JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

Enseñar el Álgebra Geométrica en el Primer Semestre de Ingenierías

Ramón López Escudero (1), Philippe Eenens (2)

1 [Ingeniería en Geomática, Universidad de Guanajuato] | Dirección de correo electrónico: [r.lopezescudero@ugto.mx]

2 [Departamento de Astronomía, División de Ciencias Naturales y Exactas, Campus Guanajuato, Universidad de Guanajuato] | Dirección de correo electrónico: [eenens@gmail.mx]

Resumen

A través del tiempo el ser humano siempre ha tratado de describir la naturaleza de manera comprensible para sí mismo, por lo que ha desarrollado diversas herramientas que intentan aproximar el comportamiento del medio en el que nos vemos inmersos. Aquí las diversas teorías matemáticas juegan un papel protagonista. El álgebra geométrica (GA, por sus siglas en inglés) tiene su origen en el trabajo de cuatro grandes científicos: William Hamilton, Hermann Grassmann, William Clifford y David Hestenes [1]; en conjunto, sus teorías integran una herramienta algebraica que describe el espacio y resuelve problemas geométricos de manera natural [5]. El álgebra de Grassmann ha sido olvidada con el paso del tiempo, pero investigadores contemporáneos han logrado observar el potencial que ofrece y han unificado esfuerzos para lograr hacer resurgir e intensificar su aplicación en campos como la física, matemáticas e ingeniería [3]. En este trabajo reportamos sobre un experimento pedagógico con estudiantes de ingeniería.

Abstract

Through time human beings have tried to describe Nature in an understandable way for themselves. That is why they have developed various tools that approximate the behavior of the environment where we are immersed. In this, the various mathematical theories play a starring role. The geometric algebra has its origin in the work of four great scientists: William Hamilton, Hermann Grassmann, William Clifford and David Hestenes [1]; altogether their theories make up an algebraic tool that describes space and resolve geometric problems in a natural way [5]. The algebra of Grassmann has been forgotten through the passing of the time, but contemporaneous researchers have observed the potential that this tool offers and have unified efforts to revive it and intensify its application in the fields of physics, mathematics and engineering [3]. In this work we report on a pedagogy experiment with engineering students.

Palabras Clave Álgebra; Grassmann; Producto geométrico

INTRODUCCIÓN

Hoy en día se conocen y aplican diferentes herramientas matemáticas las cuales han sido fundamentadas y distribuidas al paso de los años, y son estas mismas las que son transmitidas en centros de educación aunque a veces se desconozca su verdadero origen. Una de estas herramientas es el análisis vectorial. Resulta ser de gran interés en áreas como la física, matemáticas e ingeniería, ya que solventa problemas de análisis.

Estudiando más a fondo los orígenes se encuentra que el cálculo vectorial, trabajado y publicado por el matemático Gibbs, toma sus raíces en gran parte de las teorías de Grassmann, pero sería fructuoso retomar la teoría integral de Grassmann: el álgebra geométrica.

Aunque todavía no integrada en los programas de estudio, existe una creciente aceptación del álgebra geométrica hoy en día, ya que es difícil encontrar un área de la física, matemática o ingeniería en la cual haya sido aplicada sin haber logrado un resultado exitoso. Algunas de las aplicaciones más conocidas residen en la física clásica, geometría diferencial, ciencias de la computación y robótica [4].

Antecedentes Teóricos

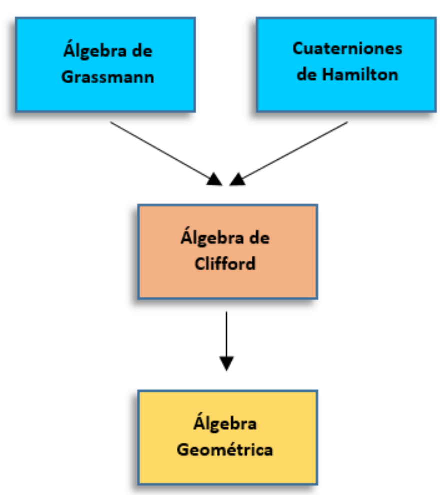
Hermann Grassmann fue un profesor de matemáticas en Stettin, Alemania, quien, sin haber tomado cursos formales de matemáticas, introdujo una idea revolucionaria para las matemáticas que sería posteriormente los fundamentos de lo que hoy conocemos como álgebra geométrica [5].

La fascinación de Grassmann de poder representar y manipular cuerpos geométricos mediante un álgebra lo llevo a definir diversas operaciones, como es el producto exterior y el producto punto.

Grassmann publicó la primera edición de su cálculo geométrico en el año de 1844 (Lineale Ausdenhnungslehre), mismo año en que Hamilton descubrió los cuaterniones. El trabajo de Grassmann no logró el mismo impacto que la teoría de los cuaterniones [4]. Debido a que Grassmann no contaba con una posición universitaria y la lectura de sus escritos resultaba complicada, propició a que grandes matemáticos de su época no tomaran gran interés sobre su trabajo, razón por la cual tuvo que pasar aproximadamente un siglo para que sus ideas rindieran resultados [5].

William Kingdon Clifford fue un matemático británico y profesor de matemática aplicada quien introdujo una nueva álgebra unificando el trabajo de Hamilton y Grassmann, trabajo que actualmente resulta ser la base del álgebra geométrica moderno [7].

Josiah Willard Gibbs fue un matemático estadouniense a quien se le acredita la invención del cálculo vectorial moderno. Gibbs trabajó en desarrollar el álgebra de Grassmann y produjo el cálculo vectorial que funcionó de acuerdo a las necesidades de los físicos de esa época. Las notas de Gibbs fueron impresas de manera privada en 1881 y en 1884 se reprodujeron para el uso de sus estudiantes para después ser adaptadas por Edwin Wilson en un libro llamada "Análisis Vectorial" publicado en 1901 [4].



David Hestenes es el actual arquitecto líder del álgebra geométrica. La mayoría de su carrera la dedicó a desarrollar un álgebra geométrica unificada en un solo lenguaje para los matemáticos y físicos [4].

Elementos Base del Álgebra Geométrica

Considere que este trabajo se basa en un espacio tridimensional euclidiano con bases ortogonales.

Producto Cuña

Grassmann desarrolló este producto y recibe su nombre debido al símbolo del operador (^) [7]. Se le conoce también como producto progresivo ya que su objetivo principal es el de aumentar la dimensión del espacio de los objetos en análisis, por ejemplo, el producto cuña de dos vectores produce la representación de un plano, pasando de un espacio unidimensional a un bidimensional [5].

El producto cuña opera en valores escalares, vectores y en otros nuevos conceptos que integra el álgebra geométrica, por ejemplo, el producto cuña entre dos vectores genera una entidad llamada bivector [7] o el producto cuña entre tres vectores genera una entidad llamada trivector, la cual representa un cuerpo en el espacio.

El orden de los multiplicadores si afecta, por lo que este producto es anti conmutativo.

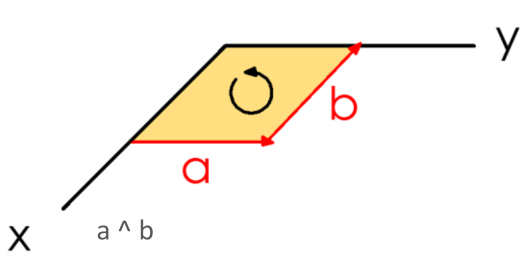


IMAGEN 2: Representación de un bivector

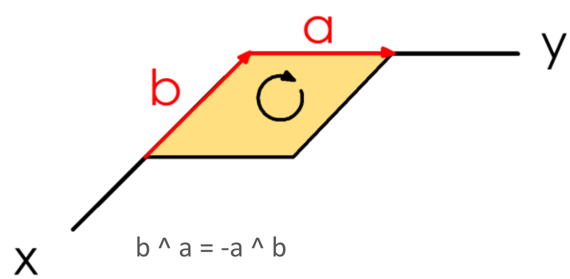


IMAGEN 3: Representación de un bivector

El producto cuña entre tres vectores produce un trivector (a ^ b ^ c), el cual es una nueva entidad matemática y es distinta de los escalares, vectores y bivectores, ya que representa un volumen con orientación [7].

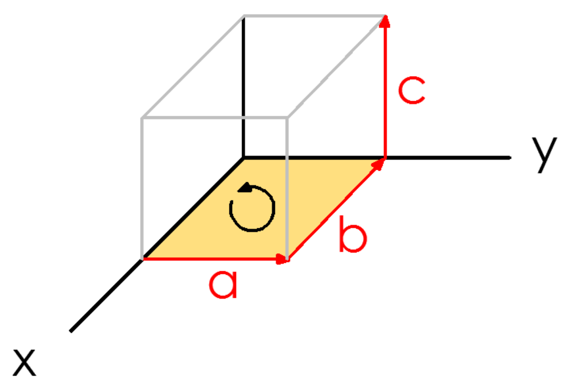


IMAGEN 4: Representación de un trivector

Producto Interior

En álgebra vectorial es común escuchar hablar acerca de un producto llamado punto o interior, que cuantifica distancias y ángulos; el álgebra geométrica también cuenta con su productor interior [6].

Grassmann observó que, en general, el producto interior disminuía la dimensión del espacio de los objetos geométricos en análisis, razón por la cual lo llamó producto regresivo. Por ejemplo, aplicando el producto interior entre dos vectores el resultante es un escalar, pasando los objetos unidimensionales a escalares [5].

Producto Geométrico

El producto geométrico es el operador que combina el producto interior y el exterior o cuña (uv = u ^ v + u · v), por lo tanto, este producto es sólo parcialmente simétrico, ya que el producto cuña es anti conmutativo [7].

Del producto geométrico se pueden reducir términos, de los cuales se obtienen:

$$u \cdot v = \frac{1}{2}(uv + vu)$$

$$u \wedge v = \frac{1}{2}(uv - vu)$$

Ahora, aplicando el producto geométrico a un solo vector obtenemos:

$$uu = u \cdot u = 1$$

Blades

A los objetos construidos mediante un producto cuña (exterior) se les conoce como blades [5], por ejemplo: (e1^e2) representa un plano (bidimensional).

Grado

El grado de una entidad es el número de vectores "acuñados" entre sí, por ejemplo: los escalares tienen un grado cero, los vectores un grado uno (e_1), los bivectores un grado dos (e_1^e_2), los trivectores un grado tres (e_1^e_2^e_3), etcétera [7]. También se define como grado a la dimensión del espacio que representa el blade [5].

Base

Por ejemplo, en un espacio tridimensional, cualquier elemento se puede construir como combinación de los elementos de base;

1	Escalar (k)
3	Vectores (e_1, e_2, e_3)
3	Bivectores (e_1^e_2), (e_2^e_3), (e_3^e_1)
1	Trivector (e_1^e_2^e_3)

Por lo tanto, el número de elementos de la base es 8; este número se obtiene de manera muy sencilla ya que siempre responde a la operación exponencial de 2^n, por ejemplo, en cuarta dimensión se tiene 2^4, por lo tanto, en este caso el número de los vectores de la base es 16 [7].

MATERIALES Y MÉTODOS

En este proyecto, para poder incurrir en la enseñanza del álgebra geométrica a estudiantes de ingenierías se recurrió a una metodología sencilla, donde se trató abarcar todos los elementos básicos del álgebra geométrica de manera didáctica y de fácil entendimiento.

Se dio un curso presencial a un grupo reducido de estudiantes. Su tamaño benefició la dinámica para aclarar dudas y tomar nota si algún tema no quedó claro, y así posteriormente mejorar el material de enseñanza.

Al final del curso se realizaron dos pequeños problemas de aplicación que sirvieron de comprobación y confirmar que los conceptos básicos hayan quedado claros y que hayan tenido la lógica adecuada para resolver de manera correcta problemas matemáticos sencillos.

Por último se entregó un test a cada estudiante donde se calificó la calidad y facilidad de entendimiento del curso. También se entrevistaron a los estudiantes, quienes manifestaron que el tema, aunque totalmente novedoso, les había parecido muy interesante.

IMAGEN 5: Curso Presencial

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El álgebra geométrica resulta ser una herramienta matemática relativamente nueva, y debido a que es difícil encontrarla en clases dentro de una universidad, se torna complicado el simple hecho de conocer su existencia.

Al momento de dar el curso, la primera impresión de los estudiantes fue de completo desconocimiento, y debido a que ya tenían conocimiento sobre el álgebra vectorial, resultó difícil el poder transmitir los conceptos que se manejan en álgebra geométrica, pero una vez que se comprendió, el curso tuvo un flujo positivo.

El resultado de los test también resultó ser bueno, ya que los estudiantes terminaron entendiendo la finalidad principal del álgebra geométrica y con curiosidad de aprender más sobre el tema.

CONCLUSIONES

Aunque el álgebra geométrica resulte una excelente herramienta matemática de análisis, no se puede prescindir del uso de otras metodologías, como es el álgebra de matrices.

Debido a que mucha de la investigación y trabajos en el área de ingeniería no cuenta con bases del álgebra geométrica, resulta algo completamente nuevo para los estudiantes, por lo que se debería implementar un curso sencillo y aumentar la cantidad de ejercicios con aplicaciones para que el concepto quede más claro.

La enseñanza del álgebra geométrica en centros de educación resultaría útil, ya que se comprendería de mejor manera algunos conceptos matemáticos puesto que en álgebra geométrica se usa constantemente la intuición geométrica, por lo que es más sencillo el proceso de conceptualización.

REFERENCIAS

[1] González Calvet, R. (2007). Treatise of Plane Geometry Through Geometric Algebra. Barcelona: R. Gonzalez.

[2] Anton, H. (1985). Introducción al Álgebra Lineal. México: Limusa.

[3] Kanatani, K. (2015). Understanding Geometric Algebra. Florida: CRC Press.

[4] Miller, R. A. (2013). Geometric Algebra: An Introduction with Applications in Euclidean and Conformal Geometry (Tesis de Maestría). Universidad de San José, Estados Unidos de América.

[5] Laguna Sánchez, G. (2011). Un Acercamiento Práctico al Álgebra Gométrica. Contactos, 79, pp. 31-39.

[6] Dorst, L., Mann, S. and Bouma, T. (2002). GABLE: A Matlab Tutorial for Geometric Algebra (Manual de Usuario). Universidad de Amsterdam, Holanda.

[7] Lengyel, E. (2012). Fundamentals of Grassmann Algebra. Game Developers Conference. San Francisco, Estados Unidos de América.