JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

EL CIRCUITO ELÉCTRICO RC DE ORDEN ARBITRARIO

Silvan López Alexis Tadeo (1), Rosales García Juan (2)

1 [Programa de licenciatura en Ingeniería mecánica eléctrica, Universidad de Guanajuato | Dirección de correo electrónico: alexis_tadeoo@hotmail.com]

2 [Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS, Campus Salamanca, Universidad de Guanajuato. | Dirección de correo electrónico: rosales@ugto.mx]

Resumen

En este trabajo se investiga un sistema físico simple. Analizamos el circuito RC desde el punto de vista del cálculo fraccionario, haciendo uso y comparando las derivadas fraccionarias de Caputo y Caputo-Fabrizio. Las dos definiciones de derivadas fraccionarias coinciden en el límite ordinario, $\gamma = 1$.

Abstract

In this work, the research of a simple physical system is presented. We analyze the RC circuit from the point of view of the fractional calculus. We use and compare the Caputo and the Caputo-Fabrizio fractional derivatives. The two definitions coincide in the ordinary limit $\gamma = 1$.

Palabras Clave

Cálculo de orden arbitrario o fraccionario; derivada fraccionaria; Integral fraccionaria; circuito eléctrico RC.

JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos 30 años, el cálculo de orden arbitrario (mejor conocido en la literatura como cálculo de orden fraccionario) se ha desarrollado de manera impresionante. [1,2]

El nacimiento del cálculo de orden arbitrario o fraccionario tuvo lugar después de la publicación, en 1675, de un documento de G. W. Leibniz, donde aparecía el símbolo $d^n y/dx^n$, el cual se refiere a la derivada de orden n de la función y respecto de x, donde n es un número natural. [1]

La herramienta matemática conocida como cálculo fraccionario permite la derivación e integración de una función usando cualquier orden: racional, real o imaginario. Dentro del campo de las matemáticas podemos encontrar varios ejemplos de extensión del significado, como puede ser el paso de los números reales a los números complejos, o la generalización del cálculo del factorial de un número entero al cálculo del factorial de un número complejo mediante la utilización de la función gamma de Euler $\Gamma(z)$. Aunque Leibniz y L´Hôspital discutieron la posibilidad de que la n -ésima derivada podría ser fracción y no necesariamente un entero alrededor del año 1965, esta rama del análisis matemático se desarrolló plenamente a principios del siglo XIX por Liouville, Riemann, Letnikov, entre otros. [3]

El reciente interés del cálculo fraccional y, en particular, en las ecuaciones diferenciales fraccionarias es estimulado por las aplicaciones en diversas áreas de la física, la química y la ingeniería. Sin embargo, la derivación de estas ecuaciones de algunas leyes fundamentales no es un asunto fácil. El operador fraccionario refleja procesos de disipación intrínsecas que son lo suficientemente complicadas en la naturaleza. Su relación teórica con el cálculo fraccional aún no se determina por completo. [4] Es por ello que resulta muy interesante el análisis de un sistema físico simple y llegar a comprender su comportamiento haciendo uso de la ecuación fraccionaria.

En el presente trabajo de investigación se analizará un sistema físico simple, llamado circuito eléctrico RC, por medio de 2 definiciones de orden arbitrario. Existen diferentes definiciones de las derivadas e integrales de orden arbitrario o fraccionario, 2 definiciones fueron elegidas, las cuales son empleadas para la solución de problemas físicos, la derivada fraccionaria de Caputo y recientemente la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio. Se analizaron los resultados obtenidos mediante éstas definiciones y se obtuvo una pequeña diferencia en el comportamiento del sistema. Las dos definiciones coinciden en el caso límite $\gamma = 1$.

MATERIALES Y MÉTODOS

Un circuito RC que será analizado mediante las derivadas fraccionarias de Caputo y de Caputo-Fabrizio. Para esto, definamos la

- Derivada fraccionaria de Caputo:

$$D_t^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_0^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma-m+1}}\, dt \quad (1)$$

Donde n= 1,2, $\in \mathrm{N}, \Gamma$ es la función gamma y $n-1 < \gamma \leq n$. Una de las grandes ventajas de la derivada fraccionaria de Caputo es que en las condiciones iniciales tiene derivadas ordinarias a diferencia de otras definiciones, donde son fraccionarias. La transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo, se define como;

$$L\left[D_t^\gamma f(t)\right] =$$

$$S^\gamma F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\gamma-k-1} f^k(0). \quad (2)$$

Esta es una generalización natural que corresponde a la fórmula bien conocida como la transformada de Laplace de $(f)^n(t)$ donde $\gamma = n,$ y puede ser usada para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias con condiciones iniciales.

- Derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio:

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha)} f(t)$$

$$= \frac{M(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t f(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] dt \quad (3)$$

Donde $M(\alpha)$ es una función de normalización de tal forma que $M(0) = M(1) = 1$. De acuerdo con la definición (3), la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio es cero cuando $\mathrm{f}(\mathrm{t})$ es constante.

- La transformada de Laplace de la derivada de Caputo-Fabrizio es:

$$LT\left[\mathcal{D}_{\mathrm{t}}^{(\alpha)}\right] = \frac{1}{(1-\alpha)} LT\big(f(t)\big)LT\left(exp - \frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) = \frac{\big(sLT(F(T)) - sf(0) - f'(0)\big)}{s+\alpha\,(1-s)} \qquad (4)$$

I Conceptos Preliminares

La ley de Ohm indica que la corriente que fluye a través de un conductor entre dos puntos dados es directamente proporcional a la diferencia de potencial e inversamente proporcional a la resistencia entre ellos. La fórmula matemática se puede escribir

$$V_R(t) = Ri(t) \qquad (5)$$

Donde $i(t)$ es la corriente que fluye a través del conductor, medido en amperios (A), $v(t)$ es la diferencia de potencial medida entre dos puntos del conductor con unidades de voltios V, y R es la resistencia del conductor, medida en ohmios. La corriente es el cambio en la carga q respecto al tiempo t, es decir

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \qquad (6)$$

Teniendo esto en cuenta, la ley de Ohm se puede escribir en función de la carga $q(t)$

$$V_R(t) = R\frac{dq}{dt} \qquad (7)$$

La idea es volver a escribir la ley de Ohm en función de las derivadas fraccionarias. Para este fin se introduce un operador de derivada fraccionaria, como sigue

$$\frac{d}{dt} \to \frac{d^\gamma}{dt^\gamma}\,, \qquad 0 < \gamma \leq 1 \qquad (8)$$

Donde γ es un parámetro arbitrario que representa el orden de la derivada, para $\gamma = 1$ la derivada se convierte en ordinaria. Sin embargo, el operador de derivada tiene dimensiones de segundos inversos, mientras que la derivada fraccionaria (8) tiene segundos inversos a la γ, $s^{-\gamma}$. Una posibilidad de corregir este problema de dimensionalidad es introduciendo una función de "peso" en la expresión (7), esto es;

$$\frac{1}{\sigma^{1-\gamma}}\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} = \frac{1}{s}\,, \qquad 0 < \gamma \leq 1 \qquad (9)$$

Donde σ debe tener dimensiones de segundos.

II Circuito RC Ordinario

La ecuación dinámica del circuito RC es

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q(t) = V_0 \qquad (10)$$

Donde V_0 es constante. Esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau}q(t) = \frac{V}{R_0} \qquad (11)$$

Si tomamos la condición inicial $q\,(0) = 0$, entonces la solución de (11) es

$$q(t) = V_0 C\,(1 - e^{-t/\tau}) \qquad (12)$$

III Circuito RC: Derivada fraccionaria de Caputo

El operador de la derivada fraccionaria

$$\frac{d}{dt} \to \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \quad \text{no correcto} \qquad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \to \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}}\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \quad \text{Si correcto} \qquad (14)$$

Entonces, la correspondiente ecuación diferencial fraccionaria del RC es

$$\frac{R}{\sigma^{1-\gamma}}\frac{d^\gamma q}{dt^\gamma} + \frac{1}{c}q(t) = V_0 \qquad (15)$$

Se puede escribir como

$$\frac{d^\gamma q}{dt^\gamma} + \frac{1}{\tau_\gamma}q(t) = \frac{C}{\tau_\gamma}V_0, \qquad \tau_\gamma = \frac{RC}{\sigma^{1-\gamma}} \qquad (16)$$

Aplicando la transformada de Laplace para la derivada de Caputo (2)

$$S^\gamma Q(s) - s^{\gamma-1}q_0 + \frac{1}{\tau_\gamma}Q(s) = \frac{CV_0}{\tau_\gamma s} \qquad (17)$$

Despejando Q(s), resulta

$$Q(s) = CV_0\,\frac{\frac{1}{\tau_\gamma}}{s\left(s^\gamma + \frac{1}{\tau_\gamma}\right)} \qquad (18)$$

Usando la transformada inversa de Laplace, obtenemos

$$q(t;\gamma) = CV_0\left[1 - E_\gamma\left(-\frac{\sigma^{1-\gamma}}{RC}\tau^\gamma\right)\right] \quad (19)$$

Y el voltaje

$$v(t) = V_0\left[1 - E_\gamma\left(-\frac{\sigma^{1-\gamma}}{RC}t^\gamma\right)\right] \quad (20)$$

Definiendo la relación

$$\gamma = \frac{\sigma}{RC} \quad (21)$$

Sustituyendo en las expresiones (19) y (20) se tiene

$$q(t;\gamma) = CV[1 - E_\gamma(-\gamma^{1-\gamma}\tilde{t}^\gamma)], \quad (22)$$

donde $\tilde{t} = \frac{t}{RC}$, es adimensional.

IV Circuito RC: Derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio

Analizaremos el mismo sistema físico, pero ahora será la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio (4). Se tiene

$$\frac{R}{\sigma^{1-\gamma}}\, D_{CF}^{\gamma} + \frac{1}{C}q(t) = V_0$$

(23)

La cual se puede escribir como

$$D_{CF}^{\gamma} + \frac{1}{\tau_\gamma}q(t) = \frac{C}{\tau_\gamma}V_0, \qquad \tau_\gamma = \frac{RC}{\sigma^{1-\gamma}} \quad (24)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio, resulta

$$\frac{sQ(s) - q_0}{s + \gamma(1-s)} + \frac{1}{\tau_\gamma}Q(s) = \frac{CV_0}{\tau_\gamma}\frac{1}{s}$$

Despejando $Q(s)$, y haciendo $q_0 = 0$, obtenemos

$$Q(s) = \frac{CV_0}{\tau_\gamma s}\frac{\tau_\gamma[s+\gamma(1-s)]}{[\tau_\gamma s + s + \gamma(1-s)]}$$

(25)

De esta ecuación si la evaluamos $\gamma = 1$, resulta

$$Q(s) = V_0 C\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right]$$

(26)

Entonces, aplicando la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio, se tiene

$$q(t) = CV_0[1 - e^{-\frac{t}{RC}}]$$

(27)

La cual coincide con (12), donde $\tau = RC$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

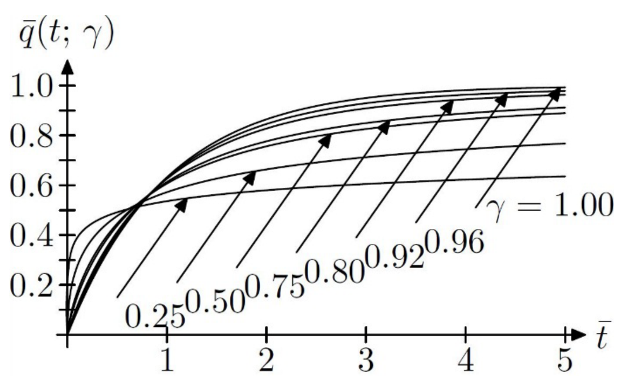

Imagen 1. Carga en el capacitor para diferentes valores de γ, conforme a la derivada fraccionaria de Caputo.

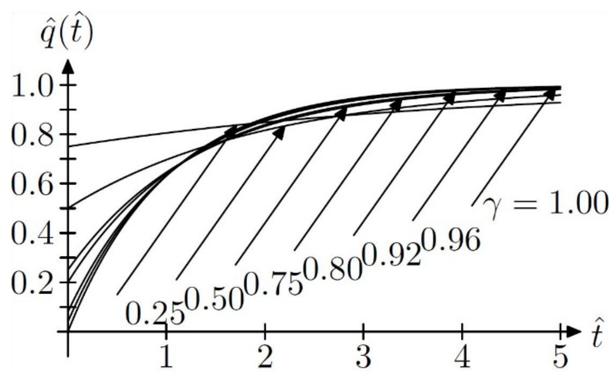

Imagen 2. Carga en el capacitor para diferentes valores de γ, conforme a la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio.

En las imágenes 1 y 2 podemos apreciar la solución del circuito eléctrico RC de orden arbitrario bajo 2 definiciones empleadas (derivada fraccionaria de Caputo y caputo-Fabrizio), por medio de gráficas para diferentes valores de γ.

Comparando las dos gráficas podemos observar que la unión de las curvas en la imagen 1 la derivada fraccionaria de Caputo es menor a 1 con respecto al tiempo y la imagen 2 es mayor a 1.

Debido a que un circuito RC es un sistema simple, y éste es analizado sin la interacción de otros sistemas o conexiones, está claro que el circuito no presenta pérdidas de energía a excepción de la resistencia, por lo que creemos que la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio representa la solución con datos más precisos y se demuestra en el diapasón entre los intervalos para diferentes valores de γ, el cual es mínimo.

Debido a estos resultados se requiere un análisis más profundo con datos experimentales que fundamenten a la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio, como una solución más exacta.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos estudiado el comportamiento del circuito RC con base a 2 definiciones de orden arbitrario o fraccionario.

Los modelos fraccionarios representan mejor a los sistemas dinámicos complejos. Esto se debe a que estos modelos tienen un grado de libertad adicional. Además, que describen modelos locales y con memoria.

La ecuación ordinaria de un circuito RC es un modelo ideal, sin embargo, existen factores en este circuito que en el cálculo ordinario no son tomados en cuenta; en el resistor existe de alguna manera disipación, es decir, pérdidas de energía, además el capacitor y el medio dieléctrico no son ideales. El cálculo de orden arbitrario toma en cuenta lo mencionado anteriormente.

Con el objetivo de tener un mejor modelo teórico para el circuito eléctrico RC se analizó su comportamiento bajo dos definiciones de derivadas fraccionarias (Caputo y Caputo-Fabrizio). Los resultados obtenidos indicaron que la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio, teóricamente representa la solución más exacta para este sistema simple, a la espera de la comprobación experimental.

AGRADECIMIENTOS

Aprovecho este apartado para agradecer y dedicar este trabajo de investigación a la Universidad Tecnológica de Tabasco y al Consejo de Ciencia y Tecnología del estado de tabasco, por brindarme la oportunidad para realizar la estancia del verano de Investigación científica en Guanajuato.

Una mención importante al Dr. J. Juan Rosales García asesor de investigación en esta estancia, quién me aceptó para el desarrollo de la investigación “Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario aplicadas a la Ingeniería” y me permitió adquirir conocimiento relacionado a este proyecto y a su elaboración, así mismo al Dr. Manuel Guía Calderón por su importante colaboración.

Quiero expresar también mi más sincero agradecimiento a la Universidad de Guanajuato campus Salamanca, por su importante hospitalidad y su interés por el convivio de los alumnos quienes realizaban dicha estancia, organizando viajes y eventos con motivo cultural.

REFERENCIAS

[1] I. Podlubny, Fracctional Differential equations, Academic Press, New York, 2009.
[2] Guía-Calderón M., Rosales-García, J. J., Guzmán- Cabrera, R., González-Parada, A. & Álvarez- Jaime, J. A. (2015). El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. Acta Universitaria, 25(2), 20-27. doi: 10.15174/au.2015.688
[3] Arafet Padilla Pedro, Domínguez Abreu Hugo, Chang Mumañ Francisco, Una Introducción al Cálculo Fraccionario, Faculta de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Oriente, Mayo 2008.
[4] Gómez J. F., Rosales-García J. Juan., Bernal J. J., Tkach V. I., Guía-Calderón, Sosa M. & Córdova T. (2015). RC Circuit of Non-Interger Order. Acta Universitaria. 1-2.
[5] Rosales-García J. Juan, Guía-Calderón (2009). Capítulo 2 Ecuaciones diferenciales de Primer Orden. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (pp. 72-74). Dirección de Extensión Cultural: Coordinación Editorial.