

Optimización de acero de refuerzo para el diseño de columnas de concreto

Tesis de Licenciatura

Para obtener el título de Ingeniero Civil

Luis Fernando Verduzco Martínez

Universidad de Guanajuato

DIRECTOR DE TESIS
ALEJANDRO HERNÁNDEZ MARTÍNEZ

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

AV. JUÁREZ 77 ZONA CENTRO GUANAJUATO
01 473 102 0100

GUANAJUATO, GUANAJUATO 2019



ACTA DE OBTENCIÓN DE TÍTULO




UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

En la ciudad de Guanajuato, Gto. a las 10:00 (diez horas y cero minutos) del día 25 de julio del año 2019, se reunieron en el (la) Auditorio Ing. Salvador Yáñez Castro de la División de Ingenierías del campus Guanajuato de la Universidad de Guanajuato, los señores Maestro en Ciencias Humberto Esqueda Oliva, Doctor en Ingeniería Adrián David García Soto, Maestro en Ingeniería Francisco José Luna Rodríguez designados para verificar el examen de titulación del señor **LUIS FERNANDO VERDUZCO MARTÍNEZ**, concedido por acuerdo de la Rectoría General a efecto de obtener el título de **INGENIERO CIVIL**.

Instalado el jurado bajo la Presidencia del señor Maestro en Ciencias Humberto Esqueda Oliva y fungiendo como Secretario el señor Doctor en Ingeniería Adrián David García Soto, dio principio el examen e interrogaron sucesivamente los tres sinodales sobre diversas materias y aspectos del trabajo de titulación y, terminado el interrogatorio, se procedió a verificar la votación secreta, habiendo resultado el señor **LUIS FERNANDO VERDUZCO MARTÍNEZ**.

Aprobado

Para constancia se levanta la presente acta por triplicado que firman los señores sinodales.

Presidente

M. en C. Humberto Esqueda Oliva

Secretario

Dr. en Ing. Adrián David García Soto

Vocal

M.I. Francisco José Luna Rodríguez

Dirección de Administración Escolar

El suscrito, Maestro Francisco Javier Pérez Arredondo, Director de Administración Escolar, hace constar que la presente acta constituye formalmente la realización del examen de obtención de Título de INGENIERO CIVIL, en los términos del Artículo 68 del Estatuto Académico de la Universidad de Guanajuato.

cc
3 *A*

SINODALES:

Sinodal 1 M.ING. FRANCISCO JOSÉ LUNA RODRÍGUEZ

Sinodal 2 M.CS. HUMBERTO ESQUEDA OLIVA

Sinodal 3 ING.D. ADRIÁN D. GARCÍA SOTO

A stylized illustration of a city skyline with various skyscrapers in shades of white and light blue against a light blue background. The buildings have different heights and window patterns, some with horizontal bands. An orange horizontal line with rounded ends is positioned across the middle of the image, framing the title.

Dedicatoria

La preocupación por el hombre y su destino siempre debe ser el interés primordial de todo esfuerzo técnico. Nunca olvides esto entre tus diagramas y ecuaciones.

...Albert Einstein



Saludos y agradecimientos

Aprovecho para hacer mención de las personas que hacen posible éste ahora:

A mis padres, por todo ese apoyo incondicional.

A mi Tía Lupita Navarrete, por ser mi amiga y mi segunda madre.

A mi Tío Poncho Pérez Acevez por todas sus enseñanzas en la Ingeniería.

A mi Tía Maquín por haberme ayudado cuando la necesitaba.

GRACIAS

Como llegué aquí...

Todo empezó a mi regreso de mi primer intercambio académico en EUA, tenía un hambre impresionante de aprender, de superarme y de aprovechar cuantas oportunidades tuviera enfrente para crecer como persona y profesionista.

En ese verano del 2015 me enteré del VHC, en ese entonces el 3ro, y aunque llegué tarde a los cursos, estuve asistiendo algunos días, y me pude dar cuenta al fin, después de mis cursos de Métodos Numéricos e Introducción a la programación en semestres anteriores, de que podía estimular mi imaginación y hacer mis propias cosas con la programación.

Sin embargo, hice prácticamente nada relacionado con éste arte durante todo un semestre, a excepción de algunas hojas de cálculo sencillas. Fué hasta mi curso de "Concreto I con el **Dr. Alejandro Hernández Martínez** y en mi Servicio Social Universitario con el **Ing. Francisco José Luna Rodríguez** en el mismo año, donde comencé a hacer hojas de cálculo más elaboradas por mi cuenta, por el simple hecho de aprender de concreto y de estructuras en general, siguiendo el dicho "*Aprender a programar, y programar para aprender*", y gracias a un proyecto del dicho curso de "Concreto I", fué cuando hice mi primer Macro en excel.

De ésta manera, me atrevo a agradecer primeramente, a mi Director de Tesis y Profesor de ésta materia de "Concreto I", (Dr. Alejandro), por haber confiado ésta Tesis en mí, pues fué él quién me lo propuso justamente después de finalizar su curso en el Invierno del 2016, es decir, bastante pronto para comenzar una tesis, en relación a lo que usualmente se empiezan a hacer éstas; pero justo a tiempo. Vio en mi el gusto por la programación, y gracias a esté proyecto pude explotar éstas habilidades.

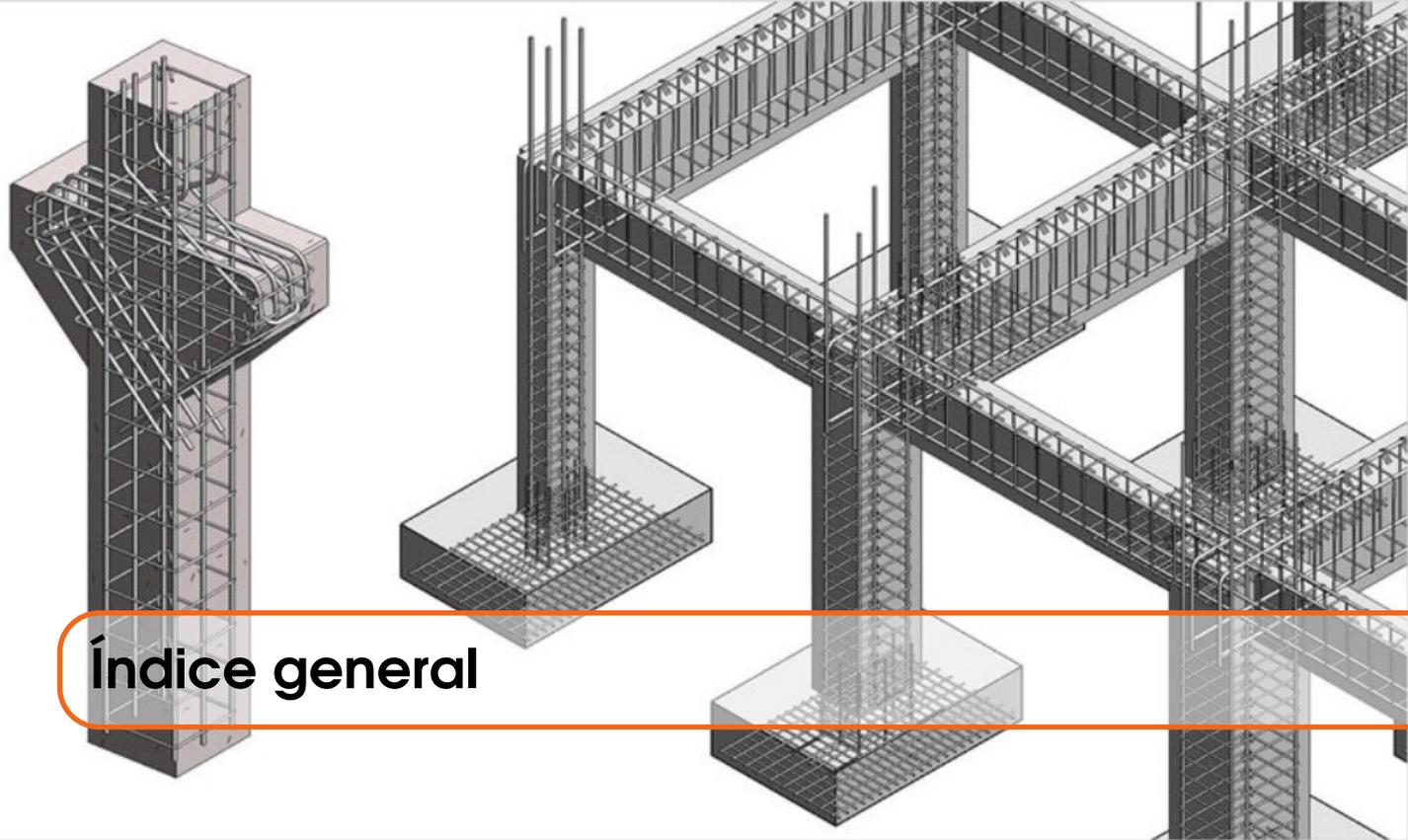
También quiero agradecer al Ing. Luna por sus enseñanzas en el análisis estructural en su programa de Servicio Social Universitario, de donde pude tomar muchas referencias bibliográficas para seguir aprendiendo de programación y algunas técnicas para su aplicación con las estructuras.

A partir de que comencé a trabajar en está tesis, y gracias a mi segundo intercambio académico en Suecia, donde tomé unos cursos impresionantes en donde se puso a prueba a más no poder mis habilidades de programación, aprendí a crear algoritmos de piez a cabeza. Con lo que a mi regreso de éste intercambio, ingresando al "Aula CIMNE UG", tuve la oportunidad de darle un sentido más amplio a éste hermoso arte; es aquí donde me detengo a agradecer al "Ing. Humberto Esqueda Oliva", una eminencia, una cosa impresionante en el área de la programación e investigación, por haberme dado ese lujo.

Dentro ya en Aula CIMNE, pude aprender bastante también de organización, gestión y trabajo en equipo, cooperando con los integrantes de la misma, principalmente con Guillermo Yáñez y Miguel Angel Ríos Delgado, unos erúditos en la ingeniería, que fueron pilares de motivación para seguir aprendiendo más cosas en el arte de la computación, gracias eso traigo ahora ya realizado éste proyecto.

Sin más, espero que se le pueda sacar lo más que se pueda de provecho a éste proyecto.

Luis F. Verduzco
Guanajuato, Guanajuato 2019



Índice general

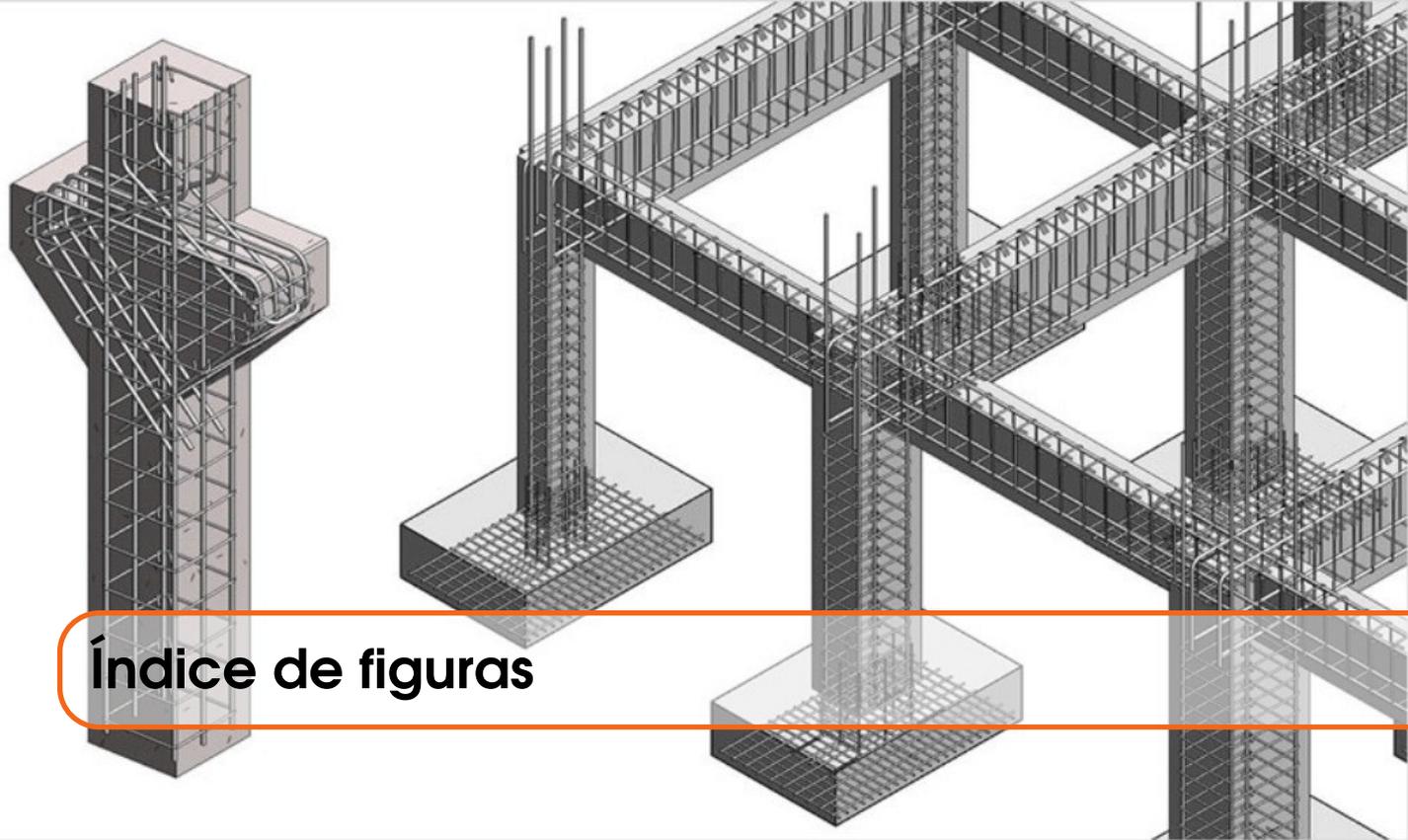
I	Parte 1	
1	Introducción	21
1.1	Objetivo	22
2	Antecedentes y generalidades	23
2.1	Clasificación de columnas de concreto	23
2.2	Tipos de columnas de concreto	23
2.3	Conceptos básicos generales	24
2.3.1	Carga axial	24
2.3.2	Flexión	25
2.3.3	Flexo-compresión	27
2.4	Normativa	29
2.4.1	Carga axial	30
2.4.2	Compresión y flexión en dos direcciones	31
II	Parte 2	
3	Enfoque de análisis	35
3.1	Columnas rectangulares	35
3.1.1	Casos de análisis para el cálculo de la resistencia del acero	36
3.1.2	Caso 1: se presenta una configuración geométrica de esfuerzos rectangular en tensión	38

3.1.3	Caso 2. Se presentan dos configuraciones geométricas rectangulares y una triangular, todas a tensión	40
3.1.4	Caso 3; Se presenta una configuración geométrica de deformaciones triangular a compresión, una triangular a tensión y una rectangular a tensión	42
3.1.5	Caso especial. Se presentan únicamente configuraciones geométricas triangulares de deformaciones	44
3.1.6	Caso 3-4: Se presentan configuraciones geométricas de deformaciones triangular y rectangular a compresión, así como a tensión.	46
3.1.7	Caso 4: Se presenta una configuración geométrica de deformaciones triangular y una rectangular a compresión; y una triangular a tensión.	48
3.1.8	Caso 5. Se presentan dos bloques rectangulares y uno triangular, todos a compresión.	50
3.1.9	Caso 6. Un bloque rectangular de esfuerzos en compresión	52
3.1.10	Casos de análisis para el concreto	53
3.2	Columnas circulares	54
3.2.1	Cálculo de la resistencia del acero	54
3.2.2	Casos de análisis para el concreto	56
4	Programa	59
4.1	Geometría y propiedades mecánicas de los materiales	59
4.2	Cálculo de los diagramas de interacción	59
4.2.1	Cálculo de la eficiencia mecánica-estructural	60
4.2.2	Cálculo de área requerida de acero	61
4.3	Determinación del acero de refuerzo	61
4.4	Plataformas y lenguajes de programación empleados	62
4.5	Entrada de información	63
4.5.1	Columnas rectangulares	63
4.5.2	Columnas circulares	63
4.6	Salida de información	64
4.6.1	Columnas rectangulares	64
4.6.2	Columnas circulares	66
4.7	Pseudocódigo general del programa	68

III

Parte 3

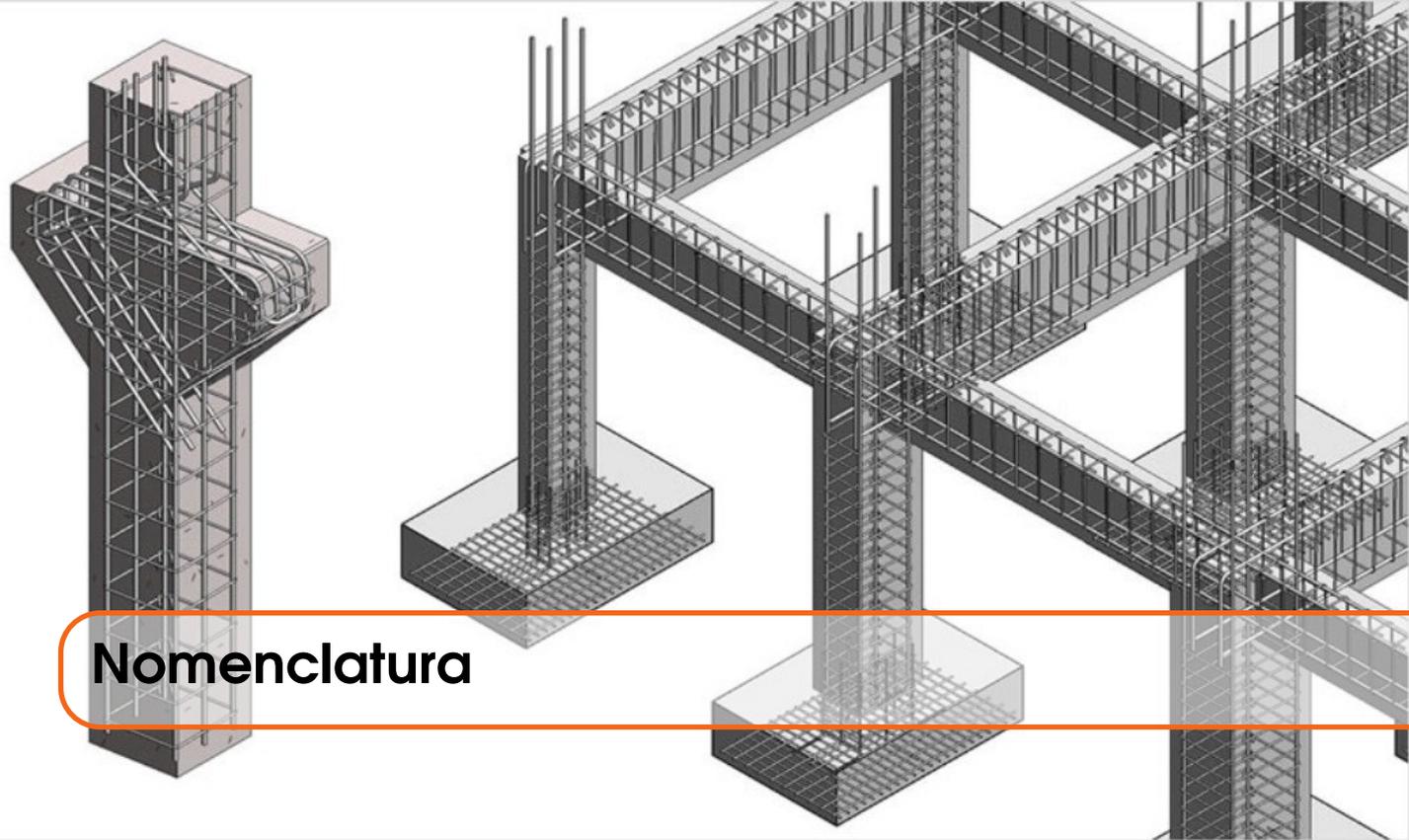
	Anexos	73
4.8	Anexo 1. Demostraciones de las variables envueltas en los casos de análisis de columnas rectangulares	73
4.9	Anexo 2. Demostraciones del desarrollo del programa	78
4.9.1	Geometría analítica para el cálculo de eficiencias mecánicas	78
	Bibliografía	78



Índice de figuras

2.3.1	Bloque equivalente de esfuerzos a compresión para el concreto (Adaptado de: (2))	25
2.3.2	Distribución de los esfuerzos en una sección sujeta a flexión. (Dibujo propio).	26
2.3.3	Diagrama de interacción típico. (Dibujo propio.)	28
2.3.4	Superficie de interacción típica. Tomada de:(2)	29
2.4.1	Hipótesis de las NTC-2017 sobre la distribución de deformaciones y esfuerzos en la zona de compresión. Adaptada de: (3)	30
3.1.1	Sección rectangular idealizada de concreto reforzado.	35
3.1.2	Geometrías de bloques de distribución de esfuerzos para cierta posición del eje neutro.	36
3.1.3	Sección rectangular idealizada de concreto reforzado.	38
3.1.4	a) Diagrama de distribución de deformaciones. Caso 1. a) En alguna posición de c dentro del rango permitido, b) c está en el límite superior del rango permitido. Dibujo propio. Ver Demostración 1.1 en Anexo 1 (p. 73)	39
3.1.5	a) Diagrama de configuración geométrica de deformaciones en el límite inferior del eje neutro. b) Diagrama de configuración geométrica de deformaciones en el límite superior del eje neutro. c) Diagrama de configuración geométrica de deformaciones para cualquier posición del eje neutro dentro de rango permitido. (Dibujo propio.) Ver Demostración 2.1 en Anexo 1 (p. 74)	40
3.1.6	a) Sección transversal, b) Configuraciones geométricas de deformaciones en el límite inferior del rango permitido del eje neutro, c) Configuraciones geométricas de deformaciones en el límite superior del rango permitido del eje neutro. Dibujo propio. Ver Demostración 3.1 en Anexo 1 (p. 74)	42
3.1.7	Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones para el caso especial. a) Para la posición del eje neutro en el límite inferior, b) Para la posición del eje neutro en el límite superior. Dibujo propio.	44
3.1.8	a) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones para el límite inferior del rango permitido del eje neutro, b) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones para el límite superior del rango permitido del eje neutro. c) Diagrama configuraciones geométricas de deformaciones para cualquiera posición del eje neutro entre el rango permitido. Caso 3-4.	46

3.1.9	a) Diagrama configuraciones geométricas de deformaciones para el límite inferior del rango permitido del eje neutro. b) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones para el límite superior del rango permitido del eje neutro. c) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones para cualquiera posición del eje neutro entre su rango permitido. Caso 4.	48
3.1.10	a) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones en el límite inferior del eje neutro. b) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones en el límite superior del eje neutro. Caso 5. Dibujo propio. Ver demostración 5.1 en Anexo 1 p. 77	50
3.1.11	Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones a compresión pura (el eje neutro esta localizado justo en el límite inferior de su rango permitido)). Caso 6. (Dibujo propio.) Ver demostración 6.1 en Anexo 1. 77	52
3.1.12	Diagrama de bloque equivalente de esfuerzos de compresión en el concreto. Dibujo propio.	53
3.1.13	Diagrama tridimensional del bloque equivalente de esfuerzos de compresión en el concreto. Dibujo propio.	53
3.2.1	Idealización de una sección circular de concreto reforzado. Dibujo propio.	54
3.2.2	Esquema de análisis para las condiciones de esfuerzos en el acero de refuerzo. Dibujo propio.	55
3.2.3	Diagrama de distribución de esfuerzos para el concreto. Dibujo propio.	56
3.2.4	Sistema de referencia cartesiano para el análisis de la distribución de esfuerzos de compresión en el concreto. Dibujo propio.	57
4.2.1	Diagrama de interacción en el plano cartesiano de referencia para el programa.	60
4.2.2	Condición de carga crítica de diseño.	61
4.6.1	Dibujo de la sección transversal de una columna rectangular diseñada con el varillado propuesto.	64
4.6.2	Dibujo del diagrama de interacción del varillado propuesto en la sección rectangular respecto al eje X.	64
4.6.3	Dibujo del diagrama de interacción del varillado propuesto en la sección rectangular respecto al eje Y.	65
4.6.4	Dibujo del diagrama de interacción con el perfil de acero en la sección rectangular respecto al eje X.	65
4.6.5	Dibujo del diagrama de interacción con el perfil rectangular en la sección rectangular respecto al eje Y.	65
4.6.6	Dibujo de la sección transversal de una columna rectangular diseñada con el varillado propuesto.	66
4.6.7	Dibujo del diagrama de interacción del varillado propuesto en la sección circular.	66
4.6.8	Dibujo del diagrama de interacción con el perfil de acero en la sección circular.	67
4.8.1	Demostración 1.1 para el caso 1 de columnas rectangulares. Dibujo propio.	73
4.8.2	Demostración 2.1 para el Caso 2 de columnas rectangulares	74
4.8.3	Demostración 3.1 para el Caso 3 de columnas rectangulares	74
4.8.4	Demostración CE.1 para el Caso Especial de columnas rectangulares	75
4.8.5	Demostración 4.1 del Caso 4.	76
4.8.6	Demostración 5.1 para el Caso 5.	77
4.8.7	Demostración 6.1 para el Caso 6	77

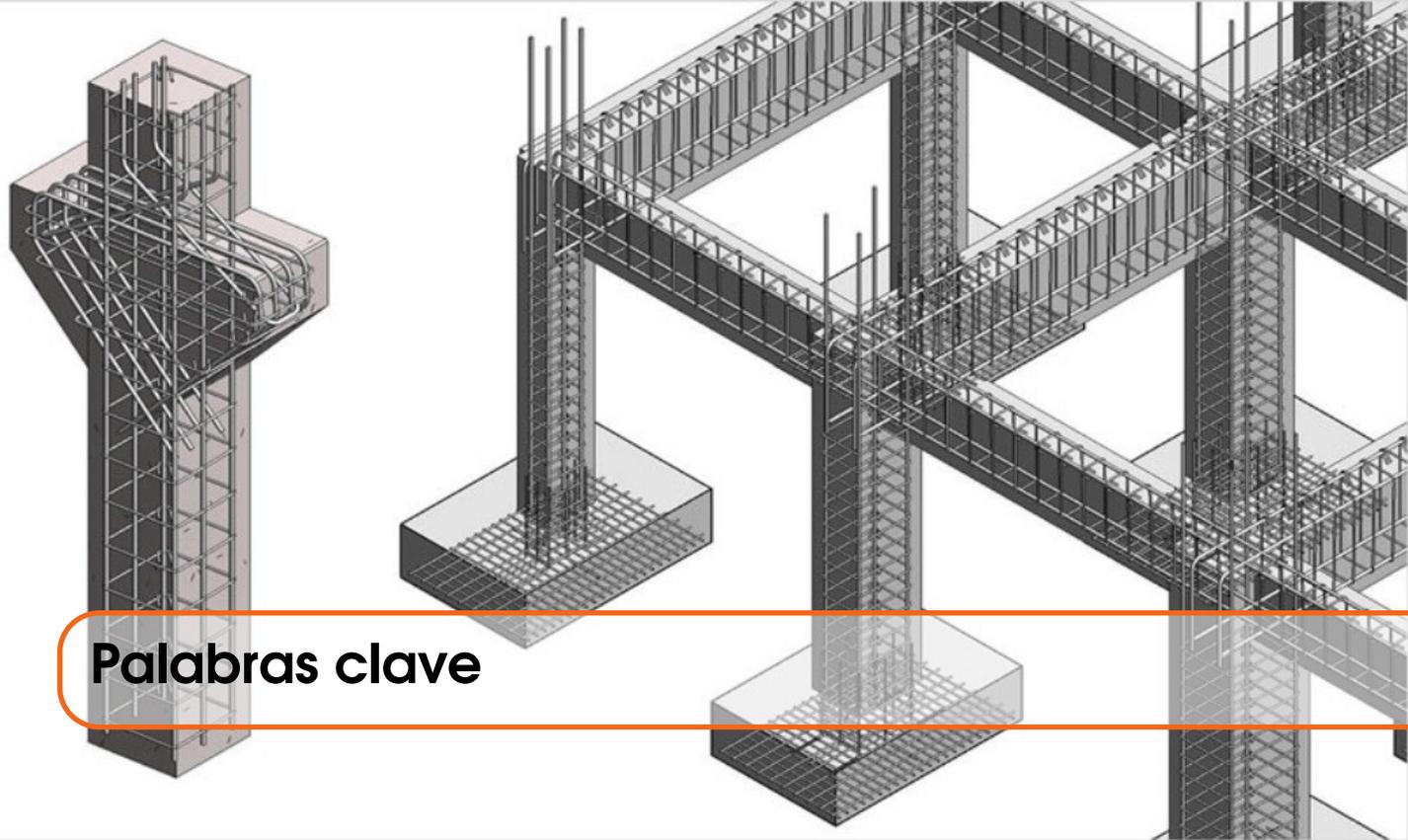


Nomenclatura

Se presenta a continuación las definiciones formales de los términos relevantes e invariables por definición usados en éste trabajo.

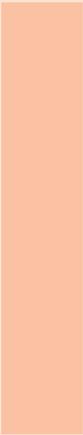
Término	Definición	Unidades
P_{oc}	Resistencia a la compresión de un elemento de concreto reforzado	Ton/Kg
P_{ot}	Resistencia a la tensión de un elemento de concreto reforzado	Ton/Kg
f_y	Esfuerzo de fluencia de varillas de acero de refuerzo de grado 42	Kg/cm^2
f'_c	Resistencia a la compresión simple de un prisma de concreto	Kg/cm^2
A_s	Área de acero de refuerzo en una sección transversal de concreto	cm^2
c	Posición del eje neutro de esfuerzos en una sección transversal de un elemento estructural respecto a la fibra extrema a compresión	cm
ϵ_u	Deformación unitaria última del concreto a la falla	—
β_1	Factor de reducción de resistencia a compresión simple	—

Término	Definición	Unidades
P_R	Carga normal máxima en la sección del elementos que actúa a excentricidades e_y y e_x .	Ton/Kg
a	Posición reducida del eje neutro para la transformación al bloque rectangular equivalente de esfuerzos en compresión	cm
b	Ancho de la sección transversal de una columna rectangular de concreto	cm
C	Fuerza neta resistente a compresión del concreto a una determinada posición del eje neutro	Ton/Kg
P_{rx}	Carga normal máxima a una excentricidad e_y	Ton/Kg
P_{ry}	Carga normal máxima a una excentricidad e_x	Ton/Kg
h	Peralte de una sección rectangular de un elemento de concreto	cm
t	Espesor del perfil idealizado de acero de refuerzo en un elemento de concreto	cm
d_1	Distancia desde la fibra superior de la sección transversal de un elemento rectangular de concreto a la mitad del espesor de la parte superior del perfil de acero.	cm
d_2	Distancia desde la fibra superior de la sección transversal de un elemento rectangular de concreto a la mitad del espesor de la parte inferior del perfil de acero	cm
rec	Espesor de recubrimiento de concreto del acero de refuerzo para protegerlo del intemperismo	cm
M_{rx}	Momento de flexión resistente sobre la sección transversal de un elemento de concreto reforzado respecto al eje x	$Kg \cdot cm / Ton \cdot m$
M_{ry}	Momento de flexión resistente sobre la sección transversal de un elemento de concreto reforzado respecto al eje y	$Kg \cdot cm / Ton \cdot m$
M_{ux}	Momento de flexión actuante sobre la sección transversal de un elemento de concreto reforzado respecto al eje x	$Kg \cdot cm / Ton \cdot m$
M_{uy}	Momento de flexión actuante sobre la sección transversal de un elemento de concreto reforzado respecto al eje y	$Kg \cdot cm / Ton \cdot m$
E_{ac}	Modulo de elasticidad del acero de refuerzo Grado 42	Kg / cm^2
F_a	Fuerza resistente de la parte superior del perfil rectangular idealizado de acero	Ton/Kg
F_b	Fuerza resistente de la parte inferior del perfil rectangular de acero	Ton/Kg
d_{ma}	Diámetro de una columna circular	cm



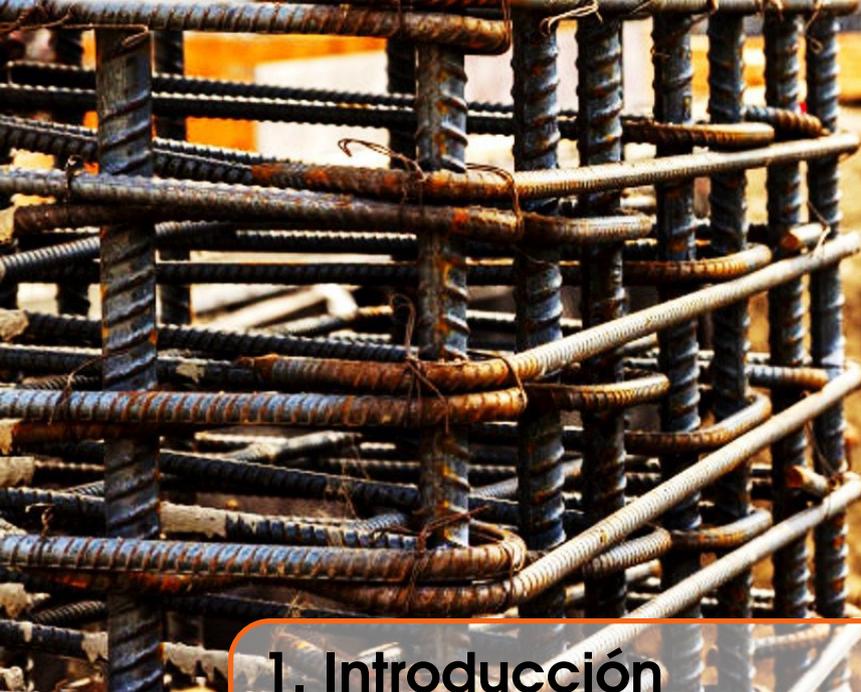
Palabras clave

Eficiencia:	Relación entre la carga actuante y la carga que resiste la columna. Siempre debe ser menor a 100% . Es común que se requieran eficiencias de entre 80% y 90% .
Optimización de acero:	Proceso de cálculo numérico a través del cual se encuentra el arreglo de acero de refuerzo que resulte el más económico y eficiente estructuralmente.



Parte 1

1	Introducción	21
1.1	Objetivo	
2	Antecedentes y generalidades	23
2.1	Clasificación de columnas de concreto	
2.2	Tipos de columnas de concreto	
2.3	Conceptos básicos generales	
2.4	Normativa	



1. Introducción

En los proyectos de diseño y análisis estructural de elementos de concreto reforzado se requiere de análisis numéricos que evocan muchas iteraciones para llegar a un resultado que sea tanto estructural como económicamente eficiente; con el uso de métodos numéricos podemos llegar a estas soluciones muy rápidamente.

El uso de métodos numéricos y programación se ha convertido en una herramienta necesaria para la automatización de procesos y optimización en tiempos y recursos en el diseño de infraestructura civil. Resulta útil como ingeniero en cualquier área en que se este trabajando, tener conocimientos y habilidades de computación y programación, ya sea en una o en varias plataformas e interfaces de lenguajes de programación.

El presente trabajo está orientado precisamente a usar programación y métodos numéricos en la practica diaria en el diseño de análisis de infraestructura civil, en éste caso se determinará el acero de refuerzo necesario en columnas de concreto para que resistan ciertas condiciones de carga.

En la práctica común, la determinación del acero de refuerzo necesario en elementos de concreto se realiza mediante aproximaciones empíricas basadas en la experiencia; el proceso se vuelve bastante tardado y cansado.

Expondremos pues, el diseño de un software, cuya principal función es la de determinar una configuración de varillas de acero de refuerzo para elementos de concreto sometidos a flexo-compresión, que resulte la más eficiente estructuralmente. Para ello el diseñador únicamente tendrá que definir las dimensiones en función de los requerimientos estructurales y/o de espacio. Pueden ser estos elementos columnas cortas y/o largas, trabes, pilas, pilotes o incluso dados de cimentación.

El programa tiene la capacidad de analizar elementos estructurales de concreto con secciones circulares y rectangulares. Usualmente, por cuestiones constructivas se requieren geometrías de secciones que no sean complejas y que sean uniformes.

Como resultados de éste programa se obtienen tanto propuestas como recomendaciones de disposiciones y arreglos del refuerzo, es decir, no solo se obtienen las opciones de número de varillas con su respectivo diámetro, sino también el acomodo que pudieran tener éstas e indicando además la eficiencia crítica estructural para cada arreglo. El programa selecciona ya sea el arreglo más eficiente estructuralmente o el más barato (de acuerdo a las preferencias del constructor) para cada columna, para luego calcular los volúmenes de materiales requeridos (acero, concreto y cimbra) e integrar el presupuesto del proyecto; pasando de la etapa de diseño del proyecto a la elaboración de la cotización en cuestión de segundos. Diversos softwares comerciales de análisis y diseño estructural no hacen esto, de ellos se obtienen únicamente resultados de un análisis con las geometrías y el refuerzo que el diseñador propone inicialmente.

Las aplicaciones y alcances que puede tener éste enfoque de análisis son de gran potencial en el diseño de estructuras de concreto, ya que podría adaptarse a cualquier geometría.

1.1 Objetivo

Diseñar un programa que sea capaz de determinar los posibles arreglos de acero de refuerzo para cualquier número de columnas que se trate, así como seleccionar la opción más eficiente o barata para cada columna, calculando los volúmenes de materiales requeridos para finalmente integrar la cotización del proyecto.



2. Antecedentes y generalidades

2.1 Clasificación de columnas de concreto

¹ Las columnas de concreto reforzado pueden clasificarse como columnas cortas y columnas largas. Es necesario tener esto en cuenta para entender cómo funciona el programa, ya que el análisis de las columnas preceden del mismo mecanismo de falla de estos tipos de columnas.

Columnas cortas: La carga que pueden soportar está regida por las dimensiones de su sección transversal y por la resistencia de los materiales de que está construida.

Columnas intermedias: La falla es por una combinación de aplastamiento y pandeo.

Columnas largas: La capacidad de carga axial en estas columnas se ve reducida a causa de los momentos secundarios resultantes debidos a la deformación por flexión de la columna.

El presente trabajo trata únicamente con columnas cortas.

2.2 Tipos de columnas de concreto

² El tipo de columnas de concreto depende de la forma de la sección transversal, así como de su tipo de refuerzo. Hay columnas de concreto con refuerzo en forma de varillas longitudinales de acero, con restricción lateral (helicoidal o con estribos cerrados).

¹Jack C. McCormac, Rusell H. Brown, “Diseño de concreto reforzado”, 14va edición, Alfaomega(2015), p.257.

²Jack C. McCormac, Rusell H. Brown, “Diseño de concreto reforzado”, 14th edition, Alfaomega (2015), p. 258.

Generalmente las columnas con estribos tienen una sección transversal rectangular, mientras que las columnas zunchadas suelen tener sección transversal circular, pero también pueden fabricarse con secciones rectangulares, octogonales, entre otras formas. Las espirales en comparación de los estribos incrementan en mayor medida la resistencia debido al aumento de la eficiencia del efecto de confinamiento del refuerzo transversal; aunque, en algunos casos, aumentando también los costos de construcción.

2.3 Conceptos básicos generales

Es necesario entender las hipótesis empleadas en el diseño de concreto reforzado, para comprender de donde provienen algunos factores, y números incluídos en el análisis.

2.3.1 Carga axial

3

Si se somete un espécimen de concreto simple con relación alto ancho de dos a una carga axial de compresión, la carga máxima se llegará a una deformación unitaria del orden de 0.002. Arbitrariamente se toma como 100 por ciento la resistencia de un espécimen con relación de esbeltez igual a dos.

Para relaciones de esbeltez mayores que dos, la resistencia baja, hasta llegar al 85 por ciento, aproximadamente. Por consiguiente, la resistencia de un elemento de concreto simple sujeto a compresión axial puede estimarse como el producto del 85 por ciento del esfuerzo medido en cilindro de control f'_c , ensayado en las mismas condiciones, multiplicado por el área de la sección transversal del elemento. Este factor de reducción, 0.85, es solo un promedio de resultados de ensayos en miembros colados verticalmente.

Cuando se le adiciona el refuerzo longitudinal a un espécimen de concreto simple y se le añade también el refuerzo transversal necesario para mantener las barras longitudinales en su posición durante el colado, la carga máxima se obtendrá ahora a una deformación unitaria del orden de 0.0021. La falla, en cambio, se produce a una deformación unitaria de 0.003 o 0.004, si el ensaye es de corta duración.

La resistencia adicional sobre la de un prisma de concreto simple debido a la adición del refuerzo longitudinal en compresión se puede estimar como el producto del área del acero por el esfuerzo de fluencia f_y

Por lo tanto, la resistencia o carga máxima a compresión que un prisma de concreto con refuerzo longitudinal puede alcanzar esta dada por la siguiente expresión:

$$P_{oc} = (0.85)f'_c(A_c - A_s) + f_y(A_s) \quad (2.1)$$

Cabe resaltar que se está considerando el área de acero en la contribución de la resistencia del concreto a compresión (primer término de la **Ecuación 2.1**, que puede influir

³González Cuevas, Fco. Robles Fernández, "Aspectos básicos del Concreto Reforzado", 4ª edición, Limusa (2005). Capítulo 5, p. 83-87.

considerablemente en los cálculos.

Por otra parte, la carga máxima a tensión que el elemento puede soportar está dada por:

$$P_{ot} = (f_y(A_s)) \quad (2.2)$$

En la que solo interviene el acero, ya que el concreto se agrieta y no contribuye a la resistencia.

2.3.2 Flexión

Hipótesis generales de diseño a flexión

4

- a. La deformación del concreto en un punto es proporcional a la distancia de éste punto respecto al eje neutro.
- b. El acero de refuerzo tiene un comportamiento elástoplástico perfecto a tensión idéntico al de compresión.
 - b.1 La deformación unitaria de fluencia que se considera es de 0.0021
- c. La distribución real de esfuerzos a compresión del concreto en una sección cualquiera se puede transformar en un bloque equivalente de esfuerzos. **Figura 2.3.1**
- d. No existen corrimientos relativos entre el acero y el concreto que lo rodea. Se supone que la deformación unitaria es la misma en el acero que en el concreto que se encuentra al mismo nivel en la sección.
- e. El concreto no resiste esfuerzos de tensión.
- f. El elemento alcanza su resistencia a una deformación unitaria máxima útil del concreto de 0.003.

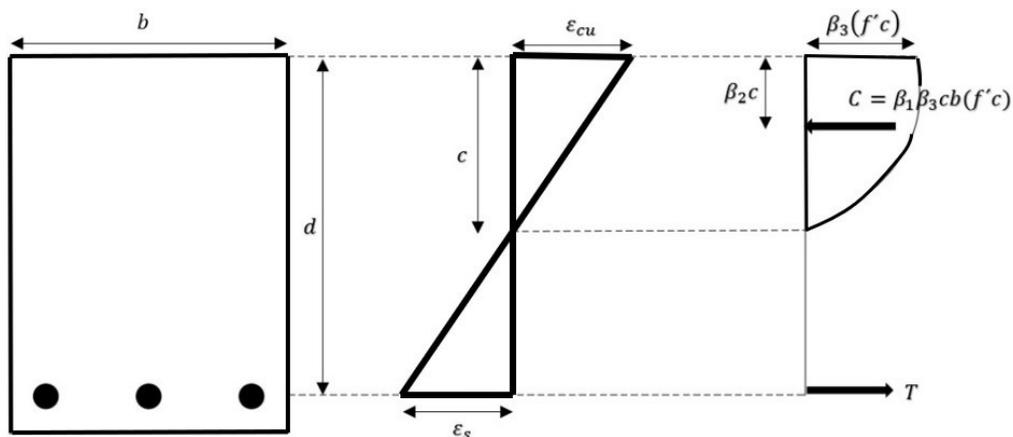


Figura 2.3.1: *Bloque equivalente de esfuerzos a compresión para el concreto (Adaptado de: [2])*

⁴González Cuevas, Fco. Robles Fernández, "Aspectos básicos del Concreto Reforzado", 4ª edición, Limusa (2005). Capítulo 5, p. 83-87.

Determinación de la resistencia a flexión pura

Para calcular la resistencia a flexión pura de un elemento se debe partir de un equilibrio de fuerzas respecto al centroide del elemento, pretendiéndose determinar la ubicación del eje neutro c^5 , y a partir de ahí determinar el bloque equivalente de esfuerzos del concreto, las fuerzas producidas en el acero longitudinal, y finalmente los momentos par producidos por dichas fuerzas alrededor del eje centroidal de la sección transversal del elemento.

Figura 2.3.2

Con dichos esfuerzos ya determinados, se calculan ahora las fuerzas equivalentes y el lugar geométrico en la sección en que estos actúan. Finalmente, se calculan los momentos producidos por estas fuerzas respecto al eje de centroide de la sección.

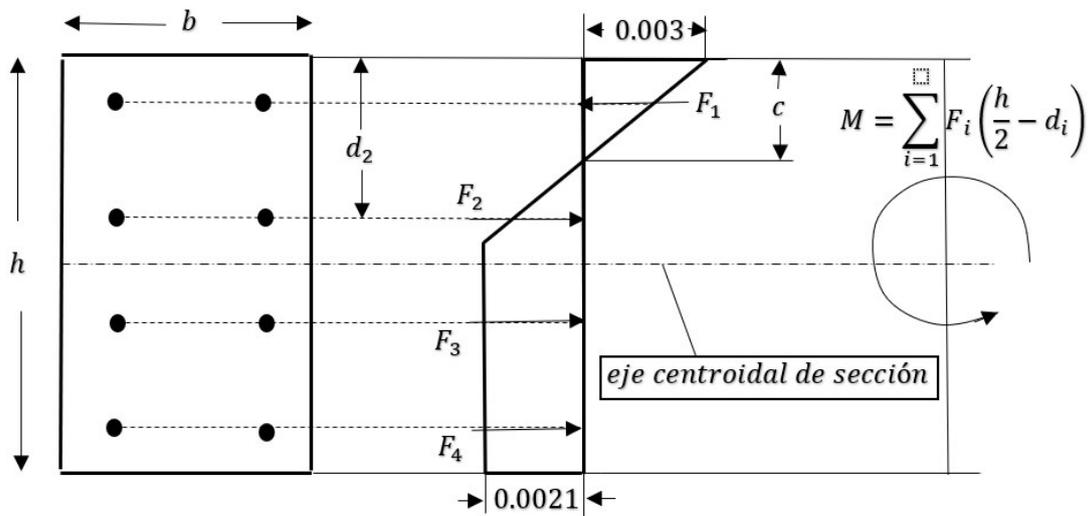


Figura 2.3.2: Distribución de los esfuerzos en una sección sujeta a flexión. (Dibujo propio).

La convención de signos para los Momentos de flexión serán:

(+) en sentido contrario a la manecillas del reloj

(-) en sentido de las manecillas del reloj

⁵Eje transversal a una sección en cuyo espacio los esfuerzos son nulos, siendo este la transición entre los esfuerzos a tensión y a compresión en dicha sección.

2.3.3 Flexo-compresión

Consideraciones generales de análisis

6

- a. Se aborda el análisis mediante propuestas de geometría de la sección de la columna que permanecerán fijas, haciendo variar únicamente el área de acero de refuerzo.
- b. Un elemento puede alcanzar su resistencia bajo innumerables combinaciones de carga axial y momento flexionante. Estas combinaciones varían desde una carga axial máxima (P_{oc}) sin momento de flexión, hasta un momento (M_o) sin fuerza axial.
- c. El lugar geométrico de las combinaciones de carga axial y momento flexionante con las que un elemento puede alcanzar su resistencia se representa gráficamente por medio de un "diagrama de interacción" **Figura 2.3.3**.
- d. Cuando al aumentar la carga externa, el momento y la carga axial crecen en la misma proporción, la historia de carga queda representada por una recta desde el origen, con una pendiente igual al cociente $P/M = 1/e$. **Figura 2.3.3**.
- e. Existen solo dos modos principales de falla de elementos sujetos a flexo-compresión: *falla en compresión* y *falla en tensión*:
 1. *Falla a compresión*: Se produce por aplastamiento del concreto. El acero del lado más comprimido fluye, en tanto que el lado opuesto no fluye en tensión
 2. *Falla en tensión*: Se produce cuando el acero de un lado fluye en tensión antes de que se produzca el aplastamiento del concreto en el lado opuesto más comprimido.
- f. El diagrama de interacción de un elemento puede obtenerse a partir de las hipótesis descritas para el cálculo de la resistencia de elementos sujetos a flexión pura, considerando que ahora la sumatoria de fuerzas debe ser igual a la carga P aplicada.

NOTA: Lo anterior aplica para cualquier geometría.

Fórmula de Bresler

Bresler desarrolló una expresión muy simple para columnas rectangulares para calcular los valores máximos de la carga de compresión que *actúa* a excentricidades e_x y e_y en secciones rectangulares con refuerzo simétrico. **Ecuación 2.3**. Dicha solución surgió ante la necesidad de evitar realizar los cálculos para determinar una *superficie de interacción*⁷, reduciendo el problemas a una combinación de soluciones más simples; dos de flexo-compresión en un plano de simetría y una de compresión axial.

⁶González Cuevas, Fco. Robles Fernández, "Aspectos básicos del Concreto Reforzado", 4ª edición, Limusa (2005). Capítulo 6, p. 127-155.

⁷Es el espacio geométrico de los valores de carga axial que la sección de un elemento es capaz de resistir, en todos sus planos.

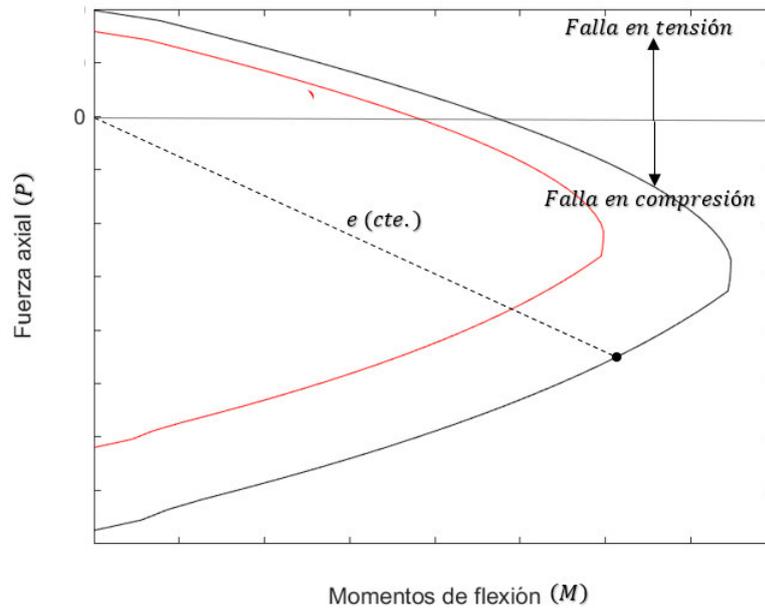


Figura 2.3.3: Diagrama de interacción típico. (Dibujo propio.)

$$\frac{1}{P_R} = \frac{1}{P_{rx}} + \frac{1}{P_{ry}} - \frac{1}{P_{oc}} \quad (2.3)$$

Donde:

P_R =Carga normal resistente sobre la sección transversal del elemento actuando a excentricidades e_x y e_y .

P_{rx} =Carga normal resistente a una excentricidad de e_y .

P_{ry} =Carga normal resistente a una excentricidad de e_x .

La **Ecuación [2.3]** verifica los ensayos disponibles dentro del 20 por ciento de aproximación, y representa una familia de planos que aproximan los puntos de la superficie de interacción. **Figura 2.3.4.**

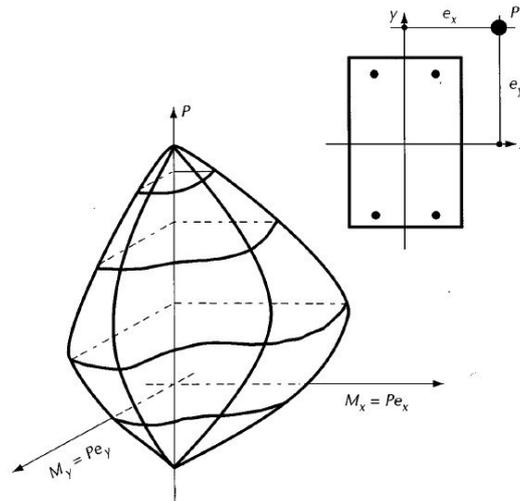


Figura 2.3.4: Superficie de interacción típica. Tomada de:[2]

Otro enfoque para analizar columnas sujetas a carga axial y flexión en dos planos **Ecuación [2.4]** a es partir de la cual se desprende otra expresión simplificada para calcular la eficiencia de un elemento cuando la relación $P_R/P_{oc} < 0.1$. **Ecuación [2.9]** (que es la se presenta en las NTC-2017 [3]) a las cuáles se hará referencia a continuación.

$$\left(\frac{P_u - P_{nb}}{P_{ot} - P_{nb}}\right) + \left(\frac{M_{ux}^{1.5}}{M_{nbx}}\right) + \left(\frac{M_{uy}^{1.5}}{M_{nby}}\right) = 1.0 \quad (2.4)$$

Donde:

P_u =Carga axial nominal aplicada

P_{nb} =Resistencia nominal a carga axial en la condición balanceada.

M_{nbx} y M_{nby} =Momentos nominales resistentes en la condición balanceada alrededor de los ejes X y Y respectivamente.

M_{ux} y M_{uy} =Momentos nominales aplicados alrededor de los ejes X y Y respectivamente.

2.4 Normativa

Anteriormente se presentaron hipótesis generales de diseño con concreto, porque son de tales hipótesis en que los reglamentos de construcción se basan. Para desarrollar éste proyecto se hizo referencia a las **Normas Técnicas complementarias para el diseño y construcción de estructuras de concreto del Reglamento de Construcciones de la Ciudad de México (NTC-2017)**.

2.4.1 Carga axial

En las NTC-2017 se considera necesario hacer una modificación en el valor de f'_c mediante Factores de carga F_c y Factores de Resistencia F_R ⁸. En el apartado de concreto se especifica que para el cálculo de resistencias se utilice una resistencia reducida a la compresión del concreto denominada f''_c . Cuyo valor es:

$$f''_c = 0.85(f'_c) \quad (2.5)$$

De modo que la ecuación **Ecuación [2.1]** se transforma a:

$$P_{oc} = F_R((f''_c)(A_c - A_s) + f_y(A_s)) \quad (2.6)$$

De modo que la ecuación **Ecuación [2.2]** se transforma a:

$$P_{ot} = F_R(f_y)(A_s) \quad (2.7)$$

Para una mejor interpretación de los factores mencionados se puede hacer referencia a la **Figura 2.4.1**, que es el bloque de transformación equivalente de esfuerzos de las hipótesis de las NTC-2017.

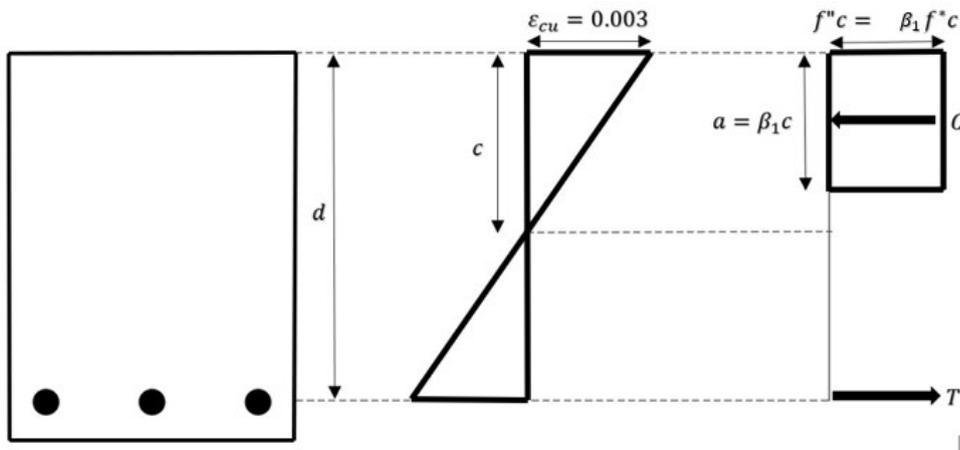


Figura 2.4.1: Hipótesis de las NTC-2017 sobre la distribución de deformaciones y esfuerzos en la zona de compresión. Adaptada de: [3]

⁸El factor de reducción F_R , que para el caso de columnas con carga axial es de 0.8 [3]

Donde:

$$C = ab(f''_c)$$

$$0.65 \leq (\beta_1 = 1.05 - \frac{f''_c}{1400}) \leq 0.85$$

2.4.2 Compresión y flexión en dos direcciones

⁹

Se usará la expresión siguiente (que es derivada de la fórmula de **Bresler**) para el cálculo de la carga máxima actuante en la sección a cierta excentricidad.

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{P_{rx}} + \frac{1}{P_{ry}} - \frac{1}{P_{oc}}} \quad (2.8)$$

Para valores de $\frac{P_R}{P_{oc}} < 0.1$, se usará la expresión siguiente:

$$\frac{M_{ux}}{M_{rx}} + \frac{M_{uy}}{M_{ry}} \leq 1.0 \quad (2.9)$$

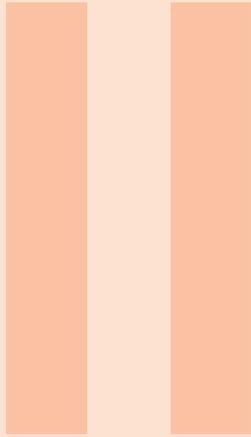
Donde:

M_{ux} y M_{uy} son los momentos actuantes alrededor de los ejes X, Y, respectivamente.

M_{rx} y M_{ry} son los momentos resistentes de diseño alrededor de los mismos ejes.

⁹González Cuevas, Fco. Robles Fernández, “Aspectos básicos del Concreto Reforzado”, 4ª edición, Limusa (2005). Capítulo 6, p. 148.

Parte 2



3	Enfoque de análisis	35
3.1	Columnas rectangulares	
3.2	Columnas circulares	
4	Programa	59
4.1	Geometría y propiedades mecánicas de los materiales	
4.2	Cálculo de los diagramas de interacción	
4.3	Determinación del acero de refuerzo	
4.4	Plataformas y lenguajes de programación empleados	
4.5	Entrada de información	
4.6	Salida de información	
4.7	Pseudocódigo general del programa	



3. Enfoque de análisis

Se presentará la demostración del enfoque de análisis para ambas geometrías de sección (*rectangular y circular*) en orden cronológico de la posición del eje neutro a lo largo de la sección, desde $-\infty$ hasta ∞ .

3.1 Columnas rectangulares

Empleando las hipótesis de diseño anteriormente descritas se ha idealizado el acero de refuerzo de un elemento como se muestra. **Figura 3.1.1**

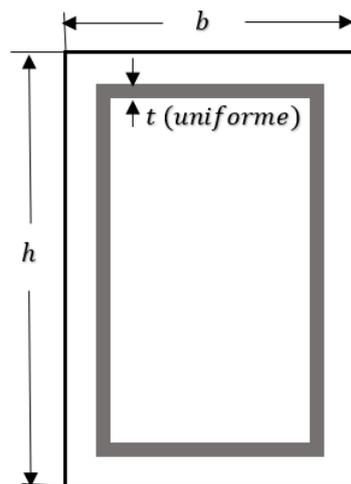


Figura 3.1.1: *Sección rectangular idealizada de concreto reforzado.*

Donde:

t = espesor de la sección transversal del acero de refuerzo idealizado como un refuerzo constante alrededor de la sección.

3.1.1 Casos de análisis para el cálculo de la resistencia del acero

De acuerdo a la distribución lineal de las deformaciones unitarias y el comportamiento elasto-plástico del acero, se podrían derivar cinco casos de análisis respecto a las diferentes posiciones del eje neutro en el cálculo de nuestro diagrama de interacción, de acuerdo a los tipos de geometrías a que los mismos estados de esfuerzos (debido a dichas posiciones del eje neutro) sobre la sección transversal del elemento dan lugar. Estas configuraciones de geometrías de esfuerzos se pueden transformar consecuentemente a fuerzas puntuales **Figura 3.1.2**, con las que se pueden calcular el momento actuante respecto al eje neutro elástico de la sección transversal de todo el elemento de concreto.

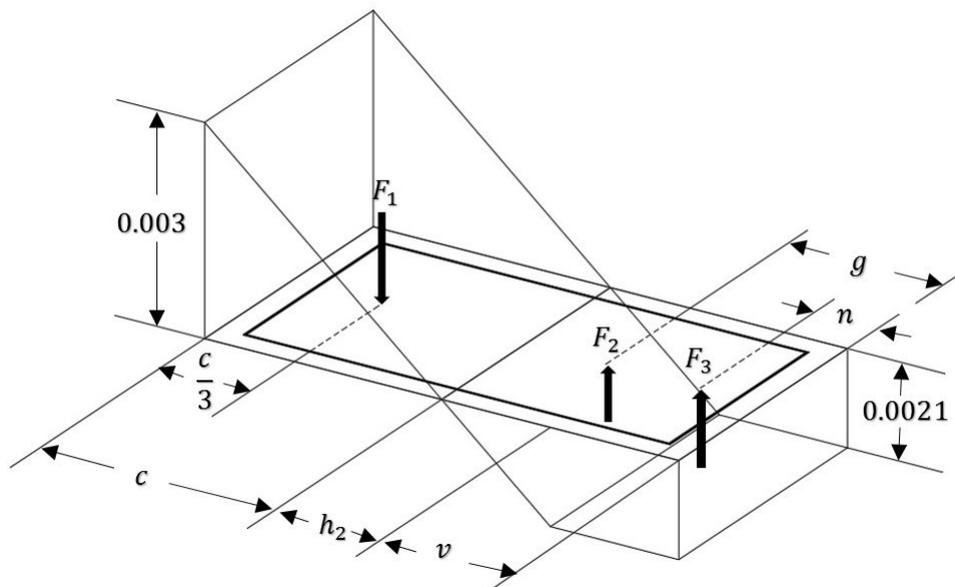


Figura 3.1.2: Geometrías de bloques de distribución de esfuerzos para cierta posición del eje neutro.

Metodología

Se presenta la siguiente metodología de manera general para el análisis de las fuerzas y momentos de flexión resultantes, con la que se podrá conceptualizar y segmentar la manera en que se desarrollaron las fórmulas y ecuaciones.

Para las fuerzas resultantes resistentes:

Para cada bloque (i) en un determinado estado de esfuerzos:

- Determinar la longitud de la configuración geométrica de esfuerzos (L) en dirección al peralte de la sección.
- Determinar el área efectiva bajo esfuerzos $2tL$
- Determinar la fuerza resultante que define la geometría de dicha configuración de esfuerzos

$$F_i = \begin{cases} 2E_{ac}tL\varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq 0.0021 \\ 2f_y tL & \text{si } \varepsilon > 0.0021 \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde:

$$E_{ac} = \frac{f_y}{\varepsilon_s} = \frac{4200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}{0.0021}$$

$$E_{ac} = 2e10 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

- Sumar todas las fuerzas resultantes de cada configuración geométrica de esfuerzos para obtener la resultante resistente:

$$F_R = \sum_{i=1}^{i=\text{no. bloques}} F_i$$

Para los momentos resultantes resistentes:

Para cada configuración geométrica (i) en un determinado estado de esfuerzos:

- Determinar la profundidad d_i del centroide de la configuración geométrica sobre el que actúa la fuerza resultante.
- Determinar la distancia de ese punto respecto al eje centroidal de la sección transversal $\frac{1}{2}h - d_i$
- Determinar el Momento resultante equivalente:

$$M_i = F_i(\frac{1}{2}h - d_i)$$

- Sumar todas los momentos resultantes producidos por cada configuración geométrica de esfuerzos para obtener el momento de flexión resultante resistente:

$$M_R = \sum_{i=1}^{i=\text{no. bloques}} M_i$$

Tomar en cuenta que por ahora solo se está considerando el acero de refuerzo. De modo que para calcular el volumen de estas configuraciones geométricas de deformaciones (o fuerzas resultantes), se analiza el área de las dos partes laterales del perfil idealizado de acero **Figura 3.1.3** y la de la parte superior e inferior por separado.

Para las partes laterales se toma referencia de la metodología descrita para esta geometría; tomando en cuenta una variación lineal de esfuerzos a lo largo de tales.

A diferencia de las partes superior e inferior en que se toma un esfuerzo constante a lo largo de la longitud de tales partes. De forma que aquí entrarán en lugar las fuerzas (F_a y F_b) **Ecuación [3.2]** y **Ecuación [3.3]** para todos los casos, representando las fuerzas resistentes resultantes que actuarán en los centroides de las partes superior e inferior del perfil de acero, supuestas como d_1 y d_2 , respectivamente.

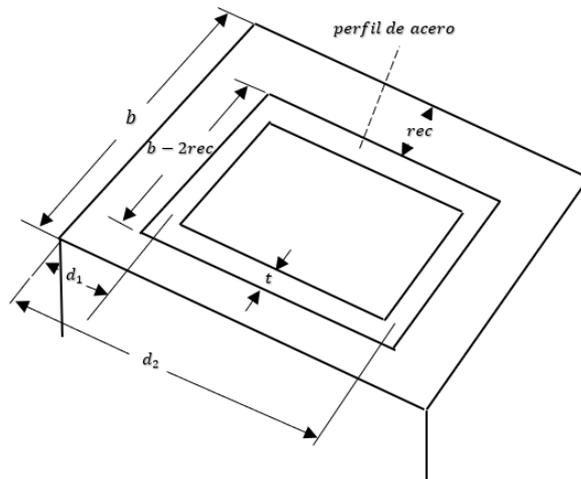


Figura 3.1.3: Sección rectangular idealizada de concreto reforzado.

$$F_a = \varepsilon_a E_{act} (b - 2rec) \quad (3.2)$$

$$F_b = \varepsilon_b E_{act} (b - 2rec) \quad (3.3)$$

Nota: La convención de signos será: **Compresión (-)** y **Tensión (+)**.

3.1.2 Caso 1: se presenta una configuración geométrica de esfuerzos rectangular en tensión

$$-\infty < c \leq \frac{30}{51} d_1$$

Ver Demostración 1.1 en Anexo 1 [p. 73]

En éste caso el elemento de concreto no se producen momentos de flexión por los bloques de estados de esfuerzo, únicamente fuerzas axiales a tensión. **Figura 3.1.4**

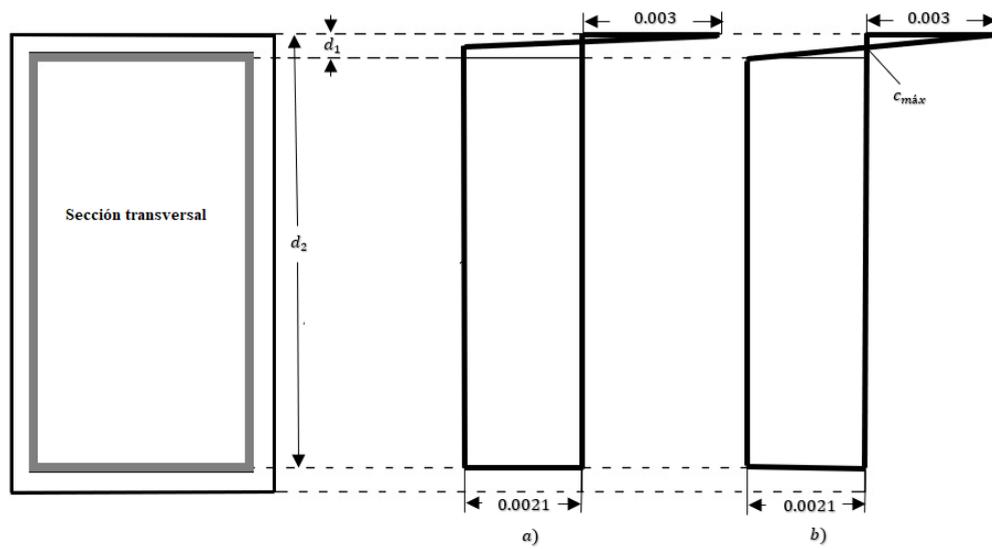


Figura 3.1.4: a) Diagrama de distribución de deformaciones. Caso 1. a) En alguna posición de c dentro del rango permitido, b) c está en el límite superior del rango permitido. **Dibujo propio.** Ver Demostración 1.1 en Anexo 1 [p. 73]

Donde:

$$d_1 = rec + \frac{1}{2}(t)$$

$$d_2 = h - rec - \frac{1}{2}(t)$$

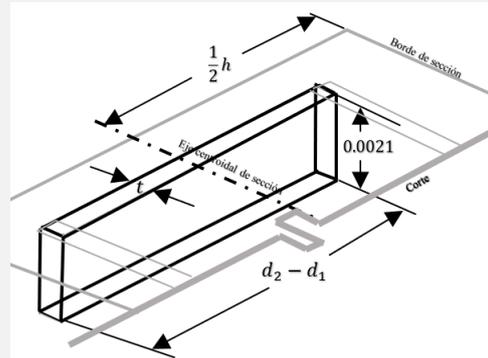
Por lo tanto, de las ecuaciones **Ecuación 3.2** y **Ecuación 3.3**:

$$F_a = 0.0021E_{ac}t(b - 2rec) \quad (3.4)$$

$$F_b = 0.0021E_{ac}t(b - 2rec) \quad (3.5)$$

$$F_1 = 2(t)(d_2 - d_1)E_{ac}(0.0021) \quad (3.6)$$

$$M_1 = 0$$



Entonces, la fuerza y el momento neto resistente queda como:

$$F_R = F_1 + F_a + F_b \quad (3.7)$$

$$M_R = M_1 \quad (3.8)$$

3.1.3 Caso 2. Se presentan dos configuraciones geométricas rectangulares y una triangular, todas a tensión

Dando continuidad al caso anterior, el rango en el cual estará la profundidad del eje neutro para éste caso es:

$$\frac{30}{51}d_1 < c \leq d_1$$

Hágase referencia a **Figura 3.1.5** para visualizar este rango.

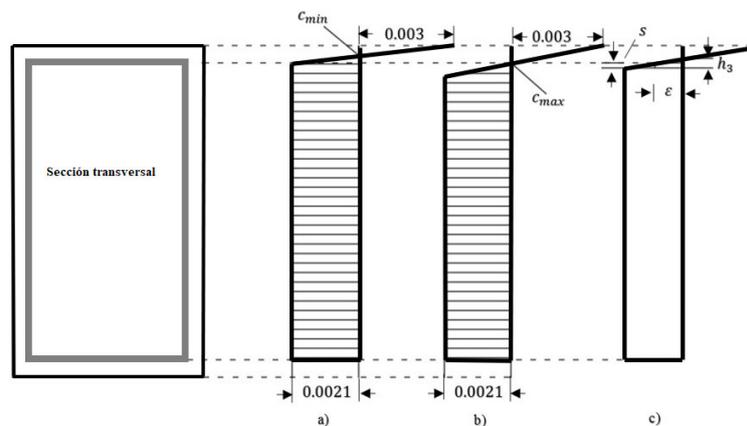


Figura 3.1.5: a) Diagrama de configuración geométrica de deformaciones en el límite inferior del eje neutro. b) Diagrama de configuración geométrica de deformaciones en el límite superior del eje neutro. c) Diagrama de configuración geométrica de deformaciones para cualquier posición del eje neutro dentro de rango permitido. (**Dibujo propio**). Ver Demostración 2.1 en Anexo 1 [p. 74]

Por lo tanto, de las ecuaciones *Ecuación 3.2* y *Ecuación 3.3*:

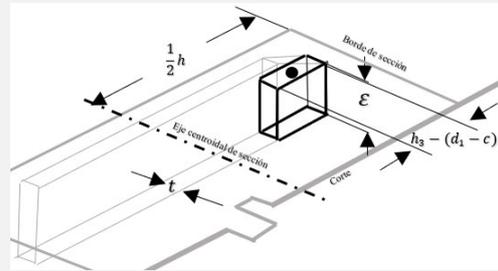
$$F_a = 0.0021E_{ac}t(b - 2rec) \quad (3.9)$$

$$F_b = 0.0021E_{ac}t(b - 2rec) \quad (3.10)$$

Ahora, con las variables definidas anteriormente y la figura **Figura 3.1.5**, se pueden deducir las siguientes ecuaciones para calcular la fuerza resultante y el momento de flexión resultante resistente en el acero.

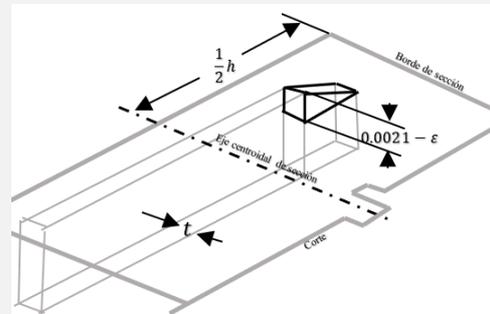
$$F_1 = 2(t)(\varepsilon)(h_3 - (d_1 - c))E_{ac} \quad (3.11)$$

$$M_1 = F_1\left(d_1 + \frac{1}{2}(h_3 - (d_1 - c)) - \frac{1}{2}h\right) \quad (3.12)$$



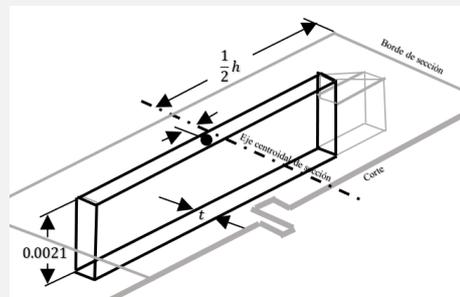
$$F_2 = 2(t)\frac{1}{2}(0.0021 - \varepsilon)(h_3 - (d_1 - c))E_{ac} \quad (3.13)$$

$$M_2 = F_2\left(d_1 + \frac{2}{3}(h_3 - (d_1 - c)) - \frac{1}{2}h\right) \quad (3.14)$$



$$F_3 = 2(t)(d_2 - h_3 - c)(0.0021)E_{ac} \quad (3.15)$$

$$M_3 = F_3\left(c + h_3 + \frac{1}{2}(d_2 - c - h_3) - \frac{1}{2}h\right) \quad (3.16)$$



Quedando, la fuerza y momento neto resistente como:

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_a + F_b \quad (3.17)$$

De modo que el momento par resistente del acero en éste caso, estará dado por:

$$M_R = M_1 + M_2 + M_3 + F_a(d_1 - \frac{1}{2}h) + F_b(d_2 - \frac{1}{2}h) \quad (3.18)$$

3.1.4 Caso 3; Se presenta una configuración geométrica de deformaciones triangular a compresión, una triangular a tensión y una rectangular a tensión

Para que esto ocurra, la profundidad del eje neutro deberá estar entre el siguiente rango:

$$d_1 < c \leq \frac{30}{9}d_1$$

Hágase referencia a **Figura 3.1.6** para visualizar este rango.

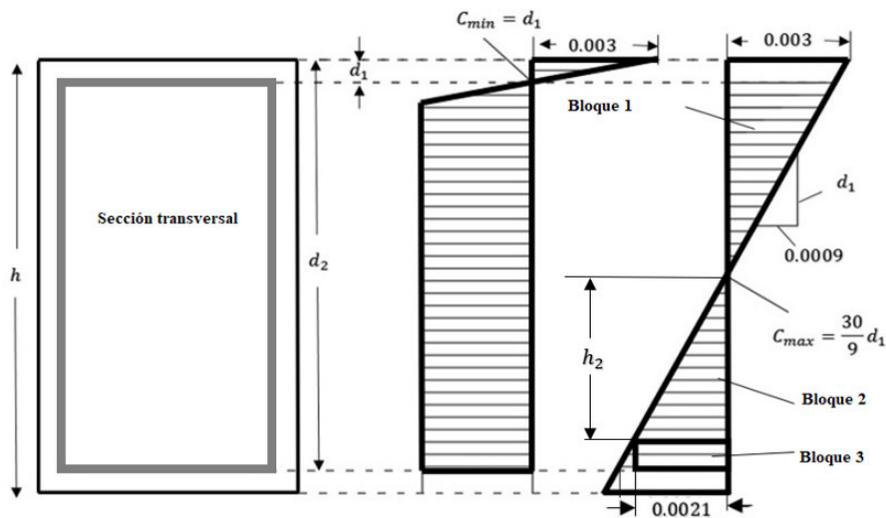


Figura 3.1.6: a) Sección transversal, b) Configuraciones geométricas de deformaciones en el límite inferior del rango permitido del eje neutro, c) Configuraciones geométricas de deformaciones en el límite superior del rango permitido del eje neutro. **Dibujo propio.** Ver Demostración 3.1 en Anexo 1 [p. 74]

Donde:

$$h_2 = \frac{21}{30}c$$

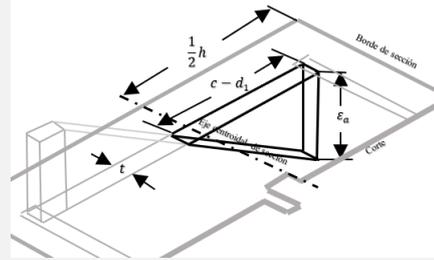
De modo que para definir las ecuaciones *Ecuación 3.2* y *Ecuación 3.3* se tiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \left(1 - \frac{d_1}{c}\right)(0.003) \\ \varepsilon_b &= 0.0021\end{aligned}$$

Y para las fuerzas y momentos resistentes resultantes, se tiene:

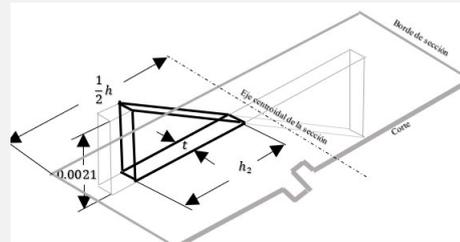
$$F_1 = -\frac{1}{2}(c - d_1)(\varepsilon_a)(2t)E_{ac} \quad (3.19)$$

$$M_1 = F_1\left(d_1 + \frac{1}{3}(c - d_1) - \frac{1}{2}h\right) \quad (3.20)$$



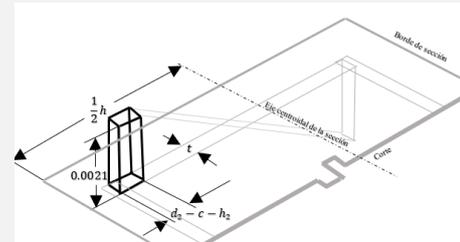
$$F_2 = \frac{1}{2}h_2(0.0021)(2t)E_{ac} \quad (3.21)$$

$$M_2 = F_2\left(c + \frac{2}{3}h_2 - \frac{1}{2}h\right) \quad (3.22)$$



$$F_3 = 0.0021(d_2 - c - h_2)(2t)E_{ac} \quad (3.23)$$

$$M_3 = F_3\left((c + h_2) + \frac{1}{2}(d_2 - c - h_2) - \frac{1}{2}h\right) \quad (3.24)$$



$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 - F_a + F_b \quad (3.25)$$

$$M_R = M_1 + M_2 + M_3 - F_a\left(d_1 - \frac{1}{2}h\right) + F_b\left(d_2 - \frac{1}{2}h\right) \quad (3.26)$$

3.1.5 Caso especial. Se presentan únicamente configuraciones geométricas triangulares de deformaciones

Para que se dé éste caso, se debe dar la siguiente relación entre el espesor del perfil (t), el peralte de la sección (h) y el recubrimiento (rec).

$$\frac{60}{102}t \geq \frac{9}{51}h - \frac{60}{51}rec$$

Nota: Ver Demostración CE.1 en Anexo 1. p. 75

De la misma demostración se puede ver, que para calcular C_{mn} y C_{mx} :

$$C_{mn} = 30\left(\frac{d_2}{51}\right)$$

$$C_{mx} = 30\left(\frac{d_1}{9}\right)$$

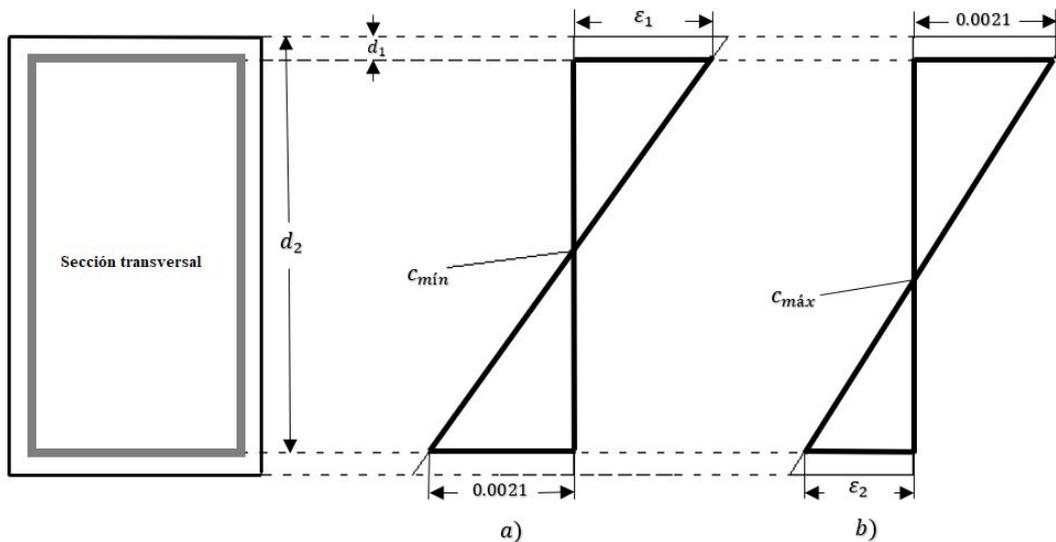


Figura 3.1.7: Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones para el caso especial. a) Para la posición del eje neutro en el límite inferior; b) Para la posición del eje neutro en el límite superior. *Dibujo propio.*

Por lo tanto, haciendo referencia a la **Figura 3.1.7**, para las ecuaciones **Ecuación 3.2** y **Ecuación 3.3**:

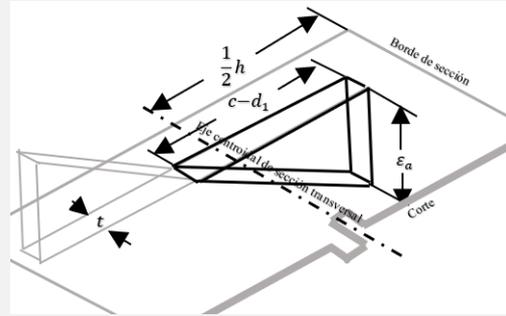
$$\varepsilon_a = \left(1 - \frac{d_1}{c}\right)(0.003)$$

$$\varepsilon_b = \left(\frac{d_2}{c} - 1\right)(0.003)$$

Y las fuerzas y momentos resistentes se calcularían como:

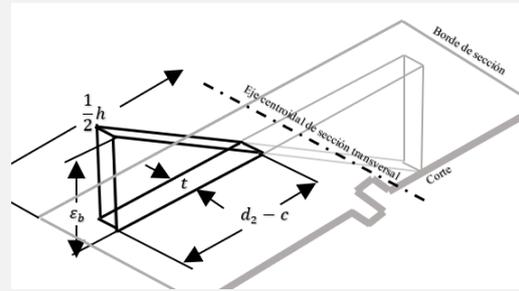
$$F_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon_a E_{ac}(c-d_1)2t \quad (3.27)$$

$$M_1 = -F_1(d_1 + \frac{1}{3}(c-d_1)) \quad (3.28)$$



$$F_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_b E_{ac}(d_2-c)2t \quad (3.29)$$

$$M_2 = F_2(d_2 - \frac{1}{3}(d_2-c)) \quad (3.30)$$



$$F_R = F_1 + F_2 - F_a + F_b \quad (3.31)$$

$$M_R = M_1 + M_2 - F_a(d_1 - \frac{1}{3}h) + F_b(d_2 - \frac{1}{2}h) \quad (3.32)$$

3.1.6 Caso 3-4: Se presentan configuraciones geométricas de deformaciones triangular y rectangular a compresión, así como a tensión.

$$\frac{30}{9}d_1 < c \leq \frac{30}{51}d_2$$

Hágase referencia a **Figura 3.1.6** para visualizar este rango.

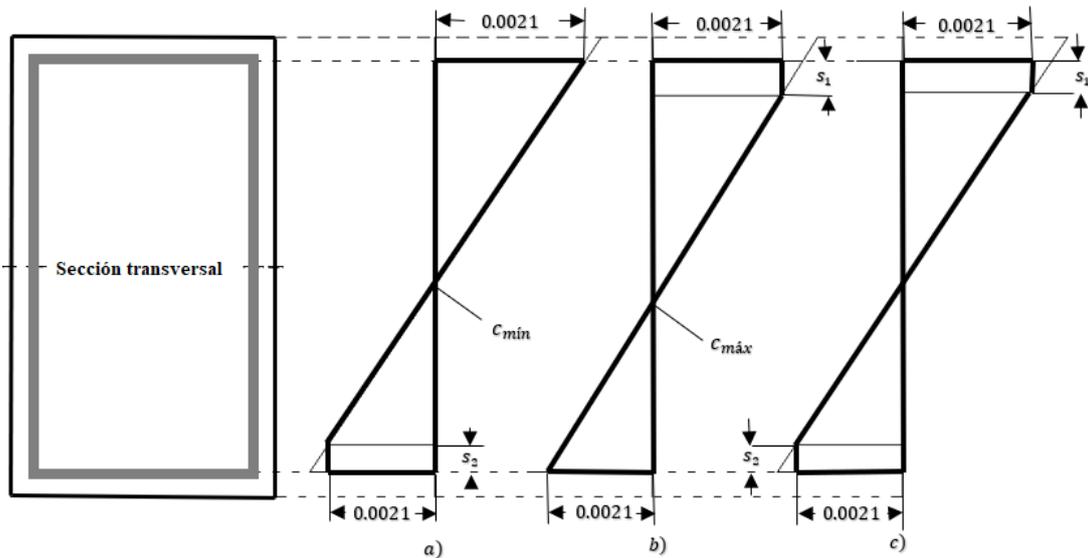


Figura 3.1.8: a) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones para el límite inferior del rango permitido del eje neutro, b) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones para el límite superior del rango permitido del eje neutro. c) Diagrama configuraciones geométricas de deformaciones para cualquiera posición del eje neutro entre el rango permitido. Caso 3-4.

Donde:

$$s_1 = \frac{9}{30}c - d_1$$

$$s_2 = h - \frac{51}{30}c - d_1$$

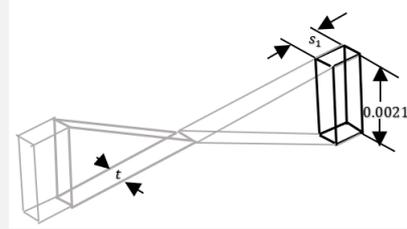
Por lo tanto, para las ecuaciones *Ecuación 3.2* y *Ecuación 3.3*:

$$\varepsilon_a = 0.0021$$

$$\varepsilon_b = 0.0021$$

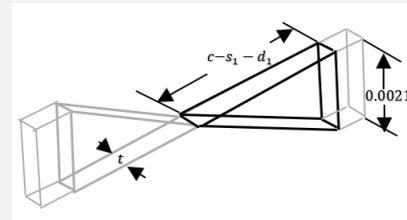
Y las fuerzas y momentos resistentes se calcularían como:

$$F_1 = -2t(0.0021)(s_1)E_{ac} \quad (3.33)$$



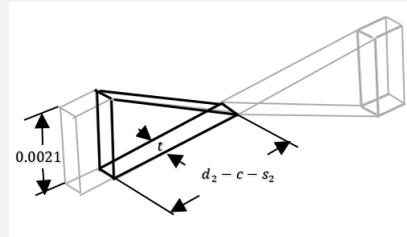
$$M_1 = F_1(d_1 + \frac{1}{2}(s_1) - \frac{1}{2}h) \quad (3.34)$$

$$F_2 = -\frac{1}{2}2t(0.0021)(c - s_1 - d_1)E_{ac} \quad (3.35)$$



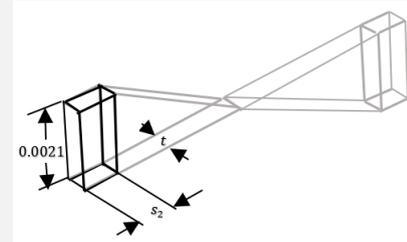
$$M_2 = F_2(d_1 + s_1 + \frac{1}{3}((c - d_1 - s_1)) - \frac{1}{2}h) \quad (3.36)$$

$$F_3 = \frac{1}{2}2t(0.0021)(d_2 - c - s_2)E_{ac} \quad (3.37)$$



$$M_3 = F_3(d_2 - s_2 - \frac{1}{3}(d_2 - c - s_2) - \frac{1}{2}h) \quad (3.38)$$

$$F_4 = 2t(0.0021)(s_2)E_{ac} \quad (3.39)$$



$$M_4 = F_4(d_2 - \frac{1}{2}s_2) - \frac{1}{2}h) \quad (3.40)$$

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - F_a - F_b \quad (3.41)$$

$$M_R = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 - F_a(d_1 - \frac{1}{2}h) - F_b(d_2 - \frac{1}{2}h) \quad (3.42)$$

3.1.7 Caso 4: Se presenta una configuración geométrica de deformaciones triangular y una rectangular a compresión; y una triangular a tensión.

$$\frac{30}{51}d_2 < c \leq d_2$$

Para el cálculo de las fuerzas y momentos de flexión resultantes resistentes ha de hacerse referencia tanto a la **Figura 3.1.9.**

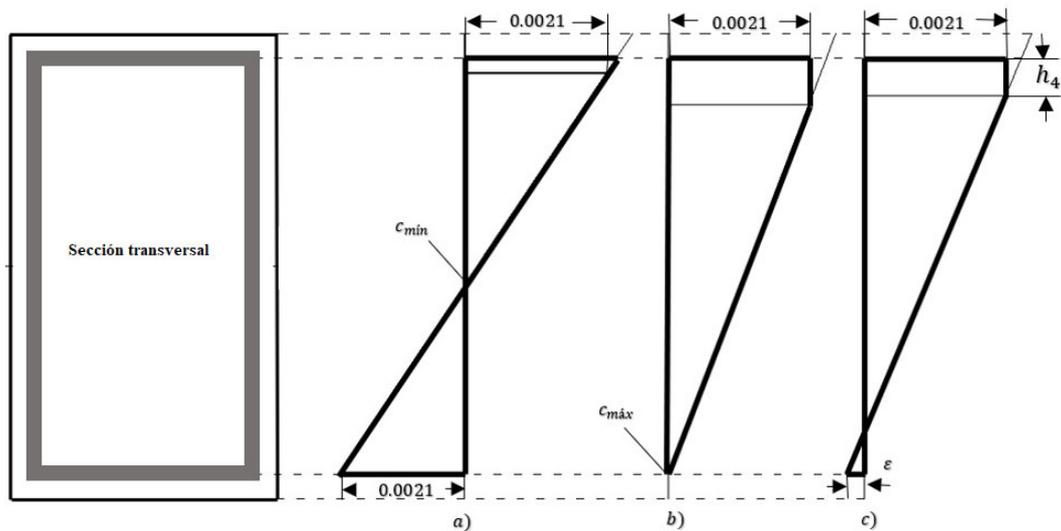


Figura 3.1.9: a) Diagrama configuraciones geométricas de deformaciones para el límite inferior del rango permitido del eje neutro. b) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones para el límite superior del rango permitido del eje neutro. c) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones para cualquiera posición del eje neutro entre su rango permitido. Caso 4.

Donde:

$$h_4 = \left(1 - \frac{21}{30} - \frac{d_1}{c}\right)c$$

$$\epsilon = 0.003\left(\frac{d_2}{c} - 1\right)$$

Nota: Ver demostración 4.1 en Anexo 1 p. 76

Por lo tanto, para las ecuaciones **Ecuación 3.2** y **Ecuación 3.3**:

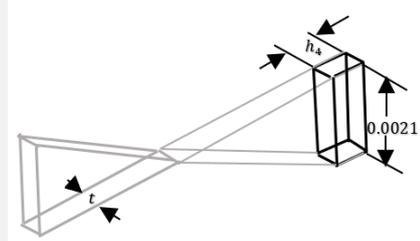
$$\epsilon_a = 0.0021$$

$$\epsilon_b = \epsilon$$

Entonces las fuerzas y momentos resistentes se calculan como:

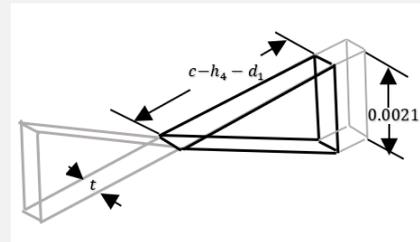
$$F_1 = -2t(0.0021)h_4E_{ac} \quad (3.43)$$

$$M_1 = F_1\left(\left(d_1 + \frac{1}{2}h_4\right) - \frac{1}{2}h\right) \quad (3.44)$$



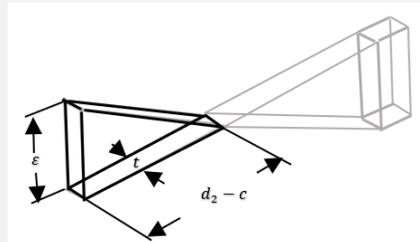
$$F_2 = -\frac{1}{2}2t(0.0021)(c - d_1 - h_4)E_{ac} \quad (3.45)$$

$$M_2 = F_2\left(\frac{2}{3}\left(d_1 + h_4 + \frac{1}{2}c\right) - \frac{1}{2}h\right) \quad (3.46)$$



$$F_3 = \frac{1}{2}2t\varepsilon(d_2 - c)E_{ac} \quad (3.47)$$

$$M_3 = F_3\left(\left(\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}d_2\right) - \frac{1}{2}h\right) \quad (3.48)$$



$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 - F_a + F_b \quad (3.49)$$

$$M_R = M_1 + M_2 + M_3 - F_a\left(d_1 - \frac{1}{2}h\right) + F_b\left(d_2 - \frac{1}{2}h\right) \quad (3.50)$$

3.1.8 Caso 5. Se presentan dos bloques rectangulares y uno triangular, todos a compresión.

$$d_2 < c \leq \frac{30}{9} d_2$$

Para visualizar este rango hágase referencia a la siguiente figura **Figura 3.1.10** y a la demostración que se indica en la leyenda de la misma figura.

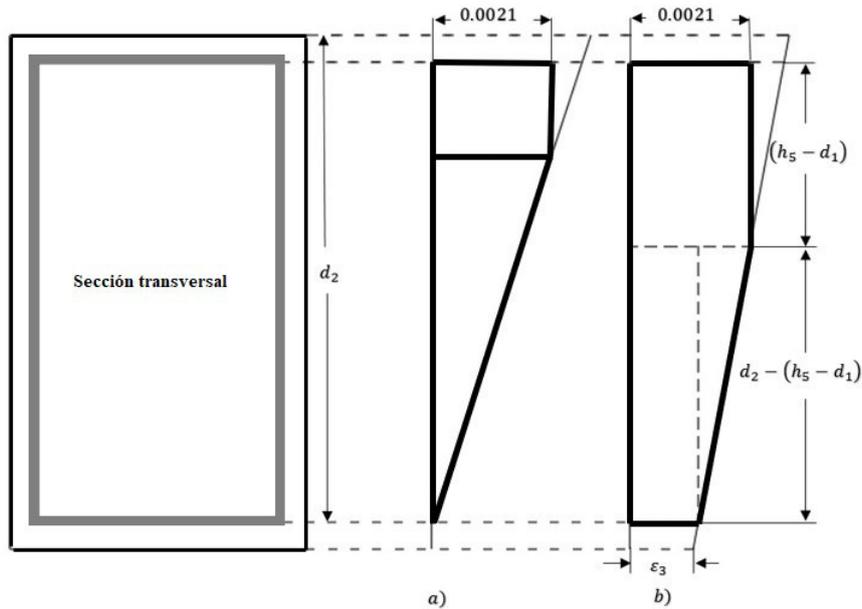


Figura 3.1.10: a) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones en el límite inferior del eje neutro. b) Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones en el límite superior del eje neutro. Caso 5. **Dibujo propio.** Ver demostración 5.1 en Anexo 1 p. 77

Donde:

$$h_5 = \frac{9}{30} c$$

$$\varepsilon_3 = 0.0021 - \frac{0.003}{c} (d_2 - h_5)$$

Por lo tanto, para las ecuaciones **Ecuación 3.2** y **Ecuación 3.3**:

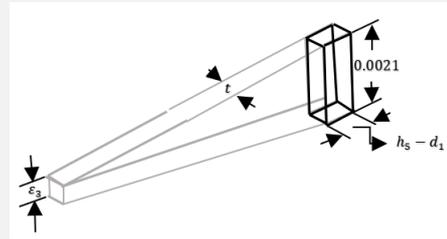
$$\varepsilon_a = 0.0021$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_3$$

Y las fuerzas y momentos resultantes resistentes se calculan como:

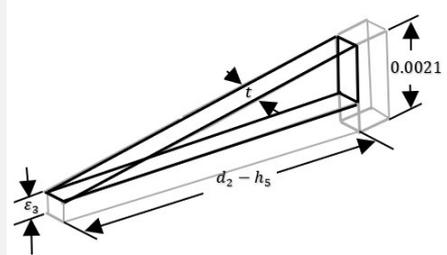
$$F_1 = -2t(0.0021)(h_5 - d_1)E_{ac} \quad (3.51)$$

$$M_1 = F_1 \left(\frac{1}{2}(h_5 + d_1) - \frac{1}{2}h \right) \quad (3.52)$$



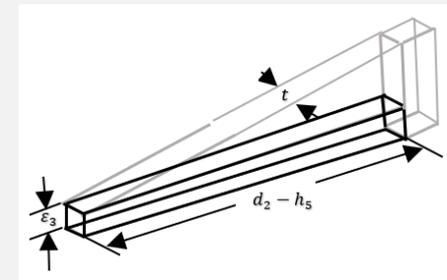
$$F_2 = -\frac{1}{2}2t(0.0021 - \varepsilon_b)(d_2 - h_5)E_{ac} \quad (3.53)$$

$$M_2 = F_2 \left(\frac{2}{3}(h_5 + \frac{1}{2}d_2) - \frac{1}{2}h \right) \quad (3.54)$$



$$F_3 = -\varepsilon_b(d_2 - h_5)2tE_{ac} \quad (3.55)$$

$$M_3 = F_3 \left(\frac{1}{2}(d_2 + h_5) - \frac{1}{2}h \right) \quad (3.56)$$



$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 - F_a - F_b \quad (3.57)$$

$$M_R = M_1 + M_2 + M_3 - F_a \left(d_1 - \frac{1}{2}h \right) - F_b \left(d_2 - \frac{1}{2}h \right) \quad (3.58)$$

3.1.9 Caso 6. Un bloque rectangular de esfuerzos en compresión

$$c > \frac{30}{9}d_2$$

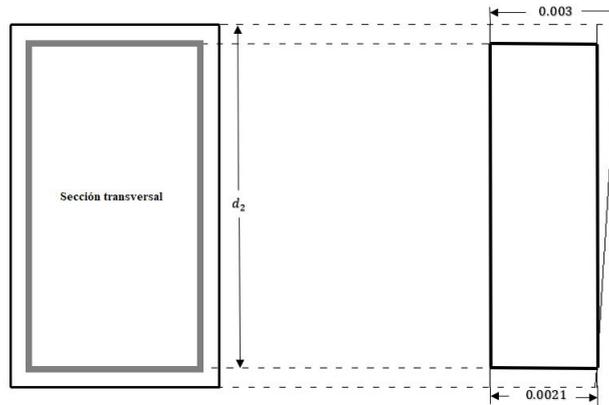
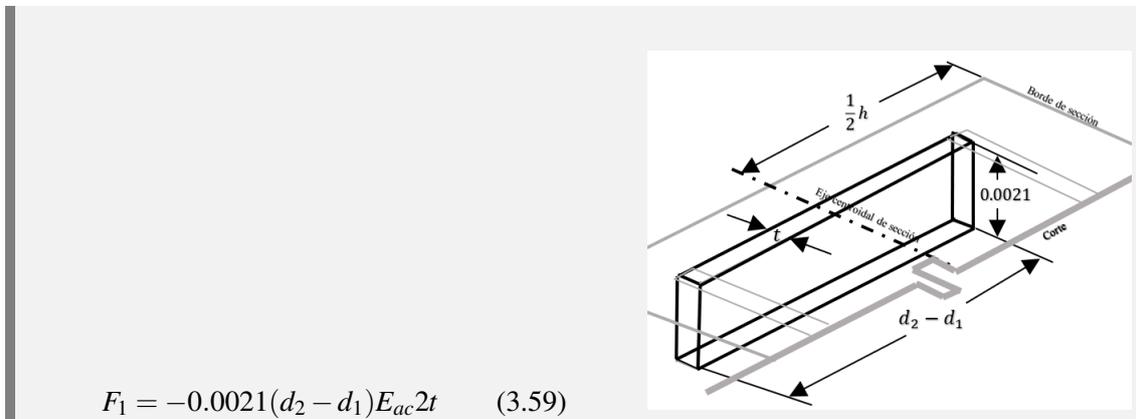


Figura 3.1.11: Diagrama de configuraciones geométricas de deformaciones a compresión pura (el eje neutro esta localizado justo en el límite inferior de su rango permitido). Caso 6. (**Dibujo propio.**) Ver demostración 6.1 en Anexo 1. 77

En este caso la sección resistirá únicamente fuerzas axiales a compresión, y no momentos de flexión, **Figura 3.1.11** pues el bloque se esfuerza que se genera tiene como punto de acción justo el eje de centroide de la sección misma.

Por lo tanto:



$$F_1 = -0.0021(d_2 - d_1)E_{ac}2t \quad (3.59)$$

$$F_R = F_1 - F_a - F_b \quad (3.60)$$

$$M_R = 0 \quad (3.61)$$

3.1.10 Casos de análisis para el concreto

Lo que se pretende aquí es encontrar el área neta del concreto bajo esfuerzos para cualquier valor en la profundidad del eje neutro **Figura 3.1.13**. Al ser una sección rectangular, el análisis se simplifica a un solo caso, ya que el área variará uniformemente a lo largo de todo el peralte de la sección, ya sea respecto al eje X o Y. A partir de esa área neta se determinará el volumen del bloque de esfuerzos-deformaciones resultante de compresión en unidades de Fuerza, y posteriormente el momento de flexión resultante respecto al eje del centroide de la sección como sigue:

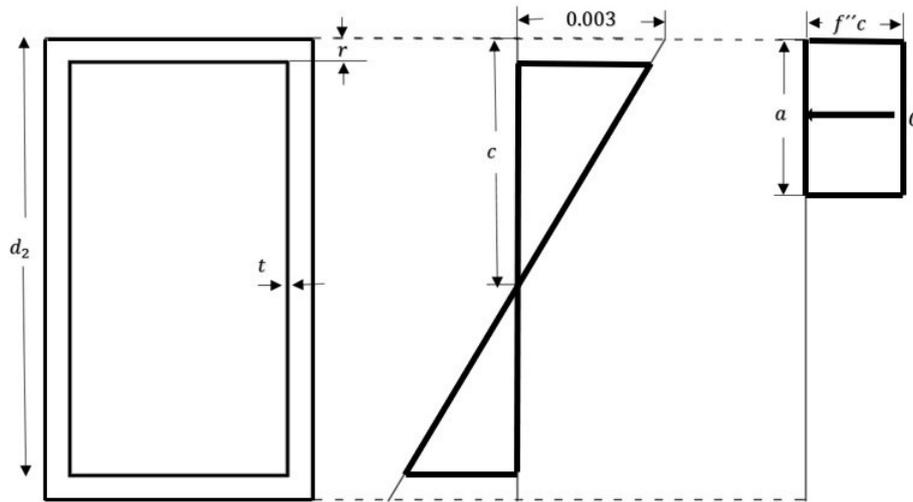


Figura 3.1.12: Diagrama de bloque equivalente de esfuerzos de compresión en el concreto. *Dibujo propio.*

$$C = -abf''c \quad (3.62)$$

$$M_c = -C\left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2}\right) \quad (3.63)$$

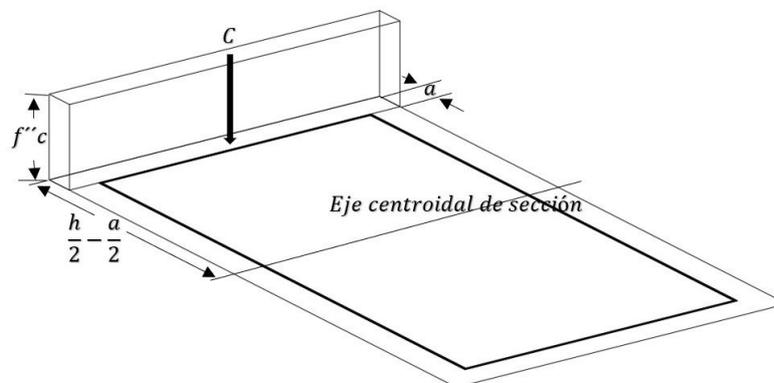


Figura 3.1.13: Diagrama tridimensional del bloque equivalente de esfuerzos de compresión en el concreto. *Dibujo propio.*

3.2 Columnas circulares

Análogo a la idealización del acero de refuerzo de columnas rectangulares, se ha idealizado el acero de refuerzo en éste tipo de columnas como se muestra en la siguiente figura **Figura 3.2.1**.

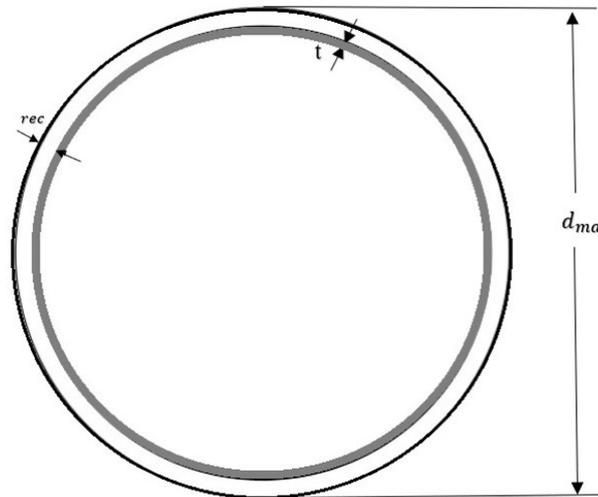


Figura 3.2.1: Idealización de una sección circular de concreto reforzado. *Dibujo propio.*

Donde:

t = Espesor del perfil
 rec = recubrimiento
 d_{ma} = diámetro de la sección del elemento

Nota: El recubrimiento se mide desde el borde de la sección de la columna al centro del espesor del refuerzo ficticio.

A diferencia de la geometría rectangular, para la circular resultó bastante complejo analizar la distribución de esfuerzos mediante el enfoque de análisis planteado originalmente (determinando la geometría de las configuraciones de estados de deformaciones, por lo que simplificó con el siguiente planteamiento:

3.2.1 Cálculo de la resistencia del acero

Lo que se hará es tratar el perfil de acero como una línea circular y subdividirla en pequeños segmentos con espesor t , **Figura 3.2.2**, aunque en realidad cada segmento se tratará como un punto al que le corresponderá una cierta condición de esfuerzos dependiendo de su ubicación en el plano cartesiano de referencia y del caso del cual se trate.

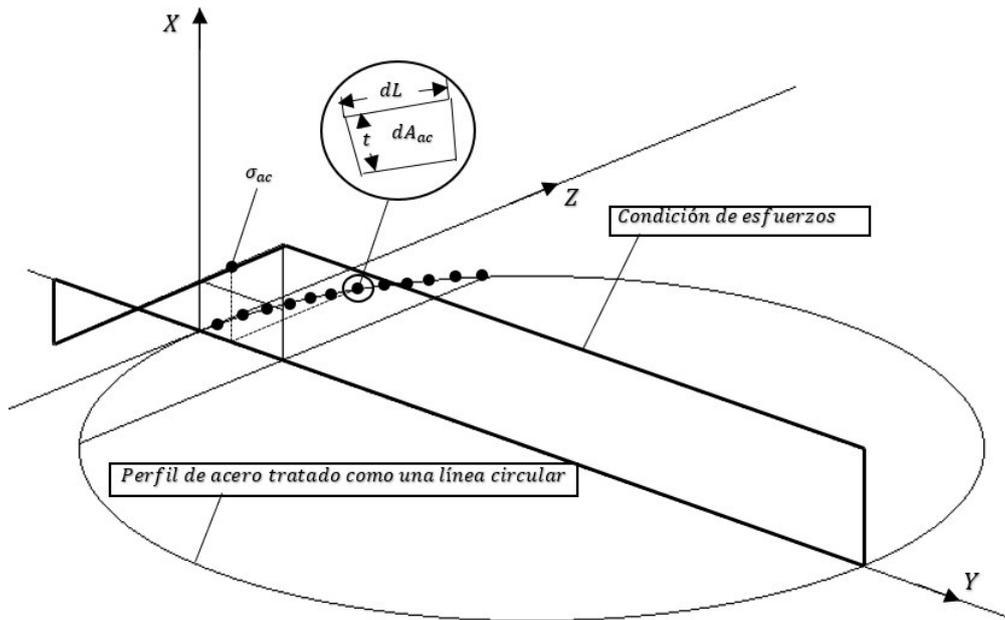


Figura 3.2.2: Esquema de análisis para las condiciones de esfuerzos en el acero de refuerzo. **Dibujo propio.**

Donde:

$$dA_{ac} = dL(t)$$

$$L = \Pi(d_{ma} - 2rec)$$

$$dL = \frac{L}{n}$$

$n = \text{Número de elementos}$

Metodología

Para la determinación de la resistencia de carga axial y flexión se sigue la siguiente metodología:

- Determinar la distancia de cada segmento de perfil con respecto a la fibra más alejada de la sección transversal del elemento de concreto d .
- A partir de ahí se calcula ε en función de c , cuidando únicamente la siguiente restricción $[-0.0021 < \varepsilon < 0.0021]$.
- Y finalmente calcular la fuerza y momento resultantes resistentes:

$$F_R = \sum_{i=1}^{nElementos} E_{ac} \varepsilon (dA_{ac}) \quad (3.64)$$

$$M_R = \sum_{i=1}^{nElementos} -E_{ac} \varepsilon (dA_{ac}) \left(\frac{1}{2} d_{ma} - d \right) \quad (3.65)$$

3.2.2 Casos de análisis para el concreto

A diferencia de las columnas de sección rectangular, en las circulares el diferencial de área al cambiar el eje neutro no será uniforme.

También podremos transformar ésta área de compresión en un bloque equivalente de esfuerzos, y para poder hacer esto será necesario calcular el centroide del área real de compresión en cada posición del eje neutro y a partir de ahí calcular el momento de flexión resistente de la sección.

Figura 3.2.3.

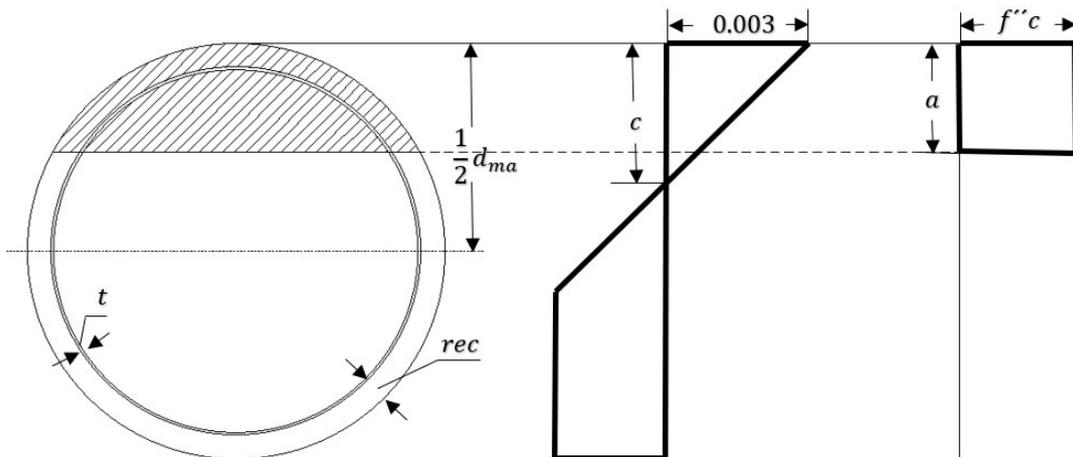


Figura 3.2.3: Diagrama de distribución de esfuerzos para el concreto. *Dibujo propio.*

Donde:

$$a = \beta(c)$$

$$f''_c = F_R(0.85)f'_c$$

Para calcular ésta fuerza de compresión tomaremos el siguiente sistema de referencia: **Figura 3.2.4**, para definir integrales para calcular el área efectiva de compresión del concreto en cualquier posición del eje neutro.

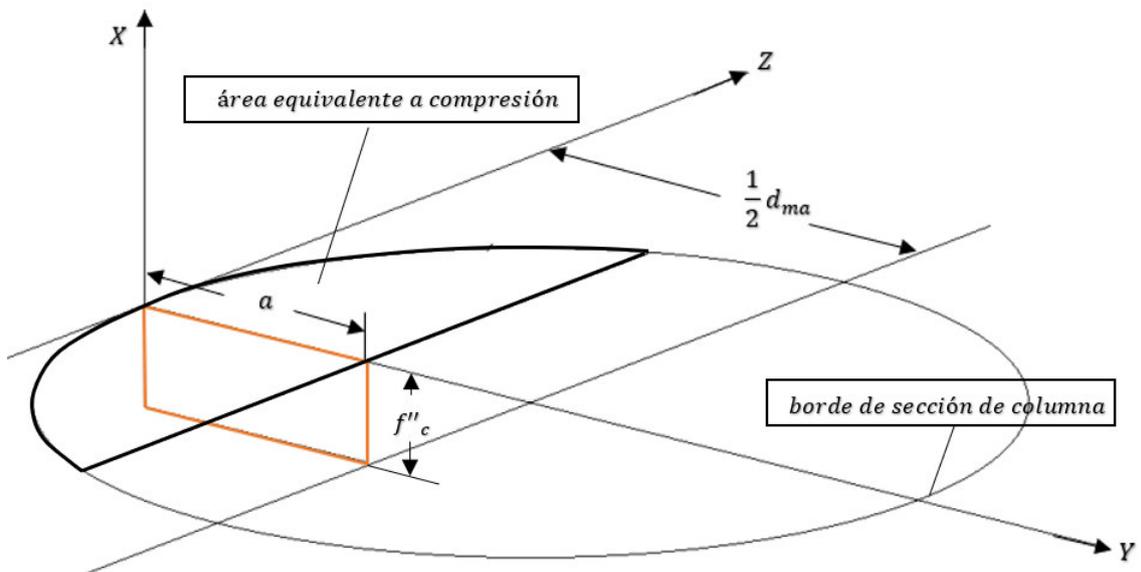


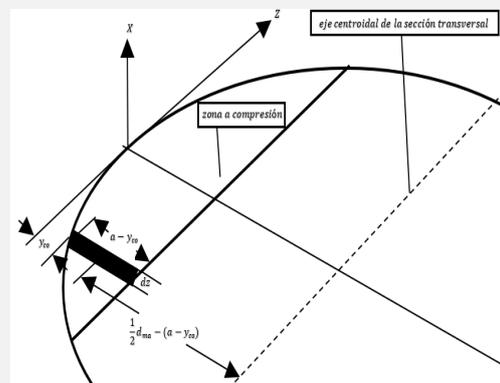
Figura 3.2.4: Sistema de referencia cartesiano para el análisis de la distribución de esfuerzos de compresión en el concreto. **Dibujo propio.**

Subdividiremos el análisis en dos casos para simplificación:

Cuando $a < \frac{1}{2}d_{ma}$

$$F_{co} = f''_c \int_{-z(y_{co}=a)}^{z(y_{co}=a)} (a - y_{co}) dz \quad (3.66)$$

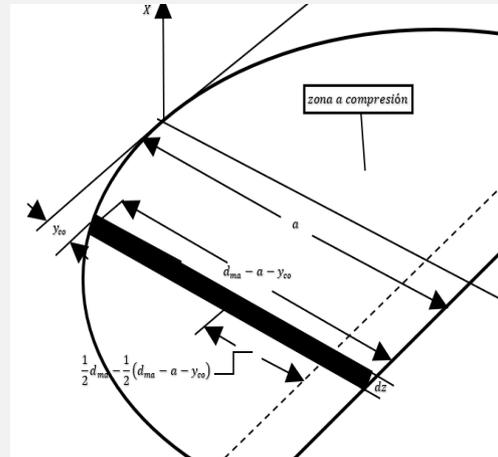
$$F_{co} \cdot Y_{co} = f''_c \int_{-z(y_{co}=a)}^{z(y_{co}=a)} (a - y_{co}) \dots \left(\frac{1}{2}d_{ma} - \frac{1}{2}(a + y_{co}) \right) dz \quad (3.67)$$



Cuando $a \geq \frac{1}{2}d_{ma}$

$$F_{co} = f''c \left(\Pi \left(\frac{1}{2}d_{ma} \right)^2 - \dots \right. \\ \left. \dots - \int_{-z(y_{co}=d_{ma}-a)}^{z(y_{co}=d_{ma}-a)} ((d_{ma} - a) - y_{co}) dz \right) \quad (3.68)$$

$$F_{co} \cdot Y_{co} = f''c \left(- \int_{-z(y_{co}=d_{ma}-a)}^{z(y_{co}=d_{ma}-a)} ((d_{ma} - \dots \right. \\ \dots - a) - y_{co}) \left(- \frac{1}{2}d_{ma} - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{1}{2}(d_{ma} - a - y_{co}) \right) dz \right) \quad (3.69)$$





4. Programa

4.1 Geometría y propiedades mecánicas de los materiales

Recordando que el objetivo es determinar un arreglo de refuerzo tal que cumpla con un rango de eficiencia aceptable ante ciertos elementos mecánicos actuantes al que la estructura concreto estaría sometidos, manteniendo constante la geometría de la sección propuesta inicialmente. Por lo que nuestros datos de entrada serán el número de elementos a diseñar, para cada elemento se indicará la resistencia a compresión simple del concreto f'_c , la resistencia a la fluencia del acero f_y , y el recubrimiento rec .

El programa también necesitará las fuerzas actuantes en la columna para su diseño. Dichas fuerzas se determinan normalmente mediante un análisis estructural, el cual es común que se realice en algún software para tal fin. A partir de éste punto se determinará un valor inicial del espesor del perfil idealizado de acero t , acomodado en la sección de concreto de tal manera que se respete el recubrimiento deseado, para así comenzar con las iteraciones de actualización de los diagramas de interacción de las columnas hasta que la condición mecánica actuante más crítica sea cubierta.

4.2 Cálculo de los diagramas de interacción

Se establece un cierto número de puntos para determinar los diagramas de interacción, determinado los valores P_{ot} , P_{oc} como los límites del rango de las fuerzas del diagrama de interacción, pudiendo extraer una fuerza respectiva a cada punto del mismo que tendrá el papel de raíz en el método numérico a emplear para el cálculo de su respectivo momento resistente.

El método numérico empleado para la aproximación de raíces es el llamado "Método de la *Falsa posición*". [5]

4.2.1 Cálculo de la eficiencia mecánica-estructural

Para cada condición de fuerza actuante en la columna se determinará la respectiva eficiencia estructural que hay entre ésta condición y la resistencia que el diagrama de interacción indica.

La diferencia en el cálculo de éstas eficiencias en columnas circulares y rectangulares es que en las rectangulares se deberán extraer de los diagramas de interacción calculados en el sentido de x y y la carga resistente y el momento resistente ($M_{rx}, M_{ry}, P_{rx}, P_{ry}$ [p. 31]), y para las circulares al ser su sección simétrica respecto a cualquier eje, se calculará la eficiencia respecto a una sola dirección, extrayendo la carga resistente y el momento resistente (M_r, P_r) del diagrama de interacción calculado.

Para lo anterior se empleará geometría analítica con el sistema cartesiano de los propios diagramas de interacción **Figura 4.2.1** calculando el punto de intersección entre dos rectas imaginarias A y B, tal que A partirá del origen pasando por alguna condición de fuerza actuante prolongándose hasta el borde del diagrama de interacción, y B será tal que una el punto anterior (M_i, P_i) y posterior (M_{i+1}, P_{i+1}) del punto en el cual la recta A interseca al diagrama de interacción.

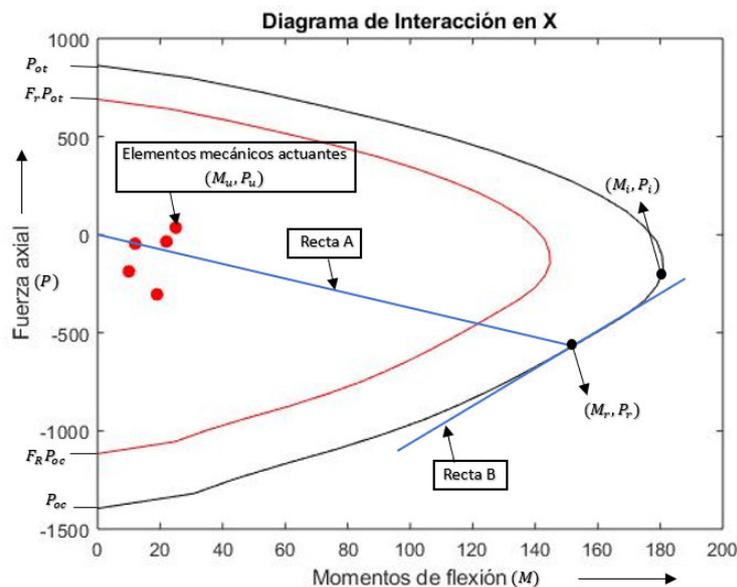


Figura 4.2.1: Diagrama de interacción en el plano cartesiano de referencia para el programa.

De modo que el cálculo del momento resistente para una respectiva condición se calcula como:

$$M_r = \frac{P_{i+1} + \left(\frac{P_i - P_{i+1}}{M_{i+1} - M_i} \right) \frac{P_u}{M_u} - \frac{P_{i+1} - P_i}{M_{i+1} - M_i}}{\quad} \quad (4.1)$$

Y su fuerza resistente respectiva como:

$$P_r = \frac{P_u}{M_u} M_r \quad (4.2)$$

Ver demostración 4.9.1 p. 78

Ahora ya se pueden aplicar las fórmulas que indican las NTC-2017 p. 31, para calcular las eficiencias de cada condición mecánica actuante.

4.2.2 Cálculo de área requerida de acero

Ya determinada la eficiencia mecánica estructural para cada condición de carga actuante se determinará a continuación la más crítica, y a partir de ésta se calculará el espesor del perfil de acero simplemente iterando el valor de t con un cierto incremento dt , hasta llegar a un rango de eficiencia crítica requerida, establecida a priori, pues está será la eficiencia que nos servirá de comparación para seguir iterando o no. **Figura [4.2.2]**

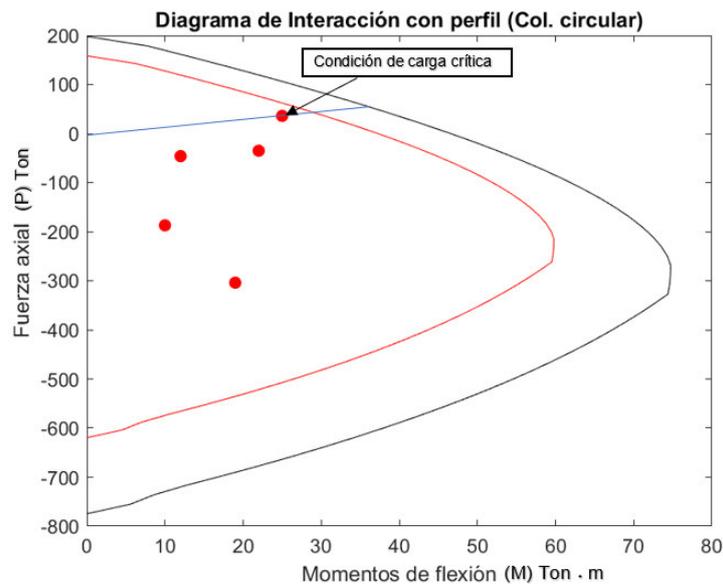


Figura 4.2.2: Condición de carga crítica de diseño.

4.3 Determinación del acero de refuerzo

Una vez que se ha determinado el área de acero a emplear para que se alcance la eficiencia deseada, se debe transformar esa área ficticia de acero en varillas corrugadas, distribuyéndolas uniformemente en la sección (obedeciendo las hipótesis de diseño de la **Sección 2.3.3**), por lo que sólo se admitirán números pares de varillas.

El programa genera un arreglo matricial de propuestas de número de varillas, desde 4 (para columnas rectangulares) o 6 (para columnas circulares), calculando para cada

diámetro el número de varillas requeridas.

El usuario podrá elegir no sólo el diámetro del acero de refuerzo, sino también la distribución de éstas en la sección (para las columnas rectangulares), de manera que siempre se respete la uniformidad de la distribución de éstas en la sección, así como la separación mínima o distancia libre entre varillas $S_{min} = \frac{3}{2}TMA$.

Cabe mencionar que la distribución del acero de refuerzo tiene influencia en la eficiencia mecánica de los elementos, y para cada opción de número de varillas/diámetro le corresponderá un buen número de configuraciones de éstas en la sección, por lo que el programa hará también un análisis de eficiencia de cada opción disponible, pero ahora tratando al acero de refuerzo precisamente como varillas de acero, para verificar cuáles cumplen con el rango requerido de eficiencia que se estableció a priori, una vez hecho esto, el programa seleccionará la opción más eficiente.

4.4 Plataformas y lenguajes de programación empleados

Con el fin de darle más portabilidad al proyecto, y al programa en particular, se realizó éste en lenguaje C, al ser un lenguaje compatible con muchos otros softwares y aplicaciones, tales como Qt Creator, para darle al programa interfaces gráficas que hagan al programa más amigable con los usuarios. Con este lenguaje, además, se tiene la ventaja de hacerlo de fácil encapsulamiento para otros lenguajes de programación como lo es en python; que también tiene muchas posibles aplicaciones a su alcance tal como pyRevit. Sin mencionar la velocidad con la que se ejecutan las tareas escritas en este lenguaje y más aún el hecho de que se puede manipular el algoritmo para aplicarle cómputo paralelo con OpenMP por ejemplo.

Se utilizó también MatLab para graficar los diagramas de interacción y dibujar las secciones transversales de las columnas con el refuerzo, leyendo los resultados que del programa en lenguaje C se obtienen.

4.5 Entrada de información

Como entrada de datos se crean archivos .txt con información tal como las dimensiones de cada columna, el recubrimiento, así como el número de columnas que traten **Tabla 4.5.1** y **Tabla 4.5.3** además por supuesto, de las condiciones de servicio a la que cada una está sometida de acuerdo al análisis estructural previo. 4.5.2 y 4.5.4

4.5.1 Columnas rectangulares

$b(cm)$	$h(cm)$	$rec(cm)$	$f'c$
<>	<>	<>	<>

Tabla 4.5.1: *Tabla de entrada de datos para el programa de columnas rectangulares*

$P_u(Ton)$	$Mu_x(Ton \cdot m)$	$Mu_y(Ton \cdot m)$
<>	<>	<>

Tabla 4.5.2: *Tabla tipo de lectura de condiciones de cargas últimas para columnas rectangulares*

4.5.2 Columnas circulares

$d_{ma}(cm)$	$rec(cm)$	$f'c$
<>	<>	<>

Tabla 4.5.3: *Tabla de entrada de datos para el programa de columnas circulares*

$P_u(Ton)$	$Mu(Ton \cdot m)$
<>	<>

Tabla 4.5.4: *Tabla tipo de lectura de condiciones de cargas últimas para columnas circulares*

4.6 Salida de información

Los resultados que se obtienen, tales como los puntos del diagrama de interacción (tanto para el varillado como los resultantes del análisis inicial con el perfil idealizado de acero) **Figura [4.6.4],[4.6.5]** y **Figura [4.6.2],[4.6.3]**, así como el número de varillas y la disposición de éstas en la sección transversal de la columna (con coordenadas x,y) **Figura 4.6.1**, son exportados también en archivos de texto plano .txt junto con las eficiencias tabuladas de cada posible opción de varillado **Tabla [4.6.1],[4.6.2]**, separados en carpetas para cada columna a diseñar, y ser leídos después con MatLab para gráficar.

4.6.1 Columnas rectangulares

Para esta geometría se obtiene un diagrama en la dirección X, y uno en la dirección Y.

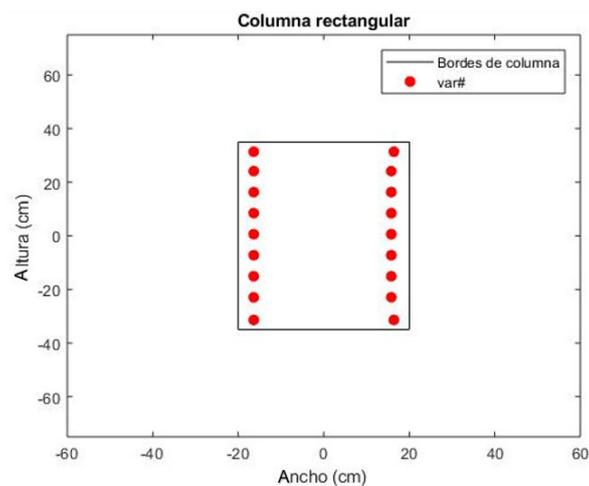


Figura 4.6.1: Dibujo de la sección transversal de una columna rectangular diseñada con el varillado propuesto.

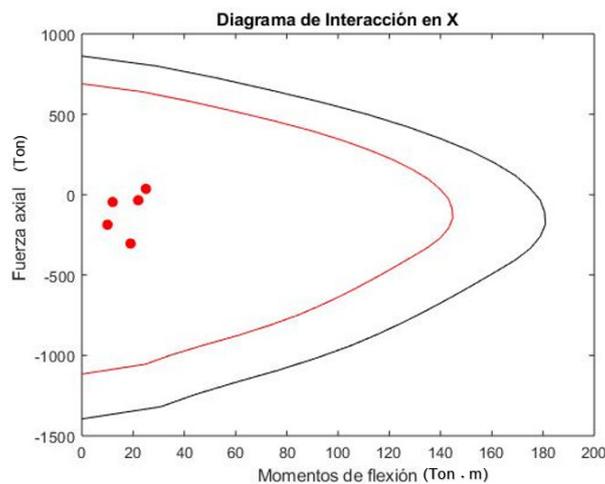


Figura 4.6.2: Dibujo del diagrama de interacción del varillado propuesto en la sección rectangular respecto al eje X.

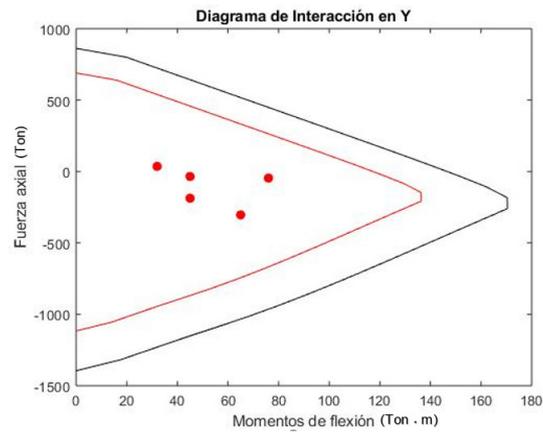


Figura 4.6.3: Dibujo del diagrama de interacción del varillado propuesto en la sección rectangular respecto al eje Y.

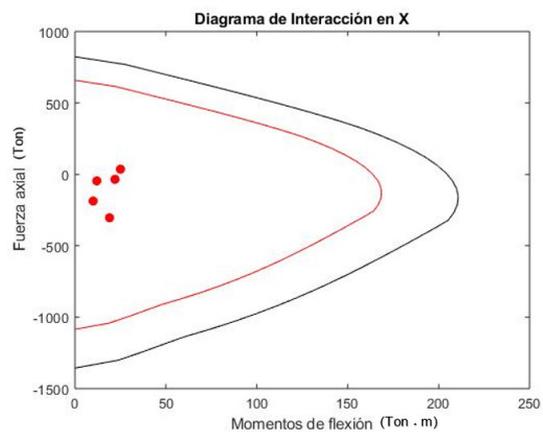


Figura 4.6.4: Dibujo del diagrama de interacción con el perfil de acero en la sección rectangular respecto al eje X.

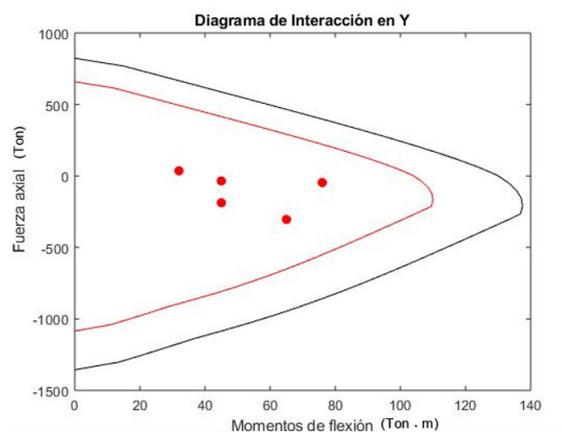


Figura 4.6.5: Dibujo del diagrama de interacción con el perfil rectangular en la sección rectangular respecto al eje Y.

$Pr(\text{Ton})$	$Mr_x(\text{Ton} \cdot \text{m})$	$Mr_y(\text{Ton} \cdot \text{m})$	$Ef(\%)$
<>	<>	<>	<>

Tabla 4.6.1: Tabla tipo de eficiencia para cada opción posible de varillado para columnas rectangulares

4.6.2 Columnas circulares

Aquí se obtiene un solo diagrama al ser un círculo teniendo la misma simetría en cualquier orientación respecto a su eje centroidal de sección .

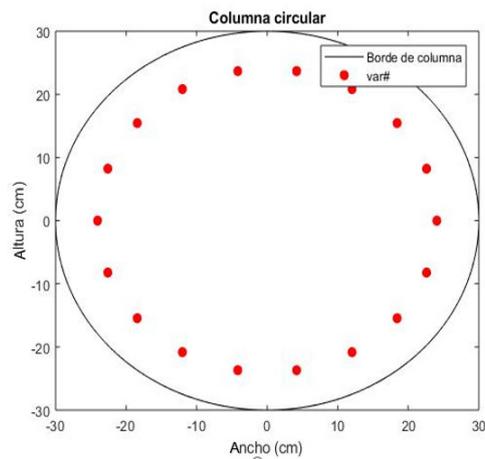


Figura 4.6.6: Dibujo de la sección transversal de una columna rectangular diseñada con el varillado propuesto.

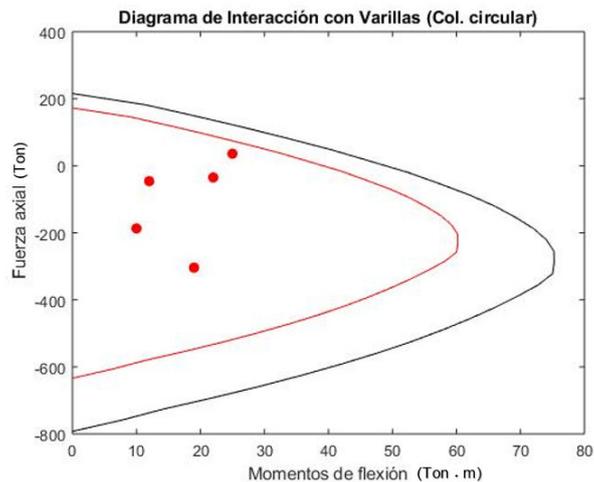


Figura 4.6.7: Dibujo del diagrama de interacción del varillado propuesto en la sección circular.

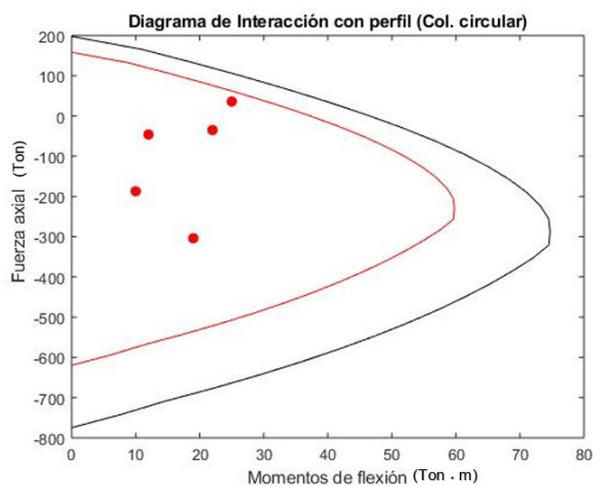


Figura 4.6.8: Dibujo del diagrama de interacción con el perfil de acero en la sección circular.

$P_u(\text{Ton})$	$M_u(\text{Ton} \cdot \text{m})$	$P_r(\text{Ton})$	$M_r(\text{Ton} \cdot \text{m})$	$E_f(\%)$
<>	<>	<>	<>	<>

Tabla 4.6.2: Tabla tipo de eficiencia para cada opción posible de varillado para columnas circulares

4.7 Pseudocódigo general del programa

Algoritmo 1: Cálculo del diagrama de interacción

INICIO

$$As = (2 * (b - 2rec) + 2 * (h - 2rec))t$$

$$poc = f'' c(Ac - As) + fy(As)$$

$$pot = As(fy)$$

$$df = (pot - poc) / (Npuntos)$$

Do i=1,Npuntos

$$P(i) = -Fr(poc + i * df)$$

End Do

Do i=1,Npuntos

$$M(i) = casosAnalisis(P(i), a, c, h, b, t, rec, E)$$

End Do

Algoritmo 2: Cálculo de eficiencia para las condiciones de servicio de la sección idealizada

Do i=1,Ncondiciones

$$\frac{1}{e(u)} = \frac{Mu(i)}{Pu(i)}$$

$$[Pr(i), Mr(i)] = resistencia\left(\frac{1}{e(u)}, condicion\right)$$

End Do

$$eficiencia = \frac{Mu}{Mr}$$

If (maxEficiencia < limMenor) then

$$t = t - dt$$

Regresar a **Algoritmo 1**

elseif (maxEficiencia > limMayor)

$$t = t + dt$$

Regresar a **Algoritmo 1**

else

FIN

End If

Algoritmo 3: Determinación de opciones de varillado de refuerzo

INICIO

Do i=1,NopcionesVarillado

nVarillas=1

Asv=areaVarilla(i)*nVarillas

Do while (Asv<As)

nVarillas=nVarillas+1

Asv=areaVarilla(i)*nVarillas

End Do

End Do

Algoritmo 4: Cálculo del diagrama de interacción para la opción seleccionada de varillado

Seleccionar opción de varillado

$poc = f'' c(Ac - Asv) + fy(Asv)$

$pot = Asv(fy)$

$df = (pot - poc) / (Npuntos)$

Do i=1,Npuntos

$P(i) = -Fr(poc + i * df)$

End Do

Do i=1,Npuntos

$M(i) = elemMecanicos(P(i), a, c, h, b, numeroVarillas, areaVarilla, rec, E)$

End Do

Algoritmo 5: Cálculo de eficiencia para las condiciones de servicio de la opción de varillado de refuerzo

Do i=1,Ncondiciones

$\frac{1}{e(u)} = \frac{Mu(i)}{Pu(i)}$

$[Pr(i), Mr(i)] = resistencia(\frac{1}{e(u)}, condicion)$

End Do

$eficiencia = \frac{Mu}{Mr}$

If (maxEficiencia<limMenor or maxEficiencia>limMayor) then

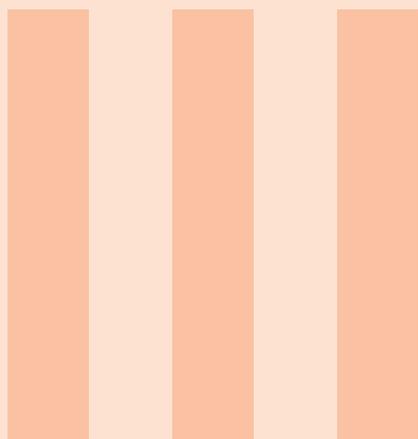
Regresar a **Algoritmo 4**

else

FIN

End If

Parte 3



	Anexos	73
4.8	Anexo 1. Demostraciones de las variables en- vueltas en los casos de análisis de columnas rectangulares	
4.9	Anexo 2. Demostraciones del desarrollo del programa	
	Bibliografía	78



Anexos

4.8 Anexo 1. Demostraciones de las variables envueltas en los casos de análisis de columnas rectangulares

Caso 1

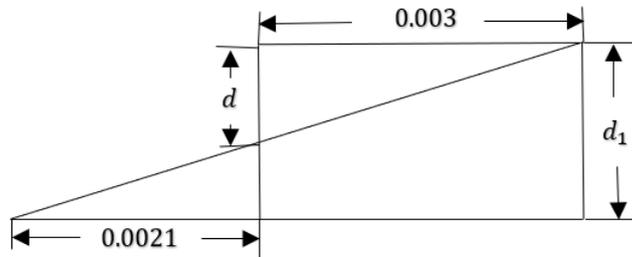


Figura 4.8.1: Demostración 1.1 para el caso 1 de columnas rectangulares. *Dibujo propio.*

Por relación de triángulos:

$$\frac{0.003}{d} = \frac{0.0051}{d_1}$$

$$d = \frac{30}{51}d_1$$

Caso 2

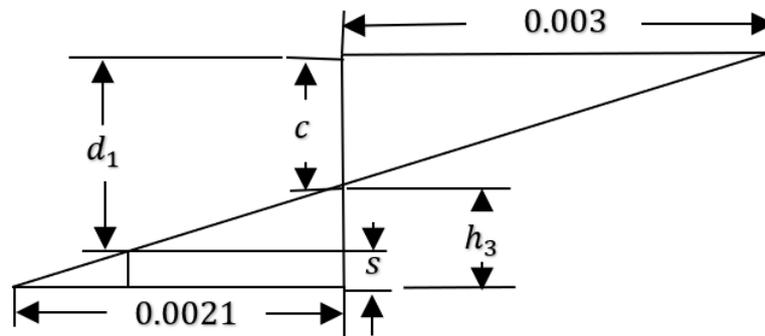


Figura 4.8.2: Demostración 2.1 para el Caso 2 de columnas rectangulares

$$s = h_3 + c - d_1$$

Por relación de triángulos:

$$\frac{\varepsilon}{h_3 - s} = \frac{0.003}{c}$$

Entonces:

$$\varepsilon = \frac{0.003}{c} (h_3 - (h_3 + c - d_1))$$

$$\varepsilon = 0.003 \left(\frac{d_1}{c} - 1 \right)$$

Caso 3

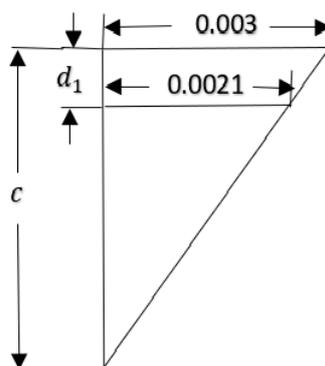


Figura 4.8.3: Demostración 3.1 para el Caso 3 de columnas rectangulares

Por relación de triángulos:

$$\frac{c}{0.003} = \frac{d_1}{0.003 - 0.0021}$$

Entonces:

$$c = \frac{30}{9}d_1$$

Caso especial

Sea m_{max} la razón de distribución líneal de esfuerzos para el limite máximo del caso especial, y m_{min} la razón de distribución líneal de esfuerzos para el límite mínimo:

$$m_{max} = \frac{d_1}{0.003 - 0.0021}$$

$$m_{min} = \frac{d_2}{0.003 + 0.0021}$$

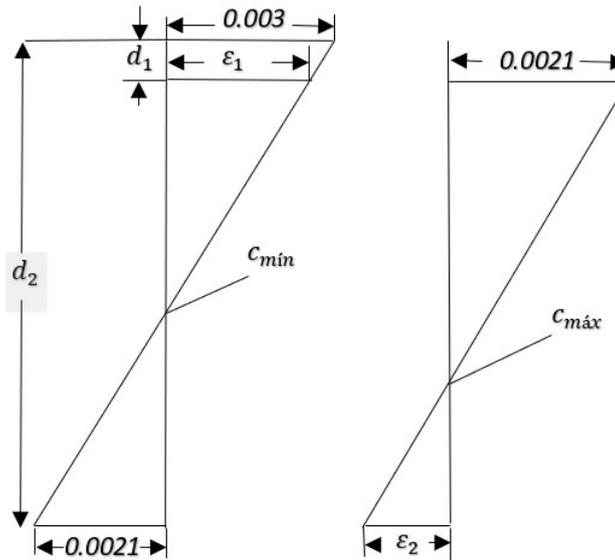


Figura 4.8.4: Demostración CE.1 para el Caso Especial de columnas rectangulares

De modo que se deberá cumplir la siguiente relación:

$$\frac{d_2}{0.0051} \leq \frac{d_1}{0.0009}$$

$$\frac{9}{51}d_2 \leq d_1$$

Luego:

$$\frac{9}{51}(h - rec - \frac{1}{2}t) \leq rec + \frac{1}{2}t$$

Y simplificando, se tiene:

$$\frac{60}{102}t \geq \frac{9}{51}h - \frac{60}{51}rec$$

Y ahora, por relaciones trigonométricas

$$\frac{c-d_1}{\varepsilon_1} = \frac{c}{0.003}$$

$$\varepsilon_1 = 0.003\left(1 - \frac{d_1}{c}\right)$$

Y además:

$$\frac{0.003}{c} = \frac{\varepsilon_2}{d_2-c}$$

$$\varepsilon_2 = 0.003\left(\frac{d_2}{c} - 1\right)$$

Caso 4

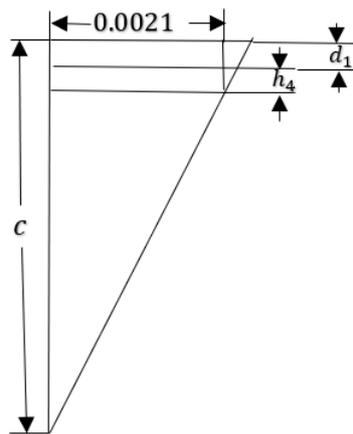


Figura 4.8.5: Demostración 4.1 del Caso 4.

Por relaciones trigonométricas:

$$\frac{h_4+d_1}{0.003-0.0021} = \frac{c}{0.003}$$

Por lo tanto:

$$h_4 = \left(1 - \frac{21}{30} - \frac{d_1}{c}\right)c$$

O también:

$$h_4 = \left(1 - \frac{21}{30} - \frac{d_1}{c}\right)c$$

Caso 5

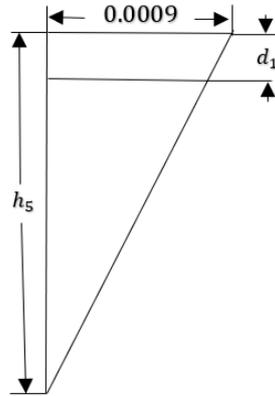


Figura 4.8.6: Demostración 5.1 para el Caso 5.

Por relaciones trigonométricas:

$$\frac{0.003}{c} = \frac{0.0009}{h_5}$$

Caso 6

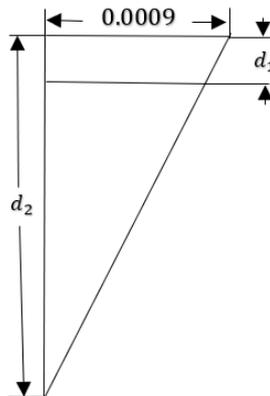


Figura 4.8.7: Demostración 6.1 para el Caso 6

Por relaciones trigonométricas:

$$\frac{0.0009}{d_2} = \frac{0.003}{c}$$

Entonces:

$$c = \frac{30}{9}d_2$$

4.9 Anexo 2. Demostraciones del desarrollo del programa

4.9.1 Geometría analítica para el cálculo de eficiencias mecánicas

Ecuación de la recta A:

$$y = \frac{y_u}{x_u}x \quad (4.3)$$

Ecuación de la recta B:

$$y = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}x + (y_{i+1} + \frac{y_i - y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i})x_{i+1} \quad (4.4)$$

Igualando las ecuaciones anteriores por compatibilidad:

$$\frac{y_u}{x_u}x = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}x + (y_{i+1} + \frac{y_i - y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i})x_{i+1} \quad (4.5)$$

Despejando x de la ecuación anterior:

$$x = x_r = \frac{y_{i+1} + \frac{y_i - y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}}{\frac{y_u}{x_u} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}} \quad (4.6)$$

Sustituyendo la **Ecuación [4.6]** en **Ecuación [4.5]**.

$$y = y_r = \frac{y_u}{x_u}x_r \quad (4.7)$$

Donde:

$$\begin{aligned} y_u &= P_u \\ x_u &= M_u \\ y_r &= P_r \\ x_r &= M_r \\ y_i &= P_i \\ x_i &= M_i \\ y_{i+1} &= P_{i+1} \\ x_{i+1} &= M_{i+1} \end{aligned}$$



Bibliografía

- [1] Jack C. McCormac, Rusell H. Brown, “*Diseño de concreto reforzado*”, 14th edition, Alfaomega (2015)
- [2] González Cuevas, Fco. Robles Fernández, “*Aspectos básicos del Concreto Reforzado*”, 4ª edición, Limusa (2005).
- [3] Gaceta Oficial de la Ciudad de México, “*Normas Técnicas Complementarias de la Ciudad de México*”, (2017). Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto 2017, p.109.
- [4] Edward G. Nawi, Rusell H. Brown, “*Concreto reforzado, un enfoque básico*”, p. 66.
- [5] Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, “*Métodos numéricos para ingenieros*”, Quinta edición, McGraw Hill

