Universidad de Guanajuato

Algunas Aplicaciones Del Anillo De Burnside

T E S I S

Para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

P R E S E N T A:

José Miguel Calderón León

Directora de Tesis:

Dra. Nadia Romero Romero

GUANAJUATO, GTO 2017

A Ma. Guadalupe y Miguel

Contenido

Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a mi asesora, Nadia Romero quien fue parte esencial en el desarrollo de esta tesis por todas sus enseñanzas, sus consejos, su disponibilidad, su optimismo y la paciencia que me tuvo, de manera especial también le quiero agradecer al Dr. Serge Bouc por los hints que me dio.

A mis grandes amigos Javier, Carlos, Daniel, y Lizda por su amistad incondicional, por siempre escucharme, por sus consejos, por estar conmigo en los malos momentos y disfrutar los buenos. “Los amo chicos” .

Finalmente a mi padres, y a mi hermana, por siempre apoyarme, por tantas alegrías y por ser siempre mi sustento y estabilidad. Sencillamente son las personas más importantes de mi vida.

Introducción

A finales del siglo XIX, el matemático William Burnside publicó el libro *Theory of Groups of Finite Order* [2], donde introdujo las ideas para definir lo que actualmente se conoce como el anillo de Burnside de un grupo de orden finito G (Definición 1.4.1), el cual lo denotamos por $B(G)$. Sin embargo, no fue sino hasta el año 1967 cuando el matemático L. Solomon dio la definición formal en el artículo *The Burnside algebra of a finite group* [7].

La mayor parte de este trabajo está basada en el artículo *An Application of Burnside Rings in Elementary Finite Group Theory* [4] de Andreas W. M. Dress, Christian Siebeneicher, y Tomoyuki Yoshida, publicado en 1992. Nuestro objetivo será dar demostraciones más detalladas de los resultados expuestos en dicho artículo [4], dar el ejemplo del anillo de Burnside de los cuaterniones, y de esta manera tener un mejor entendimiento de lo que se conoce como anillo de Burnside.

En el Capítulo 1 damos resultados clásicos de teoría de grupos y de la función de Möbius para un copo (conjunto parcialmente ordenado). También definimos el anillo de Burnside de un grupo finito G, el cual es el $\mathbb{Z}$-módulo generado por las clases de isomorfismo de los conjuntos finitos donde actúa G, y damos las definiciones de *Inducción, Deflación, Inflación, Puntos fijos, y Restricción* las cuales llamaremos "las operaciones del anillo de Burnside".

En el Capítulo 2 definimos el anillo fantasma de un grupo finito, y vemos que el anillo de Burnside es un subanillo del anillo fantasma. Más aún, con el Teorema 2.1.4 respondemos a la pregunta "¿Cuáles elementos del anillo fantasma son elementos del anillo de Burnside?". Por otro lado, gran parte de este trabajo gira alrededor del Teorema 2.1.6, el cual nos dice:

Si G es un grupo finito y C un grupo cíclico con el mismo orden que G, entonces existe un morfismo de anillos

$$\alpha : B(C) \longmapsto B(G)$$

llamado el homomorfismo de Frobenius-Wielandt, tal que para todo subgrupo U de G y cada $x \in B(C)$ se tiene, que el número de elementos U-invariantes del G-conjunto virtual $\alpha(x)$, es igual al número de elementos $C_{|U|}$-invariantes del C-conjunto virtual x, donde, $C_{|U|}$ denota el único subgrupo C con el mismo orden que U.

Después damos las condiciones necesarias para que α sea un monomorfismo de anillos, además, se demuestra que G es un grupo nilpotente si y sólo si el homomorfismo α define un isomorfismo entre $B(C)$ y el subanillo $B_0(G)$ de $B(G)$, donde $B_0(G)$ consiste de aquellos G-conjuntos virtuales que tienen el mismo número de elementos invariantes para cualquier subgrupo de G de un orden dado. También vemos algunas aplicaciones del anillo de Burnside, entre las cuales está demostrar el 1^{er} y el 3^{er} Teorema de Sylow.

En el Capítulo 3 vemos que el homomorfismo α conmuta (respecto a la composición de funciones) con algunas de las operaciones del anillo de Burnside definidas en la sección 5 del Capítulo 1. Por último, en el Capítulo 4 vemos cual es el anillo de Burnside de los cuaterniones, así como la imagen del homomorfismo α, y que el homomorfismo α no conmuta (respecto a la composición de funciones) con la operación *Deflación*.

Capítulo 1

Resultados preliminares

1.1. Grupos

Los resultados clásicos de este capítulo no se demostrarán pero el lector puede ver sus demostraciones en [6].

Notación 1.1.1. Sea G un grupo. Si S es subgrupo de G lo denotamos por $S \leqslant G$ y denotamos por $Sub(G)$ al conjunto de todos los subgrupos de G.

Recordemos que para un subgrupo S de G y t un elemento cualquiera de G, la clase lateral derecha de S en G es el subconjunto de G

$$St = \{st \mid s \in S\}$$

y la clase lateral izquierda es $tS = \{ts \mid s \in S\}$. Denotaremos por G/S al conjunto de todas la clases laterales izquierdas de S.

Definición 1.1.2. Sea G un grupo finito. Si $S \leqslant G$, el índice de S en G, denotado por $[G : S]$, es el número de clases laterales derechas (izquierdas) de S en G.

Definición 1.1.3. Sea G un grupo finito, el orden de G, denotado por $|G|$, es el número de elementos de G. Para $a \in G$ el orden de a es el orden de

$$< a >= \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Por otro lado n es el exponente de G si es el menor número positivo que cumple $x^n = 1$ para todo $x \in G$.

Definición 1.1.4. Dado un número primo p, un p-grupo es un grupo en el que cada elemento tiene como orden una potencia de p. Para un número primo p, un p-subgrupo de Sylow de un grupo G es un p-subgrupo maximal de G, es decir, un p-subgrupo que no está contenido estrictamente en otro p-subgrupo.

Recordemos que un subgrupo normal N de un grupo G es un subgrupo invariante por conjugación; es decir, para cada elemento n de N y cada g en G, el elemento gng^{-1} está en N. Si N es un subgrupo normal de G se denota por $N \lhd G$.

Teorema 1.1.5 (2.21 en [6]). *Sea G un grupo finito. Si $N \lhd G$, entonces las clases laterales derechas (izquierdas) de N en G forman un grupo, de orden $[G : N]$.*

Corolario 1.1.6 (2.22 en [6]). *Si $N \lhd G$, entonces el mapeo natural (i.e. la función $v : G \longrightarrow G/N$ definida por $v(a) = Na$) es un homomorfismo suprayectivo con kernel N.*

Definición 1.1.7. Si G es un grupo y si $a,\ b \in G$, el conmutador de a y b, denotado por $[a, b]$, es

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

El subgrupo conmutador de G es el subgrupo generado por todos los conmutadores de G y es denotado por G'. El centro de un grupo G, que es denotado por $Z(G)$, es el conjunto de todas las $a \in G$ que conmutan con los elementos de G

$$Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga\ \forall g \in G\}.$$

Sean G un grupo, y $x,\ y \in G$ decimos que x es conjugado de y si existe $g \in G$ tal que $x = gyg^{-1}$, y la conjugación es una relación de equivalencia.

Definición 1.1.8. Si $a \in G$ entonces el centralizador de a en G denotado por $C_G(a)$, es el conjunto de todos los $x \in G$ que conmutan con a

$$C_G(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}.$$

Fácilmente vemos que $C_G(a)$ es un subgrupo de G.

Notación 1.1.9. Sea G un grupo, y sean a y g elementos de G, denotamos a los elementos $g^{-1}ag$ y gag^{-1} por a^g y ${}^ga$ respectivamente, y a

$$a^G = \{g^{-1}ag \mid g \in G\}.$$

Si $H \leqslant G$ y $g \in G$, el conjunto $g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$ es denotado por H^g, y el normalizador de H en G es denotado por $N_G(H)$,

$$N_G(H) = \{a \in G \mid aHa^{-1} = H\}.$$

Teorema 1.1.10 (3.2 en [6]). *Sea G un grupo finito. Si $a \in G$, el número de conjugados de a es igual al índice del centralizador:*

$$|a^G| = [G : C_G(a)]$$

y este número divide a $|G|$ cuando G es finito.

Definición 1.1.11. Sean G un grupo finito, y $H, K \leqslant G$. Decimos que H y K son conjugados si existe $g \in G$ tal que, $H = K^g$, y lo denotamos como $H \sim_G K$, la cual es una relación de equivalencia. Si existe $U \leqslant K$ tal que $H \sim_G U$ esto lo denotamos por $H \lesssim_G K$, cuando $U < K$ lo denotamos por $H <_G U$. El conjunto de todas las clases de conjugación de subgrupos de G es denotado por S_G, y un conjunto de representantes de S_G es denotado por $[S_G]$.

1.2. G-conjuntos

Si X un conjunto finito, denotaremos a la cardinalidad de X por $|X|$.

Definición 1.2.1. Si X es un conjunto, y G es un grupo, entonces X es un G-conjunto izquierdo si existe una función $\alpha : G \times X \longmapsto X$, llamada acción, denotada por $\alpha(g, x) = gx$, tal que

1. $1x = x \ \forall x \in X$.
2. $g(hx) = (gh)x \ \forall g, h \in G$ y $x \in X$.

También decimos que G actúa sobre X. Si X es finito y $|X| = n$, entonces n es llamado el grado del G-conjunto X.

Si X, Y son G-conjuntos decimos que la función $f : X \longrightarrow Y$, es un morfismo de G-conjuntos si

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$$

para todo $g \in G$ y todo $x \in X$.
Sea $x \in X$, la G-órbita de X es

$$O(x) = \{gx \mid g \in G\} \subset X.$$

El estabilizador de x, denotado por G_x, es

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Fácilmente vemos que G_x es un subgrupo de G.

Recordemos que un G-conjunto X es *transitivo* si sólo tiene una órbita, esto es, para todos $x, y \in X$ existe $\sigma \in G$ tal que $y = \sigma x$.

Ejemplo 1.2.2. Sea G un grupo finito, y H un subgrupo de G. El conjunto

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

es un G-conjunto, con la acción

$$\begin{aligned} G \times G/H &\mapsto G/H \\ (a, gH) &\mapsto agH. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.3. Si X_1 y X_2 son G-conjuntos entonces:

1. $X_1 \times X_2$ es un G-conjunto con la acción

$$\begin{aligned} G \times (X_1 \times X_2) &\longrightarrow (X_1 \times X_2) \\ (g, (x_1, x_2)) &\longmapsto (gx_1, gx_2). \end{aligned}$$

2. $X_1 \sqcup X_2$ (unión disjunta) es un G-conjunto con la acción

$$\begin{aligned} G \times (X_1 \sqcup X_2) &\longrightarrow (X_1 \sqcup X_2) \\ (g, (x_i, i)) &\longmapsto (gx_i, i). \end{aligned}$$

Demostración.

1. Sea $f : G \times (X_1 \times X_2) \longmapsto X_1 \times X_2$ definida como

$$f(g, (x, y)) = g(x, y) := (gx, gy)$$

demostraremos que f es una acción.

- $1(x, y) = (1x, 1y) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times Y$, pues X y Y son G-conjuntos.
- $g(h(x, y)) = g(hx, hy) = (ghx, ghy) = (gh)(x, y) \quad \forall\ g, h \in G\ (x, y) \in X \times Y$.

Por lo tanto $X \times Y$ es un G-conjunto.

2. Recordemos que la unión disjunta de una familia indexada $\{X_i\}_{i \in I}$ se define como:

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\} = \{(x, i) \mid i \in I\ ,\ x \in X_i\}$$

Sea $f : G \times (X_1 \sqcup X_2) \longmapsto X_1 \sqcup X_2$ definida como $f(g, (x_i, i)) = g(x_i, i) := (gx_i, i)$, demostraremos que f es una acción.

- $1(x_i, i) = (1x_i, i) = (x_i, i) \quad \forall\ (x_i, i) \in X_1 \sqcup X_2,\ i = 1, 2.$

- $g(h(x_i, i)) = g(hx_i, i) = (ghx_i, i) = (gh)(x_i, i) \; \forall \; g, h \in G \; (x_i, i) \in X_1 \sqcup X_2$, $i = 1, 2$.

$\square$

Decimos que los G-conjuntos X y Y son isomorfos si existen morfismos de G-conjuntos $f : X \longrightarrow Y$ y $f' : Y \longrightarrow X$, tales que $f \circ f'$ y $f' \circ f$ son iguales a la identidad correspondiente y es fácil demostrar que f es un isomorfismo de G-conjuntos si es un homomorfismo de G-conjunto biyectivo.

Lema 1.2.4. *Si X es un G-conjunto transitivo, entonces $X \cong G/H$ para algún $H \leqslant G$.*

Demostración. Sean X un G-conjunto transitivo y $x \in X$, recordemos que $O(x) = X$ por ser X transitivo. Sabemos que $G_x \leqslant G$ y $G/G_x = \{hG_x | h \in G\}$. Definimos el mapeo

$$\begin{aligned} f : G/G_x &\longrightarrow X \\ gG_x &\mapsto gx. \end{aligned}$$

Primero mostremos que f está bien definida, sean $g, h \in G$ tales que $gG_x = hG_x$ esto implica que $h^{-1}g \in G_x$ i.e. $h^{-1}gx = x$, entonces $hx = gx$, así que

$$f(hG_x) = hx = gx = f(gG_x)$$

por lo tanto f está bien definida. Sea $y \in X$, por ser X transitivo existe $h \in G$ tal que $y = hx$, definimos

$$\begin{aligned} \alpha : X &\longrightarrow G/G_x \\ y &\longmapsto hG_x. \end{aligned}$$

Mostraremos que α está bien definida. Sean $h, g \in G$ tales que $y = hx = gx$ entonces $h^{-1}gx = x$ i.e. $h^{-1}g \in G_x$, esto implica que $hG_x = gG_x$, por lo tanto α está bien definida. Notemos que si $y = hx$, entonces

$$f\alpha(y) = f\alpha(hx) = f(hG_x) = hx = y,$$

y

$$\alpha f(hG_x) = \alpha(hx) = hG_x,$$

por lo tanto $X \cong G/G_x$. $\square$

Corolario 1.2.5 (3.19 en [6])**.** *Sea G un grupo finito. Si X es un G-conjunto finito y $x \in X$, entonces*

$$|O(x)| = [G : G_x].$$

Corolario 1.2.6. *Dos órbitas de un G-conjunto X son disjuntas o son iguales.*

Lema 1.2.7. *Cualquier G-conjunto es la unión disjunta de G-conjuntos transitivos.*

Demostración. Sea X un G-conjunto, entonces X es la unión de las órbitas de sus elementos las cuales son dinjuntas entre ellas o la misma por lo tanto X es la unión disjunta de órbitas y las órbitas son G-conjuntos transitivos. $\square$

Lema 1.2.8. *Sean H, K subgrupos de un grupo finito G, entonces G/H y G/K son isomorfos como G-conjuntos si y sólo si $K \backsim_G H$.*

Demostración.
$\Rightarrow$] Supongamos $G/H \cong G/K$, como G-conjuntos, i.e. que existe un isomorfismo de G-conjuntos

$$\varphi : G/K \longmapsto G/H,$$

el cual manda a $\varphi(K)$ en xH para algún $x \in G$. Entonces $\varphi(gK) = gxH$, en particular para $k \in K$ tenemos que $\varphi(kK) = kxH$. Por ser φ inyectiva tenemos que $kxH = xH$ esto implica $x^{-1}kx \in H$, esto pasa $\forall k \in K$, es decir $K^x \subseteq H$ por lo tanto $K \subseteq H^{x^{-1}}$. Usando el argumento anterior con φ^{-1} tenemos que $\varphi^{-1}(H) = x^{-1}H$, entonces $H^{x^{-1}} \subseteq K$. Luego $H^{x^{-1}} = K$, es decir $K \backsim_G H$.
$\Leftarrow$] Supongamos que existe $x \in G$ tal que $H^x = K$, sea $f : G/H \longmapsto G/K$ definida por $f(gH) = gxK$.
Demostraremos que f está bien definida. Sean $l, g \in G$ tales que $lH = gH$ es decir $l^{-1}g \in H$ y ya que $H^x = K$ tenemos que $x^{-1}l^{-1}gx \in K$, así que $f(gH) = gxK = lxK = f(lH)$, por lo tanto f está bien definida. Sea $v : G/K \longmapsto G/H$ definida como $v(gK) = gx^{-1}H$, la demostración de que v está bien definida es análoga a al demostración de que f está bien definida. Fácilmente vemos que f y v son morfismos de G-conjuntos. Notemos que

$$fv(gK) = f(gx^{-1}H) = gx^{-1}xK = gK \quad y \quad vf(gH) = v(gxK) = gxx^{-1}H = gH$$

es decir f y v son isomorfismos, por lo tanto $G/H \cong G/K$. $\square$

Definición 1.2.9. Sean G un grupo finito. Si $U \leqslant G$ y X un G-conjunto finito. Definimos

$$X^U = \{x \in X \mid ux = x \ \forall \ u \in U\}.$$

Lema 1.2.10. *Para $U, V \leqslant G$, tenemos que $|(G/U)^V| \neq 0$ si y sólo si $V \lesssim_G U$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} |(G/U)^V| &= |\{gU \in G/U \mid vgU = gU \ \forall v \in V\}| \\ &= |\{gU \in G/U \mid g^{-1}vgU = U \ \forall v \in V\}| \end{aligned}$$

Esto es distinto de 0 si y sólo si existe $g \in G$ tal que $g^{-1}Vg \subset U$.

$\square$

Teorema 1.2.11 (Teorema de Burnside, Toerema 2.3.2 en [1]). *Sean G un grupo finito y X, Y G-conjuntos finitos, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Los G-conjuntos X y Y son isomorfos como G-conjuntos.*

2. *Para cualquier subgrupo H de G, los conjuntos X^H y Y^H tienen la misma cardinalidad.*

Demostración.

- $1 \Rightarrow 2$. Sean X y Y G-conjuntos tales que $X \cong Y$, es decir existe un isomorfismo de G-conjuntos $f : X \longrightarrow Y$, así que para $H \leqslant G$

$$\begin{aligned} |X^H| &= |\{x \in X \mid hx = x \quad \forall\, h \in H\}| \\ &= |\{y \in Y \mid hf(y) = f(y) \quad \forall\, h \in H\}| \\ &= |\{y \in Y \mid f(hy) = f(y) \quad \forall\, h \in H\}| \\ &= |\{y \in Y \mid hy = y \quad \forall\, h \in H\}| = |Y^H|. \end{aligned}$$

- Sean X, Y G-conjuntos tales que $|X^H| = |Y^H|$ para todo $H \leqslant G$. Damos a $[S_G]$ un orden total $\preceq$ tal que $H \preceq K$ implica $|H| \leq |K|$. Si $[S_G] = \{H_1 = \{\cdot\}, ..., H_n = G\}$ con $H_i \preceq H_j$ si $i \leq j$ y recordando que todo G-conjunto es la unión disjunta de G-conjuntos transitivos podemos escribir a

$$\begin{aligned} X &\cong \bigsqcup_{H_i \in [S_G]} a_{H_i}(X) G/H_i \\ Y &\cong \bigsqcup_{H_i \in [S_G]} a_{H_i}(Y) G/H_i \end{aligned}$$

  con $a_{H_i}(x), a_{H_i}(Y) \in \mathbb{N}$, esto implica que

$$\begin{aligned} |X^H| &= \left| \left(\bigsqcup_{H_i \in [S_G]} a_{H_i}(X) G/H_i \right)^H \right| \\ &= \sum_{H_i \in [S_G]} a_{H_i}(X) |(G/H_i)^H| \\ &= \sum_{H_i \in [S_G]} a_{H_i}(Y) |(G/H_i)^H| = |Y^H| \end{aligned}$$

  por lo tanto

$$\sum_{H_i \in [S_G]} \left(a_{H_i}(X) - a_{H_i}(Y) \right) |(G/H_i)^H| = 0.$$

Si definimos la matriz $\mathbf{M} = (m(H_i, H_j))_{i,j}$ con $m(H_i, H_j) = |(G/H_j)^{H_i}|$ es decir

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m(H_1, H_1) & , m(H_1, H_2) & \dots \\ m(H_2, H_1) & , m(H_2, H_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

como H_i no es conjugado de ningún subgrupo de H_j, si $i > j$ pues $|H_i| \geqslant |H_j|$, entonces $|(G/H_j)^{H_i}| = 0$ pues $i > j$ y $m(H_i, H_i) = [N_G(H_i) : H_i] \neq 0$. Tenemos que $det(M) \neq 0$, por lo tanto M es invertible, lo que implica que $a_{H_i}(X) - a_{H_i}(Y) = 0$ para toda i, es decir $X = Y$.

□

1.3. La función de Möbius de un copo

1.3.1. Álgebras de incidencia

Los resultados clásicos de esta sección no se demostrarán pero el lector puede ver sus demostraciones en [8].

Un orden parcial en un conjunto X es una relación binaria $\leqslant$ que es reflexiva, antisimétrica, y transitiva, es decir, para cualesquiera a, b, y $c \in X$ se tiene que:

- $a \leqslant a$ (reflexividad).
- Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, entonces $a = b$ (antisimetría).
- Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces $a \leqslant c$ (transitividad).

Un conjunto con un orden parcial se denomina conjunto parcialmente ordenado o copo.

Sea P un copo, y $a, b \in P$, definimos el intervalo $[a, b]$ de P como

$$[a, b] = \{c \in P \mid c \leq b,\ a \leq c\}.$$

Ejemplo 1.3.1. Sea G un grupo, entonces el $Sub(G)$ es un copo con el orden parcial $\subseteq$.

Definición 1.3.2. P se llama localmente finito, si todo intervalo, $[a, b]$, de P es finito. Denotamos al conjunto de todos los los intervalos de P como $Int(P)$. Sea $\mathbb{K}$ un campo, si

$$f : Int(P) \longrightarrow \mathbb{K},$$

es una función, denotamos a $f([x, y])$ por $f(x, y)$.

Definición 1.3.3. Sea P un copo, una cadena C en P es un subconjunto de P tal que cualesquiera dos elementos de C son comparables, es decir para todo $X, Y \in C$, $X \leq Y$ o $Y \leq X$.

Definición 1.3.4. Sea P un copo localmente finito. El álgebra de incidencia $I(P, \mathbb{K})$ (lo denotaré $I(P)$ para abreviar) de P sobre $\mathbb{K}$, es la $\mathbb{K}$-álgebra de todas las funciones

$$f : Int(P) \longrightarrow \mathbb{K},$$

donde la multiplicación (convolución) está definida por

$$fg(s,u) = \sum_{s \leq t \leq u} f(s,t)g(t,u).$$

La suma es finita (y por lo tanto fg está bien definido), ya que P es localmente finito. Es fácil ver que $I(P)$ es un álgebra asociativa con la identidad, denotada δ ó 1, definida por

$$\delta(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq t \\ 1 & \text{si } s = t. \end{cases}$$

Definición 1.3.5. La función zeta ζ de un álgebra de incidencia

$$\zeta : I(P) \longrightarrow \mathbb{K},$$

está definida como

$$\zeta(s,t) = 1 \quad \text{para todo } s \leq t.$$

Para $k \in \mathbb{N}$, $\zeta^k(s,t)$ nos indica el número de cadenas $s = x_0 \leq x_1 \cdots \leq x_k = t$.

La función ζ es invertible, y su inversa se llama la función de Möbius de P, la denotaremos por μ. Puede verse que

$$\mu = [1 - (\zeta - 1) + (\zeta - 1)^2 - ...].$$

La relación $\mu\zeta = \delta$ es equivalente a

$$\mu(s,s) = 1 \text{ para todo } s \in P,$$
$$\mu(s,u) = -\sum_{s \leq t < u} \mu(s,t) \text{ para todo } s < u \text{ en } P$$
$$\sum_{s \leq t \leq u} \mu(s,t) = 0 \text{ para todo } s < u \text{ en } P.$$

Sea P un copo, definimos a $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$ como los elementos tales que:

- $s \leqslant \widehat{1}$ para todo $s \in P$.
- $\widehat{0} \leqslant s$ para todo $s \in P$.

Teorema 1.3.6 (teorema de Philip Hall, Proposición 3.8.5 en [8]). *Sea P un copo localmente finito, y sea $\widehat{P}$ la unión de P con $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$. Sea c_i el número de cadenas $\widehat{0} = s_0 < s_1 < ... < s_i = \widehat{1}$, de longitud i, entre $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$, entonces*

$$\mu(\widehat{P}) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + ...$$

□

Corolario 1.3.7. *Sea P un copo localmente finito, y $s, u \in P$ tales que $s < u$. Sea c_i el número de cadenas $s = s_0 < s_1 < ... < s_i = u$, de longitud i, que inician en s y terminan en u ($c_0 = 0$, y $c_1 = 1$), entonces*

$$\mu(s, u) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + ...$$

□

1.4. Anillo de Burnside

Definición 1.4.1. Dado un grupo finito G, el anillo de Burnside de G, denotado por $B(G)$, se define como el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de G-conjuntos finitos módulo el subgrupo

$$\langle [X \sqcup Y] - [X] - [Y] \mid X, Y \ G\text{-conjuntos finitos} \rangle,$$

donde $[X]$ denota la clase de isomorfismo de X. El grupo $B(G)$ tiene estructura multiplicativa dada por

$$[X] \cdot [Y] = [X \times Y],$$

y a los elementos de $B(G)$ les llamaremos G-conjuntos virtuales.

Observación 1.4.2. El producto de $B(G)$ está bien definido.

Demostración. Sean X, X', Y y Y' G-conjuntos, tales que $X \cong X'$ y $Y \cong Y'$ como G-conjuntos, esto implica que existen morfismos de G-conjuntos biyectivos $f : Y' \longrightarrow Y$ y $g : X' \longrightarrow X$. Definimos a

$$\begin{aligned} h : X' \times Y' &\longrightarrow X \times Y \\ (x, y) &\longmapsto (f(x), g(y)), \end{aligned}$$

h es un morfismo de G-conjuntos pues f y g lo son y h es biyectivo ya que f y g son biyectivos. Por lo tanto $[X \times Y] = [X' \times Y']$ □

Lema 1.4.3. *$B(G)$ es un anillo conmutativo con las operaciones descritas en la definición previa.*

Demostración.
Por definición $(B(G), +)$ es un grupo abeliano.

- La operación $\cdot$ es conmutativa. Sean X y Y G-conjuntos, entonces $X \times Y \cong Y \times X$, pues

$$\begin{aligned} f : X \times Y &\longrightarrow Y \times X \\ (x, y) &\longmapsto (y, x) \end{aligned}$$

  es un isomorfismo de G-conjuntos.

- La operación $\cdot$ es asociativa, ya que para X, Y *y* Z G-conjuntos

$$(X \times Y) \times Z \cong X \times Y \times Z \cong X \times (Y \times Z)$$

  es decir, $[X] \cdot ([Y] \cdot [Z]) = ([X] \cdot [Y]) \cdot [Z]$.

- La operación $\cdot$ es distributiva respecto de $+$. Sean A_1, A_2, A_3 G-conjuntos entonces

$$\begin{aligned} A_3 \times (A_1 \sqcup A_2) &= A_3 \times ((A_1, 1) \cup (A_2, 2)) \\ &\cong (A_3 \times (A_1, 1)) \cup (A_3 \times (A_2, 2)) \\ &\cong (A_3 \times A_1) \sqcup (A_3 \times A_2), \end{aligned}$$

  es decir $[A_3] \cdot ([A_1] + [A_2]) = ([A_3] \cdot [A_1]) + ([A_3] \cdot [A_2])$.
  Ya que para cuales quiera G-conjuntos X y Y, $X \times Y \cong Y \times X$ como G-conjuntos. Tenemos que

$$(A_1 \sqcup A_2) \times A_3 \cong (A_1 \times A_3) \sqcup (A_2 \times A_3),$$

  lo que implica que $([A_1] + [A_2]) \cdot [A_3] = ([A_1] \cdot [A_3]) + ([A_2] \cdot [A_3])$.

- Sean X un G-conjunto, y $1_{B(G)} = \{\cdot\}$, $X \times 1_{B(G)} \cong X$ como G-conjuntos, ya que el mapeo

$$\begin{aligned} X \times 1_{B(G)} &\longrightarrow X \\ (x, \cdot) &\mapsto x \end{aligned}$$

  es un isomorfismo.

Por lo tanto $B(G)$ es un anillo conmutativo con unidad multiplicativa $[1_{B(G)}] = [\{\cdot\}]$. $\square$

Lema 1.4.4. *Sea $x \in B(G)$, a x lo podemos expresar de maneara única como combinación lineal de las clases de isomorfismo de los G-conjuntos transitivos:*

$$x = \sum_{H \in [S_G]} a_H(X)[G/H]$$

con $a_H(X) \in \mathbb{Z}$ $\forall H \leqslant G$.

Demostración. Sean A y B G-conjuntos finitos, tales que $[A] = [B]$ en $B(G)$, o bien

$$[A] - [B] \in \langle [X \sqcup Y] - [X] - [Y] \mid X, Y \text{ son } G\text{-conjuntos}\rangle,$$

esto pasa si y sólo si existen sucesiones de G-conjuntos finitos X_i, Y_i para $1 \leq i \leq m$, y Z_j, T_j, tales que

$$A \sqcup (\bigsqcup_{i=1}^{m} X_i) \sqcup \big(\bigsqcup_{i=1}^{m} Y_i\big) \cong B \sqcup \big(\bigsqcup_{i=1}^{m}(X_i \sqcup Y_i)\big)$$

lo que implica que

$$[A] + (\sum_{i=1}^{m}[X_i]\big) + \big(\sum_{i=1}^{m}[Y_i]\big)$$

es igual a

$$[B] + \big(\sum_{i=1}^{m}[X_i \sqcup Y_i]\big)$$

con lo cual existe un G-conjunto C, tal que $A \sqcup C \cong B \sqcup C$. Por el Teorema 1.2.11,

$$|(A \sqcup C)^H| = |(B \sqcup C)^H| \qquad \text{para todo } H \leqslant G.$$

Sea H un subgrupo de G

$$\begin{aligned} |(A \sqcup C)^H| &= |\{x \in (A \sqcup C) \mid hx = x \ \forall\ h \in H\}| \\ &= |\{x \in A \mid hx = x \ \forall\ h \in H\}| + |\{x \in C \mid hx = x \ \forall\ h \in H\}| \\ &= |A^H| + |C^H|. \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos que $|(B \sqcup C)^H| = |B^H| + |C^H|$, por lo tanto $|A^H| = |B^H|$, el Teorema 1.2.11 implica que $A \cong B$.

De los lemas 1.2.7, y 1.2.4 se sigue que todo G-conjunto X, se puede expresar de manera única salvo isomorfismos como

$$X = \bigsqcup_{H \in [S_G]} a_H(X)[G/H], \qquad \text{con } a_H(X) \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto $B(G)$ es un $\mathbb{Z}-$módulo libre con base los elementos $[G/H]$, con $H \in [S_G]$.

$\square$

Observación 1.4.5.

- En $B(G)$, el elemento neutro para la suma es
$$0_{B(G)} = [\emptyset].$$
- Para todo subgrupo U de G, existe una función que llamaremos la marca de U
$$\begin{aligned}\varphi_U : \{G\text{-conjuntos finitos}\} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ X &\mapsto |X^U|.\end{aligned}$$
Esta función la podemos extender linealmente a los elementos de $B(G)$, lo que da un homomorfismo de anillos
$$\varphi_U : B(G) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$
- Sea X un G-conjunto, si 1 es el subgrupo trivial de G, entonces
$$\varphi_1(X) = |X|.$$

Lema 1.4.6. *Para $U, V \leqslant G$, tenemos que $\varphi_V(G/U) \neq 0$ si y solo si $V \lesssim_G U$.*

Demostración. Es inmediata del Lema 1.2.10 □

Lema 1.4.7. *Sean $x, x' \in B(G)$. Entonces $\varphi_U(x) = \varphi_U(x')$ para todo $U \leqslant G$ si y sólo si $x = x'$.*

Demostración.

- [$\Leftarrow$ Sean $U \leqslant G$, y $x, y \in B(G)$ tales que $x = y$, entonces $\varphi_U(x) = \varphi_U(y)$ pues φ_U es función.
- $\Rightarrow$] Sean $x, y \in B(G)$ tales que $\varphi_U(x) = \varphi_U(y)$ para todo U subgrupo de G. Por el Lema 1.4.4,
$$x = \sum_{H \in [S_G]} a_i(x)[G/H] \qquad y = \sum_{H \in [S_G]} a_i(y)[G/H].$$
Podemos ordenar a los subgrupos relacionados a estos G-conjuntos transitivos con el orden $\preceq$, definido en la demostración del Teorema 1.2.11, $H_i \preceq H_j$ si $i \leq j$, así que
$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i(x)[G/H_i] \qquad y = \sum_{i=1}^{m} a_i(y)[G/H_i].$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\varphi_{H_m}(x) &= \varphi_{H_m}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i(x)[G/H_i]\right)\\ &= \varphi_{H_m}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i(y)[G/H_i]\right) = \varphi_{H_m}(y).\end{aligned}$$

Sabemos que $\varphi_{H_k}(G/H_j) \neq 0$ si y sólo si $H_k \lesssim_G H_j$, así que $\varphi_{H_k}(G/H_j) = 0$ para toda $j < k$, por lo tanto

$$\varphi_{H_m}(x) = a_m(x)|(G/H_m)^{H_m}| = a_m(y)|(G/H_m)^{H_m}| = \varphi_{H_m}(y),$$

y ya que $|(G/H_m)^{H_m}| \neq 0$, entonces $a_m(x) = a_m(x)$. Análogamente obtenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_{H_{m-1}}(x) &= a_{m-1}(x)|(G/H_{m-1})^{H_{m-1}}| + a_m(x)|(G/H_m)^{H_{m-1}}|\\ &= a_{m-1}(y)|(G/H_{m-1})^{H_{m-1}}| + a_m(y)|(G/H_m)^{H_{m-1}}| = \varphi_{H_{m-1}}(y)\end{aligned}$$

de aquí obtenemos que $a_{m-1}(x) = a_{m-1}(y)$, de este proceso inductivo podemos concluir que $x = y$.

□

Teorema 1.4.8. *Sea G un grupo finito, y sean $U, V \leqslant G$, entonces $\varphi_U = \varphi_V$ si y sólo si $U \sim_G V$.*

Demostración.

- ⇒] Sean U, V subgrupos de G, tales que $\varphi_U = \varphi_V$. Así que

$$\varphi_U(G/V) = \varphi_V(G/V) = |(G/V)^V| \neq 0$$

  esto implica que $U \lesssim_G V$, análogamente obtenemos que $V \lesssim_G U$. Por lo tanto $U \sim_G V$.

- [⇐ Sean U, V subgrupos de G, tales que $U \sim_G V$. Por lo tanto existe $k \in G$ tal que $k^{-1}Uk = V$. Sea H un subgrupo de G,

$$\begin{aligned}\varphi_V([G/H]) = |(G/H)^V| &= |\{gH \in G/H \mid vgH = gH \ \forall v \in V\}|\\ &= |\{gH \in G/H \mid k^{-1}ukgH = gH \ \forall u \in U\}|\\ &= |\{gH \in G/H \mid ukgH = kgH \ \forall u \in U\}|\\ &= |\{kgH \in G/H \mid ukgH = kgH \ \forall u \in U\}| = |(G/H)^U|\\ &= \varphi_U([G/H]).\end{aligned}$$

Sea $x \in B(G)$, es decir $x = \sum_{H \in [S_G]} a_H(x)[G/H]$, con $a_H(x) \in \mathbb{Z}$ así que

$$\begin{aligned}
\varphi_U(x) = \varphi_U\Bigg(\sum_{H \in [S_G]} a_H(x)[G/H]\Bigg) &= \sum_{H \in [S_G]} a_H(x)\varphi_U([G/H]) \\
&= \sum_{H \in [S_G]} a_H(x)\varphi_V([G/H]) \ = \varphi_V\Bigg(\sum_{H \in [S_G]} a_H(x)[G/H]\Bigg) \\
&= \varphi_V(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi_U = \varphi_V$.

$\square$

Lema 1.4.9. *Sean G un grupo finito y $V, U \leqslant G$. Entonces*

$$\varphi_V(G/U) = [N_G(U) : U] \cdot |\{U' \leqslant G \mid V \leqslant U' \sim_G U\}|.$$

Demostración. Recordemos que

$$N_G(U) = \{g \in G \mid g^{-1}Ug = U\}.$$

Notemos que $aUa^{-1} = bUb^{-1}$ si y sólo si $b^{-1}a \in N_G(U)$. Por definición

$$\varphi_V(G/U) = |\{gU \in (G/U) \mid v(gU) = gU \ \forall v \in V\}|$$

En lugar de tomar un representante de la clase gU, tomamos todos lo elementos de esta clase, lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}
\frac{|\{g \in G \mid v(gU) = gU \ \forall v \in V\}|}{|U|} &= \frac{|\{g \in G \mid (g^{-1}vg)U = U \ \forall v \in V\}|}{|U|} \\
&= \frac{|\{g \in G \mid (g^{-1}vg) \in U \ \forall v \in V\}|}{|U|} \\
&= \frac{|\{g \in G \mid (g^{-1}Vg) \leqslant U\}|}{|U|} \\
&= \frac{|\{g \in G \mid V \leqslant gUg^{-1}\}|}{|U|}.
\end{aligned}$$

Para no repetir subgrupos conjugados a U, solo nos tomamos un representante por cada clase lateral de $G/N_G(U)$, y ya que cada clase lateral tiene $|N_G(U)|$ elementos, obtenemos que lo anterior, es igual a

$$\frac{|\{U' \leqslant G \mid V \leqslant U' \sim_G U\}| \cdot |N_G(U)|}{|U|} = |\{U' \leqslant G \mid V \leqslant U' \sim_G U\}| \cdot [N_G(U) : U].$$

$\square$

Lema 1.4.10. *Sean $x \in B(G)$, $H \in [S_G]$, escribimos*

$$x = \sum_{K \in [S_G]} a_K(x)[G/K]$$

con $a_K(x) \in \mathbb{Z}$. Entonces H es maximal con $\varphi_H(x) \neq 0$ si y sólo si $a_H(x) \neq 0$ y H es maximal con esta propiedad. En este caso

$$\varphi_H(x) = a_H(x)\varphi_H(G/H) = a_H(x)[N_G(H) : H].$$

Demostración.

- Supongamos que $H \in [S_G]$ es maximal tal que $\varphi_H(x) \neq 0$, entonces

  $$\varphi_H(x) = \sum_{K \in [S_G]} a_K(x)\varphi_H(G/K) \neq 0$$

  pero sabemos que $\varphi_H(G/K) \neq 0$ si y sólo si $H \lesssim_G K$, de lo cual se sigue

  $$\varphi_H(x) = \sum_{\substack{K \in [S_G] \\ H \lesssim_G K}} a_K(x)|(G/K)^H| \neq 0.$$

  Por lo tanto existe $K \leqslant G$ tal que $a_K(x) \neq 0$, sea $K_0 \in [S_G]$ maximal tal que $a_{K_0}(x) \neq 0$ y $H \leqslant K_0$, entonces

  $$\varphi_{K_0}(x) = \sum_{K \in [S_G]} a_K(x)|(G/K)^{K_0}|$$

  y ya que para todo $K \in [S_G]$, tal que $K_0 <_G K$, implica que $a_K(x) = 0$, entonces

  $$\varphi_{K_0}(x) = a_{K_0}(x)|(G/K_0)^{K_0}| = a_{K_0}(x)[N_G(K_0) : K_0] \neq 0,$$

  por lo tanto $K_0 = H$, y $\varphi_H(x) = a_H(x)[N_G(H) : H]$.

- Sea $H \in [S_G]$, tal que $a_H(x) \neq 0$ y maximal con esta propiedad, entonces

  $$\varphi_H(x) = \sum_{K \in [S_G]} a_K(x)\varphi_H(G/K) = \sum_{K \in [S_G]} a_K(x)|(G/K)^H|$$

  y ya que, $\varphi_H(G/K) \neq 0$ si y sólo si $H \lesssim_G K$, obtenemos que

  $$\varphi_H(x) = \sum_{\substack{K \in [S_G] \\ H \lesssim_G K}} a_K(x)|(G/K)^H| = a_H(x)|(G/H)^H| = a_H(x)[N_G(H) : H] \neq 0.$$

Sea $H_0 \in [S_G]$, tal que $H <_G H_0$, entonces

$$\varphi_{H_0}(x) = \sum_{\substack{K \in [S_G] \\ H_0 \lesssim_G K}} a_K(x)|(G/K)^{H_0}| = \sum_{\substack{K \in [S_G] \\ H_0 \lesssim_G K}} 0|(G/K)^{H_0}| = 0.$$

por lo tanto H es maximal con la propiedad $\varphi_H(x) \neq 0$.

$\square$

Lema 1.4.11. *Sea G un p-grupo finito, sea $x \in B(G)$. Si $x = \sum_{U \in [S_G]} a_U(x)[G/U]$, entonces*

$$\varphi_1(x) = \sum_{U \in [S_G]} a_U(x)[G : U] \ \equiv \ a_G(x) = \varphi_G(x) \mod p.$$

Demostración. Que G sea un p-grupo, nos indica que $|G| = p^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, y que todo subgrupo U de G tiene $|U| = p^n$ para $n \leqslant k$. De aquí concluimos $[G : U] \equiv 0 \mod p$ si $U < G$, y ya que $[G : G] = 1$ tenemos que $[G : G] \equiv 1 \mod p$, así que

$$\varphi_1(x) = \sum_{U \in [S_G]} a_U(x)\varphi_1(G/U) = \sum_{U \in [S_G]} a_U(x)[G : U] \equiv a_G(x) \mod p.$$

Además, G no es conjugado de ningún subgrupo de U para todo $U < G$, luego $\varphi_G(G/U) = 0$, por lo tanto

$$\varphi_G(x) = \sum_{U \in [S_G]} a_U(x)\varphi_G(G/U) = a_G(x)|1| = a_G(x)$$

$$\therefore \varphi_1(x) = \sum_{U \in [S_G]} a_U(x)[G : U] \equiv a_G(x) = \varphi_G(x) \mod p.$$

$\square$

Lema 1.4.12. *Sea G un grupo finito. Sean V un p-subgrupo de G y U un subgrupo de G, entonces*

$$\varphi_V([G/U]) \equiv [G : U] \mod p.$$

Si $([G : U], p) = 1$, tenemos que $\varphi_V([G/U]$ no es congruente a 0 módulo p y por lo tanto $V \lesssim_G U$.

Demostración. Ya que G/U es un G-conjunto, también es un V-conjunto con la acción

$$\begin{aligned} V \times G/U &\longmapsto G/U \\ (v, gU) &\mapsto vgU. \end{aligned}$$

Por el Lema 1.4.11 tenemos que

$$\varphi_V(G/U) = |(G/U)^V| \equiv |(G/U)^1| = [G:U] \bmod p.$$

Si $([G:U]\ ,\ p) = 1$, tenemos $[G:U] \not\equiv 0 \bmod p$, por lo tanto $\varphi_V(G/U) \neq 0$, lo que implica, $V \lesssim_G U$. $\square$

Con la teoría desarrollada hasta el momento es relativamente fácil demostrar el 2^{do} Teorema de Sylow

Corolario 1.4.13 (2^{do} Teorema de Sylow)**.** *Sea G un grupo finito si existen p-subgrupos de Sylow en G, son todos ellos conjugados entre sí y cada p-subgrupo de G debe ser subconjugado en G de uno de ellos.*

Demostración. Sean V y H p-subgrupos de Sylow de G, sabemos que $([G:H], p) = 1$ y $([G:V], p) = 1$. Entonces por el lema anterior $V \lesssim_G H$ y $H \lesssim_G V$, por lo tanto $H \sim_G V$. Sean W un p-subgrupo de G, y H un p-subgrupo de Sylow. Por definición tenemos que $([G:H], p) = 1$. Entonces por el lema anterior, $W \lesssim_G H$. $\square$

1.5. Operaciones del anillo de Burnside

En esta sección veremos algunas de las operaciones más comunes entre anillos de Burnside. Sea G un grupo finito. Si X es un G-conjunto y H es un subgrupo de G, se puede ver a X como un H-conjunto a través de la restricción de la acción de G. El conjunto X visto como H-conjunto es denotado por $Res^G_H X$.

Observación 1.5.1. Sean X y Y G-conjuntos isomorfos, entonces $Res^G_H X$ y $Res^G_H Y$ son isomorfos como H-conjuntos.

Definición 1.5.2. Sea Res^G_H la función Restricción definida por

$$\begin{aligned} Res^G_H : B(G) &\longrightarrow B(H) \\ [X] &\longmapsto [Res^G_H X], \end{aligned}$$

para X G-conjunto, la cual se extiende por linealidad.

Se ve fácil que la función Res_H^G es un morfismo de anillos. Sea Z un H-conjunto, el G-conjunto inducido por Z el cual denotamos por $Ind_H^G Z$, es definido como $G \times_H Z$, i.e. el cociente del producto cartesiano $G \times X$ por la acción derecha de H dada por $(g, x) \cdot h = (gh, h^{-1}x)$ para $g \in G, h \in H, x \in Z$. Notemos que Ind_H^G es un G-conjunto con acción izquierda inducida por la acción izquierda de G dada por $g \cdot (g', x) = (gg', x)$.

Lema 1.5.3. *Sea H subgrupo de G. Si Z es un H-conjunto isomorfo a H/K para algún K subgrupo de H, entonces $Ind_H^G Z$ es isomorfo a G/K.*

Demostración. Sea $\pi : Z \longrightarrow H/K$ un isomorfismo de H-conjuntos. Definamos a

$$\begin{aligned} \overline{\pi} : Ind_H^G Z &\longrightarrow G/K \\ [g, x] &\longmapsto g\pi(x). \end{aligned}$$

Primero veamos que $\overline{\pi}$ está bien definida. Sea $[g', x']$ otro representante de la clase $[g, x]$, entonces existe $h \in H$ tal que $(g', x') = (gh, h^{-1}x)$. Así que

$$\begin{aligned} \overline{\pi}([g', x']) &= g'\pi(x') = gh\pi(h^{-1}x) \\ &= g\pi(hh^{-1}x) = g\pi(x) \\ &= \overline{\pi}([g, x]). \end{aligned}$$

por lo tanto $\overline{\pi}$ está bien definida.

Ahora demostremos que $\overline{\pi}$ es un morfismo de G-conjuntos. Sean $l \in G$ y $[g, x] \in Ind_H^G Z$, entonces

$$l \cdot \overline{\pi}([g, x]) = lg\pi(x) = \overline{\pi}([lg, x]) = \overline{\pi}(l \cdot [g, x])$$

por lo tanto $\overline{\pi}$ es un morfismo de G-conjuntos.
Definamos a

$$\begin{aligned} \overline{\pi}^{-1} : G/K &\longrightarrow Ind_H^G Z \\ gK &\longmapsto [g, \pi^{-1}(K)]. \end{aligned}$$

donde π^{-1} es la inversa de π.

Primero demostremos que $\overline{\pi}^{-1}$ está bien definida. Sea tK otro representante de la clase gK, entonces existe $k \in K$ tal que $t = gk$, así que

$$\begin{aligned} \overline{\pi}^{-1}(tK) &= [t, \pi^{-1}(K)] = [gk, \pi^{-1}(K)] = [g, k\pi^{-1}(K)] \\ &= [g, \pi^{-1}(kK)] = [g, \pi^{-1}(K)] \\ &= \overline{\pi}^{-1}(gK) \end{aligned}$$

por lo tanto la función $\overline{\pi}^{-1}$ está bien definida.

Ahora demostremos que $\overline{\pi}^{-1}$ es un morfismo de G-conjuntos. Sean $t \in G$ y $gH \in G/K$, entonces

$$t \cdot \overline{\pi}^{-1}(gK) = t \cdot [g, \pi^{-1}(K)] = [tg, \pi^{-1}(K)] = \overline{\pi}^{-1}(tgK)$$

así pues $\overline{\pi}^{-1}$ es un morfismo de G-conjuntos. Sea $[g,x] \in Ind_H^G Z$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}^{-1} \circ \overline{\pi}([g,x]) &= \overline{\pi}^{-1}(g(\pi(x))) = \overline{\pi}^{-1}(g(hK))) \\
&= \overline{\pi}^{-1}(ghK) = [gh, \pi^{-1}(K)] \\
&= [g, h\pi^{-1}(K)] = [g, \pi^{-1}(hK)] \\
&= [g,x],
\end{aligned}$$

donde $\pi(x) = hK$ por lo tanto $\overline{\pi} \circ \overline{\pi} = Id_{Ind_H^G Z}$.

Sea $gK \in G/K$, entonces

$$\overline{\pi} \circ \overline{\pi}^{-1}(gK) = \overline{\pi}([g, \pi^{-1}(K)]) = g\pi(\pi^{-1}(K)) = gK,$$

por lo tanto $\overline{\pi} \circ \overline{\pi}^{-1} = Id_{G/K}$. Por ende, G/K es isomorfo a $Ind_H^G Z$ como G-conjuntos. $\square$

Corolario 1.5.4. *Sean V y K subgrupos de H, tales que H/K y H/V son isomorfos como como H-conjuntos, entonces $Ind_H^G(H/K)$ y $Ind_H^G(H/V)$ son isomorfos como G-conjuntos.*

Lema 1.5.5. *Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G. La función Inducción definida por*

$$\begin{aligned}
Ind_H^G : B(H) &\longrightarrow B(G) \\
[X] &\longmapsto [G \times_H X]
\end{aligned}$$

para X G-conjunto, la cual se extiende por linealidad, es un homomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Sean X_1 y X_2 H-conjuntos, es suficiente demostrar que

$$Ind_H^G(X_1 \sqcup X_2) = Ind_H^G(X_1) \sqcup Ind_H^G(X_2).$$

Por definición

$$Ind_H^G(X_1 \sqcup X_2) = \{[g, (x_i, i)] \mid g \in G, x_i \in X_i, i = 1, 2\}$$

e

$$Ind_H^G(X_1) \sqcup Ind_H^G(X_2) = \{([g, x_i], i) \mid g \in G,\ x_i \in X_i, i = 1, 2\}.$$

Sólo tenemos que considerar la aplicación

$$\begin{aligned}\pi : Ind_H^G(X_1) \sqcup Ind_H^G(X_2) &\longrightarrow Ind_H^G(X_1 \sqcup X_2)\\ ([g, x_i], i) &\longmapsto [g, (x_i, i)]\end{aligned}$$

la cual claramente es un isomorfismo de G-conjuntos.

□

Sea H un subgrupo de G y x un elemento de G. Si Z es un H-conjunto, el grupo ${}^xH$ actua en Z con la acción

$$\begin{aligned}{}^xH \times Z &\longrightarrow Z\\ ({}^xh, z) &\longmapsto hz.\end{aligned}$$

A Z visto como ${}^xH$-conjunto se le denota por ${}^xZ$.

Sean H y K subgrupos de G y x un elemento cualquiera de G, la $(K\text{-}H)$-clase lateral doble de x es el subconjunto de G

$$KxH = \{kxh \mid h \in H,\ k \in K\}.$$

Denotaremos por $K \setminus G/H$ al conjunto de todas las $(K\text{-}H)$-clases laterales dobles de G.

Lema 1.5.6 (Fórmula de Mackey). *Sea G un grupo finito, y H, K subgrupos de G. Si Z es un H-conjunto, entonces*

$$Res_K^G Ind_H^G Z \cong \bigsqcup_{x \in [K \setminus G/H]} Ind_{K \cap {}^xH}^K {}^xRes_{K^x \cap H}^H Z$$

como K-conjuntos, donde $[K \setminus G/H]$ denota un conjunto de representante de $K \setminus G/H$.

Demostración. Sea $S = [K \setminus G/H]$ y sea

$$\gamma : Res_K^G Ind_H^G Z \longrightarrow \bigsqcup_{x \in S} Ind_{K \cap {}^xH}^K {}^xRes_{K^x \cap H}^H Z,$$

la cual está definida de la siguiente manera: Sea $[g, z] \in Res_k^G Ind_H^G Z$, donde g se puede escribir de manera única como $g = kxh$ con $k \in K$, $x \in S$, $h \in H$, entonces

$$\gamma([g, z]) = [k, hz]_x.$$

Veamos que γ está bien definida. Sean $[g, z]$ y $[g', z']$ elementos de $Res_k^G Ind_H^G Z$ tales que $[g, z] = [g', z']$, por lo tanto existe un $h' \in H$, tal que $(g', z') = (gh', {h'}^{-1}z)$. Si

$$\gamma([g, z]) = [k, hz]_x$$

es decir $g = kxh$, entonces $g' = kxhh'$, así que

$$\gamma([g', z']) = [k, hh'z']_x = [k, hh'{h'}^{-1}z]_x = [k, hz]_x = \gamma([g, z]).$$

Ahora veamos que es un morfismo de K-conjuntos. Sea $k' \in K$, entonces

$$\gamma(k'[g, z]) = \gamma[k'g, z] = [k'k, hz]_x = k'[k, hz]_x = k'\gamma([g, z]).$$

Por lo tanto, sí es un morfismo de K-conjuntos.

Ahora consideremos

$$\psi : \bigsqcup_{x\in S} Ind^K_{K\cap {}^xH}\, {}^xRes^H_{K^x\cap H} Z \longrightarrow Res^G_k Ind^G_H Z$$
$$[k, {}^xz]_x \longmapsto [kx, z].$$

Primero veamos que está bien definida, sea $[k',{}^x z']_x$ otro representante de la clase $[k, {}^xz]_x$, es decir existe ${}^xh \in K \cap {}^xH$ tal que

$$(k', {}^xz') = (k, {}^xz)^x h = (k \cdot {}^xh, ({}^xh^{-1})^x z) = (k \cdot {}^xh, {}^x(h^{-1}z)),$$

por lo tanto

$$\psi([k', {}^xz']_x) = [k'x, z'] = [k({}^xh)x, h^{-1}z] = [kxh, h^{-1}z] = [kx, z] = \psi([k, {}^xz]_x)$$

por lo tanto está bien definida. Ahora veamos que es un morfismo de K-conjuntos. Sea $l \in K$, entonces

$$\psi(l[k, {}^xz]_x) = \psi([lk, {}^xz]_x) = [lkx, z] = l[kx, z] = l\psi([k, {}^xz])$$

en consecuencia ψ es un morfismo de K-conjuntos. Sea $[g, z] \in Res^G_K Ind^G_H Z$ con $g = kxh$ para algún $k \in K$, $x \in S$ y $h \in H$, entonces

$$\psi \circ \gamma([g, z]) = \psi([k, hz]_x) = [kx, hz] = [kxhh^{-1}, hz] = [kxh, z] = [g, z]$$

por lo tanto $\psi \circ \gamma = Id_{Res^G_K Ind^G_H Z}$. Sea $[k, z]_x \in \bigsqcup_{x\in S} Ind^K_{K\cap {}^xH}\, {}^xRes^H_{K^x\cap H} Z$, entonces

$$\gamma \circ \psi([k, z]_x) = \gamma([kx, z]) = [k, z]_x$$

por lo tanto $\gamma \circ \psi = Id_{\bigsqcup_{x\in S} Ind^K_{K\cap {}^xH}\, {}^xRes^H_{K^x\cap H} Z}$, es decir

$$Res^G_k Ind^G_H Z \cong \bigsqcup_{x\in[K\backslash G/H]} Ind^K_{K\cap {}^xH}\, {}^xRes^H_{K^x\cap H} Z$$

como K-conjuntos. $\square$

Lema 1.5.7 (Identidad de Frobenius). *Sea G un grupo y H subgrupo de G. Si X es un G-conjunto y Z un H-conjunto, entonces existe un isomorfismo de G-conjuntos*

$$X \times Ind_H^G Z \cong Ind_H^G((Res_H^G X) \times Z)$$

y en particular para cualquier G-conjunto X, existe in isomorfismo de G-conjuntos

$$X \times (G/H) \cong Ind_H^G Res_H^G X.$$

Demostración. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \gamma : X \times Ind_H^G Z &\longrightarrow Ind_H^G((Res_H^G X) \times Z) \\ (x, [g, z]) &\longmapsto [g, (g^{-1}x, z)]. \end{aligned}$$

Primero veamos que γ está bien definida. Sea $[g', z']$ otro representante de la clase $[g, z]$, entonces existe $h \in H$ tal que

$$(g', z') = (g, z)h = (gh, h^{-1}z).$$

Entonces

$$\gamma((x, [g', z'])) = [g', (g'^{-1}x, z)] = [gh, (h^{-1}g^{-1}x, h^{-1}z)] = [gh, h^{-1}(g^{-1}x, z)] = [g, (g^{-1}x, z)],$$

por lo tanto γ está bien definida. Ahora veamos que es un morfismo de G-conjuntos. Sea $a \in G$ y $(x, [g, z]) \in X \times Ind_H^G Z$, entonces

$$\begin{aligned} \gamma(a(x, [g, z])) &= \gamma((ax, a[g, z])) = [ag, (g^{-1}a^{-1}ax, z)] \\ &= [ag, (g^{-1}x, z)] = a[g, (g^{-1}x, z] \\ &= a\gamma((x, [g, z])) \end{aligned}$$

de tal forma que γ es un morfismo de G-conjuntos.
Ahora consideremos la función

$$\begin{aligned} \psi : Ind_H^G((Res_H^G X) \times Z) &\longrightarrow X \times Ind_H^G Z \\ [g, (x, z)] &\longmapsto (gx, [g, z]). \end{aligned}$$

Primero veamos que está bien definida. Sea $[g', (x', z')]$ otro representante de la clase $[g, (x, z)]$, por lo tanto existe $h \in H$ tal que

$$(g', (x', z')) = (g, (x, z))h = (gh, h^{-1}(x, z)) = (gh, (h^{-1}x, h^{-1}z))$$

Así que

$$\begin{aligned}\psi([g',(x',z')]) &= (g'x',[g',z']) = (ghh^{-1}x,[gh,h^{-1}z])\\ &= (gx,[g,z])\\ &= \psi([g,(x,z)])\end{aligned}$$

por lo tanto está bien definida. Ahora veamos que es un morfismo de G-conjuntos. Sea $a \in G$ y $[g,(x,z')] \in Ind_H^G((Res_H^G X) \times Z$, entonces

$$\begin{aligned}\psi(a[g,(x,z)]) &= \psi([ag,(x,z)]) = (agx,[ag,z])\\ &= a(gx,[gz])\\ &= a\psi([g,(x,z)])\end{aligned}$$

por lo tanto es un morfismo de G-conjuntos.
Notemos que γ es la inversa de ψ. Sea $(x,[g,z]) \in X \times Ind_H^G Z$ entonces

$$\psi \circ \gamma((x,[g,z])) = \psi([g,(g^{-1}x,z)]) = (gg^{-1}x,[g,z]) = (x,[g,z])$$

por lo tanto, $\psi \circ \gamma = Id_{X \times Ind_H^G Z}$. Por otra parte, dado $[g,(x,z)] \in Ind_H^G((Res_H^G X) \times Z)$, se tiene

$$\gamma \circ \psi([g,(x,z)]) = \gamma((gx,[g,z])) = [g,(g^{-1}gx,z)] = [g,(x,z)],$$

por lo tanto, $\gamma \circ \psi = Id_{Ind_H^G((Res_H^G X) \times Z)}$, lo que quiere decir que

$$X \times Ind_H^G Z \cong Ind_H^G((Res_H^G X) \times Z).$$

En particular

$$X \times (G/H) \cong Ind_H^G Res_H^G X$$

como G-conjuntos. $\square$

Sea N un subgrupo normal de G. Si X un G/N-conjunto, podemos ver a X como un G-conjunto con la acción

$$\begin{aligned}G \times X &\longrightarrow X\\ (a,x) &\longmapsto aNx.\end{aligned}$$

Denotamos por $Inf_{G/N}^G X$ a X visto como G-conjunto.

Lema 1.5.8. *Sea $Inf_{G/N}^G$ la función Inflación definida por*

$$\begin{aligned} Inf_{G/N}^G : B(G/N) &\longrightarrow B(G) \\ [X] &\longmapsto [Inf_{G/N}^G X] \end{aligned}$$

para X G/N-conjunto, la cual se extiende por linealidad. Entonces $Inf_{G/N}^G$ es un morfismo de anillos.

Demostración. Sean X_1 y X_2 G/N-conjuntos basta demostrar que:

- $Inf_{G/N}^G(X_1 \sqcup X_2) \cong Inf_{G/N}^G X_1 \sqcup Inf_{G/N}^G X_2$.
- $Inf_{G/N}^G(X_1 \times X_2) \cong Inf_{G/N}^G X_1 \times Inf_{G/N}^G X_2$.

Notemos que $x \in Inf_{G/H}^G X$ si y sólo si $x \in X$, es decir $Inf_{G/N}^G X = X$ como conjuntos, por lo tanto

- $Inf_{G/N}^G(X_1 \sqcup X_2) = X_1 \sqcup X_2 = Inf_{G/N}^G X_1 \sqcup Inf_{G/N}^G X_2$.
- $Inf_{G/N}^G(X_1 \times X_2) = X_1 \times X_2 = Inf_{G/N}^G X_1 \times Inf_{G/N}^G X_2$.

$\square$

Sea G un grupo finito y N un subgrupo normal G. Si X es un G-conjunto, para $x \in X$ denotamos por

$$O_N(x) = \{nx \mid n \in N\}$$

a la órbita de x en N.

Definición 1.5.9. Sea

$$Def_{G/N}^G(X) = \{O_N(x)\}_{x \in X}$$

el cual es un G/N-conjunto con la acción

$$\begin{aligned} G/N \times Def_{G/N}^G(X) &\longrightarrow Def_{G/N}^G(X) \\ (gN, O_N(x)) &\longmapsto O_N(gx), \end{aligned}$$

el cual lo llamaremos deflación de X.

Observemos que la acción anterior está bien definida. Sea $gN, hN \in G/N$ tales que $gN = hN$ y $x \in X$, entonces existe $n \in N$ tal que $ng = h$ en consecuencia

$$ngx = hx$$

por lo tanto

$$gN \cdot O_N(x) = O_N(gx) = O_N(hx) = hN \cdot O_N(x)$$

así que la acción de $Def_{G/N}^G X$ está bien definida.

Lema 1.5.10. *Sea $Def^G_{G/N}$ la función Deflación definida por*

$$\begin{aligned} Def^G_{G/N} : B(G) &\longrightarrow B(G/N) \\ [X] &\longmapsto [Def^G_{G/N}X] \end{aligned}$$

para X G-conjunto, la cual se extiende por linealidad. Entonces $Def^G_{G/N}$ es un homomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Primero demostraremos $Def^G_{G/N}$ está bien definida, es decir para X, Y G-conjuntos isomorfos, entonces $Def^G_{G/N}X$ es isomorfo a $Def^G_{G/N}Y$ como G/N-conjuntos. Sea $\beta : X \longrightarrow Y$ un isomorfismo de G-conjuntos. Definimos a

$$\begin{aligned} \overline{\beta} : Def^G_{G/N}X &\longrightarrow Def^G_{G/N}Y \\ O_N(x) &\longmapsto O_N(\beta(x)). \end{aligned}$$

Demostremos que $\overline{\beta}$ es un isomorfismo de G/N-conjuntos.

- Primero demostremos que $\overline{\beta}$ está bien definida. Sean $x, z \in X$ tales que $O_N(x) = O_N(z)$, entonces existe $n \in N$ tal que $x = nz$, esto implica que

  $$\beta(x) = \beta(nz) = n\beta(z)$$

  por lo tanto $O_N(\beta(x)) = O_N(\beta(z))$.

- Ahora demostremos que $\overline{\beta}$ es un homomorfismo de G/N-conjuntos. Sea $gN \in G$ y $O_N(x)$ elemento de $Def^G_{G/N}X$, entonces

  $$\begin{aligned} \overline{\beta}(gN \cdot O_N(x)) &= \overline{\beta}(O_N(gx)) = O_N(\beta(gx)) \\ &= O_N(g\beta(x)) = gN \cdot O_N(\beta(x)) \\ &= gN \cdot \overline{\beta}(O_N(x)) \end{aligned}$$

  por lo tanto $\overline{\beta}$ es un homomorfismo de G-conjuntos.

- Por último demostraremos que $\overline{\beta}$ es biyectivo. Primero demostraremos que $\overline{\beta}$ es inyectivo. Sean $O_N(x), O_N(z) \in Def^G_{G/N}X$ tales que

  $$\overline{\beta}(O_N(x)) = O_N(\beta(x)) = \overline{\beta}(O_N(z)) = O_N(\beta(z))$$

  en consecuencia, existe $n \in N$ tal que, $n\beta(x) = \beta(nx) = \beta(z)$ y ya que β es un isomorfismo obtenemos que $nx = z$, debido a lo cual $O_N(x) = O_N(z)$. Por lo tanto $\overline{\beta}$ es inyectiva. Ahora demostraremos que $\overline{\beta}$ es suprayectiva, sea $O_N(y) \in Def^G_{G/N}Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $\beta(x) = y$, por lo tanto

  $$\overline{\beta}(O_N(x)) = O_N(\beta(x)) = O_N(y)$$

  así que $\overline{\beta}$ es suprayectiva.

Siendo así $\overline{\beta}$ un isomorfismo.
Para demostrar que $Def^G_{G/N}$ es un homomorfismo de grupos es suficiente demostrar que para $X_1,\ X_2$ G-conjuntos, entonces

$$Def^G_{G/N}(X_1 \sqcup X_2) \cong Def^G_{G/N}(X_1) \sqcup Def^G_{G/N}(X_2).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} Def^G_{G/N}(X_1 \sqcup X_2) &= \{O_N((x_i,i)) \mid (x_i,i) \in X_1 \sqcup X_2\} \\ &= \{(O_N(x_i),i) \mid (x_i,i) \in X_1 \sqcup X_2\} \\ &= \{(O_N(x_i),i) \mid x_i \in X_i,\ i=1,2\} \\ &= Def^G_{G/N}(X_1) \sqcup Def^G_{G/N}(X_2), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$Def^G_{G/N}(X_1 \sqcup X_2) \cong Def^G_{G/N}(X_1) \sqcup Def^G_{G/N}(X_2)$$

como G/N-conjuntos. □

Lema 1.5.11.

1. *Sea X es un G-conjunto y N un subgrupo normal de G, entonces*

$$X^N = \{x \in X \mid nx = x\ \forall\ n \in N\}$$

   es un G/N-conjunto con la acción

$$\begin{aligned} G/N \times X^N &\longrightarrow X^N \\ (gN,x) &\longmapsto (gx), \end{aligned}$$

   a X^N lo denotaremos por $Fix^G_{G/N}X$.

2. *Sean X y Y G-conjuntos isomorfos, entonces $Fix^G_{G/N}X$ y $Fix^G_{G/N}Y$ son isomorfos como G/N-conjuntos.*

Demostración.

1. Para demostrar que X^N es un G/N-conjunto

   - Veremos que para todo $g \in G$ y todo $x \in X^N$, entonces $gx \in X^N$. Sea $x \in X^N$ y $g \in G$, entonces para todo $n \in N$ existe un $n' \in N$ tal que $n = gn'g^{-1}$, Así que

$$ngx = (gn'g^{-1})gx = gn'x = g(n'x) = g(x) = gx.$$

     por lo tanto $gx \in X^N$

- Ahora demostraremos que la acción está bien definida. Sea gN , $hN \in G/N$ tales que $gN = hN$, entonces $g^{-1}h \in N$, y sea $x \in X^N$. por lo tanto

$$g^{-1}hx = x$$

lo cual implica que $gx = hx$, entonces

$$gN \cdot x = gx = hx = hN \cdot x.$$

2. Puesto que X es isomorfo como G-conjuntos a Y, existe $\rho : X \longrightarrow Y$ el cual es isomorfismo de G-conjuntos. Definamos a

$$\begin{aligned} \overline{\rho} : X^N &\longrightarrow Y^N \\ x &\longmapsto \rho(x). \end{aligned}$$

Ahora demostramos que $\overline{\rho}$ es un isomorfismo de G/N-conjuntos

- Primero demostraremos que ρ manda X^N a Y^N. Sea $x \in X^N$, y $n \in N$, entonces

$$n\rho(x) = \rho(nx) = \rho(x).$$

Por lo tanto $\rho : X^N \longrightarrow Y^N$.

- Ahora demostraremos $\overline{\rho}$ es un homomorfismo de G/N-conjuntos. Sean $gN \in G/N$ y $x \in X^N$, entonces

$$\overline{\rho}(gN \cdot x) = \overline{\rho}(gx) = \rho(gx) = g\rho(x) = gN \cdot \overline{\rho}(x)$$

así que $\overline{\rho}$ es un homomorfismo de G/N-conjuntos.

- Por ultimo $\overline{\rho}$ es biyectiva ya que ρ lo es.

Por lo tanto $\overline{\rho}$ es un isomorfismo de G/N-conjuntos, por esta razón X^N y Y^N son isomorfos como G/N-conjuntos.

□

Lema 1.5.12. *Sea $Fix^G_{G/N}$ la función de los puntos fijos definida por*

$$\begin{aligned} Fix^G_{G/N} : B(G) &\longrightarrow B(G/N) \\ [X] &\longmapsto [X^N] \end{aligned}$$

para X G-conjunto, la cual se extendiende por linealidad. Entonces $Fix^G_{G/N}$ es un homomorfismo de anillos.

Demostración. Es suficiente demostrar que para X_1 y X_2 G-conjuntos, se cumple:

- $Fix^G_{G/N} X_1 \sqcup Fix^G_{G/N} X_2 \cong Fix^G_{G/N}(X_1 \sqcup X_2)$.
- $Fix^G_{G/N} X_1 \times Fix^G_{G/N} X_2 \cong Fix^G_{G/N}(X_1 \times X_2)$.

Primero demostremos que $Fix^G_{G/N} X_1 \times Fix^G_{G/N} X_2 \cong Fix^G_{G/N}(X_1 \times X_2)$. Por definición

$$\begin{aligned}
Fix^G_{G/N}(X_1 \times X_2) &= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid n(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\ \forall n \in N\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid (nx_1, nx_2) = (x_1, x_2)\ \forall n \in N\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_1 \in X_1^N\ y\ x_2 \in X_2^N\} \\
&= X_1^N \times X_2^N = Fix^G_{G/N} X_1 \times Fix^G_{G/N} X_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Fix^G_{G/N} X_1 \times Fix^G_{G/N} X_2$ y $Fix^G_{G/N}(X_1 \times X_2)$ son isomorfo como G-conjuntos. Ahora demostraremos que $Fix^G_{G/N} X_1 \sqcup Fix^G_{G/N} X_2 \cong Fix^G_{G/N}(X_1 \sqcup X_2)$. Por definición

$$\begin{aligned}
Fix^G_{G/N}(X_1 \sqcup X_2) &= \{(x_i, i) \in X_1 \sqcup X_2 \mid n(x_i, i) = (x_i, i)\ \forall n \in N\} \\
&= \{(x_i, i) \in X_1 \sqcup X_2 \mid (nx_i, i) = (x_i, i)\ \forall n \in N\} \\
&= \{(x_i, i) \in X_1 \sqcup X_2 \mid x_i \in X_i^N, i = 1, 2\} \\
&= X_1^N \sqcup X_2^N = Fix^G_{G/N} X_1 \sqcup Fix^G_{G/N} X_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Fix^G_{G/N} X_1 \sqcup Fix^G_{G/N} X_2$ y $Fix^G_{G/N}(X_1 \sqcup X_2)$ son isomorfos como G-conjuntos. De tal forma que $Fix^G_{G/N}$ es un homomorfismo de anillos. $\square$

Capítulo 2

El Teorema Principal

2.1. Enunciado del Teorema Principal

Para ser precisos, de ahora en adelante, G es un grupo finito de orden n, y denotaremos un grupo cíclico de orden m como C_m, y por $C := C_{|G|}$.

Definición 2.1.1. Definimos $\overline{B(G)}$, el anillo fantasma de G, como el conjunto de todas las funciones de $Sub(G)$ a $\mathbb{Z}$ que son constantes en las clases de conjugación, el cual se puede verificar fácilmente que tiene estructura de anillo con las siguientes operaciones:

- Suma.
  Sean $f, g \in \overline{B(G)}$ definimos $f + g$ como
$$(f + g)(H) = f(H) + g(H) \ \forall \ H \leqslant G.$$
- Multiplicación.
  Sean $f, g \in \overline{B(G)}$ definimos $f \cdot g$ como
$$(f \cdot g)(H) = f(H) \cdot g(H) \ \forall \ H \leqslant G.$$

Donde fácilmente se ve que el neutro adictivo es la función constante 0 y el neutro multiplicativo es la función constante 1.

Observación 2.1.2. El anillo fantasma de G, también se puede ver como el siguiente $\mathbb{Z}$-módulo libre

$$\overline{B(G)} \cong \prod_{H \in [S_G]} \mathbb{Z}.$$

Sean H y K subgrupos de G, del Teorema 1.4.8 tenemos que $\varphi_H = \varphi_K$ si y solo si $K \sim_G H$

Lema 2.1.3. *Si consideramos la función*

$$\begin{aligned} \Phi^G : B(G) &\longrightarrow \overline{B(G)} \\ x &\longmapsto \varphi_{\_}(x), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_{\_}(x) : Sub(G) &\longmapsto \mathbb{Z} \\ U &\longmapsto \varphi_U(x), \end{aligned}$$

entonces Φ^G es un monomorfismo de anillo, y en consecuencia $B(G)$ se puede ver como subanillo de $\overline{B(G)}$.

Demostración. Basta con comprobar que Φ^G es un monomorfimo de anillos para las clases los G-conjuntos transitivos.

- Demostraremos que Φ^G abre sumas.
  Sean $H_1, H_2 \leqslant G$.
  Sea $U \in Sub(G)$,

  $$\begin{aligned} \Phi^G([G/H_1] + [G/H_2])(U) &= \Phi^G([G/H_1 \sqcup G/H_2])(U) \\ &= \varphi_U([G/H_1 \sqcup G/H_2]) \end{aligned}$$

  que es igual a

  $$|\{(gH_i, i) \in [G/H_1 \sqcup G/H_2] \mid u(gH_i, i) = (gH_i, i) \forall u \in U\}|,$$

  con $i = 1, 2$. Notemos que,

  $$u(gH_i, i) = (ugH_i, i) = (gH_i, i) \Leftrightarrow ugH_i = gH_i$$

  así que

  $$\varphi_U([G/H_1 \sqcup G/H_2]) = \varphi_U([G/H_1]) + \varphi_U([G/H_2]),$$

  para todo subgrupo U de G. Por lo tanto,

  $$\Phi^G([G/H_1] + [G/H_2]) = \Phi^G([G/H_1]) + \Phi^G([G/H_2]).$$

- Demostraremos que Φ^G abre multiplicaciones.
  Sean U, H_1 y H_2 subgrupos de G, entonces

  $$\Phi^G([G/H_1]\cdot[G/H_2])(U) \ = \Phi^G([G/H_1\times G/H_2])(U) \ = \varphi_U([G/H_1\times G/H_2])$$

  que es igual a

  $$|\{(g_1H_1, g_2H_2)\in[G/H_1\times G/H_2] \mid u(g_1H_1,g_2H_2)=(g_1H_1,g_2H_2)\forall u\in U\}|$$

  Notemos que

  $$u(g_1H_1,g_2H_2)=(g_1H_1,g_2H_2)\Leftrightarrow ug_1H_1=g_1H_1 \quad y \quad ug_2H_2=g_2H_2.$$

  Por lo tanto, tenemos que

  $$[G/H_1\times G/H_2]^U=[G/H_1]^U\times[G/H_2]^U$$

  lo que implica que,

  $$\begin{aligned}\varphi_U([G/H_1\times G/H_2]) &= \varphi_U([G/H_1])\cdot\varphi_U([G/H_2])\\ &= \Phi^G([G/H_1])\Phi^G(G/H_2)(U).\end{aligned}$$

  Por lo tanto,
  $$\Phi^G([G/H_1]\cdot[G/H_2])=\Phi^G([G/H_1])\Phi^G([G/H_2]).$$
  Ahora demostraremos que $\Phi^G(1)=1$. Sea V subgrupo de G, entonces

  $$\Phi^G(1)(V)=\varphi_V(1)=|\{x\in\{\cdot\}\mid vx=x\ \forall\ v\in V\}|=1$$

De los puntos anteriores y del hecho que cualquier elemento del anillo Burnside se puede expresar de manera única, como combinación lineal de G-conjuntos transitivos, concluimos que Φ^G es un homomorfismo de anillos.
Sean $x, y\in B(G)$ tales que $\Phi^G(x)=\Phi^G(y)$, es decir

$$\Phi^G(x)(U)=\varphi_U(x)=\Phi^G(y)(U)=\varphi_U(y)$$

para todo U subgrupo de G. Por el Lema 1.4.7 tenemos que $x=y$, i.e. Φ^G es un monomorfismo, así que $B(G)$ se puede ver como un subanillo de $\overline{B(G)}$.

□

Sea $H\leqslant G$ definamos a

$$\begin{aligned}\Phi_H^G : B(G) &\longrightarrow \mathbb{Z}\\ x &\longmapsto \varphi_H(x).\end{aligned}$$

Sean H y K subgrupos de G. Del Teorema 1.4.8 tenemos que $\Phi_H^G = \Phi_K^G$ si y solo si $H \sim_G K$ Podemos ver a Φ^G como

$$\Phi^G = \prod_{H \in [S_G]} \Phi_H^G : B(G) \longrightarrow \prod_{H \in [S_G]} \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto \prod_{H \in [S_G]} \varphi_H(x).$$

Denotamos por $\{e_H\}_{H \in [S_G]}$ a la base canónica de $\prod_{H \in [S_G]} \mathbb{Z}$.
La demostración del siguiente teorema se puede ver en [1].

Teorema 2.1.4 (Dress, Teorema 3.2.1 en [1]). *Sea G un grupo finito. Para H y K en $[S_G]$, definimos el conjunto*

$$n(K, H) = |\{x \in N_G(K)/K \mid \langle x, K \rangle \sim_G H\}|.$$

El elemento $y = \sum_{H \in [S_G]} y_H e_H$ está en la imagen de Φ si y sólo si, para todo $K \in [S_G]$

$$\sum_{H \in [S_G]} y_H \cdot n(K, H) \equiv 0 \ mod \ [N_G(K) : K].$$

Corolario 2.1.5 (Relación de congruencia de Cauchy-Frobenius-Burnside). *Para todo $x \in B(G)$, tenemos*

$$\sum_{g \in G} \varphi_{\langle g \rangle}(x) \equiv 0 \ mod \ |G|.$$

Demostración. Sea H subgrupo de G, notemos que

$$n(\{1\}, H) = |\{g \in G \mid \langle g \rangle \sim_G H\}|,$$

- Si H no es cíclico, entonces $n(\{1\}, H) = 0$.
- Si H es cíclico, entonces $n(\{1\}, H)$ es el número de elementos de G que generan a H o a un conjugado de H.

Sea $x \in B(G)$, entonces lo podemos expresar como $\sum_{H \in [S_G]} \varphi_H(x) e_H$ visto como elemento de $\overline{B(G)}$, por lo tanto cumple las congruencias del Teorema 2.1.4, y ya que $\varphi_-(x)$ es constante en las clases de conjugación, obtenemos

$$\sum_{g \in G} \varphi_{\langle g \rangle}(x) = \sum_{H \in [S_G]} \varphi_H(x) \cdot n(\{1\}, H) \equiv 0 \text{ mod } |G|.$$

□

Teorema 2.1.6 (Teorema 1 en [4], El Teorema Principal). *Existe un homomorfismo de anillos*

$$\alpha = \alpha^G_{FW} : B(C) \longmapsto B(G)$$

llamado el homomorfismo de Frobenius - Wielandt, tal que para todo subgrupo $U \leqslant G$ y cada $x \in B(C)$ el número $\varphi_U(\alpha(x))$ de elementos U-invariantes en el G-conjunto virtual $\alpha(x)$ coincide con el número $\varphi_{C_{|U|}}(x)$ de elementos $C_{|U|}$-invariantes x.

2.2. Demostración del Teorema Principal

Definición 2.2.1. Definimos las funciones

$$\begin{aligned} \gamma^G_{FW} : Sub(G) &\longrightarrow Sub(C) \\ U &\longmapsto C_{|U|} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}^G = \alpha^G_{FW} : \overline{B(C)} &\longrightarrow \overline{B(G)} \\ s &\longmapsto s \circ \gamma^G_{FW}. \end{aligned}$$

Lema 2.2.2. *La función $\overline{\alpha}^G$ es un homomorfismo s de anillos*

Demostración. Sea $1 \in \overline{B(C)}$ la función constante 1. Si V es un subgrupo de G, entonces

$$\overline{\alpha}(1)(V) = 1 \circ \gamma^G_{FW}(V) = 1(C_{|V|}) = 1,$$

es decir $\overline{\alpha}(1) = 1$.
Sean $f, g \in \overline{B(C)}$ y U subgrupo de G,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}^G(f+g)(U) =& (f+g) \circ \gamma^G_{FW}(U) \\ &= (f+g)(C_{|U|}) = f(C_{|U|}) + g(C_{|U|}) \\ &= f \circ \gamma^G_{FW}(U) + g \circ \gamma^G_{FW}(U) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{\alpha}^G$ abre sumas. Luego

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}^G(f \cdot g)(U) &= (f \cdot g) \circ \gamma^G_{FW}(U) \\ &= (f \cdot g)(C_{|U|}) = f(C_{|U|}) \cdot g(C_{|U|}) \\ &= (f \circ \gamma^G_{FW})(U) \cdot (g \circ \gamma^G_{FW})(U). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{\alpha}^G$ abre multiplicaciones. lo que implica que $\overline{\alpha}^G$ es un homomorfismo de anillos. □

Para demostrar el Teorema 2.1.6, primero tenemos que demostrar los siguientes lemas.

Notación 2.2.3. Sea G un grupo finito, definimos

$$\binom{G/1}{q} = \{Y \subseteq G \mid |Y| = q\}.$$

Lema 2.2.4. $\binom{G/1}{q}$ *es un G-conjunto con la acción*

$$\begin{aligned} G \times \binom{G/1}{q} &\longrightarrow \binom{G/1}{q} \\ (g, Y) &\longmapsto gY := \{gy \mid y \in Y\}. \end{aligned}$$

Demostración. Sean $g \in G$ y $Y \in \binom{G/1}{q}$ demostraremos que $gY \in \binom{G/1}{q}$.
Es claro que $|gY| \leq q$, supongamos que existen $y_1, y_2 \in Y$, tales que

$$gy_1 = gy_2$$

esto implica que

$$y_2 = g^{-1}gy_1 = y_1,$$

es decir $|gY| = q$, por lo tanto $gY \in \binom{G/1}{q}$ y claramente esta es una acción, por lo cual $\binom{G/1}{q}$ es un G-conjunto.

□

Lema 2.2.5 (Lema $1'$ en [4]). *Para todo grupo finito G, todo subgrupo $U \leqslant G$ y todo $q \in \mathbb{N}$ tenemos*

$$\varphi_U\left(\binom{G/1}{q}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } |U| \text{ no divide a } q \\ \binom{[G:U]}{q/|U|} & \text{en caso contario.} \end{cases}$$

Demostración. Sea $U \in Sub(G)$.

$$\varphi_U\left(\binom{G/1}{q}\right) = \left|\left\{Y \in \binom{G/1}{q} \;\middle|\; uY = Y \;\forall\; u \in U\right\}\right|.$$

- Demostraremos que $Y \in \binom{G/1}{q}$ es U-invariante si y sólo si Y es la unión disjunta de clases laterales $Ug \subseteq G$.
  $\Rightarrow]$ Supongamos que Y es U-invariante. Es decir $UY = Y$ para todo $u \in U$, lo que implica que

$$\bigcup_{y \in Y} Uy \subseteq Y$$

y claramente

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} Uy$$

por lo tanto

$$Y = \bigcup_{y \in Y} Uy.$$

Recordemos que Uh y Ug, son iguales o disjuntos. Entonces existe $Y' \subset G$ tal que

$$Y = \bigsqcup_{g \in Y'} Ug.$$

$\Leftarrow$] Supongamos que

$$Y = \bigsqcup_{g \in I} Ug.$$

para algún $I \subseteq G$. Entonces

$$uY = u\left(\bigsqcup_{g \in I} Ug\right) = \bigsqcup_{g \in I} uUg = \bigsqcup_{g \in G} Ug = Y \quad \forall u \in U.$$

Por lo tanto, $Y \in \binom{G/1}{q}$ es U-invariante si y sólo si Y es la unión disjunta de clases laterales $Ug \subseteq G$.

- Si $Y \in \binom{G/1}{q}$ es U-invariante, por el punto anterior, existe $I \subseteq G$ tal que,

$$Y = \bigsqcup_{g \in I} Ug$$

entonces $|Y| = |U||I| = q$ es decir $|U|$ divide a q. Observemos que esto implica que la cardinalidad de I no depende de Y, sólo de $|Y| = q$.
Si $|U|$ no divide a q por el punto anterior, no existe ningún punto fijo bajo U, por lo tanto (Lema 1.4.6)

$$\varphi_U\left(\binom{G/1}{q}\right) = 0.$$

- Finalmente supongamos que $q = m \cdot |U|$ para algún $m \in \mathbb{N}$.
Como $\varphi_U(\binom{G/1}{q})$ nos indica la cantidad de elementos de $\binom{G/1}{q}$ que son U-invariantes,

y para obtener un conjunto U-invariante de cardinalidad q necesitamos tomar m clases laterales distintas de todas las existentes, en G/U, y unirlas, entonces todas las combinaciones posibles son

$$\binom{[G:U]}{m} = \binom{[G:U]}{q/|U|}$$

es decir,

$$\varphi_U\left(\binom{G/1}{q}\right) = \binom{[G:U]}{q/|U|}.$$

Por lo tanto

$$\varphi_U\left(\binom{G/1}{q}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } |U| \text{ no divide a q} \\ \binom{[G:U]}{q/|U|} & \text{en caso contario} \end{cases}$$

$\square$

Observación 2.2.6. Si $|U| = q$, esto implica que U es maximal con la propiedad $\varphi_U(\binom{C/1}{q}) \neq 0$ así que por el Lema 1.4.10 tenemos que

$$\varphi_U\left(\binom{G/1}{q}\right) = a_U\left(\binom{G/1}{q}\right)[N_G(U):U] = \binom{[G:U]}{1} = [G:U]$$

así que $a_U(\binom{G/1}{q}) = \frac{[G:U]}{[N_G(U):U]} = \frac{|G|}{|N_G(U)|}$.

Lema 2.2.7 (Lema 1 en [4]). *El homomorfismo $\overline{\alpha}^G$ manda $\binom{C/1}{q} \in B(C) \subseteq \overline{B(C)}$ en $\binom{G/1}{q} \in B(G) \subseteq \overline{B(G)}$.*

Demostración. Recordemos que $\binom{C/1}{q}$ se identifica con $\varphi_{\_}(\binom{C/1}{q})$ en $\overline{B(C)}$. Ahora la demostración es inmediata del Lema 2.2.5. Sea $U \in Sub(G)$, entonces

$$\overline{\alpha}^G\left(\binom{C/1}{q}\right)(U) = \varphi_{C_{|U|}}\left(\binom{C/1}{q}\right)$$

que es igual a

$$\varphi_U\left(\binom{G/1}{q}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } |U| \text{ no divide a } q \\ \binom{[G:U]}{q/|U|} & \text{en caso contario} \end{cases}$$

ya que $|U| = |C_{|U|}|$ y $[G:U] = [C:C_{|U|}]$. Por lo tanto $\overline{\alpha}^G(\binom{C/1}{q})$ es igual a $\binom{G/1}{q}$. $\square$

Definición 2.2.8. Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos al conjunto de todos los divisores de n como $Div(n)$
$$Div(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid d \textit{ divide a } n\}.$$

Observación 2.2.9. Ya que C es cíclico, entonces para todo $q \in Div(|C|)$ existe un único subgrupo C_q de C con cardinalidad q. Esto implica que hay una relación biyectiva entre $Div(|C|)$ y $Sub(C)$, dada por

$$\begin{aligned} Div(|C|) &\longrightarrow Sub(C) \\ d &\longmapsto C_d. \end{aligned}$$

Lema 2.2.10. *La familia* $\{\binom{C/1}{d}\}_{d \in Div(|C|)}$ *forma una* $\mathbb{Z}$*-base de* $B(C)$.

Demostración. Sea $d_i \in Div(n) = \{d_1 = 1, ..., d_m = n\}$ con $d_j < d_{j+1}$, por el Lema 1.4.4

$$\binom{C/1}{d_i} = \sum_{j=1}^{m} a_{d_i,d_j} \left[\frac{C}{C_{d_j}}\right]$$

con $a_{d_i,d_j} = a_{C_{d_j}}\left(\binom{C/1}{d_i}\right) \in \mathbb{Z}$.
Si $d_j \in Div(n)$ con $j > i$, por el Lema 2.2.5, obtenemos que

$$\varphi_{C_{d_j}}\left(\binom{C/1}{d_i}\right) = \sum_{d_k \in Div(n)} a_{d_i,d_k}\ \varphi_{C_{d_j}}\left(\left[\frac{C}{C_{d_k}}\right]\right) = 0$$

y

$$\varphi_{C_{d_i}}\left(\binom{C/1}{d_i}\right) = [C : C_{d_i}] \neq 0.$$

Esto quiere decir que es maximal con esta propiedad, luego por el Lema 1.4.10 y el Lema 2.2.5 tenemos que

$$\varphi_{C_{d_i}}\left(\binom{C/1}{d_i}\right) = [C : C_{d_i}] = a_{d_i d_i} \cdot [N_C(C_{d_i}) : C_{d_i}] = a_{d_i d_i} \cdot [C : C_{d_i}]$$

Por lo tanto $a_{d_i,d_i} = 1$ y $a_{d_i,d_j} = 0$ para toda $j > i$, en consecuencia

$$\binom{C/1}{d_i} = \sum_{j=1}^{d_i} a_{d_i,d_j} \left[\frac{C}{C_{d_j}}\right].$$

Sea

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{d_1,d_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{d_2,d_1} & a_{d_2,d_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d_m,d_1} & a_{d_m,d_2} & a_{d_m,d_3} & \dots & a_{d_m,d_m} \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$\begin{pmatrix} \binom{C/1}{d_1} \\ \binom{C/1}{d_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \binom{C/1}{d_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{d_1,d_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{d_2,d_1} & a_{d_2,d_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d_m,d_1} & a_{d_m,d_2} & a_{d_m,d_3} & \dots & a_{d_m,d_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [C/C_{d_1}] \\ [C/C_{d_2}] \\ \vdots \\ \vdots \\ [C/C_{d_m}] \end{pmatrix}$$

y como $a_{d_i,d_i} = 1$ para $i = 1, 2, .., m$, tenemos $det(\mathbf{M}) = 1$, por lo tanto $\mathbf{M}$ es una matriz invertible en $\mathbb{Z}$, lo que implica

$$\begin{pmatrix} [C/C_{d_1}] \\ [C/C_{d_2}] \\ \vdots \\ \vdots \\ [C/C_{d_m}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{d_1,d_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{d_2,d_1} & a_{d_2,d_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d_m,d_1} & a_{d_m,d_2} & a_{d_m,d_3} & \dots & a_{d_m,d_m} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \binom{C/1}{d_1} \\ \binom{C/1}{d_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \binom{C/1}{d_m} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto los básicos $\{[C/C_{d_i}]\}_{i=1}^{m}$ son combinación de la familia $\{\binom{C/1}{d_i}\}_{i=1}^{m}$, es decir, la familia $\{\binom{C/1}{d}\}_{d\in Div(|C|)}$ forma una $\mathbb{Z}$-base de $B(C)$. $\square$

Con estos resultados procederemos a demostrar el Teorema 2.1.6.

Demostración del Teorema 2.1.6. Recordemos que $B(C)$ es un subanillo de $\overline{B(C)}$, definimos

$$\alpha^G = \overline{\alpha}^G|_{B(C)}.$$

Puesto que la familia $\{\binom{C/1}{d}\}_{d\in Div(n)}$ forma una base de $B(C)$, y $\overline{\alpha}^G$ es un homomorfismo de anillos que manda $\binom{C/1}{d}$ a $\binom{G/1}{d}$ tenemos que α^G es un homomorfismo de anillos de $B(C)$ a $B(G)$.
Sean U subgrupo de G y $x = \sum_{d\in Div(n)} a_d\binom{C/1}{d} \in B(C)$ con $a_d \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\varphi_{C_{|U|}}(x) = \sum_{d\in Div(n)} a_d \; \varphi_{C_{|U|}}\left(\binom{C/1}{d}\right)$$

por el Lema 2.2.5 es igual a

$$\sum_{d\in Div(n)} a_d\ \varphi_U\left(\binom{G/1}{d}\right) = \varphi_U(\alpha^G(x)).$$

□

2.3. Aplicaciones

Corolario 2.3.1 (Corolario 1 en [4]). *Para todo divisor d de $|G|$ existe un elemento x_d en $B(G)$ tal que*

$$\varphi_U(x_d) = \begin{cases} d & \textit{si } d \textit{ divide a } [G:U] \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

En particular, $a_U(x_d) = 0$ a no ser que d divida a $[G:U]$ y

$$a_U(x_d) = [G : N_G(U)] = |\{gUg^{-1} \mid g \in G\}|$$

si $[G:U] = d$.

Demostración. Sea d elemento de $Div(|G|)$, y $m = \frac{|G|}{d}$. Definamos a

$$x_d = \alpha^G(C/C_m)$$

donde α^G es la función del Teorema 2.1.6, por lo tanto

$$\varphi_U(x_d) = \varphi_U(\alpha^G(C/C_m)) = \varphi_{C_{|U|}}(C/C_m),$$

para todo U subgrupo de G. Por el Lema 1.4.9

$$\varphi_U(x_d) = [N_C(C_m) : C_m] \cdot |\{H \leqslant C \mid C_{|U|} \leqslant H \sim_C C_m\}|,$$

y ya que C es abeliano por ser cíclico, $N_C(C_m) = C$, lo que implica que

$$[N_C(C_m) : C_m] = [C : C_m] = d.$$

Además

$$|\{H \leqslant C \mid C_{|U|} \leqslant H \sim_C C_m\}| = \begin{cases} 1 & \text{si } C_{|U|} \leqslant C_m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y $C_{|U|}$ es subgrupo de C_m si y sólo si $|U|$ divide a $m = |G|/d$, $|U|$ divide a m si y sólo si d divide a $|G|/|U|$. Por lo tanto

$$\varphi_U(x_d) = \begin{cases} d & \text{si } d \text{ divide a } [G:U] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si d no divide a $[G:U]$, entonces

$$\varphi_U(x_d) = \sum_{H\in[S_G]} a_H(x_d)\varphi_U([G/H]) = \sum_{\substack{H\in[S_G]\\ U\lesssim_G H}} a_H(x_d)[\varphi_U(G/H)] = 0$$

por lo tanto

$$a_U(x_d) = \frac{-1}{[N_G(U):U]} \sum_{\substack{K\in[S_G]\\ H<_G K}} a_H(x_d)[\varphi_U(G/H)].$$

Si $d = 1$ de la ecuación anterior se obtiene que $a_U(x_d) \neq 0$ para todo U en $[S_G]$. Si $d \neq 1$, sea $H \in S_G$ tal que $U \lesssim_G H$, entonces $[G:H]$ divide a $[G:U]$, por lo tanto d no divide a $[G:H]$, lo que implica que $\varphi_H(x_d) = 0$, entonces

$$\varphi_G(x_d) = a_G(x_d)\varphi_G(G/G) = 0$$

por lo tanto $a_G(x_d) = 0$. Sea $H_1 \in [S_G]$ tal que $U \lesssim_G H_1$ y H_1 es un subgrupo maximal de G, lo que implica que

$$a_{H_1}(x_d) = \frac{-1}{[N_G(H_1):H_1]} a_G(x_d)[\varphi_{H_1}(G/G)] = 0.$$

por este argumento inductivo, concluimos que $a_U(x_d) = 0$.
Supongamos que $d = [G:U]$, entonces U es un subgrupo maximal con $\varphi_U(x_d) \neq 0$, del Lema 1.4.10 se sigue que U es subgrupo maximal con $a_U(x_d) \neq 0$, y más aún

$$\varphi_U(x_d) = a_U(x_d)[N_G(U):U]$$

lo que implica que

$$a_U(x_d) = \frac{\varphi_U(x_d))}{[N_G(U):U]} = \frac{d}{[N_G(U):U]} = \frac{[G:U]}{[N_G(U):U]} = [G:N_G(U)]$$

□

Corolario 2.3.2 (Corolario 2 en [4], Teorema 4.17 en [6], Sylow). *Para todo d en $Div(|G|)$, tenemos que:*

$$d = m.c.d.(\{[G:U] \mid d \text{ divide a } [G:U]\}).$$

En particular, si $|G| = d \cdot p^\alpha$ para algún primo p, entonces existe un subgrupo U de G con orden p^α.

Demostración. Sea x_d como en la demostración del teorema anterior, y ya que x_d es un elemento de $B(G)$, lo podemos expresar como

$$x_d = \sum_{U \in [S_G]} a_U(x_d)[G/U],$$

por el teorema anterior

$$x_d = \sum_{\substack{U \in [S_G] \\ d|[G:U]}} a_U(x_d)[G/U]$$

con $a_U(x_d) \in \mathbb{Z}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_d) = d &= \sum_{\substack{U \in [S_G] \\ d|[G:U]}} a_U(x_d)\varphi_1([G/U]) \\ &= \sum_{\substack{U \in [S_G] \\ d|[G:U]}} a_U(x_d)[G:U] \end{aligned}$$

por lo tanto $d = m.c.d.(\{[G:U] \mid d \text{ divide a } [G:U]\})$.
Sea $|G| = d \cdot p^\alpha$ con p primo. Supongamos que no existe U subgrupo de G tal que $|U| = p^\alpha$. Entonces

$$d \cdot p \leq m.c.d.(\{[G:U] \mid d \text{ divide a } [G:U]\}) = d$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto existe U subgrupo de G, tal que $|U| = p^\alpha$. $\square$

Corolario 2.3.3 (Corolario 3 en [4], Teorema 4.14 en [6], 3^{er} teorema de Sylow)**.** *Si una potencia p^α de un primo p divide a $|G|$, entonces el número de subgrupos de G, de orden p^α es congruente a 1 módulo p.*

Demostración. Sea $d := |G|/p^\alpha$ de la ecuación anterior

$$d = \sum_{\substack{U \in [S_G] \\ d|[G:U]}} a_U(x_d)[G:U] = \sum_{\substack{U \in [S_G] \\ |U| \in Div(p^\alpha)}} a_U(x_d)[G:U].$$

Si dividimos por d, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\substack{U \in [S_G] \\ d|[G:U]}} a_U(x_d)\frac{[G:U]}{d} \\ &= \sum_{\substack{U \in [S_G] \\ d|[G:U]}} a_U(x_d)\frac{p^\alpha}{|U|}. \end{aligned}$$

Por otro lado, que $|U|$ divida a p^α, implica que $|U| = p^\beta$ para $\beta \leq \alpha$, por lo tanto

$$1 = \sum_{\substack{U \in [S_G] \\ |U| \in Div(p^\alpha)}} a_U(x_d) \frac{p^\alpha}{|U|} \equiv \sum_{\substack{U \in [S_G] \\ |U| = p^\alpha}} a_U(x_d) \mod p$$

además

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{U \in [S_G] \\ |U| = p^\alpha}} a_U(x_d) &= \sum_{\substack{U \in [S_G] \\ |U| = p^\alpha}} [G : N_G(U)] \\
&= \sum_{\substack{U \in [S_G] \\ |U| = p^\alpha}} |\{gUg^{-1} \mid g \in G\}| \\
&= |\{V \leqslant G \mid |V| = p^\alpha\}|.
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 2.3.4 (Corolario 4 en [4], Frobenius). *Para todo divisor m de $|G|$ se tiene que m divide el número*

$$|\{g \in G \mid g^m = 1\}|$$

de elementos de G cuyo orden divide a m.

Demostración. Sea m elemento de $Div(|G|)$, y $d = |G|/m$. Apliquemos el Corolario 2.1.5 en x_d, es decir

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} \varphi_{\langle g \rangle}(x_d) &= \sum_{\substack{g \in G \\ d | [G : \langle g \rangle]}} d \\
&= d \cdot \sum_{\substack{g \in G \\ |g| \in Div(m)}} 1 \\
&= d \cdot |\{g \in G \mid g^m = 1\}| \equiv 0 \bmod |G|,
\end{aligned}$$

y ya que $|G| = d \cdot m$, tenemos que

$$|\{g \in G \mid g^m = 1\}| \equiv 0 \bmod m.$$

$\square$

Lema 2.3.5. *Para todo x en $B(G)$ y U subgrupo de G, tenemos*

$$a_U(x) = \frac{1}{[N_G(U) : U]} \sum_{V \leqslant G} \mu(U, V) \cdot \varphi_V(x)$$

donde μ es la función de Möbius del copo $Sub(G)$ con la inclusión como el orden establecido.

Demostración. Por la aditividad de φ sólo es necesario demostrarlo para $x = G/W$ para todo $W \leqslant G$. Por la definición de la función de Möbius tenemos que

$$\sum_{V \leqslant G} \mu(U, V) \varphi_V(G/W) = \sum_{U \leqslant V \leqslant G} \mu(U, V) \varphi_V(G/W)$$

y por el Lema 1.4.9

$$\begin{aligned} \sum_{V \leqslant G} \mu(U, V) \varphi_V(G/W) &= \sum_{U \leqslant V \leqslant G} \mu(U, V) [N_G(W) : W] \cdot |\{W' \leqslant G \mid V \leqslant W' \sim_G W\}| \\ &= [N_G(W) : W] \sum_{W' \sim_G W} \sum_{U \leqslant V \leqslant W'} \mu(U, V). \end{aligned}$$

Si $W \nsim_G U$ entonces $a_U(G/W) = 0$ y

$$\sum_{U \leqslant V \leqslant W'} \mu(U, V) = 0$$

lo que implica que

$$\sum_{V \leqslant G} \mu(U, V) \varphi_V(G/W) = [N_G(W) : W] \sum_{W' \sim_G W} \sum_{U \leqslant V \leqslant W'} \mu(U, V) = 0$$

por lo tanto

$$a_U(G/W) = 0 = \frac{1}{[N_G(U) : U]} \sum_{V \leqslant G} \mu(U, V) \varphi_V(G/W).$$

Si $W \sim_G U$, entonces $a_U(G/W) = 1$ lo que implica que

$$\sum_{V \leqslant G} \mu(U, V) \varphi_V(G/W) = \mu(U, U) \varphi_U(G/W) = \varphi_U(G/U) = [N_G(U) : U]$$

por lo tanto

$$a_U(G/W) = 1 = \frac{1}{[N_G(U) : U]} \sum_{V \leqslant G} \mu(U, V) \varphi_V(G/W) = \frac{[N_G(U) : U]}{[N_G(U) : U]}.$$

$\square$

Definición 2.3.6. Sea U subgrupo de G y d un divisor de $|G|$, definimos a $d(U)$ como:

$$d(U) := \frac{[N_G(U) : U]}{([N_G(U) : U], d)}.$$

Corolario 2.3.7 (Corolario 5 en [4]). *Para cada divisor d de $|G|$ y cada $U \leqslant G$ tales que d divida a $[G : U]$ tenemos que*

$$\sum_{U<V\in\gamma_d} \mu(U, V) \equiv -1 \ mod\ d(U).$$

donde $\gamma_d = \{V \leqslant G \mid U \leqslant V,\ d \text{ divide a } [G : V]\}$.

Demostración. Sea U subgrupo de G. Denotemos a $x = x_d$. Por el Lema 2.3.5

$$\sum_{V\leqslant G} \varphi_V(x)\mu(U, V) \equiv 0 \bmod [N_G(U) : U].$$

Recordemos:

- Si $U \nleqslant V$, entonces $\mu(U, V) = 0$.
- Si d no divide a $[G : V]$, entonces $\varphi_V(x) = 0$.
- Si d divide a $[G : V]$, entonces $\varphi_V(x) = d$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{V\leqslant G} \varphi_V(x)\mu(U, V) &= \sum_{V\in\gamma_d} \varphi_V(x)\mu(U, V)\\ &= \sum_{V\in\gamma_d} d \cdot \mu(U, V),\end{aligned}$$

lo que implica

$$\sum_{V\in\gamma_d} \mu(U, V) \equiv 0 \bmod d(U)$$

y ya que

$$\begin{aligned}\sum_{V\in\gamma_d} \mu(U, V) &= \mu(U, U) + \sum_{U<V\in\gamma_d} \mu(U, V)\\ &= 1 + \sum_{U<V\in\gamma_d} \mu(U, V)\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\sum_{U<V\in\gamma_d} \mu(U, V) \equiv -1 \bmod d(U).$$

□

2.4. Inyectividad de α

Primero que nada daremos unos resultados clásicos que se necesitarán en este capítulo. Sean H y K grupos, entonces definamos

$$[H, K] = \langle hkh^{-1}k^{-1} \mid h \in H,\ k \in K \rangle.$$

Definición 2.4.1. Se define el subgrupo característico $\gamma_i(G)$ de G por inducción

$$\gamma_1(G) = G; \qquad \gamma_{i+1} = [\gamma_i(G), G].$$

Definición 2.4.2. Sea G un grupo finito, diremos que G es nilpontente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que γ_n es el grupo trivial.

Teorema 2.4.3 (Teorema 5.35 en [6] y Teorema 3.36 en [6]). *Si G es nilpotente y H es un subgrupo de G, entonces H es nilpotente,y si H es subgrupo normal de G, entonces G/H es nilpotente.*

Teorema 2.4.4 (Teorema 5.39 en [6]). *Un grupo finito G es nilpotente si y sólo si G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.*

Lema 2.4.5. *Sea G un grupo finito y nilpotente, entonces para todo $d \in Div(|G|)$ existe un subgrupo normal H de G tal que $|H| = d$.*

Demostración. Sea G nilpotente , tal que $|G| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ (la descomposición en primos de $|G|$). Por el Teorema 2.4.4

$$G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m,$$

donde P_i es el p_i-subgrupo de Sylow de G. Sea $d = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_m^{s_m} \in Div(|G|)$, entonces existe H_i subgrupo normal de P_i tal que $|H| = p_i^{s_i}$ para $i = 1, 2, ...m$ (Ejercicio 4.2 de [6]), tomemos a

$$H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_m$$

se ve fácilmente que es un subgrupo normal de G y $|H| = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_m^{s_m}$.

□

Lema 2.4.6. *El morfismo α^G es inyectivo si y sólo si para todo $m \in Div(|G|)$ existe un subgrupo de G con orden m.*

Demostración. Recordemos que el anillo fantasma $\overline{B(G)}$, se puede expresar como

$$\overline{B(G)} = \prod_{H \in [S_G]} \mathbb{Z}.$$

y la función Φ anteriormente definida como

$$\Phi^G = \prod_{H\in[S_G]} \Phi_H^G : B(G) \longrightarrow \prod_{H\in[S_G]} \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto \prod_{H\in[S_G]} \varphi_H(x).$$

Por las propiedades del homomorfismo α^G y la definición del homomorfismo $\overline{\alpha}^G$ (Definición 2.2.1), tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} B(C) \arrow[r, "\alpha^G"] \arrow[d, "\Phi^C"'] & B(G) \arrow[d, "\Phi^G"] \\ \overline{B(C)} \arrow[r, "\overline{\alpha}^G"] & \overline{B(G)}. \end{tikzcd}$$

Demostración de que el diagrama conmuta:

Sea $s \in B(C)$, ya que C tiene un único subgrupo de orden $d \in Div(|C|)$, entonces

$$\Phi^C(s) = \prod_{d\in Div(|C|)} \varphi_{C_d}(s)$$

además

$$\overline{\alpha}^G(\Phi^C(s)) = \Phi^C(s \circ \gamma_{FW}^G) = \prod_{V\in[S_G]} \varphi_{C_{|V|}}(s).$$

Por otro lado

$$\Phi^G(\alpha^G(s)) = \prod_{V\in[S_G]} \varphi_V(\alpha^G(s)) = \prod_{V\in[S_G]} \varphi_{C_{|V|}}(s).$$

Por lo tanto el diagrama conmuta.

Supongamos que para todo $d \in Div(|G|)$ existe H_d subgrupo de G tal que $|H_d| = d$, supongamos que existen $x, y \in B(C)$ tales que $\alpha^G(x) = \alpha^G(y)$, entonces

$$\varphi_{H_d}(\alpha^G(x)) = \varphi_{C_d}(x) = \varphi_{H_d}(\alpha^G(y)) = \varphi_{C_d}(y)$$

para todo $d \in Div(|G|)$, por el Lema 1.4.7 $x = y$.

Supongamos que α^G es inyectiva. Sean $d \in Div(|G|)$, y $f \in \overline{B(C)}$ definido por

$$f(U) = \begin{cases} d & \text{si } |U| = d \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde U es un subgrupo de C, entonces a f lo podemos expresar $f = \sum_{k \in Div(|G|)} y_k e_k$ con

$$y_k = \begin{cases} d & \text{si } k = d \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que:

- Si H subgrupo de C tal que $|H| \neq d$, entonces

  $$n(H, C_d) = |\{x \in C/H \mid \langle x, H \rangle \sim_G C_d\}| = 0,$$

  por lo tanto

  $$\sum_{k \in Div(|G|)} y_k \cdot n(H, C_k) = 0.$$

- Ya que

  $$n(C_d, C_d) = |\{x \in C/C_d \mid \langle x, C_d \rangle \sim_G C_d\}| = [C : C_d],$$

  entonces

  $$\sum_{k \in Div(|G|)} y_k \cdot n(C_d, C_k) = y_d n(C_d, C_d) = d \cdot [C; C_d] \equiv 0 \text{mod } [C : C_d].$$

Por el Teorema 2.1.4 f es elemento de la imagen de Φ^C, es decir existe $x \in B(C)$ distinto del 0, tal que $\Phi^C(x) = f$. Si $|H| \neq d$ para todo H subgrupo de G, entonces $\overline{\alpha}(f) = 0$ y por la conmutatividad del diagrama anterior tendriamos que

$$\Phi^G(\alpha^G(x)) = 0$$

lo cual no puede pasar por la inyectividad de α^G y Φ^G. Entonces es necesario que para todo $d \in Div(|G|)$ exista H_d subgrupo de G tal que $|H_d| = d$. $\square$

Definimos

$$B_0(G) = \{x \in B(G) \mid \varphi_U(x) = \varphi_V(x) \text{ para todo } U, V \leqslant G \text{ con } |U| = |V|\}.$$

Sean $U, V \leqslant G$ tales que $|U| = |V|$ y $s \in B(C)$, entonces

$$\varphi_V(\alpha^G(s)) = \varphi_{C_{|V|}}(s) = \varphi_{C_{|U|}}(s) = \varphi_U(\alpha^G(s)).$$

Por lo tanto, la imagen de α^G esta contenida en $B_0(G)$, por lo tanto

$$\alpha^G : B(C) \longrightarrow B_0(G).$$

Observación 2.4.7. Sea H subgrupo que G, como φ_H es un homomorfismo de anillos, entonces para todo $x, y \in B_0(G)$, tenemos que $x+y$ y $x \cdot y$ están en $B_0(G)$, por lo tanto $B_0(G)$ es un subanillo de B(G).

Una pregunta natural sería: ¿Cuándo α^G es un isomorfismo entre $B(C)$ y $B_0(G)$?

Lema 2.4.8 (Teorema 2 en [4]). *El homomorfismo α^G define un isomorfismo entre $B(C)$ y $B_0(G)$ si y sólo si G es nilpotente.*

Demostración.

- Supongamos que G es nilpotente, entonces por el Lema 2.4.5, para todo $d \in Div(|G|)$ existe un subgrupo normal de G con orden d, por lo tanto α^G es inyectiva (Lema 2.4.6).
  Ahora demostraremos la suprayectividad. Sea $x \in B_0(G)$.
  Si $x = 0$, entonces $x \in \alpha^G(B(C))$, pues $\alpha^G(B(C)))$ es un subanillo de $B_0(G)$.
  Supongamos que $x \neq 0$, entonces existe $U_0 \leqslant G$ con orden máximo tal que
  $$\varphi_{U_0}(x) \neq 0.$$
  Por ser G nilpotente, existe $W_0 \trianglelefteq G$ tal que $|W_0| = |U_0| = d$, por lo tanto
  $$\varphi_{W_0}(x) = \varphi_{U_0}(x) \neq 0,$$
  pues x está en $B_0(G)$, por lo tanto W_0 también es de orden máximo tal que $\varphi_{W_0}(x) \neq 0$. Más aun por el Lema 1.4.10
  $$\varphi_{W_0}(x) = [G : W_0] a_{W_0}(x),$$
  por lo tanto $\varphi_{W_0}(x)/[G : W_0]$ está en $\mathbb{Z}$. Ahora tomemos
  $$y_0 = x - \frac{\varphi_{W_0}(x)}{[G : W_0]} \alpha^G(C/C_d)$$
  el cual es un elemento de $B_0(G)$, ya que $\alpha^G(C/C_d)$ y x están en $B_0(G)$. Además si $y_0 = 0$, entonces y_0 está en $\alpha^G(B(C))$ y más aun, $x = \frac{\varphi_U(x)}{[G:U]} \alpha^G(C/C_d)$, por lo tanto $x \in \alpha^G(B(C))$, por otro lado si $y_o \neq 0$ observemos lo siguiente:

  1. $\varphi_{W_0}(y_0) = 0$, pues
  $$\begin{aligned} \varphi_{W_0}(y_0) &= \varphi_{W_0}(x) - \frac{\varphi_{W_0}(x)}{[G : W_0]} \varphi_{W_0}(\alpha^G(C/C_d)) \\ &= \varphi_{W_0}(x) - \frac{\varphi_{W_0}(x)}{[G : W_0]} \varphi_{C_d}(C/C_d) \\ &= \varphi_{W_0}(x) - \frac{\varphi_{W_0}(x)}{[G : W_0]} [G : W_0] \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Para todo subgrupo V de G tal que $|W_0| < |V|$, tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_V(y_0) &= \varphi_V(x) - \frac{\varphi_U(x)}{[G:U]}\varphi_V(\alpha^G(C/C_d)) \\
&= \varphi_V(x) - \frac{\varphi_U(x)}{[G:U]}\varphi_{C_{|V|}}(\alpha^G(C/C_d)) \\
&= 0 - \frac{\varphi_U(x)}{[G:U]}0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si V es un subgrupo de G tal que $|W_0| \leq |V|$, entonces $\varphi_V(y_0) = 0$. lo que implica que si $Z \leqslant G$ es de orden máximo tal que $\varphi_Z(y_0) \neq 0$, entonces $|Z| < |W_0|$.

Por este proceso inductivo sobre el orden de los U_i´s concluimos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal $y_n = 0$, de donde concluimos que y_{i-1} está en $\alpha^G B(C)$ para todo $i < n$, por lo tanto x esta en $\alpha^G(B(C))$. Así que α^G es un isomorfismo de anillos entre $B(C)$ y $B_0(G)$.

- Supongamos que α^G es un isomorfismo ente $B(C)$ y $B_0(G)$.
  Sea p un número primo tal que $p \in Div(|G|)$, y P un p-subgrupo de Sylow de G, por el Teorema de [3] tenemos que existe un $x_P \in B(G)$ tal que

  $$\varphi_U(x_P) = \begin{cases} p \cdot [N_G(P):P] & \text{si } U \sim_G P \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

  y ya que todos los subgrupos conjugados a P tienen el mismo orden que P, obtenemos que x_P está en $B_0(G)$, entonces existe $y \in B(C)$ tal que $\alpha^G(y) = x_P$. Por la definición de x_P obtenemos que $P \leqslant G$ es maximal con la propiedad

  $$\varphi_P(x_P) \neq 0,$$

  lo que implica que $C_{|P|}$ es maximal con la propiedad

  $$\varphi_{C_{|P|}}(y) \neq 0.$$

  Por el Lema 1.4.10, necesariamente tenemos que

  $$\varphi_P(x_p) = \varphi_{C_{|P|}}(y) \equiv 0 \bmod [C : C_{|P|}],$$

  es decir

  $$\varphi_P(x_p) = p \cdot [N_G(P):P] \equiv 0 \bmod [G:P]$$

  y ya que $[G:P]$ no divide a p, entonces $[G:P]$ tiene que dividir a $[N_G(P):P]$, así que $N_G(P) = G$, es decir P es normal en G. Por lo tanto todo p-subgrupo de Sylow es un subgrupo normal de G, por lo tanto G es nilpotente (Lema 2.4.4).

$\square$

Capítulo 3

Propiedades funtoriales de α

En este capítulo veremos como se relaciona el homomorfismo α con las operaciones definidas en la sección 1.5.

3.1. Diagramas conmutativos

Sea H subgrupo de G, recordemos que la operación Res^G_H está definida como

$$\begin{aligned} Res^G_H : B(G) &\longrightarrow B(H) \\ x &\longmapsto Res^G_H(x). \end{aligned}$$

Lema 3.1.1. *El siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} B(C) \arrow[r, "\alpha^G"] \arrow[d, "Res^C_{C_{|H|}}"'] & B(G) \arrow[d, "Res^G_H"] \\ B(C_{|H|}) \arrow[r, "\alpha^H"] & B(H). \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $x \in B(C)$. Por el Lema 1.4.7, es suficiente demostrar que:

$$\varphi_U\left(\alpha^H\left(Res^C_{C_{|H|}}(x)\right)\right) = \varphi_U\left(Res^G_H\left(\alpha^G(x)\right)\right) \tag{3.1}$$

para todo subgrupo U de H, y ya que Res^G_H es un homomorfismo de anillos, sólo hay que demostrar 3.1 para X un C-conjunto, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_U\left(\alpha^H\left(Res^C_{C_{|H|}}(X)\right)\right) &= \varphi_U(\alpha^H(X)) = \varphi_{C_{|U|}}(X) \\ &= \varphi_U(\alpha^G(X)) \\ &= \varphi_U\left(Res^G_H\left(\alpha^G(X)\right)\right), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\alpha^H \circ Res^C_{C_{|H|}} = Res^G_H \circ \alpha^G.$$

$\square$

Sea U subgrupo de G. Recordemos que la operación Ind^G_U está definida en el Lema 1.5.5.

Definición 3.1.2. Sean G y H grupos finitos. Si f es una función de $B(G)$ a $B(H)$ y c un elemento de $B(H)$, definamos a cf por

$$\begin{aligned} cf : B(G) &\longrightarrow B(H) \\ x &\longmapsto cf(x). \end{aligned}$$

Lema 3.1.3. *Sea U un subgrupo de G. El siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} B(C_{|U|}) \arrow[r, "\alpha^U"] \arrow[d, "Ind^C_{C_{|U|}}"'] & B(U) \arrow[d, "\alpha^G(C/C_U)\cdot Ind^G_U"] \\ B(C) \arrow[r, "G/U\cdot\alpha^G"] & B(G). \end{tikzcd}$$

Demostración. Tenemos que demostrar que

$$\alpha^G(C/C_U) \cdot Ind^G_U(\alpha^U(x)) = G/U \cdot \alpha^G(Ind^C_{C_{|U|}}(x))$$

para todo x elemento de $B(C_{|U|})$.
Ya que la funciones Ind^G_U, $Ind^C_{C_{|U|}}$ y α son homomorfismo de grupos abelianos, entonces es suficiente demostrar lo anterior para los elementos $C_{|U|}/C_k$, donde C_k es subgrupo de $C_{|U|}$.
Notemos que

$$\alpha^G(C/C_U) \cdot Ind^G_U(\alpha^U(C_{|U|}/C_k))$$

es igual a (por el Lema 1.5.7)

$$Ind^G_U\left(Res^G_U(\alpha^G\left(C/C_{|U|}\right)\right) \cdot \alpha^U\left(C_{|U|}/C_k\right)$$

y por el Lema 3.1.1 lo anterior es igual a

$$\begin{aligned} Ind^G_U(\alpha^U(Res^C_{C_{|U|}}(C/C_U)\alpha^U(C_{|U|}/C_k)) =& Ind^G_U(\alpha^U(Res^C_{C_{|U|}}(C/C_U)\cdot(C_{|U|}/C_k))) \\ =& Ind^G_U(\alpha^U(|C/C_{|U|}|(C_{|U|}/C_k))). \end{aligned}$$

Por otra parte

$$G/U \cdot \alpha^G(Ind^C_{C_{|U|}}(C_{|U|}/C_k))$$

es igual a

$$Ind_U^G(U/U)\cdot\alpha^G(Ind_{C_{|U|}}^C(C_{|U|}/C_k))$$

y por el Lema 1.5.7, es igual a

$$Ind_U^G\left(Res_U^G\left(\alpha^G\left(Ind_{C_{|U|}}^C\left(C_{|U|}/C_k\right)\right)\right)\right)$$

aplicando el Lema 3.1.1, lo anterior es igual a

$$Ind_U^G\left(\alpha^U\left(Res_{C_{|U|}}^C\left(Ind_{C_{|U|}}^C\left(C_{|U|}/C_k\right)\right)\right)\right).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
Res_{C_{|U|}}^C\left(Ind_{C_{|U|}}^C\left(C_{|U|}/C_k\right)\right) &= \sum_{x\in[C_{|U|}\backslash C/C_{|U|}]} Ind_{C_{|U|}\cap^x C_{|U|}}^{C_{|U|}}\,{}^x Res_{C_{|U|}{}^x\cap C_{|U|}}^{C_{|U|}}(C_{|U|}/C_k)\\
&= \sum_{x\in[C_{|U|}\backslash C/C_{|U|}]} C_{|U|}/C_k\\
&= |C/C_{|U|}|(C_{|U|}/C_k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha^G(C/C_{|U|})\cdot Ind_U^G\big(\alpha^U(C_{|U|}/C_k)\big) = G/U\cdot\alpha^G\left(Ind_{C_{|U|}}^C\left(C_{|U|}/C_k\right)\right).$$

$\square$

Lema 3.1.4. *Sea N un subgrupo normal de G, entonces el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
B(C_{[G:N]}) \arrow[r, "\alpha^{G/N}"] \arrow[d, "Inf_{C_{[G:N]}}^C"'] & B(G/N) \arrow[d, "Inf_{G/N}^G"] \\
B(C) \arrow[r, "\alpha^G"] & B(G)
\end{tikzcd}$$

conmuta si y sólo si para todo $U\leqslant G$ tenemos que $|U\cap N| = m.c.d.(|U|,|N|)$.

Demostración. Sea U subgrupo de G y x elemento de $B(C_{[G:N]})$. Por el Lema 1.4.7 es suficiente demostrar que

$$\varphi_U(\alpha^G(Inf_{C_{[G:N]}}^C(x))) = \varphi_U(Inf_{G/N}^G(\alpha^{G/N}(x)))$$

si y sólo si $|U \cap N| = m.c.d.(|U|, |N|)$.
Ya que Inf y α son homomorfismo de anillos es suficiente demostrar lo anterior para X un $C_{[G:N]}$-conjunto. Por un lado

$$\begin{aligned}
\varphi_U(\alpha^G(Inf^C_{C_{[G:N]}}(X)) &= \varphi_{C_{|U|}}(Inf^C_{C_{[G:N]}}(X)) \\
&= |\{y \in Inf^C_{C_{[G:N]}}(X) \mid uy = y \ \forall\ u \in C_{|U|}\}| \\
&= |\{y \in X \mid uC_{|N|} \cdot y = y \ \forall\ uC_N \in ((C_{|U|}C_{|N|})/C_{|N|})\}| \\
&= \varphi_{\frac{C_{|U|}C_{|N|}}{C_{|N|}}}(X).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\varphi_U(Inf^G_{G/N}(\alpha^{G/N}(X))) &= |\{y \in Inf^G_{G/N}(\alpha^{G/N}(X)) \mid uy = y \ \forall\ u \in U\}| \\
&= |\{y \in \alpha^{G/N}(X) \mid uN \cdot y = y \ \forall\ u \in (UN/N)\}| \\
&= \varphi_{C_{\left|\frac{UN}{N}\right|}}(X)
\end{aligned}$$

los cuales son iguales, si y sólo si

$$\left|\frac{U \cap N}{U}\right| = \left|\frac{C_{|U|} \cap C_{|N|}}{C_{|U|}}\right|$$

y esto sucede, sí y sólo si $|U \cap N| = |C_{|U|} \cap C_{|N|}|$, y ya que $C_{|U|} \cap C_{|N|} = C_d$ con $d = (|U|, |N|)$, obtenemos que

$$\varphi_U(\alpha^G(Inf^C_{C_{[G:U]}}(X))) = \varphi_U(Inf^G_{G/N}(\alpha^{G/N}(x)))$$

si y sólo si $|U \cap N| = m.c.d.(|U|, |N|)$.

$\square$

Recordemos que por el Lema 1.5.12 la función Fix es un homomorfismo de anillos.

Lema 3.1.5. *Sea N un subgrupo normal de G. Entonces el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
B(C) \arrow[r, "\alpha^G"] \arrow[d, "Fix^C_{C_{[G:N]}}"'] & B(G) \arrow[d, "Fix^G_{G/N}"] \\
B(C_{[G:N]}) \arrow[r, "\alpha^{G/N}"] & B(G/N).
\end{tikzcd}$$

Demostración. Ya que las funciones Fix y α son homomorfismo s de anillos, es suficiente demostrar que

$$\alpha^{G/N}(Fix^C_{C_{[G:N]}}(X)) = Fix^G_{G/N}(\alpha^G(X))$$

para todo X un C-conjunto.
Por el Lema 2.2.10 es suficiente demostrar que

$$\alpha^{G/N}\left(Fix^{C}_{C_{[G:N]}}\left(\binom{C/1}{d}\right)\right) = Fix^{G}_{G/N}\left(\alpha^{G}\left(\binom{C/1}{d}\right)\right)$$

para todo $d \in Div(|G|)$.
Sea $d \in Div(|G|)$ y consideremos el C-conjunto $\binom{C/1}{d}$ anteriormente definido. Tenemos dos casos:

- El orden de N no divide a d.
  Entonces por el Lema 2.2.5
  $$\binom{C/1}{d}^{C_{|N|}} = \emptyset,$$
  y ya que $\alpha^{G/N}$ es un homomorfismo de anillos, obtenemos que
  $$\alpha^{G/N}\left(\binom{C/1}{d}^{C_{|N|}}\right) = \emptyset.$$
  Por otro lado
  $$\alpha^{G}\left(\binom{C/1}{d}\right) = \binom{G/1}{d}$$
  y por el Lema 2.2.5, concluimos que
  $$\binom{G/1}{d}^{N} = \emptyset$$
  De tal forma que
  $$\alpha^{G/N}\left(Fix^{C}_{C_{[G:N]}}\left(\binom{C/1}{d}\right)\right) = Fix^{G}_{G/N}\left(\alpha^{G}\left(\binom{C/1}{d}\right)\right).$$

- Supongamos que $|N|$ divide a d.
  Definamos a $m = d/|N|$ y a $G_N = G/N = \{g_1N, ..., g_{[G:N]}N\}$. Por la demostración del Lema 2.2.5, podemos concluir que $Y \in \binom{G/1}{d}^{N}$ si y sólo si existe $I_Y \subseteq \{1, ..., [G:N]\}$, tal que
  $$Y = \bigsqcup_{i \in I_Y} g_iN.$$

Como $m \in Div([G:N])$, podemos concluir que

$$\binom{G/1}{d}^N = \left\{ Y \in \binom{G/1}{d} \mid Y = \bigsqcup_{i \in I} g_i N, \text{ tal que } I \subseteq \{1, ..., [G:N]\} \text{ y } |I| = \frac{d}{|N|} \right\} \tag{3.2}$$

que es isomorfo como (G/N)-conjunto a

$$\binom{G_N/1}{m}.$$

Además como $\alpha^G(\binom{G/1}{d}) = \binom{C/1}{d}$, entonces

$$Fix^G_{G/N}\left(\alpha^G\left(\binom{C/1}{d}\right)\right) = Fix^G_{G/N}\left(\binom{G/1}{d}\right)$$

que es igual a

$$\binom{G/1}{d}^N = \binom{G_N/1}{m}.$$

Análogo a (3.2), podemos demostrar que

$$\binom{C/1}{d}^{C_{|N|}} = \binom{C_{[G:N]}/1}{d/|N|}.$$

Así que

$$\alpha^{G/N}\left(Fix^C_{C_{[G:N]}}\binom{C/1}{d}\right) = \alpha^{G/N}\left(\binom{C/1}{d}^{C_{|N|}}\right)$$

es igual a

$$\alpha^{G/N}\binom{C_{[G:N]}/1}{d/|N|}$$

y por el Lema 2.2.5, obtenemos que lo anterior es igual a

$$\binom{G_N/1}{m}.$$

Por lo tanto

$$\alpha^{G/N}\left(Fix^C_{C_{[G:N]}}\left(\binom{C/1}{d}\right)\right) = Fix^G_{G/N}\left(\alpha^G\left(\binom{C/1}{d}\right)\right)$$

para todo $d \in Div(|G|)$.

Por consiguiente, el diagrama conmuta $\square$

Más adelante veremos un ejemplo donde el siguiente diagrama no conmuta

$$\begin{tikzcd} B(C) \arrow[r, "\alpha^G"] \arrow[d, "Def^C_{C_{[G:N]}}"'] & B(G) \arrow[d, "Def^G_{G/N}"] \\ B(C_{[G:N]}) \arrow[r, "\alpha^{G/N}"] & B(G/N). \end{tikzcd}$$

Capítulo 4

Un ejemplo

4.1. Los Cuaterniones

El grupo de cuaterniones de orden 8 es el conjunto

$$\mathbb{H} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

que satisface

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Es sobreentendido que -1 conmuta con i, j, k y que $(-1)i = -i$, $(-1)j = -j$, $(-1)k = -k$. Por [5] sabemos que todos los subgrupos de $\mathbb{H}$ son:

- $\{1\}$.
- $\mathbb{H}_1 = \{\pm 1\}$.
- $\mathbb{H}_i = \{\pm 1, \pm i\}$.
- $\mathbb{H}_j = \{\pm 1, \pm j\}$.
- $\mathbb{H}_k = \{\pm 1, \pm k\}$.
- $\mathbb{H}$

y cada uno de ellos es un subgrupo normal de $\mathbb{H}$, por lo tanto

$$[\mathbb{H}/\{1\}], \ [\mathbb{H}/\mathbb{H}_1], \ [\mathbb{H}/\mathbb{H}_i], \ [\mathbb{H}/\mathbb{H}_j], \ [\mathbb{H}/\mathbb{H}_k] \ y \ [\mathbb{H}/\mathbb{H}]$$

es una base de $B(\mathbb{H})$. Gracias a esto podemos saber como está definido el homomorfismo

$$\alpha^{\mathbb{H}} : B(C_8) \longrightarrow B(\mathbb{H}),$$

solo encontrando la imagen de los elementos de la base de C_8 en términos de la base anterior. Denotaremos a $\alpha^{\mathbb{H}}(C_8/C_i)$ por X_i, donde C_i denota el grupo cíclico de orden i, para $i = 1, 2, 4$ y 8.

- X_8.
  Sabemos que

$$X_8 = \mathbb{H}/\mathbb{H}$$

  por ser $\alpha^{\mathbb{H}}$ un homomorfismo de anillos.

- X_1.
  Por los lemas 1.4.6 y 1.4.10, obtenemos que

$$X_1 = \mathbb{H}/\{1\}.$$

- X_4.
  Expresamos a X_4 como

$$\begin{aligned} X_4 =& a_{\{1\}}(X_4)[\mathbb{H}/\{1\}] + a_{\mathbb{H}_i}(X_4)[\mathbb{H}/\mathbb{H}_i] + a_{\mathbb{H}_j}(X_4)[\mathbb{H}/\mathbb{H}_j] \\ &+ a_{\mathbb{H}_k}(X_4)[\mathbb{H}/\mathbb{H}_k] + a_{\mathbb{H}}(X_4)[\mathbb{H}/\mathbb{H}] + a_{\mathbb{H}_1}(X_4)[\mathbb{H}/\mathbb{H}_1]. \end{aligned}$$

  por el Teorema 2.1.6 sabemos que

$$\varphi_{\mathbb{H}}(X_4) = \varphi_{C_{|\mathbb{H}|}}(C_8/C_4) = 0,$$

  y el Lema 1.4.6 tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{H}}(X_4) =& a_{\{1\}}(X_4) \cdot \varphi_{\mathbb{H}}([\mathbb{H}/\{1\}]) + a_{\mathbb{H}_i}(X_4) \cdot \varphi_{\mathbb{H}}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_i]) \\ &+ a_{\mathbb{H}_j}(X_4) \cdot \varphi_{\mathbb{H}}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_j]) + a_{\mathbb{H}_k}(X_4) \cdot \varphi_{\mathbb{H}}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_k]) \\ &+ a_{\mathbb{H}}(X_4) \cdot \varphi_{\mathbb{H}}([\mathbb{H}/\mathbb{H}]) + a_{\mathbb{H}_1}(X_4) \cdot \varphi_{\mathbb{H}}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_1]) \\ &= a_{\mathbb{H}}(X_4) = 0. \end{aligned}$$

  por lo tanto $a_{\mathbb{H}}(X_4) = 0$, por otro lado sabemos que

$$\varphi_{\mathbb{H}_i}(X_4) = \varphi_{\mathbb{H}_i}(\alpha([C_8/C_4])) = \varphi_{C_{|\mathbb{H}_i|}}([C_8/C_4]) = 2,$$

y

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{H}_i}(X_4) =& a_{\mathbb{H}_i}(X_4)\cdot\varphi_{\mathbb{H}_i}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_i]) + a_{\mathbb{H}_j}(X_4)\cdot\varphi_{\mathbb{H}_i}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_j])\\ &+ a_{\mathbb{H}_k}(X_4)\cdot\varphi_{\mathbb{H}_i}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_k]) + a_{\mathbb{H}_1}(X_4)\cdot\varphi_{\mathbb{H}_i}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_1]\\ =&\varphi_{C_4}(X_4) = [C_8 : C_4] = 2\end{aligned}$$

y ya que $\mathbb{H}_i$ no es conjugado de $\mathbb{H}_k$ ni de $\mathbb{H}_j$, entonces lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{H}_i}(X_4) =& a_{\mathbb{H}_i}(X_4)\cdot\varphi_{\mathbb{H}_i}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_i]) = a_{\mathbb{H}_i}(X_4)\cdot[N_{\mathbb{H}_i} : \mathbb{H}_i]\\ =& a_{\mathbb{H}_i}(X_4)\cdot[\mathbb{H} : \mathbb{H}_i] = a_{\mathbb{H}_i}(X_4)\cdot 2\end{aligned}$$

por lo tanto $a_{\mathbb{H}_i}(X_4) = 1$. Análogamente obtenemos que $a_{\mathbb{H}_j}(X_4) = 1$ y $a_{\mathbb{H}_k}(X_4) = 1$. Ahora

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{H}_1}(X_4) =& \varphi_{\mathbb{H}_1}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_i]) + \varphi_{\mathbb{H}_1}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_j])\\ &+ \varphi_{\mathbb{H}_1}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_k]) + a_{\mathbb{H}_1}(X_4)\cdot\varphi_{\mathbb{H}_1}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_1]\\ =&\varphi_{C_2}(X_4) = [C_8 : C_2] = 4\end{aligned}$$

por otro lado, ya que $\mathbb{H}_1 < \mathbb{H}_c$, para $c = i, j, k$ y por el Lema 1.4.9, obtenemos que

$$\varphi_{\mathbb{H}_1}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_c]) = [N_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}_c) : \mathbb{H}_c] = 2$$

por lo tanto

$$\varphi_{\mathbb{H}_1}(X_4) = 6 + a_{\mathbb{H}_1}(X_4)\cdot\varphi_{\mathbb{H}_1}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_1] = 6 + a_{\mathbb{H}_1}(X_4)\cdot 2$$

por lo tanto $a_{\mathbb{H}_1}(X_4) = -1$. Ahora

$$\begin{aligned}\varphi_{\{1\}}(X_4) &= a_{\{1\}}(X_4)\cdot\varphi_{\{1\}}([\mathbb{H}/\{1\}]) + \varphi_{\{1\}}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_i])\\ &+ \varphi_{\{1\}}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_j]) + \varphi_{\{1\}}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_k]) - \varphi_{\{1\}}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_1])\\ &= a_{\{1\}}(X_4)\cdot 8 + 2 + 2 + 2 - 4\\ &= \varphi_{\{1\}}(X_4) = 2.\end{aligned}$$

por lo tanto $a_{\{1\}}(X_4) = 0$.

Asi que

$$X_4 = [\mathbb{H}/\mathbb{H}_i] + [\mathbb{H}/\mathbb{H}_j] + [\mathbb{H}/\mathbb{H}_k] - [\mathbb{H}/\mathbb{H}_1].$$

- X_2.
  Entonces

$$\begin{aligned}X_2 =& a_{\{1\}}(X_2)[\mathbb{H}/\{1\}] + a_{\mathbb{H}_i}(X_2)[\mathbb{H}/\mathbb{H}_i] + a_{\mathbb{H}_j}(X_2)[\mathbb{H}/\mathbb{H}_j]\\ &+ a_{\mathbb{H}_k}(X_2)[\mathbb{H}/\mathbb{H}_k] + a_{\mathbb{H}}(X_2)[\mathbb{H}/\mathbb{H}] + a_{\mathbb{H}_1}(X_2)[\mathbb{H}/\mathbb{H}_1].\end{aligned}$$

Por el lema 1.4.10 obtenemos que

$$a_{\mathbb{H}}(X_2) = a_{\mathbb{H}_i}(X_2) = a_{\mathbb{H}_k}(X_2) = a_{\mathbb{H}_j}(X_2) = 0.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbb{H}_1}(X_2) &= a_{\{1\}}(X_2)\varphi_{\mathbb{H}_1}([\mathbb{H}/\{1\}]) + a_{\mathbb{H}_1}(X_2)\varphi_{\mathbb{H}_1}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_1]) \\
&= a_{\mathbb{H}_1}(X_2)\varphi_{\mathbb{H}_1}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_1]) = a_{\mathbb{H}_1}(X_2)\cdot[N_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}_1):\mathbb{H}_1] \\
&= a_{\mathbb{H}_1}(X_2)\cdot 4 = \varphi_{C_2}(X_2) = [N_{C_8}(C):C_2] = 4,
\end{aligned}$$

por lo tanto $a_{\mathbb{H}_1}(X_2) = 1$, por otro lado

$$\begin{aligned}
\varphi_{\{1\}}(X_2) &= a_{\{1\}}(X_2)\varphi_{\{1\}}([\mathbb{H}/\{1\}]) + a_{\mathbb{H}_1}(X_2)\varphi_{\{1\}}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_1]) \\
&= a_{\{1\}}(X_2)\cdot 8 + 4 \\
&= \varphi_{\{1\}}(X_2) = 4.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$X_2 = [\mathbb{H}/\mathbb{H}_1].$$

Observación 4.1.1. Ya que $\mathbb{H}$ es un grupo nilpotente, por el Lema 2.4.8 tenemos que $\alpha^{\mathbb{H}}$ es un isomorfismo entre $B(C_8)$ y $B_0(\mathbb{H})$, y

$$\{[\mathbb{H}/\mathbb{H}],\ [\mathbb{H}/\{1\}],\ [\mathbb{H}/\mathbb{H}_1],\ [\mathbb{H}/\mathbb{H}_i] + [\mathbb{H}/\mathbb{H}_j] + [\mathbb{H}/\mathbb{H}_k] - [\mathbb{H}/\mathbb{H}_2]\}$$

es una base de $B_0(\mathbb{H})$.

Ahora demostremos que el siguiente diagrama no conmuta

$$\begin{tikzcd}
B(C_8) \arrow[r, "\alpha^{\mathbb{H}}"] \arrow[d, "Def^{C_8}_{C_{[\mathbb{H}:\mathbb{H}_i]}}"'] & B(\mathbb{H}) \arrow[d, "Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}"] \\
B(C_{[\mathbb{H}:\mathbb{H}_i]}) \arrow[r, "\alpha^{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}"] & B(\mathbb{H}/\mathbb{H}_i).
\end{tikzcd}$$

Demostración. Notemos que

$$Def^{C_8}_{C_{[\mathbb{H}:\mathbb{H}_i]}}([C_8/C_4]) = O_{C_2}([C_8/C_4]) = [C_2/\{1\}]$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\alpha^{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left(Def^{C_8}_{C_{[\mathbb{H}:\mathbb{H}_i]}}([C_8/C_4])\right) &= \alpha^{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}([C_2/\{1\}]) \\
&= \left[\frac{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}{\{1\}}\right].
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left(\alpha^{\mathbb{H}}\left([C_8/C_4]\right)\right) = Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left([\mathbb{H}/\mathbb{H}_i] + [\mathbb{H}/\mathbb{H}_j] + [\mathbb{H}/\mathbb{H}_k] - [\mathbb{H}/\mathbb{H}_1]\right)$$

y ya que $Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}$ es un homomorfismo de grupos abelianos, lo anterior es igual a

$$Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left([\mathbb{H}/\mathbb{H}_i]\right) + Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left(\mathbb{H}/\mathbb{H}_j]\right) + Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left(\mathbb{H}/\mathbb{H}_k]\right) - Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left(\mathbb{H}/\mathbb{H}_2]\right)$$

dado que

- $Def^{\mathbb{H}}_{[\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left([\mathbb{H}/\mathbb{H}_i]\right) = O_{\mathbb{H}_i}\left([\mathbb{H}/\mathbb{H}_i]\right) = \mathbb{H}/\mathbb{H}_i = \left[\frac{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}{\{1\}}\right]$.
- $Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left([\mathbb{H}/\mathbb{H}_j]\right) = O_{\mathbb{H}_i}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_j]) = [\{\cdot\}] = \left[\frac{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\right]$.
- $Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left([\mathbb{H}/\mathbb{H}_k]\right) = O_{\mathbb{H}_i}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_k]) = [\{\cdot\}] = \left[\frac{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\right]$.
- $Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left([\mathbb{H}/\mathbb{H}_1]\right) = O_{\mathbb{H}_i}([\mathbb{H}/\mathbb{H}_1]) = [\mathbb{H}/\mathbb{H}_i] = \left[\frac{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}{\{1\}}\right]$.

concluimos que

$$Def^{\mathbb{H}}_{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\left(\alpha^{\mathbb{H}}\left([C_8/C_4]\right)\right) = \left[\frac{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\right] + \left[\frac{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}{\mathbb{H}/\mathbb{H}_i}\right].$$

por lo tanto el diagrama no conmuta.

$\square$

Bibliografía

[1] Serge Bouc. *Burnside rings, en Handbook of Algebra, vol 2.* M. Hazewinkel, North Holland, 200.

[2] William Burnside. *Theory of groups of finite order.* Cambridge University Press, 1911.

[3] Andreas W. M. Dress and E. Vallejo. A simple proof for a result for a result by Kratzer and Thevenaz concerning the embedding of the Burnside ring into its ghost ring. *Instituto de Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México*, preprint 1990.

[4] Andreas W.M. Dress, Christian Siebeneicher, and Tomoyuki Yoshida. An application of Burnside rings in elementary finite group theory. *Advances in Mathematics*, 91(1):27–44, 1992.

[5] David Steven Dummit and Richard M Foote. *Abstract algebra.* Wiley Hoboken, 2004.

[6] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups.* Springer, New York, 1994.

[7] Louis Solomon. The Burnside algebra of a finite group. *Journal of Combinatorial Theory*, 2(4):603–615, 1967.

[8] Richard P. Stanley. *Enumerative Combinatorics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.