JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

Los fractales como herramientas en el análisis de la radiación solar y su relación con la energía solar

Francisco Gómez Hernández (1), Klaus Peter Schröder (2)

1 Licenciatura en Matemáticas, Universidad de Guanajuato | Dirección de correo electrónico: francisco.gomez@cimat.mx

2 Departamento de astronomía, División de Ciencias Naturales y Exactas, Campus Guanajuato, Universidad de Guanajuato | Dirección de correo electrónico: kps@astro.ugto.mx

Resumen

La dificultad que conlleva seguir con la explotación de combustibles fósiles hace cada vez más relevante las investigaciones relacionadas a las energías renovables. Una de las principales es la energía solar, esta nos lleva a un problema de optimización que se traduce en buscar los lugares donde la energía recibida sea mayor. Una metodología utilizada con este fin es el estudio del espectro de radiación solar. Un área de las matemáticas es el concepto de dimensión, una de sus motivaciones fue definir de manera formal el concepto de dimensión con lo que surgieron algunas propuestas como la dimensión caja y la dimensión de Hausdorff. En ambos casos, existen subconjuntos del plano que no tienen dimensión entera, es decir, existen subconjuntos cuya dimensión es mayor a uno y menor a dos. A los conjuntos que no tienen dimensión entera las llamaremos fractales. El espectro de radiación solar tiene una estructura que se aproxima mucho a un fractal y su dimensión tiene relación directa con las variaciones de las mediciones. Se expondrán algunos métodos para estimar ambas dimensiones y se analizarán las diferencias entre ambos métodos con datos reales.

Abstract

The difficulty of continuing the exploitation of fossil fuels increases the relevant of research related to renewable energies. One of the principal renewable energies is solar energy, this leads to an optimization problem that search places where the energy received is greater. A methodology for this purpose is the study of the spectrum of solar radiation. An area of mathematics is the dimension theory, one of his motivations was formally define the concept of dimension, some proposals as the box-counting dimension and Hausdorff dimension emerged. In both cases, there are subsets of the plane that have not an integer dimension, i.e. there are subsets whose dimension is greater than one and less than two. A set that do not have integer dimension is called fractal. The spectrum of solar radiation has a structure similar to a fractal and its dimension is directly related to variations in measurements. Some methods to estimating both dimensions and differences between the two methods with real data will be analyzed and presented in this work.

Palabras Clave

Fractal; Teoría de la dimensión; Energía solar; Radiación solar; Dimensión de Hausdorff

INTRODUCCIÓN

La energía solar representa una de las principales alternativas en áreas remotas. Sin embargo, para la selección de los lugares óptimos en que se deben colocar los paneles es un problema que requiere conocimiento de la radiación solar.

Un método para estudiar esto es el problema de la clasificación de días, buscaremos dividir a los días en días con cielo despejado, días parcialmente nublados y días completamente nublados. Mostraremos una propuesta de clasificación basada en fractales. Los fractales en el plano son objetos que tienen dimensión entre uno y dos, en cierta forma son curvas que llenan más espacio que si fuesen sólo líneas pero menos espacio que si fueran una superficie.

Cuando se mide la radiación solar con respecto al tiempo, se obtiene una figura similar a un fractal. Si la dimensión de dicha curva es alta (cercana a dos) se traduce en la existencia de periodos con una alta variación con respecto al tiempo.

En un día con cielo despejado, la radiación recibe menos interferencias por lo que hay menos fluctuaciones haciendo que el fractal tengo dimensión cercana a uno. Por otro lado, en un día completamente nublado hay más fluctuaciones haciendo que la dimensión se aproxime a dos.

Radiación solar

El promedio de la radiación solar recibida sobre una superficie normal a los rayos está dada por la constante solar (I_{sc}). El valor aceptado de esto es

$$I_{sc} = 1367 \frac{W}{m^2}$$

Cuando la radiación solar entra a la atmósfera, parte de esta se dispersa o es absorbida por las moléculas de agua. La radiación que no se dispersa o se reflecta se le llama radiación directa. La radiación que se dispersa y que llega a la tierra se conoce como la radiación difusa.

Cuando se habla de la energía solar, esta se obtiene mediante paneles. En este punto, no sólo nos importa la radiación que llega del sol (ya sea directa o difusa), nos interesa toda la radiación que puede llegar al panel. Parte de la radiación puede llegar al ser reflejada desde el suelo, esta es llamada la radiación reflejada.

El modelo de Liu y Jordan

En los modelos propuestos por Liu y Jordan, se supone que la radiación reflejada es isotrópica, es decir, igual en todas las direcciones. La radiación total es el resultado de estos tres componentes.

Existen algunos modelos para estimar la radiación total, presentaremos brevemente el modelo isotrópico de Liu y Jordan que también estima la radiación promedio por hora a partir de la radiación promedio diaria sobre una superficie.

La radiación promedio diaria sobre una superficie satisface la siguiente relación

$$H_T = H_{b,T} + H_{d,T} + H_{r,T}$$

Donde H_T es la radiación total, $H_{b,T}$ la radiación directa, $H_{d,T}$ la radiación difusa y $H_{r,T}$ la radiación reflejada. También se supone que la intensidad de la radiación difusa es uniforme alrededor del domo celeste. Además $H_{d,T}$ y $H_{r,T}$ se suponen isotrópicas. Según este modelo obtenemos

$$H_T = H_b R_b + H_d \left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right) + H\rho\left(\frac{1-\cos\beta}{2}\right)$$

Donde H_b, H_d y H representan respectivamente la radiación directa, difusa y total sobre una superficie horizontal, β es el ángulo de inclinación, ρ el coeficiente de reflexión de la tierra y R_b es la razón de radiación directa incidente en un plano inclinado con relación a uno horizontal.

Teoría de la dimensión y fractales

La teoría de la dimensión es un área que en sus principios buscó la formalización del concepto de dimensión. Este problema se puede entender de modo geométrico como la asignación de un número a cierto conjunto y que este número cumpla con algunas propiedades adecuadas.

Por ejemplo, la dimensión de un objeto no cambia con la escala, es decir, un cuadrado es un objeto bidimensional sin importar su tamaño. Sin embargo, cuando cambiamos la escala el área crece con un exponente similar a su dimensión. Si denotamos por $A(c)$ al área del objeto cuando se escala a $1{:}c$ esperamos un comportamiento como el que describe la siguiente relación

$$A(c) \sim \nu\, c^{\alpha}$$

Donde α es la dimensión del objeto.

La dimensión caja

Dado $A \subset \mathbb{R}^2$, denotemos por $M_\delta(A)$ a la cantidad mínima de cuadrados con longitud d que se requieren para cubrir A. Notemos que si hacemos A más pequeño con un factor $\delta{:}1$ se tiene que $M_\delta(A) \sim \nu\delta^{-d}$ donde d es la dimensión pues el número de cuadrados necesario crece exponencialmente de acuerdo al decrecimiento de δ. De estas relaciones se concluye que

$$d = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log M_\delta(A)}{-\log \delta}$$

La dimensión de Hausdorff

La dimensión caja puede ser muy intuitiva, sin embargo la dimensión de Hausdorff tiene propiedades matemáticas más importantes. Dado $A \subset \mathbb{R}^2$, para cada $s \geq 0$ definimos su medida de Hausdorff de la siguiente manera

$$H_\delta^s(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |U_i|^s : 0 < |U_i| < \delta, \forall i\right\}$$

Donde el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones de borelianos que cubren a A. Con esto, definimos la medida s-dimensional exterior de Hausdorff con la relación

$$H^s(A) = \lim_{\delta \to 0} H_\delta^s(A)$$

La medida de Hausdorff tiene un comportamiento importante, existe un $0 \leq t \leq 2$ tal que $H^s(A) = 0$ si $s < t$ y $H^s(A) = \infty$ si $s > t$. A grandes rasgos, la medida de Hausdorff obtiene la medida de un conjunto considerándolo como s-dimensional. Si suponemos que A es s-dimensional si lo tomamos en una dimensión menor, A está más allá de lo que se puede medir en dimensiones menores por lo que tiene medida infinita. En caso contrario, si A está en una dimensión mayor su dimensión debe ser cero por razones similares.

Diferencias entre las dimensiones

Existe otra noción de dimensión, esta es la dimensión de Minkowski, sin embargo esta coincide con la dimensión caja por lo que no es necesario mencionarla. Esto nos obliga a mencionar un punto importante, la dimensión caja no siempre coincide con la de Hausdorff. Un ejemplo de esto se obtiene al tomar $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, su dimensión caja es uno mientras que su dimensión de Hausdorff es cero.

Fractales y su dimensión

El concepto de fractal es uno de los más difundidos en la matemática, pero también es un concepto difícil de definir. En relación con la dimensión diremos que un fractal es un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ que no tiene dimensión entera. Un ejemplo es el conjunto de Cantor cuya dimensión de Hausdorff es $\log_3 2$.

MÉTODOS

La definición de ambas dimensiones envuelve conceptos de límites. En primer lugar, la dimensión caja se define a partir de un límite y la dimensión de Hausdorff se puede definir mediante un ínfimo o un supremo. En la implementación esto resulta un problema a nivel computacional.

Mediante una computadora, debido a la precisión, no es posible calcular las dimensiones de un fractal usando la definición. Por esta razón, es necesario implementar algoritmos de aproximación de cada una de estas dimensiones.

La metodología de clasificación considera dos parámetros: d la dimensión del fractal obtenido a partir de las mediciones y como un parámetro adicional es el índice de claridad diario ya que un día completamente claro y uno completamente nublado pueden generar el mismo tipo de irregularidades lo que dificulta la clasificación.

Esta clasificación de días típicos considera las siguientes tres categorías:

1. Día con cielo despejado:

   $1 \leq d \leq d_1$ y $k_T \geq k_{T,1}$

2. Día parcialmente nublado:

   $d_1 < d \leq d_2$ y $k_T \geq k_{T,1}$

3. Día completamente nublado:

$d > d_2$ ó $d \leq d_2$ y $k_T < k_{T,1}$

Nos centraremos en la implementación de algoritmos para estimar las dimensiones (caja y Hausdorff) de los conjuntos tipo fractales obtenidos en las mediciones de la radiación y con base en los resultados, analizar el impacto que esto puede tener en los resultados del problema de clasificación del día típico. Ya que, como se mostró anteriormente, conjuntos como $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ tienen dimensiones muy distintas.

Los paneles solares reciben radiación con longitud de onda entre 600 y 800 la cuál es transformada en energía. De este hecho, se tomó la radiación con longitudes de onda 650, 700 y 750 recibida a lo largo de algunos días. Estas longitudes se consideraron como representantes de la radiación que es utilizada para la energía solar.

Para estimar la dimensión caja se utilizó el algoritmo de conteo de cajas (counting-box algorithm) que es una implementación directa de la definición de dimensión caja. Por otro lado, la dimensión de Hausdorff es más compleja matemáticamente hablando, esto hace más difícil su implementación en computadora.

El algoritmo implementado para la dimensión Hausdorff usa análisis de Fourier, se considera las mediciones como puntos $c(t) \in \mathbb{C}$, con estos puntos se extiende como función continua uniendo las mediciones. Se crea una nueva señal $\mathcal{F}c$ mediante la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}c(u) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t) e^{-2i\pi tu} dt$$

Si definimos $P(u) = |\mathcal{F}c(u)|^2$ se sigue que $P(u)$ es proporcional a u^D, donde D se la dimensión.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

De ambas simulaciones se obtuvieron dimensiones muy cercanas a uno. Esto nos muestra que no hay cambios significativos con respecto a la definición de dimensión utilizada. Dado que la primera implementación resulta sencilla y eficiente desde el punto de vista computacional, resulta natural preferir esta.

Sin embargo, se requiere estudiar más detalladamente las propiedades de los conjuntos que generan un cambio radical en la dimensión. Con esto se podrá concluir sobre cuál dimensión debe ser utilizada o si no tiene impacto en la clasificación el optar por la óptima desde el punto de vista computacional.

CONCLUSIONES

A menos que se desarrollen algoritmos sencillos y eficientes para encontrar buenas estimaciones de la dimensión de Hausdorff, se debe seguir con el estudio del problema de la clasificación del día típico mediante la dimensión caja.

AGRADECIMIENTOS

Esta sección es opcional y se refiere al crédito de personas o instituciones que hicieron posible el trabajo de investigación, ya sea por el financiamiento o colaborando con apoyo logístico o en la obtención y análisis de los datos.

REFERENCIAS

Libro:

Stix, Michael, (2002). The Sun: An introduction (2nd ed.) Springer Berlin Heidelberg.

Badescu, B., (2008). Modeling solar radiation at the Earth's surface: Recent advances. Springer Berliin Heidelberg. Chapter 2: Fractal classification of typical meteorological days from global solar irradiance: Application to five sites of different climates.

Barreira, Luis, (2012). Ergodic Theory, Hyperbolic dynamics and dimensión theory. Springer Berlin Heidelberg.

Deutsche Gesellschaft für Sonnenergie, (2008). Planning & Installing photovoltaic system: A guide for installers, architects and engineers (2nd ed.) London, Earthscan.

Artículo:

Florindo, J. B. & Bruno, O. M. (2012)
Closed contour fractal dimensión estimation by the Fourier transform.
Chaos, Solitons & Fractals, volume 44 (issue 10), pp. 851-861.
doi: 10.1016/j.chaos.2011.07.008

Raghavendra, B. S. & Narayana, D. (2010)
Computing Fractal Dimension of Signals using Multiresolution Box-counting Method. World Academy of Science, Engineering and Technology, volumen 4.
Artículos Apellidos, A. A., Apellidos, B. B. & Apellidos, C. C. (año). Título del artículo. Nombre de la revista, volumen(número), pp. xx-xx. doi: xx.xxxxxxx

o: Haner, R. L., Llanos, W. & Mueller, L. (2000). Small volume flow probe for automated direct injection NMR analysis: design and performance. Journal of Magnetic Resonance, 143(8), 69-78.

Una página web deberá incluir la fecha de consulta o número de referencia proporcionado por la página electrónica:

Ejemplo: Cintrón, G., Lugo, A. E., Pool, D. J. & Morris, G. (1978). Mangroves of arid environments in Puerto Rico and adjacent islands. Biotropica, 10(2),110-121. Recuperado de http:// www.jstor.org/ pss/2388013