# Universidad de Guanajuato

# Selección de Portafolio Multiperiodo Media - Varianza

T E S I S

Que para obtener el título de

**Licenciado en Matemáticas**

P R E S E N T A:

**Verónica Alarcón Márquez**

Director de Tesis:

Dr. Leonel R. Pérez Hernández

GUANAJUATO, GTO SEPTIEMBRE 2017

# Índice general


**Agradecimientos** **2**

**Introducción** **2**

**1. Programación Dinámica** **5**
1.1. Problemas de decisión en múltiples etapas . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
1.2. Ecuación de Optimalidad . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
1.3. El Principio de Optimalidad en procesos estocásticos . . . . . . . . . . . 12
1.4. Algoritmo de Programación Dinámica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

**2. Portafolio Multiperiodo Media-Varianza** **17**
2.1. Formulación media-varianza para selección de portafolio multiperiodo . 17
2.2. Problema Auxiliar . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
2.2.1. Formulación y propiedades del problema auxiliar . . . . . . . . . 21
2.2.2. Solución analítica para el problema auxiliar . . . . . . . . . . . 24
2.2.3. Relación entre los problemas $E(w)$ y $A(\lambda, w)$ . . . . . . . . . . . 29
2.3. Solución del Problema $E(w)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
2.4. Selección de portafolio multiperiodo en un mercado con un activo libre de riesgo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
2.5. Algoritmo de solución para el problema $E(w)$ . . . . . . . . . . . . . . 42
2.6. Generalización al caso de una función de utilidad no lineal de $\mathbb{E}[X_T]$ y $\mathbb{V}[X_T]$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43

**3. Ejemplos y Aplicación** **45**
3.1. Ejemplos de aplicación de la solución . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
3.2. Aplicación con datos del mercado mexicano local . . . . . . . . . . . . 49

**Apéndice A** **51**
3.3. Optimización Multiobjetivo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
3.4. Teorema 3.1 [Reid & Citron] para el problema $A(\lambda, w)$. . . . . . . . . . 54

**Bibliografía** **57**

# Agradecimientos

Gracias a mi familia, en especial a mis padres por su apoyo incondicional y su incansable labor de ayudarnos a salir adelante a mí, a mis hermanas y hermanos; porque siempre hemos visto en ellos un ejemplo de perseverancia y hemos recibido en todo momento una palabra de aliento para seguir adelante incluso en los momentos más difíciles.

A mis amigos y compañeros, que durante este tiempo en Guanajuato hemos vivido y compartido muy gratos momentos. En especial a Vanessa Bustos por ser cómplice y una verdadera amiga desde el inicio de licenciatura y a Javier Villaseñor por escucharme siempre y acompañarme en este tiempo.

Agradezco al Dr. Leonel Pérez Hernández por ser mi maestro, consejero y asesor de tesis, por acompañarme en la aventura de trabajar en un tema de nuestro interés y aprenderlo conmigo. Gracias por la paciencia y ayuda para completar los detalles del trabajo de tesis y por depositar en mi una gran confianza.

Gracias a las doctoras, Dra. Berta Gamboa y Dra. Helga Fetter por su ayuda y dedicación de entrenarme con temas de Análisis Matemático para aprobar de manera satisfactoria mi curso de licenciatura, gracias por la exigencia que permitió cultivar en mi el análisis y rigor matemático. Gracias al Dr. Johan VanHorebeek por las experiencias en actividades de divulgación como parte de mi servicio profesional, así como por la motivación y apoyo para lograr llegar al final de mi trabajo de tesis.

Agradezco a las instituciones que me han apoyado económicamente. Gracias al programa de becas de excelencia de CIMAT, por el apoyo de algunos de mis semestres de estudios de licenciatura, así como el apoyo beca tesis durante dos meses. Gracias en especial al apoyo recibido por parte del proyecto del CONACyT CB 252996 *Modelos con estructuras de dependencia y sus aplicaciones II*, agradezco enormemente a la Dra. Graciela González Farías, responsable de proyecto, que me proporcionó una gran ayuda al financiar parcialmente este trabajo de tesis.

Gracias a los sinodales Dr. Daniel Hernández Hernández, Dr. José Luis Pérez Garmendia y Dr. Netzahualcóyotl Castañeda Leyva por leer mi tesis y por sus apreciables comentarios y observaciones.

# Introducción

En este trabajo abordaremos el problema de selección de portafolio en un contexto multiperiodo, es decir, se desea encontrar una asignación óptima del capital en los distintos periodos dentro de un horizonte de tiempo establecido. Se considera un mercado de capital que consiste en $(n+1)$ activos previamente elegidos, de los cuales $n$ son activos riesgosos y un activo libre de riesgo. Un inversor con un capital inicial $x_0$ entra al mercado al tiempo 0 y distribuye su capital en los $(n+1)$ activos. En el enfoque multiperiodo, se redistribuye este capital al inicio de cada uno de los $(T-1)$ periodos de tiempo consecutivos.

Particularmente, se estudia este problema con un enfoque media-varianza. El problema original de un periodo, fue presentado por Markowitz (1952, 1959, 1989). Hubo de transcurrir después de este trabajo casi medio siglo para que emergiera la primera contribución que proporcionara una solución analítica con este enfoque, dado que es difícil dar soluciones analíticas pues el término de la varianza no cumple la propiedad de separabilidad en el sentido de programación dinámica.

Es totalmente el mérito de Li & Ng (2000) el proporcionar una solución al problema multiperiodo donde se obtiene una solución analítica al considerar un esquema de solución que consiste en un encaje del problema original, *tradeoff* riesgo - retorno, dentro de un problema auxiliar que es separable en el sentido de programación dinámica y por lo tanto puede resolverse mediante esta técnica. Además se dan condiciones en los parámetros de la solución del problema auxiliar y así derivar una solución para el problema original.

En el primer capítulo de este trabajo se presenta un resumen sobre programación dinámica, se define un modelo de decisión multietapa o multiperiodo; así como la definición de separabiblidad y las condiciones que permiten la validez de la ecuación de optimalidad. Se explica el algoritmo de programación dinámica para la solución de un problema de decisión multiperiodo.

La parte principal de este trabajo es presentada en el capítulo 2, donde se desarrolla la solución analítica del problema de selección de portafolio multiperiodo presentada en [1] en el caso donde se tiene un mercado con $(n+1)$ activos riesgosos, luego se reduce esta solución al caso cuando se tiene un activo libre de riesgo y $n$ activos riesgosos. De manera resumida se presenta un algoritmo de solución en este caso. Por último, se hace una generalización del método de solución cuando se tiene una función de utilidad no lineal del valor esperado y varianza del capital final.

El trabajo de Li & Ng, ha dado iniciativa a que se desarrollen muchos otros sobre las características de esta solución, como en [11] donde se muestra que la solución obtenida no es *consistente en el tiempo en eficiencia*, sin embargo, si es eficiente respecto del capital inicial del horizonte de inversión. En ese mismo trabajo, se dan soluciones para este problema.

Es importante hacer notar, que muchos trabajos de la literatura reciente sobre portafolio multiperiodo, entre ellos, el trabajo de Li & Ng (2000), consideran el supuesto de que los retornos de los activos riesgosos son independientes entre los periodos de tiempo, mientras que hay evidencia empírica de que los rendimientos son correlacionados. En el trabajo de Gao & Li (2014) se presenta una solución al problema cuando los rendimientos de los activos riesgosos son correlacionados entre los periodos de tiempo, en este trabajo se presenta un ejemplo con dos activos que siguen un modelo AR(1). Sin embargo, el estudio de este trabajo y otros relacionados con este enfoque, se propone analizarlo como trabajo futuro.

# Capítulo 1

# Programación Dinámica

En este capítulo resumiremos una técnica aplicada para encontrar soluciones de problemas de optimización bajo incertidumbre. Estos problemas de decisión poseen características distintivas que no tienen los problemas de optimización deterministas, tales como tomar en cuenta el riesgo en la formulación del problema de decisión y la posibilidad de disponer de información que permita retroalimentar la información del sistema *(feedback)* durante el proceso de decisión.

En este tipo de problemas la evolución de los estados en el tiempo está dado por la ecuación

$$S_{k+1} = H(k, s_k, u_k, Y_k) \ , \ k = 0, 1, \cdots, T-1,$$

donde $s_k$ denota el *estado* del sistema al tiempo $k$ y es un elemento del espacio de estados $S_k$, el *control* $u_k$ es un elemento del espacio $\mathbb{U}$, y $Y_k$ representa una variable aleatoria de un espacio $\Omega$, que interviene en el desempeño del sistema y la función $H$ proporciona la dinámica del sistema, es conocida como función de *transición de estados.*

El control $u_k$ está restringido a tomar valores en un subconjunto dado no vacío $U_k(s_k) \subseteq \mathbb{U}$, el cual depende del estado actual $s_k$, esto es, $u_k \in U_k(s_k)$ para todo $s_k \in S_k$ y $k = 0, 1, \ldots, T-1$.

La variable aleatoria $Y_k$ está caracterizada por una distribución de probabilidad $P_k(\cdot|s_k, u_k)$ que puede depender explícitamente de $s_k$ y $u_k$ pero no de las perturbaciones anteriores $Y_{k-1}, \ldots, Y_0$.

Vamos a considerar que el sistema es analizado en $T$ etapas consecutivas (*horizonte finito*). Suponemos que el control $u_k$ es elegido por un tomador de decisiones, quien tiene conocimiento del estado actual $s_k$ del sistema.

Por lo tanto, podemos considerar que buscamos un control del sistema de la forma:

$$\{u_0(s_0), u_1(s_1), \ldots, u_{T-1}(s_{T-1})\}.$$

Este control es una secuencia de funciones que dependen del estado actual. Es decir, en cada tiempo $k$ el controlador observa el estado actual del sistema $s_k$ y aplica el control $u_k(s_k)$; después de aplicarse ocurre la realización de la variable aleatoria $Y_k$ y se obtiene el estado al tiempo $k+1$ de acuerdo a la restricción para $s_{k+1}$. Este estado es observado por el tomador de decisiones y aplica el control $u_{k+1}(s_{k+1})$ y así el proceso se repite.

Este procedimiento implica una retroalimentación de los estados del sistema durante el proceso, en cada decisión se considera la información del estado actual y el control elegido depende del estado del sistema en cada tiempo.

En el contexto de problemas para el caso estocástico cuando los conjuntos de estados y de controles son finitos o numerables, pueden revisarse referencias como [15] y [16]. En esta última, se hace un desarrollo completo en el caso particular en que la función objetivo tiene una estructura aditiva.

Cuando se tiene una función objetivo con una estructura más general, es necesario obtener condiciones suficientes para que se satisfaga el principio de optimalidad y así poder hacer uso del algoritmo de programación dinámica, para formalizar estas ideas, se presenta la siguiente sección.

## 1.1. Problemas de decisión en múltiples etapas

Definiremos la estructura básica de un problema de optimización en múltiples etapas o periodos y sobre este se explicarán los requerimientos que justifican el uso de las herramientas de programación dinámica en la solución del problema, cuando se tiene un espacio de estados no numerable.

**Definición 1.1.1.** Un *modelo de decisión multietapa* es una colección $(T, \mathbb{S}, U, H, \mathbb{S}_0, g)$ donde,

- $T$ es un entero positivo que especifica el número de etapas de decisión que comprenden todo el proceso de toma de decisiones. En este estudio supondremos que $T < \infty$. Definimos el conjunto de etapas por $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots T-1\}$.

- $\mathbb{S}$ es un conjunto no vacío, llamado *espacio de estados* y sus elementos son los posibles estados del sistema.

- $U : \mathbb{T} \times \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{U}$ es una función tal que a cada par $(t, s) \in (\mathbb{T} \times \mathbb{S})$ le asigna un subconjunto de $\mathbb{U}$. Este subconjunto $U(t, s)$ se denomina *conjunto de decisiones o controles admisibles relativos al estado $s$ en la etapa $t$*. El conjunto $\mathbb{U}$ es llamado *espacio de decisión.*

- $H$ es una función sobre $\mathbb{T}\times\mathbb{S}\times\mathbb{U}\times\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ que toma valores en $\mathbb{S}$, es llamada *función de transición.* Entonces dada una realización $(t, s, u, y_t)$ tal que $t \in \mathbb{T}$, $s \in \mathbb{S}$ y $u \in U(t, s)$, el elemento $s' = H(t, s, u, y_t)$ designa el estado al inicio de la etapa $t+1$ que resulta de aplicar la decisión $u$ durante la etapa $t$.

· $\mathbb{S}_0$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{S}$ cuyos elementos son llamados estados iniciales.

· $g : \mathbb{S} \times \mathbb{U} \times \left[ \left( \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \right)^n \right]^{T-1} \longrightarrow \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ es una función denominada *función objetivo*. Se entiende que el valor de $g(s_0, u_0, u_1, \ldots, u_{T-1})$ especifica la rentabilidad total, es decir, el costo o beneficio que resulta de tomar las decisiones $u_0, u_1, \ldots, u_{T-1}$ durante las etapas $0, 1, \ldots, T-1$, respectivamente, y se han observado los estados $s_1, \ldots, s_{T-1}, s_T$ dado que el estado inicial fue $s_0 \in \mathbb{S}_0$.

Notemos que el estado final del proceso de decisión es observado en la etapa $T$ cuando todas las decisiones fueron tomadas, así el estado observado $s_T$ será referido como *estado final* del proceso de decisión.

Para el estudio de este tipo de problemas en el caso determinista, referirse a [13], en esta sección, sólo consideraremos los resultados para el caso estocástico.

En este contexto, el estado observado $S_{t+1}$ en la etapa $t+1$ no está determinado únicamente por el estado $s_t$ y la decisión $u_t$ relativos a la etapa $t$, sino que depende adicionalmente de una ley de probabilidad condicional que a la vez depende del estado y la decisión tomada en la etapa $t$. Es decir, el estado es una variable aleatoria. Por lo tanto, es natural introducir la noción de regla de decisión, y más aún el concepto de regla de decisión de Markov.

Formalmente, una política Markoviana $\delta(t, s) : \mathbb{T} \times \mathbb{S}_k \longrightarrow \mathbb{U}(t, s)$ es una regla que a cada par etapa-estado $(t, s_t), 0 \leq t < T,\ s_t \in \mathbb{S}$, le asigna un elemento de $U(t, s_t)$. Denotemos por $\Delta$ el conjunto de todas las políticas Markovianas admisibles asociadas con nuestro modelo.

Podemos establecer un problema general, en este contexto, de la siguiente forma:

**Definición 1.1.2.** Se define el *Problema PS($s_0$): $s_0 \in \mathbb{S}$.*

$$f(s_0) \quad := \quad \text{opt}_{\delta \in \Delta} \left\{ \mathbb{E}\left[ g(s_0, \delta) \right] \ : \ S_{k+1} = H(k, s_k, u_k, y_k), U_k = \delta(k, s_k) \ k = 0, \ldots, T-1 \right\}.$$

O sea,

$$f(s_0) \quad := \quad \text{opt}_{\delta \in \Delta} \left\{ \begin{array}{lc} \mathbb{E}\left[ g(s_0, u_0, U_1, \ldots, U_{T-1}) \right] \ : & S_{k+1} = H(k, s_s, u_k, Y_k) \\ & U_k = \delta(k, S_k), \ k = 0, \ldots, T-1. \end{array} \right\}$$

donde $\mathbb{E}_{\delta, s_0}\left[ g\left( s_0, u_0, U_1, \ldots, U_{T-1} \right) \right]$ denota el valor esperado de $g$ que es generado por el proceso inducido por la condición inicial $S_0 = s_0$ y la política $\delta \in \Delta$.

Notemos que se hace distinción entre la variable aleatoria $S_t$ y el valor que toma $s_t$. El valor del estado inicial $S_0$ se supone conocido, esto es $\mathbb{P}\left[ S_0 = s_0 \right] = 1$ para algún

$s_0 \in S$ y las decisiones son determinadas por una política Markoviana $\delta$. Esto implica, que las decisiones mismas son variables aleatorias,

$$u_0 = \delta(0, s_0), \quad \text{y} \quad U_t = \delta(t, S_t), \quad 1 \leq t < T - 1.$$

En lo adelante, nos vamos a referir al problema $PS(s_0)$ como el *problema inicial* sobre el estado $s_0$. Y consideremos $\Delta^*(s_0)$ el conjunto de soluciones óptimas para el problema $PS(s_0)$. En caso de tratarse de un problema de maximización tendríamos por ejemplo,

$$\Delta^*(s_0) := \left\{\delta^* \in \Delta \ : \ u_0^* = \delta^*(0, s_0), \ U_k^* = \delta^*(k, S_k), k = 1, 2, \dots T - 1\right\}.$$

y además,

$$\mathbb{E}\left[g(s_0, u_0^*, U_1^*, \dots, U_{T-1}^*)\right] \geq \mathbb{E}\left[g(s_0, u_0, U_1, \dots, U_{T-1})\right] \ \forall \delta \in \Delta \tag{1.1}$$

donde $u_0 = \delta(0, s_0)$ y $u_k = \delta(k, s_k)$, para $k = 1, \dots, T - 1$.

El objetivo es encontrar una política $\delta^*$ con la cual la función de costo correspondiente sea mínima o máxima, dependiendo del problema, tal política se conoce como *optimal*; y la función de costo evaluada en esta política se conoce como *valor óptimo del problema.*

Notemos que para diferentes estados iniciales $s_0$ se pueden asociar distintos valores óptimos entonces nos referimos a la *función de valor óptimo* $f$ como la función que asocia el estado inicial $s_0$ con su valor óptimo $f(s_0)$.

A continuación veremos condiciones suficientes sobre el modelo del problema $PS(s_0)$ para que la ecuación funcional de programación dinámica se satisfaga. Para empezar, consideremos la definición que refiere a la propiedad de separabilidad en el sentido de programación dinámica, para el caso estocástico. Para más detalles consulte [13].

**Definición 1.1.3.** Sea $(T, \mathbb{S}, U, H, \mathbb{S}_0, g)$ un modelo de decisión multietapa. La función objetivo $g$ se dice que es *separable bajo esperanza condicional* si existe una función real $\rho$ y una secuencia de funciones $\mathbf{G} = (g_t : t = 0, 1, \dots, T - 1)$ tales que,

$$\begin{aligned} \rho \ &: \ \mathbb{T} \times \mathbb{S} \times \mathbb{U} \times \mathbb{S} \times \mathbb{R} \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \\ g_t \ &: \ \mathbb{S} \times \mathbb{U} \times \left[\left(\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})\right)^n\right]^{T-1} \ \longrightarrow \ \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}), \quad \forall t \in \mathbb{T} \end{aligned}$$

donde cada $g_t$ esta dada por,

$$g_t(s_t, u_t, S_{t+1}, U_{t+1}, \dots, U_{T-1}) = S_T$$

donde,

$$\begin{aligned} S_{k+1} \ &= \ H(k, S_k, U_k, Y_k), \quad k = t + 1, \dots, T - 1, \\ \text{y}, \quad (S_{t+1} - \mathbb{E}\left[S_{t+1}\right])S_{t+1} \ &= \ H(t, S_t, u_t, Y_t)\left(S_{t+1} - \mathbb{E}\left[S_{t+1}\right]\right) \end{aligned}$$

tales que,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[g_t\left(s_t,u_t,s_{t+1},U_{t+1},U_{t+2},\ldots,U_{T-1}\right)\right]\\&=\rho\left(t,s_t,u_t,s_{t+1},\mathbb{E}\left[g_{t+1}\left(s_{t+1},u_{t+1},S_{t+2},U_{t+2},U_{t+3},\ldots,U_{T-1}\right)\right]\right),\end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq T-1$; $s_t, s_{t+1} \in \mathbb{S}$, $\forall \delta \in \Delta$; $u_k = \delta(k, s_k)$, $k = t, \ldots, T-1$. Además, deberá cumplirse que,

$$\begin{aligned} g_0(s_0,u_0,S_1,U_1,\ldots,U_{T-1}) &= g(s_0,u_0,U_1,U_2,\ldots,U_{T-1})\mathbf{1}_{\mathbb{R}-\{0\}}\left(S_1-\mathbb{E}\left[S_1\right]\right)\\ &\quad +g_1(s_0,u_0,s_1,u_1,\ldots,u_{T-1})\mathbf{1}_{\{0\}}\left(S_1-\mathbb{E}\left[S_1\right]\right)\end{aligned}$$

Nos vamos a referir al par $(\rho, \mathbf{G})$ como un esquema de descomposición; $\rho$ se conoce como una *función de composición* y para cada $t \in \mathbb{T}$ nos referimos a $g_t$ como la *función objetivo modificada al tiempo $t$*. Supondremos que la función objetivo del problema $PS(s_0)$ es separable bajo esperanza condicional, en el sentido de programación dinámica y que $(\rho, \mathbf{G})$ es su esquema de descomposición.

Esta condición es muy importante, ya que programación dinámica clásica no es aplicable cuando en general, la función objetivo del problema es no separable [18].

Definimos a continuación los siguientes problemas modificados, para cada etapa $t \in \mathbb{T}$:

**Definición 1.1.4.** *Problema modificado PS(t,$s_t$):* $0 \leq t < T$, $s_t \in S$.

$$f_t(s_t) \quad := \quad \mathrm{opt}_{\delta\in\Delta}\mathbb{E}_{\delta,s_t}\left[g_t\left(s_t,u_t,U_{t+1},\ldots,U_{T-1}\right)\right]$$

donde $\mathbb{E}_{\delta,s_t}\left[g_t\right]$ denota el valor esperado de $g_t$ que es generado por el proceso inducido por la política $\delta$ y la condición inicial $S_t = s_t$.

**Definición 1.1.5.** *Problema modificado condicional PS(t,$s_t$,$u_t$,$s_{t+1}$):* $0 \leq t < T$, $s_t, s_{t+1} \in S$, $u_t \in U(t, s_t)$.

$$f_t(s_t,u_t,s_{t+1}) \quad := \quad \mathrm{opt}_{\delta\in\Delta}\mathbb{E}_{\delta,s_t,u_t,s_{t+1}}\left[g_t\left(s_t,u_t,s_{t+1},U_{t+1},\ldots,U_{T-1}\right)\right]$$

donde $\mathbb{E}_{\delta,s_t,u_t,s_{t+1}}\left[g_t\right]$ denota el valor esperado de $g_t$ generado por la política $\delta$ dado que $S_t = s_t$, $U_t = u_t$, $S_{t+1} = s_{t+1}$. Nos referiremos a este problema como el problema modificado condicional a $(t, s_t, u_t, s_{t+1})$.

Denotemos por $\Delta^*(t, s_t)$ al conjunto de soluciones óptimas para el problema *PS(t,$s_t$)* y sea $\Delta^*(t, s_t, u_t, s_{t+1})$ el conjunto de soluciones óptimas para el problema *PS(t,$s_t$, $u_t$, $s_{t+1}$)*. En caso de tratarse de un problema de maximización tendríamos entonces,

$$\Delta^*(t,s_t) := \left\{\begin{array}{ll} \delta^*\in\Delta: & u_t^* = \delta^*(t,s_t), \\ & U_k^* = \delta^*(k,S_k), \quad k = t+1,\ldots,T-1 \end{array}\right\}.$$

donde,

$$\mathbb{E}\left[g_t(s_t, u_t^*, S_{t+1}, U_{t+1}^*, U_{t+2}^*, \ldots, U_{T-1}^*)\right] \geq \mathbb{E}\left[g_t(s_t, u_t, S_{t+1}, U_{t+1}, U_{t+2}, \ldots, U_{T-1})\right]$$

para todo $\delta \in \Delta$ tal que $u_t = \delta(t, s_t)$ y $U_k = \delta(k, S_k)$, $k = t+1, \ldots T-1$.

Y de manera análoga, el conjunto de soluciones del problema modificado condicional, se puede expresar como,

$$\Delta^*(t, s_t, u_t, s_{t+1}) := \left\{ \begin{array}{lll} \delta^* \in \Delta : & u_t^* = \delta^*(t, s_t), & u_{t+1}^* = \delta^*(t+1, s+1), \\ & U_k^* = \delta(k, S_k), & k = t+2, \ldots, T-1 \end{array} \right\}.$$

donde,

$$\mathbb{E}\left[g_t(s_t, u_t, s_{t+1}, u_{t+1}^*, U_{t+2}^*, \ldots, U_{T-1}^*)\right] \geq \mathbb{E}\left[g_t(s_t, u_t, s_{t+1}, u_{t+1}, U_{t+2}, \ldots, U_{T-1})\right]$$

para todo $\delta \in \Delta$ tal que $u_t = \delta(t, s_t)$, $u_{t+1} = \delta(t+1, s_{t+1})$ y $U_k = \delta(k, S_k)$, $k = t+1, \ldots T-1$.

La condición que enunciamos a continuación resulta ser parte de las condiciones suficientes en un problema de decisión multietapa para que satisfaga la ecuación funcional de programación dinámica, como mostraremos más adelante.

**Definición 1.1.6.** *Condición de Markov en el caso estocástico.*
Se dice que un esquema de descomposición $(\rho, \mathbf{G})$ satisface la propiedad de Markov si los conjuntos de soluciones óptimas de los problemas modificado y modificado condicional satisfacen,

$$\Delta^*(t, s_t, u_t, s_{t+1}) = \Delta^*(t+1, s_{t+1}) \tag{1.2}$$

para todo $0 \leq t < T$, $s_t, s_{t+1} \in S$, $u_t \in U(t, s_t)$.

Entonces, de acuerdo a la definición de los problemas modificado y modificado condicional, se satisface el siguiente,

**Corolario 1.1.7.**

$$f_t(s_t) = opt_{u_t \in U(t,s_t)} \mathbb{E}_{s_t, u_t}\left[f_t\left(s_t, u_t, S_{t+1}\right)\right] \tag{1.3}$$

*para todo* $0 \leq t < T$ *y* $s_t \in \mathbb{S}$.

*Demostración.* Observemos que los problemas,

$$f_t(s_t) := \mathrm{opt}_{\delta \in \Delta} \mathbb{E}\left[g_t\left(s_t, u_t, S_{t+1}, U_{t+1}, \ldots, U_{T-1}\right)\right], \tag{1.4}$$

y,

$$\mathrm{opt}_{\bar{u}_t \in U(t,s_t)} \mathbb{E}\left[f_t\left(s_t, \bar{u}_t, S_{t+1}\right)\right] := \mathrm{opt}_{\bar{u}_t \in U(t,s_t)} \mathbb{E}\left[\mathrm{opt}_{\delta \in \Delta} \mathbb{E}\left[g_t\left(s_t, \bar{u}_t, S_{t+1}, U_{t+1}, U_{t+2}, \ldots, U_{T-1}\right)\right]\right] \tag{1.5}$$

tienen el mismo valor óptimo, pues la solución de cualquiera de ellos forma parte del dominio de soluciones del otro. □

*Observación* 1.1.8. Es importante enfatizar que el hecho de que ambos problemas tengan el mismo valor óptimo, esto **no** implica que el conjunto de soluciones de ambos coincida. De hecho, podrían mostrarse ejemplos en los que esto no se satisface, consulte [14] para más detalles.

Estas dos propiedades, tanto la separabilidad del problema como la propiedad de Markov del esquema $(\rho, \mathbf{G})$ son fundamentales para la ecuación funcional de programación dinámica.

## 1.2. Ecuación de Optimalidad

La *ecuación de optimalidad*, también es referida como *ecuación de Bellman* o *ecuación funcional*, es de gran utilidad puesto que proporciona herramientas que facilitan encontrar políticas óptimas para un problema de optimización.

El siguiente resultado, que refiere a la ecuación funcional de programación dinámica, puede encontrarse en [14], al igual que en el caso determinista, proporciona condiciones para la validez de la ecuación de optimalidad y así poder aplicar la técnica de programación dinámica. De acuerdo a las propiedades enunciadas en la sección anterior, estamos preparados para el siguiente,

**Teorema 1.2.1.** *Ecuación funcional para procesos estocásticos.*
*Si la función objetivo es separable bajo esperanza condicional y se satisface la propiedad de Markov en el contexto estocástico. Entonces,*

$$f_t(s_t) \quad = \quad opt_{u_t \in U(t,s_t)} \mathbb{E}_{s_t,u_t} \left[\rho\left(t, s_t, u_t, s_{t+1}, f_{t+1}(s_{t+1})\right)\right] \tag{1.6}$$

*para todo* $0 \leq t < T$, $s_t \in \mathbb{S}$.

*Demostración.* Notemos primero que por definición de $f_t(s_t)$, tenemos que para la etapa $t+1$,

$$f_{t+1}(s_{t+1}) = \mathbb{E}_{\delta^*,s_{t+1}} \left[g_{t+1}(s_{t+1}, u^*_{t+1}, S_{t+2}, U^*_{t+2}, U^*_{t+3}, \ldots, U^*_{T-1})\right] \quad \forall \delta^* \in \Delta^*(t+1, s_{t+1}) \tag{1.7}$$

De manera análoga,

$$f_t(s_t, u_t, s_{t+1}) = \mathbb{E}_{\delta^*,s_t,u_t,s_{t+1}} \left[g_t(s_t, u_t, s_{t+1}, U^*_{t+1}, U^*_{t+2}, \ldots, U^*_{T-1})\right] \quad \forall \delta^* \in \Delta^*(t, s_t, u_t, S_{t+1}) \tag{1.8}$$

Consideremos $\delta^* \in \Delta^*(t, s_t, u_t, S_{t+1})$, entonces aplicando la condición de que la función objetivo es separable bajo esperanza condicional, tenemos

$$\begin{aligned} f_t(s_t, u_t, s_{t+1}) \quad &= \quad \mathbb{E}_{\delta^*,s_t,u_t,s_{t+1}} \left[g_t(s_t, u_t, s_{t+1}, U^*_{t+1}, U^*_{t+2}, \ldots, U^*_{T-1})\right] \\ &= \quad \rho\left(t, s_t, u_t, s_{t+1}, \mathbb{E}_{\delta^*,s_{t+1}} \left[g_{t+1}\left(s_{t+1}, u^*_{t+1}, S_{t+2}, U^*_{t+2}, \ldots, U^*_{T-1}\right)\right]\right) \\ &= \quad \rho\left(t, s_t, u_t, s_{t+1}, f_{t+1}\left(s_{t+1}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde la última igualdad se satisface pues por la propiedad de Markov $\delta^* \in \Delta^*(t+1, s_{t+1})$, y se hizo uso de la ecuación (1.7).
Luego, al aplicar el corolario (1.1.7), obtenemos

$$f_t(s_t) = \text{opt}_{u_t \in U(t,s_t)} \mathbb{E}\left[f_t(s_t, u_t, s_{t+1})\right]$$

Por lo tanto, al sustituir (1.9 ) obtenemos el resultado,

$$f_t(s_t) = \text{opt}_{u_t \in U(t,s_t)} \mathbb{E}\left[\rho\left(t, s_t, u_t, s_{t+1}, f_{t+1}\left(s_{t+1}\right)\right)\right] \tag{1.10}$$

□

## 1.3. El Principio de Optimalidad en procesos estocásticos

La técnica de programación dinámica (DP) se basa en una idea simple, el *Principio de optimalidad.* El nombre se debe a Bellman, quién contribuyó en gran medida a la popularidad de programación dinámica, y a su transformación como una herramienta sistemática.

El contenido de esta sección puede revisarse en el Apéndice D de [13], en esta referencia se presenta con el motivo de justificar que el principio de Optimalidad de Bellman, se puede definir bien, en el contexto de procesos estocásticos con espacio de estados no numerables.

En el contexto de un modelo estocástico, el *Principio de Optimalidad* también conocido como *Principio de programación dinámica*, se puede establecer de la siguiente manera,

**Definición 1.3.1.** *Principio de Optimalidad (versión estocástica)*
Si $\delta$ es una política óptima con respecto al problema $SP(t, s_t, u_t, s_{t+1})$ para algunos $1 \leq t < T$, $s_t, s_{t+1}, \in S$ y $u_t \in U(t, s_t)$, entonces deberá ser óptima para el problema $PS(t+1, s_{t+1})$ para cualquier estado $s_{t+1}$ generado por la decisión $u_t = \delta(t, s_t)$ y la perturbación aleatoria en esta etapa.
En otras palabras, con respecto a los problemas estocásticos, el principio sostiene lo siguiente,

$$\Delta^*(t, s_t, u_t, s_{t+1}) \subseteq \Delta^*(t+1, s_{t+1}) \tag{1.11}$$

para todo $1 \leq t < T$, $s_t, s_{t+1} \in S$ y $u_t \in U(t, s_t)$.

*Ejemplo* 1.3.2. **Función Objetivo Aditiva.**
Comprobaremos la validez del principio de programación dinámica, cuando la función

objetivo tiene una estructura aditiva, esto es, consideramos el caso donde,

$$g(s_0, u_0, s_1, u_1, \ldots, s_{T-1}, u_{T-1}) := \sum_{t=0}^{T-1} \hat{g}_t(s_t, u_t, s_{t+1})$$

Por lo tanto, las funciones objetivo de los problemas modificados tienen siguiente forma:

$$g_t(s_t, u_t, s_{t+1}, u_{t+1}, \ldots, s_{T-1}, u_{T-1}, s_T) := \sum_{k=t}^{T-1} \hat{g}_k(s_k, u_k, s_{k+1}) \tag{1.12}$$

Suponemos también que las variables de estados, son variables aleatorias tales que la función de probabilidad de $S_{t+1}$ queda únicamente determinada por el valor de $S_t$ y la decisión tomada $u_t$ durante la etapa $t$. Por simplicidad, asumiremos que las variables de estados toman valores en un intervalo real finito $S = [a, b]$, $a < b$ y que $p_{t,s,u}$ denota la función de densidad de la probabilidad condicional de $S_{t+1}$ dado que $S_t = s$ y $U_t = u$, $u_t \in U(t, s)$. Así,

$$\mathbb{P}\left[u \leq S_{t+1} \leq v | \tilde{s}_t = s, \tilde{u}_t = u\right] := \int_u^v p_{t,s,u}(z) dz \tag{1.13}$$

es la probabilidad de que $S_{t+1}$ tome un valor en el intervalo $[u, v]$ dado que $S_t = s$ y $U_t = u$. Se sigue que,

$$\mathbb{P}\left[S_{t+1} = s' | S_t = s, U_t = u\right] = 0 \tag{1.14}$$

para todo $0 \leq t < T - 1$, $s \in \mathbb{S}$, $u \in U(t, s_t)$, $s' \in \mathbb{S}$.

El objetivo del problema es encontrar una política Markoviana que optimice el valor esperado de la función objetivo $g$ dado el estado inicial $s_0$. Para este problema, podemos definir los problemas modificado y modificado condicional como en las definiciones 1.1.4 y 1.1.5, al cambiar la expresión para la función objetivo por (1.12).

Vamos a comprobar que para este caso, se satisface el principio de optimalidad. Al tenerse que la función objetivo es aditiva, de la definición del problema modificado condicional correspondiente, tenemos que,

$$\begin{aligned} f_t(s_t, u_t, s_{t+1}) &= \sup_{\delta \in \Delta} \mathbb{E}_{\delta, s_t, u_t, s_{t+1}} \left[g_t\right] \\ &= \sup_{\delta \in \Delta} \mathbb{E}_{\delta, s_t, u_t, s_{t+1}} \left[\hat{g}_t(s_t, u_t, s_{t+1}) + g_{t+1}\right] \\ &= \sup_{\delta \in \Delta} \{\mathbb{E}_{s_t, u_t} \left[\hat{g}_t(s_t, u_t, s_{t+1})\right] + \mathbb{E}_{\delta, s_t, u_t, s_{t+1}} \left[g_{t+1}\right]\} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Luego como el primer sumando es independiente de $\delta$ entonces,

$$f_t(s_t, u_t, s_{t+1}) = \mathbb{E}_{s_t, u_t} \left[\hat{g}_t(s_t, u_t, s_{t+1})\right] + \sup_{\delta \in \Delta} \mathbb{E}_{\delta, s_t, u_t, s_{t+1}} \left[g_{t+1}\right] \tag{1.16}$$

Notemos que el problema de optimización del segundo término del lado derecho en (1.15) es idéntico al problema *Problema* $PS(t+1, s_{t+1})$, se sigue que ambos problemas tienen los mismos conjuntos de solución. Entonces,

$$\Delta^*(t, s_t, u_t, s_{t+1}) = \Delta^*(t+1, s_{t+1}) \tag{1.17}$$

para todo $0 \leq t < T$, $s_t \in \mathbb{S}$, $u \in U(t, s_t)$, $s_{t+1} \in \mathbb{S}$, esto implica que (1.11) se satisface y por lo tanto, se cumple el principio de optimalidad.

De manera intuitiva, el Principio de Optimalidad establece que si la política $\delta$ no es óptima para el problema $PS(t+1, s_{t+1})$ entonces se podría optimizar el costo aún más cambiando la política una vez que se llegue al estado $s_{t+1}$.

El principio de optimalidad se basa en la idea de proceder secuencialmente para encontrar la solución, primero determinar una política óptima para el subproblema que involucra la última etapa, luego extenderla a la solución del subproblema que involucra las dos últimas etapas y continuando de esta manera hasta construir una política de decisiones para todo el problema.

Este principio es la base del algoritmo de solución conocido como programación dinámica, en la siguiente sección se presenta una explicación detallada de este procedimiento de solución.

## 1.4. Algoritmo de Programación Dinámica

En esta sección explicaremos de manera general el algoritmo de solución para un problema de optimización aplicando la técnica de programación dinámica, este problema debe satisfacer las ecuaciones de Bellman y cumplir el principio de optimalidad.

Consideremos el problema inicial $PS(s_0)$, de la definición (1.1.2) y supongamos que el controlador aplica el siguiente método de solución, procediendo hacia atrás en el tiempo.

**Periodo T-1**

- Supongamos que iniciamos al tiempo $T-1$ y el estado del sistema al inicio de este periodo es $s_{T-1}$, aquí no importa las decisiones que fueron tomadas en los periodos anteriores. El controlador aplica $u^*_{T-1} = \delta(T-1, s_{T-1})$, esta política minimiza la función de costo del problema modificado al tiempo $T-1$. Definimos, $f_T(s_T) = g_T(s_T)$, entonces obtenemos el costo óptimo para el último periodo,

$$f_{N-1}(s_{N-1}) = \mathbb{E}\left[\rho\left(T-1, s_{T-1}, u_{T-1}, s_T, g_T\left(s_T\right)\right)\right]$$

**Periodo k** $0 < k < T-1$.

- Supongamos que el proceso inicia en el periodo $k$ con un estado $s_k$, el controlador debe seleccionar una política $u_k$ tal que minimice el costo esperado del periodo $k$ y el costo esperado de los periodos $(k+1, \cdots, T-1)$ dado que un control será usado en estos periodos.

  De la propiedad que el problema satisface las ecuaciones de Bellman tenemos que

$$f_k(s_k) = \text{opt}_{u_k \in U(k,s_k)} \mathbb{E}\left[\rho\left(k, s_k, u_k, s_{k+1}, f_{k+1}\left(s_{k+1}\right)\right)\right] \tag{1.18}$$

  Observemos que $\mathbb{E}\left[\rho\left(k, s_k, u_k, s_{k+1}, f_{k+1}\left(s_{k+1}\right)\right)\right]$, denota el costo esperado total para los periodos restantes dado que se inicia en el periodo $k$ con un estado $s_k$, estas funciones son calculadas recursivamente hacia atrás en el tiempo desde el tiempo $k = T-1$ y terminando al tiempo $k = 0$. Durante este proceso son calculadas simultáneamente las políticas o controles óptimos $\{u^*_0(s_0), u^*_1(s_1), \ldots, u^*_{T-1}(s_{N-1})\}$ cada uno de los cuales minimiza el costo esperado total en cada periodo.

**Periodo 0**

- Dado que aquí el estado inicial $s_0$ es conocido, entonces sólo necesitamos calcular

$$f_0(s_0) = \text{opt}_{u_0 \in U(0,s_0)} \mathbb{E}\left[\rho\left(0, s_0, u_0, s_1, f_1\left(s_1\right)\right)\right] \tag{1.19}$$

En resumen, el algoritmo de solución de un problema de optimización aplicando la técnica de programación dinámica, se realiza siguiendo los siguientes pasos:

1. Sea t=N y

$$f_T^*(s_T) = g_T(s_N) \quad \text{para todo} \quad s_T \in S, \tag{1.20}$$

2. Sustituir para t-1 y calcular

$$f_t(s_t) = \text{opt}_{u_t \in U(t,s_t)} \mathbb{E}\left[\rho\left(t, s_t, u_t, s_{t+1}, f_{t+1}\left(s_{t+1}\right)\right)\right] \tag{1.21}$$

$$u_t^*(s_t) = \arg\text{opt}_{u_t \in U_t(s_t)} \mathbb{E}\left[\rho\left(t, s_t, u_t, s_{t+1}, f_{t+1}\left(s_{t+1}\right)\right)\right]$$

3. Si t=1, termina. En otro caso, regresa a el paso 2.

Observe que el valor esperado es tomado respecto a la distribución de probabilidad de las variables aleatorias $Y_k$, en cada etapa $k = 0, \ldots, T-1$.

Este algoritmo es de gran importancia, ya que proporciona una técnica de solución que facilita la implementación de soluciones a problemas complejos.

En el siguiente capítulo se presenta la parte principal de este trabajo, que refiere al problema de portafolio multiperiodo. Dicho problema aplica las condiciones explicadas en este capítulo y es resuelto mediante el algoritmo de programación dinámica.

# Capítulo 2

# Portafolio Multiperiodo Media-Varianza

## 2.1. Formulación media-varianza para selección de portafolio multiperiodo

Se consideran (n+1) activos de inversión, primero suponemos que todos los activos presentan riesgo y más adelante se supondrá que se tienen $n$ activos riesgosos y un activo libre de riesgo. Un inversor inicia con un capital $x_0$ al tiempo $t = 0$. El inversor puede decidir distribuir su capital entre los (n+1) activos al inicio de cada uno de los siguientes (T-1) periodos consecutivos. Denotemos por $\mathbf{e}_t = (e_t^0, e_t^1, ..., e_t^n)'$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$, los vectores de rendimiento dentro del horizonte de planificación.
Si consideramos que para el activo $i-$ésimo se tiene una taza de rendimiento $r_t^i$ al tiempo $t$, entonces

$$e_t^i = 1 + r_t^i; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad t = 0, 1, \ldots, T-1.$$

En este capítulo vamos a suponer que los vectores $\mathbf{e}_t$, $t = 0, 1, ..., T-1$ son estadísticamente independientes y tales que su distribución de probabilidad puede ser caracterizada por $\mathbb{E}(\mathbf{e}_t)$ y su matriz de covarianza, $Cov(\mathbf{e}_t)$, la cual adicionalmente se supone que es positiva definida.

El punto de partida de las consideraciones en este capítulo es el conocimiento de los valores esperados $\mathbb{E}(\mathbf{e}_t) = (\mathbb{E}(e_t^0), \mathbb{E}(e_t^1), ..., \mathbb{E}(e_t^n))'$ y covarianzas

$$Cov(\mathbf{e}_t) = \begin{bmatrix} \sigma_{00,t} & \sigma_{01,t} & \sigma_{02,t} & \cdots & \sigma_{0n,t} \\ \sigma_{10,t} & \sigma_{11,t} & \sigma_{12,t} & \cdots & \sigma_{1n,t} \\ \sigma_{20,t} & \sigma_{21,t} & \sigma_{22,t} & \cdots & \sigma_{2n,t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n0,t} & \sigma_{n1,t} & \sigma_{n2,t} & \cdots & \sigma_{nn,t} \end{bmatrix}.$$

Sea $x_t$ el capital al inicio del $t$-ésimo periodo y sea $u_t^i$, $i = 1, 2, ..., n$ la cantidad invertida en el $i$-ésimo activo riesgoso al inicio del $t$-ésimo periodo, entonces la cantidad invertida en el activo de referencia es $x_t - \sum_{i=1}^n u_t^i$. Bastará entonces considerar la asignación del capital al tiempo $t$ como $\mathbf{u}_t = [u_t^1, u_t^2, \ldots, u_t^n]'$. Al tomar como referencia el activo de índice 0, definimos,

$$P_t^i = e_t^i - e_t^0 \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

De este modo, la riqueza al tiempo $t+1$ estará determinada por la siguiente ecuación estocástica

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \sum_{i=1}^n e_t^i u_t^i + \left( x_t - \sum_{i=1}^n u_t^i \right) e_t^0 & (2.2) \\ &= e_t^0 x_t + \mathbf{P}_t' \mathbf{u}_t \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1, & (2.3) \end{aligned}$$

donde,

$$\mathbf{P}_t = \left[ P_t^1, P_t^2, \ldots, P_t^n \right]' \equiv \left[ \left( e_t^1 - e_t^0 \right), \left( e_t^2 - e_t^0 \right), \ldots, \left( e_t^n - e_t^0 \right) \right]'. \tag{2.4}$$

Suponemos que la matriz $\mathbb{E}\left[\mathbf{e}_t \mathbf{e}_t'\right]$ es positiva definida en cada uno de los periodos, esto es,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{e}_t \mathbf{e}_t'\right] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left( (e_t^0)^2 \right) & \mathbb{E}\left( e_t^0 e_t^1 \right) & \cdots & \mathbb{E}\left( e_t^0 e_t^n \right) \\ \mathbb{E}\left( e_t^1 e_t^0 \right) & \mathbb{E}\left( (e_t^1)^2 \right) & \cdots & \mathbb{E}\left( e_t^1 e_t^n \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}\left( e_t^n e_t^0 \right) & \mathbb{E}\left( e_t^n e_t^1 \right) & \cdots & \mathbb{E}\left( (e_t^0)^2 \right) \end{bmatrix} > 0. \tag{2.5}$$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}\left( (e_t^0)^2 \right) & \mathbb{E}\left( e_t^0 \mathbf{P}_t' \right) \\ \mathbb{E}\left( e_t^0 \mathbf{P}_t \right) & \mathbb{E}\left( \mathbf{P}_t \mathbf{P}_t' \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathbb{E}\left[\mathbf{e}_t \mathbf{e}_t'\right] \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} > 0.$$

Por lo tanto, de lo anterior obtenemos que,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t'\right] > 0 \quad \forall t, \tag{2.6}$$

y,

$$\mathbb{E}\left(\left(e_t^0\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(e_t^0\mathbf{P}_t'\right)\mathbb{E}^{-1}\left(\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t'\right)\mathbb{E}\left(e_t^0\mathbf{P}_t\right) > 0. \tag{2.7}$$

Un inversor del tipo media-varianza, está interesado en encontrar una estrategia $\{\mathbf{u}_t^*\}_{t=0}^{T-1}$ tal que maximice el valor esperado de la riqueza al final del horizonte de planificación $\mathbb{E}(X_T)$, sujeto a que el riesgo de la riqueza final, medido por $Var(X_T)$, sea a lo más un nivel de riesgo $\nu$ predefinido. Se puede plantear como un problema de la forma,

$$\begin{aligned} P1(\sigma): \quad & \max_{\{\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_{T-1}\}} \quad \mathbb{E}(x_T) \\ & s.a. \quad Var(x_T) \leq \sigma \\ & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{P}_t'\mathbf{u}_t \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

De manera análoga, cuando se desea que el rendimiento esperado no sea menos que un nivel prefijado $\epsilon$, se plantea un problema de minimizar la varianza, con esta restricción,

$$\begin{aligned} P2(\epsilon): \quad & \min_{\{\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_{T-1}\}} \quad Var(X_T) \\ & s.a. \quad \mathbb{E}(X_T) \geq \epsilon \\ & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{P}_t'\mathbf{u}_t \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Observemos que al variar el parámetro $\sigma$ del problema $P1(\sigma)$ o al variar $\epsilon$ en $P2(\epsilon)$ se puede generar un conjunto de portafolios multiperiodo eficientes. Una formulación equivalente para los problemas $P1(\sigma)$ y $P2(\epsilon)$ para generar portafolios multiperiodo eficientes es dada en el siguiente problema:

$$E(w): \quad \max_{\{\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_{T-1}\}} \quad \left(\mathbb{E}(x_T) - wVar(x_T)\right) \tag{2.10}$$

$$s.a. \qquad x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{P}_t'\mathbf{u}_t, \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{2.11}$$

donde $w > 0$. Para este problema se pueden obtener controles eficientes al variar el parámetro $w$ que se refiere al grado de aversión al riesgo del inversor. Vamos a denotar por $\Pi_1^*(w)$ el conjunto de soluciones del problema $E(w)$.

En la literatura sobre portafolios, es conocido que si $\pi^*$ es solución de $(E(w))$, entonces $\pi^*$ resuelve $P1(\sigma)$ con $\sigma = Var(X_T)|_{\pi^*}$ y $\pi^*$ también resuelve $P2(\epsilon)$ con $\epsilon = \mathbb{E}[X_T]$. Notemos que se tiene la relación $w = \partial\mathbb{E}[X_T]/\partial Var[X_T]$ sobre la política óptima de $E(w)$.

Una estrategia de inversión para un portafolio multiperiodo, es una secuencia de funciones de la forma

$$\begin{aligned}\pi &= (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{T-1}) \\ &= \left( \begin{bmatrix} \mu_0^1 \\ \mu_0^2 \\ \vdots \\ \mu_0^n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_1^1 \\ \mu_1^2 \\ \vdots \\ \mu_1^n \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mu_{T-1}^1 \\ \mu_{T-1}^2 \\ \vdots \\ \mu_{T-1}^n \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Donde $\mu_t$ es una función de control que mapea el capital al inicio de periodo $t$, $x_t$, a un portafolio de decisión de la forma:

$$\mu_t(x_t) := \begin{bmatrix} \mu_t^1(x_t) \\ \mu_t^2(x_t) \\ \vdots \\ \mu_t^n(x_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \\ \vdots \\ u_t^n \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

**Definición 2.1.1.** Una política de portafolio dinámico $\pi^*$ se dice que es eficiente si no existe ningún otro portafolio dinámico $\pi$ tal que:

$$\mathbb{E}(X_T)|_\pi \geq \mathbb{E}(X_T)|_{\pi^*} \tag{2.14}$$

$$\text{y } Var(X_T)|_\pi \leq Var(X_T)|_{\pi^*} \tag{2.15}$$

con al menos una desigualdad estricta.

El problema $E(w)$ tiene en su función objetivo el término de la varianza, el cual no satisface la propiedad de separabilidad en el sentido de programación dinámica y por lo tanto no se satisface la ecuación de optimalidad. Lo anterior hace complicado resolver directamente los problemas $P1(\sigma)$, $P2(\epsilon)$ y $E(w)$, pues para buscar la solución no puede aplicarse directamente el algoritmo de programación dinámica.

Debido a esto, la extensión del enfoque de Markowitz al caso multiperiodo estuvo detenida por mucho tiempo, casi medio siglo. Fue precisamente la contribución de Li & Ng (2000), extender el problema de selección de cartera media - varianza al contexto multiperiodo, este trabajo brindó resultados gracias a la introducción de un problema auxiliar, el cual si puede resolverse mediante programación dinámica y cuyas soluciones contienen las soluciones del problema de interés. Esto permite realizar solamente una búsqueda del óptimo en este conjunto.

## 2.2. Problema Auxiliar

Con el afán de encontrar soluciones analíticas para el problema $E(w)$, en [1] se presenta la formulación del problema auxiliar $A(\lambda, w)$, el cual se resuelve aplicando técnicas de programación dinámica, y así, indirectamente encontrar soluciones para el problema $E(w)$.

### 2.2.1. Formulación y propiedades del problema auxiliar

Este problema auxiliar, se define de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} A(\lambda, w): & \text{maximizar}_{\{\mathbf{u}_0,\ldots,\mathbf{u}_{T-1}\}} & \mathbb{E}\{-wx_T^2 + \lambda x_T\} \\ & \text{s. a.} & X_{t+1} = e_t^0 X_t + \mathbf{P}_t'\mathbf{u}_t, t = 0, 1, ..., T-1 \end{array} \tag{2.16}$$

Donde $\lambda$ y $w$ son parámetros del problema. En lo siguiente, vamos a denotar por $x_t$ el estado al tiempo actual y por $X_k$ a las variables aleatorias que representan el estado para los periodos $k > t$.

Denotemos por $\Pi_2^*(\lambda, w)$ el conjunto de soluciones óptimas del problema $A(\lambda, w)$.

**Proposición 2.2.1.** *La función objetivo del problema auxiliar $A(\lambda, w)$ es separable bajo esperanza condicional.*

*Demostración.* Tenemos que la función de costo del problema auxiliar, está dada por

$$g(x_0, \mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_{T-1}) = \left\{-wX_T + \lambda X_T \ : \ X_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{P}_t'\mathbf{u}_t, t = 0, 1, ..., T-1\right\}$$

En términos de la *Definición 1.1.3* tenemos que en este caso,

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \{0, 1, \ldots, T-1\}. \\ \mathbb{S} &= \mathbb{R}. \\ U(t, x_t) &= \{\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^n : x_t = \mathbf{1}'\mathbf{u}_t\} \\ H(t, x_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{e}_t) &= e_t^0 x_t + \mathbf{P}_t'\mathbf{u}_t \end{aligned} \tag{2.17}$$

Donde el estado inicial $x_0$ está dado al inicio del proceso. Observemos que aquí la función de transición $H$ depende además del estado actual y el control elegido, también del vector aleatorio $\mathbf{e}_t$ que representa los rendimientos de los activos en el periodo $(t, t+1]$.

A continuación definimos las funciones $g_t$, para cada $t = 0, 1, \ldots, T-1$ como,

$$g_t(x_t, \mathbf{u}_t, X_{t+1}, \mathbf{U}_{t+2}, \ldots, \mathbf{U}_{T-1}) \tag{2.18}$$

$$= \left\{ \begin{array}{lc} -wX_T^2 + \lambda X_T \ : & X_{k+1} = e_k^0 X_k + \mathbf{P}_k'\mathbf{u}_k, \quad k = t+1, \ldots, T-1. \\ & \left(X_{t+1} - \mathbb{E}\left[X_{t+1}\right]\right) X_{t+1} = \left(e_t^0 x_t + \mathbf{P}_t'\mathbf{u}_t\right)\left(X_{t+1} - \mathbb{E}\left[X_{t+1}\right]\right) \end{array} \right\}$$

Definamos adicionalmente la función de composición $\rho : \mathbb{T} \times \mathbb{S} \times \mathbb{U} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por,

$$\rho\left(t, x_t, \mathbf{u}_t, a\right) \quad = \quad a \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Observemos que se satisface la siguiente relación,

$$\begin{aligned} & g_t\left(x_t, \mathbf{u}_t, x_{t+1}, \mathbf{u}_{t+1}, \mathbf{U}_{t+2}, \ldots, \mathbf{U}_{T-1}\right) \\ &= g_{t+1}\left(x_{t+1}, \mathbf{u}_{t+1}, X_{t+2}, \mathbf{U}_{t+2}, \mathbf{U}_{t+3}, \ldots, \mathbf{U}_{T-1}\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Con ello, se sigue entonces que,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[g_t\left(x_t, \mathbf{u}_t, x_{t+1}, \mathbf{u}_{t+1}, \mathbf{U}_{t+2}, \ldots, \mathbf{U}_{T-1}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[g_{t+1}\left(x_{t+1}, \mathbf{u}_{t+1}, X_{t+2}, \mathbf{U}_{t+2}, \mathbf{U}_{t+3}, \ldots, \mathbf{U}_{T-1}\right)\right] \\ &= \rho\left(t, x_t, \mathbf{u}_t, x_{t+1}, \mathbb{E}\left[g_{t+1}\left(x_{t+1}, \mathbf{u}_{t+1}, X_{t+2}, \mathbf{U}_{t+2}, \mathbf{U}_{t+3}, \ldots, \mathbf{U}_{T-1}\right)\right]\right) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por lo tanto, la función objetivo del problema $A(\lambda, w)$ es separable bajo esperanza condicional. $\square$

Consideremos ahora los problemas modificado y modificado condicional para el problema auxiliar $A(\lambda, w)$.

**Definición 2.2.2.** *Problema modificado $P_M(t, x_t)$ :*

$$f_t(x_t) := \sup_{\pi} \mathbb{E}\left[g_t\left(x_t, \mathbf{u}_t, X_{t+1}, \boldsymbol{\mu}_{t+1}(X_{t+1}), \ldots, \boldsymbol{\mu}_{T-1}(X_{T-1})\right)\right] \tag{2.22}$$

y denotemos por $\Delta^*\left(x_t, \mathbf{u}_t\right) \in \Delta$ el conjunto de soluciones óptimas para el problema $P_M(t, x_t)$.

De acuerdo a esta definición tenemos que para el tiempo $t+1$, al conocer $x_{t+1}$ el problema modificado al tiempo $t+1$, se obtiene como,

$P_M(t{+}1, x_{t+1})$ :

$$f_{t+1}(x_{t+1}) := \sup_{\pi} \mathbb{E}\left[g_{t+1}\left(x_{t+1}, \mathbf{u}_{t+1}, X_{t+2}, \boldsymbol{\mu}_{t+2}(X_{t+2}), \ldots, \boldsymbol{\mu}_{T-1}(X_{T-1})\right)\right]$$

Por otra parte, definimos también el problema modificado condicional como,

**Definición 2.2.3.** *Problema modificado condicional $P_{MC}(t, x_t, u_t, x_{t+1})$ :*

$$f_t\left(x_t, u_t, x_{t+1}\right) := \sup_{\pi} \mathbb{E}\left[g_t\left(x_t, \mathbf{u}_t, X_{t+1}, \boldsymbol{\mu}_{t+1}(X_{t+1}), \ldots, \boldsymbol{\mu}_{T-1}(X_{T-1})\right)\right] \tag{2.23}$$

Y de manera análoga, denotemos por $\Delta^*(x_t, u_t, x_{t+1})$ el conjunto de soluciones óptimas del problema $P_{MC}(t, x_t, u_t, x_{t+1})$.

De la relación (2.20) se sigue que los conjuntos de soluciones óptimas de los problemas $P_{MC}(t, x_t, u_t, x_{t+1})$ y $P_M(t{+}1, x_{t+1})$ son idénticos para un $x_{t+1}$ especificado. Por lo tanto, se satisface que,

$$\Delta^*(x_t, u_t, x_{t+1}) \quad = \quad \Delta^*(t+1, x_{t+1}) \tag{2.24}$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente,

**Lema 2.2.4.** *El problema $A(\lambda, w)$ satisface la propiedad de Markov respecto a los problemas modificados definidos anteriormente.*

Hemos probado que el problema auxiliar $A(\lambda, w)$ satisface las condiciones de separabilidad en el sentido de programación dinámica y la condición de Markov. Entonces, aplicando el *Teorema 1.2.1* tenemos que se satisface la siguiente,

**Proposición 2.2.5.** *Ecuación de Optimalidad para el problema $A(\lambda, w)$.*
*La función de valor del problema auxiliar $A(\lambda, w)$ satisface la ecuación de optimalidad del Teorema (1.2.1). Esto es,*

$$f_t(x_t) = \sup_{\boldsymbol{u}_t} \left\{ \mathbb{E}_{x_t}\left[ f_{t+1}(X_{t+1}) \right] \ : \ X_{t+1} = e_t^0 x_t + \boldsymbol{P}_t' \boldsymbol{u}_t \right\} \tag{2.25}$$

*para todo* $0 \leq t < T$, $x_t \in S$.

Se puede observar que la solución al sistema de ecuaciones (2.25) es una secuencia de funciones de la forma:

$$f_t : S \to \mathbb{R} \qquad t = 0, 1, \ldots, T \tag{2.26}$$

Con la condición de cota $f_T(X_T) = g_T(X_T) := -wX_T^2 + \lambda X_T$.
De este modo, al sustituir esta función $f_T$ en $f_{T-1}$ entonces se satisface la $T-1$-ésima ecuación y así sucesivamente.

Ya que el problema auxiliar satisface la ecuación de optimalidad, entonces puede ser resuelto aplicando el algoritmo de programación dinámica explicado en el capítulo anterior.

### 2.2.2. Solución analítica para el problema auxiliar

Dedicaremos esta sección a resolver el problema auxiliar $A(\lambda, w)$ aplicando programación dinámica como método de solución.

**Proposición 2.2.6.** *Li & Ng* (2000) [1].
*El control óptimo $\boldsymbol{u}_t^*$, y la función de valor $f_t$ para el problema $A(\lambda, w)$, al iniciar al tiempo $t$ con un estado $x_t$ pueden ser expresados como,*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t^* &= \mathbb{E}\left[\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{P}_t'\right]^{-1}\left(\frac{\lambda_{t+1}}{2w_{t+1}}\mathbb{E}\left[\boldsymbol{P}_t\right] - x_t\mathbb{E}\left[e_t^0\boldsymbol{P}_t\right]\right) && (2.27)\\ f_t(x_t) &= -w_t x_t^2 + \lambda_t x_t + \sum_{k=t}^{T-1}\alpha_k B_k && (2.28)\end{aligned}$$

*Donde las ecuaciones recursivas de los parámetros están definidas por*

$$\begin{aligned} w_t &:= w_{t+1}\left(\mathbb{E}\left[(e_t^0)^2\right] - \mathbb{E}\left[e_t^0\boldsymbol{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{P}_t'\right]^{-1}\mathbb{E}\left[e_t^0\boldsymbol{P}_t\right]\right)\\ \lambda_t &:= \lambda_{t+1}\left(\mathbb{E}\left[e_t^0\right] - \mathbb{E}\left[\boldsymbol{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{P}_t'\right]^{-1}\mathbb{E}\left[e_t^0\boldsymbol{P}_t\right]\right)\\ \alpha_t &:= \frac{\lambda_{t+1}^2}{4w_{t+1}}\\ B_t &:= \mathbb{E}\left[\boldsymbol{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{P}_t'\right]^{-1}\mathbb{E}\left[\boldsymbol{P}_t\right]\end{aligned}$$

*y con condiciones de cota*

$$\begin{aligned} w_T &= w && (2.29)\\ \lambda_T &= \lambda && (2.30)\end{aligned}$$

*para cada $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$.*

*Demostración.* Vamos a derivar la solución del problema $A(\lambda, w)$ aplicando el algoritmo de programación dinámica, pues ya demostramos que este cumple la ecuación de optimalidad.

Iniciamos el algoritmo al tiempo $T-1$ con un estado $x_{T-1}$ y se define la función de costo

$$\begin{aligned} g_{T-1}(x_{T-1}, \mathbf{u}_{T-1}, X_T) &= \mathbb{E}\{-wX_T^2 + \lambda X_T\}\\ \text{donde: } X_T &= x_{T-1}e_{T-1}^0 + \mathbf{P}_{T-1}'\mathbf{u}_{T-1}. && (2.31)\end{aligned}$$

Aquí se conoce el estado $x_{T-1}$, a este tiempo el problema de optimización $A(\lambda, w)$ se reduce a resolver:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}_{T-1}} \quad & \mathbb{E}\{-wx_T^2 + \lambda x_T\} && (2.32)\\ \text{s. a.} \quad & X_T = e_{T-1}^0 x_{T-1} + \mathbf{P}_{T-1}'\mathbf{u}_{T-1}\end{aligned}$$

Sustituyendo la restricción para $X_T$ en $g_{T-1}$, la función objetivo del problema nos queda como sigue:

$$\begin{aligned}
g_{T-1}(x_{T-1},\mathbf{u}_{T-1},X_T) &= \mathbb{E}\left[-w(e^0_{T-1}x_{T-1}+\mathbf{P}'_{T-1}\mathbf{u}_{T-1})^2+\lambda(e^0_{T-1}x_{T-1}+\mathbf{P}'_{T-1}\mathbf{u}_{T-1})\right] \\
&= \mathbb{E}[-w((e^0_{T-1})^2x^2_{T-1}+2e^0_{T-1}x_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\mathbf{u}_{T-1}+\mathbf{u}'_{T-1}(\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1})\mathbf{u}_{T-1}) \\
&\quad +\lambda(e^0_{T-1}x_{T-1}+\mathbf{P}'_{T-1}\mathbf{u}_{T-1})] \\
&= -w\mathbb{E}\left((e^0_{T-1})^2\right)x^2_{T-1}-2wx_{T-1}\mathbb{E}(e^0_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1})\mathbf{u}_{T-1} \\
&\quad -w\mathbf{u}'_{T-1}\mathbb{E}(\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1})\mathbf{u}_{T-1} \\
&\quad +\lambda\left[\mathbb{E}(e^0_{T-1})x_{T-1}+\mathbb{E}(\mathbf{P}'_{T-1})\mathbf{u}_{T-1}\right]
\end{aligned}$$

Al derivar $g_{T-1}$ con respecto de $\mathbf{u}_{T-1}$ obtenemos que:

$$\frac{\partial g_{T-1}}{\partial \mathbf{u}_{T-1}} = -2w\mathbf{u}'_{T-1}\mathbb{E}(\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1})-2wx_{T-1}\mathbb{E}(e^0_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1})+\lambda\mathbb{E}(\mathbf{P}'_{T-1})$$

Igualando la derivada a cero como una condición necesaria de optimalidad, de la ecuación anterior obtenemos que:

$$\mathbf{u}^*_{T-1}=\mathbb{E}(\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1})^{-1}\left(\frac{\lambda}{2w}\mathbb{E}(\mathbf{P}_{T-1})-x_{T-1}\mathbb{E}(e^0_{T-1}\mathbf{P}_{T-1})\right) \tag{2.33}$$

Sustituyendo $\mathbf{u}^*_{T-1}$ en la función de costo (2.31) se define la función de valor al tiempo $T-1$ como:

$$f_{T-1}(x_{T-1}) := g_{T-1}(x_{T-1},\mathbf{u}^*_{T-1},X_T)$$

Esto es,

$$\begin{aligned}
&f_{T-1}(x_{T-1}) \qquad\qquad (2.34)\\
=\;& -wx^2_{T-1}\mathbb{E}\left[(e^0_{T-1})^2\right] \\
&-2wx_{T-1}\mathbb{E}\left[e^0_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]\left(\mathbb{E}(\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1})^{-1}\left(\frac{\lambda}{2w}\mathbb{E}(\mathbf{P}_{T-1})-x_{T-1}\mathbb{E}(e^0_{T-1}\mathbf{P}_{T-1})\right)\right) \\
&-w\left(\frac{\lambda}{2w}\mathbb{E}[\mathbf{P}'_{T-1}]-x_{T-1}\mathbb{E}\left[e^0_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]\right)\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]^{-1} \\
&\qquad\cdot\left(\frac{\lambda}{2w}\mathbb{E}(\mathbf{P}_{T-1})-x_{T-1}\mathbb{E}(e^0_{T-1}\mathbf{P}_{T-1})\right) \\
&+\lambda x_{T-1}\mathbb{E}\left[e^0_{T-1}\right]+\lambda\mathbb{E}[\mathbf{P}'_{T-1}]\mathbb{E}(\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1})^{-1}\left(\frac{\lambda}{2w}\mathbb{E}(\mathbf{P}_{T-1})-x_{T-1}\mathbb{E}(e^0_{T-1}\mathbf{P}_{T-1})\right)
\end{aligned}$$

Reduciendo la ecuación anterior obtenemos:

$$
\begin{aligned}
f_{T-1}(x_{T-1}) \quad &= \quad \frac{\lambda^2}{4w}\mathbb{E}\left[\mathbf{P}'_{T-1}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]^{-1}\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\right] \\
&+ \quad x_{T-1}\left(\lambda\mathbb{E}[e^0_{T-1}] - \lambda\mathbb{E}\left[\mathbf{P}'_{T-1}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]^{-1}\mathbb{E}\left[e^0_{T-1}\mathbf{P}_{T-1}\right]\right) \\
&+ \quad x^2_{T-1}\left(-w\mathbb{E}\left[(e^0_{T-1})^2\right] + w\mathbb{E}\left[e^0_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]^{-1}\mathbb{E}\left[e^0_{T-1}\mathbf{P}_{T-1}\right]\right)
\end{aligned}
$$

Sean:

$$
\begin{aligned}
w_{T-1} \quad &:= \quad w\left(\mathbb{E}\left[(e^0_{T-1})^2\right] - \mathbb{E}\left[e^0_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]^{-1}\mathbb{E}\left[e^0_{T-1}\mathbf{P}_{T-1}\right]\right) \\
\lambda_{T-1} \quad &:= \quad \lambda\left(\mathbb{E}[e^0_{T-1}] - \mathbb{E}\left[\mathbf{P}'_{T-1}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]^{-1}\mathbb{E}\left[e^0_{T-1}\mathbf{P}_{T-1}\right]\right) \\
\alpha_{T-1} \quad &:= \quad \frac{\lambda^2}{4w} \\
B_{T-1} \quad &:= \quad \mathbb{E}\left[\mathbf{P}'_{T-1}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]^{-1}\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\right]
\end{aligned}
$$

De este modo podemos escribir $f_{T-1}(x_{T-1})$ como:

$$
f_{T-1}(x_{T-1}) = -w_{T-1}x^2_{T-1} + \lambda_{T-1}x_{T-1} + \alpha_{T-1}B_{T-1} \tag{2.35}
$$

Observemos que el problema de optimización al iniciar en cada uno de los diferentes periodos tiene una estructura similar, entonces podemos derivar la expresión (2.27) para el control óptimo y la ecuación (2.28) para la función de valor. En lo anterior, demostramos que estas expresiones se cumplen para el caso base, en (2.33) para el control y (2.35) para la función de valor.

Siguiendo con la prueba, como hipótesis de inducción supongamos que se satisfacen las ecuaciones (2.27)-(2.28) para $t+1$, es decir, tenemos que

$$
\mathbf{u}^*_{t+1} \quad = \quad \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{t+1}\mathbf{P}'_{t+1}\right]^{-1}\left(\frac{\lambda_{t+2}}{2w_{t+2}}\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{t+1}\right] - x_{t+1}\mathbb{E}\left[e^0_{t+1}\mathbf{P}_{t+1}\right]\right) \tag{2.36}
$$

$$
f^*_{t+1}(x_{t+1}) \quad = \quad -w_{t+1}x^2_{t+1} + \lambda_{t+1}x_{t+1} + \sum_{k=t+1}^{T-1}\alpha_k B_k \tag{2.37}
$$

Demostraremos que estas expresiones se satisfacen al iniciar al tiempo $t$.
Debido a que el problema $A(\lambda, w)$ satisface la ecuación de optimalidad (*Proposición 2.2.5*) tenemos que,

$$
f_t(x_t) = \max_{\mathbf{u}_t}\left\{\mathbb{E}_{x_t}\left[f_{t+1}(X_{t+1})\right] \ : \ X_{t+1} = e^0_t x_t + \mathbf{P}'_t\mathbf{u}_t\right\}
$$

Aplicando la hipótesis de inducción, sustituimos la expresión de la función de valor óptimo y así la expresión del problema de optimización a resolver es el siguiente,

$$\max_{\mathbf{u}_t} \quad \mathbb{E}\left[-w_{t+1}^2 X_{t+1}^2 + \lambda_{t+1} X_{t+1} + \textstyle\sum_{k=t+1}^{T-1} \alpha_k B_k\right] \tag{2.38}$$

$$s.a. \qquad X_{t+1} = x_t e_t^0 + \mathbf{P}_t' \mathbf{u}_t \tag{2.39}$$

Sustituyendo la restricción anterior , obtenemos la función objetivo:

$$g_t(x_t, \mathbf{u}_t, X_{t+1}, \boldsymbol{\mu}_{t+1}^*(X_{t+1}), \ldots, \boldsymbol{\mu}_{T-1}^*(X_{T-1}))$$

$$\begin{aligned}
&= -w_{t+1}\mathbb{E}\left[\left(x_t e_t^0 + \mathbf{P}_t' \mathbf{u}_t\right)^2\right] + \lambda_{t+1}\mathbb{E}\left[x_t e_t^0 + \mathbf{P}_t' \mathbf{u}_t\right] + \sum_{k=t+1}^{T-1} \alpha_k B_k \\
&= -w_{t+1}\mathbb{E}\left[x_t^2 \left(e_t^0\right)^2\right] - 2w_{t+1}\mathbb{E}\left[x_t e_t^0 \mathbf{P}_t'\right] \mathbf{u}_t - w_{t+1}\mathbf{u}_t'\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right] \mathbf{u}_t \\
&\quad +\lambda_{t+1}\mathbb{E}\left[x_t e_t^0\right] + \lambda_{t+1}\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t'\right] \mathbf{u}_t + \sum_{k=t+1}^{T-1} \alpha_k B_k
\end{aligned}$$

Por la hipótesis de independencia de los vectores $\{e_t\}_{t=0}^{T-1}$, tenemos que $x_t$ es independiente de $\mathbf{P}_t$, para $t = 0, 1 \ldots, T-1$. Por lo tanto,

$$g_t(x_t, \mathbf{u}_t, X_{t+1}, \boldsymbol{\mu}_{t+1}^*(X_{t+1}), \ldots, \boldsymbol{\mu}_{T-1}^*(X_{T-1}))$$

$$\begin{aligned}
&= -w_{t+1} x_t^2 \mathbb{E}\left[\left(e_t^0\right)^2\right] - 2w_{t+1} x_t \mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t'\right] \mathbf{u}_t - w_{t+1}\mathbf{u}_t'\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right] \mathbf{u}_t \\
&\quad +\lambda_{t+1} x_t \mathbb{E}\left[e_t^0\right] + \lambda_{t+1}\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t'\right] \mathbf{u}_t + \sum_{k=t+1}^{T-1} \alpha_k B_k
\end{aligned}$$

Derivando la función anterior con respecto de $u_t$ tenemos,

$$\frac{\partial g_t}{\partial \mathbf{u}_t} = -2w_{t+1} x_t \mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t'\right] - 2w_{t+1}\mathbf{u}_t'\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right] + \lambda_{t+1}\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t'\right] \tag{2.40}$$

Entonces,

$$\mathbf{u}_t^* = \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right]^{-1} \left(\frac{\lambda_{t+1}}{2w_{t+1}}\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] - x_t \mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t\right]\right) \tag{2.41}$$

Al sustituir el óptimo en la función de costo obtenemos la función de valor óptimo

$$
\begin{aligned}
f_t(x_t) &= g_t(x_t, \mathbf{u}_t^*, X_{t+1}, \boldsymbol{\mu}_{t+1}^*(X_{t+1}), \ldots, \boldsymbol{\mu}_{T-1}^*(X_{T-1})) \\
&= -w_{t+1} x_t^2 \mathbb{E}\left[\left(e_t^0\right)^2\right] \\
&\quad -2w_{t+1} x_t \mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t'\right] \left(\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right]^{-1} \left(\frac{\lambda_{t+1}}{2w_{t+1}} \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] - x_t \mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t\right]\right)\right) \\
&\quad -w_{t+1} \left(\frac{\lambda_{t+1}}{2w_{t+1}} \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t'\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right]^{-1} - x_t \mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t'\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right]^{-1}\right) \cdot \\
&\qquad \cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right] \cdot \left(\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right]^{-1} \left(\frac{\lambda_{t+1}}{2w_{t+1}} \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] - x_t \mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t\right]\right)\right) \\
&\quad +\lambda_{t+1} x_t \mathbb{E}\left[e_t^0\right] + \lambda_{t+1} \mathbb{E}(P_t') \left(\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right]^{-1} \left(\frac{\lambda_{t+1}}{2w_{t+1}} \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] - x_t \mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t\right]\right)\right) \\
&\quad + \sum_{k=t+1}^{T-1} \alpha_k B_k
\end{aligned}
$$

Al reducir la expresión anterior obtenemos,

$$
\begin{aligned}
f_t(x_t) &= x_t^2 \left(-w_{t+1} \mathbb{E}\left[(e_t^0)^2\right] + w_{t+1} \mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t'\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right]^{-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right]\right) \\
&\quad + x_t \left(\lambda_{t+1} \mathbb{E}\left[e_t^0\right] - \lambda_{t+1} \mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t'\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right]^{-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right]\right) \\
&\quad + \frac{\lambda_{t+1}^2}{4w_{t+1}} \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t'\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right]^{-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] + \sum_{k=t+1}^{T-1} \alpha_k B_k
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, las ecuaciones (2.27) y (2.28) se satisfacen para cada $t \in 0, 1, \ldots, T-2$. $\square$

De este modo, los controles para el portafolio óptimo para el problema auxiliar $(A(\lambda, w))$ para cada periodo $t$-ésimo se pueden escribir como,

$$u_t^*\left(x_t, \gamma\right) = -\mathbf{K}_t x_t + \boldsymbol{\nu}_t(\gamma) \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{2.42}$$

Donde,

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\lambda}{w} && (2.43) \\
\mathbf{K}_t &= \mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right] \mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t\right] && (2.44) \\
\boldsymbol{\nu}_t(\gamma) &= \frac{\gamma}{2} \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{\mathbb{E}\left(e_k^0\right) - \hat{B}_k}{\mathbb{E}\left(\left(e_k^0\right)^2\right) - \tilde{B}_k}\right) \mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] && (2.45)
\end{aligned}
$$

$$t = 0, 1, \ldots, T-2.$$

Con las condiciones de cota

$$\boldsymbol{\nu}_{T-1}(\gamma) = \frac{\gamma}{2}\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}'_{T-1}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\right] \tag{2.46}$$

Y los parámetros están dados por,

$$B_t := \mathbb{E}\left[\mathbf{P}'_t\right]\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}'_t\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] \tag{2.47}$$

$$\hat{B}_t := \mathbb{E}\left[\mathbf{P}'_t\right]\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}'_t\right]\mathbb{E}\left[e_t^0\mathbf{P}_t\right] \tag{2.48}$$

$$\tilde{B}_t := \mathbb{E}\left[e_t^0\mathbf{P}'_t\right]\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}'_t\right]\mathbb{E}\left[e_t^0\mathbf{P}_t\right] \tag{2.49}$$

Sean

$$A_t^1 := \mathbb{E}\left[e_t^0\right] - \hat{B}_t \tag{2.50}$$

$$A_t^2 := \mathbb{E}\left[(e_t^0)^2\right] - \tilde{B}_t \tag{2.51}$$

Entonces podemos escribir $\boldsymbol{\nu}_t(\gamma)$ como

$$\boldsymbol{\nu}_t(\gamma) = \frac{\gamma}{2}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{A_k^1}{A_k^2}\right)\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}'_t\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{2.52}$$

por convención, supondremos que

$$\prod_{k=T}^{T-1} A_k^i := 1, \text{ para } i = 1, 2.$$

### 2.2.3. Relación entre los problemas $E(w)$ y $A(\lambda, w)$

No perdamos de vista que el objetivo principal es encontrar soluciones para el problema $E(w)$ y después de encontrar una expresión analítica cerrada para la solución del problema auxiliar, queremos establecer condiciones para encontrar soluciones de este problema a través del conjunto de soluciones del problema auxiliar. Con este motivo se presentan los siguientes resultados.

Definimos la función:

$$\tilde{U}\left(\mathbb{E}(X_T^2), \mathbb{E}(X_T)\right) := \mathbb{E}(X_T) - wVar(X_T) \tag{2.53}$$

$$= \mathbb{E}(X_T) - w\left[\mathbb{E}(X_T^2) - \mathbb{E}^2(X_T)\right] \tag{2.54}$$

$$d(\pi, w) := \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\mathbb{E}(X_T)}\Big|_{\pi} \tag{2.55}$$

$$= 1 + 2w\mathbb{E}(X_T)\Big|_{\pi} \tag{2.56}$$

El siguiente resultado es de uso extensivo en análisis convexo y resulta ser de utilidad en lo adelante.

**Proposición 2.2.7.** *Si $U$ es una función convexa y diferenciable de primer orden entonces*

$$U\left(\pi^{(2)}\right) \geq U\left(\pi^{(1)}\right) + \nabla U\left(\pi^{(1)}\right)\left(\pi^{(2)} - \pi^{(1)}\right) \tag{2.57}$$

*Demostración.* Supongamos que $U$ es una función convexa y diferenciable de orden uno, por definición de convexidad tenemos que

$$U\left(\alpha\pi^{(2)} + (1-\alpha)\pi^{(1)}\right) \leq \alpha U\left(\pi^{(2)}\right) + (1-\alpha)\, U\left(\pi^{(1)}\right)$$

para algún $0 < \alpha \leq 1$. Reacomodando la desigualdad anterior, tenemos,

$$\begin{aligned} U\left(\pi^{(2)}\right) - U\left(\pi^{(1)}\right) &\geq \frac{U\left(\alpha\pi^{(2)} + (1-\alpha)\pi^{(1)}\right) - U\left(\pi^{(1)}\right)}{\alpha} \\ U\left(\pi^{(2)}\right) - U\left(\pi^{(1)}\right) &\geq \frac{U\left(\pi^{(1)} + \alpha(\pi^{(2)} - \pi^{(1)})\right) - U\left(\pi^{(1)}\right)}{\alpha} \end{aligned} \tag{2.58}$$

Haciendo $\alpha \to 0$ obtenemos,

$$U\left(\pi^{(2)}\right) - U\left(\pi^{(1)}\right) \geq \nabla U\left(\pi^{(1)}\right)\left(\pi^{(2)} - \pi^{(1)}\right)$$

Por lo tanto,

$$U\left(\pi^{(2)}\right) \geq U\left(\pi^{(1)}\right) + \nabla U\left(\pi^{(1)}\right)\left(\pi^{(2)} - \pi^{(1)}\right) \tag{2.59}$$

□

**Teorema 2.2.8.** (*Teorema 1 en Li & Ng* [1]).

*Sea $\pi^* \in \Pi_1^*(w^*)$, entonces $\pi^* \in \Pi_2^*\left(d(\pi^*, w^*), w^*\right)$*

*Demostración.* Demostraremos por contradicción.

Supongamos que $\pi^* \notin \Pi_2^*\left(d(\pi^*, w^*), w^*\right)$ entonces existe $\pi$ tal que

$$\mathbb{E}\left[-w^* X_T^2 + d(\pi^*, w^*)X_T\right]\Big|_{\pi} > \mathbb{E}\left[-w^* X_T^2 + d(\pi^*, w^*)X_T\right]\Big|_{\pi^*}$$

esto es,

$$-w^*\mathbb{E}\left[X_T^2\right]\Big|_{\pi} + d\left(\pi^*, w^*\right)\mathbb{E}\left[X_T\right]\Big|_{\pi} > -w^*\mathbb{E}\left[X_T^2\right]\Big|_{\pi^*} + d\left(\pi^*, w^*\right)\mathbb{E}\left[X_T\right]\Big|_{\pi^*}$$

lo cual podemos escribir como

$$[-w^*, d(\pi^*, w^*)]\begin{bmatrix}\mathbb{E}(X_T^2)\\ \mathbb{E}(X_T)\end{bmatrix}\Big|_{\pi} > [-w^*, d(\pi^*, w^*)]\begin{bmatrix}\mathbb{E}(X_T^2)\\ \mathbb{E}(X_T)\end{bmatrix}\Big|_{\pi^*} \tag{2.60}$$

Esto implica que,

$$[-w^*, d(\pi^*, w^*)]\left(\begin{bmatrix}\mathbb{E}(X_T^2)\\ \mathbb{E}(X_T)\end{bmatrix}\Big|_{\pi} - \begin{bmatrix}\mathbb{E}(X_T^2)\\ \mathbb{E}(X_T)\end{bmatrix}\Big|_{\pi^*}\right) > 0 \tag{2.61}$$

Por otra parte, como $\tilde{U}\left(\mathbb{E}(X_T^2), \mathbb{E}(X_T)\right)$ es una función convexa de $\mathbb{E}(X_T^2)$ y $\mathbb{E}(X_T)$, y al tenerse que,

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbb{E}(X_T^2)} = -w \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbb{E}(X_T)} = d(\pi, w),$$

se sigue de aplicar la Proposición 2.2.7, que

$$\begin{aligned} \tilde{U}\left(\mathbb{E}(X_T^2), \mathbb{E}(X_T)\right)\Big|_{\pi} \ \geq \ & \tilde{U}\left(\mathbb{E}(X_T^2), \mathbb{E}(X_T)\right)\Big|_{\pi^*} \\ & + [-w^*, d(\pi^*, w^*)] \left( \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X_T^2) \\ \mathbb{E}(X_T) \end{bmatrix} \Big|_{\pi} - \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X_T^2) \\ \mathbb{E}(X_T) \end{bmatrix} \Big|_{\pi^*} \right) \end{aligned} \tag{2.62}$$

Entonces de la ecuación anterior, por (2.61) tenemos que,

$$\tilde{U}\left(\mathbb{E}(X_T^2), \mathbb{E}(X_T)\right)\Big|_{\pi} \ > \ \tilde{U}\left(\mathbb{E}(X_T^2), \mathbb{E}(X_T)\right)\Big|_{\pi^*} \tag{2.63}$$

Lo que contradice que $\pi^* \in \Pi_1^*(w^*)$. □

**Teorema 2.2.9.** (*Teorema 2 en Li &Ng* [1]).
*Supongamos que $\pi^* \in \Pi_2^*(\lambda^*, w^*)$, entonces una condición necesaria para que $\pi^* \in \Pi_1^*(w^*)$ es que $\lambda^* = 1 + 2w^*\mathbb{E}(X_T)|_{\pi^*}$.*

*Demostración.* Dado $w^* > 0$ como parámetro del problema $(A(\lambda, w^*))$.
Observemos que una vez que fijemos $\lambda$, la solución del problema $A(\lambda, w)$ es única y puede ser expresada como en (2.42). Así el conjunto de soluciones $\Pi_2^*(\lambda, w^*)$ del problema $A(\lambda, w^*)$ puede ser parametrizado por $\lambda$.

Esto es, cada punto en el conjunto $\Pi_2^*(\lambda^*, w^*)$ puede ser representado por el par, $(\mathbb{E}[X_T^2(\lambda^*, w^*)], \mathbb{E}[X_T(\lambda^*, w^*)])$. Puesto que $\Pi_1^*(w^*) \subseteq \bigcup_\lambda \Pi_2^*(\lambda, w^*)$, entonces el problema $(E(w^*))$ puede reducirse a,

$$\begin{aligned} & \text{máx}_\lambda \, \tilde{U}\left(\mathbb{E}[X_T^2(\lambda, w^*)], \mathbb{E}[X_T(\lambda, w^*)]\right) \\ = \ & \text{máx}_\lambda \, \mathbb{E}[X_T(\lambda, w^*)] - w^*\big(\mathbb{E}[X_T^2(\lambda, w^*)] - \mathbb{E}^2[X_T(\lambda, w^*)]\big) \end{aligned}$$

Una condición necesaria de optimalidad de primer orden para un óptimo $\lambda^*$ es,

$$-w^*\left[\frac{\partial \mathbb{E}\left(X_T^2(\lambda, w^*)\right)}{\partial \lambda}\right] + 2w^*\mathbb{E}\left[X_T(\lambda, w^*)\right]\left(\frac{\partial \mathbb{E}\left(X_T(\lambda, w^*)\right)}{\partial \lambda}\right) + \frac{\partial \mathbb{E}\left(X_T(\lambda, w^*)\right)}{\partial \lambda} = \mathbf{0}.$$

Esto es,

$$-w^*\left[\frac{\partial \mathbb{E}\left(X_T^2(\lambda, w^*)\right)}{\partial \lambda}\right] + \left[1 + 2w^*\mathbb{E}\left[X_T(\lambda, w^*)\right]|_{\pi^*}\right]\frac{\partial \mathbb{E}\left(X_T(\lambda, w^*)\right)}{\partial \lambda} = \mathbf{0}. \tag{2.64}$$

Luego, por el *Teorema 3.4.1*, derivado del trabajo de *Reid* & *Citron* [2], resultado para el cual se dedica el Apéndice A de este trabajo, se tiene adicionalmente que

$$-w^* \left[ \frac{\partial \mathbb{E}\left(X_T^2(\lambda, w^*)\right)}{\partial \lambda} \right] + \lambda^* \frac{\partial \mathbb{E}\left(X_T(\lambda, w^*)\right)}{\partial \lambda} = \mathbf{0}. \tag{2.65}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (2.64) y (2.65) se sigue que el vector $[-w^*, 1 + 2w^* \mathbb{E}\left[X_T(\lambda, w^*)\right]|_{\pi^*}]$ es proporcional a $[-w^*, \lambda^*]$.

Así, se debe cumplir que,

$$\lambda^* = 1 + 2w^* \mathbb{E}(X_T)|_{\pi^*}. \tag{2.66}$$

□

## 2.3. Solución del Problema $E(w)$

En esta sección se derivará la solución para el problema $E(w)$ a partir de la solución encontrada para el problema $A(\lambda, w)$.

Tenemos que la dinámica del capital, está dada por la ecuación,

$$X_{t+1} = e_t^0 X_t + \mathbf{P}_t' \mathbf{u}_t \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{2.67}$$

Sustituyendo la política para el portafolio óptimo obtenida en (2.42) en la ecuación anterior de la dinámica del capital,

$$X_{t+1}(\gamma) = \left(e_t^0 - \mathbf{P}_t' \mathbf{K}_t\right) X_t(\gamma) + \mathbf{P}_t' \boldsymbol{\nu}_t(\gamma). \tag{2.68}$$

Luego, al tomar esperanza de ambos lados de la ecuación anterior, y haciendo uso del supuesto de independencia entre $X_t$ y $(e_t^0, \mathbf{P}_t)$, obtenemos la siguiente expresión recursiva para el capital esperado entre periodos de tiempo consecutivos bajo la política de portafolio $\mathbf{u}_t^*(x_t, \gamma)$,

$$\mathbb{E}\left[X_{t+1}(\gamma)\right] = A_t^1 \mathbb{E}\left[X_t(\gamma)\right] + \frac{\gamma}{2} \left( \prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{A_k^1}{A_k^2} \right) B_t, \tag{2.69}$$

Por otra parte, elevando al cuadrado (2.68) obtenemos,

$$\begin{aligned} X_{t+1}^2(\gamma) \quad = \quad & \left[ \left(e_t^0\right)^2 - 2e_t^0 \mathbf{P}_t' \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_t' \mathbf{P}_t \mathbf{P}_t' \mathbf{K}_t \right] X_t^2(\gamma) \\ & +2 \left(e_t^0 - \mathbf{P}_t' \mathbf{K}_t\right) X_t(\gamma) \mathbf{P}_t' \boldsymbol{\nu}_t(\gamma) + \boldsymbol{\nu}_t' \mathbf{P}_t \mathbf{P}_t' \boldsymbol{\nu}_t(\gamma) \\ & \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Análogamente, al tomar esperanza en ambos lados de la ecuación anterior y simplificando los cálculos, obtenemos la siguiente expresión para el valor esperado del cuadrado del capital entre periodos de tiempo consecutivos bajo la política de portafolio (2.42), esto es

$$\mathbb{E}\left[X_{t+1}^2(\gamma)\right] = A_t^2 \mathbb{E}\left[X_t^2(\gamma)\right] + \frac{\gamma^2}{4}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{A_k^1}{A_k^2}\right)^2 B_t. \tag{2.71}$$

Al resolver las ecuaciones (2.69) y (2.71) recursivamente, obtenemos,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_T(\gamma)\right] &= \left(\prod_{t=0}^{T-1} A_t^1\right) x_0 + \frac{\gamma}{2}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^1\right)\left(\frac{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^1}{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^2}\right) B_t\right] && (2.72)\\
\mathbb{E}\left[X_T^2(\gamma)\right] &= \left(\prod_{t=0}^{T-1} A_t^2\right) x_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^1\right)\left(\frac{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^1}{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^2}\right) B_t\right] && (2.73)
\end{aligned}$$

Definimos los siguientes parámetros,

$$\begin{aligned}
\mu &:= \prod_{t=0}^{T-1} A_t^1 && (2.74)\\
\nu &:= \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T-1}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^1\right)\left(\frac{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^1}{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^2}\right) B_t && (2.75)\\
\tau &:= \prod_{t=0}^{T-1} A_t^2 && (2.76)\\
a &:= \frac{\nu}{2} - \nu^2 && (2.77)\\
b &:= \frac{\mu\nu}{a} && (2.78)\\
c &:= \tau - \mu^2 - ab^2. && (2.79)
\end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir las expresiones para el primer y segundo momento del capital final bajo la política $\mathbf{u}_t^*(x_t, \gamma)$ como,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_T(\gamma)\right] &= \mu x_0 + \nu\gamma && (2.80)\\
\mathbb{E}\left[X_T^2(\gamma)\right] &= \tau x_0^2 + \frac{\nu}{2}\gamma^2. && (2.81)
\end{aligned}$$

De este modo, la varianza del capital final bajo la política de portafolio $\mathbf{u}_t^*(x_t, \gamma)$

puede ser expresada en términos de $\gamma$, de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
Var\left[X_T(\gamma)\right] &= \mathbb{E}\left[X_T^2(\gamma)\right] - \mathbb{E}^2\left[X_T(\gamma)\right] \\
&= \tau x_0^2 + \frac{\nu}{2}\gamma^2 - \left(\mu x_0 + \nu\gamma\right)^2 \\
&= \tau x_0^2 + \frac{\nu}{2}\gamma^2 - \mu^2 x_0^2 - 2\gamma\mu\nu x_0 - \nu^2\gamma^2 \\
&= a(\gamma - b x_0)^2 + c x_0^2. \qquad (2.82)
\end{aligned}$$

donde $a$, $b$ y $c$ fueron definidos en (2.77), (2.78), y (2.79), respectivamente.

**Teorema 2.3.1.** *La política óptima para el portafolio multiperiodo del problema $E(w)$ está dada por,*

$$\begin{aligned}
u_t^* &= -\mathbb{E}^{-1}\left[\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[e_t^0\boldsymbol{P}_t\right]x_t \qquad (2.83)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(b x_0 + \frac{\nu}{2wa}\right)\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{A_t^1}{A_t^2}\right)\mathbb{E}^{-1}\left[\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{P}_t\right]\\
&\quad t = 0, 1, \ldots, T-2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{T-1}^* &= -\mathbb{E}^{-1}\left[\boldsymbol{P}_{T-1}\boldsymbol{P}_{T-1}'\right]\mathbb{E}\left[e_{T-1}^0\boldsymbol{P}_{T-1}\right]x_{T-1} \qquad (2.84)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(b x_0 + \frac{\nu}{2wa}\right)\mathbb{E}^{-1}\left[\boldsymbol{P}_{T-1}\boldsymbol{P}_{T-1}'\right]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{P}_{T-1}\right]
\end{aligned}$$

*Más aún, el valor esperado y la varianza del capital final sobre la frontera eficiente en términos de $w$, se pueden expresar de la siguiente forma,*

$$\mathbb{E}\left[X_T(w)\right] = \left(\mu + b\nu\right)x_0 + \frac{\nu^2}{2wa} \qquad (2.85)$$

$$Var\left[X_T(w)\right] = \frac{\nu^2}{4aw^2} + c x_0^2. \qquad (2.86)$$

*Demostración.* La implicación del *Teorema 2.2.8* es que el conjunto de soluciones del problema $E(w)$ es un subconjunto del conjunto de soluciones del problema $A(\lambda, w)$, cuyas soluciones pueden ser parametrizadas por el cociente $\gamma = \frac{\lambda}{w}$.

Además, $\mathbb{E}\left[X_T(\gamma)\right]$ es una función lineal de $\gamma$ y la varianza del capital final $Var\left[X_T(\gamma)\right]$, es una función cuadrática de $\gamma$. De este modo, podemos expresar $\tilde{U}\left(\mathbb{E}\left[x_T^2(\gamma)\right], \mathbb{E}\left[x_T(\gamma)\right]\right)$ como una función de $\gamma$ de la forma,

$$\tilde{U}\left(\mathbb{E}\left[x_T^2(\gamma)\right], \mathbb{E}\left[x_T(\gamma)\right]\right) = \mu x_0 + \nu\gamma - w\left[a\left(\gamma - b x_0\right)^2 + c x_0^2\right]. \qquad (2.87)$$

Observemos que $\tilde{U}$ es la función objetivo del problema $E(w)$ y de la expresión anterior, tenemos que es una función cóncava de $\gamma$.

Por lo tanto, como todas las soluciones de este problema están contenidas en el conjunto de solución del problema auxiliar, para encontrar la solución óptima será suficiente derivar (2.87) con respecto de $\gamma$ y al igualar a cero como una condición necesaria de optimalidad, tenemos que el valor óptimo para $\gamma$ es,

$$\gamma^* = bx_0 + \frac{\nu}{2wa}. \tag{2.88}$$

Luego, del *Teorema 2.2.9* tenemos que una condición necesaria para que $\pi^* \in A(\lambda^*, w)$ sea solución del problema $E(w)$, es que $\lambda^* = 1 + 2w\mathbb{E}(X_T)|_{\pi^*}$; vamos a ver que se satisface esta condición. Para ello, se debe considerar,

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\lambda^*}{w} \\
&= \frac{1}{w} + 2\mathbb{E}[X_T]|_{\pi^*} \\
&= \frac{1}{w} + 2\left[\mu x_0 + \nu\gamma\right] \\
&= \frac{1}{w} + 2\mu x_0 + 2\nu\gamma.
\end{aligned}$$

Se sigue que,

$$(1 - 2\nu)\,\gamma = \frac{1}{w} + 2\mu x_0, \tag{2.89}$$

esto es,

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{w\,(1-2\nu)} + \frac{2\mu x_0}{(1-2\nu)} \\
&= \frac{\nu}{\nu w\,(1-2\nu)} + \frac{2\mu\nu}{v\,(1-2\nu)} x_0 \\
&= \frac{\nu}{w\,(\nu - 2\nu^2)} + \frac{2\mu\nu}{\nu - 2\nu^2} x_0 \\
&= \frac{\nu}{2w\left(\frac{\nu}{2} - \nu^2\right)} + \frac{\mu\nu}{\frac{\nu-2\nu^2}{2}} x_0 \\
&= \frac{\nu}{2wa} + \frac{\mu\nu}{\frac{\nu}{2} - \nu^2} x_0 \\
&= \frac{\nu}{2wa} + \frac{\mu\nu}{a} x_0 \\
&= \frac{\nu}{2wa} + bx_0 = \gamma^*
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Por lo tanto, al sustituir $\gamma^*$ dada como en (2.88), en la ecuación (2.42) tenemos que se satisface la condición necesaria del *Teorema 2.2.9* para que $u_t^*(x_t,\gamma^*)$ sea solución del problema $E(w)$. Esta política de decisión está dada por,

$$\begin{aligned} u_t^* &= u_t(x_t,\gamma^*) \\ &= -\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[e_t^0\mathbf{P}_t\right]x_t \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(bx_0+\frac{\nu}{2wa}\right)\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{A_t^1}{A_t^2}\right)\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] \\ &\quad t=0,1,\ldots,T-2. \end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned} u_{T-1}^* &= -\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}_{T-1}'\right]\mathbb{E}\left[e_{T-1}^0\mathbf{P}_{T-1}\right]x_{T-1} \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(bx_0+\frac{\nu}{2wa}\right)\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}_{T-1}'\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\right] \end{aligned} \tag{2.92}$$

Esto es, la política de portafolio óptimo para el problema $E(w)$ puede ser expresada como en (2.83) y (2.84).

Por otra parte, al sustituir $\gamma^*$ en las ecuaciones (2.80) y (2.81) obtenemos las expresiones para el valor esperado y la varianza del capital final sobre la frontera eficiente en términos de $w$, dadas en (2.85) y (2.86).

$\square$

Por lo tanto, dado un problema como los definidos $(P1(\sigma))$ o $P2(\epsilon)$, podemos calcular el valor asociado óptimo para $w$ en términos de los parámetros $\sigma$ o $\epsilon$ dados, según corresponda, luego se podrá calcular el valor para $\gamma^*$ en (2.88). Estos pasos para la solución se explican de manera precisa en la sección del algoritmo de solución.

En resumen, la solución de portafolio óptimo para los problemas $(P1(\sigma))$ y $P2(\epsilon)$ es especificada por la siguiente expresión analítica,

$$\begin{aligned} u_t^* &= -\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[e_t^0\mathbf{P}_t\right]x_t \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(bx_0+\frac{\nu}{2w^*a}\right)\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{A_t^1}{A_t^2}\right)\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] \\ &\quad t=0,1,\ldots,T-2. \end{aligned} \tag{2.93}$$

$$\begin{aligned} u_{T-1}^* &= -\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}_{T-1}'\right]\mathbb{E}\left[e_{T-1}^0\mathbf{P}_{T-1}\right]x_{T-1} \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(bx_0+\frac{\nu}{2w^*a}\right)\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}_{T-1}'\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\right] \end{aligned} \tag{2.94}$$

donde

$$w^* = \begin{cases} \frac{\nu}{2\sqrt{a\left(\sigma - cx_0^2\right)}} & \text{para resolver } (P1(\sigma)). \\ \frac{\nu^2}{2a(\epsilon-(\mu+b\nu)x_0)} & \text{para resolver } (P2(\epsilon)). \end{cases} \tag{2.95}$$

Por último, de las ecuaciones (2.85) y (2.86), por eliminación del parámetro $w$ obtenemos que la frontera eficiente para los problemas $E(w)$, $(P1(\sigma))$ y $P2(\epsilon)$, está dada por,

$$Var\left[X_T\right] = \frac{a}{\nu^2}\left(\mathbb{E}\left[X_T\right] - \left(\mu + b\nu\right)x_0\right)^2 + cx_0^2. \tag{2.96}$$

para $\mathbb{E}\left[X_T\right] \geq \left(\mu + b\nu\right)x_0$.

## 2.4. Selección de portafolio multiperiodo en un mercado con un activo libre de riesgo

En situaciones de inversión en las que se tiene un activo libre de riesgo, se pueden plantear soluciones como un caso particular de el planteamiento anterior. Supongamos que el rendimiento del activo libre de riesgo al tiempo $t$ es representado por $s_t$.

Sin pérdida de generalidad, consideremos que el activo de índice 0 en el planteamiento anterior representa el activo libre de riesgo, es decir, $s_t = e_t^0$, para $t = 0, 1, \ldots, T-1$. Además,

$$Cov\left(e_t^0, e_t^i\right) = 0, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Asumiremos que los rendimientos del activo libre de riesgo no son aleatorios sino que están determinados para cada periodo, podemos reescribir los parámetros de la solución anterior, como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e_t^0 \mathbf{P}_t\right] &= s_t \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] && (2.97)\\
\hat{B}_t &= s_t B_t && (2.98)\\
\tilde{B}_t &= s_t^2 B_t && (2.99)\\
\mu &= \prod_{t=0}^{T-1} \left(\mathbb{E}\left(e_t^0\right) - \hat{B}_t\right) \\
&= \prod_{t=0}^{T-1} s_t \left(1 - B_t\right) && (2.100)\\
\tau &= \prod_{t=0}^{T-1} \left(\mathbb{E}\left(\left(e_t^0\right)^2\right) - \tilde{B}_t\right) \\
&= \prod_{t=0}^{T-1} s_t^2 \left(1 - B_t\right) && (2.101)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \left[ \left( \prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{\left(\mathbb{E}\left(e_k^0\right) - \hat{B}_k\right)^2}{\mathbb{E}\left(\left(e_k^0\right)^2\right) - \tilde{B}_k} \right) B_t \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} \left( \prod_{k=t+1}^{T-1} (1 - B_k) B_t \right)
\end{aligned}$$

Para reducir la expresión del parámetro $\nu$ tenemos la siguiente,

**Proposición 2.4.1.** *Para cualquier longitud $T$ del horizonte de planificación se satisface*

$$\sum_{t=0}^{T-1} \left( \prod_{k=t+1}^{T-1} (1 - B_k) B_t \right) = 1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - B_t)$$

*Si $a < b$ entonces definimos $\prod_{t=b}^{a}(1-B_t) = 1$.*

*Demostración.* Demostraremos aplicando inducción matemática.
El caso $T = 1$ se satisface trivialmente.

Supongamos que la igualdad de satisface para $T = R$

$$\sum_{t=0}^{R-1}\left(\prod_{k=t+1}^{R-1}(1-B_k)B_t\right) = 1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t) \tag{2.102}$$

Consideremos $T = R + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{R}\left(\prod_{k=t+1}^{R}(1-B_k)B_t\right) &= \sum_{t=0}^{R-1}\left(\prod_{k=t+1}^{R}(1-B_k)B_t\right) + B_R \\
&= \sum_{t=0}^{R-1}\left(\prod_{k=t+1}^{R-1}(1-B_k)(1-B_R)B_t\right) + B_R \\
&= (1-B_R)\sum_{t=0}^{R-1}\left(\prod_{k=t+1}^{R-1}(1-Bt)\right) + B_R
\end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis de inducción (2.102) tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{R}\left(\prod_{k=t+1}^{R}(1-B_k)B_t\right) &= (1-B_R)\left(1-\prod_{t=0}^{R-1}(1-B_t)\right) + B_R \\
&= 1 - \prod_{t=0}^{R}(1-B_t)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por principio de inducción se cumple la proposición. □

Entonces podemos escribir,

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right) \tag{2.103}$$

Por otra parte, el parámetro $\gamma$ óptimo en el caso de un activo libre de riesgo es,

$$\begin{aligned}
\gamma^* &= \frac{2w\prod_{t=0}^{T-1} s_t\,(1-B_t)\,x_0 + 1}{w\left(\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)} \\
&= 2\prod_{t=0}^{T-1} s_t x_0 + \frac{1}{w\left(\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)}
\end{aligned} \tag{2.104}$$

El control óptimo para $t = 0, 1, \ldots, T-2$ lo obtenemos reescribiendo la expresión (2.83) como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t^* &= -s_t \mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] x_t \\ &+ \left(\prod_{k=0}^{T-1} s_k x_0 + \frac{1}{2w\left(\prod_{k=0}^{T-1}(1-B_k)\right)}\right)\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{1}{s_k}\right)\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] \end{aligned} \tag{2.105}$$

Análogamente, de (2.84) tenemos que el control óptimo para el último periodo al tiempo $T-1$ es,

$$\begin{aligned} u_{T-1}^* &= -s_{T-1} \mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_{T-1} \mathbf{P}_{T-1}'\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\right] x_{T-1} \\ &+ \left(\prod_{k=0}^{T-1} s_k x_0 + \frac{1}{2w\left(\prod_{k=0}^{T-1}(1-B_k)\right)}\right)\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_{T-1} \mathbf{P}_{T-1}'\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\right] \end{aligned} \tag{2.106}$$

El valor esperado del capital final y la varianza total asociada bajo la política óptima $\mathbf{u}_t^*$ en un caso de inversión con un activo libre de riesgo están dados por,

$$\mathbb{E}\left[X_T\right] = \prod_{t=0}^{T-1} s_t x_0 + \frac{\left(1-\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)}{2w\left(\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)} \tag{2.107}$$

$$Var\left[X_T\right] = \frac{\left(1-\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)}{4w^2\left(\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)} \tag{2.108}$$

De manera análoga, la política de decisión óptima para los problemas $P1(\sigma)$ y $P2(\epsilon)$ en situaciones de inversión con un activo libre de riesgo, está dada como sigue de (ref)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t^* &= -s_t \mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] x_t \\ &+ \left(\prod_{k=0}^{T-1} s_k x_0 + \frac{1}{2w^*\left(\prod_{k=0}^{T-1}(1-B_k)\right)}\right)\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{1}{s_k}\right)\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] \end{aligned} \tag{2.109}$$

y,

$$\begin{aligned} u_{T-1}^* &= -s_{T-1} \mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_{T-1} \mathbf{P}_{T-1}'\right] \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\right] x_{T-1} \\ &+ \left(\prod_{k=0}^{T-1} s_k x_0 + \frac{1}{2w^*\left(\prod_{k=0}^{T-1}(1-B_k)\right)}\right)\mathbb{E}^{-1}\left[\mathbf{P}_{T-1} \mathbf{P}_{T-1}'\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\right] \end{aligned} \tag{2.110}$$

donde,

$$w^* = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(1-\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)}{\sigma\left(\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)}} & \text{al resolver } P1(\sigma) \\ \frac{\left(1-\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)}{2\left(\prod_{t=0}^{T-1} s_t x_0\right)\left(\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)} & \text{al resolver } P2(\epsilon) \end{cases}$$

Finalmente, la expresión de la frontera eficiente en () puede ser reducida en el caso de considerar un activo libre de riesgo, de la siguiente forma,

$$Var(x_T) = \left( \frac{\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)}{1-\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)} \right) \left( \prod_{t=0}^{T-1} s_t x_0 - \mathbb{E}(x_T) \right)^2 \tag{2.111}$$

para $\mathbb{E}\left[X_T\right] \geq \prod_{t=0}^{T-1} s_t x_0$.

De este modo, tenemos una expresión cerrada para la frontera eficiente en la selección de portafolio multiperiodo. Un inversor con un valor específico para el parámetro $w$, puede tener expresiones analíticas para su política óptima de inversión, así como para el valor esperado de la riqueza final y su valor de riesgo asociado.

## 2.5. Algoritmo de solución para el problema $E(w)$

Al inicio de este capítulo se introdujo el problema E(w) en la definición (), como este problema no satisface las condiciones para aplicar programación dinámica, en Li & Ng [1], lograron resolverlo aplicando una inversión dentro de un problema auxiliar que es separable en el sentido de programación dinámica y en la sección anterior se dieron soluciones explícitas para este problema auxiliar $A(\lambda, w)$.

Al obtener esta solución, se puede obtener una solución analítica para el problema $E(w)$, en [1] es presentada mediante el siguiente algoritmo de solución.

***Algoritmo de solución para el problema E(w)***

1. Obtener los parámetros de entrada: $x_0$, $s_t$, $\mathbb{E}(e_t)$ y $Cov(e_t)$.
2. **for** $t = 1$ to $T - 1$
3. $\quad \mathbb{E}[\mathbf{P}_t] = \mathbb{E}[e_t - s_t]$,
4. $\quad \mathbb{E}[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t'] = Cov(\mathbf{e}) + \mathbb{E}[\mathbf{P}_t]\,\mathbb{E}[\mathbf{P}_t']$, and $B_t = \mathbb{E}[\mathbf{P}_t]\,\mathbb{E}[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t']^{-1}\,\mathbb{E}[\mathbf{P}_t']$.
5. $\quad \mathbf{K}_t = s_t\mathbb{E}[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t']\,\mathbb{E}[\mathbf{P}_t]$
6. **end for**.
7. Dado $w > 0$,
8. $\gamma^* = 2\prod_{t=0}^{T-1}(s_t x_0) + \frac{1}{w\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)}$.
9. $\mathbb{E}(X_T(w)) = \prod_{t=0}^{T-1}(s_t x_0) + \frac{1-\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)}{2w\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)}$ and $\mathbb{V}[X_T(w)] = \frac{1-\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)}{4w^2\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)}$.
10. $\nu_{T-1}(\gamma^*) = \frac{\gamma^*}{2}\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_{T-1}\mathbf{P}_{T-1}'\right]^{-1}\mathbb{E}[\mathbf{P}_{T-1}]$
11. **for** $t = 0$ to $T - 2$,
12. $\quad \nu_t(\gamma^*) = \frac{\gamma^*}{2\prod_{k=t+1}^{T-1} s_k}\mathbb{E}[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t']^{-1}\,\mathbb{E}[\mathbf{P}_t]$
13. **end for**

En el siguiente capítulo se presentan algunos ejemplos de aplicación de este algoritmo, así como resultados de la implementación con datos reales del mercado mexicano local.

## 2.6. Generalización al caso de una función de utilidad no lineal de $\mathbb{E}[X_T]$ y $\mathbb{V}[X_T]$

Una función de utilidad para un inversor racional, $U(\mathbb{E}[X_T], \mathbb{V}[X_T])$ debe satisfacer lo siguiente,

$$\frac{\partial U(\mathbb{E}[X_T], \mathbb{V}[X_T])}{\partial \mathbb{E}[X_T]} > 0 \quad y \quad \frac{\partial U(\mathbb{E}[X_T], \mathbb{V}[X_T])}{\partial \mathbb{V}[X_T]} < 0$$

De manera más general, el problema que se propone resolver para encontrar una selección de portafolio multiperiodo es el siguiente problema

$$P(U): \quad \text{máx}_\pi \quad U(\mathbb{E}[X_T], \mathbb{V}[X_T]) \tag{2.112}$$

$$s.a. \quad x_{t+1} = s_t x_t + P_t' u_t \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{2.113}$$

Se define $\Pi^*$ como el conjunto de soluciones óptimas del problema $P(U)$, es decir,

$$\Pi^* = \{\pi \mid \pi \text{ maximiza } P(U)\ \}$$

Aquí la función objetivo del problema $P(U)$ puede ser lineal o no lineal, note que la función $\tilde{U}$ de la sección anterior, es un caso particular. A continuación se presentan resultados que permiten establecer una relación entre las soluciones de los problemas $E(w)$ y $P(U)$.

**Teorema 2.6.1.** *Si $\pi^* \in \Pi^*$, entonces existe un $w \geq 0$ tal que $\pi^* \in \Pi^*$.*

*Demostración.* Dado que $U$ es una función creciente de $\mathbb{E}[X_T]$ y decreciente respecto a $\mathbb{V}[X_T]$ entonces la solución óptima del problema $P(U)$ está sobre la frontera eficiente media-varianza en el espacio $(\mathbb{E}[X_T], \mathbb{V}[X_T])$.

Luego, como la frontera eficiente del problema $E(w)$ es una función cóncava, entonces podemos encontrar el máximo, es decir, cada $\pi^* \in \Pi^*$ puede ser generado por $E(w)$ para algún $w \geq 0$. □

**Teorema 2.6.2.** *Sea $\pi^* \in \Pi_1^*(w^*)$, entonces una condición necesaria para que $\pi^* \in \Pi^*$ es*

$$w^* = -\left[\frac{\frac{\partial U}{\partial \mathbb{V}[X_T(w^*)]}}{\frac{\partial U}{\partial \mathbb{E}[X_T(w^*)]}}\right]$$

*Demostración.* Hemos visto que para cada $w$ tenemos un único punto de la frontera eficiente correspondiente, entonces podemos representar cada punto sobre ella, de la forma $(\mathbb{E}[X_T(w)], \mathbb{V}[X_T(w)])$.

Por otra parte, como

$$\pi^* \subseteq U_{w\geq 0}\Pi_1^*(w) \tag{2.114}$$

entonces el problema $P(U)$ puede reducirse a la siguiente forma equivalente,

$$\max_{w\geq 0} U\left(\mathbb{E}\left(X_T(w)\right), \mathbb{V}\left(X_T(w)\right)\right) \tag{2.115}$$

Una condición necesaria de primer orden para el óptimo $w^*$ es,

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbb{E}(X_T)}\Big|_{\pi^*} \frac{\partial \mathbb{E}\left(X_T(w^*)\right)}{\partial w} + \frac{\partial U}{\partial \mathbb{V}\left(X_T(w^*)\right)}\Big|_{\pi^*} \frac{\partial \mathbb{V}\left(X_T(w^*)\right)}{\partial w} = 0 \tag{2.116}$$

Por otra parte, cuando $\pi^* \in \Pi_1^*(w^*)$, tenemos de Reid & Citron que,

$$\frac{\partial \mathbb{E}\left(X_T(w^*)\right)}{\partial w} - w^* \partial \frac{\partial \mathbb{V}\left(X_T(w^*)\right)}{\partial w} = 0. \tag{2.117}$$

De este modo, el vector $\left[\frac{\partial U}{\partial \mathbb{E}(X_T)}, \frac{\partial U}{\partial \mathbb{V}(X_T(w^*))}\right]\Big|_{\pi^*}$ es proporcional al vector $[1, -w^*]$. Por lo tanto,

$$w^* = -\left[\frac{\frac{\partial U}{\partial \mathbb{V}[X_T(w^*)]}}{\frac{\partial U}{\partial \mathbb{E}[X_T(w^*)]}}\right]\Big|_{\pi^*}$$

□

**Teorema 2.6.3.** *Supongamos que $\pi^* \in \Pi_2^*(\lambda^*, w^*)$. Entonces condiciones necesarias para que $\pi^* \in \Pi^*$ son:*

$$\textit{(a)} \quad w^* = -\left[\frac{\frac{\partial U}{\partial \mathbb{V}[X_T(w^*)]}}{\frac{\partial U}{\partial \mathbb{E}[X_T(w^*)]}}\right]\Big|_{\pi^*} \tag{2.118}$$

$$\textit{y (b)} \quad \lambda^* = 1 + 2w^* \mathbb{E}\left[X_T\right]|_{\pi^*} \tag{2.119}$$

*Demostración.* Se obtiene de combinar las condiciones encontradas del Teorema (2.2.9) y del Teorema (2.6.2). □

La solución del problema $A(\lambda, w)$ puede ser obtenida para cada valor dado $\gamma = \frac{\lambda}{w}$. Luego, para encontrar el valor óptimo $\gamma^*$ podemos derivar la función de utilidad $U$ con respecto de $\gamma$ y obtenemos,

$$\frac{dU}{d\gamma} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbb{E}[X_T]} - 2\mathbb{E}[X_T]\frac{\partial U}{\partial Var(X_T)}\right)\nu + \frac{\partial U}{\partial Var(X_T)}\nu\gamma$$

Al igualar a cero, como una condición necesaria de optimalidad, tenemos que,

$$\gamma^* = 2\mathbb{E}(X_T) - \frac{\partial U}{\partial \mathbb{E}(X_T)} \Big/ \frac{\partial U}{\partial Var(X_T)}. \tag{2.120}$$

Se pueden aplicar otros métodos para encontrar este valor óptimo, tales como método de gradiente o algunos otros métodos de búsqueda. Después de determinar este valor, se sustituye el valor encontrado para $\gamma^*$ en la política óptima (2.42) para obtener la política óptima para este problema con la función de utilidad $U$.

# Capítulo 3

# Ejemplos y Aplicación

## 3.1. Ejemplos de aplicación de la solución

En esta sección se presentan algunos ejemplos en los que aplicamos el algoritmo de solución del problema $E(w)$, estos ejemplos corresponden a problemas presentados en el capítulo 7 del libro *Sharpe, Alexander y Bailey* [20]. En estos ejemplos se considera un proceso multiperiodo estacionario con $T = 4$, es decir, se consideran cuatro periodos de inversión.

**Ejemplo 1**. Considere que un inversor tiene una unidad de riqueza al inicio de su horizonte de planificación. El inversor quiere encontrar la mejor asignación de su capital entre tres activos riesgosos, $A$, $B$ y $C$. De tal manera que maximice $\mathbb{E}[X_4]$ mientras el nivel de riesgo asociado no exceda 2, esto es, $\sigma[X_4] \leq 2$. Los retornos esperados de los activos $A$, $B$ y $C$ son $\mathbb{E}[e_t^A] = 1{,}162$, $\mathbb{E}[e_t^B] = 1{,}246$ y $\mathbb{E}[e_t^C] = 1{,}228$, $t = 0, 1, 2, 3$. La covarianza de $\mathbf{e}_t = [e_t^A, e_t^B, e_t^C]'$ es,

$$Cov(\mathbf{e}_t) = \begin{bmatrix} 0{,}0146 & 0{,}0187 & 0{,}0145 \\ 0{,}0187 & 0{,}0854 & 0{,}0104 \\ 0{,}0145 & 0{,}0104 & 0{,}0289 \end{bmatrix}, \qquad t = 0, 1, 2, 3.$$

Tomamos el activo $A$ como referencia y entonces tenemos,

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{P}_t\right) = \mathbb{E}\left[e_t^B - e_t^A, e_t^C - e_t^A\right] = [0{,}0840, 0{,}0660]' \quad t = 0, 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t'\right] &= \mathbb{E}\begin{bmatrix} \left(e_t^B\right)^2 - 2e_t^A e_t^B + \left(e_t^A\right)^2 & e_t^B e_t^C - e_t^A e_t^C - e_t^A e_t^B + \left(e_t^A\right)^2 \\ e_t^B e_t^C - e_t^A e_t^C - e_t^A e_t^B + \left(e_t^A\right)^2 & \left(e_t^C\right)^2 - 2e_t^A e_t^C + \left(e_t^A\right)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}0697 & -0{,}0027 \\ -0{,}0027 & 0{,}0189 \end{bmatrix} \qquad t = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{A}\mathbf{P}_t'\right] &= \left[\mathbb{E}\left[e_t^A e_t^B\right] - \mathbb{E}\left[\left(e_t^A\right)^2\right], \mathbb{E}\left[e_t^A e_t^C\right] - \mathbb{E}\left[\left(e_t^A\right)^2\right]\right] \\ &= [0{,}1017, 0{,}0766], \qquad t = 0,1,2,3.\end{aligned}$$

Por otra parte, los valores de los parámetros para la solución son, $B_t = 0{,}3564$, $A_t^1 = 0{,}7427$, $A_t^2 = 0{,}8713$, $t = 0,1,2,3$. $\mu = 0{,}3042$, $\nu = 0{,}4076$, $a = 0{,}0376$, $b = 3{,}2940$, y $c = 0{,}0752$.
Para este ejemplo la frontera eficiente media-varianza (Figura 3.1) está dada por,

$$Var\left[X_4\right] = 0{,}2262\Big[\mathbb{E}\left[X_4\right] - 1{,}6465\Big]^2 + 0{,}0754,$$

donde $\mathbb{E}\left[X_4\right] \geq 1{,}6465$.

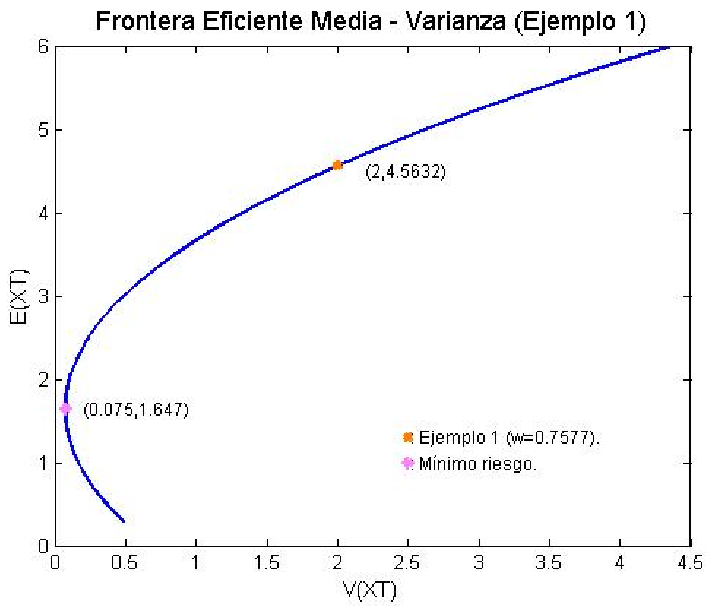


Figura 3.1: Frontera Eficiente del Ejemplo 1

Al considerar la cota para el riesgo tomada por el inversor, se obtiene que el valor correspondiente para $w^*$ es de 0,75773. La política óptima de inversión es,

$$u_t^* = -\mathbf{K}_t x_t + \boldsymbol{\nu}_t,$$

donde,

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} 1{,}6251 \\ 4{,}2851 \end{bmatrix} \quad t = 0,1,2,3, \quad \boldsymbol{\nu}_0 = \begin{bmatrix} 4{,}3569 \\ 11{,}9100 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \begin{bmatrix} 5{,}1114 \\ 13{,}9725 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_2 = \begin{bmatrix} 5{,}9966 \\ 16{,}3922 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_3 = \begin{bmatrix} 7{,}0350 \\ 19{,}2310 \end{bmatrix}.$$

La cantidad invertida en el activo $A$ está dada por $\left(x_t - \sum_{i=1}^{2} u_t^i\right)$. Al aplicar esta política de inversión obtenemos que el valor esperado de la riqueza es, $\mathbb{E}[X_T] = 4{,}5594$ y el nivel de riesgo asociado es, $Var[X_T] = 2$.

**Ejemplo 2**. Se considera una versión modificada del *Ejemplo 1*. En este ejemplo, además de considerar los tres activos riesgosos, $A$, $B$ y $C$, se supone que se tiene un activo libre de riesgo con una tasa de rendimiento igual a $s_t = 1{,}04$. Además, se supone que el inversor busca una política de portafolio eficiente tal que corresponda a un *trade-off* entre el valor esperado final y el riesgo asociado como $\partial\mathbb{E}[X_T]/\partial Var[X_T] = 2$. Con los datos del ejemplo anterior, podemos calcular,

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{P}_t\right) = \mathbb{E}\left[e_t^A - s_t, e_t^B - s_t, e_t^C - s_t\right] = [0{,}122, 0{,}206, 0{,}188]' \quad t = 0,1,2,3.$$

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t'\right] = Cov[\mathbf{e}_t] + \mathbb{E}[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t'] = \begin{bmatrix} 0{,}0295 & 0{,}0438 & 0{,}0374 \\ 0{,}0438 & 0{,}1278 & 0{,}0491 \\ 0{,}0374 & 0{,}0491 & 0{,}0642 \end{bmatrix} \quad t = 0,1,2,3.$$

Se implementó el algoritmo de solución para este ejemplo y a continuación se presentan los parámetros obtenidos para la solución del problema. Tenemos que,

$$B_t = \mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t'\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{P}_t\right] = 0{,}5942, \qquad t = 0,1,2,3.$$

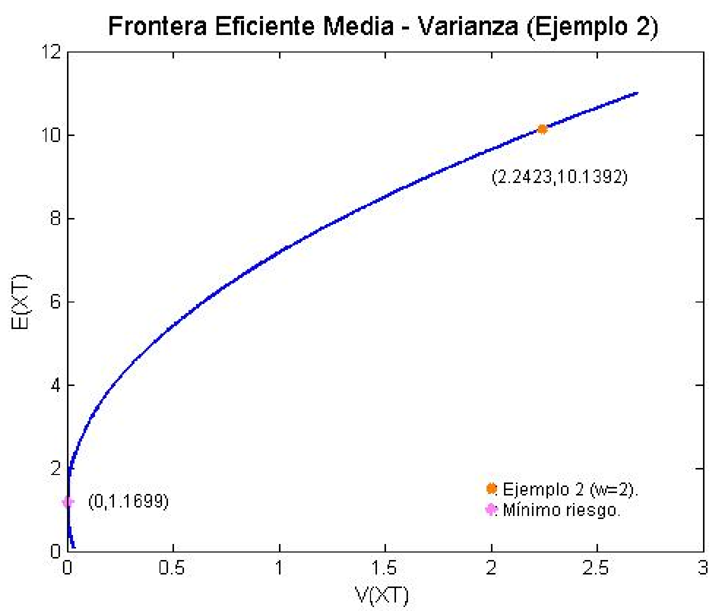


Figura 3.2: Frontera Eficiente del Ejemplo 2

La frontera eficiente media-varianza, en este ejemplo, es dada por la siguiente expresión,

$$Var[X_4] = 0{,}0279\left(\mathbb{E}[X_4] - 1{,}1699\right)^2,$$

donde $\mathbb{E}[X_4] \geq 1{,}1699$.

Entonces la política de portafolio óptimo se obtiene como,

$$u_t^* = -\mathbf{K}_t x_t + \boldsymbol{\nu}_t,$$

donde,

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} 0{,}4042 \\ 0{,}6489 \\ 2{,}3137 \end{bmatrix} \quad t = 0, 1, 2, 3, \quad \boldsymbol{\nu}_0 = \begin{bmatrix} 3{,}5898 \\ 5{,}7629 \\ 20{,}5474 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \begin{bmatrix} 3{,}5898 \\ 5{,}7629 \\ 20{,}5474 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_2 = \begin{bmatrix} 3{,}8828 \\ 6{,}2331 \\ 22{,}2241 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_3 = \begin{bmatrix} 4{,}0381 \\ 6{,}4824 \\ 23{,}1130 \end{bmatrix}.$$

La cantidad invertida en el activo libre de riesgo está dada por $\left(x_t - \sum_{i=1}^{3} u_t^i\right)$. Al aplicar esta política de inversión obtenemos que el valor esperado de la riqueza es, $\mathbb{E}[X_T] = 10{,}1392$ y el nivel de riesgo asociado es, $Var[X_T] = 2{,}2423$.

## 3.2. Aplicación con datos del mercado mexicano local

En esta sección se presentan resultados de aplicar la solución al problema de portafolio multiperiodo presentada en el trabajo de Li & Ng [1]. Se usan datos de 14 emisoras del mercado mexicano local, previamente seleccionadas.

Es importante mencionar que en las hipótesis para la solución en [1], se supone que los retornos son estadísticamente independientes entre los periodos del horizonte de inversión, lo cual hace complicada la estimación de estos parámetros con datos reales.

En esta sección supondremos que los retornos siguen una distribución estacionaria, es decir, no cambia con el tiempo. De este modo, la media y covarianza permanecen constantes, así para cada periodo k-ésimo dentro del horizonte de inversión tomamos la misma estimación del vector de rendimientos esperados y matriz de covarianza. Repetimos la estimación y cálculo de la solución durante el periodo de simulación que comprende del 2 de enero de 2006 al 26 de diciembre de 2014.

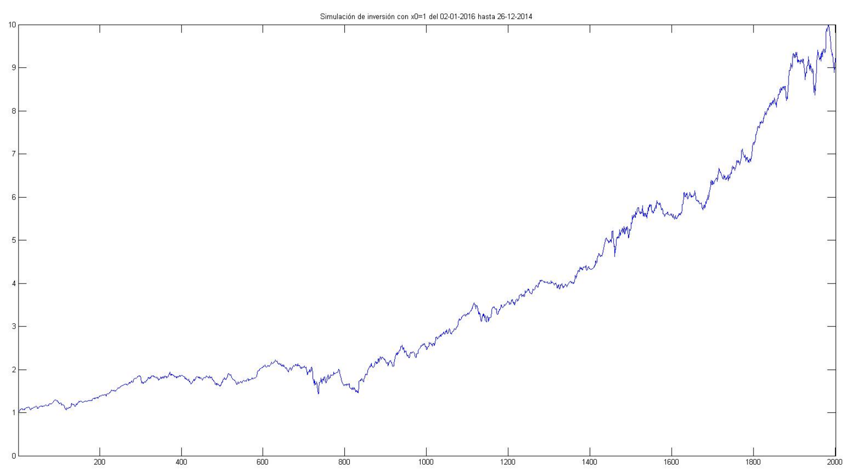


Figura 3.3: Simulación de Inversión del 02-01-2006 al 26-12-2014.

La frontera eficiente que se obtiene en este caso es presenta en la siguiente imagen

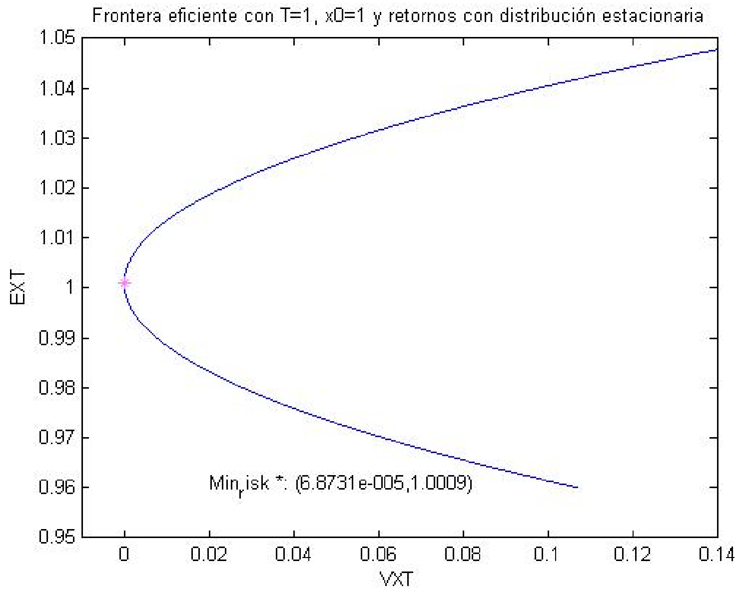


Figura 3.4: Frontera Eficiente con $x_0 = 1$ Simulación de Inversión.

La simulación de inversión de la figura 3.3 se obtuvo aplicando el punto de mínimo riesgo mostrado en la frontera eficiente y repitiendo la técnica de solución en cada horizonte de inversión, que en este caso se consideró como una semana y los periodos como días, de este modo, se tomaron en cuanta datos de retornos diarios.

Se deja como trabajo futuro encontrar buenos estimadores para los parámetros que requiere la solución, en el caso de no asumir que la distribución de los retornos sigue una distribución estacionaria.

Dado que no hay ninguna restricción al seleccionar el horizonte de inversión ni los periodos de tiempo, el problema de portafolio multiperiodo, podría aplicarse incluso con datos de operaciones de alta frecuencia, lo cual es de gran interés en la actualidad.

# Apéndice A

## 3.3. Optimización Multiobjetivo

Un problema de optimización multiperiodo (MO) es un problema de la forma:

$$\begin{array}{rc} \text{minimizar} & J_1(x), J_2(x), ..., J_N(x) \\ \text{sujeta a} & x \in X \end{array} \tag{3.1}$$

donde $J_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$ son funciones objetivo de $x = (x_1, ..., x_n)$, las cuales suponemos que toman valores reales, esto es, $J_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $X$ es el conjunto de puntos admisibles.

**Definición 3.3.1.** Se define el conjunto admisible de un problema de optimización como el conjunto que contiene a todas las $n\!-\!tuplas$, $x = (x_1, ..., x_n)$ tales que satisfacen todas las restricciones especificadas en el problema.

Se desea encontrar una $n$-tupla $x^* \in X$ tal que sea un óptimo simultáneamente para los N índices $J_1(x), J_2(x), ..., J_N(x)$ sobre el conjunto admisible $X$.

**Definición 3.3.2.** Un *vector de índices de rendimiento* $J$ es un vector N-dimensional cuyas componentes son funciones reales $J_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$ como las descritas anteriormente.

**Definición 3.3.3.** Una $n$-tupla $x^*$ se dice que es una *solución óptima de Pareto* del problema (MO) de minimización si $x^* \in X$ y no existe ningún otro $x \in X$ tal que:

$$\begin{array}{rl} i) & J_i(x^*) \leq J_i(x) \\ ii) & J_j(x^*) < J_j(x) \text{ para al menos un } j. \end{array}$$

Es de interés determinar $P$, el conjunto de todas las soluciones óptimas de Pareto (o Pareto-Optimal) de un problema multi-objetivo. Uno de los métodos para determinar este conjunto es el método de índices escalares, el cual consiste en una combinación lineal de los índices del problema multi-objetivo y pesos correspondientes para cada índice. Es decir, cada función objetivo $J_i$, es multiplicada por un escalar $\alpha_i > 0$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}^N$ y el vector de índices de rendimiento $J = (J_1, J_2, \ldots, J_N)$ asociado al problema (MO), se define el funcional

$$\tilde{J} =< \alpha, J >, \quad ||\alpha|| = 1, \quad \alpha_i > 0, i = 1, ..., N \tag{3.2}$$

y sea $\Lambda$ la *región admisible de índices*, esto es, un punto en la región $\Lambda$ corresponde a un valor de índice que resulta cuando un control admisible es aplicado al sistema en consideración.

Por lo tanto, podemos definir el *problema de índices escalares* asociado al problema de optimización (MO) como

$$\min_{J\in\Delta}[\tilde{J}] \;\; = \;\; \min_{J\in\Delta}[\ \langle \alpha, J\rangle\ ] \tag{3.3}$$

donde $\langle\cdot\rangle$ denota el producto escalar entre vectores.

Los problemas que serán considerados son aquellos que tienen un mínimo único para cada valor de $\alpha$ en $R^{N-1}$, por lo tanto, dado $\alpha = \hat{\alpha} \in R^{N-1}$, $\hat{\alpha}_i > 0,\ , i = 1, 2, ..., N-1$, podemos encontrar una única solución al problema (3.3) y la denotamos por $J^*(\hat{\alpha})$.

Se puede realizar este procedimiento para cada $\alpha \in R^{N-1}$ y esto nos da una relación funcional entre $\alpha$ y $J^*(\alpha)$.

Supondremos que $J^*(\alpha)$ es una función continua de $\alpha$ y dos veces diferenciable.

**Teorema 3.3.4.** *Si $J^*$ es una solución del problema*

$$\min_{J\in\Delta}[\tilde{J}] = \;\; \min\nolimits_{J\in\Delta}[< (1, \hat{\alpha}), J >] \quad \hat{\alpha} = (\hat{\alpha_2}, \hat{\alpha_3}, \ldots, \hat{\alpha_N})$$

*Entonces,*

$$(i) \quad \left(\frac{\partial J_1^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} + \sum\nolimits_{i=2}^{N} \hat{\alpha}_i \left(\frac{\partial J_i^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} \;\; = \;\; \boldsymbol{0} \tag{3.4}$$

*Demostración.* Dado que $J^*$ es un mínimo de $\tilde{J} = \langle(1, \hat{\alpha}), J\rangle$
Entonces,

$$\begin{aligned} \langle\ (1, \hat{\alpha}), J^*\ \rangle \;\; &\leq \;\; \langle(1, \hat{\alpha}), J\rangle \qquad \forall J \in \Lambda \\ \langle(1, \hat{\alpha}), J\rangle - \langle(1, \hat{\alpha}), J^*\rangle \;\; &\geq \;\; 0 \qquad\qquad\qquad \forall J \in \Lambda \\ \langle(1, \hat{\alpha}), J - J^*\rangle \;\; &\geq \;\; 0 \qquad\qquad\qquad \forall J \in \Lambda \end{aligned}$$

Así para cualquier variación $dJ$ del punto $J^*$ tenemos que

$$\langle\ (1, \hat{\alpha}), dJ\ \rangle \;\; \geq \;\; 0 \quad \text{ donde: } \quad dJ = J - J^*. \tag{3.5}$$

Se sigue que

$$dJ_1 + \sum_{i=2}^{N} \hat{\alpha}_i \, dJ_i \;\; \geq \;\; 0 \tag{3.6}$$

Esto es válido para los puntos mínimos a lo largo de la frontera de $\Lambda$, en particular, para los puntos $J^*$ obtenidos para una vecindad pequeña de $\hat{\alpha}$, los cuales denotaremos por $J^*(\alpha)$.

Dado que $J^*(\alpha)$ es una función continua y dos veces diferenciable, aplicando el Teorema de Aproximación de Taylor, tenemos que para una vecindad suficientemente pequeña de $\hat{\alpha}$ tenemos que:

$$J_i^*(\alpha) \approx J_i^*(\hat{\alpha}) + \left(\tfrac{\partial J_i^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} \Delta\alpha + \left(\tfrac{1}{2!}\right) \Delta\alpha' \left(\tfrac{\partial^2 J_i^*}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} \Delta\alpha \;, \quad \Delta\alpha = \alpha - \hat{\alpha}$$

para cada $i = 1, ..., N$.

Consideremos $dJ_i^*(\alpha) = J_i^*(\alpha) - J_i^*(\hat{\alpha})$, entonces de lo anterior obtenemos que:

$$dJ_i^*(\alpha) \approx \left(\frac{\partial J_i^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} \Delta\alpha + \left(\frac{1}{2!}\right) \Delta\alpha' \left(\frac{\partial^2 J_i^*}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} \Delta\alpha \;, \; i = 1, ..., N$$

Como $J_i^*(\alpha)$ es un punto en la frontera de $\Lambda$ para cada valor de $\alpha$, podemos sustituir la relación anterior para $dJ_i^*$ , i=1,...,N en la ecuación (3.6) y obtenemos que para $\Delta\alpha$ suficientemente pequeño se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 \;\; \leq \;\; & \left(\frac{\partial J_1^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} \Delta\alpha + \left(\frac{1}{2!}\right) \Delta\alpha' \left(\frac{\partial^2 J_1^*}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} \Delta\alpha \\ & + \sum_{i=2}^{N} \hat{\alpha}_i \left[ \left(\frac{\partial J_i^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} \Delta\alpha + \left(\frac{1}{2!}\right) \Delta\alpha' \left(\frac{\partial^2 J_i^*}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} \Delta\alpha \right] \end{aligned}$$

Esto es equivalente a:

$$\begin{aligned} 0 \;\; \leq \;\; & \left[ \left(\frac{\partial J_1^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} + \sum_{i=2}^{N} \hat{\alpha}_i \left(\frac{\partial J_i^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} \right] \Delta\alpha \\ & + \left(\frac{1}{2!}\right) \Delta\alpha' \left[ \left(\frac{\partial^2 J_i^*}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} + \sum_{i=2}^{N} \hat{\alpha}_i \left(\frac{\partial J_i^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} \right] \Delta\alpha \end{aligned} \tag{3.7}$$

para $\Delta\alpha$ suficientemente pequeño.

Dado que el primer sumando del lado izquierdo de la ecuación anterior predomina al segundo y como $\Delta\alpha$ puede ser positivo o negativo, entonces para satisfacer la desigualdad (3.7) es necesario que:

$$\left(\frac{\partial J_1^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} + \sum_{i=2}^{N} \hat{\alpha}_i \left(\frac{\partial J_i^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} = 0 \tag{3.8}$$

$\square$

## 3.4. Teorema 3.1 [Reid & Citron] para el problema $A(\lambda, w)$.

En la formulación del problema de portafolio multiobjetivo, definimos el siguiente problema auxiliar:

$$\begin{array}{ll} A(\lambda, w): & \text{maximizar}_{\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{T-1}} \mathbb{E}\left(-wX_T^2 + \lambda X_T\right) \\ \text{s.a.} & X_{t+1} = e_t^0 X_t + \mathbf{P}_t'\mathbf{u}_t, \quad t = 0, 1, \cdots, T-1. \end{array} \tag{3.9}$$

donde $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$. Se define el conjunto de controles admisibles por,

$$\mathbf{U} = \left\{(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{T-1}) \in (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^T) \mid X_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{P}_t'\mathbf{u}_t,\ t = 0, 1, \cdots, T-1\right\}$$

Y definimos el conjunto de soluciones del problema $A(\lambda, w)$,

$$\Pi_A(\lambda, w) \ := \ \{\mathbf{u} \in \mathbf{U} \mid \mathbf{u} \text{ es máximo de } A(\lambda, w)\}. \tag{3.10}$$

Notemos que el problema auxiliar $A(\lambda, w)$ es equivalente al problema,

$$\begin{array}{ll} \hat{A}(\lambda, w): & \min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}}\{w\mathbb{E}(X_T^2) - \lambda\mathbb{E}(X_T)\} \\ \text{s.a.} & X_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{P}_t'\mathbf{u}_t, \quad t = 0, 1, \cdots, T-1. \end{array} \tag{3.11}$$

Dado $w > 0$, como ambos problemas son equivalentes, entonces $\pi^* \in \Pi_A(\lambda, w)$ si y sólo si $\pi^* \in \Pi_{\hat{A}}(\lambda, w)$.

Supongamos que $X_T \leq 0$ y además como $T < \infty$ entonces existe una constante $c > 0$ tal que $0 \leq X_T < c$. De donde se sigue que $c - X_T > 0$ y por lo tanto,

$$\mathbb{E}(c - X_T) > 0.$$

Se definen los problemas:

$$(\text{P2.1}) \ := \ \min_{u\in\mathbf{U}} w\mathbb{E}(X_T^2)$$

$$(\text{P2.2}) := \min_{u\in\mathbf{U}} \mathbb{E}(c - X_T)$$

Para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ consideremos $J_1(\mathbf{u}) = w\mathbb{E}(X_T^2)$ y $J_2(\mathbf{u}) = \mathbb{E}(c - X_T) = c - \mathbb{E}(X_T)$. A continuación se define el problema multiobjetivo:

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} J_1(\mathbf{u}), J_2(\mathbf{u})$$

Queremos encontrar controles $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ tales que minimicen ambos problemas. En general, solucionar este tipo de problemas es difícil, hay varios métodos que se proponen para encontrar soluciones óptimas de Pareto. En particular, vamos a considerar el método de índices escalares, descrito anteriormente.

Para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ consideramos un vector de índices de rendimiento dado por

$$J_{\mathbf{u}} = (J_1(\mathbf{u}), J_2(\mathbf{u}))^t \in \mathbb{R}^2.$$

Sea $\Lambda$ la región admisible de los vectores de índices de rendimiento, es decir,

$$\Lambda = \{J_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} \in \mathbf{U}\}.$$

Entonces, podemos definir un problema escalar de índices de rendimiento como:

$$\min_{J_{\mathbf{u}} \in \Lambda} \tilde{J} = \min_{J_{\mathbf{u}} \in \Lambda} \langle\ \alpha, J_{\mathbf{u}}\ \rangle \tag{3.12}$$

Como el vector de parámetros escalares $\alpha$ no necesariamente debe ser un vector unitario por [2], siempre y cuando se considere que:

$$\alpha_1 = 1 \text{ y } \alpha_i > 0\ ,\ i = 2, \cdots, N.$$

En nuestro caso, consideremos este vector de parámetros escalares como $(1, \lambda)$, es decir, en términos del Teorema 3.1, aquí $\alpha = \lambda$.

Observemos que si consideramos el problema:

$$\min_{J_u \in \Lambda} [\tilde{J}] = \min_{J_u \in \Lambda} [\langle (1, \hat{\alpha}), J_u \rangle]\ ,\ \hat{\alpha} = \lambda^*. \tag{3.13}$$

En nuestro contexto tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle (1, \hat{\alpha}), J_u \rangle &= \langle (1, \lambda^*), J_u \rangle && (3.14)\\ &= J_1(u) + \lambda^* J_2(u) && (3.15)\\ &= w\mathbb{E}(X_T^2) + \lambda^*[c - \mathbb{E}(X_T)] && (3.16)\\ &= \lambda^* c + w\mathbb{E}(X_T^2) - \lambda^*\mathbb{E}(X_T) && (3.17) \end{aligned}$$

Dado que $\lambda^*$ es fijo y $c$ una constante entonces el problema

$$\tilde{A}(\lambda^*, w) := \min_{u \in \mathbf{U}} w\mathbb{E}(X_T^2) - \lambda^*\mathbb{E}(X_T) \tag{3.18}$$

es equivalente al siguiente problema de optimización

$$\min_{u \in \mathbf{U}} \lambda^* c + w\mathbb{E}(X_T^2) - \lambda^*\mathbb{E}(X_T) \tag{3.19}$$

cuyo problema asociado de índices de rendimiento es justamente

$$\min_{J_u \in \Lambda} [\langle (1, \hat{\alpha}), J_u \rangle] = \min_{J_u \in \Lambda} [\langle (1, \lambda^*), J_u \rangle] \tag{3.20}$$

Sea $J^*$ una solución al problema anterior. Notemos que cada vez que fijemos $\lambda$ podemos encontrar una solución $J^*$ del problema $\min_{J_u \in \Lambda}[\langle(1,\lambda),J\rangle]$ entonces se tiene una función $J^*(\lambda)$ la cual supondremos que es continua. en nuestro caso, tenemos que:

$$J^*(\lambda) = w\mathbb{E}(X_T^2(\lambda,w)) - \lambda\mathbb{E}(X_T(\lambda,w)) \tag{3.21}$$

Aplicando las ecuaciones (4,49) y (4,58) Li & NG tenemos:

$$\mathbb{E}(X_T^2(\lambda,w)) = (\prod_{t=0}^{T-1} s_t^2(1-B_t))x_0^2 + (1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t))\frac{\lambda^2}{4w^2} \tag{3.22}$$

$$\mathbb{E}(X_T(\lambda,w)) = (\prod_{t=0}^{T-1} s_t(1-B_t))x_0 + (1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t))\frac{\lambda}{2w} \tag{3.23}$$

De las expresiones anteriores podemos ver que en nuestro caso las funciones $J_1^*$ y $J_2^*$ son funciones de $\lambda$ de clase $C^2$.

A continuación se presenta el Teorema 3.1 (Reid & Citron), el cual da condiciones necesarias para que $J^*$ sea un punto mínimo de $\tilde{J}$ para un valor dado $\hat{\alpha}$ y presentamos cómo se aplica este resultado en el problema que estamos estudiando.

**Teorema 3.4.1.** *Sea $J^*$ una solución al problema*

$$\min_{J\in\Lambda}[\tilde{J}] = \min_{J\in\Lambda}[\langle(1,\hat{\alpha}),J\rangle] \ , \ \hat{\alpha} = (\hat{\alpha_2},\cdots,\hat{\alpha_N}) \in E^{N-1} \tag{3.24}$$

*entonces,*

$$(i) \ \left(\frac{\partial J_1^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} + \sum_{i=2}^{N} \hat{\alpha}_i \left(\frac{\partial J_i^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\hat{\alpha}} = \boldsymbol{0} \tag{3.25}$$

Aplicando este resultado en nuestro caso tenemos que:

$$\left(\frac{\partial J_1^*}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda^*} + \lambda^* \left(\frac{\partial J_2^*}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda^*} = \mathbf{0}$$

donde:

$$\left(\frac{\partial J_1^*}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda^*} = \frac{\partial[w\mathbb{E}(X_T^2(\lambda,w))]}{\partial\lambda} = w\frac{\partial\mathbb{E}(X_T^2(\lambda^*,w))}{\partial\lambda}$$

$$\left(\frac{\partial J_2^*}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda^*} = \frac{\partial[c-\mathbb{E}(X_T(\lambda,w))]}{\partial\lambda} = -\frac{\partial\mathbb{E}(X_T(\lambda^*,w))}{\partial\lambda}$$

Por lo tanto,

$$w\frac{\partial\mathbb{E}(X_T^2(\lambda^*,w))}{\partial\lambda} - \lambda^*\frac{\partial\mathbb{E}(X_T(\lambda^*,w))}{\partial\lambda} = 0 \tag{3.26}$$

# Bibliografía


**[1].** Li, Duan; Wan-Lung, Ng (2000): "Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation ", *Mathemat Finance*, vol 10, no. 3, pp. 387-406.

**[2].** Reid, R. W.; Citron S. J. (1971): "On Noninfererior Performance Index Vector", *Journal of Optimization Theory and Applications* 7, 11-28.

**[3].** He, J.; Wang, Q-G; Cheng, P.; Sun, Y. (2015) "Multi-period mean-variance portfolio optimization with high-order coupled asset dynamics". *IEEE Trans Autom Control*; 60(5):1320-1335.

**[4].** Markowitz, H. M. (1952): "Portfolio selection," *Journal of Finance*, vol. 7, no. 1, 77-91.

**[5].** Markowitz, H. M. (1956): "The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints" *Naval Research Logistics Quarterly* 3, 111-133.

**[6].** Markowitz, H. M. (1959): "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment". *New York: John Wiley* & *Sons.*

**[7].** Markowitz, H. M. (1989): "Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets". Cambridge, MA: Basil Blackwell.

**[8].** Hakansson, N. H. (1971a): "Multi-Period Mean-Variance Analysis: Toward a General Theory of Portfolio Choice", *Journal of Finance* vol. 26, 857-884.

**[9].** Hakansson, N. H. (1971b): "On Optimal Myopic Portfolio Policies, with and without Serial Correlation of Yields", *Journal of Business* 44, 324-334.

**[10].** Zhu, S.; Li, D.; Wang, S. (2004): "Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: A generalized mean-variance formulation", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 3, pp. 447-456.

**[11].** Cui, Xiangyu; Li, Duan (2012): "Better than dynamic mean-variance: time inconsistency and free cash flow stream". *Mathematical Finance*, vol. 22, no. 2, 346-378.

**[12].** Gao, Jianjun; Li, Duan (2014): "Multiperiod Mean-Variance Portfolio Optimization with General Correlated Returns". *The international Federation of Automatic Control.*

**[13].** Sniedovich, M. (2011) *Dynamic Programming Foundations and Principles*, Segunda Edición.

**[14].** Sniedovich, M. (2002) *Eureka! Bellman's Principle of Optimality is valid!* Contribución en el libro editado por Dror, L'Ecuyer y Szidarovszky (2002).

**[15].** Bertsekas, Dimitri P.(1976), Dynamic Programming and Stochastic Control. New York: Academic Press.

**[16].** Bertsekas, Dimitri P.(2005), Dynamic Programming and Optimal Control. Vol.1. Belmont, Massachusetts : Athena Scientific.

**[17].** Puterman, Martin L.(1994), Markov Decision Processes : Discrete Stochastic Dynamic Programming. New York: John Wiley.

**[18].** Duan Li and Y Y Haimes. *New approach for nonseparable dynamic programming problems.* Journal of Optimization Theory and Applications, 64(2) : $311 - 330, 1990$.

**[19].** Li, Xun; Zhou, Xun Yu (2006): "Continuous - time mean - variance efficiency", *The Annals of Applied Probability*, vol 16, no. 4, 1751 - 1763.

**[20].** Sharpe, Alexander & Bailey (1995): *Investments.* Prentince-Hall, fifth edition.