JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

ANÁLISIS A LA COSMOLOGÍA CUÁNTICA PARA ACCIÓN DE CUARTO ORDEN

Morales Padilla Leonardo (1), Obregón Octavio (2)

1 [Departamento de Física, División de ciencias e Ingenierías, Universidad de Guanajuato] | [moralespl2014@licifug.ugto.mx]

2[División de Ciencias e Ingenierías, Departamento de Fisica, Universidad de Guanajuato] | [octavio@fisica.ugto.mx]

Resumen

En el presente trabajo se realizó una investigación referente a diferentes modelos básicos en la cosmología cuántica, específicamente a la ecuación Wheeler-DeWitt de cuarto orden ($\mathcal{L}$ α R^2). Principalmente, entendiendo las bases de variante de la cosmología.

Abstract

In the present work an investigation was realized referring to the different basic models in the quantum cosmology, especially to the ecuation Wheeler-DeWitt of fourth orden ($\mathcal{L}$ α R^2). Mainly, understanding the variant bases of cosmology.

Palabras Clave Cosmología; métrica; acción de cuarto orden

INTRODUCCIÓN

Una vista rápida a la acción Einstein-Hilbert, nos llevan a considerar las siguientes características de interés: la acción gravitacional efectiva dan los términos extra a la corrección cuadrática en curvaturas, la renormalización tras la cuantización, en modelos de gravedad inflacionaria surgen términos adicionales al Lagrangiano gravitacional. Esperando un comportamiento tal cual se ha descrito por Vilenkin.

Consideraremos un "toy model" para las teorías mencionadas. La acción será construida con el cuadrado del escalar Ricci y la ecuación correspondiente Wheeler-DeWitt, para el modelo cosmológico isotrópico, por lo que se resolverá por medio de separación de variables.

Desarrollo

El estudio de la investigación se centra en la métrica de Robertson-Walker espacialmente cerrada

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-r} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)\right]$$

Donde $a(t)$ es el factor de la expansión del universo, considerando la forma de la ecuación Wheeler-Dewitt:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} - 12e^{6\alpha+3\beta} + 144e^{4\alpha+2\beta}\right]\psi(\alpha,\beta) = 0$$

Donde *α = Ln (a), β = Ln (R)* y *R* es la curvatura escalar.

Para encontrar la solución de esta ecuación, se los siguientes cambios de variables

$$x = e^{2\alpha+\beta} = a^2R$$

$$y = \alpha + \beta = \ln aR$$

Tendremos ahora

$$\left[x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} - 12x^2 + 144x\right]\psi(x,y) = 0$$

Usando la separación de variables, tenemos que hacer la siguiente hipótesis

$$\psi(x,y) = F(x)G(y)$$

Y por conveniencia, designamos que

$$G' = vG$$

$$xF'' + (v+1)F' + [-144x + 12x^2]F = 0$$

Donde *V* es la constante de separación.

La solución para la función ***G*** es

$$G = G_0e^{vy}$$

Lo que nos deja con las soluciones ***F***.

Solución para $\boldsymbol{V = -1}$

Lo que ahora tendremos

$$F + [-144 + 12x]F = 0$$

Con una transformación de Bessel de orden 1/3 con la variable $u = -12^{4/3} + 12^{1/3}x$, *F=P(u)*

$$P'' + uP = 0$$

Ahora podemos escribir lo anterior como

$$F = F_1Ai(-u) + F_2Bi(-u)$$

Donde F_1 y F_2 son constantes de frontera, y *Ai* y *Bi* son funciones de Airy. Por lo que tenemos ya una solución de estado para el universo.

$$\psi(x,y) = e^{-y}[c_1Ai(-u) + c_2Bi(-u)]$$

Tomando el límite para la solución cuando *x* tiende a infinito, que trataremos en la siguiente sección.

$$F \to (-u)^{-1/4}e^{\pm\frac{2}{3}u^{3/2}} = (-(12^{\frac{1}{3}}x)^{-1/4}e^{\pm\frac{2}{3}(-12^{\frac{1}{3}}x)^{3/2}}$$

Condiciones de frontera y la aproximación wkb

Recuperando nuestras variables a y R

$$\psi(a,R) = \frac{c_1 Ai\left[-12^{\frac{1}{3}}(a^2R-12)\right] + c_2 Bi\left[-12^{\frac{1}{3}}(a^2R-12)\right]}{aR}$$

Con $a=0$ el valor de las funciones Airy en el numerador de la función de onda del universo son finitas en contraste con el denominador. Sólo nos falta determinar el valor de las constantes c_1 y c_2 de la manera siguiente

$$c_2 = \frac{-c_1 Ai[12^{4/3}]}{Bi[12^{4/3}]}$$

Con esta condición el numerador de logramos un comportamiento en el origen del universo y la función de onda para $a=0$.

Nosotros renombramos que el desvanecimiento de la función de onda del universo es una condición de frontera que debe ser impuesta, la cual argumentó Bryce DeWitt [9] que le debe ser impuesta. Si nosotros aplicamos el método WKB para resolver la ecuación para *F*, para el caso donde el potencial va a infinito, que es nuestro caso, con coordenadas sólo positivas, nosotros obtenemos

$$\psi(x)_{WKB} = \frac{Sinh[\int_0^x \sqrt{12(12-x)}\,dx]}{[12(12-x)]^{1/4}}$$

Ahora la solución WKB desaparece la singularidad en $a=0$ $(x=0)$. El comportamiento de la función de onda que obtenemos es similar a las funciones de onda del hidrógeno cuando el momento angular $l \neq 0$ en el sentido que ello desvanece en el origen de la coordenada radial.

SOLUCIÓN $V = 1$

Si ahora consideramos la resolución para el sistema si $v=1$, lo que arroja una solución

$$F(x) = x^{-\frac{v+1}{2}} g(x)$$

La ecuación diferencial es

$$g'' + \left[-12(12-x) + \frac{1-v^2}{4x^2}\right] g = 0$$

Notando que para $v=1$, la ecuación diferencial para g(x) es la misma que F(x). Así completamos la función de onda del universo

$$\psi(x,y) = e^{+y}\frac{[c_1 Ai(-u) + c_2 Bi(-u)]}{x}$$

Consideramos las mismas condiciones de frontera, lo que significa la misma relación entre c_1 y c_2.

SOLUCIONES EN SERIES

Antes observamos soluciones para $v \neq \pm 1$, esto es útil para considerar el límite asintótico para $x \to \infty$. Para lo que proponemos, veremos una más a la forma normal para la ecuación diferencial

$$u'' + \left[-12(12-x) + \frac{1-v^2}{4x^2}\right] u = 0$$

Y este evita la región asintótica $(x \to \infty)$, esta ecuación reduce a la ecuación resuelta exactamente en la sección previa.

En el caso para $v \neq \pm 1$ nosotros podemos usar el método de Frobenius, con solución de la forma

$$F(x) = |x|^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Con la condición indicial

$$\alpha(\alpha + v) = 0$$

Con soluciones son

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -v$$

La relación recurrente es

$$a_n(n+a-a_1)(n+a-a_2) = 144a_{n-2} - 12a_{n-3}$$

Nosotros tenemos la solución con la condiciones indiciales

$$a_n(n+a)(n+a+v) = 144a_{n-2} - 12a_{n-3}$$

A partir de las ecuaciones anteriores, la serie para ambas soluciones se determina completamente en el caso de que v no sea un número entero; Si ese es el caso, la segunda solución puede obtenerse por el procedimiento estándar utilizado en el método Frobenius.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El modelo simplificado usado en este reporte nos ha permitido resolverlo, la cosmología cuántica de cuarto orden para un modelo de Friedmann cerrado. El problema análogo para el modelo plano espacialmente fue resuelto por Reuter. Acciones cerradas relacionadas a la Chern-Simmons son de interés; nosotros consideramos en el reporte como un intento de estudiar la cosmología cuántica.

CONCLUSIONES

Si bien, este resultado ya fue estudiado, el breve análisis aquí presentado busca aplicar métodos para estudiar diversos sistemas. Si bien, la aplicación de las herramientas matemáticas para llegar a resultados teorizados.

REFERENCIA

-Jasel Berra–Montiel , Alberto Molgado and David Serrano-Blanco, (2017) Covariant Hamiltonian formulation for MacDowell-Mansouri gravity

-Obregón O. y Pimentel L., (1994) QUANTUM COSMOLOGY FOR A QUADRATIC THEORY OF GRAVITY.

-Ryan, P. Michel, Shepley, Lawrence (1975) Homogeneous Relativistic Cosmologies. Princeton, New Jersey