JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS Y SUS APLICACIONES A LA INGENIERÍA

García Herrera, Mariel Fernanda (1), Dr. Rosales García, J. Juan (2)

1 [Licenciatura en Ingeniería en Mecatrónica, Universidad de Guanajuato] | [mariel08_fer03@hotmail.com]

2 [Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS, Campus Salamanca, Universidad de Guanajuato] | [rosales@ugto.mx]

Resumen

Se introduce el cálculo fraccionario para resolver un circuito RC a través de distintos métodos como lo son Caputo, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu y por el método de derivada Conformable. Se desarrollará cada uno de los métodos anteriores hasta llegar a una ecuación de voltaje en función del tiempo. Para esto se necesita tener conocimiento de ecuaciones diferenciales. Se podrá observa como varía el voltaje en función del tiempo y a su vez se verán las diferencias entre cada método. A partir de eso se observará cual podría ser el método exacto dependiendo de que involucremos. Esto es aplicable para temas de ingeniería y física.

Abstract

The fractional calculation is introduced to solve an RC circuit through different methods such as Caputo, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu and by the Conformable derivative method. Each of the above methods will be developed to arrive at a voltage equation as a function of time. This requires knowledge of differential equations. You can see how the voltage varies as a function of time and in turn you will see the differences between each method. From that it will be observed which could be the exact method depending on which we involve. This is applicable for engineering and physical subjects.

Palabras Clave

Calculo fraccionario; Circuito eléctrico; Derivada Fraccionaria; Circuito RC.

INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario es la generalización natural de las derivadas e integrales ordinarias. Esto significa que se tratan de operadores que no son enteros. El cálculo fraccionario tiene aplicaciones en la ciencia e ingeniería, algunos ejemplos se muestran en [1]-[7], aún no existen bases interpretaciones físicas y geométricas para el cálculo fraccionario, sin embargo se proponen algunas definiciones de derivadas fraccionarias. En esas definiciones se incluyen, Caputo, Fabrizio, Atangana, Baleanu, etc [2]-[4].

Recientemente, una nueva definición para las derivadas fraccionarias ha sido propuesta [8]. Es una derivada fraccionaria que depende solo de la definición básica del límite de la derivada y es llamada “derivada conformable fraccional”.

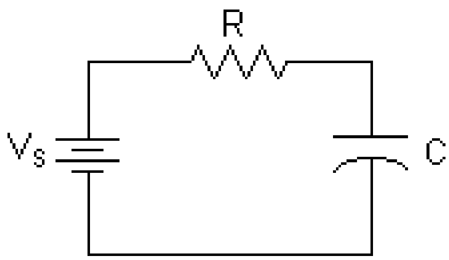

IMAGEN 1: Circuito RC.

Derivada Fraccionaria de Caputo

La usual derivada fraccionaria de Caputo de orden γ, es definida como

$$D^{\gamma}f(t) = \frac{d^{\gamma}f}{dt^{\gamma}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{f(t)}{(t\text{-}\tau)^{\gamma}}d\tau \qquad (1)$$

La derivada fraccionaria de Caputo tiene desventajas, para evitar ese problema se propone la derivada de Caputo-Fabrizio.

La transformada de Laplace para la derivada fraccionaria de Caputo tiene la siguiente forma

$$L[{}^{C}D^{\gamma}f(t)] = s^{\gamma}F(s)\text{-}\sum_{k=0}^{n\text{-}1}s^{\gamma\text{-}k\text{-}1}f^{(k)}(0) \qquad (2)$$

Derivada Fraccionaria de Caputo-Fabrizio

La derivada Fraccionaria de Caputo-Fabrizio es obtenida a partir del cambio de Kernel

$${}^{CF}D^{\gamma}f(t) = \frac{M(\gamma)}{1-\gamma}\int_{a}^{t}\dot{f}exp\left[\text{-}\frac{\gamma(t\text{-}\tau)}{1-\gamma}\right]d\tau \qquad (3)$$

donde $\frac{M(\gamma)}{1-\gamma}$ es una función de normalización con la propiedad $M(0) = M(1) = 1$. La propiedad es de particular interés, porque puede describir el efecto de memoria completo para un sistema dado.

La transformada de Laplace para la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio es

$$L[{}^{CF}D^{\gamma}f(t)] = \frac{sF(s)\text{-}f(0)}{s+\gamma(1-s)} \qquad (4)$$

Derivada Fraccionaria de Atangana-Baleanu

La derivada fraccionaria de Atangana-Baleanu en función de Caputo, está definida como

$${}^{ABC}D^{\gamma}f(t) = \frac{B(\gamma)}{1-\gamma}\int_{a}^{t}\dot{f}(\tau)E_{\gamma}\left[\text{-}\gamma\frac{(t\text{-}\tau)^{\gamma}}{1-\gamma}\right]d\tau \qquad (5)$$

La transformada de Laplace es

$$L[{}^{ABC}D^{\gamma}f(t)] = \frac{1}{1-\gamma}\,\frac{s^{\gamma}F(s)\text{-}s^{\gamma\text{-}1}f^{(k)}(0)}{s^{\gamma}+\frac{\gamma}{1-\gamma}} \qquad (6)$$

Derivada Conformable

Recientemente, en [8] una nueva definición de derivada fraccional es dado, la cual es llamada derivada fraccionaria conformable. La derivada fraccionaria conformable de orden α está definida como

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha})\text{-}f(t)}{\epsilon} \qquad (7)$$

Las propiedades más importantes de esta derivada fraccional conformable se dan como teorema en [8].

Existen seis propiedades aplicables a la derivada fraccionaria conformable pero la que se usará para resolver el problema antes mencionado será

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \quad Si\ f\ es\ diferenciable \qquad (8)$$

El trabajo que se desarrollará es introducir al cálculo fraccionario, y aplicarlo a un circuito RC por diversos métodos, que se desarrollaran hasta llegar a una ecuación de voltaje en función del tiempo y se verá como varía respecto al tiempo.

MATERIALES Y MÉTODOS

I Circuito Fraccional RC

La ecuación que rige el comportamiento de un circuito RC es

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau} V = \frac{e(t)}{\tau} \qquad (9)$$

donde $\tau = RC$ es la constante del tiempo del sistema, R es la resistencia, C la capacitancia, V es el voltaje en el capacitor y $e(t)$ es la fuente.

En [9] se ha propuesto una manera sistemática de construir ecuaciones diferenciales fraccionarlas y aplicarlas en [10]-[13]. Consiste en introducir los parámetros σ_t y σ_x con dimensiones apropiadas. Esto es

$$\frac{d}{dt} \to \frac{1}{\sigma_t^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma}, \quad \frac{d}{dx} \to \frac{1}{\sigma_x^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dx^\gamma} \qquad (10)$$

donde γ es un parámetro arbitrario, el cual representa el orden de la derivada, σ_t es un parámetro que representa componentes de tiempo fraccionario en el sistema y σ_x representa los componentes espaciales fraccionarios [9]. En (9), el parámetro $\tau = RC$ tiene dimensiones de tiempo, se puede escribir

$$\frac{d}{dx} \to \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \qquad (11)$$

Reemplazando este operador fraccional en (9), se puede escribir la ecuación diferencial fraccional para un circuito RC

$$\frac{d^\gamma V}{dt^\gamma} + \frac{1}{\tau^\gamma} V = \frac{e(t)}{\tau^\gamma} \qquad 0 < \gamma \leq 1 \qquad (12)$$

II Circuito Caputo RC

Se supone que se tiene una fuente constante $e(t) = e_0$ para $t > 0$.

$$\frac{d^\gamma V}{dt^\gamma} + aV = b \qquad (13)$$

donde $a = \frac{1}{\tau^\gamma}$ y $b = \frac{e(t)}{\tau^\gamma}$. Aplicando la transformada de Laplace y resolviendo respecto a $V(s)$, se tiene

$$V(s) = \frac{b}{s(s^\gamma + a)} \qquad (14)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, se obtiene

$$V_C(t;\gamma) = e_o \left\{1 - E_\gamma \left[\text{-}\left(\frac{t}{\tau}\right)^\gamma\right]\right\} \qquad (15)$$

Para el caso en particular cuando $\gamma = 1$, se tiene el resultado ordinario

$$V_{ord}(t) = e_o \left\{1 - exp\left[\text{-}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]\right\} \qquad (16)$$

III Circuito Caputo-Fabrizio RC

Se tiene la ecuación diferencial fraccionaria

$$\frac{d^\gamma V}{dt^\gamma} + aV = b \qquad (17)$$

a y b son definidas anteriormente. Aplicando la transformada de Laplace a la derivada fraccional de Caputo-Fabrizio, se tiene

$$\frac{sV(s)}{s+\gamma(1-s)} + aV(s) = \frac{b}{s} \qquad (18)$$

Resolviendo para $V(s)$ y aplicando la transformada inversa de Laplace, se tiene

$$V_{CF}(t,\gamma) = e_o\left[1 - \frac{\tau^\gamma}{\tau^\gamma + 1 - \gamma}\, exp\left(-\frac{\gamma}{\tau^\gamma + 1 - \gamma} t\right)\right] \qquad (19)$$

Si $\gamma = 1$, se obtiene

$$V_{ord}(t) = e_o\left\{1 - exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]\right\} \qquad (20)$$

IV Circuito Atangana-Baleanu RC

Se tiene la ecuación diferencial fraccionaria

$$\frac{d^\gamma V}{dt^\gamma} + aV = b \qquad (21)$$

a y b son definidas anteriormente. Aplicando la transformada de Laplace a la derivada fraccional de Atangana-Baleanu, se tiene

$$\frac{1}{1-\gamma}\frac{s^\gamma V(s)}{\left(s^\gamma + \frac{\gamma}{1-\gamma}\right)} + aV(s) = \frac{b}{s} \qquad (22)$$

Resolviendo para $V(s)$, se tiene

$$V(s) = \frac{b(1-\gamma)}{1+a\text{-}a\gamma}\left[\frac{s^\gamma}{s(s^\gamma + B)} + \frac{A}{s(s^\gamma + B)}\right] \qquad (23)$$

donde $A = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ y $B = \frac{a\gamma}{1+a\text{-}a\gamma}$. Usando la transformada inversa de Laplace, se tiene

$$V_{ABC}(t;\gamma) = e_o\left[1 - \frac{\tau^\gamma}{\tau^\gamma + 1 - \gamma}\, E_\gamma\left(-\frac{\gamma}{\tau^\gamma + 1 - \gamma} t^\gamma\right)\right] \qquad (24)$$

Para el caso $\gamma = 1$, se obtiene

$$V_{ord}(t) = e_o\left\{1 - exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]\right\} \qquad (25)$$

V Circuito Corformable RC

Considerando la relación en (10) y usando la derivada fraccional conformable y la propiedad del teorema previo

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} f(t) = t^{1-\gamma}\frac{d}{dt} f(t) \qquad (26)$$

Se tiene [14]

$$\frac{d}{dt} \to \frac{t^{1-\gamma}}{\tau^{1-\gamma}}\frac{d}{dt} \qquad 0 < \gamma \leq 1 \qquad (27)$$

donde se puede escribir $\sigma = \tau$. Reemplazando en (9) la expresión anterior se tiene la correspondiente ecuación diferencial fraccional conformable.

$$\frac{dV}{dt} + at^{\gamma\text{-}1}V = at^{\gamma\text{-}1}e(t), \quad 0 < \gamma \leq 1 \qquad (28)$$

donde $a = \frac{1}{\tau^\gamma}$. La ecuación anterior es una ecuación diferencial fraccionaria conformable para el circuito RC. Esta es una ecuación diferencial lineal no homogénea. La ecuación anterior no es de orden fraccional. Sin embargo, los coeficientes polinomiales son del orden de γ.

Considerando la fuente constante $e(t) = e_0$. para este caso se tiene

$$\frac{dV}{dt} + at^{\gamma\text{-}1}V = bt^{\gamma\text{-}1} \qquad (29)$$

donde a y b son definidas anteriormente. Tomando la condición inicial , la solución obtenida es

$$V_{conf}(t;\gamma) = e_o\left\{1 - exp\left[-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{t}{\tau}\right)^\gamma\right]\right\} \qquad (30)$$

Para el caso cuando $\gamma = 1$, se tiene

$$V_{ord}(t) = e_o\left\{1 - exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]\right\} \quad (31)$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para un circuito RC, el cual es un sistema simple, sin otras interconexiones, no tiene más que una pérdida de energía, la cual es a través de la resistencia. Observando las ecuaciones finales para cada caso que se analizó se cree que cualquier método que se utilice podría ser preciso para en caso de gamma mostrado.

Sin embargo, se deberían realizar un análisis más profundo con datos experimentales para otros valores de gamma, para conocer como varían las soluciones respecto al tiempo y gamma.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha estudiado el comportamiento de un circuito RC con 4 definiciones de cálculo fraccionario.

El cálculo fraccionario nos sirve para encontrar la mejor solución a cualquier sistema, esto nos daría una respuesta más acertada con algún grado de error permitido.

Para el sistema que se empleó para analizar las ecuaciones fraccionarias, el circuito RC, es un modelo ideal, pero existen algunos factores que no se tomaron en cuenta, como lo son las condiciones del capacitor y de la resistencia. El cálculo de orden arbitrario si lo toma en cuenta.

Como objetivo se tenía el analizar un circuito RC bajo diferentes definiciones las cuales son: Caputo, Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu y la derivada conformable, las ecuaciones resultantes nos muestran que cualquiera que se use para un valor de gamma de uno es preciso el resultado, sin embargo, habría que analizar a diferentes valores de gamma y del tiempo para ver cómo se comporta el circuito, a su vez también se considera que realizarlo experimentalmente sería conveniente.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al Dr. J. Juan Rosales García por darme la oportunidad de realizar este proyecto y permitirme conocer más a fondo lo que implican las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

A la Universidad de Guanajuato por darnos la oportunidad para realizar estancia de verano de investigación científica.

REFERENCIAS

[1] K. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration of Arbitrary Order, Academic Press, USA, 1974.

[2] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, (Academic Press, USA, 1999).

[3] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, (Math. Studies., North-Holland, New York,2006).

[4] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, (World Scientific, Singapore, 2000).

[5] M. Caputo, F. Mainardi, Pure Appl. Geophys., 91, (1971) 8.

[6] D. Baleanu, z.B. Guvenc, J.A.T Machado, New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications, (Springer New York, 2010).

[7] V. Uchaikin, Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, (Springer 2013).

[8] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, J. Comput. Appl. Math., 264, (2014) 65.

[9] J. J. Rosales, J. F. Gómez, M. Guía, V. I. Tkach, 2011 LFNM2011 International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling 4-8 September, Kharkov, Ucraine.

[10] J. J. Rosales, M. Guía, J. F. Gómez, V. I. Tkach, Disc. Nonl. And Compl. 1(4), (2012) 325.

[11] J.F. Gómez-Aguilar, J. J. Rosales-García, J. J. Bernal-Alvarado, T. Córdova-Fraga, R. Guzmán-Cabrera, Rev. Mex. Fís. 58, (2012) 348.

[12] J. J. Rosales, M. Guía, J. Martínez and D. Baleanu. Proceed. Rom, Acad. Ser. A, 14 (2013) 42.
[13] J. J. Rosales, M. Guía, F. Gómez, F. Aguilar, J. Martínez, Cent. Eur. J. Phys. 12(7), (2014) 517.

[14] A. Ebaid, B. Masaedeh, E. El-Zahar, Chin. Phys. Lett. 34(2), (2017) 020201.