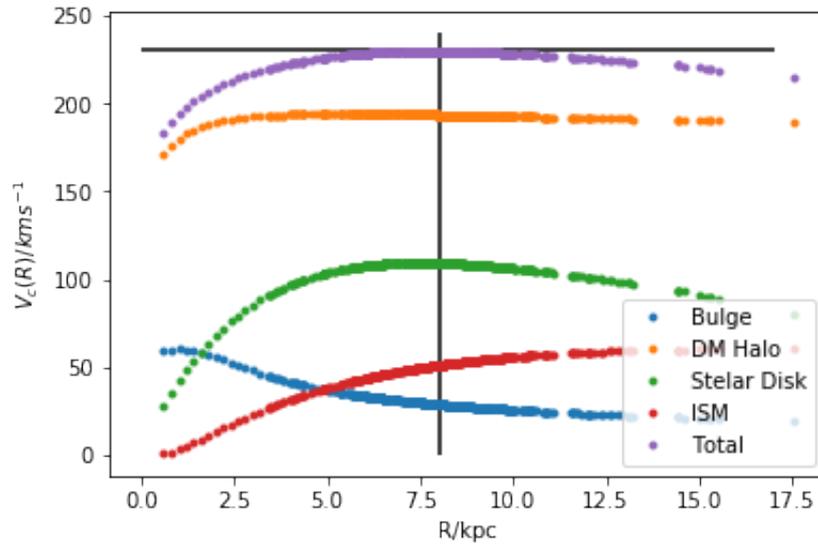
In [159]: LS_a_rho_h_rho_b_II = minimize(Xi2_a_rho_h_rho_b_II,x0_a_rho_h_rho_b_II,method='I
    print LS_a_rho_h_rho_b_II

    fun: 2246.5087437860802
    hess_inv: <3x3 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
    jac: array([2.37907443e+01, 1.71894499e-02, 4.09272616e-04])
    message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<=_FACTR*EPSMCH'
    nfev: 348
    nit: 61
    status: 0
    success: True
    x: array([ 1.          , 20.90012374, 18.65825116])

In [160]: pars_a_rho_h_rho_b_min_II = np.array([LS_a_rho_h_rho_b_II.x[0],np.exp(LS_a_rho_h
    print pars_a_rho_h_rho_b_min_II
```

[1.00000000e+00 1.19346149e+09 1.26816429e+08]

```
In [162]: plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_b(vecRp,np.asscalar(np.exp(LS_a_rho_h_rho_b_II.x[2])))
plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_DM(vecRp,np.asscalar(LS_a_rho_h_rho_b_II.x[0])),np.assc
plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_SD_II),'.',label='Stelar Disk')
plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_ISM_II),'.',label='ISM')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_a_h_rho_h_rho_b_II(vecRp,pars_a_rho_h_rho_b_min_II,par_wo_e
plt.xlabel('R/kpc')
plt.ylabel(r'$V_{c}(R)/\text{kms}^{-1}$')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.hlines(230,0,17)
plt.vlines(8,0,240)
plt.savefig('Fit_rho_b_rho_h_a_h_II_v2.pdf')
```



NFW I

```
In [163]: def Vc_tot_a_h_rho_h_rho_b_NFWI(R,params,parameters):
a_h,rho_h,rho_b = params
alpha_h,beta_h= parameters
suma = Vc2_b(R,rho_b) + Vc2_DM(R,a_h,rho_h,alpha_h,beta_h) + Vc2_SD_I + Vc2_I
return np.sqrt(suma)

In [164]: def Xi2_a_rho_h_rho_b_NFWI(parameters):
a_h,rho_h,rho_b = parameters
par = a_h,np.exp(rho_h),np.exp(rho_b)
model = Vc_tot_a_h_rho_h_rho_b_NFWI(vecRp,par,par_wo_a_h_rho_h_rho_b_NFW)
xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
return xi

In [184]: x0_a_rho_h_rho_b_NFWI = np.array([1.,np.log(0.1e8),np.log(0.0001e8)])
LS_a_rho_h_rho_b_NFWI = minimize(Xi2_a_rho_h_rho_b_NFWI,x0_a_rho_h_rho_b_NFWI,met
print LS_a_rho_h_rho_b_NFWI
```

```

fun: 2684.55947039445
hess_inv: <3x3 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
jac: array([ 0.01678018,  0.02401066, -0.00873115])
message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= _FACTR*EPSMCH'
nfev: 148
nit: 24
status: 0
success: True
x: array([ 3.05331675, 19.43317098,  9.4500881 ])

```

```

In [185]: pars_a_rho_h_rho_b_min_NFWI = np.array([LS_a_rho_h_rho_b_NFWI.x[0],np.exp(LS_a_rho_h_rho_b_min_NFWI)
print pars_a_rho_h_rho_b_min_NFWI

```

```

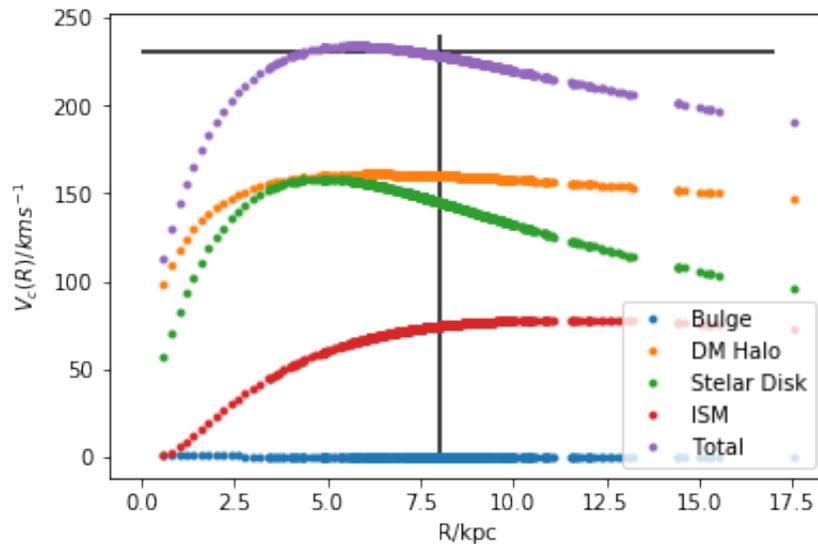
[3.05331675e+00 2.75244672e+08 1.27092848e+04]

```

```

In [186]: plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_b(vecRp,np.asscalar(np.exp(LS_a_rho_h_rho_b_NFWI.x[2]))
plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_DM(vecRp,np.asscalar(LS_a_rho_h_rho_b_NFWI.x[0])),np.asscalar(LS_a_rho_h_rho_b_NFWI.x[1]))
plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_SD_I),'.',label='Stellar Disk')
plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_ISM_I),'.',label='ISM')
plt.plot(vecRp,Vc_tot_a_h_rho_h_rho_b_NFWI(vecRp,pars_a_rho_h_rho_b_min_NFWI,parameters))
plt.xlabel('R/kpc')
plt.ylabel(r'$V_c(R)/\text{kms}^{-1}$')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.hlines(230,0,17)
plt.vlines(8,0,240)
plt.savefig('Fit_rho_b_rho_h_a_h_NFWI_v2.pdf')

```



NFW II

```

In [169]: def Vc_tot_a_h_rho_h_rho_b_NFWII(R,params,parameters):
a_h,rho_h,rho_b = params

```

```

        alpha_h,beta_h= parameters
        suma = Vc2_b(R,rho_b) + Vc2_DM(R,a_h,rho_h,alpha_h,beta_h) + Vc2_SD_II + Vc2_
        return np.sqrt(suma)

In [170]: def Xi2_a_rho_h_rho_b_NFWII(parameters):
        a_h,rho_h,rho_b = parameters
        par = a_h,np.exp(rho_h),np.exp(rho_b)
        model = Vc_tot_a_h_rho_h_rho_b_NFWII(vecRp,par,par_wo_a_h_rho_h_rho_b_NFW)
        xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrvRp)**2.)
        return xi

In [171]: x0_a_rho_h_rho_b_NFWII = np.array([0.01,np.log(1.0e8),np.log(1.0e8)])
        LS_a_rho_h_rho_b_NFWII = minimize(Xi2_a_rho_h_rho_b_NFWII,x0_a_rho_h_rho_b_NFWII,
        print LS_a_rho_h_rho_b_NFWII

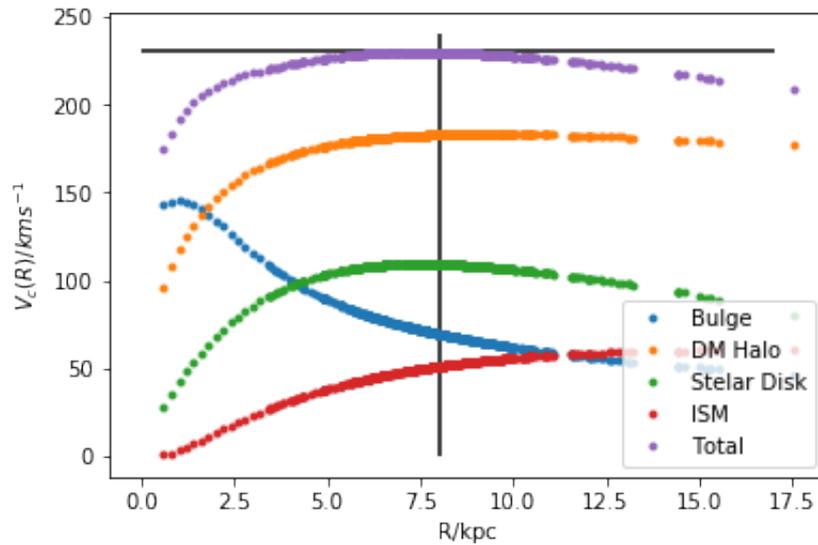
        fun: 2268.4462559502604
        hess_inv: <3x3 LbfgsInvHessProduct with dtype=float64>
        jac: array([-0.00113687, -0.00222826, -0.00059117])
        message: 'CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F_<= _FACTR*EPSMCH'
        nfev: 204
        nit: 41
        status: 0
        success: True
        x: array([ 4.48867096, 18.92340689, 20.41992984])

In [172]: pars_a_rho_h_rho_b_min_NFWII = np.array([LS_a_rho_h_rho_b_NFWII.x[0],np.exp(LS_a_
        print pars_a_rho_h_rho_b_min_NFWII

[4.48867096e+00 1.65322206e+08 7.38350975e+08]

In [174]: plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_b(vecRp,np.asscalar(np.exp(LS_a_rho_h_rho_b_NFWII.x[2]
        plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_DM(vecRp,np.asscalar(LS_a_rho_h_rho_b_NFWII.x[0])),np.e
        plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_SD_II),'.',label='Stellar Disk')
        plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_ISM_II),'.',label='ISM')
        plt.plot(vecRp,Vc_tot_a_h_rho_h_rho_b_NFWII(vecRp,pars_a_rho_h_rho_b_min_NFWII,pa
        plt.xlabel('R/kpc')
        plt.ylabel(r'$V_{c}(R)/\text{kms}^{-1}$')
        plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
        plt.hlines(230,0,17)
        plt.vlines(8,0,240)
        plt.savefig('Fit_rho_b_rho_h_a_h_NFWII_v2.pdf')

```



4 Ajuste del perfil de materia oscura de campo escalar

```
In [187]: def M_minor(r, rho_sol, m_a):
    rsol = ((rho_sol/2.42e9)*(m_a/1.0e-22)**2.)**(-0.25)
    n = 3465.*r**13.*rsol + 23100.*r**11.*rsol**3. + 65373.*r**9.*rsol**5. + 1015
    d = (r**2. + rsol**2.)**7.
    const = 4.*np.pi*rho_sol*rsol**3./215040.
    return const*n/d
```

```
In [188]: def M_mayor(r, rho_sol, m_a, eps, r_s):
    rsol = ((rho_sol/2.42e9)*(m_a/1.0e-22)**2.)**(-0.25)
    r_eps = rsol*np.sqrt(eps**(-1./8.) - 1.)
    delta_NFW = eps*r_eps*(r_s + r_eps)**2./r_s**3.
    t1 = np.log(r + r_s) + r_s/(r+r_s) - np.log(r_s + r_eps) - r_s/(r_s+r_eps) #- n
    constant = 4.*np.pi*rho_sol*delta_NFW*r_s**3.
    n2 = 3465.*r_eps**13.*rsol + 23100.*r_eps**11.*rsol**3. + 65373.*r_eps**9.*rs
    d2 = (r_eps**2. + rsol**2.)**7.
    const2 = 4.*np.pi*rho_sol*rsol**3./215040.
    return constant*t1 + const2*n2/d2
```

```
In [189]: def vc2_DM_axion(r, rho_sol, m_a, eps, r_s):
    rsol = ((rho_sol/(2.42e9))*(m_a/1.0e-22)**2.)**(-0.25)
    r_eps = rsol*np.sqrt(eps**(-1./8.) - 1.)
    result = []
    for i in range(0, len(r)):
        if r[i] < r_eps:
            result.append(G*M_minor(r[i], rho_sol, m_a)/r[i])
        else:
            result.append(G*M_mayor(r[i], rho_sol, m_a, eps, r_s)/r[i])
    return np.array(result)
```

```

In [190]: def Vc_tot_rho_sol_m_a_eps_r_s_I(r,params):
          rho_sol,m_a,eps,r_s = params
          suma = Vc2_b_I + vc2_DM_axion(r,rho_sol,m_a,eps,r_s) + Vc2_SD_I + Vc2_ISM_I
          return np.sqrt(suma)

In [191]: def Xi2_rho_sol_m_a_r_s_epsI(parameters):
          rho_sol,m_a,eps,r_s = parameters
          par = np.exp(rho_sol),np.exp(m_a),eps,r_s
          model = Vc_tot_rho_sol_m_a_eps_r_s_I(vecRp,par)
          xi = np.sum((vecvRp-model)**2./(vecerrRp)**2.)
          return xi

In [194]: x0_rho_sol_m_a_r_s_epsI = np.array([np.log(1.0e10),np.log(1.0e-21),0.001,5.0])
          LS_rho_sol_m_a_r_s_epsI_TNC = minimize(Xi2_rho_sol_m_a_r_s_epsI,x0_rho_sol_m_a_r_s_
          print LS_rho_sol_m_a_r_s_epsI_TNC

          fun: 2391.0231310333215
          jac: array([-38.07563189,  29.76398719, -696.15148277, -26.49835551])
          message: 'Max. number of function evaluations reached'
          nfev: 100
          nit: 17
          status: 3
          success: False
          x: array([ 24.87120166, -48.33696668,  0.05521332,  6.28756009])

In [195]: pars_rho_sol_m_a_r_s_epsI_min = np.array([np.exp(LS_rho_sol_m_a_r_s_epsI_TNC.x[0]
          print pars_rho_sol_m_a_r_s_epsI_min

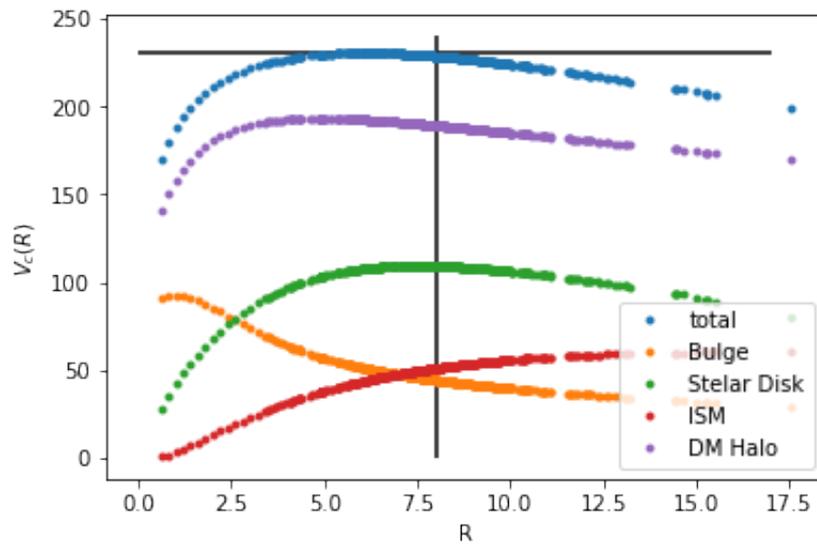
[6.33031963e+10 1.01747113e-21 5.52133212e-02 6.28756009e+00]

In [197]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_rho_sol_m_a_eps_r_s_I(vecRp,pars_rho_sol_m_a_r_s_epsI_min),
          plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_b_I),'.',label='Bulge')
          plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_SD_I),'.',label='Stellar Disk')
          plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_ISM_I),'.',label='ISM')
          plt.plot(vecRp,np.sqrt(vc2_DM_axion(vecRp,rho_sol=np.asscalar(np.exp(LS_rho_sol_n
          plt.xlabel('R')
          plt.ylabel(r'$V_{c}(R)$')
          plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
          plt.hlines(230,0,17)
          plt.vlines(8,0,240)
          plt.savefig('Fit_DMSF_I_TNC_v2.pdf')

```


[4.03048872e+10 1.04918948e-22 9.47955966e-02 2.32400873e+00]

```
In [203]: plt.plot(vecRp,Vc_tot_rho_sol_m_a_eps_r_s_II(vecRp,pars_rho_sol_m_a_r_s_epsII_mir
plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_b_II),'.',label='Bulge')
plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_SD_II),'.',label='Stellar Disk')
plt.plot(vecRp,np.sqrt(Vc2_ISM_II),'.',label='ISM')
plt.plot(vecRp,np.sqrt(vc2_DM_axion(vecRp,rho_sol=np.asscalar(np.exp(LS_rho_sol_n
plt.xlabel('R')
plt.ylabel(r'$V_{c}(R)$')
plt.legend(loc='lower right', prop={'size':10})
plt.hlines(230,0,17)
plt.vlines(8,0,240)
plt.savefig('Fit_DMSF_II_BFGS_v2.pdf')
```





León, Guanajuato, Septiembre 6, 2019

Dr. David Delepine
Director
División de Ciencias e Ingenierías
PRESENTE

Por medio de la presente me permito informar que he leído la tesis titulada "Ajuste de parámetros de la materia oscura en las curvas de rotación de la Vía Láctea", que para obtener el grado de **Maestría en Física** ha sido elaborada por la Lic. **Atalia Navarro Boullosa**. En mi opinión, la tesis cumple con los requisitos de calidad correspondientes al grado académico al que se aspira. Las correcciones sugeridas por mi parte han sido atendidas, por lo cual recomiendo se proceda a la defensa de la tesis.

Atentamente

Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo
Cátedra Conacyt
Departamento de Física DCI-UG

División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre
C.P. 37520, León, Gto., México
www.dci.ugto.mx

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



Asunto: Revisión de Tesis
León, Guanajuato, Septiembre de 2019

Dr. David Y. G. Delepine
Director
División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Universidad de Guanajuato
PRESENTE

Estimado Dr. Delepine:

Por medio de la presente le informo que he revisado la tesis "Ajuste de parámetros de la materia oscura en las curvas de rotación de la Vía Láctea" escrita por la estudiante de la Maestría en Física de la DCI, Atalia Navarro Boullosa. En mi opinión la tesis esta lista para ser presentada y estoy de acuerdo que se proceda al examen recepcional, una vez que se cumplan los procedimientos administrativos correspondientes.

Sin más por el momento, le envío saludos cordiales.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

DRA. ARGELIA BERNAL BAUTISTA

División de Ciencias e Ingenierías
Loma del Bosque # 103, Col. Loma del Campestre. León, Guanajuato, México. C. P. 37150
Tel: +52 (477) 7885100 Exts. 8420 y 8421, Fax. Ext. 8410. www.dci.ugto.mx

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



León, Guanajuato, a 23 de septiembre de 2019

Dr. DAVID YVES GHISLAIN DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
P R E S E N T E

Estimado Doctor David Delepine,

Por este medio le informo que he leído y revisado la tesis de maestría de la estudiante **Lic. Atalia Navarro Boullosa**. El trabajo se titula: **“Ajuste de parámetros de la materia oscura en las curvas de rotación de la Vía Láctea”**, y los asesores son la Dra. Alma Xóchitl González Morales y el Dr. Luis Arturo Ureña López.

He constatado que la estudiante posee dominio del tema y que el estudio realizado posee calidad. Me complace informarle que concuerdo con que se realice la presentación del trabajo, puesto que el mismo cuenta con los requisitos necesarios para la obtención del grado de Maestría en Física.

Reciba mis cordiales saludos,

ATENTAMENTE
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”

Dra. Nana Geraldine Cabo Bizet

Departamento de Física
Campus León, Universidad de Guanajuato
Loma del Bosque 103, Colonia Lomas del Pedregal
C.P. 37150, León, Guanajuato,
México

Asunto: Revisión de tesis de maestría
León, Gto., Septiembre de 2019

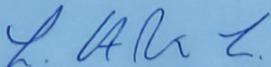
DR. DAVID Y. G. DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
PRESENTE

Por este medio le comunico que he revisado la tesis **Ajuste de parámetros de la materia oscura en las curvas de rotación de la Vía Láctea**, presentada por la Lic. En F. **Atalia Navarro Boulosa**, para efecto de presentarla para la obtención del grado de Maestra en Física.

El texto de la tesis se encuentra completo y se presentan resultados sobre la distribución de materia oscura en la Vía Láctea, tomando diferentes modelos para la distribución de la misma y realizando la comparación con mediciones de órbitas estelares. Igualmente, he podido ver que el texto fue modificado por el autor para reflejar las sugerencias y comentarios que le fueron expresados durante la revisión. En mi opinión la tesis cumple con los elementos necesarios para ser defendida ante el comité sinodal asignado en fecha próxima que sea acordada de manera conjunta.

Agradeciendo su amable atención, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"



DR. LUIS ARTURO UREÑA LÓPEZ
PROFESOR TITULAR C



CAMPUS LEÓN
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

26 de Septiembre de 2019

Dr. Delepine, David Yves Ghislain
Director División de Ciencias e Ingenierías
Universidad de Guanajuato, campus León.

Por este conducto manifiesto que he leído el trabajo de tesis de Atalia Navarro Boullosa, titulado “ **Ajuste de Parámetros de la materia oscura en las curvas de rotación de la Vía Láctea**”, que presenta para obtener el grado de Maestría en Física que otorga la Universidad de Guanajuato.

Los comentarios que encontré pertinentes ya se los he dado a conocer, así mismo le he recomendado que siga con los trámites para poder realizar su presentación pública de la tesis lo antes posible.

En caso de tener alguna pregunta respecto a la revisión de esta tesis por favor hagámelo saber. Reciba un cordial saludo,

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Alma X. González Morales".

Dra. Alma X. González Morales
Cátedra CONACYT
Departamento de Física

Loma del Bosque # 103, Col. Loma del Campestre. León, Guanajuato, México. C. P. 37150
Tel: +52 (477) 7885100 Exts. 8420 y 8421, Fax. Ext. 8410.