JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

MATRIX THEORY: SOLUCIONES EXACTAS PARA LA FUNCIÓN DE ONDA DEL ESTADO BASE

Carrillo García, Axel (1), Obregón Díaz, Octavio José (2), López Picón, José Luis (3), Morales Hernández Claudia Erika (4)

1 Bachillerato General, Escuela de Nivel Medio Superior de Guanajuato, Colegio de Nivel Medio Superior, Universidad de Guanajuato | carrilloaxel@hotmail.com

2Departamento de Física, División de Ciencias e Ingenierías, Universidad de Guanajuato | octavio@fisica.ugto.mx

3Departamento de Física, División de Ciencias e Ingenierías, Universidad de Guanajuato| jl_lopez@fisica.ugto.mx

4Escuela de Nivel medio Superior de la Universidad de Guanajuato, Colegia de Nivel Medio Superior, Universidad de Guanajuato | ce.moraleshernandez@ugto.mx

Resumen

En este proyecto proponemos un método para encontrar soluciones al estado base del Hamiltoniano de Matrix theory. Usamos una reprsentación matricial para los grados de libertad fermiónicos con matrices que satisfacen un álgebra de Clifford generalizada. Aunque el Hamiltoniano está originalmente formulado en 11 dimensiones, existen argumentos válidos en favor de la relevancia de modelos de dimensiones menores y probamos, con un ejemplo sencillo, que nuestro método es útil para encontrar solución a modelos reducidos y es en principio posible también resolver el problema más general.

Abstract

In this project we propose a method to find ground state solutions to the Hamiltonian of Matrix theory. We use a Dirac-like gamma matrix representation for the fermionic degrees of freedom. The Hamiltonian is originally formulated in eleven dimensions but we solve instead finite dimensional models. There exist in the literature argumets in favor of the relevance of these dimensional reduced models and we proof, with a simple particular finite dimensional model, that our procedure is effective to find solutions and that it is also possible, in principle, to solve the complete (not reduced) eleven-dimensional model.

Palabras Clave

Mecánica cuántica; Supersimetría

INTRODUCCIÓN

¿Qué es la supersimetría?

En el modelo estándar de partículas, hay dos clases de partículas, fermiones que conforman la materia y bosones que hacen que la materia interactúe entre sí por medio de fuerzas fundamentales. Entendiendo esto, la idea en la supersimetría es que tanto bosones como fermiones son invariantes en las leyes que los rigen, por lo que estos pueden ser intercambiables entre sí, viéndolo de otra forma, cada fermión tiene un súper compañero bosonico y a su vez los bosones poseen supercompañeros fermionicos entonces hay un intercambio entre boson-fermion [1].

En este trabajo consideramos un modelo que es por construcción supersimétrico que tiene su origen en teoría de supercuerdas. Este modelo es conocido como matrix theory (teoría de matrices) y proviene de una teoría que describe la dinámica de objetos dos dimensionales llamados membranas. Estos objetos son una generalización al concepto de partícula y de cuerda.

La supersimetría es una de las teorías más aceptadas, aunque todavía no probada, en la física teórica, debido a que de ser cierta explica parcialmente o en su totalidad muchas de las cosas que no pueden ser explicadas con el Modelo estándar de partículas, como la bariogénesis o la materia oscura, además varias de las teorías que tratan de unificar las fuerzas fundamentales como las supercuerdas implican en ellas la supersimetría.

Mecánica cuántica supersimetrica

En el proyecto se trató de encontrar el Estado Base de un sistema, es decir la energía más baja que puede haber, teniendo en cuenta que la energía no puede ser negativa, tenemos que, en un sistema en mecánica cuántica, la energía disminuye o aumenta en base a operadores, es decir que la energía esta cuantizada por lo que solo aumenta y disminuye con valores fijos, por lo que la forma de buscar el estado con menor energía posible seria resolver la ecuación

$$H\Psi 0=0$$

A esto lo trasladamos a la mecánica cuántica supersimetrica, en esta tenemos un Hamiltoniano con una parte tanto fermionica como bosonica, las cuales son simétricas entre sí por lo que llegamos a la conclusión de que el estado base es invariante entre estos dos tipos de partículas y si tomamos la función ψ como fermionica y bosonica tenemos que hay ciertos operadores que convierte la partícula de bosonica a fermionica y viceversa.

Mathrix Theory

En este tema reside la particularidad de nuestro proyecto, pero primero ¿Qué es la Matrix Theory?

Este modelo físico está basado en la teoría M que en principio se formuló como una teoría que engloba a las cinco distintas teorías de cuerdas y a la supergravedad y consiste en que cada grado de libertas es posible verlo en una matriz. En cada punto del espaciotiempo existe una matriz que lo caracteriza. Este modelo tiene dos simetrías necesarias por construcción, la primera es supersimetría y la segunda es una invariancia ante el grupo SU(N). Cabe destacar que en principio, la teoría de matrices es sólo relevante en el límite cuando N es infinitamente grande. En este trabajo usamos una representación matricial para las variables fermiónicas que convierte la ecuación para resolver el estado base, una ecuación diferencial matricial. Esto nos ayuda a simplificar los cálculos hechos para encontrar el Ground State. Veremos que resulta muy útil esta representación particular con un ejemplo de un modelo de sólo dos dimensiones y para el grupo de simetría SU(2). En resumen, nuestro procedimiento está basado en el siguiente proceso; (i) consideramos modelos para un grupo de dimensión N finita (ii) Los operadores relevantes que se actuarán sobre la función de onda son las supercargas y generadores de simetría SU(N) (iii) Lal variables fermiónicas serán representadas por matrices que satisfacen un álgebra de Clifford generalizada a elementos que tienen dos índices. Por medio de esta representación, los operadores relevantes se vuelven operadores diferenciales matriciales que actúan sobre una función de onda de múltiples componentes. El número de componentes de la función de onda depende de la dimensión que se utilice para representar las variables fermiónicas.

Matrix Model

El Matrix Model es un modelo de sistema cuántico supersimétrico en SU(N) de gauge invariante.

Esta simetría adicional refleja a sí misma como primera restricción de clase que deben/deberían imponerse a la solución función de onda para hacer los estados cuánticos invariantes bajo las transformaciones SU (N). Por lo que la siguiente algebra debe ser cumplida

$$\{Q\alpha,Q\beta\}=2\delta\alpha\beta H+2g(\Gamma m)\alpha\beta\phi amGa \qquad (1)$$

$$Q\alpha= (\Gamma m\Lambda a)\ \alpha\pi am+igfabc(\Sigma mn\Lambda a)\alpha\phi bm\phi cn \qquad (2)$$

$$G\alpha=fabc\ (\phi bm\phi cm-i\hbar 2\Lambda b\alpha\Lambda c\alpha) \qquad (3)$$

$$[\phi am,\pi bn]=i\hbar\delta ab\delta mn$$

$$Q\alpha|\vec{\Psi}\rangle=0 \qquad G\alpha|\vec{\Psi}\rangle=0$$

Donde ϕam y πam son los grados de libertad bosonicos y su momento respectivamente y Λa son las variables fermiónicas.

Método de Solución

En este trabajo nos vamos a restringir a un modelo de dos dimensiones y al grupo de simetría SU(2). En general, el número de supercargas depende del número de componentes de un espinor en d dimensiones, por lo que en nuestro caso la ecuación (2) nos da dos supecargas. Los índices latinos toman los valores 1,2 (dimensiones) y los índices griegos toman los valores 1,2 (supercargas). Las supercargas están denotadas por $Q1$ y $Q2$ que son:

$$Q_1 = \Lambda_{11}\pi_1^2 + \Lambda_{21}\pi_2^2 + \Lambda_{31}\pi_3^2 + \Lambda_{12}\pi_1^1 - \Lambda_{22}\pi_2^1 + \Lambda_{32}\pi_3^1 - g\Lambda_{12}\left(\phi_2^1\phi_3^2 - \phi_3^1\phi_2^2\right) - g\Lambda_{22}\left(\phi_3^1\phi_1^2 - \phi_1^1\phi_3^2\right) - g\Lambda_{32}\left(\phi_1^1\phi_2^2 - \phi_2^1\phi_1^2\right)$$

$$Q_2 = \Lambda_{11}\pi_1^1 + \Lambda_{21}\pi_2^1 + \Lambda_{31}\pi_3^1 - \Lambda_{12}\pi_1^2 - \Lambda_{22}\pi_2^2 - \Lambda_{32}\pi_3^2 + g\Lambda_{11}\left(\phi_2^1\phi_3^2 - \phi_3^1\phi_2^2\right) - g\Lambda_{21}\left(\phi_3^1\phi_1^2 - \phi_1^1\phi_3^2\right) - g\Lambda_{31}\left(\phi_1^1\phi_2^2 - \phi_2^1\phi_1^2\right)$$

El número de variables bosónicas y fermiónicas debe coincidir para ser consistente con supersimetría. En nuestro caso tenemos seis variables bosónicas y fermiónicas. Dado que vamos a representar las variables fermiónicas como matrices, necesitaremos seis matrices que satisfagan un álgebra de Clifford generalizada a elementos de dos índices que en nuestro caso serán matrices de 8x8. Para poner a prueba nuestro procedimiento podemos simplificar nuestro problema si nos restringimos a un modelo particular en el que $\phi_2^1 = \phi_3^1 = \phi_1^2 = \phi_3^2 = 0$, $\phi_1^1 = x$ y $\phi_2^2 = c$ donde c es una constante. Las ecuaciones de esta simplificación son:

$$Q_1 = \Lambda_{12}\pi_1^1 - g\Lambda_{32}kx$$

$$Q_2 = \Lambda_{11}\pi_1^1 + g\Lambda_{31}kx$$

Donde $\Lambda_{12}, \Lambda_{32}, \Lambda_{11}, \Lambda_{31}$ son matrices

$$\Lambda_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\\ \omega_2 & \omega_1\end{pmatrix} \qquad \Lambda_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\omega_3 & \omega_1\\ \omega_1 & \omega_3\end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\omega_4 & \omega_1\\ \omega_1 & \omega_4\end{pmatrix} \qquad \Lambda_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\omega_5 & \omega_1\\ \omega_1 & \omega_5\end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \omega_2 = \begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\omega_3 = \begin{pmatrix}0&i&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{pmatrix} \omega_4 \begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\omega_5 = \begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que Q_1 y Q_2 son matrices de 8x8, de hecho son operadores diferenciales matriciales, y al resolver $Q_1|\vec{\Psi}\rangle = 0$ y $Q_1|\vec{\Psi}\rangle = 0$ tenemos que $|\vec{\Psi}\rangle$ queda definido como el vector $|\vec{\Psi}\rangle = (\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \Psi_3 \quad \Psi_4 \quad \Psi_5 \quad \Psi_6 \quad \Psi_7)$ 8
y de cada una de las dos ecuaciones obtenemos 8 ecuaciones diferenciales acopladas para las ocho componentes de la función de onda.

Como ejemplo resolveremos las ecuaciones de Q_1 ya que los valores de $|\vec{\Psi}\rangle$ son iguales para las dos supercargas.

Las 8 ecuaciones de $Q_1|\vec{\Psi}\rangle = 0$ son:

$$-gcx\Psi_1 + \pi_1^1\Psi_2 = 0$$

$$gcx\Psi_2 + \pi_1^1\Psi_1 = 0$$

$$gcx\Psi_3 + \pi_1^1\Psi_4 = 0$$

$$-gcx\Psi_4 + \pi_1^1\Psi_3 = 0$$

$$-gcx\Psi_5 + \pi_1^1\Psi_6 = 0$$

$$gcx\Psi_6 + \pi_1^1\Psi_5 = 0$$

$$gcx\Psi_7 + \pi_1^1\Psi_8 = 0$$

$$-gcx\Psi_8 + \pi_1^1\Psi_7 = 0$$

Pero siguiendo con la idea de simplificación podemos hacerlo para un caso aún más particular igualando $\Psi_1 = \Psi_4 = \Psi_5 = \Psi_8$ y $\Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_6 = \Psi_7$

1) $\pi_1^1\Psi_2 - gcx\Psi_1 = 0$
2) $\pi_1^1\Psi_1 + gcx\Psi_2 = 0$

Entonces tomemos la ecuación 1

$$\pi_1^1\Psi_1 - gcx\Psi_1 = 0$$

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} - gcx\Psi_1 = 0$$

$$\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} - igcx\Psi_1 = 0$$

Pero ya por $G_1|\vec{\Psi}\rangle = 0$ tenemos $\Psi_2 = -i\Psi_1$

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} - igcx\Psi_1 = 0$$

$$\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} + gcx\Psi_1 = 0$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} = -\frac{gcx\Psi_1}{\hbar}$$

$$\frac{1}{\Psi_1}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} = -\frac{gcx}{\hbar}$$

$$\int\frac{1}{\Psi_1}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} = \int -\frac{gcx}{\hbar}$$

$$In\,\Psi_1 = -\frac{gcx^2}{2\hbar} + b$$

$$\Psi_1 = be^{-\frac{gcx^2}{2\hbar}}$$

$$\Psi_2 = -ibe^{-\frac{gcx^2}{2\hbar}}$$

Y estas dos funciones son las únicas dos componentes independientes de la función de onda que originalmente tenía ocho componentes independientes. Podemos ver que esta es la solución del estado base para el oscilador armónico cuántico pero generalizada al modelo supersimétrico de la matrix theory. Este ejemplo sencillo nos demuestra que nuestro método es bastante efectivo para encontrar soluciones y además podemos ver que algunos modelos reducidos son físicamente relevantes. En nuestro caso, resolvimos el Hamiltoniano supersimétrico correspondiente al oscilador armónico cuántico.

CONCLUSIONES

En este trabajo consideramos un modelo dimensionalmente reducido del Hamiltoniano de Matrix theory para poner a prueba un método para encontrar solución a la función de onda del estado de más baja energía (estado base). El método consiste en representar las variables fermiónicas por medio de matrices que satisfacen un algebra de Clifford generalizada a elementos del algebra que tienen dos indices. Existen trabajos en los que discuten la posible relevancia de modelos de dimensiones menores a once y nuestro método resulta útil para encontrar solución al estado base de estos modelos. Debido a que la dimension de las matrices fermionicas aumenta de manera considerable a medida que aumentan las dimensiones, el problema general se vuelve complicado de manejar, pero con nuestro método, encontrar solución es en principio posible. En este trabajo nos limitamos a un modelo de dos dimensiones y el grupo de simetría SU(2).

Además, hicimos una proyección de las variables bosónicas a un modelo reducido. Pusimos a prueba el método y mostramos su solución. Nuestro método abre la posibilidad de encontrar solución al modelo dimensionalmente completo y seguir considerando modelos reducidos ya que estos pueden ser físicamente relevantes.

AGRADECIMIENTOS

Elsa García Zamora

Francisco H. Carrillo Escudero

Escuela de Nivel Medio Superior de Guanajuato

REFERENCIAS

[1] Kane Gordon L. (2000). Supersymmetry: what? why? when?. Contemporary Physics, 41(6), 359-367.
[2] J. L. López, O. Obregón. (2015). Supersymmetric matrix quantum cosmology. Classical and Quantum Gravity, 32(23), 4367-4408.
[3] M. B. Halpern, C. Schwartz. (1998). Asymptotic search for ground states of SU(2) matrix theory. International Journal of Modern Physics A, 13, 4367-4408.
[4] O. Obregón, C. Ramirez. (1998). Dirac like formulation of quantum supersymmetric cosmology. Physical Review D. 57(2), 1015-1026.