JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

EL PRODUCTO GEOMÉTRICO COMO HERRAMIENTA PARA ENSEÑAR EL ÁLGEBRA LINEAL

López Escudero Ramón (1), Eenens Philippe (2)

1 [Ingeniería Hidráulica, Universidad de Guanajuato] | Dirección de correo electrónico: [r.lopezescudero@ugto.mx]

2 [Departamento de Astronomía, División de Ciencias Naturales y Exactas, Campus Guanajuato, Universidad de Guanajuato] | Dirección de correo electrónico: [eenens@gmail.com]

Resumen

El estudio y aprendizaje del álgebra lineal resulta indispensable en múltiples disciplinas, aunque su enseñanza resulta complicada, ya que no todos los estudiantes tienen una base matemática lo suficientemente sólida para poder comprender el nivel de abstracción de sus conceptos y teoremas. Es por esto que es necesario implementar nuevas metodologías de enseñanza para aumentar el poder de cognición del alumno. El álgebra geométrica es una herramienta que ha demostrado contar con una amplia cantidad de virtudes, tanto lógicas como computacionales, facilitando conceptualizar elementos matemáticos en elementos geométricos y, por lo tanto, mejorando su entendimiento. Mediante este trabajo se mostrará un ejemplo numérico de ortogonalización mediante el proceso de Gram-Schmidt, donde se compararán los procedimientos que se deben llevar a cabo tanto en álgebra lineal como en álgebra geométrica, esto con la intención de observar la facilidad de comprensión y la cantidad de cálculos que se deben llevar a cabo en ambos enfoques.

Abstract

The study and learning of linear algebra is indispensable in multiple disciplines, even though its teaching is complicated, inasmuch as not all students have a solid enough mathematic base to grasp the level of abstraction of its theorems and concepts. That is why it is necessary to implement new methodologies of teaching to increase their cognitive level. The geometric algebra is a tool that has shown a vast amount of virtues, both logical and computational, making it easier to conceptualize the mathematical elements into geometrical elements, and therefore, improving their understanding. In this work we will show numerical examples of orthogonalization by the Gram-Schmidt method, where procedures in both linear algebra and geometric algebra will be compared, with the intention of observing the ease of understanding and the amount of calculations that have to be performed in the two approaches.

Palabras Clave

Producto cuña; Blade; Ortogonal; Ortonormal; Gram-Schmidt

INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal es una rama de las matemáticas incorporada como materia fundamental en la curricula de estudios superiores, tanto en ciencias exactas como en ingenierías. Esta permite una manipulación sencilla de vectores y ha tenido una gran aceptación desde la publicación de las notas del físico Josiah Willard Gibbs (1839-1903), en 1881, las cuales están basadas en el trabajo de Hermann Grassmann (1809-1877), *Die Lineale Ausdehnungslehre*, publicado en 1844 [1].

El álgebra geométrica es básicamente otro nombre para el álgebra propuesto por William K. Clifford (1845-1879) en 1878. Este nombre fue introducido por David Hestenes (1933-) para enfatizar la interpretación geométrica que permite esta álgebra. La idea principal de Clifford era unificar las ideas de Grassman y los cuaterniones de William R. Hamilton (1805-1865), aunque falleció joven y no pudo culminar su trabajo, razón por la que el trabajo de Gibbs fue más aceptado y adoptado por físicos y matemáticos de la época, haciéndolo un lenguaje estándar actual en las ciencias exactas e ingenierías [2]. Hestenes continuó con el trabajo de Clifford logrando unificar, simplificar, y generalizar vastas áreas de las matemáticas incorporando enfoques geométricos, incluyendo ramas como el álgebra lineal, cálculo vectorial, álgebra tensorial, cuaterniones, análisis de números complejos, etcétera [1].

En álgebra geométrica todas las operaciones tienen un significado geométrico, lo cual ayuda a su comprensión y su memorización. Además, ofrece una serie de propiedades que mejoran y optimizan cálculos en ciertos procesos matemáticos. El álgebra geométrica también cuenta con la virtud de manipular objetos en altas dimensionalidades. Por ejemplo, tal como el álgebra lineal permite manipular algebraicamente objetos de una dimensión (vectores), el álgebra geométrica permite manipular objetos de *n* dimensión (multivectores) [1].

En este trabajo se desarrollará el procedimiento de ortogonalización *Gram-Schmidt*, tanto en álgebra lineal como en álgebra geométrica, y observar qué metodología ofrece una ventaja numérica.

Álgebra Geométrica: Conceptos Básicos

Producto Externo

También conocido como producto cuña debido al símbolo del operador (^). El objetivo principal de este producto es el de aumentar la dimensión del espacio de los objetos en análisis. Por ejemplo, el producto cuña de dos vectores produce la representación de un plano, pasando de un espacio unidimensional a un bidimensional [3].

El producto externo de dos vectores no paralelos, **a^b**, produce un área orientada en el plano de **a** y **b** a través del giro del vector **a** hacia el vector **b** (ver figura 1). A esta entidad bidimensional se le conoce como *bivector*. El producto externo puede operar en n dimensiones. Por ejemplo, en un 3D, se generaría un volumen a través del producto externo de tres vectores no paralelos, **a^b^c**, introduciendo como entidad el *trivector* [4].

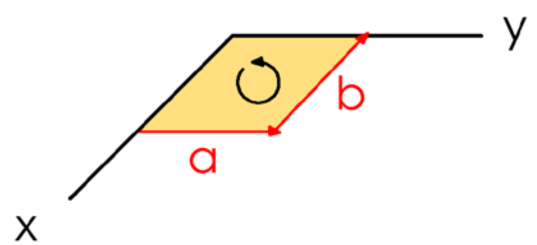

IMAGEN 1: Representación gráfica de un bivector

Tomando una base ortonormal generada por los vectores e_1, e_2 y e_3, y a_1, a_2 y a_3 como escalares, un vector u en 3D puede ser expresado de la siguiente manera [5]:

$$u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \qquad (1)$$

De esta manera, el producto externo de dos vectores u y v se ve representado como [5]:

$$u\wedge v = (u_1v_1 - u_3v_2)(e_2\wedge e_3) + (u_3v_1 - u_1v_3)(e_3\wedge e_1) + (u_1v_2 - u_2v_1)(e_1\wedge e_2) \qquad (2)$$

El resultado del producto externo son tres componentes en la base ($e_2\wedge e_3$, $e_3\wedge e_1$, $e_1\wedge e_2$), los cuales puede ser representados bajo la siguiente notación [5]:

$$e_{12} = e_1\wedge e_2, \qquad e_{23} = e_2\wedge e_3, \qquad e_{31} = e_3\wedge e_1, \qquad e_{123} = e_1\wedge e_2\wedge e_3 \qquad (3)$$

El orden de los operadores sí afecta en el producto externo, por lo que es una operación anti conmutativa. Para ejemplificar lo antes mencionado se tomará un bivector, definiendo esta propiedad de la siguiente manera:

$$e_{12} = -(e_{21}) \tag{4}$$

Como se puede notar, si cambiamos el orden de los subíndices, se altera el sentido de la orientación del bivector. De la misma manera, es importante señalar que este producto es asociativo. Sean u, v y w tres vectores en un espacio *n*, esta propiedad se puede definir de la siguiente manera [1]:

$$u\wedge(v\wedge w) = (u\wedge v)\wedge w \tag{5}$$

$$u\wedge(v\wedge w) = u\wedge v\wedge w \tag{6}$$

El producto externo también puede ser visto como un criterio de paralelismo entre dos vectores. Por ejemplo, si se aplica un producto externo operando con el mismo vector u, geométricamente no se delimita área alguna, por lo que el resultado será igual a cero, interpretándose como paralelismo [6]:

$$u\wedge u = 0 \tag{7}$$

Blade

Un concepto fundamental en el álgebra geométrica es el blade. Está definido como el resultado de aplicar un producto externo con k número de vectores independientes linealmente entre sí. Por ejemplo, si realizamos el producto externo de $e_1\wedge e_2$, al ser estos dos vectores ortogonales entre sí, producen un subespacio bidimensional, representado como un 2-blade.

Producto Interior

El producto interior, también conocido como producto punto, tiene como propiedad el permitir conocer si existe perpendicularidad entre dos vectores [6].

Grassmann observó que, en general, el producto interior disminuía la dimensión del espacio de los objetos geométricos en análisis, razón por la cual lo llamó producto regresivo. Por ejemplo, aplicando el producto interior entre dos vectores el resultante es un escalar, pasando los objetos unidimensionales a escalares [3]. Este se encuentra definido por la siguiente ecuación [6]:

$$u \cdot v = |u||v|\cos(\theta) \tag{8}$$

Donde θ es el ángulo formado entre los vectores u y v. Si existe perpendicularidad entre estos vectores, el valor del producto interior será igual a cero.

Producto Geométrico

Como se ha mencionado, el producto interno y el producto externo ofrecen conocer aspectos como la perpendicularidad y paralelismo entre dos vectores, aunque ninguno de los dos ofrece una relación completa, por lo que resulta lógica combinarlos para obtener un nuevo producto. A este concepto se le conoce como producto geométrico, el cual se define a través de la siguiente ecuación [7]:

$$uv = u\wedge v + u \cdot v \tag{9}$$

A partir del producto geométrico, se pueden deducir una serie de propiedades elementales para operar en álgebra geométrica; un ejemplo de esto es la siguiente premisa:

$$e_1e_1 = e_2e_2 = 1 \tag{10}$$

De la misma manera, el producto geométrico permite calcular el inverso de un *blade*, el cual se puede encontrar de la manera $AA^{-1} = 1$, siendo A el blade en análisis [2]. A partir de la ecuación 10, es posible encontrar el inverso de un vector u [6]:

$$uu = u\wedge u + u \cdot u = u \cdot u = 1 \tag{11}$$

Por lo que se puede escribir:

$$\frac{uu}{u \cdot u} = 1 \tag{12}$$

Teniendo como resultado la inversa de un 1-blade:

$$u^{-1} = \frac{u}{u \cdot u} \tag{13}$$

Ahora, en un 2-blade, es importante recordar que el cuadrado de un bivector es igual a -1:

$$(e_{12})(e_{12}) = e_{1212} = -e_{1122} = -1 \tag{14}$$

De esta manera, es fácil deducir el inverso de un 2-blade, el cual queda definido de la siguiente manera:

$$B^{-1} = -\frac{B}{B \cdot B} \tag{15}$$

Proyección y Contraproyección

Dado un blade y un vector, una operación común a operar es encontrar que parte del vector se encuentra dentro del blade y que parte del vector se encuentra fuera del blade. A estas operaciones se les conoce como proyección y contraproyección respectivamente [7].

Teniendo un vector u, se puede representar por sus componentes $u_\parallel + u_\perp$ caracterizadas por un blade B, donde $u_\parallel$ es la componente paralela a B y $u_\perp$ es la componente perpendicular. Estas pueden ser calculadas mediante las siguientes ecuaciones [7]:

$$u_\parallel = \frac{u \cdot B}{B} \tag{16}$$

$$u_\perp = \frac{u \wedge B}{B} \tag{17}$$

MATERIALES Y MÉTODOS

Proceso de Ortogonalización: Gram-Schmidt

De manera general, la ortogonalización por el proceso de Gram-Schmidt es la construcción de una base ortogonal a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes [8]. Se aplicó este proceso, tanto en álgebra lineal como en álgebra geométrica, con el objetivo de observar si esta última ofrece una ventaja numérica sobre el álgebra lineal.

El problema a resolver fue el siguiente: Teniendo el conjunto de vectores S = {u, v}, construir una base ortogonal para el subespacio (blade) generado por S.

Álgebra Lineal

Para construir una base ortogonal a través del proceso de Gram-Schmidt en álgebra lineal, se tienen que realizar los siguientes cálculos:

$$u_1 = u \tag{18}$$

$$v_1 = v - \frac{v \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 \tag{19}$$

Dando una base ortogonal definida por el conjunto de vectores $S_1 = \{u_1, v_1\}$

Álgebra Geométrica

Para construir una base ortogonal a través del proceso de Gram-Schmidt en álgebra geométrica, se tienen que realizar los siguientes cálculos:

$$u' = u \tag{20}$$

$$v' = \frac{v \wedge u'}{u'} \tag{21}$$

Como se puede notar, v' es la componente perpendicular del vector v sobre el vector u.

Es importante señalar que para la ecuación 21 implica la inversa de u' (ecuación 13). Este cálculo se puede reducir de la siguiente manera:

$$u^{-1} = u' \tag{22}$$

Esto es posible ya que se puede omitir el cálculo del denominador de la ecuación 13. El escalar resultante de u·u no cambia la dirección del vector al existir dependencia lineal.

De esta manera, obtendremos una base ortogonal definida por el conjunto de vectores S' = {u', v'}

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Álgebra Lineal

Sea:

$$u = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix};\ v = \begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$$

A partir de las ecuaciones 18 y 19, sustituimos valores obteniendo:

$$v \cdot u_1 = 4$$

$$\|u_1\|^2 = 2$$

Por lo tanto:

$$v_1 = \begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} \therefore v_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}$$

Obteniendo como base **ortogonal**:

$$u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix};\ v_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}$$

Para obtener una base ortonormal, simplemente hay que dividir cada término del vector entre la norma del vector. De esta manera, obtenemos como base **ortonormal**:

$$u'_1 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix};\ v'_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Álgebra Geométrica

Sea:

$$u = e_1 + e_2;\ v = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

A partir de las ecuaciones 20 y 22, sustituimos valores obteniendo:

$$v \wedge u' = 3e_{31} - 3e_{23}$$

$$v' = (3e_{31} - 3e_{23})(e_1 + e_2) \therefore v' = 6e_3$$

Obteniendo como base **ortogonal:**

$$u' = e_1 + e_2;\ v' = 6e_3$$

De manera similar al álgebra lineal, se procede a hacer el cálculo de la base **ortonormal**, obteniendo:

$$u'' = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2;\ v'' = e_3$$

CONCLUSIONES

El número de cálculos para obtener un base ortonormal es un poco mayor en álgebra geométrica que en álgebra lineal. Sin embargo, el algoritmo en álgebra geométrica es muy diferente y, creemos, más didáctico. Por un lado, es más intuitivo, gracias a su carácter geométrico. Por otro lado, la notación y desglose de cálculos son más lógicos y más apropiados para conllevar el significado geométrico, y así facilitan la lectura, análisis y comprensión del problema a resolver.

Con este trabajo resulta interesante la idea de incluir un curso introductorio de álgebra geométrica a las materias básicas de matemáticas a nivel licenciatura, ya que podría simplificar la comprensión de conceptos matemáticos básicos difíciles de comprender por métodos tradicionales.

REFERENCIAS

[1] Macdonald, A. (2010). Linear and Geometric Algebra. Estados Unidos de América: Createspace.
[2] Perwass, C. (2009). Geometric Algebra with Applications in Engineering. Berlín: Springer.
[3] López, R. & Eenens, P. (2015). Enseñar el Álgebra Geométrica en el Primer Semestre de Ingenierías. Veranos de la Investigación Científica, 1(2), pp. 544-548.
[4] Miller, R. A. (2013). Geometric Algebra: An Introduction with Applications in Euclidean and Conformal Geometry (Tesis de Maestría). Universidad de San José, Estados Unidos de América.
[5] Lengyel, E. (2012). Fundamentals of Grassmann Algebra. Game Developers Conference. San Francisco, Estados Unidos de América.
[6] Laguna Sánchez, G. (2011). Un Acercamiento Práctico al Álgebra Gométrica. Contactos, 79, pp. 31-39.
[7] Dorst, L., Mann, S. and Bouma, T. (2002). GABLE: A Matlab Tutorial for Geometric Algebra (Manual de Usuario). Universidad de Amsterdam, Holanda.
[8] Anton, H. (1985). Introducción al Álgebra Lineal. México: Limusa.