

Solución de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas para la Simulación de Sistemas Mecánicos

Carlos Enrique Valencia Murillo (1), José María Rico Martínez (2)

1 [Licenciatura en Ingeniería Mecánica, Universidad de Guanajuato] | Dirección de correo electrónico: [ce.valenciamurillo@ugto.mx]

2 [Departamento de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato] | Dirección de correo electrónico: [jrico@ugto.mx]

Resumen

En esta contribución se presenta la determinación de las ecuaciones diferenciales algebraicas cuya solución constituye el análisis dinámico inverso del mecanismo plano de manivela biela corredera. En este problema, se supone que se conocen las propiedades geométricas e inercial de los eslabones del mecanismo y la función que representa la fuerza o momento motriz y el objetivo es determinar el movimiento del mecanismo, es decir, la posición, velocidad y aceleración de cada uno de los eslabones del mecanismo. Para obtener las ecuaciones diferenciales algebraicas se emplean las ecuaciones de Newton-Euler para cada uno de los eslabones y se eliminan las reacciones entre los eslabones, que, en este caso, no son de interés. Además, la contribución incluye la solución de las ecuaciones diferenciales algebraicas mediante el empleo de herramientas computacionales. Se presentan los resultados y se discute su validez.

Abstract

This contribution presents the determination of differential-algebraic equations, whose solution provides the inverse dynamic analysis of a slider-crank planar mechanism. This problem assumes that the geometric and inertial properties of all links, as well as, the input force or torque are known. The solution of these equations provides the mechanism motion; i.e. the position, velocity and acceleration of all the mechanism links. The differential-algebraic equations are obtained by applying the Newton-Euler equations to all the links and removing the reactions between links, since they are not required in this problem. Furthermore, the contribution includes the solution of the differential-algebraic equations using computational tools. The results are presented and their validity is discussed.

Palabras Clave

Mecanismos planos; Análisis cinemático; Análisis dinámico; Maple.

INTRODUCCIÓN

La simulación de sistemas mecánicos tiene sus orígenes en la segunda mitad del siglo XIX, cuando mediante centros instantáneos de velocidad se realizaron los análisis de velocidad de diferentes mecanismos. Diferentes libros de texto, en lengua alemana, de la primera parte del siglo XX, ya incluían análisis dinámico de mecanismos. Esos avances se reflejaron en los libros de texto norteamericanos, los más frecuentemente usados en nuestras universidades, durante los años sesenta y setenta del siglo pasado. Sin embargo, el tipo de análisis dinámico presentado en estos textos, era, casi exclusivamente, el análisis directo. Es decir, conocido el movimiento del eslabón motriz y las propiedades geométricas e inerciales de los eslabones, determinar las reacciones en los pares cinemáticos que conectan los eslabones y la fuerza motriz necesaria para realizar el movimiento. Erdman y Sandor [1] fueron de los primeros que en un libro de texto abordaron el análisis dinámico inverso, es decir conocidas las propiedades geométricas e inerciales de los eslabones y la fuerza motriz, determinar el movimiento del mecanismo. Dresig [2], en Alemania, realizaba investigaciones semejantes pero, sus libros de texto fueron traducidos al inglés sólo recientemente. Erdman y Sandor [1] resolvían el análisis inverso, reduciendo el problema a la solución numérica de una única ecuación diferencial altamente no-lineal para determinar el movimiento del eslabón motriz y después realizando el análisis cinemático directo, obtenían el movimiento de los restantes eslabones. En esta contribución, el análisis inverso de un mecanismo, se obtiene mediante la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas. A primera vista, parecería que este camino es innecesariamente complicado, sin embargo, investigaciones recientes en la solución numérica de este tipo de sistemas ha demostrado que este camino es factible y eficiente. De manera más específica, esta contribución presenta el análisis dinámico inverso de un mecanismo plano de manivela biela corredera, incluyendo la derivación del sistema de ecuaciones y su solución mediante

métodos numéricos incorporados a programas de simulación fácilmente disponibles. Es importante señalar que este tópico de alta relevancia no se incluye en los programas de estudio de ingeniería mecánica y mecatrónica de la gran mayoría de las universidades de nuestro país.

DEDUCCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

El análisis dinámico inverso de un mecanismo plano se inicia con el análisis cinemático que requiere los siguientes pasos:

1. Determinación de los vectores de posición de las revolutas con respecto a la revoluta anterior. De acuerdo a la Figura 1 se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{BA} &= a_2 C(\theta_2(t)) \hat{i} + a_2 S\theta_2(t) \hat{j} \\ \vec{r}_{CB} &= a_3 C(\theta_3(t)) \hat{i} + a_3 S\theta_3(t) \hat{j} \end{aligned}$$

Donde C y S representan la función coseno y seno del ángulo correspondiente, respectivamente. Por razones de espacio, en lo sucesivo se suprimirá el argumento (t) , es esas funciones.

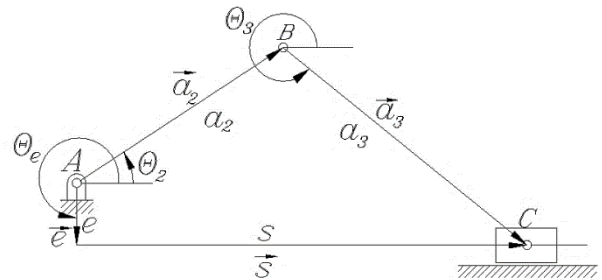


Figura 1: Mecanismo de Biela Manivela Corredera.

2. Determinación de los vectores de posición de los centros de masas de los eslabones respecto a la revoluta anterior. La Figura 2 muestra la localización de los centros de masa.

$$\begin{aligned} \vec{r}_{G_2A} &= r_{G_2} C(\theta_2 + \varphi_2) \hat{i} + r_{G_2} S(\theta_2 + \varphi_2) \hat{j} \\ \vec{r}_{G_3B} &= r_{G_3} C(\theta_3 + \varphi_3) \hat{i} + r_{G_3} S(\theta_3 + \varphi_3) \hat{j} \\ \vec{r}_{G_4A} &= [a_2 C\theta_2 + a_3 C\theta_3] \hat{i} + [a_2 S\theta_2 + a_3 S\theta_3] \hat{j} \end{aligned}$$

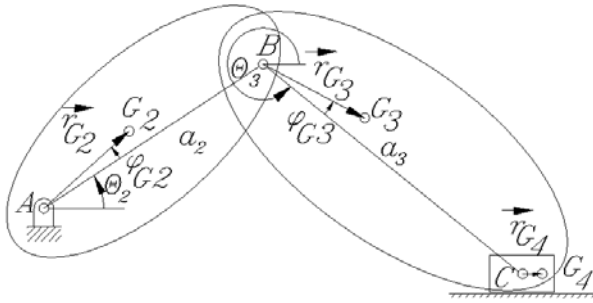


Figura 2: Centros de masa del mecanismo.

3. Determinación del vector de posición necesario para realizar la suma de momentos con respecto al centro de masa del eslabón 3.

$$r_{CG_3} = [a_3 C \theta_3 - r_{G_3} C(\theta_3 + \varphi_3)] \hat{i} + [a_3 S \theta_3 - r_{G_3} S(\theta_3 + \varphi_3)] \hat{j}$$

A continuación se presenta la determinación de las velocidades y aceleraciones de los centros de masas, así como de las velocidades y aceleraciones angulares de los eslabones.

Las velocidades de los centros de masas de los eslabones se obtienen derivando, respecto al tiempo, los vectores de posición de los centros de masa de cada eslabón.

$$v_{G_2} = \left[-r_{G_2} S(\theta_2 + \varphi_2) \left(\frac{d}{dt} \theta_2 \right) \right] \hat{i} + \left[r_{G_2} C(\theta_2 + \varphi_2) \left(\frac{d}{dt} \theta_2 \right) \right] \hat{j}$$

$$v_{G_3} = \left[-a_2 S \theta_2 \left(\frac{d}{dt} \theta_2 \right) - r_{G_3} S(\theta_3 + \varphi_3) \left(\frac{d}{dt} \theta_3 \right) \right] \hat{i} + \left[-a_2 C \theta_2 \left(\frac{d}{dt} \theta_2 \right) + r_{G_3} C(\theta_3 + \varphi_3) \left(\frac{d}{dt} \theta_3 \right) \right] \hat{j}$$

$$v_{G_4} = \left[-a_2 S \theta_2 \left(\frac{d}{dt} \theta_2 \right) - a_3 S \theta_3 \left(\frac{d}{dt} \theta_3 \right) \right] \hat{i} + \left[a_2 C \theta_2 \left(\frac{d}{dt} \theta_2 \right) + a_3 C \theta_3 \left(\frac{d}{dt} \theta_3 \right) \right] \hat{j}$$

Las aceleraciones de los centros de masas de los eslabones se obtienen derivando, nuevamente respecto al tiempo, las velocidades de los centros de masas. En las siguientes ecuaciones, para ahorrar espacio, se sustituye las primeras y segundas derivadas de los ángulos por las velocidades y aceleraciones angulares.

$$a_{G_2} = \left[-r_{G_2} C(\theta_2 + \varphi_2) (\omega_2)^2 - r_{G_2} S(\theta_2 + \varphi_2) \alpha_2 \right] \hat{i} + \left[-r_{G_2} S(\theta_2 + \varphi_2) (\omega_2)^2 - r_{G_2} C(\theta_2 + \varphi_2) \alpha_2 \right] \hat{j}$$

$$a_{G_3} = \left[-a_2 C \theta_2 (\omega_2)^2 - r_{G_3} C(\theta_3 + \varphi_3) (\omega_3)^2 - a_2 S \theta_2 \alpha_2 - r_{G_3} S(\theta_3 + \varphi_3) \alpha_3 \right] \hat{i} + \left[-a_2 S \theta_2 (\omega_2)^2 - r_{G_3} S(\theta_3 + \varphi_3) (\omega_3)^2 + a_2 C \theta_2 \alpha_2 + r_{G_3} C(\theta_3 + \varphi_3) \alpha_3 \right] \hat{j}$$

$$a_{G_4} = \left[-a_2 C \theta_2 (\omega_2)^2 - a_2 S \theta_2 \alpha_2 - a_3 C \theta_3 (\omega_3)^2 - a_3 S \theta_3 \alpha_3 \right] \hat{i} + \left[-a_2 S \theta_2 (\omega_2)^2 + a_2 C \theta_2 \alpha_2 - a_3 S \theta_3 (\omega_3)^2 - a_3 C \theta_3 \alpha_3 \right] \hat{j}$$

El **análisis dinámico** se realiza mediante el método de Newton-Euler. La Figura 3 muestra el diagrama de cuerpo libre de los eslabones del mecanismo.

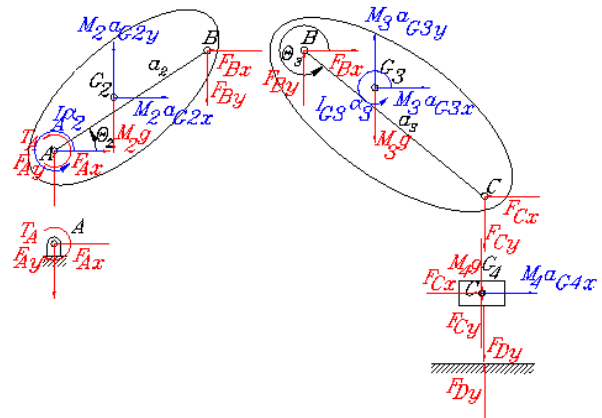


Figura 3: Diagramas de cuerpo libre.

Para la biela, la manivela y la corredera la segunda ley de Newton permite obtener para cada eslabón dos ecuaciones escalares correspondientes a las componentes en las direcciones **x** y **y**.

$$\sum F_x = M a_x \quad \sum F_y = M a_y$$

Se realiza la suma de momentos para la manivela y la biela en los puntos A y G3. Para la manivela se obtiene:

$$\sum T_A = (I_{G_2} + M_2 r_{G_2}) \cdot \alpha_2$$

Para la biela se obtiene:

$$\sum T_{G_3} = I_{G_3} \cdot \alpha_3$$

Las ecuaciones dinámicas de los eslabones generan un sistema de 8 ecuaciones. Como el principal interés es conocer la ecuación de movimiento del mecanismo, las reacciones en los pares cinemáticos no son de interés y deben eliminarse. Después de un proceso tedioso que puede llevarse a cabo con un programa de álgebra simbólica, se obtiene una ecuación diferencial en términos de θ_2 , θ_3 y sus derivadas dada por la ecuación (1).

$$T_{31}^* \left(\frac{d}{dt} \theta_3 \right) + T_{21}^* \left(\frac{d}{dt} \theta_2 \right) + T_{32}^* (\theta_3)^2 + T_{22}^* (\theta_2)^2 + T_i = 0 \quad (1)$$

Donde los términos T_{31}^* , T_{21}^* , T_{32}^* , T_{22}^* y T_i son:

$$T_{31}^* = -a_2 C \theta_2 (I_3 + M_3 r_{G_3}^2) + a_3^2 a_2 M_4 C \theta_3 C (\theta_3 - \theta_2) + a_3 a_2 M_3 r_{G_3} C \theta_3 C (\theta_3 + \varphi_3 - \theta_2) - a_3^2 a_2 M_4 C \theta_2$$

$$T_{21}^* = a_3 C \theta_3 (I_2 + M_2 r_{G_2}^2) - a_2^2 M_3 r_{G_3} C \theta_2 C (\theta_3 + \varphi_3 - \theta_2) - a_3 a_2^2 M_4 C \theta_2 C (\theta_3 - \theta_2) + a_3 a_2^2 (M_4 + M_3) C \theta_3$$

$$T_{32}^* = a_3 a_2 M_3 r_{G_3} C \theta_3 S (\theta_2 - \theta_3 - \varphi_3) + a_3^2 a_2 M_4 C \theta_3 S (\theta_2 - \theta_3)$$

$$T_{22}^* = a_2^2 M_3 r_{G_3} C \theta_2 S (\theta_2 - \theta_3 - \varphi_3) + a_3 a_2^2 M_4 C \theta_2 S (\theta_2 - \theta_3)$$

$$T_i = a_3 r_{G_2} M_2 g C \theta_3 C (\theta_2 + \varphi_2) + a_3 a_2 M_3 g C \theta_3 C \theta_2 - a_2 r_{G_3} M_3 g C \theta_2 C (\theta_3 + \varphi_3) - a_3 C \theta_3 T_A$$

Donde T_A es el torque aplicado al eslabón motriz y g es la aceleración de la gravedad.

Igualmente, es necesario considerar las definiciones de las velocidades angulares de la manivela y la biela:

$$\dot{\theta}_2 = \frac{d}{dt} \theta_2 \quad (2) \quad \dot{\theta}_3 = \frac{d}{dt} \theta_3 \quad (3)$$

Además, se requieren ecuaciones algebraicas que restringen la solución de las ecuaciones diferenciales. Estas se obtienen a partir de la ecuación de clausura del mecanismo, dada por:

$$\overset{\cdot}{a}_2 + \overset{\cdot}{a}_3 = \overset{\cdot}{e} + \overset{\cdot}{s}$$

En este caso el vector $\overset{\cdot}{s}$ no es de interés y sólo es necesaria la componente vertical de la ecuación vectorial de clausura, dada por:

$$a_2 S \theta_2 + a_3 S \theta_3 = -e \quad (4)$$

Y su derivada respecto al tiempo, dada por:

$$a_2 C \theta_2 \dot{\theta}_2 + a_3 C \theta_3 \dot{\theta}_3 = 0 \quad (5)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas que rige el análisis dinámico inverso del mecanismo plano de manivela biela corredera está dado por las tres ecuaciones diferenciales dadas por las ecuaciones (1), (2) y (3), y las ecuaciones algebraicas dadas por las ecuaciones (4) y (5).

El siguiente paso es la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas anterior. Para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales algebraicas se toma en cuenta el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (1), (2), (3) y (4).

Para el torque aplicado al eslabón motriz se considera que varía respecto al tiempo y está dado por:

$$T_A = 10 - 2.387 \left(\frac{d}{dt} \theta_2 \right) \quad [N \cdot m]$$

Los valores para los parámetros geométricos, de inercia y de masa se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0.2 \text{ m} & I_2 &= 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & m_2 &= 12 \text{ kg} \\ a_3 &= 0.6 \text{ m} & I_3 &= 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & m_3 &= 6 \text{ kg} \\ e &= 0 \text{ m} & & & m_4 &= 6 \text{ kg} \\ r_{G_2} &= 0 \text{ m} & \varphi_2 &= 0 & & \\ r_{G_3} &= 0.3 \text{ m} & \varphi_3 &= 0 & g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales para la solución son:

$$\begin{aligned} \theta_2(0) &= \frac{\pi}{2} \text{ rad} & \dot{\theta}_2(0) &= 0 \\ \theta_3(0) &= 5.94334 \text{ rad} & \dot{\theta}_3(0) &= 0 \end{aligned}$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación se presentan gráficas obtenidas a partir de la solución numérica de las ecuaciones diferenciales algebraicas, empleando el programa Maple, y el comando dsolve mediante un algoritmo Runge-Kutta de orden 4 y 5, mayor información acerca de la solución de estas ecuaciones, vea [3] y [4].

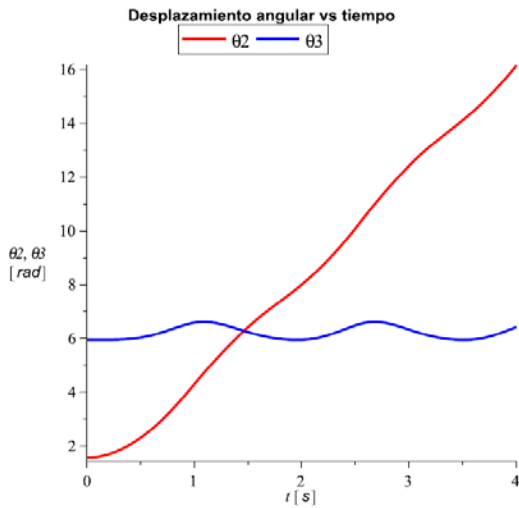


Figura 4: Gráfica desplazamiento angular eslabones 2 y 3.

Los resultados de la Figura 4 parecen inconsistentes para θ_2 , pero vale recordar que en radianes el ángulo 2π es equivalente a 0° .

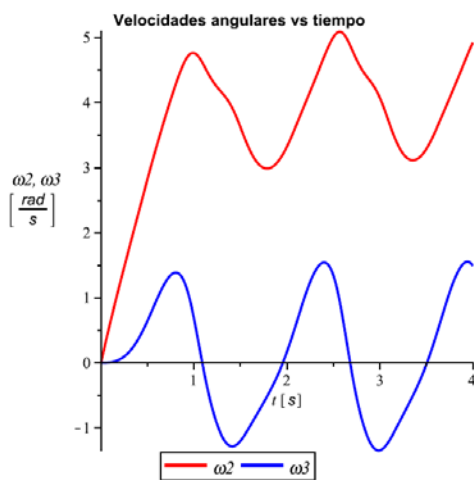


Figura 5: Gráfica velocidad angular para eslabón motriz y eslabón 3.

Se validaron la satisfacción de las ecuaciones algebraicas de posición y velocidad para los resultados de la simulación para diferentes valores de tiempo es decir, se verificó que la igualdad de las ecuaciones [4] y [5] se cumpliera al sustituir los valores obtenidos de la simulación.

CONCLUSIONES

Se dedujeron y resolvieron las ecuaciones diferenciales algebraicas cuya solución constituye el análisis dinámico inverso de un mecanismo plano de manivela biela corredera.

REFERENCIAS

- [1] Sandor, G. and Erdman, A. (1984). Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- [2] Dresig, H., Holzweissig, F. (2010). Dynamics of Machinery. Berlin: Springer-Verlag.
- [3] Ascher, U.M., Petzold, L.R. (1998). Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [4] Brenan, K.E., Campbell, S.L., Petzold, L.R. (1996). Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.