



Estudio de una esfera sobre una plataforma con dos grados de libertad

Ana Laura Razo García, José Miguel Sosa Zúñiga, Cesar Augusto Limones
Pozos
Ingeniería Electrónica,
Instituto Tecnológico Superior de Irapuato
laura.gar1297@gmail.com, jmsosa@itesi.edu.mx, cesar.limones@itesi.edu.mx

Resumen

La asignatura de control en los programas educativos de ingenierías aborda generalmente el estudio de conceptos de sistemas lineales e invariantes en el tiempo y de controles lineales. Se aborda tanto el análisis de respuesta en el tiempo como en la frecuencia. El uso de prototipos de sistemas mecánicos y mecánicos y electrónicos permite a los estudiantes comprender los conceptos en sistemas físicos y extender estos conceptos a otro tipo de sistemas en los que no sean tan claros los comportamientos de los sistemas en lazo abierto y lazo cerrado. En este documento se estudia el sistema de una esfera sobre plataforma actuada de dos grados de libertad. Este tipo de sistemas son utilizados con propósitos educacionales. Se obtiene el modelado matemático del sistema utilizando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange y se propone un controlador proporcional-integral-derivativo sobre el modelo linealizado para la estabilización de una posición de la esfera sobre la plataforma. Se presentan resultados de simulación numérica.



Introducción

La ingeniería de control es una rama de la ingeniería que ha aportado al avance tecnológico contribuyendo con otras ramas como la robótica, la mecánica, y la electrónica. Resulta transcendental entonces proveer de prototipos de sistemas controlados que permitan mejorar el aprovechamiento de estudiantes, por ejemplo de nivel licenciatura, en las asignaturas de ingeniería de control. En este trabajo se aborda el sistema de una esfera que rueda libremente, sin deslizamiento, debido al efecto de la gravedad sobre superficie cuya inclinación puede modificarse mediante dos grados de libertad. Este tipo de sistemas han sido estudiados, implementados y controlados de diferentes maneras. Por ejemplo el sistema de bola y viga el cual tiene como propósito controlar la posición de la pelota mediante el control de la viga [1], [3], el péndulo invertido [2], es un servo mecanismo que consta de un riel sobre el cual se puede deslizar un carro, sobre este está montado un péndulo que puede girar libremente. Mientras que el sistema de esfera [4], [5], [6] sobre superficie es un mecanismo donde rueda libremente una esfera mientras que el mecanismo actúa para modificar la posición de la esfera. Siendo un sistema no lineal con dos grados de libertad o 2DOF por sus siglas en inglés (Degree of freedom) [7] o más DOFs [8], con objetivos de seguimiento de trayectorias y estabilización de posiciones, se suele utilizar un control PID para estabilizar posiciones. En [9] se proponen técnicas de control difuso y control de modos deslizantes para realizar la estabilización de posiciones. En [8] se comparan tres controladores, un control LQR, un control polinomial LQ y un controlador básico PD para estabilizar posiciones de la esfera utilizando un robot manipulador como mecanismo de accionamiento. En [10] se presenta un sistema de 6DOF, balanceador de esfera de basquetbol sobre una plataforma, que se basa en un robot industrial serie. En [11] se presentan resultados de simulación de una red neuronal PID basada en un algoritmo genético donde este último se usa para obtener los factores de peso de la red neuronal. En este trabajo se presentan resultados de simulación del análisis y el modelo matemático del sistema de esfera sobre superficie.



Objetivos

1. Estudiar el estado del arte en prototipos demostrativos de sistemas de control.
2. Modelar el sistema de esfera sobre superficie.
3. Considerar un control PID y obtener simulaciones de lazo cerrado mediante el modelo obtenido.

Justificación

En este proyecto se plantea estudiar, modelar y controlar en simulación numérica, un sistema de esfera sobre superficie con un el objetivo de la construcción posterior de un prototipo didáctico de sistema de control basado en una plataforma mecánica y electrónica. Este tipo de prototipos tiene como objetivo fortalecer el proceso de enseñanza en las asignaturas de control clásico a nivel licenciatura. Se espera que el prototipo pueda aportar una mejor comprensión de los conceptos de control para la asignatura de control. Con el diseño de un prototipo académico demostrativo se podrá conocer en mayor medida el comportamiento de diversas variables de control. Por otro lado mediante el prototipo se espera obtener un método para medir distintas variables o conceptos básicos de la ingeniería de control, las plataformas didácticas ayudan a los estudiantes de ingeniería a comprender los sistemas de control de una forma práctica y relativamente simple.

Metodología

Se describe a continuación la formulación de Euler-Lagrange que permite obtener el modelo del sistema. Esta formulación permite obtener las ecuaciones de movimiento para mecanismos y se deriva de la función Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$. La definición de esta función hace uso de la energía cinética y la energía potencial de un sistema y está dada por $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$. Las variables q y \dot{q} denotan los vectores de posiciones u orientaciones y de velocidades respectivamente. La energía cinética está dada por $K(q, \dot{q}) = (1/2)\dot{q}^T M(q)\dot{q}$. Sea τ_i la fuerza o torque externo aplicado al sistema. Entonces las ecuaciones de movimiento dinámicas



pueden ser desarrolladas usando las ecuaciones de Euler-Lagrange por cada coordenada generalizada mediante (1).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad (1)$$

En la Fig. 1 se muestra una descripción gráfica del sistema. La variable de estado que describe una posición y orientación específica del sistema es denotada por $q = [x, y, \theta_x, \theta_y]$ y representa la posición (x, y) de la esfera con respecto al marco \hat{i}, \hat{j} fijo sobre la plataforma y la orientación de la plataforma (θ_x, θ_y) .

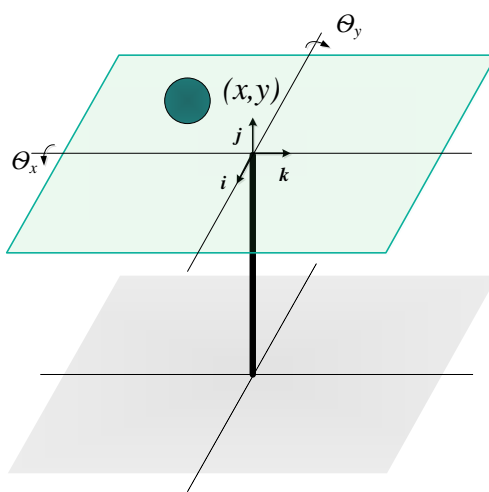


Fig. 1. Descripción gráfica del sistema esfera sobre plataforma.

Donde x, y son las posiciones de la esfera sobre la plataforma; \dot{x} y \dot{y} definen la velocidad de la esfera sobre la plataforma; r es el radio y m es la masa de la esfera; θ_x y θ_y son los ángulos de rotación de la plataforma en los ejes; $\dot{\theta}_x$ y $\dot{\theta}_y$ son las velocidades angulares de la plataforma; J_p es el momento de inercia de la plataforma y J es el momento de inercia de la esfera. Se denota por K la suma de la energía cinética de la pelota y la energía cinética de la superficie $K = K_b + K_p$. La energía total del sistema está dada por la siguiente ecuación y la energía potencial del sistema está definida por $K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{r^2} + \frac{1}{2}J(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + \frac{1}{2}J_p(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + \frac{1}{2}m(x\dot{\theta}_x + y\dot{\theta}_y)^2$ y $V(q) = mg(x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)$. En (2) y (3) se muestran las ecuaciones de los torques mientras que en (4) y (55)



se muestran las ecuaciones que representan el modelo del sistema esfera sobre superficie.

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x} - m\dot{\theta}_x^2 - m\dot{\theta}_x\dot{\theta}_y + mg \sin \theta_x = 0 \quad (2)$$

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{y} - m\dot{\theta}_y^2 - m\dot{\theta}_x\dot{\theta}_y + mg \sin \theta_y = 0 \quad (3)$$

$$\tau_x = (J + J_p + mx^2)\ddot{\theta}_x + mxy\ddot{\theta}_y + 2mx\dot{x}\dot{\theta}_x + m\dot{x}y\dot{\theta}_y + mxy\dot{\theta}_y + mgx \cos \theta_x \quad (4)$$

$$\tau_y = (J + J_p + my^2)\ddot{\theta}_y + mxy\ddot{\theta}_x + 2my\dot{y}\dot{\theta}_y + m\dot{x}y\dot{\theta}_x + mxy\dot{\theta}_x + mgy \cos \theta_y \quad (5)$$

Este modelo se linealiza alrededor de una posición fija de la esfera sobre la plataforma. Para un cascarón de esfera de un material de densidad constante, el momento de inercia está dado por $J = \frac{2}{3}mr^2$. En (6) y (7) se representa el modelo linealizado de las ecuaciones de movimiento del sistema esfera sobre superficie.

$$\frac{5}{3}\ddot{x} + g\theta_x = 0, \frac{5}{3}\ddot{y} + g\theta_y = 0 \quad (6)$$

$$J_t\ddot{\theta}_x = \tau_x, J_t\ddot{\theta}_y = \tau_y \quad (7)$$

donde J_t representa la suma de momentos de inercia de la plataforma y de la esfera.

Resultados

Se utilizó un controlador PID (Proporcional Integral y Derivativo) en lazo cerrado con el modelo linealizado (6)-(7) y se muestra en la Fig. 2. El controlador consta de un bloque PID para cada una de las coordenadas x y y .

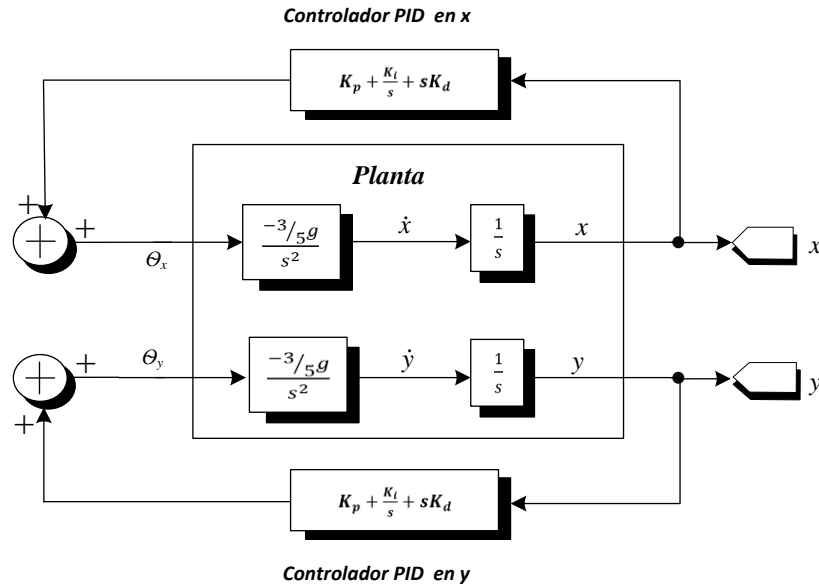


Fig. 2. Controlador del sistema esfera sobre superficie.

La ecuación de un controlador PID $G_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d$. Al agregarse el controlador PID en cada eje, se convierte en un sistema en lazo cerrado y se obtienen las ecuaciones (8) y (9) las cuales son las funciones de transferencia del sistema con respecto a la condición inicial.

$$\frac{x}{u}(s) = \frac{\frac{3}{5}g(K_{d1}s^2 + K_{p1}s + K_{i1})}{s^3 + \frac{3}{5}g(K_{d1}s^2) + \frac{3}{5}g(K_{p1}s^2) + \frac{3}{5}g(K_{i1}s^2)} \quad (8)$$

$$\frac{y}{u}(s) = \frac{\frac{3}{5}g(K_{d2}s^2 + K_{p2}s + K_{i2})}{s^3 + \frac{3}{5}g(K_{d2}s^2) + \frac{3}{5}g(K_{p2}s^2) + \frac{3}{5}g(K_{i2}s^2)} \quad (9)$$

A continuación se muestran los resultados después de aplicar el criterio de Routh-Hurwitz y de esta manera determinar dentro de que rangos es estable el sistema. Donde se obtuvo que $K_d > 0$ y $K_i > 0$, así como $\frac{3g}{5}K_pK_d > K_i$. En la Fig 3 y 4 se muestran los resultados obtenidos de la simulación con una condición inicial de $(-3, -5)$.

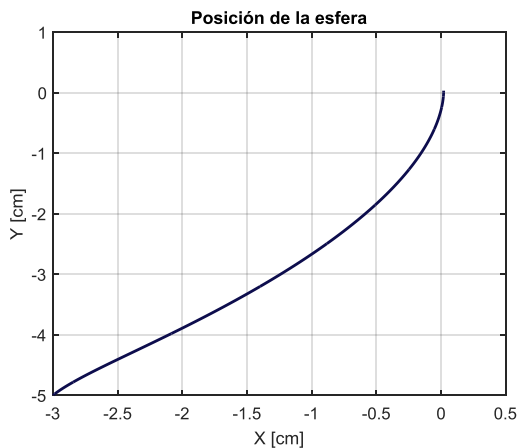


Fig. 3. Respuesta del controlador en la posición XY con condición inicial $(-3, -5)$.

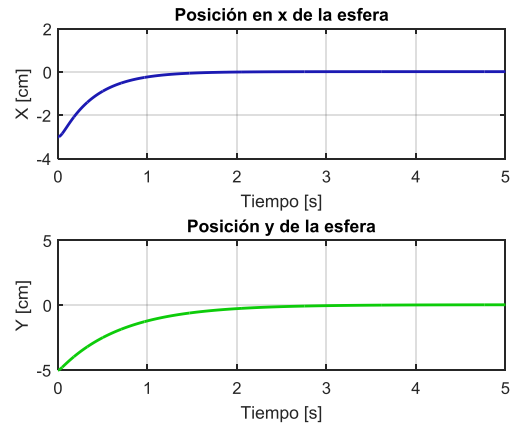


Fig. 4. Respuesta del controlador en la posición X , respuesta del controlador en la posición Y .

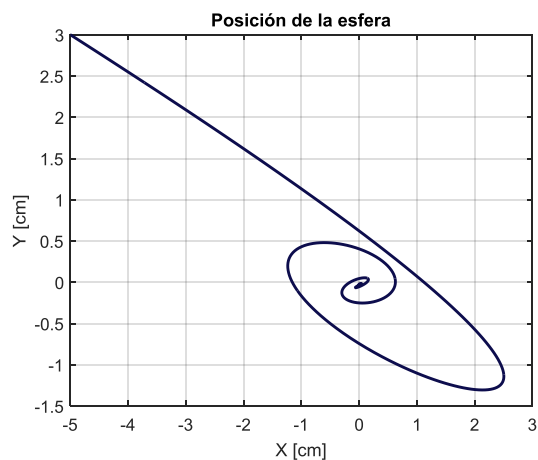


Fig. 5. Respuesta del controlador en la posición XY con condición inicial $(-5,3)$.

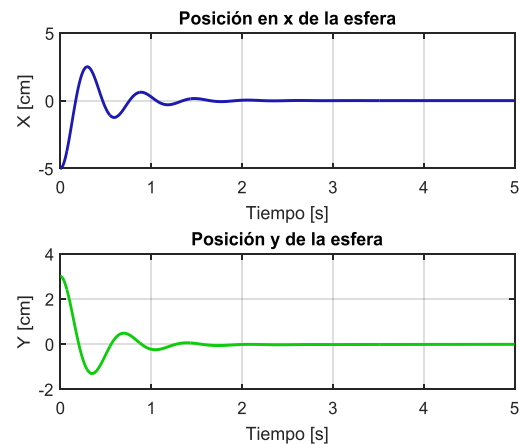


Fig. 6. Respuesta del controlador en la posición X , respuesta del controlador en la posición Y , con estabilidad en ambos ejes.

Las ganancias que se utilizaron en las Fig 3 y 4 para el eje x son: $K_{p1} = 14$, $K_{d1} = 10$ y $K_{i1} = 0.15$ y para el eje y : $K_{p2} = 12$, $K_{d2} = 5$ y $K_{i2} = 2$. En la Figura 5 y 6 se muestran los resultados obtenidos con la simulación con una condición inicial de $(-5,3)$. Con una condición inicial de $(-5,3)$. Las ganancias que se utilizaron



para el eje x son: $K_{p1} = 20$, $K_{d1} = 0.8$ y $K_{i1} = 0.8$ y para el eje y : $K_{p2} = 15$, $K_{d2} = 0.9$ y $K_{i2} = 4$.

Conclusiones

En este trabajo se presentó el modelado matemático y se realizó el análisis para determinar las ganancias de un controlador PID para estabilizar posiciones. Se realizaron distintas pruebas del controlador propuesto y se obtuvieron resultados aceptables de la estabilización de la posición de la esfera sobre la plataforma siempre y cuando las ganancias del controlador se encuentren el rango establecido

Referencias

- [1] Moriano, P., & Naranjo, F. (2012). *Modelado y control de un nuevo sistema bola viga con levitación magnética*. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 9(3), 249-258.
- [2] Luna, F. C. (2003). *Levantamiento y Estabilización del Péndulo Invertido*. *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Control Automático*.
- [3] C. Barbu, R. Sepulchre, Wei Lin y P. V. Kokotovic. (1997) *Global asymptotic stabilization of the ball-and-beam system*. IEEE. pp. 2351-2355 vol.3. doi: 10.1109/CDC.1997.657134
- [4] H. Bang y Y. S. Lee. (2018). *Implementation of a Ball and Plate Control System Using Sliding Mode Control*. IEEE Access, vol. 6, pp. 32401-32408.
- [5] D. González, L. R. Giralt y F. Arroy. (2017). *Estabilización de una bola sobre un plano utilizando un robot paralelo 6-RSS" en Daniel González, Lluís Ros Giralt, Federico Thomas Arroyo*. págs. 746-753.



- [6] S. Awtar, C. Bernard, N. Boklund, A. Master, D. Ueda, y K. Craig. (2002). *Mechatronic design of a ball-on-plate balancing system*. Mechatronics. Volume 12. Pages 217-228.
- [7] L. Spacek, V. Bobal and J. Vojtesek. (2017). *Digital control of Ball & Plate model using LQ controller*. *International Conference on Process Control (PC)*. pp. 36-41.
- [8] A. Kassem, H. Haddad y C. Albitar. (2015) *Commpparison Between Different Methods of Control of Ball and Plate System with 6DOF Stewart Platform*. *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 11, 2015, pp. 47-52.
- [9] M. 14, M. Saadat and G. Vossoughi. (2008). *Mechatronic design and position control of a novel ball and plate system*. *Mediterranean Conference on Control and Automation*. pp. 1071-1076.
- [10] K. Lee, G. Batz y D. Wollherr. (2008). *Basketball robot: Ball-On-Plate with pure haptic information*. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, Pasadena, CA, 2008*, pp. 2410-2415.
- [11] X. Dong, Z. Zhang y C. Chen.(2009). *Applying Genetic Algorithm to On-Line Updated PID Neural Network Controllers for Ball and Plate System," 2009 Fourth International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC)*. pp. 751-755.