



Asunto: Notificación de Dictamen de Propuesta de Tesis

C. Fernando Tomás Pérez Zamudio
Estudiante de Maestría en ingeniería mecánica
PRESENTE.

Una vez concluido el análisis y discusión sobre la propuesta del proyecto de tesis titulada: "**Desarrollo de una metodología para la síntesis cinemática-estructural de dispositivos flexibles de posicionamiento**", bajo la revisión del Asesor(es): *RICO MARTÍNEZ José María, Dr.* y *CERVANTES SÁNCHEZ J. Jesús, Dr.* En su reunión ordinaria del cuatrimestre MAYO-AGOSTO 2019 el Comité de ingreso y permanencia de Maestría en ingeniería mecánica acordó la siguiente resolución:

Con fundamento en las fracciones primera a cuarta del Artículo 67 y el Artículo 68 del Estatuto Académico, este comité acordó **POR UNANIMIDAD DE VOTOS ACEPTAR SU PROPUESTA DE TESIS** designando el siguiente jurado:

Presidente: *GARCÍA MURILLO Mario Alberto, Dr.*

Secretario: *RICO MARTÍNEZ José María, Dr.*

Vocal: *NUÑEZ ALTAMIRANO Diego Alfredo, Dr.*

Se extiende la presente notificación de la resolución el 07 de agosto de 2019

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"
DIRECTORA SUPLENTE

Rocío Lizárraga
Dra. Rocío Alfonsina Lizárraga Morales.



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
Campus Irapuato - Salamanca
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

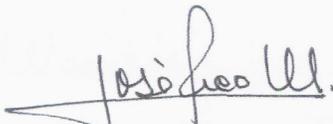
Salamanca _____, Gto., a 08 de Diciembre _____ del 2020.

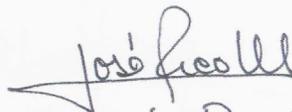
M. en I. HERIBERTO GUTIÉRREZ MARTIN
JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
PRESENTE.-

Por medio de la presente, se otorga autorización para proceder a los trámites de impresión, empastado de tesis y titulación al alumno(a) Fernando Tomás Pérez Zamudio del Programa de Maestría en Ingeniería en Mecánica y cuyo número de NUA es: 144323 del cual soy director. El título de la tesis es: Desarrollo de una metodología para la síntesis cinemática-estructural de dispositivos flexibles de posicionamiento.

Hago constar que he revisado dicho trabajo y he tenido comunicación con los sinodales asignados para la revisión de la tesis, por lo que no hay impedimento alguno para fijar la fecha de examen de titulación.

ATENTAMENTE


José María Rico Martínez
NOMBRE Y FIRMA
DIRECTOR DE TESIS
SECRETARIO


José María Rico Martínez
NOMBRE Y FIRMA
DIRECTOR DE TESIS


Mario Alberto García Murillo
NOMBRE Y FIRMA
PRESIDENTE


Diego Alfredo Núñez Altamirano
NOMBRE Y FIRMA
VOCAL



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CAMPUS IRAPUATO - SALAMANCA
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

*“Desarrollo de una metodología para la síntesis
cinemática-estructural de dispositivos flexibles
de posicionamiento.”*

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA:

Ing. Fernando Tomás Pérez Zamudio

DIRECTORES:

*Dr. José María Rico Martínez
Dr. J. Jesús Cervantes Sánchez*

Agradecimientos

A mi asesor, Dr. José María Rico Martínez, por ser un mentor para mí durante toda mi formación académica y por su apoyo para la realización del presente trabajo.

A mi co-asesor, Dr. J. Jesús Cervantes Sánchez, por las clases impartidas durante el posgrado y por sus observaciones durante el proceso de este trabajo.

A mis sinodales, Dr. Mario Alberto García Murillo y Dr. Diego Alfredo Núñez Altamirano, por el apoyo brindado, por las recomendaciones, y por su tiempo invertido en la revisión de la tesis.

En general, a todos mis profesores por las clases impartidas y por influir directamente en mi desarrollo como profesionista.

A mis amigos y compañeros de la maestría, Mauricio, Camilo, Santoyo, Juan Carlos, Esteban y Alan por los buenos momentos que pasamos juntos durante el posgrado.

A la Universidad de Guanajuato por la oportunidad de crecimiento profesional que me sigue dando.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada durante toda mi estancia en la maestría.

Dedicatoria

Dedicado a

A mi compañera de vida, mi esposa Paola, por su inmenso amor. A mi mamá, que ante mis ojos es una persona espléndida. A mi papá, quien es un pilar en mi vida. Esta tesis se la dedico a ustedes, que son a quiénes yo más quiero en esta vida.

Índice general

Agradecimientos	ii
Dedicatoria	iii
1 Introducción.	1
1.1 Desarrollo histórico.	1
1.2 Justificación y objetivo del trabajo.	3
2 Fundamentos teóricos.	5
2.1 Estado de velocidad de un cuerpo rígido.	5
2.2 Ecuaciones de velocidad.	6
2.3 Equivalencia entre estados de velocidad.	9
2.4 Teorema de Chasles infinitesimal.	10
2.5 El Álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$	11
2.6 Subespacios y subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$	12
2.7 Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$	13
2.7.1 Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión uno.	13
2.7.2 Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión dos.	14
2.7.3 Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión tres.	15
2.7.4 Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión cuatro.	15
3 Espacios ortogonales reales y sus espacios duales	16
3.1 Definiciones y elementos invertibles.	16
3.2 Correlaciones lineales y espacios degenerados.	21
3.3 Aniquiladores ortogonales.	28
3.4 Bases de espacios ortogonales.	33
3.5 Representación de formas simétricas bilineales.	35
3.6 La dualidad inducida por una forma simétrica bilineal no-singular	39
3.7 Propiedades de la forma de Klein	41
4 Elementos flexibles	50
4.1 Elementos flexibles primitivos.	50
4.1.1 Matriz de flexibilidad de una viga.	50
4.1.2 Elemento flexible: lámina delgada.	57
4.1.3 Elemento flexible: alambre	58

5	Metodología cinemáticamente correcta.	62
5.1	Descripción de la metodología.	62
5.2	Dispositivos elementales de libertad, subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión uno.	63
5.2.1	Síntesis de un par cinemático de revoluta, R, 1DOF o 5DOC, que genere la subálgebra r_{P,\mathbf{u}_1}	63
5.2.2	Síntesis de un par cinemático prismático, T, 1DOF o 5DOC, que genera la subálgebra $t_{\mathbf{u}_1}$	67
5.2.3	Síntesis de un par cinemático de tornillo, S, 1DOC o 5DOF, que genere la subálgebra $h_{P,\mathbf{u}_1,p}$, helicoidal.	70
5.3	Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$, a partir de dispositivos seriales.	73
5.3.1	Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión uno.	73
5.3.2	Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión dos.	73
5.3.3	Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión tres.	75
5.3.4	Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión cuatro.	79
5.4	Dispositivos elementales de restricción, subespacios del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión cinco.	81
5.4.1	Síntesis de una restricción de momento, M, 1DOC o 5DOF.	81
5.4.2	Síntesis de una restricción de fuerza lineal, F, 1DOC o 5DOF.	85
5.4.3	Síntesis de una restricción de tipo wrench, W, 1DOC o 5DOF.	89
5.5	Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$, a partir de dispositivos paralelos.	93
5.5.1	Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión uno.	94
5.5.2	Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión dos.	94
5.5.3	Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión tres.	97
5.5.4	Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión cuatro.	103
5.6	Ejemplos	104
5.6.1	Ejemplo 1: Mecanismo flexible de cuatro grados de libertad, 2R2T.	104
5.6.2	Ejemplo 2: Mecanismo flexible de tres grados de libertad, 2R1T.	106
6	Conclusión y trabajo futuro.	108

Índice de figuras

2.1	Estado de velocidad de un cuerpo rígido m , respecto a un cuerpo rígido o sistema de referencia j	5
2.2	Base ortonormal $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ fija en el cuerpo rígido m	6
2.3	Vector β fijo al cuerpo rígido m	7
2.4	Parámetros geométricos asociados a un tornillo infinitesimal.	12
2.5	Subálgebras del álgebra de Lie, $\mathfrak{se}(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$	14
4.1	Vigas flexibles con sección transversal uniforme, circular (izq.) y rectangular (der), sometidas a un wrench general sobre su extremo E	51
4.2	Viga en voladizo con una fuerza F_x , aplicada en el extremo de la misma.	52
4.3	Viga en voladizo con un momento M_y , aplicado en el extremo de la misma.	53
4.4	Viga en voladizo con una fuerza F_z , aplicada en el extremo de la misma.	54
4.5	Viga en voladizo con un momento M_z , aplicado en el extremo de la misma.	54
4.6	Viga en voladizo con una fuerza F_y , aplicada en el extremo de la misma.	54
4.7	Viga en voladizo con un momento M_x , aplicado en el extremo de la misma.	56
4.8	Elemento flexible: Lámina delgada.	59
4.9	Grados de libertad (verde), 3DOF, y grados de restricción (rojo), 3DOC, del elemento flexible: Lámina delgada.	60
4.10	Elemento flexible: Alambre.	60
4.11	Grados de libertad (verde), 5DOF, y grados de restricción (rojo), 1DOC, del elemento flexible: Alambre.	61
5.1	Tornillos infinitesimales asociados a las restricciones de las láminas delgadas y a la libertad deseada en el cuerpo móvil, rotación alrededor de un eje fijo.	64
5.2	Par de revoluta, R, creada a partir de dos láminas delgadas.	66
5.3	Tornillos infinitesimales asociados a las restricciones de las láminas delgadas y a la libertad deseada en el cuerpo móvil, traslación rectilínea en una dirección.	68
5.4	Par cinemático prismático, T, creado a partir de dos láminas delgadas.	69
5.5	Tornillos infinitesimales asociados a las restricciones de las láminas delgadas y a la libertad deseada en el cuerpo móvil, traslación rectilínea en una dirección.	71
5.6	Par cinemático de tornillo, S, creado a partir de cinco alambres.	72
5.7	Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra $t_{\mathbf{u}_1}^\perp$, traslación plana.	74
5.8	Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra C_{P, \mathbf{u}_1} , cilíndrico.	75
5.9	Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra $t_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3}$, traslación espacial.	76
5.10	Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra $g_{\mathbf{u}_1}$, movimientos planos.	78
5.11	Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra s_O , esférica.	79

5.12 Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra $y_{\mathbf{u}_1,p}$, traslación plana de un desplazamiento helicoidal.	80
5.13 Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra $x_{\mathbf{u}_1}$, Schönflies.	81
5.14 Tornillos infinitesimales asociados a las libertades de las láminas delgadas y a la restricción deseada en el cuerpo móvil, un momento en la dirección del eje X	82
5.15 Restricción de momento, M , creada a partir de dos láminas delgadas.	84
5.16 Tornillos infinitesimales asociados a las libertades de las láminas delgadas y a la restricción deseada en el cuerpo móvil.	86
5.17 Restricción de tipo fuerza lineal, F , creada a partir de dos láminas delgadas.	88
5.18 Restricción de tipo wrench, W , creada a partir de alambres.	91
5.19 Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra $t_{\mathbf{u}_1}^\perp$, traslación plana.	95
5.20 Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra C_{P,\mathbf{u}_1} , cilíndrico.	97
5.21 Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra C_{P,\mathbf{u}_1} , cilíndrico.	98
5.22 Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra $t_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3}$, traslación espacial.	99
5.23 Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra $g_{\mathbf{u}_1}$, movimientos planos.	100
5.24 Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra s_O , esférica.	102
5.25 Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra $y_{\mathbf{u}_1,p}$, traslación plana de un desplazamiento helicoidal.	103
5.26 Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra $x_{\mathbf{u}_1}$, Schönflies.	105
5.27 Mecanismo flexible en serie que posee cuatro grados de libertad, 2R2T.	106
5.28 Mecanismo flexible en serie que posee tres grados de libertad, 2R1T.	107

Capítulo 1

Introducción.

Este capítulo presenta una introducción al tema del presente trabajo, una breve reseña del estado del arte y una guía para el contenido del resto de los capítulos del presente trabajo.

1.1. Desarrollo histórico.

Es interesante notar que algunas de las máquinas hechas por el hombre desde los inicios eran mecanismos flexibles. Un ejemplo de ello es la milenaria historia del arco, hecho de huesos, madera y tendón; aprovechando la flexibilidad de sus extremidades para almacenar energía. Los dispositivos de posicionamiento flexible se han utilizado desde hace varios siglos, así lo demuestran los esquemas de Leonardo da Vinci [1], incluso uno de los grandes logros de la ingeniería como lo es el avión, tuvo sus inicios en los mecanismos flexibles realizados por los hermanos Wright [2]. Con estos comentarios iniciales es posible proponer una definición de mecanismos flexibles:

Mecanismo flexible. Si algo se dobla para hacer lo que está destinado a hacer, entonces es flexible. Si la flexibilidad que le permite doblarse también le ayuda a lograr algo útil, entonces es un mecanismo flexible, Howell [3].

Tradicionalmente cuando se necesitaba diseñar una máquina, para que efectúe una tarea específica, comúnmente se piensa en eslabones rígidos conectados por juntas cinemáticas tradicionales. Sin embargo si se observa a la naturaleza, se genera una idea completamente distinta de generar movimiento. Por ejemplo, las alas de una abeja permiten a un insecto volar y al mismo tiempo tener sus propios sistemas de navegación, control, energía, etc. Como este ejemplo es posible encontrar muchos más en la naturaleza; el mismo cuerpo humano, considere: El corazón, tendones, ligamentos, cartílagos entre otros donde las partes que se encuentran en movimiento son altamente flexibles (y no rígidas como tradicionalmente se diseñan los dispositivos de posicionamiento) y el movimiento proviene de doblar estas partes flexibles; cumpliendo así con la definición de mecanismo flexible.

Sin embargo, Howell [3] indica que el proceso para diseñar estos mecanismos es complicado debido a que, para grandes deflexiones, las ecuaciones que gobiernan el sistema se vuelven altamente no lineales. Estas desventajas disminuyeron el amplio uso de los mecanismos flexibles y es por ello que muy pocos ejemplos se encuentran disponibles en la literatura que sirvan como inspiración para nuevos desarrollos, Murphy et al. [4].

Dentro de los mecanismos flexibles se pueden observar tres grandes áreas de investigación: optimización estructural, enfoque de construcción por bloques y el enfoque cinemático. Dentro del enfoque cinemático, los principales métodos que pueden encontrarse en la literatura son: El método de topologías de libertades y restricciones, *Freedom and Constraint Topologies, FACT*, por sus siglas en inglés y el método de reemplazo de cuerpo rígido, *Rigid-Body-Replacement, RBP*.

El método de reemplazo de cuerpo rígido puede verse en investigaciones tales como Howell y Midha [5], y Berglund et al [6], las cuales hacen uso del método del cuerpo pseudo-rígido, *Pseudo-Rigid-Body, PRB*. Básicamente el método consiste en encontrar un mecanismo con eslabones rígidos que cumpla con la función deseada para entonces convertirlo en su versión flexible. Esta conversión se realiza aplicando un modelo *PRB*, Howell [3]. La síntesis de dispositivos flexibles basados en el método de reemplazo de cuerpo rígido *RBP* se dividió en dos áreas: El diseño de juntas flexibles y el diseño basado en un modelo *PRB*. Respecto al diseño de juntas flexibles, Xu et. al. [7] categorizaron las juntas flexibles como elementos flexibles primitivos y complejos. Dentro de los elementos flexibles primitivos, se hicieron investigaciones enfocadas en una flexibilidad concentrada en los cuales se pueden hallar todo tipo de muescas para lograr su objetivo, Lobontiu, [8], [9] y Yong [10]; otras investigaciones se centraron en flexibilidad distribuida, estos elementos flexibles fueron modelados como elipses, estructuras de cuatro barras, etc. Los elementos flexibles se formaron a partir de combinaciones de elementos más simples, los cuales se diseñaron para actuar como juntas de revoluta, prismáticos o como juntas universales, Moon et al. [11], y Trease [12]; estos elementos simples se combinaron para formar elementos aun más complejos como lo muestra Moon, [13], que diseñó una máquina cinemática paralela flexible, *CPKMs* por sus siglas en inglés.

Por otro lado, el diseño basado en un modelo *PRB* permitió encontrar un mecanismo con eslabones rígidos que emulara el comportamiento de un elemento flexible bajo grandes deflexiones altamente no lineales. Durante el diseño de los mecanismos flexibles, el modelo *PRB* tuvo un rol protagónico en la etapa de diseño conceptual en la transición entre síntesis de tipo y síntesis dimensional; el uso de un modelo *PRB* proveía una forma rápida de probar conceptos y por ende reducir esfuerzos para obtener conceptos finales, justo antes de continuar con un diseño detallado. El diseño de mecanismos flexibles con flexibilidad concentrada usando modelos *PRB* está basado en el modelo de pivote flexible de longitud-pequeña, aquí los miembros flexibles presentan dos segmentos, uno de mayor longitud y rigidez y otro corto y flexible. El segmento corto y flexible se conoce como pivote flexible de longitud-pequeña Howell [3], y Howell y Midha [5].

El diseño de mecanismos flexibles con flexibilidad distribuida se basó en tener una sección transversal constante; el modelo más importante fue el de una viga en voladizo con una fuerza actuando al final de la misma, aquí el pivote está situado por un parámetro conocido como radio característico. Saxena y Kramer [14] presentaron un modelo *PRB* combinando cargas y momentos positivos al final de la viga. Edwards et. al. [15] presentó un modelo *PRB* para miembros flexibles que inicialmente presentan una curvatura con condiciones de frontera perno-perno, *pin-pin*. Kimball et. al. [16] presentó un modelo *PRB* para una viga en voladizo con un momento actuando en sentido opuesto a una fuerza en el extremo. Finalmente, Su [17] muestra un modelo *PRB* para deflexiones con ángulos mayores a 77° donde la viga se divide en cuatro segmentos rígidos con tres juntas y sus respectivos resortes característicos, el modelo permitió combinar una fuerza y un momento en el extremo.

El método *FACT*, se basa en mapear un conjunto de entidades geométricas en el espacio de libertad hacia un conjunto de entidades geométricas de un espacio de restricciones donde puede encontrarse las soluciones para el problema de diseño. Básicamente el diseñador traduce el movimiento requerido en términos de las entidades geométricas que describen el movimiento en el espacio de libertad; así conociendo esas entidades geométricas es posible encontrar en el espacio de restricción las topologías de los elementos flexibles que proveen el movimiento deseado del dispositivo.

1.2. Justificación y objetivo del trabajo.

El presente trabajo se desarrollará siguiendo el enfoque cinemático, y analizando de manera detallada y crítica el método *FACT*. Hopkins y Culpepper [19], [20] y [21] fueron los primeros en iniciar esta serie de investigaciones sobre el método *FACT*. El método relaciona la descripción de la velocidad empleando la teoría de tornillos infinitesimales con la teoría del diseño basado en restricciones, como se describe en Blanding [22]. Sus autores sugieren que la mayor ventaja de utilizar dicho método es que provee una visualización intuitiva de la topología de la libertad de movimiento y de las restricciones del dispositivo. Esta visualización es muy útil para casos simples, sin embargo se ve eclipsada para subespacios de mayores dimensiones.

Si bien el método *FACT* es una herramienta poderosa, este método no emplea conceptos matemáticamente relevantes: El concepto de subespacio y subálgebra del Álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$, Hopkins y Panas [23] y Hopkins y Culpepper [24], la clasificación y relaciones entre las subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, como se muestran en Tadeo-Chavez [25]. Además adolece de formalidad matemática al momento de abordar los temas de espacios ortogonales y dualidad entre el álgebra de Lie, $se(3)$, y su álgebra dual, $se^*(3)$, Yu et. al. [26] y Su et. al. [18].

Por ello el objetivo principal de la tesis es: *Determinar una metodología que permita la síntesis de dispositivos de posicionamiento flexibles desde un punto de vista cinemáticamente correcto, con base en la teoría de tornillos, isomórfica al álgebra de Lie, $se(3)$, y la teoría de espacios ortogonales.*

Partiendo de esta premisa el presente trabajo de tesis se desarrolla mediante la siguiente estructura:

- Capítulo 2. Presenta los fundamentos teóricos necesarios para llevar a cabo el objetivo de la tesis. Entre estos fundamentos se encuentra: La definición de un estado de velocidad y su representación siguiendo la notación clásica de Ball [27], el Teorema de Chasles que establece la equivalencia entre los estados de velocidad de un cuerpo rígido y un tornillo infinitesimal, el isomorfismo entre el Álgebra de Lie, $se(3)$ y el Álgebra de Tornillos, que involucra una tercera operación del Álgebra de Lie, $se(3)$, conocida como producto de Lie que es bilineal, antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi. Estas ideas conducen a las definiciones de subespacio y subálgebra del Álgebra de Lie, $se(3)$.
- Capítulo 3. Espacios ortogonales reales y sus espacios duales. Este capítulo tiene como propósito presentar una serie de conceptos y resultados que juegan un papel importante en la cinemática de cuerpo rígido. En esta sección se explican desde el concepto de forma simétrica

bilineal hasta mostrar los conceptos de anquiladores duales y anquiladores ortogonales, fundamentales en el desarrollo de esta tesis. En particular analizar las propiedades de la forma de Klein, una de las dos formas simétricas bilineales del álgebra de Lie, $se(3)$ y la correlación asociada a la forma de Klein y como esta correlación puede explicar la equivalencia entre el empleo de movibilidades y restricciones presentado en el método *FACT*.

- Capítulo 4. Elementos flexibles. Para dar continuidad a la presente tesis es necesario mostrar cuáles son los elementos flexibles más utilizados en la literatura, qué características tienen y qué dimensiones y condiciones deben cumplir para generar movibilidades y restricciones que permiten diseñar elementos flexibles compuestos empleando las herramientas analizadas en el Capítulo 3 para, posteriormente, concretar la síntesis de tipo de mecanismos flexibles empleando esos elementos flexibles compuestos.
- Capítulo 5. Metodología cinemáticamente correcta y ejemplos. Finalmente se presenta una metodología cinemáticamente correcta para lograr la síntesis de dispositivos flexibles de posicionamiento. In adición, se presentan algunos ejemplos encontrados en la literatura que muestran los errores asociados a diseños que no toman en cuenta los fundamentos teóricos explicados en el Capítulo 3 del presente trabajo, así como una solución correcta para dichos ejemplos.
- Conclusiones y trabajo futuro. El trabajo finaliza con una sección que presenta las conclusiones del trabajo y posibles extensiones a futuro.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos.

Este capítulo inicia con una definición formal de la velocidad angular de un cuerpo rígido m con respecto a otro cuerpo rígido j . Toda la información correspondiente a los fundamentos teóricos contenida de este capítulo fue tomada de las tesis de Gallardo [28] y Rocha [29]. Además este capítulo también aborda las propiedades y estructura de las subálgebras del Álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$. Para un estudio más detallado vea [30].

2.1. Estado de velocidad de un cuerpo rígido.

El objetivo principal de conocer el estado de velocidad de un cuerpo rígido, respecto a un sistema de referencia, es la determinación de la velocidad de cualquier punto fijo del cuerpo rígido.

Imagine dos cuerpos rígidos, j y m , vea Figura 2.1, moviéndose uno respecto al otro, y suponga que el cuerpo j actúa como un sistema de referencia a partir del cual es posible observar el movimiento del cuerpo m . Si se desea conocer la velocidad de un punto arbitrario pero fijo al cuerpo m , entonces es necesario conocer dos elementos fundamentales.

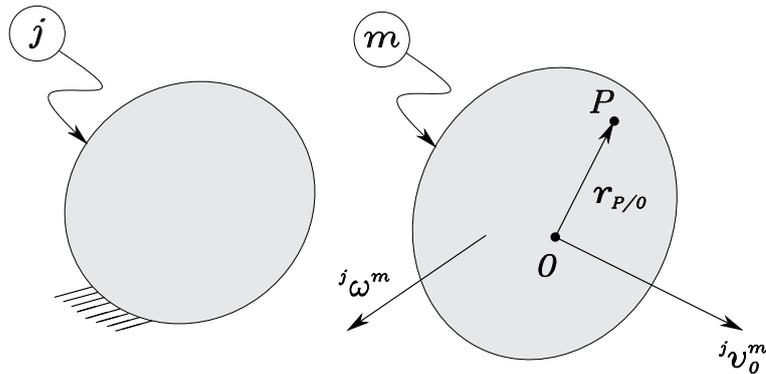


Figura 2.1: Estado de velocidad de un cuerpo rígido m , respecto a un cuerpo rígido o sistema de referencia j .

1. La velocidad angular del cuerpo rígido m , como se observa desde el cuerpo rígido j , ${}^j\omega^m$.
2. La velocidad de un punto arbitrario O , fijo al cuerpo m , como se observa desde el cuerpo j , ${}^jv_O^m$.

Entonces, se establece que el estado de velocidad del cuerpo m , como se observa desde el cuerpo o sistema de referencia j , puede formalmente representarse como

$${}^j\mathbf{V}_O^m \equiv \begin{bmatrix} {}^j\boldsymbol{\omega}^m \\ {}^j\mathbf{v}_O^m \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Si se conoce una representación del estado de velocidad, ${}^j\mathbf{V}_O^m$, entonces es posible determinar las velocidades de todos los puntos fijos al cuerpo m , como se observan desde el sistema de referencia j . En efecto, si P es otro punto fijo al cuerpo m y $\mathbf{r}_{P/O}$ es un vector que inicia en el punto O y termina en el punto P , la velocidad del punto P vendrá dada por

$${}^j\mathbf{v}_P^m = {}^j\mathbf{v}_O^m + {}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \mathbf{r}_{P/O} \quad (2.2)$$

Debe reconocerse que diferentes selecciones del punto de referencia O , conducen a diferentes, pero equivalentes, representaciones del estado de velocidad de un cuerpo rígido. Por lo tanto, debe probarse que las diferentes operaciones que se realizan sobre los estados de velocidad son independientes de las diferentes representaciones. Sin embargo, estos resultados son bien conocidos y no representan una adición importante, para mayor información, vea, por ejemplo, Gallardo [28] y Rico [31].

2.2. Ecuaciones de velocidad.

En esta sección se deducen las ecuaciones de velocidad de un cuerpo rígido con respecto a un sistema de referencia, las derivadas temporales de vectores con respecto a sistemas de referencia fijos o móviles juegan un papel fundamental en el desarrollo de la presente sección.

Definición 2.1. Sea $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base ortonormal y a derechas de \mathbb{R}^3 fija en el cuerpo m , entonces la velocidad angular del cuerpo m , con respecto a un cuerpo j , vea Figura 2.2, se define como,

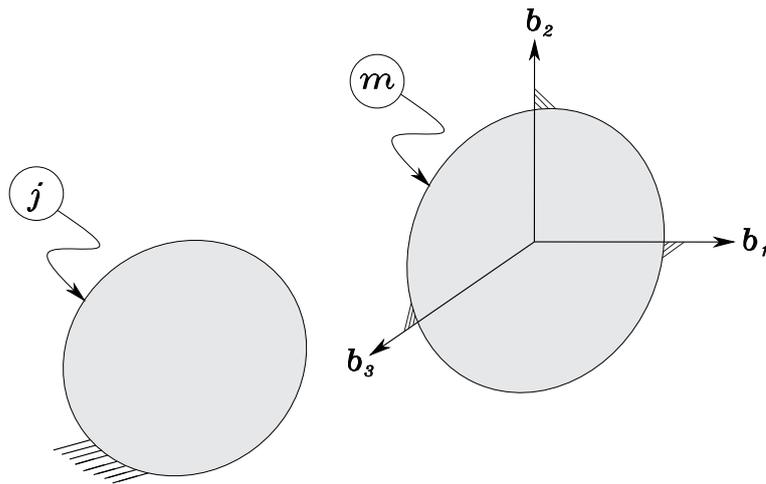


Figura 2.2: Base ortonormal $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ fija en el cuerpo rígido m .

$${}^j\omega^m \equiv \mathbf{b}_1 \frac{{}^j d\mathbf{b}_2}{dt} \cdot \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_2 \frac{{}^j d\mathbf{b}_3}{dt} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 \frac{{}^j d\mathbf{b}_1}{dt} \cdot \mathbf{b}_2 \quad (2.3)$$

donde, (\cdot) representa al producto interno o escalar usual del álgebra vectorial tridimensional.

En la siguiente proposición se muestra la relación que existe entre la velocidad angular, ${}^j\omega^m$, de un cuerpo rígido m tomando como sistema de referencia a un cuerpo rígido j , y un vector arbitrario β fijo a m cuya orientación, con respecto a este, es invariante.

Proposición 2.1. Sean m y j dos cuerpos rígidos, ${}^j\omega^m$ es la velocidad angular de m respecto de j si, y sólo si para todo vector arbitrario β fijo en el cuerpo rígido m , vea Figura 2.3, se cumple que,

$$\frac{{}^j d\beta}{dt} = {}^j\omega^m \times \beta \quad (2.4)$$

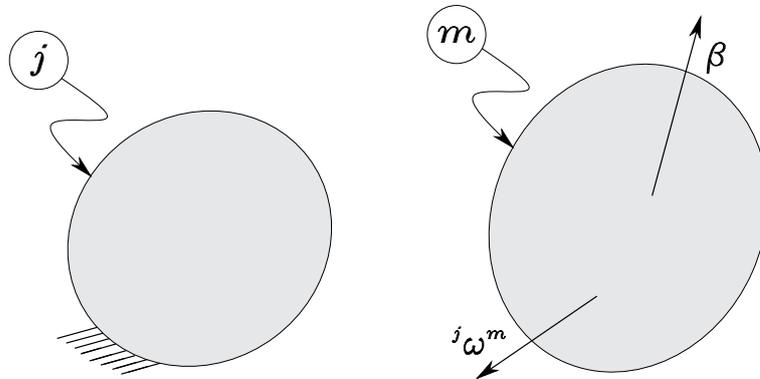


Figura 2.3: Vector β fijo al cuerpo rígido m .

Prueba. Suponga que ${}^j\omega^m$ está dada por la ecuación (2.3), sea β un vector arbitrario fijo en el cuerpo m , y sea $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base ortonormal y a derechas fija en el cuerpo m , entonces

$$\beta = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3 \quad (2.5)$$

donde β_1, β_2 y β_3 son escalares constantes. Debe notarse que

$$\begin{aligned} {}^j\omega^m \times \mathbf{b}_1 &= \left(\mathbf{b}_1 \frac{{}^j d\mathbf{b}_2}{dt} \cdot \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_2 \frac{{}^j d\mathbf{b}_3}{dt} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 \frac{{}^j d\mathbf{b}_1}{dt} \cdot \mathbf{b}_2 \right) \times \mathbf{b}_1 \\ &= -\mathbf{b}_3 \frac{{}^j d\mathbf{b}_3}{dt} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \frac{{}^j d\mathbf{b}_1}{dt} \cdot \mathbf{b}_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Simplificando la ecuación anterior se obtiene el siguiente resultado,

$${}^j\omega^m \times \mathbf{b}_1 = \frac{{}^j d\mathbf{b}_1}{dt} \quad (2.7)$$

De manera semejante,

$${}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \mathbf{b}_2 = \frac{{}^j d\mathbf{b}_2}{dt} \quad (2.8)$$

y

$${}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \mathbf{b}_3 = \frac{{}^j d\mathbf{b}_3}{dt} \quad (2.9)$$

Entonces

$$\begin{aligned} {}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \boldsymbol{\beta} &= \left(\mathbf{b}_1 \frac{{}^j d\mathbf{b}_2}{dt} \cdot \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_2 \frac{{}^j d\mathbf{b}_3}{dt} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 \frac{{}^j d\mathbf{b}_1}{dt} \cdot \mathbf{b}_2 \right) \times (\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3) \\ &= \mathbf{b}_1 \left(\beta_1 \frac{{}^j d\mathbf{b}_1}{dt} \cdot \mathbf{b}_1 + \beta_2 \frac{{}^j d\mathbf{b}_2}{dt} \cdot \mathbf{b}_1 + \beta_3 \frac{{}^j d\mathbf{b}_3}{dt} \cdot \mathbf{b}_1 \right) \\ &+ \mathbf{b}_2 \left(\beta_1 \frac{{}^j d\mathbf{b}_1}{dt} \cdot \mathbf{b}_2 + \beta_2 \frac{{}^j d\mathbf{b}_2}{dt} \cdot \mathbf{b}_2 + \beta_3 \frac{{}^j d\mathbf{b}_3}{dt} \cdot \mathbf{b}_2 \right) \\ &+ \mathbf{b}_3 \left(\beta_1 \frac{{}^j d\mathbf{b}_1}{dt} \cdot \mathbf{b}_3 + \beta_2 \frac{{}^j d\mathbf{b}_2}{dt} \cdot \mathbf{b}_3 + \beta_3 \frac{{}^j d\mathbf{b}_3}{dt} \cdot \mathbf{b}_3 \right) \\ &= \mathbf{b}_1 \left(\frac{{}^j d\boldsymbol{\beta}}{dt} \cdot \mathbf{b}_1 \right) + \mathbf{b}_2 \left(\frac{{}^j d\boldsymbol{\beta}}{dt} \cdot \mathbf{b}_2 \right) + \mathbf{b}_3 \left(\frac{{}^j d\boldsymbol{\beta}}{dt} \cdot \mathbf{b}_3 \right) = \frac{{}^j d\boldsymbol{\beta}}{dt} \end{aligned} \quad (2.10)$$

En la dirección opuesta, suponga que para todo vector $\boldsymbol{\beta}$ fijo en m se tiene que

$${}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \boldsymbol{\beta} = \frac{{}^j d\boldsymbol{\beta}}{dt} \quad (2.11)$$

entonces en particular,

$${}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \mathbf{b}_i = \frac{{}^j d\mathbf{b}_i}{dt} \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

Suponga que,

$${}^j\boldsymbol{\omega}^m = \omega_1 \mathbf{b}_1 + \omega_2 \mathbf{b}_2 + \omega_3 \mathbf{b}_3, \quad (2.13)$$

entonces

$$\omega_1 = ({}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{b}_3 = \frac{{}^j d\mathbf{b}_2}{dt} \cdot \mathbf{b}_3,$$

$$\omega_2 = ({}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \mathbf{b}_3) \cdot \mathbf{b}_1 = \frac{{}^j d\mathbf{b}_3}{dt} \cdot \mathbf{b}_1$$

y

$$\omega_3 = ({}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{b}_2 = \frac{{}^j d\mathbf{b}_1}{dt} \cdot \mathbf{b}_2.$$

Por lo tanto

$${}^j\boldsymbol{\omega}^m = \mathbf{b}_1 \frac{{}^j d\mathbf{b}_2}{dt} \cdot \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_2 \frac{{}^j d\mathbf{b}_3}{dt} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 \frac{{}^j d\mathbf{b}_1}{dt} \cdot \mathbf{b}_2 \quad (2.14)$$

■

2.3. Equivalencia entre estados de velocidad.

Es preciso establecer condiciones necesarias y suficientes para que dos posibles representaciones de un estado de velocidad sean equivalentes. Desde un punto de vista teórico la respuesta es simple: *Dos representaciones definen el mismo estado de velocidad de un cuerpo rígido si, y solo¹ si, la velocidad de cualquier punto fijo en el cuerpo rígido, calculada a partir de las dos diferentes representaciones es la misma.* Desde un punto de vista analítico, la respuesta a esta pregunta está dada por la siguiente proposición.

Proposición 2.2. Sea m un cuerpo rígido el cual se observa desde otro cuerpo rígido o sistema de referencia j . Más aun, sea O y O^* un par de puntos arbitrarios fijos en el cuerpo m . Entonces, dos representaciones del estado de velocidad del cuerpo rígido m con respecto al cuerpo rígido j tienen la forma

$${}^j\mathbf{V}_O^m = \begin{bmatrix} {}^j\boldsymbol{\omega}_1^m \\ {}^j\mathbf{v}_O^m \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^j\mathbf{V}_{O^*}^m = \begin{bmatrix} {}^j\boldsymbol{\omega}_2^m \\ {}^j\mathbf{v}_{O^*}^m \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

definen el mismo estado de velocidad si, y solo si,

$${}^j\boldsymbol{\omega}_1^m = {}^j\boldsymbol{\omega}_2^m = {}^j\boldsymbol{\omega}^m \quad \text{y} \quad {}^j\mathbf{v}_{O^*}^m = {}^j\mathbf{v}_O^m + {}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \mathbf{r}_{O^*/O}. \quad (2.16)$$

Prueba. Sea P un punto arbitrario perteneciente al cuerpo m , entonces dos posibles representaciones del estado de velocidad del cuerpo rígido m con respecto al cuerpo rígido j son

$${}^j\mathbf{V}_O^m = \begin{bmatrix} {}^j\boldsymbol{\omega}_1^m \\ {}^j\mathbf{v}_O^m \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^j\mathbf{V}_{O^*}^m = \begin{bmatrix} {}^j\boldsymbol{\omega}_2^m \\ {}^j\mathbf{v}_{O^*}^m \end{bmatrix}$$

definen el mismo estado de velocidad si, y solo si, para cualquier punto P , la velocidad del punto P obtenida de las dos representaciones es la misma. Por lo que,

$${}^j\mathbf{v}_{P/O}^m = {}^j\mathbf{v}_O^m + {}^j\boldsymbol{\omega}_1^m \times \mathbf{r}_{P/O} = {}^j\mathbf{v}_{O^*}^m + {}^j\boldsymbol{\omega}_2^m \times \mathbf{r}_{P/O^*} = {}^j\mathbf{v}_{P/O^*}^m.$$

Ahora, como P puede ser cualquier punto sobre el cuerpo, entonces se toma $P = O$, por tanto

$${}^j\mathbf{v}_O^m = {}^j\mathbf{v}_{O^*}^m + {}^j\boldsymbol{\omega}_2^m \times \mathbf{r}_{O/O^*}. \quad (2.17)$$

De manera similar, si se toma $P = O^*$ se tiene que

$${}^j\mathbf{v}_{O^*}^m = {}^j\mathbf{v}_O^m + {}^j\boldsymbol{\omega}_1^m \times \mathbf{r}_{O^*/O}. \quad (2.18)$$

Restando la ecuación (2.18) a la ecuación (2.17), se obtiene

$$-{}^j\boldsymbol{\omega}_1^m \times \mathbf{r}_{O^*/O} = {}^j\boldsymbol{\omega}_2^m \times \mathbf{r}_{O/O^*}$$

o

$$({}^j\boldsymbol{\omega}_1^m - {}^j\boldsymbol{\omega}_2^m) \times \mathbf{r}_{O^*/O} = \mathbf{0}.$$

¹La palabra *solo* tanto cuando es adverbio y equivale a solamente (Solo llevaba un par de monedas en el bolsillo) como cuando es adjetivo (No me gusta estar solo) no deben llevar tilde según las reglas generales de acentuación, para mayor información consulte la página web oficial de la Real Academia Española <https://www.rae.es/consultas/el-adverbio-solo-y-los-pronombres-demostrativos-sin-tilde>.

Dado que O y O^* son arbitrarios, la única posibilidad restante es que

$${}^j\boldsymbol{\omega}_1^m - {}^j\boldsymbol{\omega}_2^m = \mathbf{0}$$

por lo tanto

$${}^j\boldsymbol{\omega}_1^m = {}^j\boldsymbol{\omega}_2^m = {}^j\boldsymbol{\omega}^m \quad (2.19)$$

Este resultado también implica que la velocidad angular de un cuerpo m observado desde un cuerpo j es una propiedad del cuerpo. Más aun, después de esta equivalencia de velocidades angulares, ecuación (2.18) se transforma en la condición restante:

$${}^j\mathbf{v}_{O^*}^m = {}^j\mathbf{v}_O^m + {}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \mathbf{r}_{O^*/O}. \quad (2.20)$$

■

Entonces es posible establecer la siguiente definición:

Definición 2.2. Sean

$${}^j\mathbf{V}_O^m = \begin{bmatrix} {}^j\boldsymbol{\omega}_1^m \\ {}^j\mathbf{v}_O^m \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^j\mathbf{V}_{O^*}^m = \begin{bmatrix} {}^j\boldsymbol{\omega}_2^m \\ {}^j\mathbf{v}_{O^*}^m \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

dos representaciones del estado de velocidad de un cuerpo m , observado desde un sistema de referencia j . Se dice que los estados de velocidad son equivalentes si, y solo si,

$${}^j\boldsymbol{\omega}_1^m = {}^j\boldsymbol{\omega}_2^m = {}^j\boldsymbol{\omega}^m \quad \text{y} \quad {}^j\mathbf{v}_{O^*}^m = {}^j\mathbf{v}_O^m + {}^j\boldsymbol{\omega}^m \times \mathbf{r}_{O^*/O}. \quad (2.22)$$

2.4. Teorema de Chasles infinitesimal.

Una vez conocido el concepto de estado de velocidad, el concepto de tornillo infinitesimal se introduce en la presente sección.

El Teorema de Chasles establece que todo desplazamiento Euclídeo es equivalente a un desplazamiento de tornillo; es decir, una rotación alrededor de un eje y una traslación a lo largo del mismo eje, este eje se conoce como el eje instantáneo del tornillo, ISA por su abreviación en inglés *Instantaneous Screw Axis*.

Entonces, una representación del estado de velocidad de un cuerpo rígido m , tal como se observa desde un sistema de referencia j , sometido únicamente a traslación; es decir la ${}^j\boldsymbol{\omega}^m = \mathbf{0}$ al no tener rotación respecto del sistema de referencia j , se escribe de la forma

$${}^j\mathbf{V}_P^m = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ {}^j\mathbf{v}_P^m \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Por otro lado, si el cuerpo m está sometido únicamente a rotación, una representación de su estado de velocidad, tal como se observa desde j se escribe de la forma

$${}^j\mathbf{V}_P^m = \begin{bmatrix} {}^j\boldsymbol{\omega}^m \\ {}^j\mathbf{v}_P^m \end{bmatrix} = {}^j\boldsymbol{\omega}^m \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{s}^m \\ \mathbf{r}_{P/O} \times {}^j\mathbf{s}^m \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

donde O es el origen de un sistema coordenado fijo en el sistema de referencia j .

El caso más general ocurre cuando el cuerpo m está sometido a un movimiento de tornillo; en este caso, una representación de sus estado de velocidad, tal como se observa desde j , se escribe de la forma

$${}^j\mathbf{V}_P^m = \begin{bmatrix} {}^j\boldsymbol{\omega}^m \\ {}^j\mathbf{v}_P^m \end{bmatrix} = {}^j\omega_m \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{s}^m \\ \mathbf{r}_{P/O} \times {}^j\mathbf{s}^m + {}^jh_m {}^j\mathbf{s}^m \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

donde O es el origen de un sistema coordenado fijo en el sistema de referencia j y jh_m es el paso del tornillo, dado por

$${}^jh_m = \frac{{}^j\mathbf{v}_O^m \cdot {}^j\boldsymbol{\omega}^m}{{}^j\omega_m^2}$$

2.5. El Álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$.

La teoría de tornillos se sustenta bajo un principio simple, en el que la velocidad instantánea a la cual está sujeto un cuerpo rígido puede expresarse por la rotación alrededor de un eje y una traslación a lo largo del mismo. La combinación de estos movimientos es conocida como el desplazamiento espacial del tornillo, o *twist* en inglés, Hunt [32].

Definición 2.3 Álgebra de Lie, $se(3)$. Es el conjunto de todos los posibles estados de velocidad \mathbf{V} que puede tener un cuerpo rígido cuando se observa desde un sistema de referencia arbitrario. El álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$, es un álgebra real y sus elementos están dados por

$$\mathbf{V} = \lambda (\mathbf{s}; \mathbf{r}_{P/O} \times \mathbf{s} + h\mathbf{s}) = \lambda\$ = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_{P/O}). \quad (2.26)$$

Es de conocimiento general, vea Rico [31], que el álgebra de tornillos es isomórfica con el álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo. La representación de la ecuación (2.26) se obtiene mediante el producto escalar $\lambda\$$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$, está asociada a la magnitud de la velocidad del par cinemático.

Además, considere que $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$, con $|\mathbf{s}| = 1$, es el vector posición de un punto arbitrario ubicado sobre L asociada al eje del tornillo, $\mathbf{r}_{P/O} \in \mathbb{R}^3$ es el vector posición de un punto arbitrario ubicado sobre L y que se mide con respecto a un sistema coordenado previamente establecido, $h \in \mathbb{R}$, es el paso del tornillo, $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo rígido y $\mathbf{v}_{P/O}$ es la velocidad de un punto P unido rígidamente a este cuerpo. Estos parámetros geométricos asociados a un tornillo se muestran en la Figura 2.4.

El álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$, requiere de tres operaciones. Considere que $\forall \mathbf{V}_{O_1}, \mathbf{V}_{O_2}, \mathbf{V}_{O_3} \in se(3)$, y $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, todos ellos arbitrarios.

1. Adición.

$$\mathbf{V}_{O_1} + \mathbf{V}_{O_2} = (\boldsymbol{\omega}_1; \mathbf{v}_{O_1}) + (\boldsymbol{\omega}_2; \mathbf{v}_{O_2}) = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2; \mathbf{v}_{O_1} + \mathbf{v}_{O_2}) \quad (2.27)$$

2. Multiplicación por escalar.

$$\lambda \mathbf{V}_{O_1} = \lambda (\boldsymbol{\omega}_1; \mathbf{v}_{O_1}) = (\lambda \boldsymbol{\omega}_1; \lambda \mathbf{v}_{O_1}) \quad (2.28)$$

3. Producto de Lie.

$$[\mathbf{V}_{O_1}, \mathbf{V}_{O_2}] = [(\boldsymbol{\omega}_1; \mathbf{v}_{O_1}), (\boldsymbol{\omega}_2; \mathbf{v}_{O_2})] = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2; \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{O_2} - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}_{O_1}). \quad (2.29)$$

Se puede probar que las operaciones de adición y multiplicación por escalar definen un espacio vectorial real. Sin embargo, para representar un álgebra, sus elementos deben estar cerrados con respecto al producto de Lie. En adición, el producto de Lie satisface las siguientes propiedades.

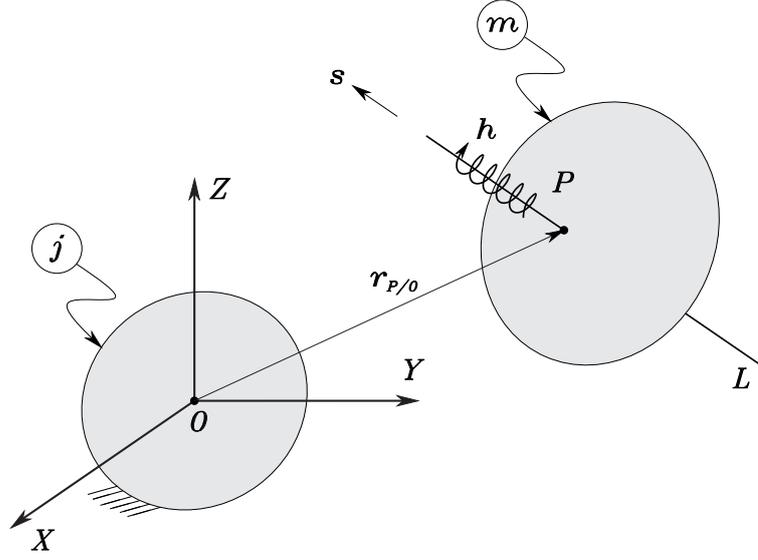


Figura 2.4: Parámetros geométricos asociados a un tornillo infinitesimal.

1. Bilineal: Lineal en la primera variable

$$[\lambda_1 \mathbf{V}_{O_1} + \lambda_2 \mathbf{V}_{O_2}, \mathbf{V}_{O_3}] = \lambda_1 [\mathbf{V}_{O_1}, \mathbf{V}_{O_3}] + \lambda_2 [\mathbf{V}_{O_2}, \mathbf{V}_{O_3}], \quad (2.30)$$

y, lineal en la segunda variable

$$[\mathbf{V}_{O_1}, \lambda_2 \mathbf{V}_{O_2} + \lambda_3 \mathbf{V}_{O_3}] = \lambda_2 [\mathbf{V}_{O_1}, \mathbf{V}_{O_2}] + \lambda_3 [\mathbf{V}_{O_1}, \mathbf{V}_{O_3}]. \quad (2.31)$$

2. Antisimétrico.

$$[\mathbf{V}_{O_1}, \mathbf{V}_{O_2}] = -[\mathbf{V}_{O_2}, \mathbf{V}_{O_1}]. \quad (2.32)$$

3. Identidad de Jacobi.

$$[\mathbf{V}_{O_1}, [\mathbf{V}_{O_2}, \mathbf{V}_{O_3}]] + [\mathbf{V}_{O_3}, [\mathbf{V}_{O_1}, \mathbf{V}_{O_2}]] + [\mathbf{V}_{O_2}, [\mathbf{V}_{O_3}, \mathbf{V}_{O_1}]] = \mathbf{0}. \quad (2.33)$$

Sin embargo, debe notarse que, en general, el producto de Lie no es asociativo.

$$[\mathbf{V}_{O_1}, [\mathbf{V}_{O_2}, \mathbf{V}_{O_3}]] \neq [[\mathbf{V}_{O_1}, \mathbf{V}_{O_2}], \mathbf{V}_{O_3}] \quad (2.34)$$

En toda álgebra hay dos subconjuntos con propiedades especiales conocidas como subespacios y subálgebras. En el caso del álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$, estas estructuras son fundamentales para el análisis de la movilidad de mecanismos, formados por cuerpos rígidos y flexibles.

2.6. Subespacios y subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$.

En esta sección se definen las estructuras algebraicas más importantes desde el punto de vista de movilidad del álgebra de Lie, $se(3)$.

Definición 2.4 Subespacio del álgebra de Lie, $se(3)$. . Un subconjunto V del álgebra de Lie, $se(3)$, de un espacio vectorial denotado por $V \subset se(3)$ se dice que es un subespacio del álgebra de Lie, $se(3)$, tal que $V < se(3)$, si V es por sí solo, un espacio vectorial con las operaciones de adición y multiplicación por escalar; es decir, si se satisfacen las siguientes propiedades.

$$\mathbf{V}_{O_1} + \mathbf{V}_{O_2} \in V \quad \forall \mathbf{V}_{O_1}, \mathbf{V}_{O_2} \in V, \quad (2.35)$$

y

$$\lambda \mathbf{V}_{O_1} \in V \quad \forall \mathbf{V}_{O_1} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.36)$$

Definición 2.5 Subálgebra del álgebra de Lie, $se(3)$. Un subconjunto A del álgebra de Lie, $se(3)$, denotado por $A \subset se(3)$, es una subálgebra del álgebra de Lie, $se(3)$, tal que $A < se(3)$ si el subconjunto es un subespacio vectorial, que además, está cerrado respecto al producto de Lie; es decir, si se satisface la propiedad adicional.

$$[\mathbf{V}_{O_1}, \mathbf{V}_{O_2}] \in A \quad \forall \mathbf{V}_{O_1}, \mathbf{V}_{O_2} \in A. \quad (2.37)$$

Con estas definiciones es evidente que todas las subálgebras son subespacios, sin embargo no todo subespacio forma una subálgebra.

2.7. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$.

La Figura 2.5 muestra la clasificación de las subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$, y sus relaciones de inclusión. Esta clasificación se organiza con base en la dimensión de las respectivas subálgebras. El álgebra de Lie, $se(3)$, tiene una subálgebra trivial, dibujada con un contorno color azul, dada por el conjunto formado exclusivamente por subconjunto vacío, $\{\mathbf{0}\}$, y una subálgebra impropia, dibujada por un contorno color verde, la cual está constituida por toda el álgebra de Lie, $se(3)$, y tiene una dimensión igual a seis. Finalmente, en la Figura 2.5 también se ilustra mediante contornos de color rojo aquellas subálgebras que son conmutativas.

La descripción de las subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$, se presenta a continuación siguiendo la notación establecida por Hervé [33], Pérez-Soto [34] y Tadeo-Chávez [35].

2.7.1. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión uno.

- **Subálgebra $t_{\mathbf{u}_1}$, prismático.** Representa los estados de velocidad producidos por una traslación a lo largo de una línea cuya dirección arbitraria está asociada al vector \mathbf{u}_1 , tal que

$$t_{\mathbf{u}_1} = \{(\mathbf{0}; \mathbf{v}_O) \mid \mathbf{v}_O = \lambda \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}, |\mathbf{u}_1| = 1\}. \quad (2.38)$$

- **Subálgebra, r_{P, \mathbf{u}_1} , revoluta.** Representa los estados de velocidad producidos por la rotación alrededor de un eje fijo que pasa por un punto P . Para esta subálgebra el eje de rotación es paralelo al vector \mathbf{u}_1 de manera que

$$r_{P, \mathbf{u}_1} = \{(\lambda_1 \mathbf{u}_1; \lambda_1 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{O/P}) \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}; \mathbf{u}_1, \mathbf{r}_{O/P} \in \mathbb{R}^3; |\mathbf{u}_1| = 1; \mathbf{r}_{O/P} \text{ cte.}\} \quad (2.39)$$

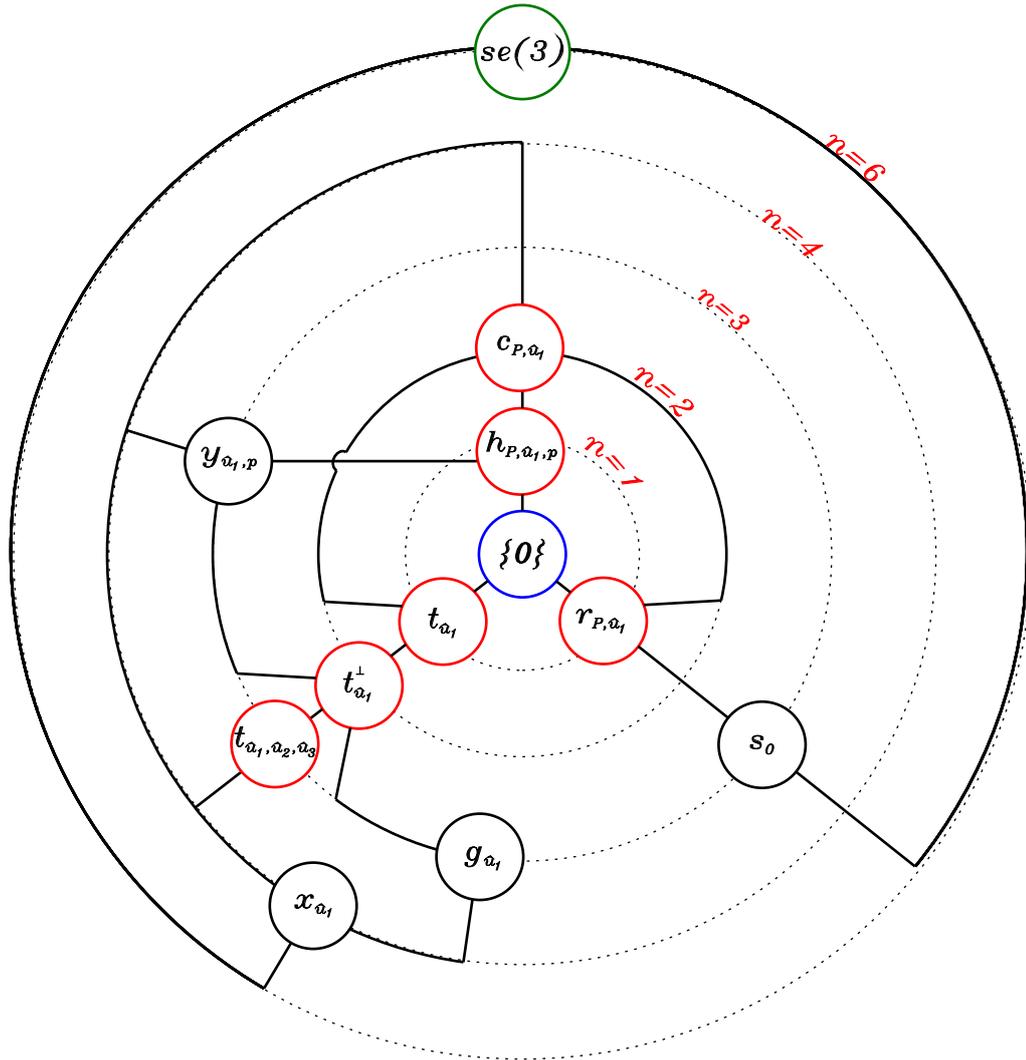


Figura 2.5: Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$.

- **Subálgebra $h_{P,u_1,p}$, helicoidal.** Representa los estados de velocidad producidos por un par de tornillo, es decir, una rotación alrededor de un eje fijo paralelo a la dirección \mathbf{u}_1 que pasa por el punto P , además de un desplazamiento traslacional producido por su paso p en la misma dirección.

$$h_{P,u_1,p} = \left\{ (\lambda_1 \mathbf{u}_1; \lambda_1 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{O/P}) \mid p, \lambda_1 \in \mathbb{R}; \mathbf{u}_1, \mathbf{r}_{O/P} \in \mathbb{R}^3; |\mathbf{u}_1| = 1; p, \mathbf{r}_{O/P} \text{ ctes.} \right\} \quad (2.40)$$

2.7.2. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión dos.

- **Subálgebra $t_{u_1}^\perp$, traslación plana.** Representa los estados de velocidad producidos por traslaciones arbitrarias en un plano perpendicular al vector \mathbf{u}_1 , tal que

$$t_{u_1}^\perp = \left\{ (\mathbf{0}; \mathbf{v}_O) \mid \mathbf{v}_O = \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3; \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3; \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}; |\mathbf{u}_2| = |\mathbf{u}_3| = 1, \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 0 \right\}.$$

- **Subálgebra C_{P,\mathbf{u}_1} , cilíndrico.** Representa los estados de velocidad producidos por una rotación alrededor de un eje fijo paralelo a la dirección \mathbf{u}_1 que pasa por un punto P , más una traslación en la misma dirección.

$$C_{P,\mathbf{u}_1} = \left\{ (\lambda_1 \mathbf{u}_1; \lambda_1 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{O/P} + \lambda_2 \mathbf{u}_1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}; \mathbf{u}_1, \mathbf{r}_{O/P} \in \mathbb{R}^3; |\mathbf{u}_1| = 1; \mathbf{r}_{O/P} \text{ cte.} \right\}$$

2.7.3. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión tres.

- **Subálgebra $t_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3}$, traslación espacial.** Representa los estados de velocidad producidos por traslaciones espaciales de un cuerpo rígido, tal que

$$t_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3} = \left\{ (\mathbf{0}; \mathbf{v}_O) \mid \mathbf{v}_O \in \mathbb{R}^3 \right\}, \quad (2.41)$$

donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ forman un conjunto linealmente independiente. Es importante notar que a diferencia de las restantes subálgebras, solo hay una subálgebra de traslaciones espaciales. Además, esta subálgebra es un ideal del álgebra de Lie, $se(3)$.

- **Subálgebra $g_{\mathbf{u}_1}$, movimientos planos.** Representa los estados de velocidad producidos por traslaciones arbitrarias en un plano perpendicular al vector \mathbf{u}_1 , además de una rotación paralela a esta dirección, tal que

$$g_{\mathbf{u}_1} = \left\{ (\lambda_1 \mathbf{u}_1; \lambda_1 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{O/P} + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{r}_{O/P} \in \mathbb{R}^3, \right. \\ \left. |\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = |\mathbf{u}_3| = 1; \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 0; \mathbf{r}_{O/P} \text{ cte.} \right\}$$

- **Subálgebra s_O , esférica.** Representa los estados de velocidad producidos por rotaciones de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo O .

$$s_O = \left\{ (\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{O/P}) \mid \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{O/P} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{r}_{O/P} \text{ cte.} \right\} \quad (2.42)$$

- **Subálgebra $y_{\mathbf{u}_1, p}$, traslación plana de un desplazamiento helicoidal.** Representa los estados de velocidad producidos por traslaciones arbitrarias de un cuerpo rígido en un plano perpendicular a \mathbf{u}_1 , además de un movimiento de tornillo paralelo a \mathbf{u}_1 ; es decir los estados de velocidad producidos por traslaciones perpendiculares al vector \mathbf{u}_1 y un movimiento de tornillo paralelo a \mathbf{u}_1 .

$$y_{\mathbf{u}_1, p} = \left\{ (\lambda_1 \mathbf{u}_1; \lambda_1 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{O/P} + \lambda_1 p \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p \in \mathbb{R}; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{r}_{O/P} \in \mathbb{R}^3, \right. \\ \left. |\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = |\mathbf{u}_3| = 1; \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 0; p, \mathbf{r}_{O/P} \text{ cte.} \right\}$$

2.7.4. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión cuatro.

- **Subálgebra $x_{\mathbf{u}_1}$, Schönflies.** Representa los estados de velocidad producidos por traslaciones espaciales de un cuerpo rígido, que además, es libre de rotar alrededor de cualquier eje paralelo a \mathbf{u}_1 .

$$x_{\mathbf{u}_1} = \left\{ (\lambda_0 \mathbf{u}_1; \lambda_0 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{O/P} + \lambda_1 p \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3) \mid \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{r}_{O/P} \in \mathbb{R}^3, \right. \\ \left. |\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = |\mathbf{u}_3| = 1; \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 0; p, \mathbf{r}_{O/P} \text{ cte.} \right\}$$

Capítulo 3

Espacios ortogonales reales y sus espacios duales

El propósito de este capítulo es presentar una serie de conceptos y resultados que juegan un papel importante en la cinemática de los cuerpos rígidos. La mayoría de los resultados pueden encontrarse dispersos en la literatura especializada, por ejemplo, vea [36], [37] y [38]. Este capítulo es una extensión, añadiendo algunos ejemplos y proposiciones, del capítulo 3 de la tesis presentada por Rocha [29]. Además se muestran propiedades de la forma de Klein una de las dos formas simétricas bilineales del álgebra de Lie, $se(3)$, y de la correlación asociada a la forma de Klein y como esta correlación puede aplicarse para la síntesis de dispositivos de posicionamiento flexible.

3.1. Definiciones y elementos invertibles.

En esta sección se hace una presentación del concepto de un espacio ortogonal \mathbb{X} en términos de la extensión del concepto de producto escalar también llamado *forma simétrica bilineal*, en un espacio vectorial real \mathbb{X} .

Definición 3.1 Forma simétrica bilineal. Una forma simétrica bilineal en \mathbb{X} es un mapeo bilineal que se define como:

$$\mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

tal que la forma es simétrica

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}.$$

Ya que el mapeo es bilineal, se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}(\mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) &= \mu_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + \mu_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}), \\ (\mathbf{a}, \mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2) &= \mu_1 (\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + \mu_2 (\mathbf{a}, \mathbf{b}_2).\end{aligned}$$

Puesto que el espacio vectorial es real, y el mapeo tiene como imagen el campo de los números reales, la forma simétrica bilineal se llama real. Sólo se considerarán aquí formas simétricas bilineales reales.

Definición 3.2 Forma cuadrática. La forma cuadrática asociada con una forma simétrica bilineal es el mapeo definido como:

$$\mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}).$$

Esta definición implica que una forma simétrica bilineal define, de manera única, una forma cuadrática. El siguiente resultado muestra que una forma cuadrática define de manera única una forma simétrica bilineal.

Proposición 3.1. Una forma simétrica bilineal real está únicamente definida por su forma cuadrática.

Prueba. Sea $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \in \mathbb{X}$; entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a}) - (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) - (\mathbf{b}, \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{a}) - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}); \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})]$$

quedando así probado. ■

Corolario 3.1. La forma simétrica bilineal es el mapeo cero si, y solo si, su forma cuadrática es el mapeo cero.

Prueba. Suponga que la forma cuadrática es el mapeo cero, entonces

$$(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 0 \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{X}$$

considere ahora $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}$ arbitrarios

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})] = \frac{1}{2}[0 + 0 + 0] = 0$$

entonces se ha probado que la forma simétrica bilineal es el mapeo cero; es decir

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}$$

Por el contrario, suponga que la forma simétrica bilineal es el mapeo $\mathbf{0}$, entonces se tiene que

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{X}$$

y se ha probado que la forma cuadrática es el mapeo cero. ■

Definición 3.3. Dos elementos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}$ se dice que son mutuamente ortogonales si

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Dos subconjuntos $A, B \subset \mathbb{X}$ se dice que son mutuamente ortogonales si

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{a} \in A, \quad \forall \mathbf{b} \in B$$

Posteriormente, este concepto de ortogonalidad se extenderá a subespacios de un espacio ortogonal.

Definición 3.4. Un espacio vectorial real \mathbb{X} , equipado con una forma simétrica bilineal real, será llamado espacio ortogonal real. Cualquier subespacio vectorial \mathbb{W} , de un espacio ortogonal \mathbb{X} , es un subespacio ortogonal de \mathbb{X} bajo la restricción sobre $\mathbb{W} \times \mathbb{W}$ de la forma simétrica bilineal de \mathbb{X} .

Ejemplo 3.1. Considere un espacio ortogonal \mathbb{R}^3 bajo el producto escalar usual.

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Considere $\mathbb{P}_{X-Y} < \mathbb{R}^3$, un subespacio de \mathbb{R}^3 , es decir:

$$\mathbb{P}_{X-Y} = \{(a_1, a_2, a_3) | a_3 = 0\} = \{(a_1, a_2, 0) | a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

Sean $\mathbf{c} = (c_1, c_2, 0)$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, 0) \in \mathbb{P}_{X-Y}$ arbitrarios. Entonces

$$(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = c_1 d_1 + c_2 d_2 + 0 \cdot 0 = c_1 d_1 + c_2 d_2 \quad (3.1)$$

Por lo que \mathbb{P}_{X-Y} es por si solo un espacio ortogonal.

Definición 3.5. Un espacio ortogonal \mathbb{X} se dice que es positivo-definido (positivo-semidefinido) si, para todo vector \mathbf{a} diferente de cero¹

$$\mathbf{a} \in \mathbb{X} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0 \quad ((\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0).$$

De manera semejante, el espacio ortogonal se dice que es negativo-definido (negativo-semidefinido) si para todo vector \mathbf{a} diferente de cero

$$\mathbf{a} \in \mathbb{X} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}) < 0 \quad ((\mathbf{a}, \mathbf{a}) \leq 0).$$

Además, un espacio ortogonal se dice que es indefinido si existen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}$ tal que

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0 \quad \text{y} \quad (\mathbf{b}, \mathbf{b}) < 0.$$

Finalmente, un espacio ortogonal cuyo producto escalar o forma simétrica bilineal es el mapeo cero se dice que es isotrópico, y un espacio ortogonal que es la suma directa de dos subespacios isotrópicos se dice que es neutral.

Ejemplo 3.2. Considere \mathbb{R}^3 bajo la forma simétrica bilineal estándar, es decir, el producto escalar o producto punto.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Entonces, la forma cuadrática en el espacio ortogonal está dada por

$$q(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

¹Puesto que la forma simétrica es bilineal, entonces para

$$\mathbf{0} \in \mathbb{X} \quad (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (0\mathbf{a}, 0\mathbf{b}) = 0(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}$$

Este espacio ortogonal es positivo definido.

Considere

$$q(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0 \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$$

además

$$q(\mathbf{a}) = 0 \iff a_1 = a_2 = a_3 = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Ejemplo 3.3 Forma de Killing. Considere el espacio ortogonal formado por $se(3)$ con la forma de Killing.

$$(\omega_1 \mathfrak{S}_1, \omega_2 \mathfrak{S}_2) = \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{v}_{O_2} \end{bmatrix} \right) = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2$$

La forma cuadrática asociada a la forma de Killing está dada por

$$(\omega_1 \mathfrak{S}_1, \omega_1 \mathfrak{S}_1) = \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \right) = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 = \omega_{1x}^2 + \omega_{1y}^2 + \omega_{1z}^2$$

Entonces el espacio ortogonal formado por $se(3)$ y la forma de Killing es positivo semidefinido.

Considere $\omega_1 \mathfrak{S}_1 \in se(3)$ arbitrario.

$$(\omega_1 \mathfrak{S}_1, \omega_1 \mathfrak{S}_1) = \omega_{1x}^2 + \omega_{1y}^2 + \omega_{1z}^2 \geq 0 \quad \forall \omega_1 \mathfrak{S}_1 \in se(3)$$

Sin embargo considere

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0 \quad \text{pero} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $se(3)$, junto con la forma de Killing constituye un espacio ortogonal positivo semidefinido.

Definición 3.6. Un $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$ se dice que es invertible, también llamado no nulo, si $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \neq 0$. El elemento

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

se llama inverso de \mathbf{a} .

Proposición 3.2. Todo espacio ortogonal real no isotrópico tiene elementos invertibles.

Prueba. Suponga que \mathbb{X} es un espacio ortogonal real no isotrópico, entonces, por la Definición 1.5 la forma simétrica bilineal no es cero y por el Corolario 1.1 la forma cuadrática en \mathbb{X} es también diferente de cero.

Por lo tanto, existen $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$, tal que

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \neq 0$$

y $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$ sería invertible. ■

Proposición 3.3. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$ invertible; entonces, para algunos $\mu \in \mathbb{X}$, $(\mu\mathbf{a}, \mu\mathbf{a}) = \pm 1$.

Prueba. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$ invertible; entonces,

$$(\mu\mathbf{a}, \mu\mathbf{a}) = \mu^2(\mathbf{a}, \mathbf{a}). \quad (3.2)$$

Puesto \mathbf{a} es invertible, entonces $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \neq 0$. Por lo tanto, la ecuación (3.2) tiene dos posibles soluciones

$$(\mu\mathbf{a}, \mu\mathbf{a}) = \mu^2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1 \quad \text{o} \quad (\mu\mathbf{a}, \mu\mathbf{a}) = \mu^2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1$$

■

Ejemplo 3.4. Considere el espacio ortogonal \mathbb{R}^3 con la forma simétrica bilineal usual

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Entonces $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$ es invertible pues

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = ((1, -1, 1), (1, -1, 1)) = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3 \neq 0$$

entonces $\hat{\mathbf{a}}_u$ se define como

$$\hat{\mathbf{a}}_u = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Pues

$$(\hat{\mathbf{a}}_u, \hat{\mathbf{a}}_u) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \right] = \frac{1}{3} [(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2] = 1$$

Ejemplo 3.5 Forma de Killing. Considere el espacio ortogonal $se(3)$ con la forma de Killing. Considere

$$\omega_1 \mathfrak{S}_1 = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1i + 1k) \\ (3i - 5j + 6k) \end{bmatrix}$$

$\omega_1 \mathfrak{S}_1$ es invertible pues

$$(\omega_1 \mathfrak{S}_1, \omega_1 \mathfrak{S}_1) = \left(\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \right) = \omega_1 \cdot \omega_1 = (1i + 1k) \cdot (1i + 1k) = 1 + 1 = 2$$

Entonces el tornillo unitario $(\omega_1 \mathfrak{S}_1)_u$ respecto a la forma de Killing se define como

$$(\omega_1 \mathfrak{S}_1)_u = \frac{\omega_1 \mathfrak{S}_1}{\sqrt{(\omega_1 \mathfrak{S}_1, \omega_1 \mathfrak{S}_1)}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} k \\ \frac{3}{\sqrt{2}} i - \frac{5}{\sqrt{2}} j + \frac{6}{\sqrt{2}} k \end{bmatrix}$$

Proposición 3.4. Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son elementos invertibles de un espacio ortogonal \mathbb{X} , y $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}, \mathbf{b})$, entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ son mutuamente ortogonales, y $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ o $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ es invertible.

Prueba. Primeramente considere que

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) &= (\mathbf{a}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}) - (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{a}) - (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ son ortogonales. A continuación considere

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) &= (\mathbf{a}, \mathbf{a}) + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{a}) - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ &= 2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + 2(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 4(\mathbf{a}, \mathbf{a}).\end{aligned}$$

Puesto que $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \neq 0$, entonces $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$ y $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})$ no pueden ser ambos cero; en consecuencia, por lo menos uno de ellos debe ser invertible. ■

3.2. Correlaciones lineales y espacios degenerados.

En esta sección, se presentarán los conceptos de correlaciones lineales y espacios ortogonales degenerados.

Definición 3.7. Sea \mathbb{X} un espacio vectorial real, con \mathbb{X}^L como su espacio dual; es decir, \mathbb{X}^L es el espacio vectorial constituido por todos los mapeos lineales de \mathbb{X} al campo real \mathbb{R} ; estos mapeos se denominan también funcionales lineales. Una correlación lineal en \mathbb{X} es cualquier mapeo lineal

$$\sigma : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}^L \quad \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma$$

La imagen de \mathbf{x} bajo σ es un funcional lineal representado por \mathbf{x}^σ . Una correlación se dice que es simétrica si

$$\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^\sigma(\mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}.$$

Ejemplo 3.6. Considere \mathbb{R}^3 como un espacio vectorial y \mathbb{R}^{3L} su espacio dual. La correlación

$$\sigma : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{3L} \quad \text{tal que} \quad \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \in \mathbb{R}^{3L}$$

donde $\mathbf{x}^\sigma : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, donde la regla de correspondencia está dada por

$$\mathbf{x}^\sigma(\) = 2x_1(\)_1 - 3x_2(\)_3 + 5x_3(\)_2$$

significa que $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x}^\sigma(\mathbf{y}) = 2x_1 y_1 - 3x_2 y_3 + 5x_3 y_2$$

pruebe que es lineal pero no simétrica.

Primeramente se debe probar que $\sigma : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{3L}$ es lineal; es decir, es necesario probar que la transformación o mapeo es:

Aditiva. $(\mathbf{x} + \mathbf{y})^\sigma = \mathbf{x}^\sigma + \mathbf{y}^\sigma$

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} + \mathbf{y})^\sigma(\) &= (2x_1 + 2y_1)(\)_1 - (3x_2 + 3y_2)(\)_3 + (5x_3 + 5y_3)(\)_2 \\ &= [2x_1(\)_1 - 3x_2(\)_3 + 5x_3(\)_2] + [2y_1(\)_1 - 3y_2(\)_3 + 5y_3(\)_2] = \mathbf{x}^\sigma(\) + \mathbf{y}^\sigma(\)\end{aligned}$$

Homogénea. $\sigma(\lambda\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x})^\sigma = \lambda[\mathbf{x}^\sigma]$

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{x})^\sigma(\) &= [2(\lambda x_1)](\)_1 - [3(\lambda x_2)](\)_3 + [5(\lambda x_3)](\)_2 \\ &= \lambda[2x_1(\)_1 - 3x_2(\)_3 + 5x_3(\)_2] = \lambda\mathbf{x}^\sigma(\)\end{aligned}$$

Es necesario ahora probar que \mathbf{x}^σ es aditiva y homogénea; es decir, que \mathbf{x}^σ es un funcional lineal.

Aditiva. Para todo $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{y} + \mathbf{z} = (y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3) = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3) \quad (3.3)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\sigma(\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= 2x_1(y_1 + z_1) - 3x_2(y_3 + z_3) + 5x_3(y_2 + z_2) \\ &= (2x_1 y_1 - 3x_2 y_3 + 5x_3 y_2) + (2x_1 z_1 - 3x_2 z_3 + 5x_3 z_2) = \mathbf{x}^\sigma(\mathbf{y}) + \mathbf{x}^\sigma(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Homogénea. Para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \mathbf{y} = \lambda(y_1, y_2, y_3) = (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3) \quad (3.4)$$

Entonces,

$$\mathbf{x}^\sigma(\lambda \mathbf{y}) = 2x_1(\lambda y_1) - 3x_2(\lambda y_3) + 5x_3(\lambda y_2) = \lambda(2x_1 y_1 - 3x_2 y_3 + 5x_3 y_2) = \lambda \mathbf{x}^\sigma(\mathbf{y}).$$

Por lo tanto \mathbf{x}^σ es lineal y $\mathbf{x}^\sigma \in \mathbb{R}^{3L}$. Sin embargo, la correlación no es simétrica, pues

$$\mathbf{x}^\sigma(\mathbf{y}) = 2x_1 y_1 - 3x_2 y_3 + 5x_3 y_2$$

mientras que

$$\mathbf{y}^\sigma(\mathbf{x}) = 2y_1 x_1 - 3y_2 x_3 + 5y_3 x_2.$$

Por lo que, en general

$$\mathbf{x}^\sigma(\mathbf{y}) \neq \mathbf{y}^\sigma(\mathbf{x})$$

Proposición 3.5. Cualquier correlación simétrica lineal σ induce una forma simétrica bilineal en la siguiente manera

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^\sigma(\mathbf{a}).$$

Recíprocamente, cualquier producto escalar (\mathbf{a}, \mathbf{b}) induce una única correlación simétrica, esto es el mapeo $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}^\sigma$, donde el funcional \mathbf{a}^σ es definido por

$$\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}.$$

Prueba. Suponga que σ es una correlación simétrica lineal, y sea $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}$. Entonces σ define una forma simétrica bilineal de acuerdo a

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}).$$

es suficiente demostrar que esta forma es simétrica y bilineal, considere que

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^\sigma(\mathbf{a}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}),$$

la forma es simétrica. Sea $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{X}$; entonces²

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1 + \mu \mathbf{b}_2) = \mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}_1 + \mu \mathbf{b}_2) = \mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}_1) + \mathbf{a}^\sigma(\mu \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + \mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2)$$

la forma es lineal en su segunda variable.

²Puesto que la forma es simétrica, para probar su bilinealidad es suficiente probar que la forma es lineal en uno de sus dos argumentos.

Suponga que (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es una forma simétrica bilineal en \mathbb{X} , defina la correlación $\sigma : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^L$ como $\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^\sigma$ donde \mathbf{a}^σ es definida como

$$\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Ya que la forma es simétrica bilineal, entonces

$$\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{b}^\sigma(\mathbf{a}),$$

y la correlación es simétrica. Puesto que la forma es bilineal, entonces

$$\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + \mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2) = \mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}_1) + \mu[\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}_2)].$$

muestra que la correlación es lineal.

De esa manera el mapeo \mathbf{a}^σ es un funcional lineal. Queda demostrar que σ es lineal. Considere que

$$(\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2)^\sigma(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = \mathbf{a}_1^\sigma(\mathbf{b}) + \mu\mathbf{a}_2^\sigma(\mathbf{b}).$$

Este último resultado completa la prueba. ■

Un espacio lineal real \mathbb{X} con una correlación σ es llamado espacio vectorial real correlacionado.

Puesto que, por el teorema anterior, cualquier espacio real ortogonal tiene una correlación simétrica inducida, cualquier espacio real ortogonal puede considerarse como un espacio vectorial real correlacionado, donde la correlación es, además, lineal y simétrica. El resultado opuesto también es cierto.

El siguiente resultado requiere que el espacio vectorial involucrado sea finito dimensional. Esta es la clase de espacios vectoriales que es importante en el estudio del Álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$. Sin embargo, algunos de los resultados son también válidos para espacios vectoriales infinito dimensionales.

Ejemplo 3.7 Correlaciones en \mathbb{R}^3 y en $se(3)$. Considere \mathbb{R}^3 como espacio ortogonal bajo el producto escalar usual

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Determine la correlación $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3L}$ asociada al producto escalar

$$\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^\sigma \quad \mathbf{a}^\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{b}) = a_1(b)_1 + a_2(b)_2 + a_3(b)_3$$

Considere $se(3)$ como un espacio ortogonal bajo la forma de Killing

$$Ki(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = Ki\left(\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \mathbf{v}_{O_2} \end{bmatrix}\right) = \omega_1 \cdot \omega_2$$

Determine la correlación $\sigma_{Ki} : se(3) \rightarrow se(3)^L$ asociada a la forma de Killing,

$$\sigma_{Ki}(\mathbf{V}_1) = \mathbf{V}_1^{\sigma_{Ki}} \quad \mathbf{V}_1^{\sigma_{Ki}} : se(3) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{V}_1^{\sigma_{Ki}}(\mathbf{V}_2) = \omega_{1x}(\omega_{2x}) + \omega_{1y}(\omega_{2y}) + \omega_{1z}(\omega_{2z})$$

Definición 3.8. Sea \mathbb{X} un espacio ortogonal real finito dimensional con correlación inducida σ . Puesto que $\sigma : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^L$, y $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{X}^L$, entonces σ es inyectiva si, y solo si, σ es biyectiva. Si σ es biyectiva, entonces el espacio ortogonal, su forma simétrica bilineal, su forma cuadrática y su correlación se dice que son *no degenerados* o *no singulares*. Si, por el otro lado, σ es no biyectiva, entonces σ es no inyectiva, y $\ker \sigma \neq 0$. Entonces \mathbb{X} , la correlación σ y la forma simétrica bilineal inducida se dice que son *degenerados*, y el kernel o núcleo de σ es también llamado el kernel o núcleo³ de \mathbb{X} .

Proposición 3.6. El núcleo de \mathbb{X} es un subespacio vectorial, y contiene todos y cada uno de los elementos \mathbb{X} los cuales son ortogonales a \mathbb{X} mismo.

Prueba. Primero, es necesario caracterizar explícitamente los elementos del núcleo de \mathbb{X} . Un $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$ pertenece a el núcleo de σ si, y solo si, $\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^\sigma$ es el funcional cero, es decir $\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$. Considere ahora $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ker \mathbb{X}$; entonces

$$\sigma(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \sigma(\mathbf{a}) + \sigma(\mathbf{b}) = \mathbf{a}^\sigma + \mathbf{b}^\sigma = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de aquí que $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \ker \mathbb{X}$. Similarmente, si $\mu \in R$, entonces

$$\sigma(\mu \mathbf{a}) = \mu \sigma(\mathbf{a}) = \mu \mathbf{a}^\sigma = \mu \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

de aquí que $\mu \mathbf{a} \in \ker \mathbb{X}$, y $\ker \mathbb{X}$ es un subespacio de \mathbb{X} . Después, sea $\mathbf{a} \in \ker \mathbb{X}$; entonces $\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^\sigma = \mathbf{0}$, por lo tanto

$$\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X};$$

de aquí que \mathbf{a} es ortogonal a todo \mathbb{X} . Finalmente, suponga que $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$ satisface que $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}$; entonces

$$\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X},$$

de aquí que \mathbf{a}^σ es el funcional cero, y $\mathbf{a} \in \ker \mathbb{X}$. ■

Ejemplo 3.8 Forma de Killing. Pruebe que la forma de Killing en el espacio ortogonal $se(3)$ es degenerada; es decir que la correlación

$$\sigma_{Ki} : se(3) \rightarrow se(3)^L$$

asociada a la forma de Killing no es biyectiva y encuentre el kernel o núcleo de $se(3)$ como espacio ortogonal bajo la forma de Killing.

Puesto que $\dim se(3) = \dim se(3)^L$ para probar que $\sigma_{Ki} : se(3) \rightarrow se(3)^L$ no es biyectiva basta probar que σ_{Ki} no es inyectiva y encontrar el espacio nulo o kernel de σ_{Ki}

$$\mathbf{V}_1 \in \ker(\sigma_{Ki}) \iff \mathbf{V}_1^{\sigma_{Ki}} \text{ es el funcional cero}$$

es decir

$$\mathbf{V}_1^{\sigma_{Ki}}(\mathbf{V}_2) = 0 \quad \forall \mathbf{V}_2 \in se(3)$$

Ahora bien

$$\mathbf{V}_1^{\sigma_{Ki}}(\mathbf{V}_2) = \omega_{1x}(\omega_{2x}) + \omega_{1y}(\omega_{2y}) + \omega_{1z}(\omega_{2z}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3)$$

³El núcleo es también llamado espacio nulo o radical.

si y solo si

$$\omega_{1x} = \omega_{1y} = \omega_{1z} = 0$$

Por lo tanto, el kernel o núcleo de σ_{Ki} está dado por

$$\sigma_{Ki} = \{ \mathbf{V}_1 \in se(3) \mid \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0} \} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \mid \mathbf{v}_{O_1} \in \mathbb{R}^3 \right\} \neq \{ \mathbf{0} \}$$

Por lo tanto: La correlación σ_{Ki} , el espacio vectorial $se(3)$ correlacionado bajo σ_{Ki} , el espacio ortogonal $se(3)$ junto con la forma de Killing son degenerados.

Otra manera de probar este resultado es la siguiente, considere la base de $se(3)$ dada por

$$\begin{aligned} B_{se(3)} &= \{ \mathbf{V}_{11}, \mathbf{V}_{12}, \mathbf{V}_{13}, \mathbf{V}_{14}, \mathbf{V}_{15}, \mathbf{V}_{16} \} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \omega_{1x} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_{1y} \mathbf{j} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_{1z} \mathbf{k} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ v_{O_1x} \mathbf{i} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ v_{O_1y} \mathbf{j} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ v_{O_1z} \mathbf{k} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Las correlaciones asociadas a los elementos de la base, están dadas por

$$\mathbf{V}_{11}^{\sigma_{Ki}}(\mathbf{V}_2) = \omega_{1x}(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3) \iff \omega_{1x} = 0$$

$$\mathbf{V}_{12}^{\sigma_{Ki}}(\mathbf{V}_2) = 0(\omega_{2x}) + \omega_{1y}(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3) \iff \omega_{1y} = 0$$

$$\mathbf{V}_{13}^{\sigma_{Ki}}(\mathbf{V}_2) = 0(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + \omega_{1z}(\omega_{2z}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3) \iff \omega_{1z} = 0$$

$$\mathbf{V}_{14}^{\sigma_{Ki}}(\mathbf{V}_2) = 0(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3)$$

$$\mathbf{V}_{15}^{\sigma_{Ki}}(\mathbf{V}_2) = 0(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3)$$

$$\mathbf{V}_{16}^{\sigma_{Ki}}(\mathbf{V}_2) = 0(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3)$$

Por lo tanto,

$$ker(\sigma_{Ki}) = \{ \mathbf{V}_1 \in se(3) \mid \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0} \} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \mid \mathbf{v}_{O_1} \in \mathbb{R}^3 \right\} \neq \{ \mathbf{0} \}$$

Ejemplo 3.9 Subálgebra $so(3)$. Considere $so(3) < se(3)$ por lo tanto $so(3)$ junto con la forma de Killing constituye también un espacio ortogonal. Determine si $so(3)$ junto con la forma de Killing es o no degenerado.

$$Ki : se(3) \times se(3) \longrightarrow \mathbb{R} \quad Ki \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{v}_{O_2} \end{bmatrix} \right) = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2$$

La restricción de la forma de Killing a $so(3)$ está dada por

$$Ki : so(3) \times so(3) \longrightarrow \mathbb{R} \quad Ki \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2$$

$$\sigma_{Ki}(\mathbf{V}_1) = \mathbf{V}_1^{\sigma_{Ki}} \quad \mathbf{V}_1^{\sigma_{Ki}} : so(3) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Considere la siguiente base de $so(3)$

$$B_{so(3)} = \left\{ \begin{bmatrix} \omega_{1x} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_{1y} \mathbf{j} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_{1z} \mathbf{k} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} = \{\mathbf{V}_{11}, \mathbf{V}_{12}, \mathbf{V}_{13}\}$$

Las correlaciones asociadas a los elementos de las bases están dadas por

$$\mathbf{V}_{11}^{\sigma_{K_i}}(\mathbf{V}_2) = \omega_{1x}(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in so(3) \iff \omega_{1x} = 0$$

$$\mathbf{V}_{12}^{\sigma_{K_i}}(\mathbf{V}_2) = 0(\omega_{2x}) + \omega_{1y}(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in so(3) \iff \omega_{1y} = 0$$

$$\mathbf{V}_{13}^{\sigma_{K_i}}(\mathbf{V}_2) = 0(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + \omega_{1z}(\omega_{2z}) \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in so(3) \iff \omega_{1z} = 0$$

$$\ker(\sigma_{K_i, so(3)}) = \left\{ \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \middle| \omega_{1x} = \omega_{1y} = \omega_{1z} = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} = \{\mathbf{0}\}$$

σ_{K_i} es inyectiva y por lo tanto biyectiva y $so(3)$ junto con la forma de Killing constituye un espacio vectorial ortogonal no-degenerado.

Corolario 3.2. Un espacio ortogonal positivo definido (negativo definido) es no degenerado.

Prueba. Sea \mathbb{X} un espacio ortogonal positivo definido; entonces para todo no cero $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$ de aquí que $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \neq 0$. Por lo tanto $\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, y \mathbf{a}^σ no es el funcional cero. Así $\mathbf{a} \notin \ker \mathbb{X}$, y σ es inyectivo y biyectivo. La prueba para el espacio negativo definido sigue el mismo argumento. ■

Proposición 3.7. Sea A un conjunto finito de elementos mutuamente ortogonales e invertibles de un espacio ortogonal real \mathbb{X} . Entonces el subespacio vectorial generado por A , también llamado como su espacio lineal, es un subespacio ortogonal no degenerado de \mathbb{X} . Aquí, el subespacio vectorial generado por A será denotada por $R[A]$.

Prueba. Sea $\mathbf{x} \in R[A]$ arbitrario pero diferente de cero; entonces $\mathbf{x} = \sum \mu_i \mathbf{a}_i$, donde $\mathbf{a}_i \in A$, y al menos un μ_i es diferente de cero. Puesto que los \mathbf{a}_i 's son invertibles, es posible definir

$$\mathbf{y} = \sum \mu_i \mathbf{a}_i^{-1}$$

Considere entonces

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum \mu_i \mathbf{a}_i, \sum \mu_i \mathbf{a}_i^{-1} \right) = \left(\sum \mu_i \mathbf{a}_i, \sum \mu_i (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)^{-1} \mathbf{a}_i \right)$$

Puesto que los \mathbf{a}_i 's son ortogonales $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0$ para $i \neq j$. Entonces

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum \mu_i^2 (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)^{-1} (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) = \sum \mu_i^2 \neq 0.$$

Así $\mathbf{x} \notin \ker R[A]$ y $R[A]$ es no degenerado, como consecuencia $\ker R[A] = \{\mathbf{0}\}$ ■

Corolario 3.3. Para cualesquiera valores finitos p, q el espacio ortogonal $\mathbb{R}^{p,q}$ es no degenerado.

Prueba. Considere la base trivial $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_{p+q}\}$; entonces

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = -1 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, p$$

y

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = +1 \quad \text{para todo } i = p+1, \dots, p+q$$

de aquí que los \mathbf{e}_i 's son invertibles y las condiciones del teorema anterior aplican. ■

Proposición 3.8. Sea \mathbb{X} un espacio ortogonal real finito dimensional, y sea \mathbb{X}' un complemento lineal en \mathbb{X} de $\ker \mathbb{X}$. Entonces \mathbb{X}' es un subespacio no degenerado de \mathbb{X} .

Prueba. Suponga por contradicción, que existe un $\mathbf{x} \in \mathbb{X}'$ diferente de cero tal que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{X}'$$

Ya que, por definición de $\ker \mathbb{X}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$ para todo $\mathbf{z} \in \ker \mathbb{X}$, y $\mathbb{X} = \ker \mathbb{X} \oplus \mathbb{X}'$, esta suposición implica que $\mathbb{X}' \cap \ker \mathbb{X} = \{\mathbf{0}\}$ entonces $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{X}$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 + 0 = 0$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{X}'$ y $\mathbf{z} \in \ker \mathbb{X}$ por lo tanto $\mathbf{x} \in \mathbb{X}'$ y $\mathbf{x} \in \ker \mathbb{X} \cap \mathbb{X}'$. Este resultado contradice la suposición que $\mathbb{X} = \ker \mathbb{X} \oplus \mathbb{X}'$ ■

Ejemplo 3.10. Considere $se(3)$ como un espacio ortogonal respecto a la forma de Killing

$$Ki(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = Ki\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{v}_{O_2} \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2$$

Ya se mostró que este espacio ortogonal es degenerado que su núcleo o kernel está dado por

$$\ker(se(3), Ki) = \left\{ \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \in se(3) \mid \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0} \right\} = \left\{ \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \mid \mathbf{v}_{O_1} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

pues para un $\mathbf{V}_2 \in se(3)$ arbitrario

$$Ki(\mathbf{V}_1; \mathbf{V}_2) = Ki\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{v}_{O_2} \end{bmatrix}\right) = \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = 0$$

Un complemento lineal de $\ker(se(3), Ki)$ está dado por

$$(se(3), Ki)^* = \left\{ \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \mid \mathbf{v}_{O_1} = \mathbf{0} \right\} = \left\{ \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mid \boldsymbol{\omega}_1 \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Note primeramente que

$$\ker(se(3), Ki) \cap (se(3), Ki)^* = \{\mathbf{0}\}$$

Sea $\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \in \ker(se(3), Ki) \cap (se(3), Ki)^*$ entonces

1. $\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \in \ker(se(3), Ki) \longrightarrow \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$
2. $\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix} \in (se(3), Ki)^* \longrightarrow \mathbf{v}_{O_1} = \mathbf{0}$

Por lo tanto, $\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$. Entonces la suma $\ker(se(3), Ki) \oplus (se(3), Ki)^*$ es directa además,

$$\dim \ker(se(3), Ki) \oplus \dim (se(3), Ki)^* = \dim se(3)$$

Por lo tanto, se ha probado que

$$\ker(se(3), Ki) \oplus (se(3), Ki)^* = se(3)$$

y además $(se(3), Ki)^*$ es un complemento lineal de $se(3)$ respecto de $\ker(se(3), Ki)$. Resta probar que $(se(3), Ki)^*$ es un subespacio ortogonal no degenerado respecto a la forma de Killing.

La prueba es muy sencilla pues $(se(3), Ki)^*$ bajo la forma de Killing es un espacio ortogonal positivo definido, sea

$$\mathbf{V}_1 \in (se(3), Ki)^* \longrightarrow \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad Ki(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_1) = Ki\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 = |\boldsymbol{\omega}_1|^2 \geq 0$$

y además $Ki(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_1) = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$. Note además que $(se(3), Ki)^* = so(3)$.

3.3. Aniquiladores ortogonales.

En esta sección se presenta el concepto de aniquiladores ortogonales de subespacios de un espacio ortogonal. Este concepto es particularmente importante para el estudio de restricciones en cadenas cinemáticas y ensamblajes.

Definición 3.9. Sea \mathbb{W} un subespacio vectorial \mathbb{X} , el aniquilador dual de \mathbb{W} , denotado \mathbb{W}^\circledast , es el subespacio del subespacio dual \mathbb{X}^L que aniquila \mathbb{W} ; es decir

$$\mathbb{W}^\circledast = \left\{ \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{X}^L \mid \boldsymbol{\beta}(\mathbf{w}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{w} \in \mathbb{W} \right\}$$

Proposición 3.9. Sea \mathbb{W} un subespacio de un espacio vectorial \mathbb{X} ; entonces

$$\dim \mathbb{W}^\circledast = \dim \mathbb{X} - \dim \mathbb{W}.$$

Prueba. En una primera parte se probará que \mathbb{W}^\circledast es un subespacio de \mathbb{X}^L . Es decir, se probará que \mathbb{W}^\circledast está cerrado con respecto a la adición y multiplicación por escalar. Sean $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{W}^\circledast$. Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ arbitrario

$$\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{w}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{w} \in \mathbb{W} \quad \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{w}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{w} \in \mathbb{W}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2)(\mathbf{w}) = \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{w}) + \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{w}) = 0 \longrightarrow \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{W}^\circledast$$

Además, el aniquilador dual está cerrado respecto a la multiplicación por escalar. Sea $\boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbb{W}^\circledast$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ arbitrario

$$(\lambda \boldsymbol{\beta}_1)(\mathbf{w}) = \lambda [\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{w})] = \lambda(0) = 0 \longrightarrow \lambda \boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbb{W}^\circledast$$

Los dos resultados implican que $\mathbb{W}^\circledast < \mathbb{X}^L$

3.3. ANIQUILADORES ORTOGONALES.

En una segunda parte se mostrará que $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{X}^L$. Se tiene que

$$\beta \in \mathbb{X}^L \quad \beta : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, del álgebra lineal.

$$\dim \mathbb{X}^L = (\dim \mathbb{X})(\dim \mathbb{R}) = \dim \mathbb{X}(1) = \dim \mathbb{X}.$$

Finalmente suponga que $\dim(\mathbb{W}) = n$, $\dim(\mathbb{X}) = m > n$, pues $\mathbb{W} < \mathbb{X}$ y que $B_{\mathbb{W}} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ es una base de \mathbb{W} , un elemento arbitrario de \mathbb{W} puede escribirse como $\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{w}_n$ donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ son arbitrarios. Sea $\beta \in \mathbb{W}^{\circledast}$ se tiene que

$$\mathbf{0} = \beta(\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{w}_n) = \lambda_1 \beta(\mathbf{w}_1) + \lambda_2 \beta(\mathbf{w}_2) + \dots + \lambda_n \beta(\mathbf{w}_n)$$

puesto que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son arbitrarios, la anterior condición se reduce a

$$\beta(\mathbf{w}_1) = \beta(\mathbf{w}_2) = \dots = \beta(\mathbf{w}_n) = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Recordando que $\dim(\mathbb{X}) = m \geq n$, cada una de las ecuaciones representa una ecuación lineal en m variables y el conjunto de las ecuaciones representa un sistema de n ecuaciones lineales, linealmente independientes en m incógnitas. Por lo tanto, el conjunto solución tiene dimensión $m - n$. Juntando estos resultados, se tiene que

$$\dim \mathbb{W}^{\circledast} = m - n = \dim \mathbb{X}^L - \dim \mathbb{W} = \dim \mathbb{X} - \dim \mathbb{W}$$

■

Definición 3.10. Sea \mathbb{W} un subespacio ortogonal de un espacio ortogonal \mathbb{X} , y sea σ la correlación lineal inducida, entonces el *aniquilador ortogonal* de \mathbb{W} , denotado por \mathbb{W}^{\perp} , está definido como

$$\mathbb{W}^{\perp} = \sigma^{-1}(\mathbb{W}^{\circledast}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \mid \sigma(\mathbf{x}) \in \mathbb{W}^{\circledast}\}$$

Observación. Puesto que σ es un mapeo lineal entonces puede probarse que \mathbb{W}^{\perp} es también un subespacio. Además, en general, $\dim \mathbb{W}^{\perp} \geq \dim \mathbb{W}^{\circledast} = \dim \mathbb{X} - \dim \mathbb{W}$, y, en particular, $\dim \mathbb{W}^{\perp} = \dim \mathbb{W}^{\circledast} = \dim \mathbb{X} - \dim \mathbb{W}$ cuando σ es una inyección y por lo tanto una biyección.

Prueba. Puesto que σ es un mapeo lineal \mathbb{W}^{\perp} es también un subespacio. Se necesita probar que $\mathbb{W}^{\perp} < \mathbb{X}$.

Sean

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{W}^{\perp} \rightarrow \sigma(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{W}^{\circledast} \quad \sigma(\mathbf{x}_2) \in \mathbb{W}^{\circledast}$$

y puesto que $\mathbb{W}^{\circledast} < \mathbb{X}^L$, entonces

$$\sigma(\mathbf{x}_1) + \sigma(\mathbf{x}_2) \in \mathbb{W}^{\circledast} \quad (3.6)$$

Puesto que σ es lineal

$$\sigma(\mathbf{x}_1) + \sigma(\mathbf{x}_2) = \sigma(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$

Lo cual implica que

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathbb{W}^{\perp} \quad (3.7)$$

y el conjunto está cerrado respecto a la adición.

3.3. ANIQUILADORES ORTOGONALES.

De manera semejante, sea

$$\mathbf{x}_1 \in \mathbb{W}^\perp \rightarrow \sigma(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{W}^\circledast \quad (3.8)$$

y puesto que $\mathbb{W}^\circledast < \mathbb{X}^L$, entonces

$$\lambda\sigma(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{W}^\circledast \quad (3.9)$$

Puesto que σ es lineal

$$\lambda\sigma(\mathbf{x}_1) = \sigma(\lambda\mathbf{x}_1)$$

por lo tanto

$$\lambda\mathbf{x}_1 \in \mathbb{W}^\perp \quad (3.10)$$

y el conjunto está cerrado respecto a la multiplicación por escalar, y como consecuencia

$$\mathbb{W}^\perp < \mathbb{X}.$$

■

Proposición 3.10 Caracterización de un Aniquilador Ortogonal. El aniquilador ortogonal de \mathbb{W} contiene todos y cada uno de los elementos de \mathbb{X} que son ortogonales al subespacio completo de \mathbb{W} .

Prueba. Primero suponga que $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$ es ortogonal a \mathbb{W} , entonces $\sigma(\mathbf{a}) \in \mathbb{W}^\circledast$ y $\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^\sigma$ tiene la propiedad de que

$$\mathbf{a}^\sigma(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \mathbb{W} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{a} \in \mathbb{W}^\perp$$

Suponga que $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$ no es ortogonal a \mathbb{W} , entonces existe al menos un $\mathbf{x} \in \mathbb{W}$ tal que

$$0 \neq (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{a}^\sigma(\mathbf{x})$$

por lo tanto,

$$\mathbf{a}^\sigma \notin \mathbb{W}^\circledast \quad \text{y} \quad \mathbf{a} \notin \mathbb{W}^\perp$$

■

Definición 3.11. Sea \mathbb{X} un espacio ortogonal real y \mathbb{W} un subespacio de \mathbb{X} con complemento lineal \mathbb{Y} ; es decir $\mathbb{X} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{Y}$; si \mathbb{Y} está contenido en \mathbb{W}^\perp entonces se dice que \mathbb{Y} es un complemento ortogonal de \mathbb{W} en \mathbb{X} . Una descomposición de la suma directa $\mathbb{X} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{Y}$ se dice que es una descomposición ortogonal.

Ejemplo 3.11. Considere \mathbb{R}^4 con la forma simétrica bilineal

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Considere,

$$\mathbb{W} = \{(x_1, 0, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^4 \quad \text{y} \quad \mathbb{Y} = \{(0, y_2, y_3, y_4) \mid y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^4$$

3.3. ANIQUILADORES ORTOGONALES.

y además, como espacios vectoriales

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{W} + \mathbb{Y} \quad \text{y} \quad \mathbb{W} \cap \mathbb{Y} = \{\mathbf{0}\} \quad \therefore \quad \mathbb{R}^4 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{Y}$$

Basta probar que $\mathbb{Y} \perp \mathbb{W}$. Considere $B_{\mathbb{R}^4} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 , entonces

$$\mathbb{W} = [\mathbf{e}_1] \quad \text{y} \quad \mathbb{Y} = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4]$$

además

$$\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \quad \text{está dado por} \quad \mathbf{y} = \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 + \lambda_4 \mathbf{e}_4$$

y

$$\mathbf{w} \in \mathbb{W} \quad \text{está dado por} \quad \mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{e}_1$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ son arbitrarios,

$$(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = (\lambda_1 \mathbf{e}_1, \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 + \lambda_4 \mathbf{e}_4) = 0\lambda_1(0) + 1(0)\lambda_2 + 1(0)\lambda_3 + 1(0)\lambda_4 = 0$$

Ahora considere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, es decir, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$,

$$(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = ((\lambda_1, 0, 0, 0), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0\lambda_1(x_1) + 1(0)x_2 + 1(0)x_3 + 1(0)x_4 = 0$$

$\forall \lambda_1, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4$.

Por lo tanto $\mathbb{W}^\perp = \mathbb{R}^4$ y $\mathbb{Y} \perp \mathbb{W} = \mathbb{W}^\perp$ por lo tanto

$$\mathbb{W} \oplus \mathbb{Y} = \mathbb{R}^4$$

y \mathbb{Y} es el complemento ortogonal de \mathbb{W} en \mathbb{R}^4 .

Proposición 3.11. Sea \mathbb{W} un subespacio lineal de un espacio ortogonal real finito dimensional \mathbb{X} . Entonces $\ker \mathbb{W} = \mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp$.

Prueba. Por definición.

$$\ker \mathbb{W} = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{W} \quad \text{y} \quad (\mathbf{w}, \mathbf{w}') = 0 \quad \forall \mathbf{w}' \in \mathbb{W}\};$$

entonces

$$\ker \mathbb{W} = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{W}\} \cap \{\mathbf{w} \mid (\mathbf{w}, \mathbf{w}') = 0 \quad \forall \mathbf{w}' \in \mathbb{W}\};$$

Así

$$\ker \mathbb{W} = \mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp. \quad \blacksquare$$

Proposición 3.12. Sea \mathbb{W} un subespacio lineal de un espacio ortogonal real finito dimensional \mathbb{X} . Entonces $\mathbb{X} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$ si, y solo si, \mathbb{W} es no degenerado; en este caso \mathbb{W}^\perp es el único complemento ortogonal de \mathbb{W} en \mathbb{X} .

Prueba. Suponga que \mathbb{W} es degenerado, entonces

$$\{\mathbf{0}\} \neq \ker W = \mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp$$

entonces la suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp$ no es directa. $\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp$ no satisface que $\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp = \mathbb{X}$. Suponga que \mathbb{W} es no degenerado, entonces

$$\{\mathbf{0}\} = \ker \mathbb{W} = \mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp$$

y la suma $\mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$ es directa. Falta probar que

$$\mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp = \mathbb{X}$$

Por un lado

$$\dim \mathbb{W}^\circledast = \dim \mathbb{X} - \dim \mathbb{W}$$

y

$$\dim \mathbb{W}^\perp = \dim [\sigma^{-1}(\mathbb{W}^\circledast)] \geq \dim \mathbb{W}^\circledast = \dim \mathbb{X} - \dim \mathbb{W}$$

o bien

$$\dim \mathbb{W}^\perp \geq \dim \mathbb{X} - \dim \mathbb{W}.$$

Sin embargo

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp) = \dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{W}^\perp - \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp) = \dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{W}^\perp \geq \dim \mathbb{X}$$

Pero como $\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp < \mathbb{X}$ se tiene que

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp) \leq \dim \mathbb{X}$$

Por lo tanto,

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp) = \dim \mathbb{X}$$

■

Corolario 3.4. Sea \mathbf{a} un elemento de un espacio ortogonal real \mathbb{X} . Entonces $\mathbb{X} = (R[\mathbf{a}]) \oplus (R[\mathbf{a}])^\perp$ si y sólo si, \mathbf{a} es invertible.

Prueba. Si \mathbf{a} es invertible

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \neq 0$$

Considere $\mu \mathbf{a} \in [\mathbf{a}]$ arbitrario $\mu \neq 0$ donde $\mu \in \mathbb{R}$

$$(\mu \mathbf{a}, \mu \mathbf{a}) = \mu^2 (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \neq 0$$

de aquí que

$$\ker[\mathbf{a}] = [\mathbf{a}] \oplus [\mathbf{a}]^\perp = (R[\mathbf{a}]) \oplus (R[\mathbf{a}])^\perp = \{\mathbf{0}\}$$

Por lo tanto, \mathbf{a} es no-degenerado y como conclusión

$$\mathbb{X} = [\mathbf{a}] \oplus [\mathbf{a}]^\perp = (R[\mathbf{a}]) \oplus (R[\mathbf{a}])^\perp$$

Si \mathbf{a} no es invertible $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$ arbitrario

$$(\mu \mathbf{a}, \mu \mathbf{a}) = \mu^2 (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \implies [\mathbf{a}] < [\mathbf{a}]^\perp$$

$$\ker[\mathbf{a}] = [\mathbf{a}] \cap [\mathbf{a}]^\perp = [\mathbf{a}] \neq \{\mathbf{0}\}$$

Por lo tanto $[\mathbf{a}] = (R[\mathbf{a}])$ es degenerado.

■

Proposición 3.13. Sea \mathbb{W} un subespacio de un espacio ortogonal real finito dimensional no degenerado \mathbb{X} . Entonces $(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}$.

Prueba. Sean $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ y $\mathbf{w}' \in \mathbb{W}^\perp$ arbitrarios, entonces

$$(\mathbf{w}, \mathbf{w}') = 0$$

Así que $\mathbf{w} \in (\mathbb{W}^\perp)^\perp$, y \mathbb{W} está contenido en $(\mathbb{W}^\perp)^\perp$. Además, puesto que \mathbb{X} es no degenerado, entonces

$$\dim(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \dim\mathbb{X} - \dim\mathbb{W}^\perp = \dim\mathbb{X} - (\dim\mathbb{X} - \dim\mathbb{W}) = \dim\mathbb{W}$$

De esa manera $(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}$ ■

Corolario 3.5. Sea \mathbb{W} un subespacio ortogonal no degenerado de un espacio ortogonal no degenerado \mathbb{X} , entonces \mathbb{W}^\perp es también un subespacio ortogonal no-degenerado de \mathbb{X} .

Prueba. Dado que \mathbb{W} es no-degenerado, entonces $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Por la proposición 3.13 se sabe que $\mathbb{W} = (\mathbb{W}^\perp)^\perp$, de esta forma

$$\mathbb{W}^\perp \cap (\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{W} = \mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$$

y \mathbb{W}^\perp es no-degenerado. ■

3.4. Bases de espacios ortogonales.

En esta sección se presenta el concepto de bases de un espacio ortogonal. Este concepto conduce finalmente a la clasificación de espacios ortogonales.

Teorema 3.1 Teorema de la base para espacios ortogonales reales. Un espacio ortogonal real no degenerado finito dimensional \mathbb{X} , con $\dim\mathbb{X} = n > 0$, es expresable como la suma directa de n líneas ortogonales mutuamente no degenerados, estas líneas se conocen como subespacios unidimensionales de \mathbb{X} .

Prueba. Por inducción, si $\dim\mathbb{X} = n = 1$, el espacio consiste de sólo una línea, y por suposición la línea es no degenerada. Suponga que el teorema es verdadero para $\dim\mathbb{X} = n$ y considere el caso cuando la dimensión es $\dim\mathbb{X} = n + 1$.

Puesto que el espacio es no degenerado, por la proposición 3.13, existe un elemento invertible $\mathbf{a} \in \mathbb{X}$ que define una línea no degenerada $R[\mathbf{a}]$, tal que

$$\mathbb{X} = (R[\mathbf{a}]) \oplus (R[\mathbf{a}])^\perp$$

Por el corolario 3.5 $(R[\mathbf{a}])^\perp$ es también no degenerado y de dimensión n , de esa manera la prueba se finaliza. ■

Definición 3.12. Un subconjunto linealmente independiente S de un espacio ortogonal real \mathbb{X} se dice que es un *Subconjunto Ortonormal* de \mathbb{X} si dos elementos distintos de S son mutuamente ortogonales, y la forma cuadrática de cualquier elemento de S es igual a $-1, 0$, o 1 . Si S también genera \mathbb{X} , entonces S se dice que es una *Base Ortonormal* de \mathbb{X} .

Proposición 3.14 Teorema de la base. Cualquier espacio ortonormal finito dimensional \mathbb{X} tiene una base ortonormal.

Prueba. Sea \mathbb{X}' un complemento lineal de $\ker\mathbb{X}$ respecto de \mathbb{X} , es decir,

$$\mathbb{X} = \ker\mathbb{X} \oplus \mathbb{X}'$$

Es necesario probar que \mathbb{X}' es un subespacio no-degenerado de \mathbb{X} . Suponga, por contradicción, que existe $\mathbf{x}' \in \mathbb{X}'$ tal que $\mathbf{x}' \neq 0$, además $\mathbf{x}' \in \ker\mathbb{X}'$

$$(\mathbf{x}', \mathbf{x}'_1) = 0 \quad \forall \mathbf{x}'_1 \in \mathbb{X}'$$

Entonces, por la definición de kernel de \mathbb{X} , ($\ker\mathbb{X}$).

$$(\mathbf{x}', \mathbf{x}_k) = 0 \quad \forall \mathbf{x}_k \in \ker\mathbb{X}$$

Por lo tanto

$$(\mathbf{x}', \mathbf{x}_k + \mathbf{x}'_1) = (\mathbf{x}', \mathbf{x}_k) + (\mathbf{x}', \mathbf{x}'_1) = 0 + 0 = 0$$

Esto significa que

$$\mathbf{x}' \in \ker\mathbb{X}$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{x}' \in \ker\mathbb{X} \cap \mathbb{X}'$$

una contradicción pues $\mathbf{x}' \in \ker\mathbb{X} \oplus \mathbb{X}'$. Además $B_{\mathbb{X}} = B_{\ker\mathbb{X}} \cup B_{\mathbb{X}'}$. ■

Corolario 3.6. Cualquier espacio ortogonal finito dimensional no degenerado \mathbb{X} es isomórfico a $R^{p,q}$ para algún valor finito de p , y q .

Corolario 3.7. Cualquier espacio ortogonal finito dimensional \mathbb{X} es isomórfico a $R^{p,q,r}$, donde la forma simétrica bilineal es

$$(R^{p,q,r}, R^{p,q,r}) \longrightarrow R$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{j=1}^q x_{p+j} y_{p+j} + \sum_{k=1}^r x_{p+q+k} y_{p+q+k}.$$

Además, el espacio ortogonal \mathbb{X} puede descomponerse ortogonalmente como

$$\mathbb{X} = \ker\mathbb{X} \oplus \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$$

donde $\dim(\ker\mathbb{X}) = p$, $\dim\mathbb{W}_1 = q$, y $\dim\mathbb{W}_2 = r$. Además \mathbb{W}_1 es negativo definido, y \mathbb{W}_2 es positivo definido.

3.5. Representación de formas simétricas bilineales.

En esta sección se muestra la representación matricial de las formas simétricas bilineales, la cual permite tratar con formas simétricas bilineales mediante herramientas menos abstractas, tal como son las matrices. En este caso, la matriz representativa de una forma simétrica bilineal.

Proposición 3.15. Considere un espacio ortogonal \mathbb{X} con una forma simétrica real

$$\mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Dada una base $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ de \mathbb{X} , existe una matriz simétrica, \mathbf{S} , única, de enésimo orden, que representa la forma simétrica bilineal con respecto a la base B . Además, dada una matriz simétrica real de enésimo orden, \mathbf{S} , y una base, B , de \mathbb{X} , existe una forma simétrica real única sobre \mathbb{X} .

Prueba. Defina la matriz \mathbf{S} como sigue

$$s_{ij} = (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Entonces S es una matriz real de orden n . Además ya que la forma es simétrica

$$s_{ij} = (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = (\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) = s_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

la matriz es simétrica.

La otra dirección de la prueba es la siguiente:

Suponga que existe una matriz real $\mathbf{S} \in \mathbb{M}^{n \times n}$ que es simétrica, y suponga que \mathbb{X} es un espacio vectorial n -dimensional, tal que $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ es una base de \mathbb{X} , sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}$ tal que $\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ y $\mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ son los vectores coordenados de \mathbf{a} y \mathbf{b} , defina la siguiente función

$$\mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{B} \quad (3.12)$$

falta probar que la función es una forma simétrica bilineal.

1. Simétrica, puesto que el resultado es un escalar y \mathbf{S} es simétrica.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{B} = (\mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{S}^T (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{B}^T \mathbf{S} (\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{b}, \mathbf{a}). \quad (3.13)$$

2. Bilineal, puesto que ya se probó que es simétrica, es suficiente probar que es bilineal en la primera variable. Sea $\mathbf{a}^* \in \mathbb{X}$ tal que $\mathbf{A}^* = [a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*]^T$ es su vector coordenado respecto a la base B y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{a}^*, \mathbf{b}) &= (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{A}^*)^T \mathbf{S} \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{B} + (\lambda \mathbf{A}^*)^T \mathbf{S} \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{B} + \lambda (\mathbf{A}^*)^T \mathbf{S} \mathbf{B} \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \lambda (\mathbf{a}^*, \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

■

La siguiente proposición muestra como la matriz representativa de la forma simétrica bilineal puede utilizarse para encontrar el valor de la forma, para vectores arbitrarios del espacio.

3.5. REPRESENTACIÓN DE FORMAS SIMÉTRICAS BILINEALES.

Proposición 3.16. Sea \mathbb{X} un espacio ortogonal con \mathbf{S} como la matriz representativa de la forma simétrica bilineal con respecto a una base $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$. Sean $\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$, y $\mathbf{C} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$ los vectores coordenados, con respecto a la base B , de dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{X}$. Entonces

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & & & \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{C}$$

Prueba. Puesto que S es la matriz representativa de la forma simétrica bilineal con respecto a la base B , entonces

$$s_{ij} = (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Puesto que

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_n \mathbf{x}_n \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n,$$

entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= (a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_n \mathbf{x}_n, c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n) \\ &= a_1 [c_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) + c_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \dots + c_n (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n)] \\ &\quad + a_2 [c_1 (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) + c_2 (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) + \dots + c_n (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n)] + \dots + \\ &\quad a_n [c_1 (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) + c_2 (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2) + \dots + c_n (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n)] \\ &= a_1 (c_1 s_{11} + c_2 s_{12} + \dots + c_n s_{1n}) + a_2 (c_1 s_{21} + c_2 s_{22} + \dots + c_n s_{2n}) + \dots + \\ &\quad a_n (c_1 s_{n1} + c_2 s_{n2} + \dots + c_n s_{nn}) \end{aligned}$$

y esta expresión puede escribirse como,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{C}.$$

■

Una característica importante del uso de la matriz representativa de la forma simétrica bilineal es que permite trabajar con objetos más concretos que mapeos; es decir matrices y vectores coordenados. Sin embargo, una desventaja es que hay una multitud de matrices representativas, de hecho una para cada posible base del espacio ortogonal. De esa manera una propiedad de la forma simétrica bilineal se convertirá en una propiedad común a todas las posibles representaciones. Recíprocamente, sólo aquellas propiedades que son comunes a todas las posibles representaciones de la matriz son propiedades de la forma.

La siguiente proposición muestra la relación entre las diferentes matrices representativas de la misma forma simétrica bilineal.

Proposición 3.17. Sea \mathbb{X} un espacio ortogonal, y sean $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$, y $B' = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_n\}$ dos bases del espacio. Si \mathbf{S} es la matriz representativa de la forma simétrica bilineal con respecto a la base B , entonces la matriz representativa de la forma simétrica bilineal con respecto a la base B' , denotada por \mathbf{S}' , está dada por

$$\mathbf{S}' = \mathbf{P}\mathbf{S}\mathbf{P}^T$$

donde \mathbf{P} es la matriz de transición entre las bases B y B' .

Prueba. Puesto que P es la matriz de transición de B a B' , entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_1 &= p_{11}\mathbf{x}_1 + p_{12}\mathbf{x}_2 + \dots + p_{1n}\mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}'_2 &= p_{21}\mathbf{x}_1 + p_{22}\mathbf{x}_2 + \dots + p_{2n}\mathbf{x}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{x}'_n &= p_{n1}\mathbf{x}_1 + p_{n2}\mathbf{x}_2 + \dots + p_{nn}\mathbf{x}_n\end{aligned}$$

Un elemento arbitrario s'_{ij} de \mathbf{S}' está dado por

$$\begin{aligned}s'_{ij} &= (\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j) = \left(\sum_{r=1}^n p_{ir}\mathbf{x}_r, \sum_{t=1}^n p_{jt}\mathbf{x}_t \right) = \sum_{r=1}^n p_{ir} \left(\mathbf{x}_r, \sum_{t=1}^n p_{jt}\mathbf{x}_t \right) \\ &= \sum_{r=1}^n p_{ir} \sum_{t=1}^n p_{jt}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_t) = \sum_{r=1}^n p_{ir} \sum_{t=1}^n p_{jt}s_{rt} = \sum_{r=1}^n p_{ir} \left[\sum_{t=1}^n s_{rt}p_{jt} \right]\end{aligned}$$

Nótese que $\sum_{t=1}^n s_{rt}p_{jt}$ es solo el $(r$ -ésimo, j -ésimo) elemento del producto de matrices $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{P}^T$, denotada como m_{rt} . Entonces,

$$s'_{ij} = \sum_{r=1}^n p_{ir}m_{rj}$$

nuevamente, s'_{ij} es el $(i$ -ésimo, j -ésimo) elemento del producto de las matrices \mathbf{P} y \mathbf{M} . De aquí que

$$\mathbf{S}' = \mathbf{P}\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{S}\mathbf{P}^T$$

■

Este resultado proporciona los fundamentos para encontrar las características que son comunes a todas las representaciones de una forma simétrica bilineal, y por lo tanto estas características son propiedades de la forma simétrica bilineal. Un ejemplo importante de esta clase de resultados se desarrolla en la siguiente proposición.

Proposición 3.18. Sean \mathbf{S} y \mathbf{S}' dos matrices representativas de una forma simétrica bilineal, entonces \mathbf{S} es no singular (singular) si, y sólo si, \mathbf{S}' es no singular (singular).

Prueba. Por la proposición 3.37, existe una matriz de transición no singular \mathbf{P} tal que

$$\mathbf{S}' = \mathbf{P}\mathbf{S}\mathbf{P}^T$$

Entonces

$$|\mathbf{S}'| = |\mathbf{P}\mathbf{S}\mathbf{P}^T| = |\mathbf{P}||\mathbf{S}||\mathbf{P}^T|$$

Pero $|\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^T|$, de aquí que

$$|\mathbf{S}'| = |\mathbf{S}||\mathbf{P}|^2$$

Puesto que \mathbf{P} es no singular $|\mathbf{P}| \neq 0$. De aquí que $|\mathbf{S}'| \neq 0$ ($|\mathbf{S}'| = 0$) si, y sólo si, $|\mathbf{S}| \neq 0$ ($|\mathbf{S}| = 0$). Esta proposición muestra que la no singularidad (o la singularidad) de las matrices que representan es realmente una propiedad de la forma simétrica bilineal. Esta propiedad requiere una definición y clasificación de las formas simétricas bilineales y de los espacios ortogonales. ■

Definición 3.13. Si la matriz representativa de una forma simétrica bilineal es no singular, entonces la forma simétrica bilineal y el espacio ortogonal son llamados no degenerados. De lo contrario, son llamados degenerados.

El paso final es reconciliar esta definición de no degeneración, basado en las matrices representativas de la forma, con la definición proporcionada en la sección 3.2; es decir es requerido mostrar que dos definiciones son equivalentes.

Proposición 3.19. La definición de no degeneración dada en esta sección y la mostrada en la sección 3.2 son equivalentes.

Prueba. Acorde con la definición 3.14, una forma simétrica bilineal es degenerada si hay un $\mathbf{w} \in \mathbb{X}$ diferente de cero tal que \mathbf{w}^σ es el mapeo cero; es decir

$$\mathbf{w}^\sigma(\mathbf{y}) \equiv (\mathbf{w}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{X}.$$

Por la proposición 3.36,

$$(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{w}) = \mathbf{Y}^T \mathbf{S} \mathbf{W} = 0 \quad \forall \mathbf{Y} \in R^n \quad (3.15)$$

donde \mathbf{S} es la matriz representativa de la forma simétrica bilineal con respecto a la base B , y \mathbf{W} y \mathbf{Y} son vectores coordenados de \mathbf{w} , y \mathbf{y} con respecto a la base B . Puesto que \mathbf{Y} es arbitrario la condición (3.15) se satisface si, y solo si,

$$\mathbf{S} \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

con $\mathbf{W} \neq \mathbf{0}$, y \mathbf{S} es singular. Recíprocamente, si \mathbf{S} es singular, existe un $\mathbf{W} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{S} \mathbf{W} = \mathbf{0}$, de aquí que

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{S} \mathbf{W} = 0 \quad \forall \mathbf{Y} \in R^n.$$

Si \mathbf{w} es el vector cuyo vector coordenado con respecto a la base B es \mathbf{W} , entonces

$$(\mathbf{y}, \mathbf{w}) = \mathbf{Y}^T \mathbf{S} \mathbf{W} = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{X}$$

y $\mathbf{w} \in \ker \mathbb{X}$. De aquí que, el espacio es degenerado. ■

Estos conceptos y resultados constituyen el fundamento matemático necesario para tratar las restricciones en cadenas cinemáticas y ensamblajes de manera formal. La sección final de este capítulo especializa muchos de los resultados obtenidos en este capítulo a la forma de Klein del álgebra de Lie, $se(3)$, de grupo Euclídeo, $SE(3)$, que es la forma simétrica bilineal que es fundamental en el estudio de libertades y restricciones en cadenas cinemáticas de cuerpos rígidos y flexibles.

3.6. La dualidad inducida por una forma simétrica bilineal no-singular

En esta sección se presentará y probará la dualidad entre subespacios de un espacio vectorial \mathbb{V} y los subespacios del espacio vectorial dual \mathbb{V}^* correspondiente. Esta dualidad es inducida por una forma simétrica bilineal no-degenerada. Esta dualidad permitirá probar que los métodos de libertades y restricciones del método *FACT* son equivalentes y su aplicación es redundante.

Sean $S(\mathbb{V})$ y $S(\mathbb{V}^*)$ los conjuntos de subespacios de un espacio vectorial \mathbb{V} y su espacio dual \mathbb{V}^* , entonces es posible probar la siguiente proposición.

Proposición 3.20. Sea \mathbb{V} un espacio ortogonal con una forma simétrica bilineal no-singular, entonces existe una función biyectiva entre los espacios de \mathbb{V} a los subespacios de \mathbb{V}^* . En otras palabras, existe una función \mathcal{F} bien definida, inyectiva y sobreyectiva, dada por

$$\mathcal{F} : S(\mathbb{V}) \longrightarrow S(\mathbb{V}^*) \quad (3.16)$$

donde, $\mathcal{F}(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^*$ y \mathbb{V}^* contiene todos los aniquiladores duales de todos los elementos de \mathbb{V} . De manera mas detallada, si $\mathbb{V}_1 \in S(\mathbb{V})$, entonces

$$\mathcal{F}(\mathbb{V}_1) = \mathbb{V}_1^* \quad \ni \quad \mathbb{V}_1^* = \{f \in se^*(3) \mid f({}^k\mathbf{V}_O^m) = 0 \quad \forall \quad {}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}_1\} \quad (3.17)$$

Prueba. La función \mathcal{F} está bien definida. Por contradicción suponga que

$$\mathcal{F}(\mathbb{V}) = \mathbb{V}_1^* \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(\mathbb{V}) = \mathbb{V}_2^*. \quad (3.18)$$

Sea $f \in \mathbb{V}_1^*$ entonces

$$f({}^k\mathbf{V}_O^m) = 0 \quad \forall \quad {}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V} \quad (3.19)$$

por lo tanto,

$$f \in \mathbb{V}_2^* \quad \text{y} \quad \mathbb{V}_1^* \subset \mathbb{V}_2^*. \quad (3.20)$$

En sentido opuesto, suponga que $f \in \mathbb{V}_2^*$ entonces

$$f({}^k\mathbf{V}_O^m) = 0 \quad \forall \quad {}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V} \quad (3.21)$$

por lo tanto,

$$f \in \mathbb{V}_1^* \quad \text{y} \quad \mathbb{V}_2^* \subset \mathbb{V}_1^*. \quad (3.22)$$

Estos dos resultados implican que

$$\mathbb{V}_1^* = \mathbb{V}_2^* \quad (3.23)$$

y la función \mathcal{F} está bien definida.

La función \mathcal{F} es sobreyectiva. Sea $\mathbb{V}^\odot < \mathbb{V}^*$ y suponga que $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ una base de \mathbb{V}^\odot y considere

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_1 < \mathbb{V} & \ni & f_1({}^k\mathbf{V}_O^m) = \mathbf{0} & \quad {}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}_1 \\ \mathbb{V}_2 < \mathbb{V} & \ni & f_2({}^k\mathbf{V}_O^m) = \mathbf{0} & \quad {}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}_2 \\ & & \vdots & \\ \mathbb{V}_n < \mathbb{V} & \ni & f_n({}^k\mathbf{V}_O^m) = \mathbf{0} & \quad {}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}_n \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ahora,

$$\mathbb{V}^\# = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{V}_i \quad (3.25)$$

por lo que $\mathbb{V}^\#$, la intersección de un número finito de subespacios, es también subespacio de \mathbb{V} . Sea ${}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}^\#$ arbitrario y $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n) \in \mathbb{V}^\circ$ igualmente arbitrario. Entonces,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n) ({}^k\mathbf{V}_O^m) &= \mathbf{0} \\ \lambda_1 [f_1({}^k\mathbf{V}_O^m)] + \lambda_2 [f_2({}^k\mathbf{V}_O^m)] + \dots + \lambda_n [f_n({}^k\mathbf{V}_O^m)] &= \mathbf{0} \\ \lambda_1(\mathbf{0}) + \lambda_2(\mathbf{0}) + \dots + \lambda_n(\mathbf{0}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.26)$$

así, de este modo,

$$\mathbb{V}^\# < \mathbb{V} \quad \text{tal que} \quad \mathcal{F}(\mathbb{V}^\#) = \mathbb{V}^\circ \quad (3.27)$$

La función \mathcal{F} es inyectiva. Sean $\mathbb{V}^1 < S(\mathbb{V})$, $\mathbb{V}^2 < S(\mathbb{V})$. Suponga que

$$\mathcal{F}(\mathbb{V}^1) = \mathcal{F}(\mathbb{V}^2). \quad (3.28)$$

Suponga que $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ una base de $\mathcal{F}(\mathbb{V}^1) = \mathcal{F}(\mathbb{V}^2)$ y considere

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_1 < \mathbb{V} &\ni f_1({}^k\mathbf{V}_O^m) = \mathbf{0} && {}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}_1 \\ \mathbb{V}_2 < \mathbb{V} &\ni f_2({}^k\mathbf{V}_O^m) = \mathbf{0} && {}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}_2 \\ &\vdots \\ \mathbb{V}_n < \mathbb{V} &\ni f_n({}^k\mathbf{V}_O^m) = \mathbf{0} && {}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}_n \end{aligned}$$

Defina

$$\mathbb{V}^\# = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{V}_i$$

Sea ${}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}^\#$ arbitrario y $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{V}^1)$ igualmente arbitrario. Entonces,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n) ({}^k\mathbf{V}_O^m) &= \mathbf{0} \\ \lambda_1 [f_1({}^k\mathbf{V}_O^m)] + \lambda_2 [f_2({}^k\mathbf{V}_O^m)] + \dots + \lambda_n [f_n({}^k\mathbf{V}_O^m)] &= \mathbf{0} \\ \lambda_1(\mathbf{0}) + \lambda_2(\mathbf{0}) + \dots + \lambda_n(\mathbf{0}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Entonces

$$\mathbb{V}^\# = \mathbb{V}^1 = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{V}_i$$

Similarmente, defina

$$\mathbb{V}^\# = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{V}_i$$

Sea ${}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}^\#$ arbitrario y $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{V}^2)$ igualmente arbitrario. Entonces,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n) ({}^k\mathbf{V}_O^m) &= \mathbf{0} \\ \lambda_1 [f_1({}^k\mathbf{V}_O^m)] + \lambda_2 [f_2({}^k\mathbf{V}_O^m)] + \dots + \lambda_n [f_n({}^k\mathbf{V}_O^m)] &= \mathbf{0} \\ \lambda_1(\mathbf{0}) + \lambda_2(\mathbf{0}) + \dots + \lambda_n(\mathbf{0}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Entonces

$$\mathbb{V}^\# = \mathbb{V}^2 = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{V}_i$$

Por lo tanto

$$\mathbb{V}^1 = \mathbb{V}^2$$

y la función es inyectiva y, por lo tanto, biyectiva. ■

En la parte final de este capítulo, todos los resultados obtenidos se aplicarán a la forma de Klein definido sobre el álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$.

3.7. Propiedades de la forma de Klein

En esta sección se analizarán con más profundidad las propiedades del álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$, que junto con la forma de Klein constituye un espacio ortogonal no-singular e indefinido.

Proposición 3.21. La forma de Klein es invariante o, equivalentemente, está bien definida.

Prueba. Considere $se(3)$ y la forma de Klein definida como

$$Kl(\cdot, \cdot) : se(3) \times se(3) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.31)$$

Sea B un cuerpo rígido en movimiento con respecto a otro cuerpo rígido o sistema de referencia A y sea O un punto fijo en el cuerpo B , entonces

$$Kl \left({}^A\mathbf{V}_{O_1}^B, {}^A\mathbf{V}_{O_2}^B \right) = Kl \left(\begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{\omega}_1^B \\ {}^A\mathbf{v}_{O_1}^B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{\omega}_2^B \\ {}^A\mathbf{v}_{O_2}^B \end{bmatrix} \right) = {}^A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot {}^A\mathbf{v}_{O_2}^B + {}^A\boldsymbol{\omega}_2^B \cdot {}^A\mathbf{v}_{O_1}^B \quad (3.32)$$

Se desea probar que la forma de Klein es invariante o, equivalentemente, está bien definida. Sea P otro punto fijo al cuerpo B , entonces

$${}^A\mathbf{v}_{P_1}^B = {}^A\mathbf{v}_{O_1}^B + {}^A\boldsymbol{\omega}_1^B \times \mathbf{r}_{P/O} \quad \text{y} \quad {}^A\mathbf{v}_{P_2}^B = {}^A\mathbf{v}_{O_2}^B + {}^A\boldsymbol{\omega}_2^B \times \mathbf{r}_{P/O} \quad (3.33)$$

entonces,

$$\begin{aligned} Kl \left({}^A\mathbf{V}_{P_1}^B, {}^A\mathbf{V}_{P_2}^B \right) &= {}^A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot {}^A\mathbf{v}_{P_2}^B + {}^A\boldsymbol{\omega}_2^B \cdot {}^A\mathbf{v}_{P_1}^B \\ &= {}^A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot \left({}^A\mathbf{v}_{O_2}^B + {}^A\boldsymbol{\omega}_2^B \times \mathbf{r}_{P/O} \right) + {}^A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot \left({}^A\mathbf{v}_{O_1}^B + {}^A\boldsymbol{\omega}_1^B \times \mathbf{r}_{P/O} \right) \\ &= {}^A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot {}^A\mathbf{v}_{O_2}^B + {}^A\boldsymbol{\omega}_2^B \cdot {}^A\mathbf{v}_{O_1}^B + {}^A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot \left({}^A\boldsymbol{\omega}_2^B \times \mathbf{r}_{P/O} \right) + {}^A\boldsymbol{\omega}_2^B \cdot \left({}^A\boldsymbol{\omega}_1^B \times \mathbf{r}_{P/O} \right) \\ &= Kl \left({}^A\mathbf{V}_{O_1}^B, {}^A\mathbf{V}_{O_2}^B \right) = Kl \left({}^A\mathbf{V}_{P_1}^B, {}^A\mathbf{V}_{P_2}^B \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Otra posible forma de probar la invarianza de la forma de Klein consiste en mostrar que la forma de Klein tiene una interpretación dentro de la geometría Euclídea. ■

Proposición 3.22. La forma de Klein es simétrica y bilineal.

Prueba. Se debe probar que $Kl(\ , \) : se(3) \times se(3) \rightarrow \mathbb{R}$ cumple con la propiedad de simetría y que es lineal en la primera y segunda variable.

Simetría.

$$\begin{aligned}
 Kl(A\mathbf{V}_{O_1}^B, A\mathbf{V}_{O_2}^B) &= Kl\left(\begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_1^B \\ A\mathbf{v}_{O_1}^B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_2^B \\ A\mathbf{v}_{O_2}^B \end{bmatrix}\right) = A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot A\mathbf{v}_{O_2}^B + A\boldsymbol{\omega}_2^B \cdot A\mathbf{v}_{O_1}^B \\
 Kl(A\mathbf{V}_{O_2}^B, A\mathbf{V}_{O_1}^B) &= Kl\left(\begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_2^B \\ A\mathbf{v}_{O_2}^B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_1^B \\ A\mathbf{v}_{O_1}^B \end{bmatrix}\right) = A\boldsymbol{\omega}_2^B \cdot A\mathbf{v}_{O_1}^B + A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot A\mathbf{v}_{O_2}^B \\
 Kl(A\mathbf{V}_{O_1}^B, A\mathbf{V}_{O_2}^B) &= Kl(A\mathbf{V}_{O_2}^B, A\mathbf{V}_{O_1}^B)
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Linealidad.

1. Lineal en la primera variable:

$$\begin{aligned}
 Kl(\lambda_1 A\mathbf{V}_{O_1}^B + \lambda_2 A\mathbf{V}_{O_2}^B, A\mathbf{V}_{O_3}^B) &= Kl\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 A\boldsymbol{\omega}_1^B + \lambda_2 A\boldsymbol{\omega}_2^B \\ \lambda_1 A\mathbf{v}_{O_1}^B + \lambda_2 A\mathbf{v}_{O_2}^B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_3^B \\ A\mathbf{v}_{O_3}^B \end{bmatrix}\right) \\
 &= (\lambda_1 A\boldsymbol{\omega}_1^B + \lambda_2 A\boldsymbol{\omega}_2^B) \cdot A\mathbf{v}_{O_3}^B + A\boldsymbol{\omega}_3^B \cdot (\lambda_1 A\mathbf{v}_{O_1}^B + \lambda_2 A\mathbf{v}_{O_2}^B) \\
 &= \lambda_1 (A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot A\mathbf{v}_{O_3}^B + A\boldsymbol{\omega}_3^B \cdot A\mathbf{v}_{O_1}^B) + \lambda_2 (A\boldsymbol{\omega}_2^B \cdot A\mathbf{v}_{O_3}^B + A\boldsymbol{\omega}_3^B \cdot A\mathbf{v}_{O_2}^B) \\
 &= \lambda_1 Kl\left(\begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_1^B \\ A\mathbf{v}_{O_1}^B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_3^B \\ A\mathbf{v}_{O_3}^B \end{bmatrix}\right) + \lambda_2 Kl\left(\begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_2^B \\ A\mathbf{v}_{O_2}^B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_3^B \\ A\mathbf{v}_{O_3}^B \end{bmatrix}\right) \\
 &= \lambda_1 Kl(A\mathbf{V}_{O_1}^B, A\mathbf{V}_{O_3}^B) + \lambda_2 Kl(A\mathbf{V}_{O_2}^B, A\mathbf{V}_{O_3}^B)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

2. Lineal en la segunda variable:

$$\begin{aligned}
 Kl(A\mathbf{V}_{O_1}^B, \lambda_2 A\mathbf{V}_{O_2}^B + \lambda_3 A\mathbf{V}_{O_3}^B) &= Kl\left(\begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_1^B \\ A\mathbf{v}_{O_1}^B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_2 A\boldsymbol{\omega}_2^B + \lambda_3 A\boldsymbol{\omega}_3^B \\ \lambda_2 A\mathbf{v}_{O_2}^B + \lambda_3 A\mathbf{v}_{O_3}^B \end{bmatrix}\right) \\
 &= A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot (\lambda_2 A\mathbf{v}_{O_2}^B + \lambda_3 A\mathbf{v}_{O_3}^B) + (\lambda_2 A\boldsymbol{\omega}_2^B + \lambda_3 A\boldsymbol{\omega}_3^B) \cdot A\mathbf{v}_{O_1}^B \\
 &= \lambda_2 (A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot A\mathbf{v}_{O_2}^B + A\boldsymbol{\omega}_2^B \cdot A\mathbf{v}_{O_1}^B) + \lambda_3 (A\boldsymbol{\omega}_1^B \cdot A\mathbf{v}_{O_3}^B + A\boldsymbol{\omega}_3^B \cdot A\mathbf{v}_{O_1}^B) \\
 &= \lambda_2 Kl\left(\begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_1^B \\ A\mathbf{v}_{O_1}^B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_2^B \\ A\mathbf{v}_{O_2}^B \end{bmatrix}\right) + \lambda_3 Kl\left(\begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_1^B \\ A\mathbf{v}_{O_1}^B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A\boldsymbol{\omega}_3^B \\ A\mathbf{v}_{O_3}^B \end{bmatrix}\right) \\
 &= \lambda_2 Kl(A\mathbf{V}_{O_1}^B, A\mathbf{V}_{O_2}^B) + \lambda_3 Kl(A\mathbf{V}_{O_1}^B, A\mathbf{V}_{O_3}^B)
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

■

Proposición 3.23. El espacio ortogonal formado por $se(3)$ con la forma de Klein es indefinido.

Prueba. Considere el espacio ortogonal formado por $se(3)$ con la forma de Klein.

$$Kl(\omega_1 \$1, \omega_2 \$2) = Kl\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{v}_{O_2} \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{v}_{O_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{v}_{O_1}$$

La forma cuadrática asociada a la forma de Klein está dada por

$$Kl(\omega_1 \$1, \omega_1 \$1) = Kl\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{v}_{O_1} = 2\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{v}_{O_1}$$

Considere

$$\omega_1 \mathfrak{S}_1 = \left(\begin{bmatrix} \omega_{1x} \mathbf{i} \\ v_{O_1x} \mathbf{i} \end{bmatrix} \right) \quad \text{entonces} \quad Kl(\omega_1 \mathfrak{S}_1, \omega_1 \mathfrak{S}_1) = 2(\omega_{1x} \mathbf{i}) \cdot (v_{O_1x} \mathbf{i}) = 2\omega_{1x} v_{O_1x}$$

- Si $\omega_{1x} > 0$ y $v_{O_1x} > 0 \implies (\omega_1 \mathfrak{S}_1, \omega_1 \mathfrak{S}_1) = 2\omega_{1x} v_{O_1x} > 0$
- Si $\omega_{1x} > 0$ y $v_{O_1x} < 0 \implies (\omega_1 \mathfrak{S}_1, \omega_1 \mathfrak{S}_1) = 2\omega_{1x} v_{O_1x} < 0$

Entonces es posible afirmar que, el espacio ortogonal formado por $se(3)$ con la forma de Klein es indefinido. ■

Definición. La correlación inducida por la forma de Klein. Considere $se(3)$ y $se(3)^*$, el álgebra de Lie del grupo Euclídeo, $SE(3)$, y su álgebra dual respectivamente. Considere, Kl , la forma de Klein definida sobre el álgebra de Lie, $se(3)$, dada por

$$Kl(\ , \) : se(3) \times se(3) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.38)$$

tal que,

$$Kl \left({}^A \mathbf{V}_{O_1}^B, {}^A \mathbf{V}_{O_2}^B \right) = Kl \left(\begin{bmatrix} {}^A \boldsymbol{\omega}_1^B \\ {}^A \mathbf{v}_{O_1}^B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} {}^A \boldsymbol{\omega}_2^B \\ {}^A \mathbf{v}_{O_2}^B \end{bmatrix} \right) = {}^A \boldsymbol{\omega}_1^B \cdot {}^A \mathbf{v}_{O_2}^B + {}^A \boldsymbol{\omega}_2^B \cdot {}^A \mathbf{v}_{O_1}^B \quad (3.39)$$

Entonces, la correlación, σ_{Kl} , inducida por la forma de Klein, está dada por

$$\sigma_{Kl} : se(3) \longrightarrow se(3)^* \quad \text{donde} \quad \sigma_{Kl} \left({}^A \mathbf{V}_{O_1}^B \right) = \sigma_{Kl} \left(\begin{bmatrix} {}^A \boldsymbol{\omega}_1^B \\ {}^A \mathbf{v}_{O_1}^B \end{bmatrix} \right) \quad (3.40)$$

es un funcional lineal de $se(3)$ a \mathbb{R} , tal que

$$\sigma_{Kl} \left({}^A \mathbf{V}_O^B \right) : se(3) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.41)$$

donde la regla de correspondencia está dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{Kl} \left({}^A \mathbf{V}_{O_1}^B \right) &= \sigma_{Kl} \left(\begin{bmatrix} {}^A \boldsymbol{\omega}_1^B \\ {}^A \mathbf{v}_{O_1}^B \end{bmatrix} \right) \\ &= {}^A \omega_{1x}^B (\) + {}^A \omega_{1y}^B (\) + {}^A \omega_{1z}^B (\) + {}^A v_{O_1x}^B (\) + {}^A v_{O_1y}^B (\) + {}^A v_{O_1z}^B (\) \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde ${}^A \mathbf{V}_{O_1}^B = [{}^A \omega_{1x}^B, {}^A \omega_{1y}^B, {}^A \omega_{1z}^B, {}^A v_{O_1x}^B, {}^A v_{O_1y}^B, {}^A v_{O_1z}^B]^T$, así pues

$$\begin{aligned} \sigma_{Kl} \left({}^A \mathbf{V}_{O_1}^B \right) \left([{}^A \mathbf{V}_{O_2}^B] \right) &= \\ &{}^A \omega_{1x}^B ({}^A v_{O_2x}^B) + {}^A \omega_{1y}^B ({}^A v_{O_2y}^B) + {}^A \omega_{1z}^B ({}^A v_{O_2z}^B) + {}^A v_{O_1x}^B ({}^A \omega_{2x}^B) + {}^A v_{O_1y}^B ({}^A \omega_{2y}^B) + {}^A v_{O_1z}^B ({}^A \omega_{2z}^B) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Proposición 3.24. Sea T una transformación lineal de un espacio vectorial \mathbb{V} sobre \mathbb{V}' . Entonces

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}' \quad (3.44)$$

es el mapeo cero; es decir, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$, si y sólo si $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = \dots = T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$. Donde $B_{\mathbb{V}} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de \mathbb{V} .

Prueba. Si T es el mapeo cero, entonces $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Puesto que $B_{\mathbb{V}} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{V}$, se tiene que

$$T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = \dots = T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

y considere un $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ arbitrario, puesto que $B_{\mathbb{V}} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de \mathbb{V} , se tiene que

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \quad (3.46)$$

y

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= T(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n) = \lambda_1 T(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{v}_2) + \dots + \lambda_n T(\mathbf{v}_n) \\ &= \lambda_1(\mathbf{0}) + \lambda_2(\mathbf{0}) + \dots + \lambda_n(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.47)$$

por lo tanto, $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}'$ es el mapeo cero. ■

Ahora se probará que la forma de Klein es no-degenerada o no singular.

Proposición 3.25. La forma de Klein en el espacio ortogonal $se(3)$ es no degenerada —no singular—; es decir, la correlación asociada a la forma de Klein es biyectiva.

Prueba. Considere la correlación inducida por la forma de Klein.

$$\sigma_{Kl} : se(3) \longrightarrow se(3)^*$$

Puesto que $se(3)$ y $se(3)^*$ son de la misma dimensión es únicamente necesario probar que σ_{Kl} es inyectiva.

$\mathbf{V}_1 \in ker\{\sigma_{Kl}\} \iff \mathbf{V}_1^{\sigma_{Kl}}$ es el funcional cero; es decir

$$\mathbf{V}_1^{\sigma_{Kl}}(\mathbf{V}_2) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3)$$

$$\mathbf{V}_1^{\sigma_{Kl}}(\mathbf{V}_2) = \omega_{1x}(v_{O_2x}) + \omega_{1y}(v_{O_2y}) + \omega_{1z}(v_{O_2z}) + v_{O_1x}(\omega_{2x}) + v_{O_1y}(\omega_{2y}) + v_{O_1z}(\omega_{2z})$$

Nuevamente, considere la base del ejemplo 3.9

$$B_{se(3)} = \{\mathbf{V}_{11}, \mathbf{V}_{12}, \mathbf{V}_{13}, \mathbf{V}_{14}, \mathbf{V}_{15}, \mathbf{V}_{16}\}$$

Las correlaciones asociadas a los elementos de las bases están dadas por

$$\mathbf{V}_{11}^{\sigma_{Kl}}(\mathbf{V}_2) = \omega_{1x}(v_{O_2x}) + 0(v_{O_2y}) + 0(v_{O_2z}) + 0(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3) \iff \omega_{1x} = 0$$

$$\mathbf{V}_{12}^{\sigma_{Kl}}(\mathbf{V}_2) = 0(v_{O_2x}) + \omega_{1y}(v_{O_2y}) + 0(v_{O_2z}) + 0(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3) \iff \omega_{1y} = 0$$

$$\mathbf{V}_{13}^{\sigma_{Kl}}(\mathbf{V}_2) = 0(v_{O_2x}) + 0(v_{O_2y}) + \omega_{1z}(v_{O_2z}) + 0(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3) \iff \omega_{1z} = 0$$

$$\mathbf{V}_{14}^{\sigma_{Kl}}(\mathbf{V}_2) = 0(v_{O_2x}) + 0(v_{O_2y}) + 0(v_{O_2z}) + v_{O_1x}(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3) \iff v_{O_1x} = 0$$

$$\mathbf{V}_{15}^{\sigma_{Kl}}(\mathbf{V}_2) = 0(v_{O_2x}) + 0(v_{O_2y}) + 0(v_{O_2z}) + 0(\omega_{2x}) + v_{O_1y}(\omega_{2y}) + 0(\omega_{2z}) \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3) \iff v_{O_1y} = 0$$

$$\mathbf{V}_{16}^{\sigma_{Kl}}(\mathbf{V}_2) = 0(v_{O_2x}) + 0(v_{O_2y}) + 0(v_{O_2z}) + 0(\omega_{2x}) + 0(\omega_{2y}) + v_{O_1z}(\omega_{2z}) \quad \forall \quad \mathbf{V}_2 \in se(3) \iff v_{O_1z} = 0$$

Concluyendo

$$ker\{\sigma_{Kl}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Por lo tanto, σ_{Kl} es inyectiva e implica que σ_{Kl} es biyectiva. Como conclusión el espacio ortogonal formado por $se(3)$ con la forma de Klein es no-singular o no-degenerada. ■

Debe notarse que la correlación σ_{Kl} es un mapeo biyectivo, por lo tanto $se(3)$ y $se^*(3)$ son isomórficos.

Sea $se(3)$ el álgebra de Lie asociada al grupo Euclídeo, $SE(3)$, y sea Kl la forma de Klein definida sobre $se(3)$. Se sabe que la forma de Klein es una forma no-singular e indefinida, sea $\mathbb{V} \subset se(3)$, los aniquiladores duales de \mathbb{V} , son aquellos $f \in se^*(3)$, funcionales lineales, tal que

$$f(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}. \quad (3.48)$$

En otras palabras, la restricción de f sobre \mathbb{V} , es el mapeo cero.

Definición 3.14. Sean $\mathbb{V}(se(3))$ y $\mathbb{V}(se^*(3))$ los conjuntos de subespacios del álgebra de Lie $se(3)$ y de su álgebra dual $se^*(3)$ respectivamente. Considere el mapeo

$$\sigma_{Kl}^{\mathbb{V}} : \mathbb{V}(se(3)) \longrightarrow \mathbb{V}(se^*(3)), \quad \text{tal que} \quad \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1) = \mathbb{V}_1^* \quad (3.49)$$

donde $\mathbb{V}_1^* \in \mathbb{V}(se^*(3))$ es el subespacio de $se^*(3)$ que contiene todos los aniquiladores duales de \mathbb{V}_1 .

Proposición 3.26. El mapeo $\sigma_{Kl}^{\mathbb{V}} : \mathbb{V}(se(3)) \longrightarrow \mathbb{V}(se^*(3))$ está bien definido.

Prueba. Es necesario probar que el resultado del mapeo es independiente de las posibles representaciones del espacio vectorial $\mathbb{V}_1 \in \mathbb{V}(se(3))$. Sean $B_{\mathbb{V}} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y $B'_{\mathbb{V}} = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ dos bases arbitrarias de $\mathbb{V}_1 \in \mathbb{V}(se(3))$

1. Entonces $f \in \mathbb{V}_1^*$ si y sólo si $f(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_1$; es decir, si $f \in \mathbb{V}^*$ es el mapeo cero sobre $\mathbb{V}_1 \in \mathbb{V}(se(3))$. Aplicando la proposición 3.24 con la base $B_{\mathbb{V}}$, se tiene que

$$f \in \mathbb{V}_1^* \Leftrightarrow f(\mathbf{v}_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.50)$$

2. Considere $\mathbf{v}'_j \in B'_{\mathbb{V}}$, arbitrario, entonces existen $\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \dots, \lambda_{nj} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{v}'_j = \lambda_{1j}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2j}\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_{nj}\mathbf{v}_n \quad (3.51)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}'_j) &= f(\lambda_{1j}\mathbf{v}_1 + \lambda_{2j}\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_{nj}\mathbf{v}_n) = \lambda_{1j}f(\mathbf{v}_1) + \lambda_{2j}f(\mathbf{v}_2) + \dots + \lambda_{nj}f(\mathbf{v}_n) \\ &= \lambda_{1j}(\mathbf{0}) + \lambda_{2j}(\mathbf{0}) + \dots + \lambda_{nj}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.52)$$

consecuentemente,

$$f(\mathbf{v}'_1) = f(\mathbf{v}'_2) = \dots = f(\mathbf{v}'_n) = 0 \quad (3.53)$$

de manera que aplicando nuevamente la proposición 4.5

$$f \in \mathbb{V}_1^* \Leftrightarrow f(\mathbf{v}_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.54)$$

Este resultado muestra que $f \in \mathbb{V}_1^*$ independientemente de la representación de \mathbb{V}_1 .

Sin embargo, falta probar que \mathbb{V}_1^* es un subespacio de $se^*(3)$. Es decir, falta probar que \mathbb{V}_1^* está cerrado respecto a la adición y multiplicación por escalar.

1. Cerrado respecto a la adición. Sea $f_1, f_2 \in \mathbb{V}_1^*$, es decir,

$$f_1(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_1 \quad \text{y} \quad f_2(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_1 \quad (3.55)$$

entonces, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_1$

$$(f_1 + f_2)(\mathbf{v}) = f_1(\mathbf{v}) + f_2(\mathbf{v}) = 0 + 0 = 0 \quad (3.56)$$

y $f_1 + f_2 \in \mathbb{V}_1^*$

2. Cerrado respecto a la multiplicación por escalar. Sea $f_1 \in \mathbb{V}_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$; es decir

$$f_1(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_1 \quad (3.57)$$

entonces, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_1$

$$(\lambda f_1)(\mathbf{v}) = \lambda [f_1(\mathbf{v})] = \lambda(0) = 0 \quad (3.58)$$

y $\lambda f_1 \in \mathbb{V}_1^*$

Con esto se prueba que $\mathbb{V}_1^* < se^*(3)$. ■

Proposición 3.27. La correlación $\sigma_{Kl} : se(3) \longrightarrow se(3)^*$ es inyectiva y por lo tanto biyectiva.

Prueba. Puesto que es únicamente necesario probar que σ_{Kl} es inyectiva, considere

$${}^A\mathbf{V}_{O_1}^B \in \ker\{\sigma_{Kl}\} \iff {}^A\mathbf{V}_{O_1}^{B\sigma_{Kl}} \quad (3.59)$$

es el funcional cero; es decir

$${}^A\mathbf{V}_{O_1}^{B\sigma_{Kl}} ({}^A\mathbf{V}_{O_2}^B) = 0 \quad \forall \quad {}^A\mathbf{V}_{O_2}^B \in se(3) \quad (3.60)$$

$${}^A\mathbf{V}_{O_1}^{B\sigma_{Kl}} ({}^A\mathbf{V}_{O_2}^B) = {}^A\omega_{1x}^B ({}^A v_{O_2x}^B) + {}^A\omega_{1y}^B ({}^A v_{O_2y}^B) + {}^A\omega_{1z}^B ({}^A v_{O_2z}^B) + {}^A v_{O_1x}^B ({}^A \omega_{2x}^B) + {}^A v_{O_1y}^B ({}^A \omega_{2y}^B) + {}^A v_{O_1z}^B ({}^A \omega_{2z}^B) \quad (3.61)$$

Considere la base $B_{se(3)}$ dado por

$$B_{se(3)} = \{ {}^A\mathbf{V}_{O_{11}}^B, {}^A\mathbf{V}_{O_{12}}^B, {}^A\mathbf{V}_{O_{13}}^B, {}^A\mathbf{V}_{O_{14}}^B, {}^A\mathbf{V}_{O_{15}}^B, {}^A\mathbf{V}_{O_{16}}^B \} \quad (3.62)$$

Donde

$${}^A\mathbf{V}_{O_{11}}^B = [{}^A\omega_{1x}^B, 0, 0, 0, 0, 0]^T; {}^A\mathbf{V}_{O_{12}}^B = [0, {}^A\omega_{1y}^B, 0, 0, 0, 0]^T; {}^A\mathbf{V}_{O_{13}}^B = [0, 0, {}^A\omega_{1z}^B, 0, 0, 0]^T$$

$${}^A\mathbf{V}_{O_{14}}^B = [0, 0, 0, {}^A v_{O_{1x}}^B, 0, 0]^T; {}^A\mathbf{V}_{O_{15}}^B = [0, 0, 0, 0, {}^A v_{O_{1y}}^B, 0]^T; {}^A\mathbf{V}_{O_{16}}^B = [0, 0, 0, 0, 0, {}^A v_{O_{1z}}^B]^T$$

Para un ${}^A\mathbf{V}_{O_2}^B$ arbitrario se tiene

$${}^A\mathbf{V}_{O_{11}}^{B\sigma_{Kl}} ({}^A\mathbf{V}_{O_2}^B) = {}^A\omega_{1x}^B ({}^A v_{O_2x}^B) + 0({}^A v_{O_2y}^B) + 0({}^A v_{O_2z}^B) + 0({}^A \omega_{2x}^B) + 0({}^A \omega_{2y}^B) + 0({}^A \omega_{2z}^B) = 0$$

$$\forall \quad {}^A\mathbf{V}_{O_2}^B \in se(3) \iff {}^A\omega_{1x}^B = 0$$

$${}^A\mathbf{V}_{O_{12}}^{B\sigma_{Kl}} ({}^A\mathbf{V}_{O_2}^B) = 0({}^A v_{O_2x}^B) + {}^A\omega_{1y}^B ({}^A v_{O_2y}^B) + 0({}^A v_{O_2z}^B) + 0({}^A \omega_{2x}^B) + 0({}^A \omega_{2y}^B) + 0({}^A \omega_{2z}^B) = 0$$

$$\forall \quad {}^A\mathbf{V}_{O_2}^B \in se(3) \iff {}^A\omega_{1y}^B = 0$$

$${}^A\mathbf{V}_{O_{13}}^B \sigma_{Kl} ({}^A\mathbf{V}_{O_2}^B) = 0({}^A v_{O_2x}^B) + 0({}^A v_{O_2y}^B) + {}^A\omega_{1z}^B ({}^A v_{O_2z}^B) + 0({}^A\omega_{2x}^B) + 0({}^A\omega_{2y}^B) + 0({}^A\omega_{2z}^B) = 0$$

$$\forall \quad {}^A\mathbf{V}_{O_2}^B \in se(3) \iff {}^A\omega_{1z}^B = 0$$

$${}^A\mathbf{V}_{O_{14}}^B \sigma_{Kl} ({}^A\mathbf{V}_{O_2}^B) = 0({}^A v_{O_2x}^B) + 0({}^A v_{O_2y}^B) + 0({}^A v_{O_2z}^B) + {}^A v_{O_{1x}}^B ({}^A\omega_{2x}^B) + 0({}^A\omega_{2y}^B) + 0({}^A\omega_{2z}^B) = 0$$

$$\forall \quad {}^A\mathbf{V}_{O_2}^B \in se(3) \iff {}^A v_{O_{1x}}^B = 0$$

$${}^A\mathbf{V}_{O_{15}}^B \sigma_{Kl} ({}^A\mathbf{V}_{O_2}^B) = 0({}^A v_{O_2x}^B) + 0({}^A v_{O_2y}^B) + 0({}^A v_{O_2z}^B) + 0({}^A\omega_{2x}^B) + {}^A v_{O_{1y}}^B ({}^A\omega_{2y}^B) + 0({}^A\omega_{2z}^B) = 0$$

$$\forall \quad {}^A\mathbf{V}_{O_2}^B \in se(3) \iff {}^A v_{O_{1y}}^B = 0$$

$${}^A\mathbf{V}_{O_{16}}^B \sigma_{Kl} ({}^A\mathbf{V}_{O_2}^B) = 0({}^A v_{O_2x}^B) + 0({}^A v_{O_2y}^B) + 0({}^A v_{O_2z}^B) + 0({}^A\omega_{2x}^B) + 0({}^A\omega_{2y}^B) + {}^A v_{O_{1z}}^B ({}^A\omega_{2z}^B) = 0$$

$$\forall \quad {}^A\mathbf{V}_{O_2}^B \in se(3) \iff {}^A v_{O_{1z}}^B = 0$$

Concluyendo

$$ker\{\sigma_{Kl}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Por lo tanto, si σ_{Kl} es inyectiva implica que σ_{Kl} es biyectiva. Como conclusión el espacio ortogonal formado por $se(3)$ con la forma de Klein es no-singular o no-degenerado. ■

Proposición 3.28. Sea

$$\sigma_{Kl}^{\mathbb{V}} = \mathbb{V}(se(3)) \longrightarrow \mathbb{V}(se^*(3)) \quad \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1) = \mathbb{V}_1^* \quad (3.63)$$

el mapeo que asigna a cualquier subespacio $\mathbb{V}_1 < se(3)$ su aniquilador dual $\mathbb{V}_1^* < se^*(3)$. Es decir, el subespacio formado por todos los aniquiladores duales de \mathbb{V}_1 . Entonces:

1.

$$(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^* = \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1) \cap \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_2) = \mathbb{V}_1^* \cap \mathbb{V}_2^* \quad (3.64)$$

2.

$$(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)^* = \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) = \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1) + \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_2) = \mathbb{V}_1^* + \mathbb{V}_2^* \quad (3.65)$$

Prueba. 1. Sea

$$f \in \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1) \cap \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_2) = \mathbb{V}_1^* \cap \mathbb{V}_2^* \quad (3.66)$$

entonces, ese resultado implica que

$$f({}^k\mathbf{V}_{O_1}^m) = 0 \quad \forall \quad {}^k\mathbf{V}_{O_1}^m \in \mathbb{V}_1 \quad y \quad f({}^k\mathbf{V}_{O_2}^m) = 0 \quad \forall \quad {}^k\mathbf{V}_{O_2}^m \in \mathbb{V}_2. \quad (3.67)$$

Entonces,

$$f({}^k\mathbf{V}_{O_1}^m + {}^k\mathbf{V}_{O_2}^m) = f({}^k\mathbf{V}_{O_1}^m) + f({}^k\mathbf{V}_{O_2}^m) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \forall \quad {}^k\mathbf{V}_{O_1}^m \in \mathbb{V}_1 \quad y \quad \forall \quad {}^k\mathbf{V}_{O_2}^m \in \mathbb{V}_2 \quad (3.68)$$

Por lo tanto, $f \in \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)$. Este resultado implica que

$$\mathbb{V}_1^* \cap \mathbb{V}_2^* \subset (\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^*. \quad (3.69)$$

Suponga ahora que

$$f \in (\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^* = \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) \quad (3.70)$$

entonces este resultado implica que

$$f(k\mathbf{V}_{O_1}^m + k\mathbf{V}_{O_2}^m) = \mathbf{0} \quad \forall k\mathbf{V}_{O_1}^m \in \mathbb{V}_1 \quad y \quad \forall k\mathbf{V}_{O_2}^m \in \mathbb{V}_2. \quad (3.71)$$

Haga $k\mathbf{V}_{O_2}^m = \mathbf{0}$, entonces

$$f(k\mathbf{V}_{O_1}^m + \mathbf{0}) = f(k\mathbf{V}_{O_1}^m) = \mathbf{0} \quad \forall k\mathbf{V}_{O_1}^m \in \mathbb{V}_1, \quad (3.72)$$

por lo que $f \in \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1) = \mathbb{V}_1^*$.

Haga $k\mathbf{V}_{O_1}^m = \mathbf{0}$, entonces

$$f(\mathbf{0} + k\mathbf{V}_{O_2}^m) = f(k\mathbf{V}_{O_2}^m) = \mathbf{0} \quad \forall k\mathbf{V}_{O_2}^m \in \mathbb{V}_2, \quad (3.73)$$

por lo que $f \in \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_2) = \mathbb{V}_2^*$.

De estos resultados se infiere que

$$f \in \mathbb{V}_1^* \cap \mathbb{V}_2^* \quad (3.74)$$

y por lo tanto

$$(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^* \subset \mathbb{V}_1^* \cap \mathbb{V}_2^*. \quad (3.75)$$

Por la doble inclusión, se tiene que

$$(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^* = \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1) \cap \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_2) = \mathbb{V}_1^* \cap \mathbb{V}_2^* \quad (3.76)$$

■

Prueba. 2. Sea

$$f \in \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1) + \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_2) = \mathbb{V}_1^* + \mathbb{V}_2^* \quad (3.77)$$

de aquí, f puede ser escrito como,

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in \mathbb{V}_1^* \quad y \quad f_2 \in \mathbb{V}_2^*. \quad (3.78)$$

Entonces,

$$f_1(k\mathbf{V}_{O_1}^m) = \mathbf{0}, \quad \forall k\mathbf{V}_{O_1}^m \in \mathbb{V}_1 \quad (3.79)$$

$$f_2(k\mathbf{V}_{O_2}^m) = \mathbf{0}, \quad \forall k\mathbf{V}_{O_2}^m \in \mathbb{V}_2 \quad (3.80)$$

Ahora, para todo $k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$,

$$f(k\mathbf{V}_O^m) = (f_1 + f_2)(k\mathbf{V}_O^m) = f_1(k\mathbf{V}_O^m) + f_2(k\mathbf{V}_O^m) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad (3.81)$$

Por lo tanto, $f \in \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)$. Este resultado implica que

$$\mathbb{V}_1^* + \mathbb{V}_2^* \subset (\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)^*. \quad (3.82)$$

Ahora, falta probar que

$$\mathbb{V}_1^* + \mathbb{V}_2^* \supset (\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)^* \quad (3.83)$$

o bien, recuerde que al tratarse de subespacios finitos, se tiene que,

$$(\mathbb{V}_1^* + \mathbb{V}_2^*)^* \subset \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 \quad (3.84)$$

y por la Proposición 3.13

$$(\mathbb{W}^*)^* = \mathbb{W}$$

Por lo tanto, suponga ahora que

$${}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 \quad (3.85)$$

ahora bien,

$${}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}_1 \longrightarrow f_1({}^k\mathbf{V}_O^m) = \mathbf{0} \quad \forall f_1 \in \mathbb{V}_1^* \quad (3.86)$$

$${}^k\mathbf{V}_O^m \in \mathbb{V}_2 \longrightarrow f_2({}^k\mathbf{V}_O^m) = \mathbf{0} \quad \forall f_2 \in \mathbb{V}_2^* \quad (3.87)$$

significa que

$$(f_1 + f_2)({}^k\mathbf{V}_O^m) = f_1({}^k\mathbf{V}_O^m) + f_2({}^k\mathbf{V}_O^m) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad \forall f_1 + f_2 \in \mathbb{V}_1^* + \mathbb{V}_2^* \quad (3.88)$$

mostrando así que,

$${}^k\mathbf{V}_O^m \in (\mathbb{V}_1^* + \mathbb{V}_2^*)^* \quad (3.89)$$

y, por lo tanto,

$$(\mathbb{V}_1^* + \mathbb{V}_2^*)^* \subset \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 \quad (3.90)$$

Finalmente, por la doble inclusión,

$$(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)^* = \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) = \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_1) + \sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}(\mathbb{V}_2) = \mathbb{V}_1^* + \mathbb{V}_2^* \quad (3.91)$$

■

Prueba. 2. La prueba 2 puede demostrarse de otra manera, de acuerdo a lo siguiente: De la primera demostración, ecuación (3.76), se sabe que

$$(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)^* = \mathbb{V}_1^* \cap \mathbb{V}_2^* \quad (3.92)$$

además, se tiene la propiedad, por medio de la Proposición 3.13

$$(\mathbb{W}^*)^* = \mathbb{W} \quad (3.93)$$

Por lo que si utilizamos ambos tenemos que,

$$(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)^* = ((\mathbb{V}_1^*)^* \cap (\mathbb{V}_2^*)^*)^* = ((\mathbb{V}_1^* + \mathbb{V}_2^*)^*)^* = \mathbb{V}_1^* + \mathbb{V}_2^* \quad (3.94)$$

■

Considere $se(3)$ como un espacio ortogonal bajo la forma de Klein,

$$Kl(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = Kl\left(\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{v}_{O_1} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{v}_{O_2} \end{array}\right]\right) = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{v}_{O_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{v}_{O_1}$$

Determine la correlación $\sigma_{KL} : se(3) \longrightarrow se(3)^L$ asociada a la forma de Klein

$$\sigma_{KL}(\mathbf{V}_1) = \mathbf{V}_1^{\sigma_{KL}} \quad \mathbf{V}_1^{\sigma_{KL}} : se(3) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{V}_1^{\sigma_{KL}}(\mathbf{V}_2) = \omega_{1x}(v_{O_2x}) + \omega_{1y}(v_{O_2y}) + \omega_{1z}(v_{O_2z}) + v_{O_1x}(\omega_{2x}) + v_{O_1y}(\omega_{2y}) + v_{O_1z}(\omega_{2z})$$

Capítulo 4

Elementos flexibles

Desde la perspectiva del diseño de máquinas de precisión [39], los elementos flexibles son esencialmente elementos de restricción que utilizan la elasticidad del material para permitir movimiento. El objetivo de un elemento de restricción es el de proveer, al menos idealmente, rigidez infinita y restringir desplazamientos a lo largo de las direcciones donde el mecanismo deba estar restringido y permitir movimiento y cero rigidez a lo largo de las direcciones asociadas a sus grados de libertad. Comparado con las juntas cinemáticas tradicionales y mecanismos basados en cuerpos rígidos, los mecanismos flexibles, que incluyen elementos flexibles, presentan ciertas ventajas como: proceso de manufactura y proceso de ensamble más simple, evitando así fricción entre eslabones y un juego nulo. Sin embargo, el diseño de mecanismos flexibles sigue siendo una tarea relativamente difícil, esto se debe a que en el área de síntesis de tipo y síntesis dimensional no se han obtenido resultados tan contundentes como sí se han logrado en su contraparte, los mecanismos basados en cuerpos rígidos y juntas cinemáticas tradicionales. Los elementos flexibles, pueden caer en dos categorías, elementos flexibles primitivos y elementos flexibles complejos; siendo este último una combinación de dos o más elementos flexibles primitivos.

4.1. Elementos flexibles primitivos.

Un elemento flexible primitivo consiste solamente de elemento flexible y ningún cuerpo rígido intermedio; además los elementos flexibles primitivos no pueden ser divididos en subestructuras. Hopkins [40] presenta los elementos flexibles más utilizados en el método FACT. A continuación se muestran los elementos flexibles más comunmente utilizados en la literatura.

4.1.1. Matriz de flexibilidad de una viga.

Como uno de los elementos flexibles primitivos o generadores mecánicos más simples se encuentra la viga flexible, la cual es un componente mecánico base que provee de deformaciones en forma de twists y restricciones en forma de wrenches en un mecanismo flexible [42]. Existen diferentes perfiles para una viga, cada perfil proveerá diferentes grados de libertad debido a sus propiedades elásticas. En la Figura 4.1 se observan dos vigas flexibles homogéneas, con diferente sección transversal, circular y rectangular, ambas sometidas a un wrench general sobre su centro de masas; a continuación se deriva una representación general de la matriz de flexibilidad para una viga con sección transversal uniforme.

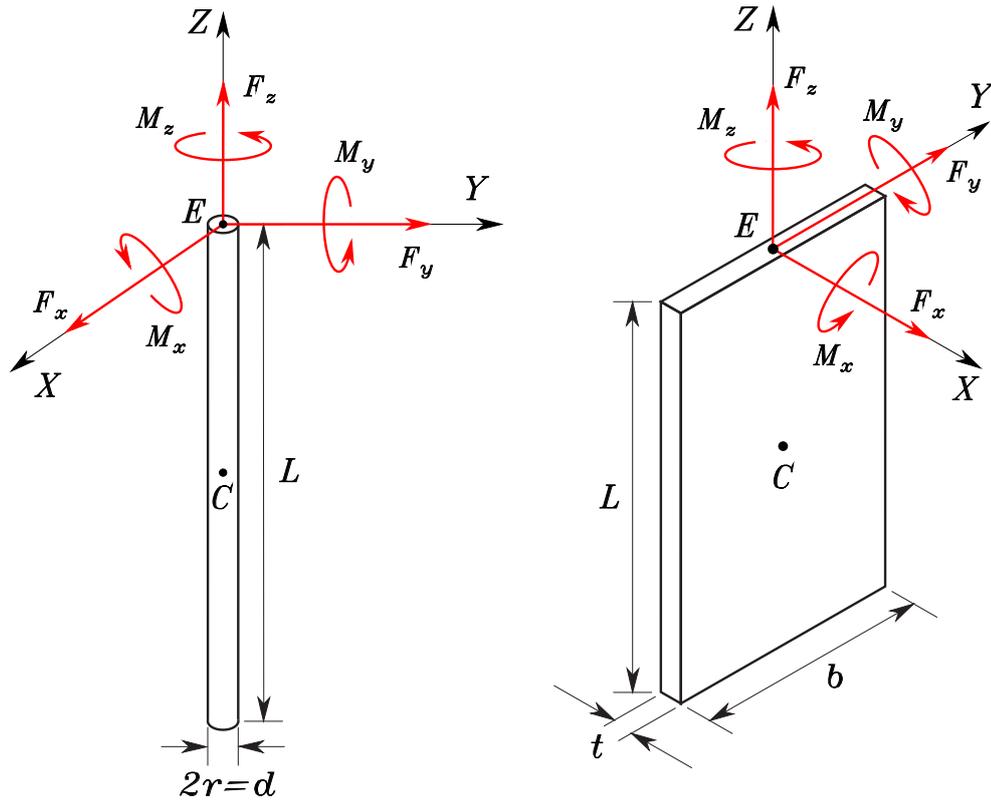


Figura 4.1: Vigas flexibles con sección transversal uniforme, circular (izq.) y rectangular (der), sometidas a un wrench general sobre su extremo E .

En la mayoría de casos, el wrench se ejerce en el extremo, E , de la viga. Utilizando el método de viga conjugada, de mecánica de materiales, se determina la matriz de flexibilidad representada en coordenadas del marco de referencia con origen en el punto E , de la siguiente manera:

1. Plano $X - Z$

Para el primer caso note que el eje neutro es paralelo al eje Y .

a) **Fuerza F_x en el extremo E de la viga.**

Observando la Figura 4.2 es posible obtener el siguiente momento flector,

$$M(z) = F_x(L - z) \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.1)$$

de modo que,

$$\frac{d^2}{dz^2} x(z) = \frac{M(z)}{EI_y} = \frac{F_x(L - z)}{EI_y} \quad (4.2)$$

Integrando la ecuación (4.2) se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{d}{dz} x(z) = \int \frac{F_x(L - z)}{EI_y} dz = \frac{F_x(L - z)^2}{2EI_y} + C_1 \quad (4.3)$$

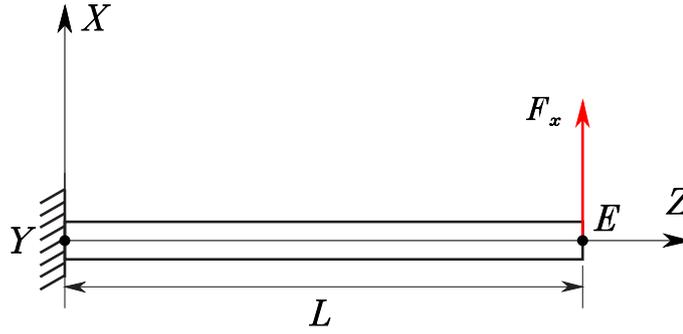


Figura 4.2: Viga en voladizo con una fuerza F_x , aplicada en el extremo de la misma.

sin embargo si se sustituye $z = 0$ se sabe que¹ $\frac{d}{dz} x(z) = 0$ de esta forma

$$C_1 = \frac{F_x L^2}{2EI_y} \quad (4.4)$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{dz} x(z) = \frac{F_x}{2EI_y} [(L - z)^2 + L^2] \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.5)$$

y sustituyendo $z = L$ se obtiene finalmente que

$$\left. \frac{d}{dz} x(z) \right|_{z=L} = \frac{F_x L^2}{2EI_y} \quad (4.6)$$

Integrando nuevamente, ahora la ecuación (4.5) se tiene que,

$$x(z) = \int \frac{F_x}{2EI_y} [(L - z)^2 + L^2] dz = \frac{F_x}{2EI_y} \left[\frac{1}{3}(L - z)^3 + L^2 z \right] + C_2 \quad (4.7)$$

sustituyendo $z = 0$ se sabe que² $x(z) = 0$ de modo que,

$$x(z) = \frac{F_x}{2EI_y} \left[\frac{1}{3}(L - z)^3 + L^2 z - \frac{L^3}{3} \right] \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.8)$$

finalmente,

$$x(z)|_{z=L} = \frac{F_x L^3}{3EI_y} \quad (4.9)$$

b) Momento M_y en el extremo E de la viga.

El momento flector está dado, vea Figura 4.3), por

$$M(z) = M_y \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.10)$$

de este modo

¹Esta condición supone que el empotramiento es perfecto.

²Esta condición supone que el empotramiento es perfecto.

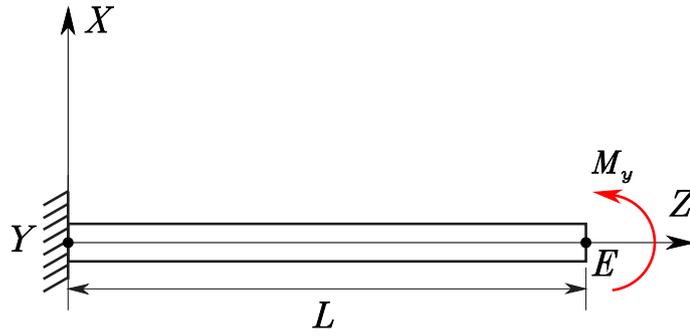


Figura 4.3: Viga en voladizo con un momento M_y , aplicado en el extremo de la misma.

$$\frac{d^2}{dz^2} x(z) = \frac{M_y}{EI_y} \quad (4.11)$$

Integrando la ecuación (4.11) y aplicando las condiciones para $z = 0$, $\frac{d}{dz} x(z) = 0$ se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{d}{dz} x(z) = \frac{M_y}{EI_y} z \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.12)$$

particularizando para $z = L$

$$\left. \frac{d}{dz} x(z) \right|_{z=L} = \frac{M_y L}{EI_y} \quad (4.13)$$

Integrando nuevamente y aplicando las condiciones para $z = 0$, $x(z) = 0$ esta vez para obtener el desplazamiento lineal de la viga se obtiene que,

$$x(z) = \frac{M_y z^2}{2EI_y} \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.14)$$

particularizando para $z = L$

$$x(z)|_{z=L} = \frac{M_y L^2}{2EI_y} \quad (4.15)$$

c) Fuerza F_z en el extremo E de la viga.

Al aplicar esta fuerza F_z en la viga se presentan esfuerzos de tensión, vea Figura 4.4, por lo que el resultado es muy simple y está dado por

$$\delta_z = \frac{F_z L}{AE} \quad (4.16)$$

d) Momento M_z en el extremo E de la viga.

En este caso la viga presenta esfuerzos de torsión, vea Figura 4.5, debidos a la aplicación M_z en el extremo de la viga, y el ángulo de torsión en el extremo libre de la viga está dado por

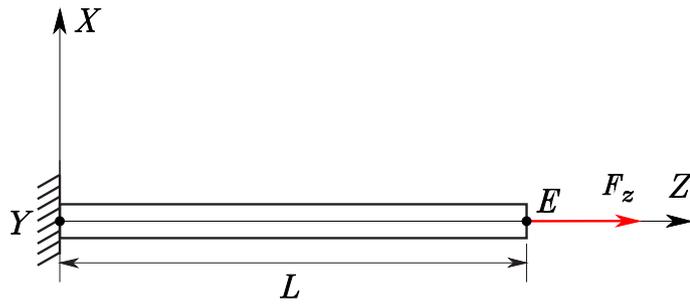


Figura 4.4: Viga en voladizo con una fuerza F_z , aplicada en el extremo de la misma.

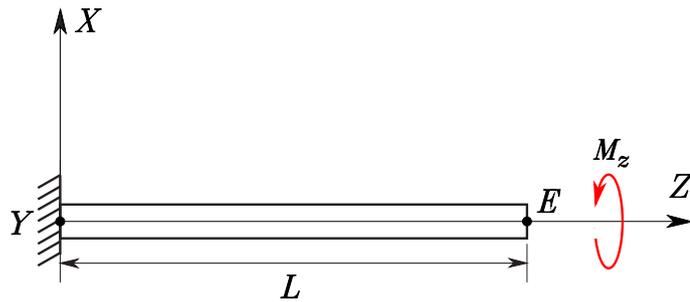


Figura 4.5: Viga en voladizo con un momento M_z , aplicado en el extremo de la misma.

$$\theta_z = \frac{M_z L}{JG} \quad (4.17)$$

2. Plano $Y - Z$

Note que para este caso el eje neutro es paralelo al eje X .

a) Fuerza F_y en el extremo E de la viga.

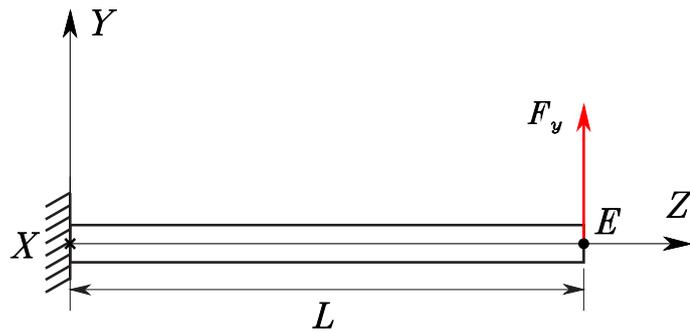


Figura 4.6: Viga en voladizo con una fuerza F_y , aplicada en el extremo de la misma.

El momento flector está dado por la siguiente expresión, vea Figura 4.6:

$$M(z) = F_y(L - z) \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.18)$$

de modo que,

$$\frac{d^2}{dz^2} y(z) = \frac{M(z)}{EI_x} = \frac{F_y(L-z)}{EI_x} \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.19)$$

Integrando la ecuación (4.19) se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{d}{dz} x(z) = \int \frac{F_x(L-z)}{EI_y} dz = \frac{F_x(L-z)^2}{2EI_y} + C_1 \quad (4.20)$$

sin embargo si se sustituye $z = 0$ se tiene que $\frac{d}{dz} y(z) = 0$, de esta forma

$$C_1 = \frac{F_y L^2}{2EI_x} \quad (4.21)$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{dz} y(z) = \frac{F_y}{2EI_x} [(L-z)^2 + L^2] \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.22)$$

y sustituyendo $z = L$ se obtiene finalmente que

$$\left. \frac{d}{dz} y(z) \right|_{z=L} = \frac{F_y L^2}{2EI_y} \quad (4.23)$$

El resultado anterior muestra una rotación alrededor del eje X pero en sentido negativo. Integrando nuevamente, ahora la ecuación (4.22) se tiene que,

$$y(z) = \int \frac{F_y}{2EI_x} [(L-z)^2 + L^2] dz = \frac{F_y}{2EI_x} \left[\frac{1}{3}(L-z)^3 + L^2 z \right] + C_2 \quad (4.24)$$

sustituyendo $z = 0$ se sabe que $y(z) = 0$ de modo que,

$$y(z) = \frac{F_y}{2EI_x} \left[\frac{1}{3}(L-z)^3 + L^2 z - \frac{L^3}{3} \right] \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.25)$$

finalmente,

$$y(z)|_{z=L} = \frac{F_y L^3}{3EI_x} \quad (4.26)$$

b) Momento M_x en el extremo E de la viga.

El momento flector está dado por (vea Figura 4.7),

$$M(z) = M_x \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.27)$$

de este modo

$$\frac{d^2}{dz^2} y(z) = \frac{M_x}{EI_x} \quad (4.28)$$

Integrando la ecuación (4.28) y aplicando las condiciones $z = 0$, $\frac{d}{dz} y(z)$ se obtiene el siguiente resultado

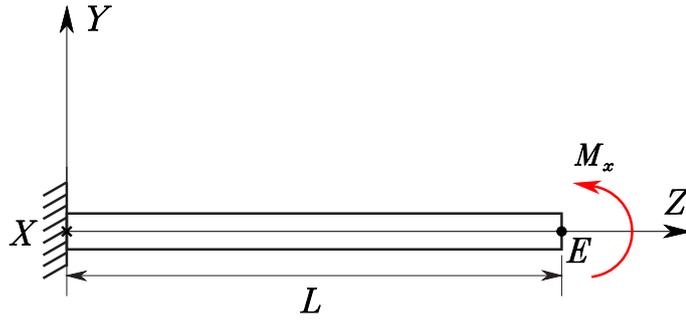


Figura 4.7: Viga en voladizo con un momento M_x , aplicado en el extremo de la misma.

$$\frac{d}{dz} y(z) = \frac{M_x}{EI_x} z \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.29)$$

particularizando para $z = L$

$$\frac{d}{dz} y(z) \Big|_{z=L} = \frac{M_x L}{EI_x} \quad (4.30)$$

Integrando nuevamente y aplicando las condiciones $z = 0$, $y(z) = 0$ esta vez para obtener el desplazamiento lineal de la viga se obtiene que,

$$y(z) = \frac{M_x z^2}{2EI_x} \quad \forall L \geq z \geq 0 \quad (4.31)$$

particularizando para $z = L$

$$y(z) \Big|_{z=L} = \frac{M_x L^2}{2EI_x} \quad (4.32)$$

Una vez obteniendo estos resultados es posible formular la siguiente matriz de flexibilidad, Patterson y Lipkin [41].

$$\delta = \mathbf{C}_E \mathbf{w} \quad (4.33)$$

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EI_y} & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI_x} & 0 & -\frac{L^2}{2EI_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI_x} & 0 & \frac{L}{EI_x} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{2EI_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{JG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Donde A es el área de sección transversal, I_x e I_y son los segundos momentos de área respecto a los ejes X y Y que pasan por el centroide de la sección transversal, E y G son el módulo de Young y el módulo cortante respectivamente, y J es el segundo momento polar de área de la sección transversal.

4.1. ELEMENTOS FLEXIBLES PRIMITIVOS.

La matriz C_E está referenciada con respecto al extremo de la viga, E , si se aplica un cambio de coordenadas a modo que la matriz C_E se encuentre ahora con respecto a sistema de referencia situado sobre el centro de masas, C , de la viga es necesario aplicar la siguiente transformación homogénea, la cual consiste solamente en una traslación a lo largo del eje Z una distancia $\frac{L}{2}$:

$$\mathbf{C}_C = (\mathbf{A}_{dj}^{-1})^T \mathbf{C}_E \mathbf{A}_{dj}^{-1} \quad (4.35)$$

donde:

$$\mathbf{A}_{dj} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ T & I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L}{2} & 0 \\ \frac{L}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Por lo que la matriz de flexibilidad final es de la forma:

$$\mathbf{C}_C = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{12EI_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{12EI_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EI_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{JG} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{C}_C \mathbf{w} \quad (4.38)$$

La matriz diagonal C_C fue previamente obtenida por Selig y Ding [42], además de concordar con lo obtenido por von Mises [43], quien obtuvo el mismo resultado por diferentes métodos.

A continuación se particulariza la matriz C_E , ecuación (4.34), para dos de los elementos flexibles más comunmente utilizados en la literatura, por ejemplo, vea Hopkins [44], Sun y Hopkins [45] y, Hopkins y Vericella [46]; y se muestra cómo a partir de la matriz de flexibilidad es posible obtener los grados de libertad de estos dos elementos. Primero se estudiará la lámina delgada, el cual es uno de los elementos flexibles primitivos más utilizados en mecanismos flexibles. Después se mostrará como al modificar un parámetro de la lámina delgada y añadiendo una condición dimensional este se puede convertir en otro tipo de elemento flexible llamado alambre.

4.1.2. Elemento flexible: lámina delgada.

Este elemento consiste en una lámina delgada de sección transversal rectangular. Los parámetros de diseño de este elemento se muestran en la Figura 4.1, con una longitud L , un grosor t y un ancho b , con el sistema de referencia mostrado en la Figura 4.8. Este elemento flexible es un caso particular de la ecuación (4.34) donde $A = bt$, $I_x = \frac{b^3t}{12}$, $I_y = \frac{bt^3}{12}$; entonces se puede afirmar que la matriz C_E para este particular caso depende de cinco parámetros de diseño independientes $p_{db} = (E, G, t, b, L)$. Cuando el grosor es suficientemente pequeño, $t \ll b$, $t \ll L$ se obtiene la denominada lámina delgada ideal Yu et. al. [26]. La ecuación (4.34) puede normalizarse de tal forma Su et. al. [47] que se puede obtener

$$C_{E_b} = \frac{L}{EI_y} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{L^2\kappa}{3} & 0 & -\frac{L\kappa}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2\eta}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L\kappa}{2} & 0 & \kappa & 0 & 0 \\ \frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\chi\beta} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

donde

$$\kappa = \frac{I_y}{I_x} = \frac{t^2}{b^2}, \quad \beta = \frac{J}{I_y}, \quad \eta = \frac{t^2}{L^2}, \quad \chi = \frac{G}{E} = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (4.40)$$

son las constantes adimensionales determinadas a partir de geometrías y propiedades del material, donde ν es la relación de Poisson. Para una sección transversal rectangular, β está definido como

$$\beta = 12 \left(\frac{1}{3} - 0.21 \frac{t}{b} \left(1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right) \right) \quad (4.41)$$

la cual si $\frac{t}{b}$ es lo suficientemente pequeña, $\beta \approx 4$, Young y Budynas [48].

Entonces, para una lámina delgada ideal, $\kappa \ll 1$ y $\eta \ll 1$, la matriz de flexibilidad, C_{E_b} , depende de cinco nuevos parámetros de diseño independientes, $p_b = (\frac{L}{EI_y}, \chi, \kappa, \eta, L)$. Ahora observe como las columnas 2, 3 y 4 de C_{E_b} son relativamente pequeñas, al punto de que es posible despreciarlas, dando como resultado desde el punto de vista cinemático que: el elemento flexible primitivo denominado lámina delgada ideal, posee 3 grados de libertad, *3DOF*: dos rotaciones alrededor de los ejes coplanares al plano descrito por la lámina rectangular y una traslación perpendicular al plano de la lámina.

Cuando ambos parámetros, ancho y grosor, b y t , respectivamente, son muy pequeños comparados con la longitud de la viga, $t \ll L$ y $b \ll L$, la lámina delgada se transforma en un elemento flexible denominado alambre.

4.1.3. Elemento flexible: alambre

Este elemento consiste en una barra larga de sección transversal circular pequeña. Los parámetros de diseño de este elemento se muestran en la Figura 4.1, con una longitud L , un radio r , con el sistema de referencia mostrado en la Figura 4.10. La matriz de flexibilidad de un alambre tiene la misma forma que la lámina delgada, exceptuando que κ no es lo suficientemente pequeña, dado que ahora el ancho y el grosor son de magnitudes similares, o para el caso de una sección transversal circular el radio, r , no es lo suficientemente pequeño como para despreciarse. La matriz de flexibilidad, C_E , puede particularizarse para el caso del alambre, sustituyendo $A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$, $I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$ y $J = 2I_x = 2I_y$ de forma que la matriz de flexibilidad para el alambre queda de la forma

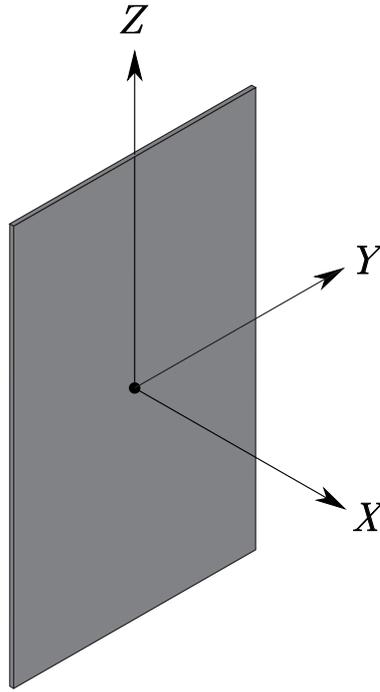


Figura 4.8: Elemento flexible: Lámina delgada.

$$C_{E_w} = \frac{L}{EI_y} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{3} & 0 & -\frac{L}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2\eta}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\chi} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

donde $\eta = \frac{d^2}{L^2}$. De este modo, si se cumple la condición $d \ll L$, este elemento flexible se denominará como alambre ideal, ahora es posible observar como la columna 3 puede despreciarse, esto implica que este elemento flexible no se deforma a lo largo de la dirección longitudinal, en este caso el eje Z . Físicamente concuerda con nuestra intuición de que un alambre flexible es rígido a lo largo de la dirección longitudinal y flexible en las otras direcciones desde el punto de vista cinemático, este elemento flexible posee 5 grados de libertad, $5DOF$: Tres rotaciones alrededor de los tres ejes y dos traslaciones perpendiculares a la longitud del alambre.

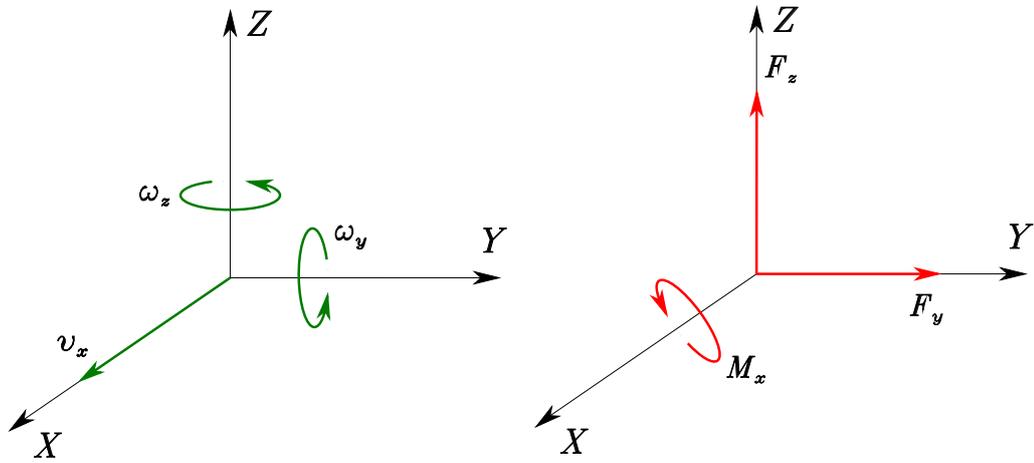


Figura 4.9: Grados de libertad (verde), 3DOF, y grados de restricción (rojo), 3DOC, del elemento flexible: Lámina delgada.

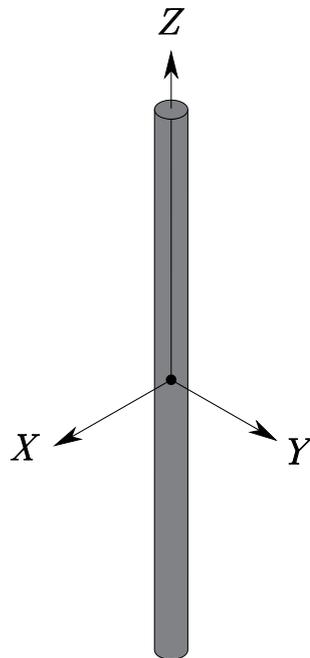


Figura 4.10: Elemento flexible: Alambre.

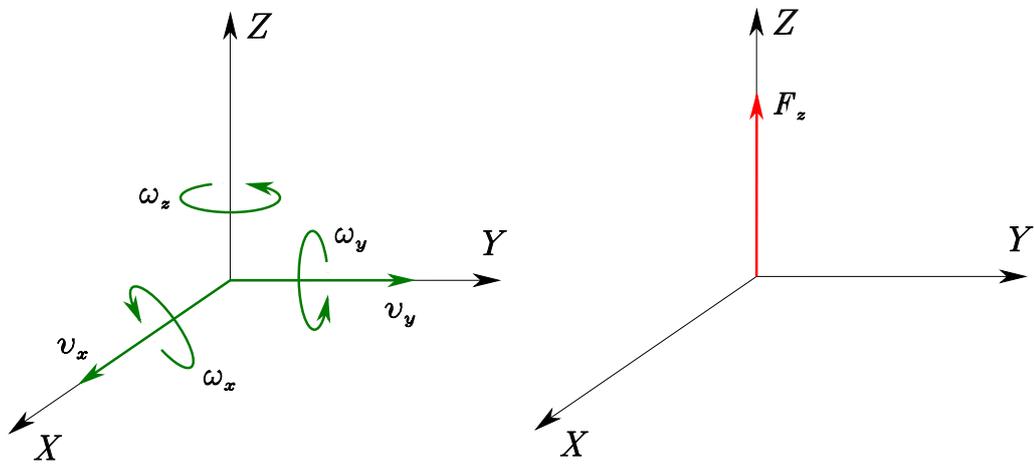


Figura 4.11: Grados de libertad (verde), 5DOF, y grados de restricción (rojo), 1DOC, del elemento flexible: Alambre.

Capítulo 5

Metodología cinemáticamente correcta para la síntesis de dispositivos flexibles.

En el presente capítulo se mostrará una metodología para lograr la síntesis de tipo de dispositivos de posicionamiento flexible, siguiendo el enfoque cinemático basado en la teoría de tornillos, isomórfica al álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$ que se describió en el Capítulo 2 del presente trabajo. Este trabajo provee una representación matemática más formal del enfoque gráfico-analítico presentado por Hopkins y Culpepper [19] y [20]. Además, se presenta la construcción de diferentes dispositivos de posicionamiento flexible, con la finalidad de generar cada una de las subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$; en algunos casos será necesario conectar estos dispositivos en serie, en paralelo o de modo híbrido, siguiendo los conceptos matemáticos expuestos en el Capítulo 3. Finalmente se estudiarán dos ejemplos encontrados en la literatura y cómo es posible sintetizar estos mecanismos flexibles de una forma cinemáticamente correcta.

5.1. Descripción de la metodología.

En el Capítulo 4 se muestran los grados de libertad, DOF, y los grados de restricción, DOC, de dos elementos flexibles más comunmente utilizados en la literatura: La lámina delgada y el alambre, quienes poseen 3DOF y 5DOF respectivamente. Ahora, bien, del Capítulo 3 se sabe que existe una dualidad entre el álgebra de Lie, $se(3)$, y su álgebra dual, $se^*(3)$ debida a la correlación asociada a la forma de Klein. Esta correlación permitirá relacionar directamente los DOF y DOC de ambos elementos flexibles ya mencionados. Con estos fundamentos es posible sintetizar diferentes tipos de dispositivos de posicionamiento flexibles, ya sea en paralelo, serie o híbridos. Siguiendo los resultados mostrados en el Capítulo 2 se procederá a sintetizar mecanismos flexibles que generen todas las subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$. Primero sintetizando dispositivos elementales de libertad para poder sintetizar dispositivos de posicionamiento flexibles en serie y dispositivos elementales de restricción para poder sintetizar dispositivos de posicionamiento flexibles en paralelo. Para lograr sintetizar estos dispositivos elementales se seguirá un procedimiento basado en la serie de artículos que ofrecen un enfoque de teoría de tornillos aplicada a mecanismos flexibles, por ejemplo vea Su et. al. [18], Su y Tari [49] y [50]. Mostrando, además, un procedimiento alternativo en uno de los dispositivos elementales de restricción, con la finalidad de darle al lector un mayor número de ideas

sobre cómo aplicar las herramientas matemáticas descritas en el presente trabajo de tesis.

La notación que se utilizará para describir a los tornillos infinitesimales será: El primer subíndice para indicar si se trata de un Twist, T , o de un Wrench, W ; además un segundo subíndice más para indicar si se trata de una rotación, r , o una traslación, t , o un movimiento de tornillo, s , para el Twist y de una fuerza lineal, f , un momento, m , o de una restricción de tornillo, también llamada wrench, w para el Wrench.

5.2. Dispositivos elementales de libertad, subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión uno.

En esta sección se sintetizarán tres dispositivos elementales de libertad, los cuales poseen 1DOF y 5DOC: El primero será capaz de permitir un rotación alrededor de una dirección, el segundo será capaz de permitir una traslación sobre una dirección, y finalmente el tercer dispositivo será capaz de permitir un movimiento de tornillo sobre una dirección dada. Cada uno de estos tres dispositivos elementales de libertad serán generadores de una subálgebra del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión uno.

5.2.1. Síntesis de un par cinemático de revoluta, R , 1DOF o 5DOC, que genere la subálgebra r_{P,u_1} .

Considere el tornillo que representa un par de revoluta, dado por la ecuación (5.1). El movimiento asociado con un par de revoluta tiene 1DOF y presenta 5DOC.

$$\$_{T_r} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{r}_r \times \mathbf{u}_r \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Sin pérdida de generalidad, es posible asumir que el eje del tornillo asociado al par cinemático de revoluta, R , $\$_{T_r}$, pasa a través del origen, es decir, $\mathbf{r}_r = (0, 0, 0)^T$ por lo tanto, se desea diseñar un dispositivo que permita el movimiento representado por el tornillo infinitesimal.

$$\$_{T_r} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

La meta puede alcanzarse mediante dos enfoques duales entre sí:

1. Desde un punto de vista de grados de libertad del movimiento. El problema consiste en generar un dispositivo flexible de 1 grado de libertad, una rotación deseada. En este caso la solución es inmediata, empleando cuerpos rígidos y un par cinemático tradicional como lo es la revoluta. En este caso no es posible emplear un dispositivo flexible.
2. Desde un punto de vista de grados de restricción. El problema consiste en generar un dispositivo flexible de 5 grados de restricción, dos momentos y tres fuerzas lineales apropiados, mediante uno o más elementos flexibles.

Para sintetizar el par cinemático de revoluta, R , en este caso se buscará obtener 5 grados de restricción, para ello se utilizarán 2 láminas delgadas. Puesto que cada una de ellas posee 3 grados

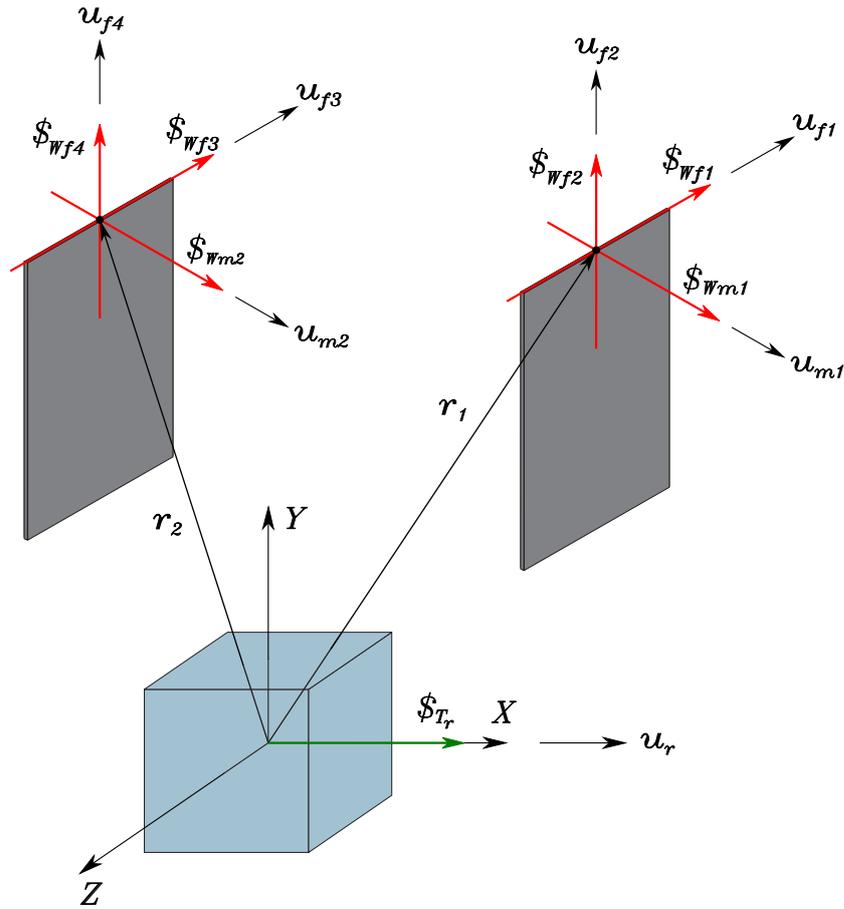


Figura 5.1: Tornillos infinitesimales asociados a las restricciones de las láminas delgadas y a la libertad deseada en el cuerpo móvil, rotación alrededor de un eje fijo.

de restricción. Resulta evidente que 1 grado de restricción será redundante. De acuerdo a la Figura 5.1 los tornillos asociados a las restricciones son:

Lámina delgada 1.

$$\mathcal{W}_{f1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{f1} \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{f1} \end{bmatrix} \quad \mathcal{W}_{f2} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{f2} \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{f2} \end{bmatrix} \quad \mathcal{W}_{m1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{m1} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

donde \mathbf{u}_{f1} , \mathbf{u}_{f2} y \mathbf{u}_{m1} constituye un sistema ortonormal.

Lámina delgada 2.

$$\mathcal{W}_{f3} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{f3} \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{f3} \end{bmatrix} \quad \mathcal{W}_{f4} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{f4} \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{f4} \end{bmatrix} \quad \mathcal{W}_{m2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{m2} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

donde \mathbf{u}_{f3} , \mathbf{u}_{f4} y \mathbf{u}_{m2} constituye un sistema ortonormal.

Además, cada uno de los tornillos asociados a las restricciones de las láminas delgadas deben aniquilar ortogonalmente al tornillo asociado al movimiento deseado, por lo tanto, la construcción

del dispositivo flexible requiere que las láminas delgadas se dispongan en paralelo.

$$Kl(\$_{T_r}, \$_{W_{f1}}) = \mathbf{u}_r \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{f1}) = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{u}_{f1} \times \mathbf{u}_r) = 0 \quad (5.5)$$

$$Kl(\$_{T_r}, \$_{W_{f2}}) = \mathbf{u}_r \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{f2}) = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{u}_{f2} \times \mathbf{u}_r) = 0 \quad (5.6)$$

$$Kl(\$_{T_r}, \$_{W_{m1}}) = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_{m1} = 0 \quad (5.7)$$

$$Kl(\$_{T_r}, \$_{W_{f3}}) = \mathbf{u}_r \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{f3}) = \mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{u}_{f3} \times \mathbf{u}_r) = 0 \quad (5.8)$$

$$Kl(\$_{T_r}, \$_{W_{f4}}) = \mathbf{u}_r \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{f4}) = \mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{u}_{f4} \times \mathbf{u}_r) = 0 \quad (5.9)$$

$$Kl(\$_{T_r}, \$_{W_{m2}}) = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_{m2} = 0 \quad (5.10)$$

Las ecuaciones (5.7) y (5.10) indican que el plano de las placas deben ser perpendiculares a la dirección del par cinemático revoluto, \mathbf{R} , \mathbf{u}_r . Sin embargo, no necesariamente \mathbf{u}_{m1} y \mathbf{u}_{m2} , deben ser perpendiculares entre sí. De las ecuaciones (5.7) y (5.10) se sabe que,

$$\mathbf{u}_r = \mu_1 \mathbf{u}_{f1} + \mu_2 \mathbf{u}_{f2} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{u}_r = \mu_3 \mathbf{u}_{f3} + \mu_4 \mathbf{u}_{f4} \quad (5.12)$$

respectivamente. Ahora bien, de las ecuaciones (5.5), (5.6), (5.8) y (5.9) se tiene que,

$$\mathbf{r}_1 \cdot [(\lambda_1 \mathbf{u}_{f1} + \lambda_2 \mathbf{u}_{f2}) \times \mathbf{u}_r] = \mathbf{r}_1 \cdot [(\lambda_1 \mathbf{u}_{f1} + \lambda_2 \mathbf{u}_{f2}) \times (\mu_1 \mathbf{u}_{f1} + \mu_2 \mathbf{u}_{f2})] = 0 \quad (5.13)$$

$$\mathbf{r}_2 \cdot [(\lambda_3 \mathbf{u}_{f3} + \lambda_4 \mathbf{u}_{f4}) \times \mathbf{u}_r] = \mathbf{r}_2 \cdot [(\lambda_3 \mathbf{u}_{f3} + \lambda_4 \mathbf{u}_{f4}) \times (\mu_3 \mathbf{u}_{f3} + \mu_4 \mathbf{u}_{f4})] = 0 \quad (5.14)$$

sin embargo, resulta evidente notar que,

$$(\lambda_1 \mathbf{u}_{f1} + \lambda_2 \mathbf{u}_{f2}) \times (\mu_1 \mathbf{u}_{f1} + \mu_2 \mathbf{u}_{f2}) = \eta_1 \mathbf{u}_{m1} \quad (5.15)$$

$$(\lambda_3 \mathbf{u}_{f3} + \lambda_4 \mathbf{u}_{f4}) \times (\mu_3 \mathbf{u}_{f3} + \mu_4 \mathbf{u}_{f4}) = \eta_2 \mathbf{u}_{m2} \quad (5.16)$$

por lo que es posible afirmar que,

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{u}_{m1} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{u}_{m2} = 0 \quad (5.17)$$

Ahora bien, si la dirección es $\mathbf{u}_r = (1, 0, 0)^T$ las direcciones \mathbf{u}_{m1} y \mathbf{u}_{m2} deben ser perpendiculares a \mathbf{u}_r . Una solución geoméricamente elegante es que sean perpendiculares entre sí.

$$\mathbf{u}_{m1} = (0, 0, 1)^T \quad \mathbf{u}_{m2} = (0, 1, 0)^T \quad (5.18)$$

por lo tanto,

$$\mathbf{u}_{f2} = \mathbf{u}_{f4} = (1, 0, 0)^T \quad \mathbf{u}_{f1} = (0, -1, 0)^T \quad \mathbf{u}_{f3} = (0, 0, 1)^T \quad (5.19)$$

$$\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0)^T \quad \mathbf{r}_2 = (0, 0, 0)^T \quad (5.20)$$

El arreglo final se muestra en la Figura 5.2, donde se seleccionó que las placas fueran perpendiculares entre sí.

Este resultado se puede verificar utilizando los tornillos que representan la libertad de movimiento. Por lo que, los tornillos asociados a la libertad de movimiento de cada una de las láminas delgadas, son los siguientes:

Lámina delgada 1.

$${}^0\mathbf{V}_{O1}^1 = [{}^0\mathcal{S}_1^1, {}^0\mathcal{S}_2^1, {}^0\mathcal{S}_3^1] = [J_1] \quad (5.21)$$

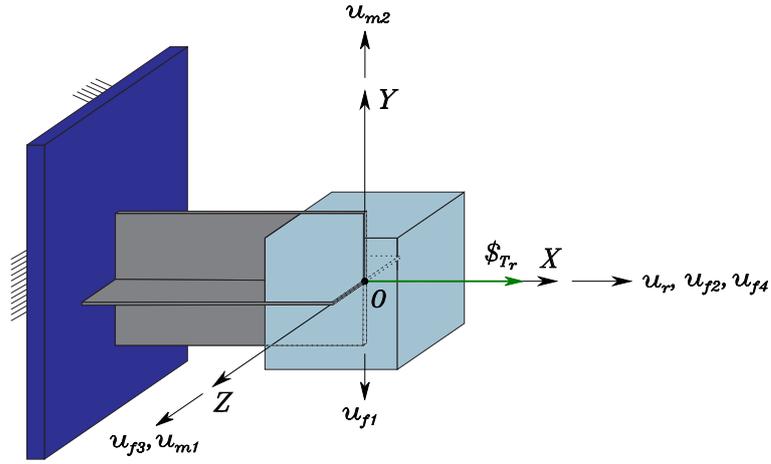


Figura 5.2: Par de revoluta, R, creada a partir de dos láminas delgadas.

donde,

$${}^0\mathcal{S}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathcal{S}_2^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathcal{S}_3^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [J_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Lámina delgada 2.

$${}^0\mathbf{V}_{O_2}^1 = [{}^0\mathcal{S}_4^1, {}^0\mathcal{S}_5^1, {}^0\mathcal{S}_6^1] = [J_2] \quad (5.23)$$

$${}^0\mathcal{S}_4^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathcal{S}_5^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathcal{S}_6^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [J_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Ahora bien, dado que ambas láminas delgadas se encuentran en paralelo, ambos subespacios de libertades deben intersectarse de modo que,

$${}^0\mathbf{V}_O^1 = {}^0\mathbf{V}_{O_1}^1 \cap {}^0\mathbf{V}_{O_2}^1 = [J_1] \cap [J_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Dando como resultado el movimiento esperado, una rotación alrededor del eje X.

5.2.2. Síntesis de un par cinemático prismático, T, 1DOF o 5DOC, que genera la subálgebra t_{u_1} .

Considere el tornillo que representa un par prismático, T, dado por la ecuación (5.26). El movimiento asociado con un par prismático tiene 1DOF y presenta 5DOC. Se desea diseñar un dispositivo flexible que permita el movimiento representado por el tornillo infinitesimal.

$$\$_{T_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

La meta puede alcanzarse mediante dos enfoques duales:

1. Desde un punto de vista de grados de libertad del movimiento. El problema consiste en generar un dispositivo flexible de 1 grado de libertad, asociada a una traslación rectilínea. En este caso la solución es inmediata, empleando cuerpos rígidos y un par cinemático tradicional como lo es el par prismático. En este caso no es posible emplear un dispositivo flexible.
2. Desde un punto de vista de grados de restricción. El problema consiste en generar un dispositivo flexible de 5 grados de restricción, dos fuerzas lineales, linealmente independientes, y tres momentos, linealmente independientes.

Para sintetizar el par cinemático prismático, T, se buscará obtener 5 grados de restricción, para ello se utilizarán 2 láminas delgadas, ya que cada una de ellas posee 3 grados de restricción. Resulta evidente que 1 grado de restricción será redundante. De acuerdo a la Figura 5.3 los tornillos asociados a las restricciones son:

Lámina delgada 1.

$$\$_{W_{f1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{f1} \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{f1} \end{bmatrix} \quad \$_{W_{f2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{f2} \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{f2} \end{bmatrix} \quad \$_{W_{m1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{m1} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

donde \mathbf{u}_{f1} , \mathbf{u}_{f2} y \mathbf{u}_{m1} constituye un sistema ortonormal.

Lámina delgada 2.

$$\$_{W_{f3}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{f3} \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{f3} \end{bmatrix} \quad \$_{W_{f4}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{f4} \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{f4} \end{bmatrix} \quad \$_{W_{m2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{m2} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

donde \mathbf{u}_{f3} , \mathbf{u}_{f4} y \mathbf{u}_{m2} constituye un sistema ortonormal.

Además cada uno de los tornillos asociados a las restricciones de las láminas delgadas deben aniquilar ortogonalmente al tornillo asociado al movimiento deseado, por lo tanto, la construcción del dispositivo flexible requiere que las láminas delgadas se dispongan en paralelo.

$$Kl(\$_{T_t}, \$_{W_{f1}}) = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_{f1} = 0 \quad (5.29)$$

$$Kl(\$_{T_t}, \$_{W_{f2}}) = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_{f2} = 0 \quad (5.30)$$

$$Kl(\$_{T_t}, \$_{W_{m1}}) = 0 \quad (5.31)$$

$$Kl(\$_{T_t}, \$_{W_{f3}}) = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_{f3} = 0 \quad (5.32)$$

$$Kl(\$_{T_t}, \$_{W_{f4}}) = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_{f4} = 0 \quad (5.33)$$

$$Kl(\$_{T_t}, \$_{W_{m1}}) = 0 \quad (5.34)$$

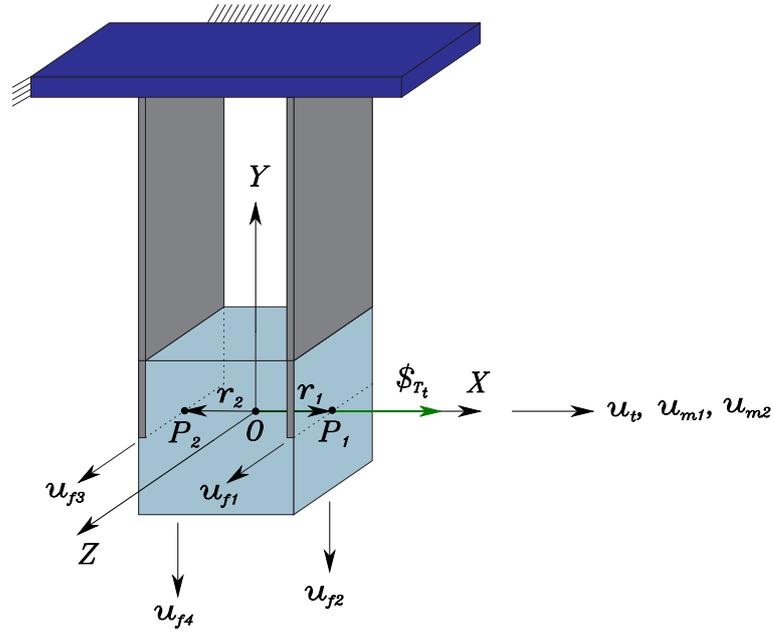


Figura 5.4: Par cinemático prismático, T, creado a partir de dos láminas delgadas.

Lámina delgada 1.

$${}^0\mathbf{V}_{O1}^1 = [{}^0\mathfrak{S}_1^1, {}^0\mathfrak{S}_2^1, {}^0\mathfrak{S}_3^1] = [J_1] \quad (5.38)$$

donde,

$${}^0\mathfrak{S}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -r_{1x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathfrak{S}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_{1x} \end{bmatrix} \quad {}^0\mathfrak{S}_3^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [J_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1x} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Lámina delgada 2.

$${}^0\mathbf{V}_{O2}^1 = [{}^0\mathfrak{S}_4^1, {}^0\mathfrak{S}_5^1, {}^0\mathfrak{S}_6^1] = [J_2] \quad (5.40)$$

$${}^0\mathfrak{S}_4^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ r_{2x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathfrak{S}_5^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{2x} \end{bmatrix} \quad {}^0\mathfrak{S}_6^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [J_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ r_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{2x} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Ahora bien, dado que ambas láminas delgadas se encuentran en paralelo, ambos subespacios de libertades deben intersectarse de modo que,

$${}^0\mathbf{V}_O^1 = {}^0\mathbf{V}_{O_1}^1 \cap {}^0\mathbf{V}_{O_2}^1 = [J_1] \cap [J_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Dando como resultado el movimiento esperado, una traslación en dirección paralela al eje X.

5.2.3. Síntesis de un par cinemático de tornillo, S, 1DOC o 5DOF, que genere la subálgebra $h_{P,\mathbf{u}_1,p}$, helicoidal.

Considere el tornillo que representa un par de tornillo, dado por la ecuación (5.43). El movimiento asociado con un par de tornillo tiene 1DOF y presenta 5DOC.

$$\mathcal{S}_{T_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{r}_s \times \mathbf{u}_s + h \mathbf{u}_s \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Sin pérdida de generalidad, es posible asumir que el eje del tornillo asociado al par cinemático de tornillo, S, \mathcal{S}_{T_s} , pasa a través del origen, es decir, $\mathbf{r}_s = (0, 0, 0)^T$ por lo tanto, se desea diseñar un dispositivo que permita el movimiento representado por el tornillo infinitesimal.

$$\mathcal{S}_{T_s} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ h \mathbf{u}_s \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

La meta puede alcanzarse mediante dos enfoques duales:

1. Desde un punto de vista de grados de libertad del movimiento. El problema consiste en generar un dispositivo flexible de 1 grado de libertad, un movimiento de tornillo. En este caso la solución es inmediata, empleando cuerpos rígidos y un par cinemático tradicional como lo es el par de tornillo, sin embargo en este caso no es posible emplear un elemento flexible de forma directa.
2. Desde un punto de vista de grados de restricción. El problema consiste en generar un dispositivo flexible de 5 grados de restricción, dos fuerzas lineales, dos momentos y una restricción de tornillo empleando elementos flexibles.

Para sintetizar el par cinemático de tornillo, S, se buscará obtener 5 grados de restricción, para ello se utilizarán 5 alambres, ya que cada una de ellos posee 1 grados de restricción. De acuerdo a la Figura 5.5 los tornillos asociados a las restricciones son:

Condiciones para el i-ésimo alambre.

$$\mathcal{S}_{W_{fi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{fi} \\ \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_{fi} \end{bmatrix}, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (5.45)$$

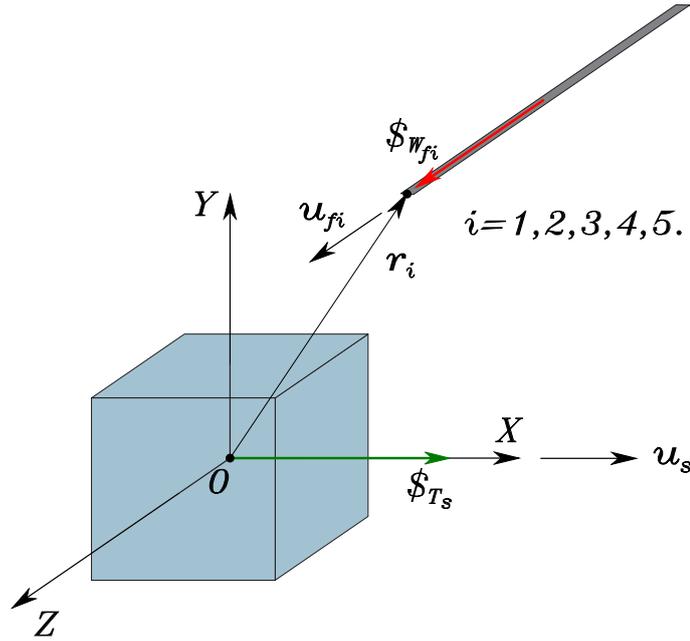


Figura 5.5: Tornillos infinitesimales asociados a las restricciones de las láminas delgadas y a la libertad deseada en el cuerpo móvil, traslación rectilínea en una dirección.

Además cada uno de los tornillos asociados a las restricciones de los alambres deben aniquilar ortogonalmente al tornillo asociado al movimiento deseado, por lo tanto, la construcción del dispositivo flexible requiere que los alambres se dispongan en paralelo.

$$\begin{aligned} Kl(\$T_s, \$W_{fi}) &= \mathbf{u}_s \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_{fi}) + h \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_{fi} = \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{u}_{fi} \times \mathbf{u}_s) + h \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_{fi} = 0 \\ &= \mathbf{u}_s \cdot [\mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_{fi} + h \mathbf{u}_{fi}] = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned} \quad (5.46)$$

De la ecuación (5.46) puede suponerse sin pérdida de generalidad que \mathbf{r}_i es perpendicular a \mathbf{u}_{fi} , por lo tanto, dos condiciones necesarias, pero no suficientes son las siguientes,

$$\mathbf{u}_s \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_{fi}) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_s \cdot (\mathbf{u}_{fi}) = 0 \quad (5.47)$$

Dada la ecuación (5.47) parece lógico que cada par de alambres evite la rotación y traslación alrededor y a lo largo de un eje. Esto nos conduce una solución con cuatro alambres, logrando un movimiento cilíndrico, que corresponde a una rotación alrededor de una dirección fija, más una traslación independiente en la misma dirección, sin embargo para lograr obtener un par cinemático de tornillo es necesario que ambos movimientos sean dependientes, es decir, aun es necesario encontrar un alambre que logre restringir un wrench con paso de igual magnitud, pero de signo contrario al movimiento de tornillo esperado. Para ello, resulta evidente que la tercera condición será la siguiente

$$\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{u}_{fi} \times \mathbf{u}_s) + h \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_{fi} = 0 \quad (5.48)$$

donde, el vector \mathbf{u}_{fi} debe ser elemento de \mathbf{u}_s , $\mathbf{u}_{fi} \in \mathbf{u}_s$, sin embargo no deben ser paralelos entre sí ($\mathbf{u}_{fi} \times \mathbf{u}_s \neq 0$), el vector posición debe ser perpendicular a ambas direcciones, $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{u}_{fi}, \mathbf{u}_s$, y además su magnitud debe ser igual al paso del movimiento de tornillo pero con signo contrario $|\mathbf{r}_i| = -h$.

5.2. DISPOSITIVOS ELEMENTALES DE LIBERTAD, SUBÁLGEBRAS DEL ÁLGEBRA DE LIE, $SE(3)$, DE DIMENSIÓN UNO.

Si el par cinemático de tornillo, S , coincide con el eje X se tiene que, $\mathbf{u}_s = (1, 0, 0)^T$, y si el paso del tornillo para este ejemplo es igual a $-h$, entonces, de las condiciones (5.47)

$$\mathbf{u}_{f1} = \mathbf{u}_{f2} = (0, 1, 0)^T \quad \mathbf{r}_1 = (0, 0, 0)^T \quad \mathbf{r}_2 = (r_{2x}, 0, 0)^T \quad (5.49)$$

además,

$$\mathbf{u}_{f3} = -\mathbf{u}_{f4} = (0, 0, -1)^T \quad \mathbf{r}_3 = (0, 0, 0)^T \quad \mathbf{r}_4 = (r_{4x}, 0, 0)^T \quad (5.50)$$

y finalmente, con la condición (5.48)

$$\mathbf{u}_{f5} = (1, 0, 1)^T \quad \mathbf{r}_5 = (0, h, 0)^T \quad (5.51)$$

debe notarse que este último alambre es el encargado de generar la restricción de tipo wrench con un paso de igual magnitud pero de diferente signo al movimiento esperado.

El arreglo final se puede observar en la Figura 5.6

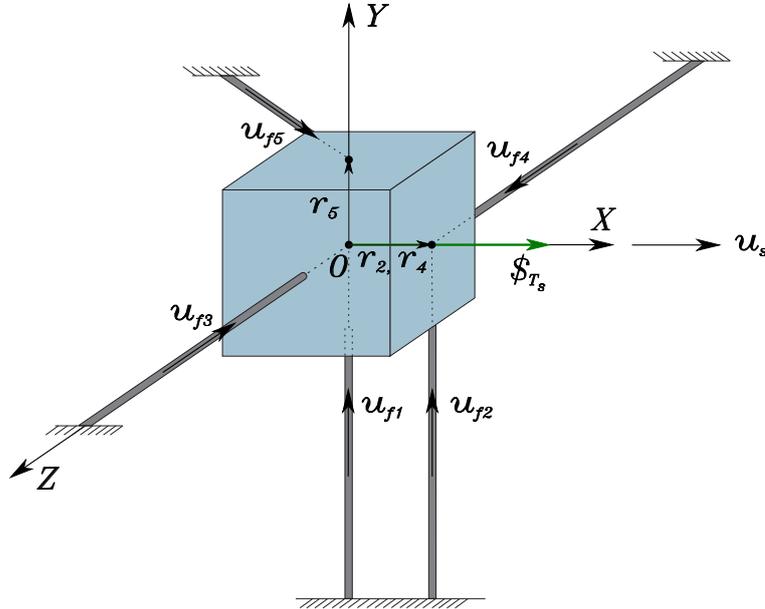


Figura 5.6: Par cinemático de tornillo, S , creado a partir de cinco alambres.

Este resultado se puede verificar utilizando los tornillos que representan una restricción al movimiento. Por lo que, los tornillos asociados a las restricciones del movimiento de cada uno de los alambres, son los siguientes:

Alambres.

$${}^0\mathbf{F}_{O1}^1 = [{}^0\mathcal{S}_1^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{F}_{O2}^1 = [{}^0\mathcal{S}_2^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_{2x} \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{F}_{O3}^1 = [{}^0\mathcal{S}_3^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$${}^0\mathbf{F}_{O4}^1 = [{}^0\mathcal{S}_4^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ r_{4x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbf{F}_{O5}^1 = [{}^0\mathcal{S}_5^1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ h \\ 0 \\ -h \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Dado que estamos tratando con restricciones la suma de todas ellas está representada por la siguiente matriz:

$${}^0\mathbf{F}_{O1}^1 + {}^0\mathbf{F}_{O2}^1 + {}^0\mathbf{F}_{O3}^1 + {}^0\mathbf{F}_{O4}^1 + {}^0\mathbf{F}_{O5}^1 = [J_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & r_{4x} & 0 \\ 0 & r_{2x} & 0 & 0 & -h \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

al aplicar el mapeo σ_{Kl}^{\vee} a la matriz resultante de la suma de restricciones, $[J_1]$, se obtiene el siguiente resultado:

$$\sigma_{Kl}^{\vee}([J_1]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Dando como resultado el movimiento esperado, un movimiento de tornillo a lo largo del eje X .

5.3. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$, a partir de dispositivos seriales.

La clasificación de las subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, se organiza con base en la dimensión de las respectivas subálgebras, tal como se muestra en la Figura 2.5.

5.3.1. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión uno.

Las subálgebras de dimensión uno ya se analizaron en la sección anterior, cada uno de los dispositivos elementales de libertad sintetizados generan las subálgebras de dimensión uno.

5.3.2. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión dos.

Para las subálgebras de dimensión dos es necesario obtener la suma directa de dos subálgebras de dimensión uno, por lo que los pares cinemáticos anteriormente sintetizados son colocados en serie.

Subálgebra $t_{u_1}^\perp$, traslación plana.

Corresponde a traslaciones sobre un plano, en este caso el plano se supone perpendicular al eje Z. Se realiza la suma directa de dos subálgebras de prismático, r_{P,u_1} .

$${}^0V_O^2 = {}^0V_O^1 + {}^1V_O^2 \quad (5.56)$$

Donde

$${}^0V_O^1 = [{}^0\mathcal{S}_O^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1V_O^2 = [{}^1\mathcal{S}_O^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Finalmente el movimiento del efector final es el deseado. El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.7.

$${}^0V_O^2 = {}^0V_O^1 + {}^1V_O^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

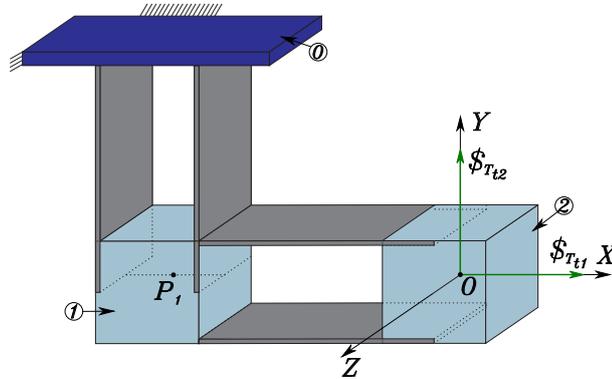


Figura 5.7: Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra $t_{u_1}^\perp$, traslación plana.

Subálgebra C_{P,u_1} , cilíndrico.

Corresponde a una rotación alrededor de un eje fijo, más una traslación independiente en la misma dirección, en este caso suponga que la dirección de la rotación y traslación es el eje X. Se realiza la suma directa entre una subálgebra r_{P,u_1} y otra subálgebra t_{u_1} .

$${}^0V_O^2 = {}^0V_O^1 + {}^1V_O^2 \quad (5.59)$$

Donde

$${}^0\mathbf{V}_O^1 = [{}^0\mathcal{S}_O^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{V}_O^2 = [{}^1\mathcal{S}_O^2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Finalmente el movimiento del efector final es el deseado. El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.8.

$${}^0\mathbf{V}_O^2 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

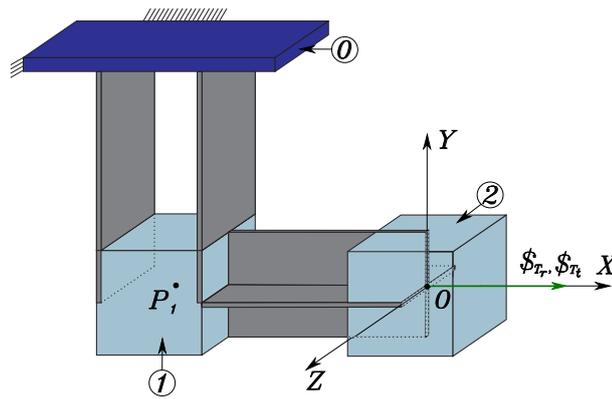


Figura 5.8: Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra C_{P,u_1} , cilíndrico.

5.3.3. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión tres.

Para las subálgebras de dimensión dos es necesario realizar la suma directa de tres subálgebras de dimensión uno, o bien, la suma directa entre una subálgebra de dimensión uno y una subálgebra de dimensión dos, por lo que los mecanismos flexibles anteriormente sintetizados serán colocados en serie.

Subálgebra t_{u_1, u_2, u_3} , traslación espacial.

Corresponde a las traslaciones espaciales de un cuerpo rígido. A continuación se muestra el mecanismo que está formado por tres pares prismáticos, el cual genera la subálgebra de traslación espacial.

$${}^0\mathbf{V}_O^3 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 + {}^2\mathbf{V}_O^3 \quad (5.62)$$

5.3. SUBÁLGEBRAS DEL ÁLGEBRA DE LIE, $SE(3)$, A PARTIR DE DISPOSITIVOS SERIALES.

Donde

$${}^0\mathbf{V}_O^1 = [{}^0\mathcal{S}_O^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{V}_O^2 = [{}^1\mathcal{S}_O^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{V}_O^3 = [{}^2\mathcal{S}_O^3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Finalmente el movimiento del efector final es el deseado. El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.9.

$${}^0\mathbf{V}_O^3 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 + {}^2\mathbf{V}_O^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

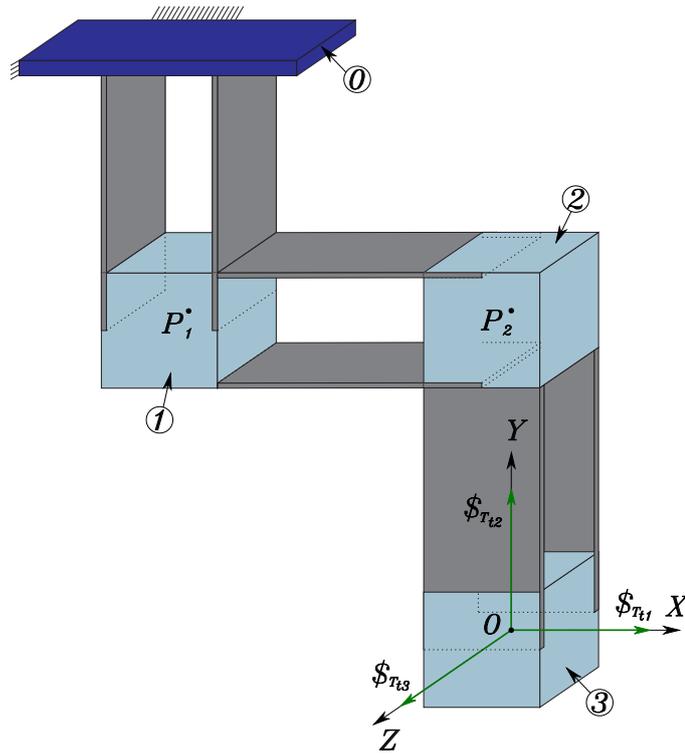


Figura 5.9: Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra t_{u_1, u_2, u_3} , traslación espacial.

Subálgebra g_{u_1} , movimientos planos.

Corresponde a traslaciones en un plano y una rotación alrededor de un eje perpendicular a ese plano. A continuación se muestran el mecanismo formado por la conexión serial de dos pares prismáticos y un par de revoluta, este mecanismo genera la subálgebra de movimientos planos.

$${}^0\mathbf{V}_O^3 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 + {}^2\mathbf{V}_O^3 \quad (5.65)$$

Donde

$${}^0\mathbf{V}_O^1 = [{}^0\mathcal{S}_O^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{V}_O^2 = [{}^1\mathcal{S}_O^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{V}_O^3 = [{}^2\mathcal{S}_O^3] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Finalmente el movimiento del efector final es el deseado. El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.10.

$${}^0\mathbf{V}_O^3 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 + {}^2\mathbf{V}_O^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Subálgebra s_O , esférica.

Corresponde a todas las rotaciones alrededor de un punto fijo. A continuación se muestra el mecanismo formado por tres pares de revoluta cuyos ejes de rotación son perpendiculares e intersectan en un mismo punto, este mecanismo genera la subálgebra esférica.

$${}^0\mathbf{V}_O^3 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 + {}^2\mathbf{V}_O^3 \quad (5.68)$$

Donde

$${}^0\mathbf{V}_O^1 = [{}^0\mathcal{S}_O^1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{V}_O^2 = [{}^1\mathcal{S}_O^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{V}_O^3 = [{}^2\mathcal{S}_O^3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

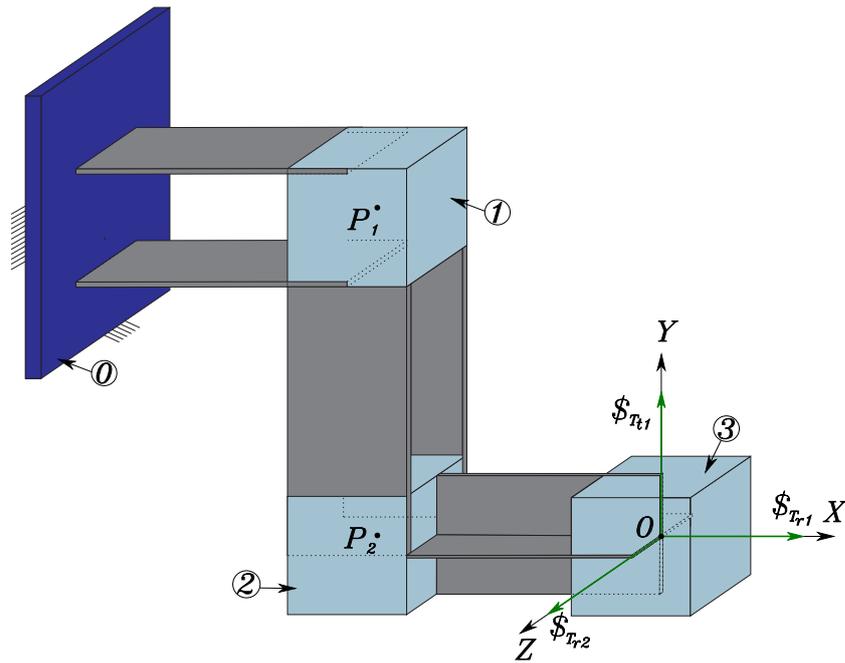


Figura 5.10: Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra g_{u_1} , movimientos planos.

Finalmente el movimiento del efector final es el deseado. El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.11.

$${}^0\mathbf{V}_O^3 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 + {}^2\mathbf{V}_O^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

Debe notarse que los cuerpos rígidos que conectan los dispositivos flexibles son de arquitectura tal que los ejes de las revolutas se intersectan en un punto en común.

Subálgebra $y_{u_1,p}$, traslación plana de un desplazamiento helicoidal.

Corresponde a las traslaciones en un plano, además de un movimiento de tornillo paralelo ese plano. El mecanismo que se muestra está formado por dos pares de revoluta y un par helicoidal conectados en serie, este mecanismo genera la subálgebra de traslación plana de un desplazamiento helicoidal.

$${}^0\mathbf{V}_O^3 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 + {}^2\mathbf{V}_O^3 \quad (5.71)$$

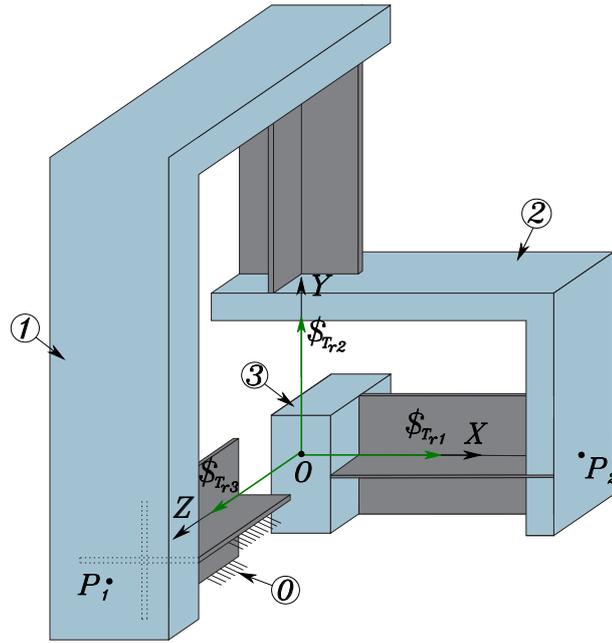


Figura 5.11: Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra s_O , esférica.

Donde

$${}^0\mathbf{V}_O^1 = [{}^0\$_O^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{V}_O^2 = [{}^1\$_O^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{V}_O^3 = [{}^2\$_O^3] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

Finalmente el movimiento del efector final es el deseado. El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.12.

$${}^0\mathbf{V}_O^3 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 + {}^2\mathbf{V}_O^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

5.3.4. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión cuatro.

Para el caso de las subálgebras de dimensión cuatro, se realizaron dos versiones de mecanismo flexibles, uno serial, es decir, sumando cuatro libertades para lograr 4DOF y otro en paralelo, es decir, sumando dos restricciones para lograr 2DOC.

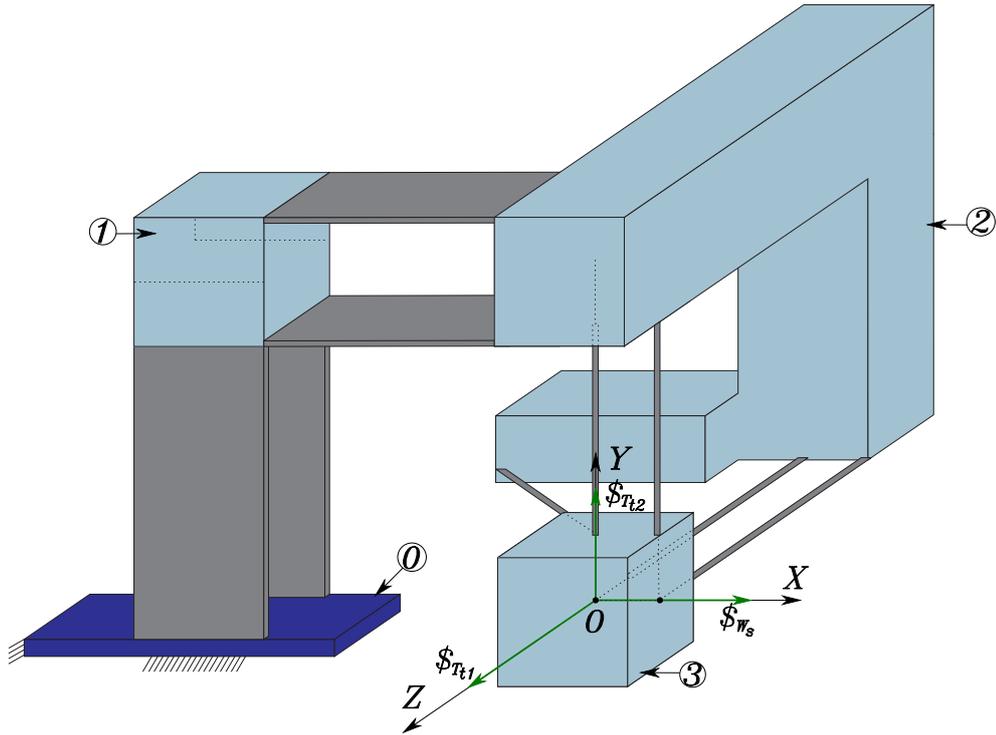


Figura 5.12: Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra $y_{u_1,p}$, traslación plana de un desplazamiento helicoidal.

Subálgebra x_{u_1} , Schönflies.

Corresponde a traslaciones en el espacio, además de una rotación alrededor de un eje.

$${}^0\mathbf{V}_O^4 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 + {}^2\mathbf{V}_O^3 + {}^3\mathbf{V}_O^4 \quad (5.74)$$

Donde

$${}^0\mathbf{V}_O^1 = [{}^0\mathcal{S}_O^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^1\mathbf{V}_O^2 = [{}^1\mathcal{S}_O^2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^2\mathbf{V}_O^3 = [{}^2\mathcal{S}_O^3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; {}^3\mathbf{V}_O^4 = [{}^3\mathcal{S}_O^4] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Finalmente el movimiento del efector final es el deseado. El dispositivo flexible se muestra en

la Figura 5.13.

$${}^0\mathbf{V}_O^4 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 + {}^2\mathbf{V}_O^3 + {}^3\mathbf{V}_O^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

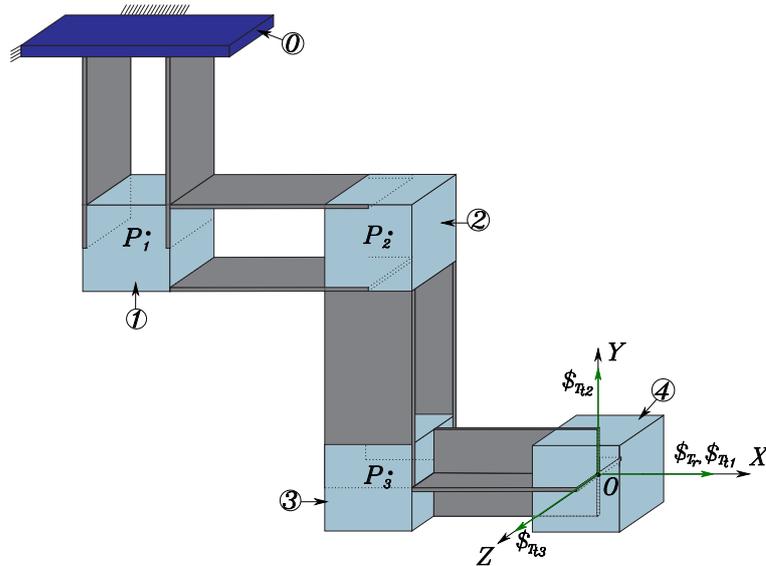


Figura 5.13: Mecanismo flexible en serie que genera la subálgebra x_{u_1} , Schönflies.

5.4. Dispositivos elementales de restricción, subespacios del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión cinco.

En esta sección se sintetizarán tres dispositivos elementales de restricción, los cuales poseen 5DOF y 1DOC: El primero será capaz de restringir un rotación alrededor de una dirección, es decir, capaz de generar un momento; el segundo será capaz de restringir una traslación sobre una dirección, es decir, un fuerza lineal y finalmente el tercer dispositivo será capaz de restringir un movimiento de tornillo sobre una dirección dada, es decir, un wrench. Cada uno de estos tres dispositivos elementales de libertad serán generadores de un subespacio del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión cinco.

5.4.1. Síntesis de una restricción de momento, M, 1DOC o 5DOF.

Considere el tornillo que representa una restricción de momento, M, dado por la ecuación (5.77). La restricción asociada con un momento, M, tiene 1DOC y presenta 5DOF; se desea diseñar un dispositivo flexible que restrinja un movimiento de rotación, es decir, debe generar un fuerza de tipo momento, y permita los demás movimientos, representado por el tornillo infinitesimal.

5.4. DISPOSITIVOS ELEMENTALES DE RESTRICCIÓN, SUBESPACIOS DEL ÁLGEBRA DE LIE, $SE(3)$, DE DIMENSIÓN CINCO.

$$\mathcal{W}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

La meta puede alcanzarse mediante dos enfoques duales:

1. Desde un punto de vista de grados de libertad del movimiento. El problema consiste en generar un dispositivo flexible de 5 grados de libertad, dos rotaciones y tres traslaciones.
2. Desde un punto de vista de grados de restricción. El problema consiste en generar 1 grado de restricción, un momento. El resultado no es inmediato dado que no existe, de momento, un elemento flexible primitivo que contenga 1DOC de este tipo.

Para sintetizar un dispositivo flexible que imponga una restricción de momento, M , se alcanzará generando 5 grados de libertad, es decir, si se observa desde un punto de vista de libertades tomaremos 2 láminas delgadas, cada una de estas láminas delgadas posee 3DOF por lo que resulta evidente que una libertad será redundante. De acuerdo a la Figura 5.14 los tornillos asociados a los movimientos permitidos por ambas láminas delgadas son los siguientes:

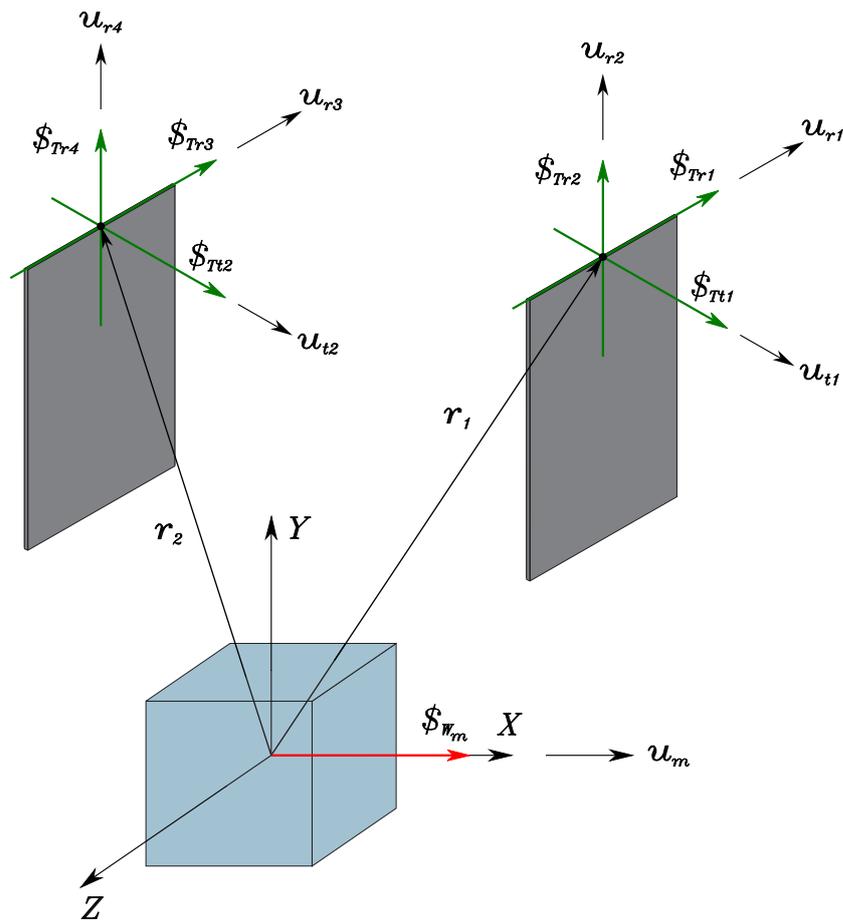


Figura 5.14: Tornillos infinitesimales asociados a las libertades de las láminas delgadas y a la restricción deseada en el cuerpo móvil, un momento en la dirección del eje X .

Lámina delgada 1.

$$\$_{T_{r1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r1} \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{r1} \end{bmatrix} \quad \$_{T_{r2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r2} \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{r2} \end{bmatrix} \quad \$_{T_{t1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{t1} \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

donde \mathbf{u}_{r1} , \mathbf{u}_{r2} y \mathbf{u}_{t1} constituyen un sistema ortonormal.

Lámina delgada 2.

$$\$_{T_{r3}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r3} \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{r3} \end{bmatrix} \quad \$_{T_{r4}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r4} \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{r4} \end{bmatrix} \quad \$_{T_{t2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{t2} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

donde \mathbf{u}_{r3} , \mathbf{u}_{r4} y \mathbf{u}_{t2} constituyen un sistema ortonormal.

Además, cada uno de los tornillos asociados a las libertades de las láminas delgadas deben aniquilar ortogonalmente al tornillo asociado a la restricción deseada, por lo tanto:

$$Kl(\$_{W_m}, \$_{T_{r1}}) = \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_{r1} = 0 \quad (5.80)$$

$$Kl(\$_{W_m}, \$_{T_{r2}}) = \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_{r2} = 0 \quad (5.81)$$

$$Kl(\$_{W_m}, \$_{T_{t1}}) = 0 \quad (5.82)$$

$$Kl(\$_{W_m}, \$_{T_{r3}}) = \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_{r3} = 0 \quad (5.83)$$

$$Kl(\$_{W_m}, \$_{T_{r4}}) = \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_{r4} = 0 \quad (5.84)$$

$$Kl(\$_{W_m}, \$_{T_{t2}}) = 0 \quad (5.85)$$

De las ecuaciones (5.80) y (5.81) implican que el plano de la lámina delgada 1 debe ser perpendicular a la dirección de la restricción de momento, M , \mathbf{u}_m y las ecuaciones (5.83) y (5.84) implican que el plano de la lámina delgada 2 es perpendicular a la dirección de la restricción de momento, M , \mathbf{u}_m . Para este caso no existen condiciones para \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , sin embargo se debe recordar que al estar haciendo una suma de libertades es necesario conectar los cuerpos rígidos en serie.

Por ejemplo, si la restricción de momento, M , la situamos sobre el eje X se tiene que, $\mathbf{u}_M = (1, 0, 0)^T$, entonces

$$\mathbf{u}_{t1} = \mathbf{u}_{t2} = (1, 0, 0)^T \quad (5.86)$$

por lo tanto,

$$\mathbf{u}_{r1} = \mathbf{u}_{r3} = (0, 0, 1)^T \quad \mathbf{u}_{r2} = \mathbf{u}_{r4} = (0, -1, 0)^T \quad (5.87)$$

y

$$\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0)^T \quad \mathbf{r}_2 = (-r_{2x}, 0, 0)^T \quad (5.88)$$

El arreglo final se puede observar en la Figura 5.15. El resultado se puede verificar mediante las matrices Jacobianas que representan los grados de libertad.

Utilizando libertades se observa que, los tornillos asociados a las libertades de cada una de las láminas delgadas, son los siguientes:

Lámina delgada 1.

$${}^0\mathbf{V}_O^1 = [{}^0\mathfrak{S}_1^1, {}^0\mathfrak{S}_2^1, {}^0\mathfrak{S}_3^1] = [J_1] \quad (5.89)$$

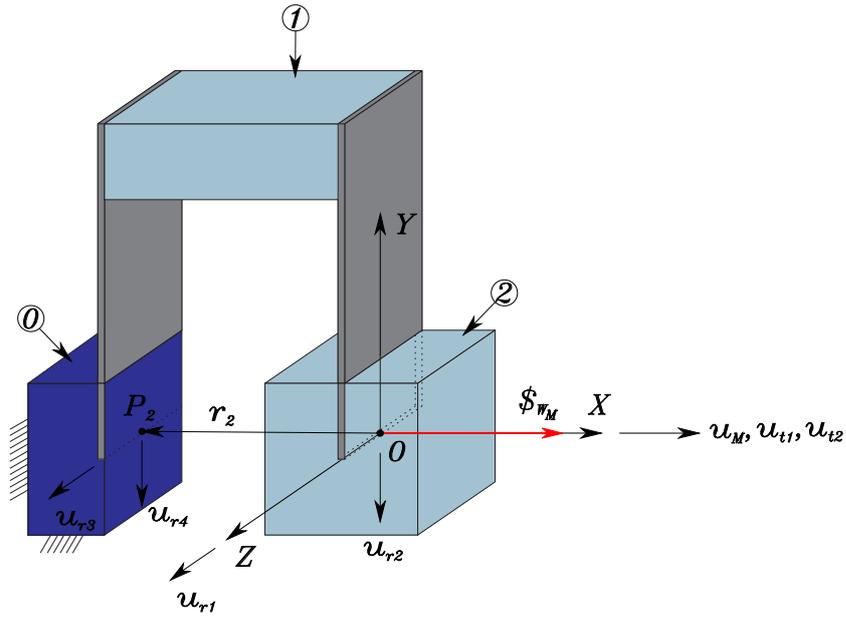


Figura 5.15: Restricción de momento, M , creada a partir de dos láminas delgadas.

$${}^0\mathfrak{F}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathfrak{F}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathfrak{F}_3^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [J_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

Lámina delgada 2.

$${}^1\mathbf{V}_O^2 = [{}^1\mathfrak{F}_4^2, {}^1\mathfrak{F}_5^2, {}^1\mathfrak{F}_6^2] = [J_2] \quad (5.91)$$

$${}^0\mathfrak{F}_4^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ r_{2x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathfrak{F}_5^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{2x} \end{bmatrix} \quad {}^0\mathfrak{F}_6^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [J_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ r_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{2x} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

Ahora bien, dado que ambas láminas delgadas se encuentran en serie, ambos subespacios de libertades deben sumarse de modo que,

$${}^0\mathbf{V}_O^2 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 = [J_1] + [J_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & r_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_{2x} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

donde el rango de la matriz resultante es 5, de modo que, al aplicar el mapeo σ_{Kl}^V a la matriz resultante de la suma $[J_1] + [J_2]$ se obtiene el siguiente resultado:

$$\sigma_{Kl}^V([J_1] + [J_2]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

De esta forma se observa que el resultado es el esperado, una restricción de momento, M, a lo largo del eje X.

5.4.2. Síntesis de una restricción de fuerza lineal, F, 1DOC o 5DOF.

El tornillo infinitesimal asociado a la restricción de fuerza lineal, F, se muestra en la ecuación (5.95)

$$\$_{W_f} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{r}_f \times \mathbf{u}_f \end{bmatrix}. \quad (5.95)$$

Sin pérdida de generalidad, es posible asumir que el eje del tornillo de la restricción, F, $\$_{W_f}$, pasa a través del origen, es decir, $\mathbf{r}_f = (0, 0, 0)^T$ por lo tanto,

$$\$_{W_f} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.96)$$

La meta puede alcanzarse mediante dos distintos enfoques:

1. Desde un punto de vista de grados de libertad. El problema consiste en generar un dispositivo flexible de 5 grados de libertad, tres rotaciones y dos traslaciones.
2. Desde un punto de vista de grados de restricción. El problema consiste en generar un dispositivo flexible de 1 grado de restricción, una fuerza lineal. Debe notarse que el resultado puede ser directo si se utiliza un alambre como elemento flexible, sin embargo para el presente caso se aplicará la metodología utilizando placas delgadas como elementos flexibles.

Para sintetizar la restricción lineal, F, en este caso se buscará generar 5 grados de libertad, para ello se utilizarán 2 láminas delgadas, ya que cada una de ellas posee 3 grados de libertad, resulta evidente que 1 grado de libertad será redundante.

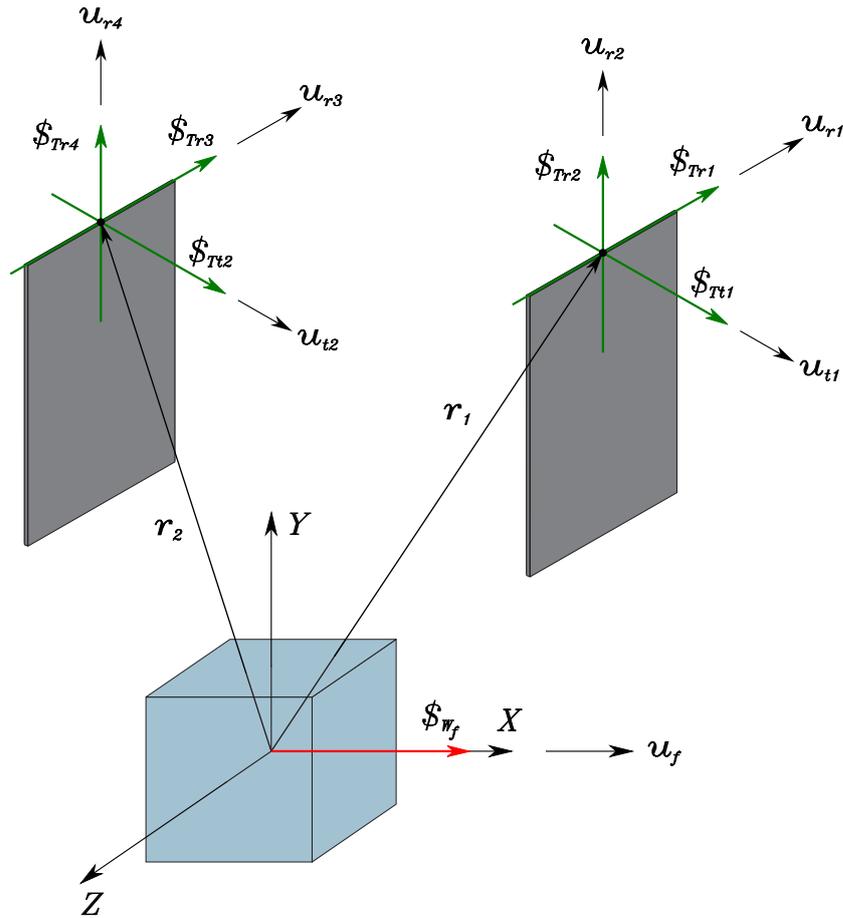


Figura 5.16: Tornillos infinitesimales asociados a las libertades de las láminas delgadas y a la restricción deseada en el cuerpo móvil.

Utilizando libertades se observa que, los tornillos asociados a las libertades de cada una de las láminas delgadas, son los siguientes:

Lámina delgada 1.

$$\$_{T_{r1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r1} \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{r1} \end{bmatrix} \quad \$_{T_{r2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r2} \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{r2} \end{bmatrix} \quad \$_{T_{t1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{t1} \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

donde \mathbf{u}_{r1} , \mathbf{u}_{r2} y \mathbf{u}_{t1} constituyen un sistema ortonormal.

Lámina delgada 2.

$$\$_{T_{r3}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r3} \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{r3} \end{bmatrix} \quad \$_{T_{r4}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r4} \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{r4} \end{bmatrix} \quad \$_{T_{t2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{t2} \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

donde \mathbf{u}_{r3} , \mathbf{u}_{r4} y \mathbf{u}_{t2} constituyen un sistema ortonormal.

Por lo que, cada uno de los tornillos asociados a las libertades de las láminas delgadas deben

aniquilar ortogonalmente al tornillo asociado a la restricción deseada, por lo tanto:

$$Kl(\$_{W_f}, \$_{T_{r_1}}) = \mathbf{u}_f \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{r_1}) = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{u}_{r_1} \times \mathbf{u}_f) = 0 \quad (5.99)$$

$$Kl(\$_{W_f}, \$_{T_{r_2}}) = \mathbf{u}_f \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_{r_2}) = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{u}_{r_2} \times \mathbf{u}_f) = 0 \quad (5.100)$$

$$Kl(\$_{W_f}, \$_{T_{t_1}}) = \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_{t_1} = 0 \quad (5.101)$$

$$Kl(\$_{W_f}, \$_{T_{r_3}}) = \mathbf{u}_f \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{r_3}) = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{u}_{r_3} \times \mathbf{u}_f) = 0 \quad (5.102)$$

$$Kl(\$_{W_f}, \$_{T_{r_4}}) = \mathbf{u}_f \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_{r_4}) = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{u}_{r_4} \times \mathbf{u}_f) = 0 \quad (5.103)$$

$$Kl(\$_{W_f}, \$_{T_{t_2}}) = \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_{t_2} = 0 \quad (5.104)$$

Las ecuaciones (5.101) y (5.104) indican que el plano de las placas deben ser perpendiculares a la dirección de la restricción de fuerza lineal, F , \mathbf{u}_f . Sin embargo, no necesariamente \mathbf{u}_{t_1} y \mathbf{u}_{t_2} , deben ser perpendiculares entre sí. De las ecuaciones (5.101) y (5.104) se sabe que,

$$\mathbf{u}_f = \mu_1 \mathbf{u}_{r_1} + \mu_2 \mathbf{u}_{r_2} \quad (5.105)$$

$$\mathbf{u}_f = \mu_3 \mathbf{u}_{r_3} + \mu_4 \mathbf{u}_{r_4} \quad (5.106)$$

respectivamente. Ahora bien, de las ecuaciones (5.99), (5.100), (5.102) y (5.103) se tiene que,

$$\mathbf{r}_1 \cdot [(\lambda_1 \mathbf{u}_{r_1} + \lambda_2 \mathbf{u}_{r_2}) \times \mathbf{u}_f] = \mathbf{r}_1 \cdot [(\lambda_1 \mathbf{u}_{r_1} + \lambda_2 \mathbf{u}_{r_2}) \times (\mu_1 \mathbf{u}_{r_1} + \mu_2 \mathbf{u}_{r_2})] = 0 \quad (5.107)$$

$$\mathbf{r}_2 \cdot [(\lambda_3 \mathbf{u}_{r_3} + \lambda_4 \mathbf{u}_{r_4}) \times \mathbf{u}_f] = \mathbf{r}_2 \cdot [(\lambda_3 \mathbf{u}_{r_3} + \lambda_4 \mathbf{u}_{r_4}) \times (\mu_3 \mathbf{u}_{r_3} + \mu_4 \mathbf{u}_{r_4})] = 0 \quad (5.108)$$

sin embargo, resulta evidente notar que,

$$(\lambda_1 \mathbf{u}_{r_1} + \lambda_2 \mathbf{u}_{r_2}) \times (\mu_1 \mathbf{u}_{r_1} + \mu_2 \mathbf{u}_{r_2}) = \eta_1 \mathbf{u}_{t_1} \quad (5.109)$$

$$(\lambda_3 \mathbf{u}_{r_3} + \lambda_4 \mathbf{u}_{r_4}) \times (\mu_3 \mathbf{u}_{r_3} + \mu_4 \mathbf{u}_{r_4}) = \eta_2 \mathbf{u}_{t_2} \quad (5.110)$$

por lo que es posible afirmar que,

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{u}_{t_1} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{u}_{t_2} = 0 \quad (5.111)$$

Ahora bien, si la dirección es $\mathbf{u}_f = (1, 0, 0)^T$ las direcciones \mathbf{u}_{t_1} y \mathbf{u}_{t_2} deben ser perpendiculares, de este modo se toman dos direcciones linealmente independientes, no necesariamente ortogonales, sin embargo para el presente caso, se optó por situarlos de forma ortogonal.

$$\mathbf{u}_{t_1} = (0, 1, 0)^T \quad \mathbf{u}_{t_2} = (0, 0, 1)^T \quad (5.112)$$

por lo tanto,

$$\mathbf{u}_{r_1} = (0, 0, 1)^T \quad \mathbf{u}_{r_3} = (0, -1, 0)^T \quad \mathbf{u}_{r_2} = \mathbf{u}_{r_4} = (1, 0, 0)^T \quad (5.113)$$

y

$$\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0)^T \quad \mathbf{r}_2 = (-r_{2x}, 0, 0)^T \quad (5.114)$$

dado que se está realizando una suma de libertades es necesario situar las láminas delgadas en serie.

El arreglo final se puede observar en la Figura 5.17

Utilizando libertades se observa que, los tornillos asociados a las libertades de cada una de las láminas delgadas, son los siguientes:

Lámina delgada 1.

$${}^0\mathbf{V}_O^1 = [{}^0\mathfrak{S}_1^1, {}^0\mathfrak{S}_2^1, {}^0\mathfrak{S}_3^1] = [J_1] \quad (5.115)$$

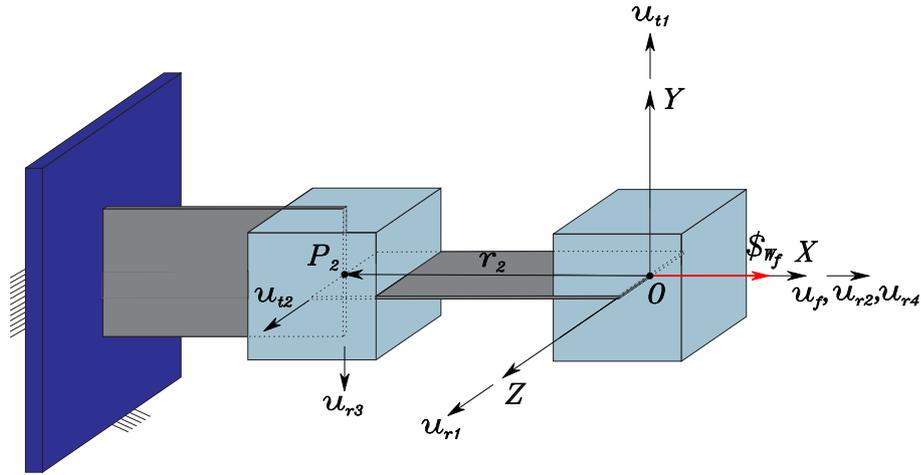


Figura 5.17: Restricción de tipo fuerza lineal, F, creada a partir de dos láminas delgadas.

$${}^0\mathcal{S}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathcal{S}_2^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathcal{S}_3^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad [J_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.116)$$

Lámina delgada 2.

$${}^1\mathbf{V}_O^2 = [{}^1\mathcal{S}_4^2, {}^1\mathcal{S}_5^2, {}^1\mathcal{S}_6^2] = [J_2] \quad (5.117)$$

$${}^0\mathcal{S}_4^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{2x} \end{bmatrix} \quad {}^0\mathcal{S}_5^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathcal{S}_6^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad [J_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_{2x} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.118)$$

Ahora bien, dado que ambas láminas delgadas se encuentran en serie, ambos subespacios de libertades deben sumarse de modo que,

$${}^0\mathbf{V}_O^2 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 = [J_1] + [J_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_{2x} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.119)$$

donde el rango de la matriz resultante es 5, de modo que, al aplicar el mapeo σ_{Kl}^V a la matriz resultante de la suma $[J_1] + [J_2]$ se obtiene el siguiente resultado:

$$\sigma_{Kl}^{\vee} ([J_1] + [J_2]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.120)$$

De esta forma se observa que el resultado es el esperado, una restricción lineal, F, en la dirección X.

5.4.3. Síntesis de una restricción de tipo wrench, W, 1DOC o 5DOF.

Considere el tornillo que representa una restricción de tipo wrench, dado por la ecuación (5.121). El movimiento asociado con la restricción de tornillo presenta 1DOC y presenta 5DOF.

$$\$_{W_w} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_w \\ \mathbf{r}_w \times \mathbf{u}_w + h \mathbf{u}_w \end{bmatrix}. \quad (5.121)$$

Sin pérdida de generalidad, es posible asumir que el eje del tornillo asociado a la restricción de tipo wrench, W, $\$_{W_w}$, pasa a través del origen, es decir, $\mathbf{r}_w = (0, 0, 0)^T$ por lo tanto, se desea diseñar un dispositivo que restrinja un movimiento de tornillo y permita los demás movimientos.

$$\$_{W_w} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_w \\ h \mathbf{u}_w \end{bmatrix}. \quad (5.122)$$

La meta puede alcanzarse mediante dos enfoques duales:

1. Desde un punto de vista de grados de libertad. El problema consiste en generar un dispositivo flexible de 5 grados de libertad, dos rotaciones y dos traslaciones y un movimiento de tornillo. Sin embargo, la solución no es directa utilizando elementos flexibles.
2. Desde un punto de vista de grados de restricción. El problema consiste en generar 1 grado de restricción, un wrench. El resultado no es inmediato dado que no existe, de momento, un elemento flexible primitivo que contenga 1DOC de este tipo.

Para sintetizar la restricción de tipo wrench, W, se buscará obtener 5 grados de libertad, para ello se aplicará el mapeo σ_{Kl}^{\vee} al espacio de restricción generado por la restricción de tipo wrench, W, con la finalidad de obtener su espacio de libertad. Sin pérdida de generalidad asuma que la dirección de la restricción se encuentra a lo largo del eje X, por lo que,

$$[J_W] = [\$_{W_w}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.123)$$

5.4. DISPOSITIVOS ELEMENTALES DE RESTRICCIÓN, SUBESPACIOS DEL ÁLGEBRA DE LIE, $SE(3)$, DE DIMENSIÓN CINCO.

Ahora bien, al aplicar el mapeo $\sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}$ a este espacio de restricción se obtiene el siguiente resultado

$$\sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}([J_W]) = [J_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

En la ecuación (5.124) se observa como el espacio de libertades asociado a una restricción de tipo wrench, W , puede interpretarse como la suma directa de tres subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, es decir, la suma directa de dos movimientos cilíndricos, para el presente caso a lo largo de los ejes Y y Z , y un movimiento de tornillo, a lo largo del eje X . Dado que es necesario realizar una suma de espacios de libertad los dispositivos flexibles que generan dichas subálgebras deben situarse en serie. Como ya se explicó en la sección 5.2.3, para lograr un dispositivo que genere la subálgebra cilíndrico, es necesario remover ese quinto alambre para eliminar la dependencia entre la rotación y traslación del dispositivo, de forma que ahora ambos movimientos son independientes entre sí, lo siguiente es situarlo en la dirección del eje Y . El resto es repetir, utilizando el mismo dispositivo que genere la subálgebra cilíndrico, pero esta vez en la dirección del eje Z . Para concluir se coloca en serie un dispositivo capaz de generar la subálgebra de tornillo, situado a lo largo del eje X . Por lo cual se tendrán tres dispositivos en serie, dicho resultado es posible observarlo en la Figura 5.18,

Debido a que estamos tratando con alambres, la forma más sencilla de analizar los dispositivos es mediante restricciones, de este modo,

Dispositivo 1. Para el dispositivo 1 se tienen las siguientes direcciones asociadas a cada uno de los alambres que conforman el dispositivo:

$$\mathbf{u}_{f11} = \mathbf{u}_{f21} = (0, 1, 0)^T \quad (5.125)$$

$$\mathbf{u}_{f31} = \mathbf{u}_{f41} = (1, 0, 0)^T \quad (5.126)$$

$$\mathbf{r}_{21} = (0, 0, r_{21z})^T \quad \mathbf{r}_{41} = (0, 0, r_{41z})^T \quad (5.127)$$

de esta forma,

$${}^0\mathbf{F}_O^1 = [{}^0\mathbb{S}_1^1, {}^0\mathbb{S}_2^1, {}^0\mathbb{S}_3^1, {}^0\mathbb{S}_4^1] = [J_{W1}] \quad (5.128)$$

$${}^0\mathbb{S}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbb{S}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -r_{21z} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbb{S}_3^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\mathbb{S}_4^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_{41z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.129)$$

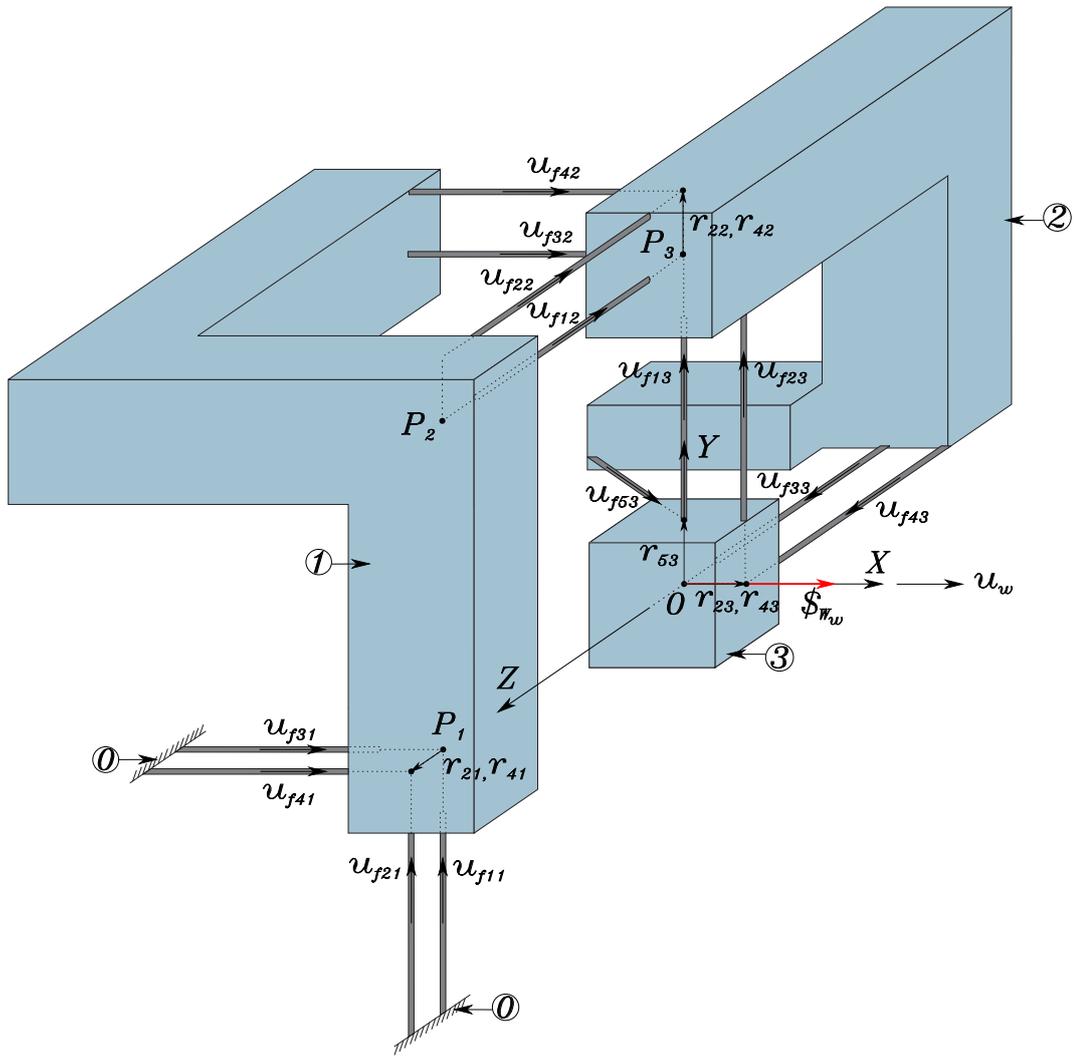


Figura 5.18: Restricción de tipo wrench, W, creada a partir de alambres.

$$[J_{W1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{21z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{41z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

o bien,

$$\sigma_{Kl}^{\vee}([J_{W1}]) = [J_{T1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

El resultado es un movimiento cilíndrico a lo largo del eje Z .

Dispositivo 2. Para el dispositivo 2 se tienen las siguientes direcciones asociadas a cada uno de los alambres que conforman el dispositivo:

$$\mathbf{u}_{f12} = \mathbf{u}_{f22} = (0, 0, -1)^T \quad (5.132)$$

$$\mathbf{u}_{f32} = \mathbf{u}_{f42} = (1, 0, 0)^T \quad (5.133)$$

$$\mathbf{r}_{22} = (0, r_{22y}, 0)^T \quad \mathbf{r}_{42} = (0, r_{42y}, 0)^T \quad (5.134)$$

de esta forma,

$${}^1\mathbf{F}_O^2 = [{}^1\mathcal{S}_1^2, {}^1\mathcal{S}_2^2, {}^1\mathcal{S}_3^2, {}^1\mathcal{S}_4^2] = [J_{W2}] \quad (5.135)$$

$${}^1\mathcal{S}_1^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathcal{S}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -r_{22y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathcal{S}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathcal{S}_4^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{42y} \end{bmatrix} \quad (5.136)$$

$$[J_{W2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{22y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_{42y} \end{bmatrix} \quad (5.137)$$

o bien,

$$\sigma_{Kl}^{\vee}([J_{W2}]) = [J_{T2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.138)$$

El resultado es un movimiento cilíndrico a lo largo del eje Y .

Dispositivo 3. Este dispositivo ya fue analizado en la sección 5.2.3 de modo que a continuación se muestran los resultados, repetidos, de dicha sección.

$$[J_{W3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & r_{4x} & 0 \\ 0 & r_{2x} & 0 & 0 & -h \end{bmatrix} \quad (5.139)$$

o bien,

$$\sigma_{Kl}^{\vee}([J_{W3}]) = [J_{T3}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.140)$$

El resultado es un movimiento de tornillo a lo largo del eje X .

Finalmente se realiza la suma directa para obtener el espacio de libertad,

$$[J_T] = [J_{T1}] \oplus [J_{T2}] \oplus [J_{T3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

Ahora bien, al aplicar el mapeo σ_{Kl}^{\vee} a este espacio de libertad se obtiene el siguiente resultado

$$\sigma_{Kl}^{\vee}([J_T]) = [J_W] = [\$_{W_w}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.142)$$

De esta forma se observa que el resultado es el esperado, una restricción de tipo wrench, W , en la dirección del eje X .

5.5. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, del grupo Euclídeo, $SE(3)$, a partir de dispositivos paralelos.

La clasificación de las subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, se organiza con base en la dimensión de las respectivas subálgebras, tal como se muestra en la Figura 2.5.

Una vez que se obtienen los tres subespacios anteriores: Restricción de una fuerza lineal, restricción de un momento y restricción de un wrench es posible combinarlos de tal forma que es posible formar las subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, para lograrlo se realizará de forma dual a la sección anterior, es decir, tomando en cuenta las restricciones de cada uno de los dispositivos, realizando la intersección de los grados de libertad de cada dispositivo elemental, para ello estos deben situarse en paralelo, tal como se muestra en las siguientes secciones.

5.5.1. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión uno.

Para el caso de las subálgebras de dimensión uno, estas ya fueron analizadas previamente en el presente capítulo mediante la deducción de dispositivos elementales.

5.5.2. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión dos.

Para el caso de las subálgebras de dimensión dos es necesario disponer de cuatro dispositivos en paralelo, estos dispositivos corresponden a los subespacios vistos en la sección anterior.

Subálgebra $t_{u_1}^\perp$, traslación plana.

Corresponde a traslaciones sobre un plano, en este caso el plano es perpendicular al eje Z. Se realiza la intersección entre cuatro subespacios, los cuales tres de ellos poseen una restricción de momento y uno de ellos posee una restricción de fuerza lineal.

$${}^0\mathbf{F}_O^5 = {}^0\mathbf{F}_{O_1}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O_2}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O_3}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O_4}^5 \quad (5.143)$$

Donde

$${}^0\mathbf{F}_{O_1}^5 = [{}^0\mathcal{F}_O^1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O_2}^5 = [{}^0\mathcal{F}_{O_2}^5] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O_3}^5 = [{}^0\mathcal{F}_{O_3}^5] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O_4}^5 = [{}^0\mathcal{F}_{O_4}^5] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.144)$$

Note que el segundo subíndice del estado de fuerza indica la cadena serial mostrada por el cuerpo intermedio que conecta el cuerpo fijo con el efector final. Finalmente las restricciones del efector final son:

$${}^0\mathbf{F}_O^5 = {}^0\mathbf{F}_{O_1}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O_2}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O_3}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O_4}^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.145)$$

5.5. SUBÁLGEBRAS DEL ÁLGEBRA DE LIE, $SE(3)$, A PARTIR DE DISPOSITIVOS PARALELOS.

aplicando el mapeo σ_{Kl}^{\vee} a la matriz resultante ${}^0\mathbf{F}_O^5$ se obtiene que,

$$\sigma_{Kl}^{\vee}({}^0\mathbf{F}_O^5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.146)$$

dando como resultado el movimiento esperado, dos traslaciones rectilíneas a lo largo de los ejes X y Y.

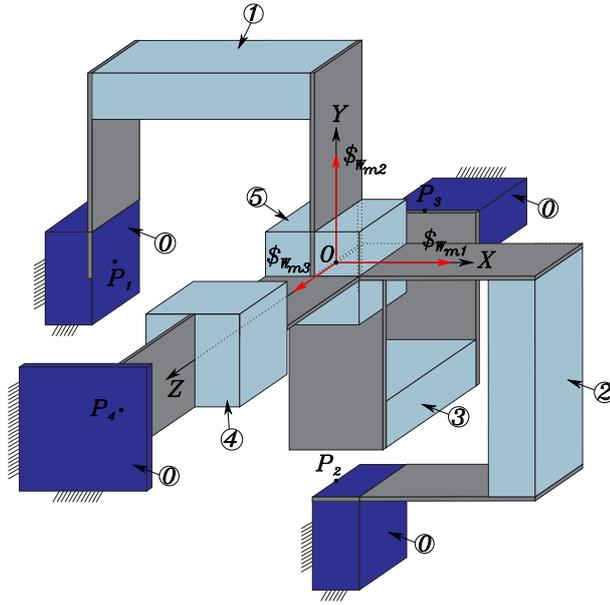


Figura 5.19: Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra $t_{u_1}^{\perp}$, traslación plana.

Subálgebra C_{P,u_1} , cilíndrico.

Corresponde a una rotación alrededor de un eje fijo, más una traslación independiente en la misma dirección, en este caso la dirección es sobre el eje X.

$${}^0\mathbf{F}_O^5 = {}^0\mathbf{F}_{O1}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O2}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O3}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O4}^5 \quad (5.147)$$

donde

$${}^0\mathbf{F}_{O1}^5 = [{}^0\mathcal{S}_{O1}^5] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O2}^5 = {}^0\mathcal{S}_{O2}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O3}^5 = {}^0\mathcal{S}_{O3}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O4}^5 = {}^0\mathcal{S}_{O4}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.148)$$

5.5. SUBÁLGEBRAS DEL ÁLGEBRA DE LIE, $SE(3)$, A PARTIR DE DISPOSITIVOS PARALELOS.

Note que el segundo subíndice del estado de fuerza indica la cadena serial mostrada por el cuerpo intermedio que conecta el cuerpo fijo con el efector final. Finalmente las restricciones del efector final son:

$${}^0\mathbf{F}_O^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.149)$$

aplicando el mapeo σ_{Kl}^{\vee} a la matriz resultante ${}^0\mathbf{F}_O^5$ se obtiene que,

$$\sigma_{Kl}^{\vee} ({}^0\mathbf{F}_O^5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.150)$$

dando como resultado el movimiento esperado, una traslación rectilínea y una rotación, independientes entre sí, sobre el eje X . El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.20.

Como se describió en la secciones 5.2.3 y 5.4.3 es posible sintetizar un dispositivo que sea capaz de generar la subálgebra de movimiento cilíndrico, tal como se muestra a continuación:

$${}^0\mathbf{F}_O^5 = {}^0\mathbf{F}_{O1}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O2}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O3}^5 + {}^0\mathbf{F}_{O4}^5 \quad (5.151)$$

donde

$${}^0\mathbf{F}_{O1}^5 = [{}^0\mathcal{F}_{O1}^5] = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O2}^5 = {}^0\mathcal{F}_{O2}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{2x} \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O3}^5 = {}^0\mathcal{F}_{O3}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O4}^5 = {}^0\mathcal{F}_{O4}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -r_{4x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.152)$$

finalmente las restricciones del efector final son:

$${}^0\mathbf{F}_O^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_{4x} \\ 0 & -r_{2x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.153)$$

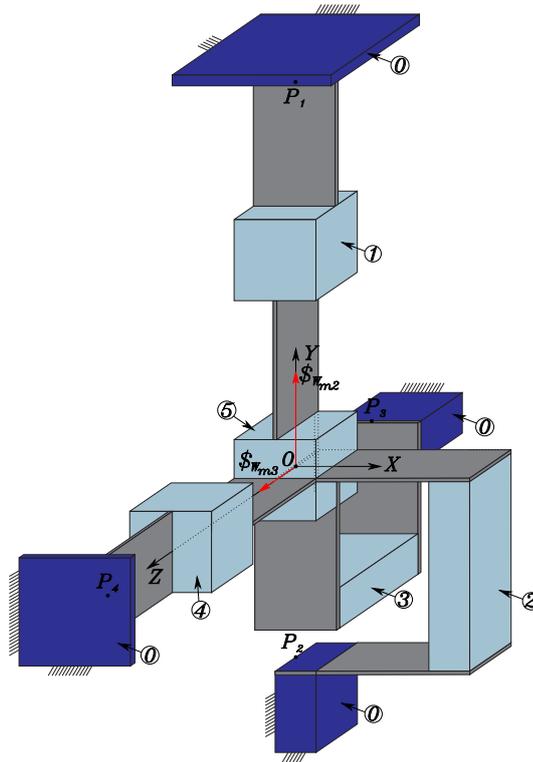


Figura 5.20: Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra C_{P,u_1} , cilíndrico.

aplicando el mapeo σ_{Kl}^{\vee} a la matriz resultante ${}^0F_O^5$ se obtiene que,

$$\sigma_{Kl}^{\vee}({}^0F_O^5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.154)$$

dando como resultado el movimiento esperado, una traslación rectilínea y una rotación, independientes entre sí, sobre el eje X . El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.21.

5.5.3. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión tres.

Subálgebra t_{u_1, u_2, u_3} , traslación espacial.

Corresponde a las traslaciones espaciales de un cuerpo rígido. A continuación se muestra un dispositivo paralelo que genera la subálgebra de traslaciones espaciales, t_{u_1, u_2, u_3} .

$${}^0F_O^4 = {}^0F_{O1}^4 + {}^0F_{O2}^4 + {}^0F_{O3}^4 \quad (5.155)$$

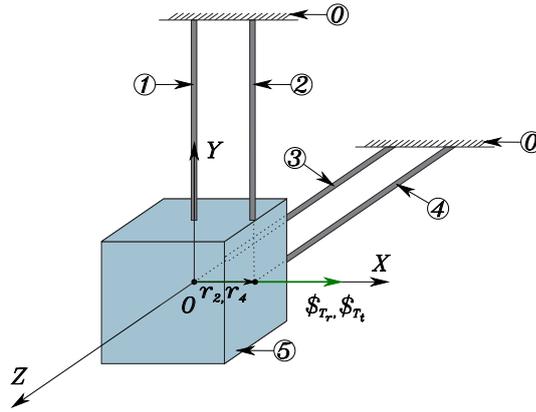


Figura 5.21: Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra C_{P,u_1} , cilíndrico.

donde

$${}^0\mathbf{F}_{O1}^4 = [{}^0\mathcal{S}_{O1}^4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O2}^4 = [{}^0\mathcal{S}_{O2}^4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O3}^4 = [{}^0\mathcal{S}_{O3}^4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.156)$$

Note que el segundo subíndice del estado de fuerza indica la cadena serial mostrada por el cuerpo intermedio que conecta el cuerpo fijo con el efector final. Finalmente las restricciones del efector final son:

$${}^0\mathbf{F}_O^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.157)$$

aplicando el mapeo σ_{Kl}^V a la matriz resultante ${}^0\mathbf{F}_O^5$ se obtiene que,

$$\sigma_{Kl}^V ({}^0\mathbf{F}_O^5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.158)$$

dando como resultado el movimiento esperado, una traslación espacial.

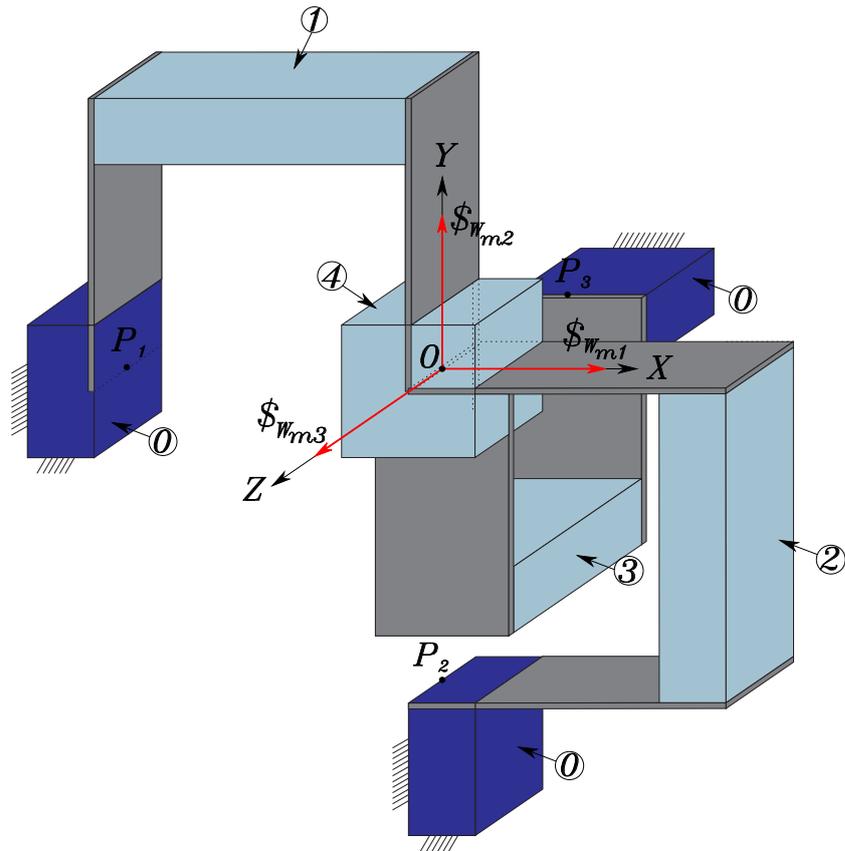


Figura 5.22: Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra t_{u_1, u_2, u_3} , traslación espacial.

Subálgebra g_{u_1} , movimientos planos.

Corresponde a traslaciones en un plano y una rotación sobre un eje perpendicular a este plano. A continuación se muestra un dispositivo flexible paralelo que genera la subálgebra de movimientos planos.

$${}^0\mathbf{F}_O^4 = {}^0\mathbf{F}_{O_1}^4 + {}^0\mathbf{F}_{O_2}^4 + {}^0\mathbf{F}_{O_3}^4 \quad (5.159)$$

donde

$${}^0\mathbf{F}_{O_1}^4 = [{}^0\mathcal{F}_{O_1}^4] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O_2}^4 = [{}^0\mathcal{F}_{O_2}^4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O_3}^4 = [{}^0\mathcal{F}_{O_3}^4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.160)$$

Note que el segundo subíndice del estado de fuerza indica la cadena serial mostrada por el cuerpo intermedio que conecta el cuerpo fijo con el efector final. Finalmente las restricciones del

efector final son:

$${}^0\mathbf{F}_O^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.161)$$

aplicando el mapeo σ_{Kl}^{\vee} a la matriz resultante ${}^0\mathbf{F}_O^5$ se obtiene que,

$$\sigma_{Kl}^{\vee}({}^0\mathbf{F}_O^5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.162)$$

dando como resultado el movimiento esperado, un movimiento plano general. El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.23.

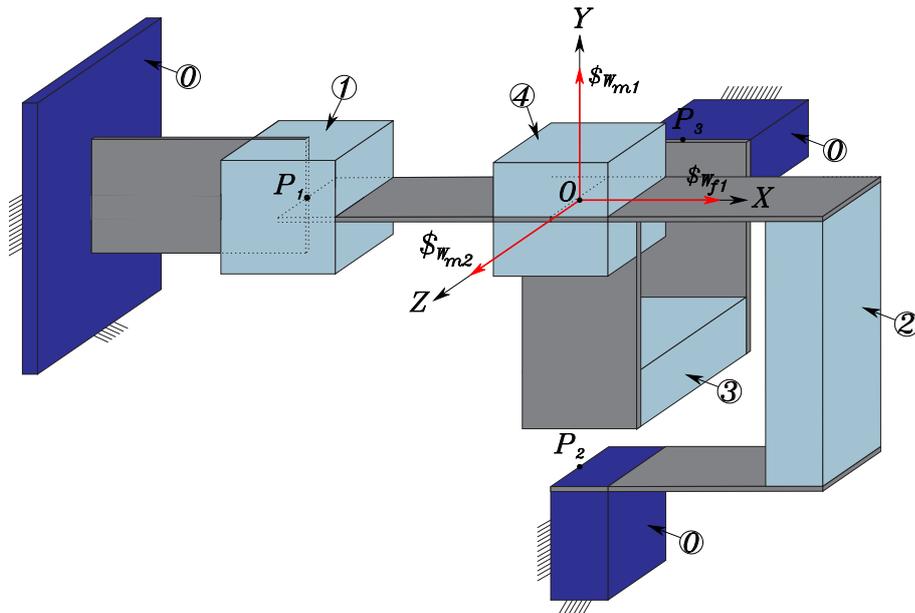


Figura 5.23: Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra g_{u_1} , movimientos planos.

Subálgebra s_O , esférica.

Corresponde a todas las rotaciones alrededor de un punto fijo. A continuación se muestra un mecanismo flexible que genera la subálgebra esférica, s_O .

$${}^0\mathbf{F}_O^4 = {}^0\mathbf{F}_{O1}^4 + {}^0\mathbf{F}_{O2}^4 + {}^0\mathbf{F}_{O3}^4 \quad (5.163)$$

donde

$${}^0\mathbf{F}_{O1}^4 = [{}^0\mathcal{S}_{O1}^4] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O2}^4 = [{}^0\mathcal{S}_{O2}^4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O3}^4 = [{}^0\mathcal{S}_{O3}^4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.164)$$

Note que el segundo subíndice del estado de fuerza indica la cadena serial mostrada por el cuerpo intermedio que conecta el cuerpo fijo con el efector final. Finalmente las restricciones del efector final son:

$${}^0\mathbf{F}_O^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.165)$$

aplicando el mapeo σ_{Kl}^{\vee} a la matriz resultante ${}^0\mathbf{F}_O^4$ se obtiene que,

$$\sigma_{Kl}^{\vee} ({}^0\mathbf{F}_O^4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.166)$$

dando como resultado el movimiento esperado, un movimiento esférico. El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.24.

Subálgebra $y_{u_1,p}$, traslación plana de un desplazamiento helicoidal.

Corresponde a las traslaciones en un plano, además de un movimiento de tornillo paralelo a dicho plano.

$${}^0\mathbf{F}_O^4 = {}^0\mathbf{F}_{O1}^4 + {}^1\mathbf{F}_{O2}^4 + {}^2\mathbf{F}_{O3}^4 \quad (5.167)$$

Donde

$${}^0\mathbf{F}_{O1}^4 = [{}^0\mathcal{S}_{O1}^4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^1\mathbf{F}_{O2}^4 = [{}^0\mathcal{S}_{O2}^4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; {}^2\mathbf{F}_{O3}^4 = [{}^0\mathcal{S}_{O3}^4] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.168)$$

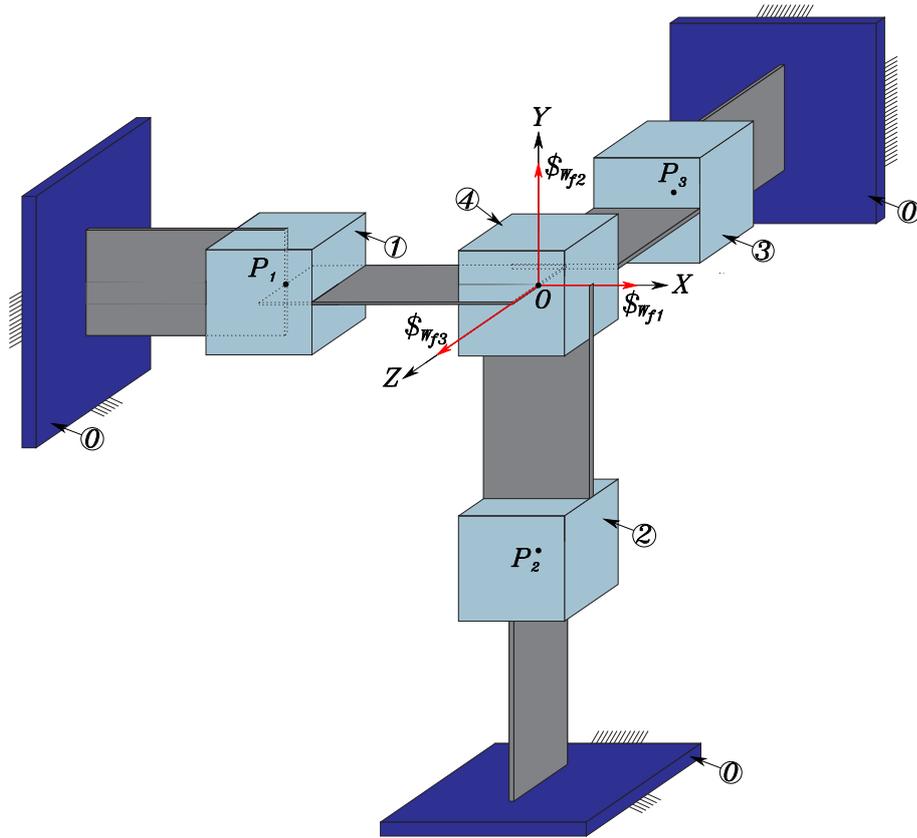


Figura 5.24: Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra s_O , esférica.

Note que el segundo subíndice del estado de fuerza indica la cadena serial mostrada por el cuerpo intermedio que conecta el cuerpo fijo con el efector final. Finalmente las restricciones del efector final son:

$${}^0\mathbf{F}_O^4 = {}^0\mathbf{F}_O^4 + {}^0\mathbf{F}_O^4 + {}^0\mathbf{F}_O^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.169)$$

aplicando el mapeo σ_{Kl}^V a la matriz resultante ${}^0\mathbf{F}_O^4$ se obtiene que,

$$\sigma_{Kl}^V ({}^0\mathbf{F}_O^5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.170)$$

5.5. SUBÁLGEBRAS DEL ÁLGEBRA DE LIE, $SE(3)$, A PARTIR DE DISPOSITIVOS PARALELOS.

dando como resultado el movimiento esperado, un movimiento de traslación plana de un desplazamiento helicoidal. El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.25.

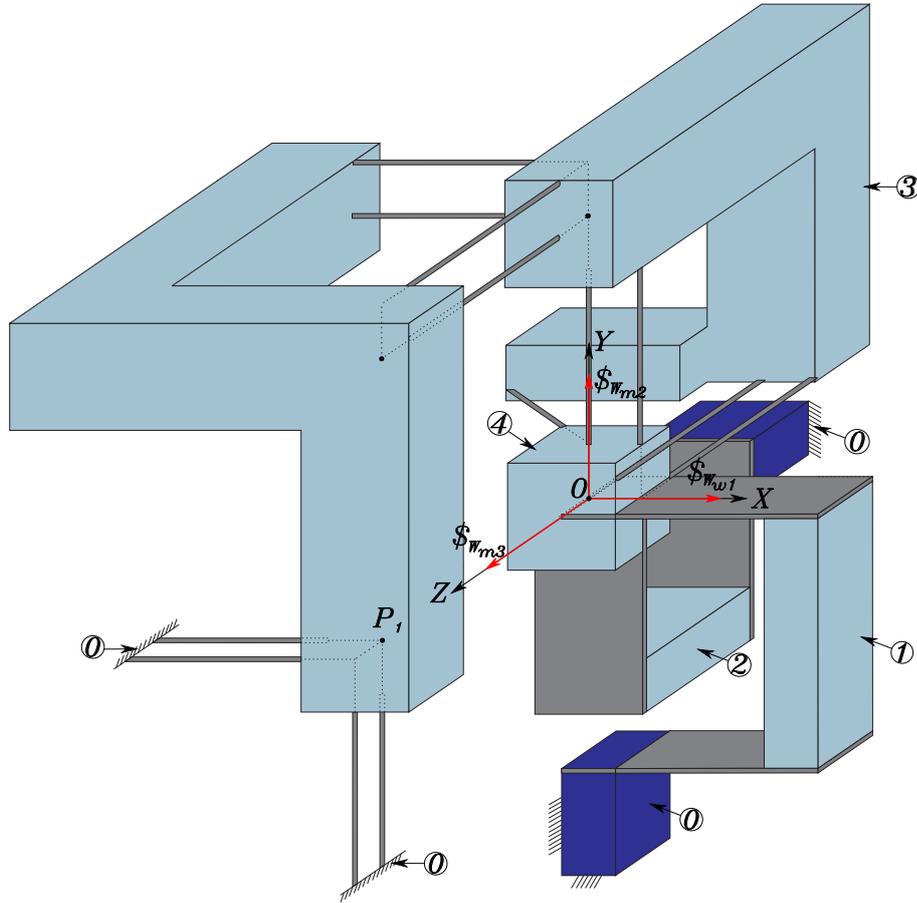


Figura 5.25: Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra $y_{u_1,p}$, traslación plana de un desplazamiento helicoidal.

5.5.4. Subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dimensión cuatro.

Para el caso de las subálgebras de dimensión cuatro, se realizaron dos versiones de mecanismo flexibles, uno serial, es decir, sumando cuatro libertades para lograr 4DOF y otro en paralelo, es decir, sumando dos restricciones para lograr 2DOC.

Subálgebra x_{u_1} , Schönflies.

Corresponde a traslaciones en el espacio, además de una rotación sobre una línea fija.

$${}^0F_O^3 = {}^0F_{O_1}^3 + {}^0F_{O_2}^3 \tag{5.171}$$

Donde

$${}^0\mathbf{F}_{O1}^3 = [{}^0\mathcal{F}_O^3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; {}^0\mathbf{F}_{O2}^5 = [{}^0\mathcal{F}_{O2}^3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.172)$$

Note que el segundo subíndice del estado de fuerza indica la cadena serial mostrada por el cuerpo intermedio que conecta el cuerpo fijo con el efector final. Finalmente las restricciones del efector final son:

$${}^0\mathbf{F}_O^3 = {}^0\mathbf{F}_{O1}^3 + {}^0\mathbf{F}_{O2}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.173)$$

aplicando el mapeo $\sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}$ a la matriz resultante ${}^0\mathbf{F}_O^5$ se obtiene que,

$$\sigma_{Kl}^{\mathbb{V}}({}^0\mathbf{F}_O^5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.174)$$

dando como resultado el movimiento esperado, dos traslaciones rectilíneas a lo largo de los ejes X y Y . El dispositivo flexible se muestra en la Figura 5.26.

5.6. Ejemplos

Finalmente se analizarán dos ejemplos encontrados en la literatura, los cuales comparten la característica de ser cinemáticamente incorrectos, debido a que el espacio generado por estos dispositivos flexibles forma un subespacio del álgebra de Lie, $se(3)$, pero este es creado a partir de una suma o intersección de otros subespacios y no a partir de subálgebras, siendo así cinemáticamente incorrectos.

5.6.1. Ejemplo 1: Mecanismo flexible de cuatro grados de libertad, 2R2T.

El primer ejemplo se trata de un mecanismo flexible propuesto por Hopkins y Culpepper [24] el cual debe permitir cuatro grados de libertad, dos rotaciones y dos traslaciones. Sin embargo, como se observa en el trabajo realizado por Hopkins y Culpepper, este mecanismo es creado a partir de la suma de dos supespacios. Otro ejemplo de este mismo mecanismo, el cual cinemáticamente es incorrecto, se puede consultar en el trabajo realizado por Hopkins y Panas [40].

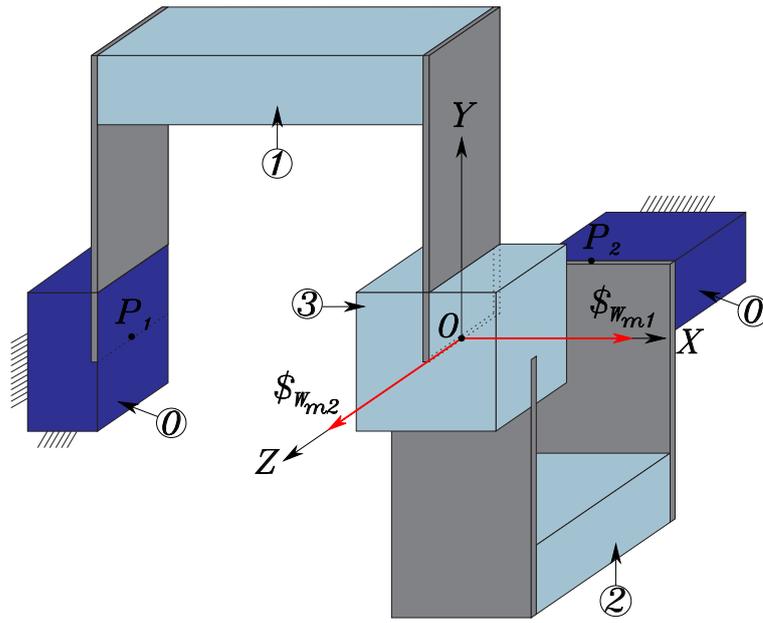


Figura 5.26: Mecanismo flexible en paralelo que genera la subálgebra x_{u_1} , Schönflies.

Una vez que se conocen cada uno de los dispositivos flexibles que generan a cada una de las subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, una manera, cinemáticamente correcta, de sintetizar dicho mecanismo flexible es realizando la suma directa de dos dispositivos flexibles, los cuales, cada uno debe generar la subálgebra de movimiento cilíndrico, dicho resultado se muestra a continuación:

Si se observa la Figura 5.27 es posible plantear el siguiente análisis,

$${}^0V_O^2 = {}^0V_O^1 + {}^1V_O^2 \quad (5.175)$$

$${}^0V_O^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^1V_O^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.176)$$

por lo tanto,

$${}^0V_O^2 = {}^0V_O^1 + {}^1V_O^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.177)$$

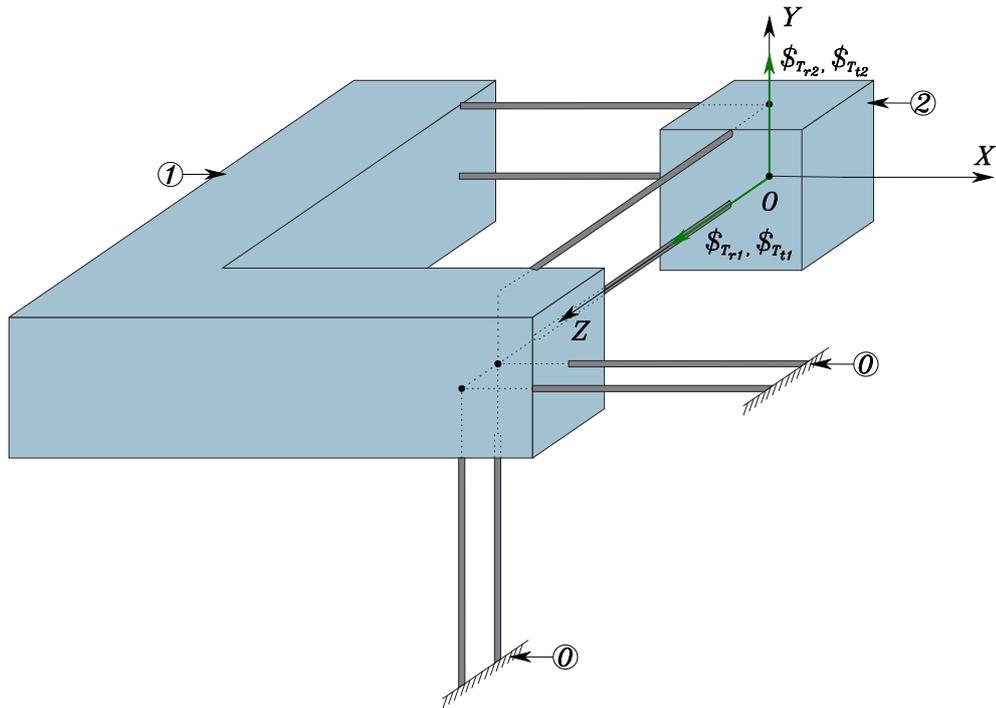


Figura 5.27: Mecanismo flexible en serie que posee cuatro grados de libertad, 2R2T.

5.6.2. Ejemplo 2: Mecanismo flexible de tres grados de libertad, 2R1T.

El segundo ejemplo se trata de un mecanismo flexible propuesto por Hao [51] el cual debe permitir tres grados de libertad, dos rotaciones y una traslación. Sin embargo, como se observa en el trabajo realizado por Hao, este mecanismo es creado a partir de la suma de subespacios.

Una vez que se conocen cada uno de los dispositivos flexibles que generan a cada una de las subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, una manera, cinemáticamente correcta, de sintetizar dicho mecanismo flexible es realizando la suma directa de tres dispositivos flexibles, los cuales, dos de ellos deben generar la subálgebra de rotación y uno de ellos la subálgebra de traslación.

$${}^0\mathbf{V}_O^3 = {}^0\mathbf{V}_O^1 + {}^1\mathbf{V}_O^2 + {}^2\mathbf{V}_O^3 \quad (5.178)$$

$${}^0\mathbf{V}_O^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^1\mathbf{V}_O^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^2\mathbf{V}_O^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.179)$$

por lo tanto,

$${}^0V_O^2 = {}^0V_O^1 + {}^1V_O^2 + {}^2V_O^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.180)$$

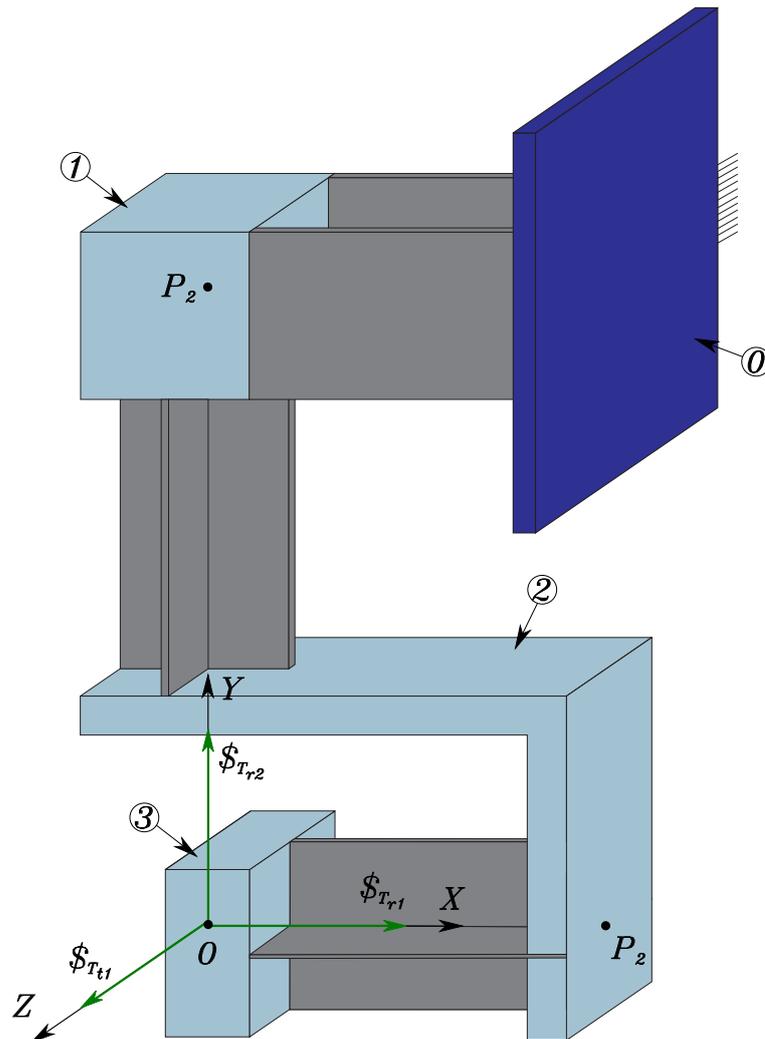


Figura 5.28: Mecanismo flexible en serie que posee tres grados de libertad, 2R1T.

Capítulo 6

Conclusión y trabajo futuro.

En el presente trabajo se desarrolló una metodología cinemáticamente correcta que permitió realizar la síntesis de dispositivos de posicionamiento flexibles. La teoría está basada en el álgebra de tornillos, isomórfica al álgebra de Lie, $se(3)$, y la teoría de espacios ortogonales.

Para tal fin se reunieron los fundamentos teóricos necesarios, partiendo de la definición de un estado de velocidad y su representación siguiendo un resultado clásico: La equivalencia entre estados de velocidad y teorema infinitesimal de Chasles. Además, se mostró que el álgebra de Lie, $se(3)$, es isomórfica al álgebra de tornillos. Por lo tanto, fue posible definir subespacios y subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, estas estructuras juegan un importante papel en el desarrollo de la teoría pertinente a esta tesis. El otro concepto fundamental es el de una forma simétrica bilineal. Este concepto permite mostrar que el álgebra de tornillos, isomórfica al álgebra de Lie, $se(3)$, forma un espacio ortogonal y en él se pueden definir aniquiladores duales y aniquiladores ortogonales y finalmente mostrar que las formas de Killing y Klein están bien definidas en el álgebra de tornillos. En particular, la forma de Klein y la correlación asociada a la forma de Klein permite establecer una relación uno a uno entre los subespacios de $se(3)$ y sus aniquiladores ortogonales. Este resultado explica la equivalencia entre el empleo de movibilidades y restricciones en el método FACT.

Una vez obtenidas las herramientas matemáticas, es necesario analizar los elementos flexibles que sobre los cuáles se aplicarían los conceptos y resultados obtenidos en la primera mitad de este trabajo de tesis. Para tal fin, se analizaron los elementos flexibles más utilizados en la literatura y cómo, al momento de combinarlos, se pueden obtener diversos mecanismos flexibles. Finalizado este análisis, se desarrolló una metodología cinemáticamente correcta con la cual se logró la síntesis de dispositivos de posicionamiento flexibles. Poniendo en práctica esta metodología se logró sintetizar mecanismos flexibles que generen cada una de las subálgebras del álgebra de Lie, $se(3)$, de dos diferentes maneras; mediante cadenas seriales, empleando las “libertades” de los movimientos de los elementos flexibles y mediante cadenas abiertas, a partir de las restricciones impuestas por los elementos flexibles.

Finalmente se utilizan estos mecanismos flexibles para combinarlos y así resolver dos ejemplos encontrados en la literatura que, en la solución propuesta por los autores, tienen en común que no emplearon conceptos matemáticamente relevantes; además, las soluciones adolecen de la formalidad matemática necesaria para abordar los temas de: Espacios ortogonales y dualidad. No obstante, al emplear la metodología desarrollada en el presente trabajo, se logran soluciones cinemáticamente

correctas en ambos casos.

Existen diversas áreas de extensión del presente trabajo, algunas de ellas son:

1. Verificar los resultados obtenidos mediante software especializado empleando modelos de elemento finito.
2. Llevar a cabo la construcción de prototipos en los cuales sea posible mostrar, de forma física, los resultados obtenidos en el presente trabajo de tesis.
3. Realizar la síntesis de mecanismos clásicos a partir de elementos flexibles y siguiendo la metodología aquí propuesta.
4. Reanalizar la metodología desarrollada con un enfoque de optimización estructural.

Bibliografía

- [1] Taddei, M., Zannon, E. y Domenico L., *Leonardo's Machines: Secrets and Inventions in the Da Vinci Codices*. Italia: Giunti Industrie Graiche S.p.A, Firenze.
- [2] Wright, O. y Wright, W., Flying Machine, U.S. Patent No. 821,393, May 22, 1906.
- [3] Howell, L. L., 2001. *Compliant Mechanisms*. New York : Wiley-Interscience.
- [4] Murphy, M. D., Midha, A. y Howell, L. L., 1996. The topological synthesis of compliant mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31 (2), pp. 185-199.
- [5] Howell, L. L. y Midha, A., 1994. A method for the design of compliant mechanisms with small-length flexural pivots. *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 116 (1), pp. 280-290.
- [6] Berglund, M. D., Magleby, S. P., y Howell, L. L., 2000. Design rules for selecting and designing compliant mechanisms for rigid-body replacement synthesis. In Proceedings of the ASME 2000 Design Engineering Technical Conference & Design Automation Conference, Baltimore, Maryland, USA, Vol. 14225.
- [7] Xu, P., Jingjun, Y., Guanghua, Z., and Shusheng, B., 2007. The modeling of leaf-type isosceles-trapezoidal flexural pivots. In Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, Las Vegas, Nevada, USA. Paper DETC2007-34981.
- [8] Lobontiu, N., 2002. *Compliant Mechanisms - Design of Flexure Hinges*. Boca Raton: CRC Press.
- [9] Lobontiu, N. y Garcia, E., 2004. Static response of planar compliant devices with small-deformation flexure hinges. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 32 (4), pp. 459-490.
- [10] Yong, Y. K., Lua, T.-F. y Handleya, D. C., 2008. Review of circular flexure hinge design equations and derivation of empirical formulations. *Precision Engineering*, Vol. 32 (2), pp. 63-70.
- [11] Moon, Y. M., Trease, B. P. y Kota, S., 2002. Design of large-displacement compliant joints. In Proceedings of the ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Montreal, Canada. Paper DETC2002/MECH-34207.
- [12] Trease, B. P., Moon, Y. M. y Kota, S., 2005. Design of large-displacement compliant joints. *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 127, pp. 788-798.

- [13] Moon, Y. M., y Kota, S., 2002. Design of compliant parallel kinematic machines. In Proceedings of the ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Montreal, Canada. Paper DETC2002/MECH-34204.
- [14] Saxena, A. y Kramer, S. N., 1998. A simple and accurate method for determining large deflection in compliant mechanisms subjected to end forces and moments. *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 120, pp. 392-400.
- [15] Edwards, B. T., Jensen, B. D. y Howell, L. L., 2001. A pseudo-rigid-body model for initially-curved pinned-pinned segments used in compliant mechanisms. *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 123 (3), pp. 464-468.
- [16] Kimball, C., and Tsai, L. W., 2002. Modeling of flexural beams subjected to arbitrary end loads. *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 124 (2), pp. 223-235.
- [17] Su, H. J., 2008. A load independent pseudo-rigid-body 3r model for determining large deflection of beams in compliant mechanisms. In Proceedings of the ASME 2008 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, New York City, NY, USA. Paper DETC2008-49041.
- [18] Su, H. J., Dorozhkin, D. V., y Vance, J. M., 2009, A Screw Theory Approach for the Conceptual Design of Flexible Joints for Compliant Mechanisms, *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, Vol. 1 (4), p. 041009.
- [19] Hopkins, J. B., y Culpepper M. L., 2010, Synthesis of Multi-Degree of Freedom, Parallel Flexure Mechanism Concepts via Freedom and Constraint Topology (FACT). Part I: Principles, *Precision Engineering*, Vol. 34 (2), pp. 259-270.
- [20] Hopkins, J. B., y Culpepper, M. L., 2010, Synthesis of Multi-Degree of Freedom, Parallel Flexure Mechanism Concepts via Freedom and Constraint Topology (FACT). Part II: Practice, *Precision Engineering*, Vol. 34 (2), pp. 271-278.
- [21] Hopkins, J. B., y Culpepper, M. L., 2009, Synthesis of Multi-Axis Serial Flexure Mechanisms. In Proceedings of the ASPE 2009 Session VIII Design of Precision Machines and Instruments II, Monterey, California, USA.
- [22] Blanding, D. L., 1999, *Exact Constraint: Machine Design Using Kinematic Principle*, New York: ASME Press.
- [23] Hopkins, J. B. y Panas, R. M., 2012. Design of flexure-based precision transmission mechanisms using screw theory. *Precision Engineering*, Vol. 37, pp. 299-307.
- [24] Hopkins, J. B., y Culpepper, M. L., 2011. Synthesis of precision serial flexure systems using freedom and constraint topologies (FACT). *Precision Engineering*, Vol. 35, pp. 638-649.
- [25] Tadeo-Chávez A., 2011. *Determinación de los Subespacios del Álgebra de Lie, del Grupo Euclídeo, que Preservan la Movilidad de las Cadenas Cinemáticas*. Tesis Doctoral, DICIS, Universidad de Guanajuato, México.

- [26] Yu, J. J., Li, S., Su, H. J., y Culpepper, M. L., 2011. Screw Theory Based Methodology for the Deterministic Type Synthesis of Flexure Mechanisms. *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, Vol. 3 / 031008.
- [27] Ball, R. S., 1900. *A treatise on the theory of screws*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [28] Gallardo-Alvarado, J. 1999. *Análisis Cinemáticos de Orden Superior de Cadenas Espaciales, Mediante el Álgebra de Tornillos y sus Aplicaciones*. Tesis doctoral, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coahuila, México.
- [29] Rocha-Chavarría, J. 2007. *Determinación de Sobre Restricciones en Mecanismos Espaciales*. Tesis Maestría, Universidad de Guanajuato, Salamanca, Guanajuato, México.
- [30] Aguilera-Camacho, D. 2003. *Movilidad en Cadenas Cinemáticas de un Lazo y Plataformas Paralelas*, Tesis Maestría, Instituto Tecnológico de Celaya, México.
- [31] Rico, J. M., 2012. Notas de clase de posgrado, cinemática infinitesimal, División de Ingenierías, Universidad de Guanajuato, Salamanca, Guanajuato, México.
- [32] Hunt, K. H. 1978, *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford: Oxford University Press.
- [33] Hervé, J. M., 1978. Analyse Structurelle des Mécanismes par Groupe des Déplacements, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 13, pp. 437-450.
- [34] Pérez-Soto G. I., 2013, *Análisis de Movilidad y Síntesis de Cadenas Cinemáticas Mediante Subespacios de Rango Localmente Constante*, Tesis Doctoral, DICIS, Universidad de Guanajuato, Salamanca, Guanajuato, México.
- [35] Tadeo-Chávez A., 2011, *Determinación de los Subespacios del Álgebra de Lie, del Grupo Euclídeo, que Preservan la Movilidad de las Cadenas Cinemáticas*, Tesis Doctoral, DICIS, Universidad de Guanajuato, Salamanca, Guanajuato, México.
- [36] Dieudonné, J. 1964. *Linear Algebra and Geometry*. Paris: Hermann.
- [37] Jacobson, N. 1953. *Lectures in Abstract Algebra: II. Linear Algebra*. New York: Springer Science+Business Media.
- [38] Gruenberg, K. W. y Weir, A. J. 1977. *Linear Geometry*. New York: Springer Science+Business Media.
- [39] Awtar, S., Slocum, A. H. y Sevincer, E., 2007, Characteristics of Beam-Based Flexure Modules. *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 129, pp. 625-639.
- [40] Hopkins, J. B. y Panas, R. M., 2012, Design of flexure-based precision transmission mechanisms using screw theory. *Precision Engineering*, Vol. 37, pp. 299-307.
- [41] Patterson, T. y Lipkin, H., 1993. Structure of Robot Compliance. *Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 576-580.
- [42] Selig, J. M. y Ding, X., 2001. A Screw Theory of Static Beams. In *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Maui, Hawaii, USA.

- [43] R. von Mises, 1924. Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel in der Mechanik, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* Band 4, Heft 2, pp. 155-181.
- [44] Hopkins, J. B., 2015. A Visualization Approach for Analyzing and Synthesizing Serial Flexure Elements. *Journal of Mechanisms and Robotics*. Vol. 7 / 031011.
- [45] Sun, F. y Hopkins, J. B., 2017. Mobility and Constraint Analysis of Interconnected Hybrid Flexure Systems Via Screw Algebra and Graph Theory. *Journal of Mechanisms and Robotics*. Vol. 9 / 031018.
- [46] Hopkins, J. B., Vericella, J. J. y Harvey, C. D., 2014. Modeling and generating parallel flexure elements. *Precision Engineering*. Vol. 38, pp. 525-537.
- [47] Su, H. J., Shi, H. y Yu, J. J. 2012. A Symbolic Formulation for Analytical Compliance Analysis and Synthesis of Flexure Mechanisms. *Journal of Mechanical Design*. Vol. 134, p. 051009.
- [48] Young, W. C., and Budynas, R. G., 2001. *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7th ed., McGraw-Hill, New York.
- [49] Su, H. J. y Tari, H., 2010, Realizing Orthogonal Motions With Wire Flexures Connected in Parallel, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 132, p. 121002.
- [50] Su, H. J. y Tari, H., 2011, On Line Screw Systems and Their Application to Flexure Synthesis, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 3 p.011009.
- [51] Hao, G., 2017, Design and analysis of symmetric and compact 2R1T (in-plane 3-DOC) flexure parallel mechanisms, *Mechanical Sciences*, Vol. 8 pp. 1-9.