



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

**Síntesis cinemática
del mecanismo modificado de Wanzler**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Ingeniería Mecánica

PRESENTA:

Ing. Henry Alberto Suárez Velásquez

DIRECTORES:

Dr. Ing. J. Jesús Cervantes Sánchez

PhD. José María Rico Martínez

Salamanca, Gto. Febrero de 2018.

Índice general

| | |
|---|-------------|
| Agradecimientos | VIII |
| Resumen | IX |
| Summary | X |
| Justificación | XI |
| 1. Antecedentes y definición del proyecto de tesis | 1 |
| 1.1. Antecedentes del proyecto de tesis. | 1 |
| 1.2. Definición del proyecto de tesis. | 6 |
| 2. Análisis cinemático del mecanismo de Wanzler | 7 |
| 2.1. Descripción del mecanismo. | 7 |
| 2.2. Análisis cinemático de posición del mecanismo. | 8 |
| 2.2.1. Diagrama cinemático auxiliar. | 8 |
| 2.2.2. Polígonos de vectores posición. | 9 |
| 2.3. Ecuaciones de restricción en posición. | 10 |
| 3. Ecuaciones de síntesis cinemática | 11 |
| 3.1. Poses del eslabón acoplador. | 11 |
| 3.2. Poses originales y poses modificadas. | 12 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 3.3. | Geometría de las poses del mecanismo de Wanzer. | 13 |
| 3.4. | Primera condición geométrica. | 13 |
| 3.5. | Segunda condición geométrica. | 15 |
| 3.6. | Tercera condición geométrica. | 16 |
| 4. | Síntesis cinemática del mecanismo de Wanzer | 18 |
| 4.1. | Estrategia de síntesis cinemática para la generación de movimiento. | 18 |
| 4.2. | Modificación al mecanismo de Wanzer. | 21 |
| 4.3. | Red topológica y movilidad del mecanismo modificado de Wanzer. | 24 |
| 5. | Síntesis cinemática del mecanismo 4R para la generación de trayectoria | 26 |
| 5.1. | Estrategia de síntesis para la generación de trayectoria. | 26 |
| 5.2. | Curvas de acoplador del mecanismo plano 4R. | 27 |
| 6. | Rectificación del diseño del mecanismo modificado de Wanzer | 31 |
| 6.1. | Rectificación del diseño del lazo 4R. | 32 |
| 6.1.1. | Sobre el defecto de Grashof. | 32 |
| 6.1.2. | Sobre los defectos de circuito y ramal. | 32 |
| 6.2. | Rectificación del diseño para el lazo de Wanzer. | 34 |
| 6.2.1. | Ecuación de entrada-salida del trammel de Wanzer. | 34 |
| 6.2.2. | Uso de la curva de acoplador para el mecanismo de Wanzer original. | 38 |
| 6.2.3. | Utilización de parámetros libres en el proceso de síntesis. | 40 |
| 7. | Ejemplos de diseño cinemático del mecanismo modificado de Wanzer | 41 |
| 7.1. | Estrategia de diseño cinemático. | 41 |
| 7.2. | Ejemplo de diseño 1. | 44 |
| 7.2.1. | Análisis de defectos para el mecanismo del ejemplo de diseño 1. | 46 |

| | |
|--|-----------|
| 7.3. Ejemplo de diseño 2. | 48 |
| 7.3.1. Análisis de defectos para el mecanismo del ejemplo de diseño 2. | 51 |
| 7.4. Ejemplo de diseño 3. | 53 |
| 7.4.1. Análisis de defectos del mecanismo del ejemplo de diseño 3. | 56 |
| 7.5. Discusión de resultados. | 58 |
| 8. Conclusiones y trabajo futuro | 59 |
| 8.1. Conclusiones. | 59 |
| 8.2. Trabajo futuro. | 60 |
| Bibliografía | 61 |

Lista de figuras

| | |
|---|----|
| 1.1. Páginas del manual de usuario de la máquina de coser Wanzer modelo C. | 2 |
| 1.2. Inversiones de la cadena cinemática de doble corredera. | 2 |
| 1.3. El mecanismo de Wanzer. | 3 |
| 1.4. Esquema del mecanismo de Wanzer presentado por Dent. | 3 |
| 1.5. Esquema del mecanismo de Wanzer presentado por Hunt. | 4 |
| 2.1. Diagrama esquemático del mecanismo de Wanzer. | 7 |
| 2.2. Diagrama cinemático auxiliar del mecanismo de Wanzer. | 8 |
| 2.3. Polígonos de vectores posición del mecanismo de Wanzer. | 9 |
| 3.1. Eslabón acoplador 4 y los parámetros x, y, β utilizados para definir su ubicación. . . | 11 |
| 3.2. Poses originales del cuerpo conducido. | 12 |
| 3.3. Poses modificadas del cuerpo conducido. | 12 |
| 3.4. Poses del eslabón acoplador. | 13 |
| 4.1. Diagrama esquemático del mecanismo modificado de Wanzer. | 22 |
| 4.2. Diagrama esquemático del eslabón 4. | 23 |
| 4.3. Red topológica del mecanismo modificado de Wanzer. | 24 |
| 5.1. Diagrama esquemático del mecanismo plano de 4 barras. | 26 |
| 5.2. Polígono P_0MRASN de vectores posición para la cadena 4R. | 27 |

| | |
|--|----|
| 5.3. Geometría del acoplador 5 del mecanismo plano 4R. | 28 |
| 6.1. Diagrama cinemático auxiliar del mecanismo 4R. | 33 |
| 6.2. Posibles orientaciones del disco ranurado 1. | 38 |
| 6.3. Posición del punto P relativa a Q | 39 |
| 7.1. Diagrama de flujo para el diseño cinemático del mecanismo modificado de Wanzer. | 42 |
| 7.2. Diagrama de flujo para el diseño cinemático del mecanismo modificado de Wanzer (cont.). | 43 |
| 7.3. Conjunto de 11 poses usadas por Chen. | 43 |
| 7.4. Mecanismo diseñado para el ejemplo de diseño 1. | 44 |
| 7.5. Poses del mecanismo modificado de Wanzer para el ejemplo de diseño 1. | 45 |
| 7.6. Curvas de acoplador del punto A para el ejemplo de diseño 1. | 46 |
| 7.7. Curvas de acoplador del punto P para el ejemplo de diseño 1. | 47 |
| 7.8. Mapeo de los puntos P_i sobre las regiones de solución del ángulo θ para el ejemplo de diseño 1. | 47 |
| 7.9. Mecanismo diseñado para el ejemplo de diseño 2. | 48 |
| 7.10. Poses 0 a 3 del mecanismo modificado de Wanzer para el ejemplo de diseño 2. | 49 |
| 7.11. Poses 4 a 6 del mecanismo modificado de Wanzer para el ejemplo de diseño 2. | 50 |
| 7.12. Curvas de acoplador del punto A para el ejemplo de diseño 2. | 51 |
| 7.13. Curvas de acoplador del punto P para el ejemplo de diseño 2. | 52 |
| 7.14. Mapeo de los puntos P_i sobre las regiones de solución del ángulo θ para el ejemplo de diseño 2. | 52 |
| 7.15. Mecanismo resultante para el ejemplo de diseño 3. | 53 |
| 7.16. Poses 0 a 3 del mecanismo modificado de Wanzer para el ejemplo de diseño 3. | 54 |
| 7.17. Poses 4 a 7 del mecanismo modificado de Wanzer para el ejemplo de diseño 3. | 55 |
| 7.18. Curvas de acoplador del punto A para el ejemplo de diseño 3. | 56 |
| 7.19. Curvas de acoplador del punto P para el ejemplo de diseño 3. | 57 |

7.20. Mapeo de los puntos P_i sobre las regiones de solución del ángulo θ para el ejemplo de diseño 3. 57

Lista de cuadros

| | |
|--|----|
| 4.1. Ecuaciones de diseño y variables involucradas. | 18 |
| 4.2. Comparación de la movilidad de los mecanismos. | 25 |
| 6.1. Parámetros de diseño y parámetros libres para la síntesis del mecanismo modificado de Wanzer. | 40 |
| 7.1. Parámetros de diseño del mecanismo modificado de Wanzer del ejemplo de diseño 1. | 44 |
| 7.2. Parámetros de diseño del mecanismo modificado de Wanzer del ejemplo de diseño 2. | 48 |
| 7.3. Parámetros de diseño del mecanismo modificado de Wanzer del ejemplo de diseño 3. | 53 |

Agradecimientos

Agradezco a mi familia, a mi madre *Bleider Gloria Velásquez*, a mi padre *Henry Alberto Suárez* y a mi hermana *Bleider Andrea Suárez* por su apoyo y palabras de aliento durante mi estancia en la maestría.

A mis asesores, el Dr. J. Jesús Cervantes Sánchez y el Dr. José María Rico, por su apoyo y enseñanzas durante el desarrollo de esta investigación.

Agradecimientos a todos los de la *New Family* que con su respaldo y buenas energías me han ayudado a seguir adelante.

También quiero agradecerle al CONACyT por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría en México a través de la beca No. 595298, y llevar a buen término este trabajo de tesis.

Resumen

En este trabajo de investigación se presenta el mecanismo modificado de Wanzer, un novedoso dispositivo de movimiento plano conformado por ocho eslabones y que tiene un grado de libertad. Su estructura cinemática se basa en la combinación entre el mecanismo creado por Richard Mott Wanzer en el siglo XIX y el mecanismo plano 4R. Se desarrolla un proceso de síntesis cinemática para la generación de movimiento que se cree no ha sido aplicado a este mecanismo. Las ecuaciones de diseño resultantes permiten encontrar sus dimensiones para que pase por un máximo de ocho poses. Además se introduce una metodología para la rectificación del diseño en la que se usan las curvas de acoplador del mecanismo para descartar aquellas soluciones que presentan defectos de circuito, de ramal y de Grashof. Se incluyen ejemplos de diseño para seis, siete y ocho poses en los que se destaca la importancia de tener parámetros libres al momento de sintetizar el mecanismo.

Summary

The present investigation presents the modified Wanzer linkage, a novel one-degree-of-freedom planar motion device formed by eight links. Its kinematic structure is based upon combination of Richard Mott Wanzer's linkage and the planar 4R linkage. A motion generation synthesis approach is developed which, to the author's best knowledge, has not been applied to this linkage. The subsequent design equations allow to find its dimensions in order for it to visit up to eight poses. Moreover, a design rectification process is introduced, which uses the coupler curves to identify and discard those solutions with circuit, branch and Grashof defects. Three design examples are included, they show the motion generation synthesis process for six, seven and eight poses. With this examples, the importance of having free parameters in the design equations is highlighted.

Justificación

El diseño de mecanismos abarca desde la especificación de los tipos de elementos mecánicos que lo componen (levas, engranajes, eslabones, etc.) hasta la determinación de todos los parámetros geométricos necesarios para cumplir con las condiciones de movimiento requeridos por una tarea específica. Los métodos de síntesis cinemática pueden lograr esto y son aplicables tanto a mecanismos planos como espaciales. Estos pueden diseñarse para realizar tres tipos de tareas: generación de movimiento, funciones y trayectoria.

Dentro de los mecanismos planos, las cadenas cinemáticas de cuatro o seis eslabones y sus variantes han sido estudiadas frecuentemente. Sin embargo no se ha encontrado evidencia de que al mecanismo de Wanzler se le haya aplicado algún método de síntesis. Con esto se busca establecer si dicho dispositivo es una alternativa viable como generador de movimiento para al menos más de cinco poses, siendo este límite impuesto por el mecanismo 4R, el más simple que se puede construir.

Diseñar un mecanismo para tareas de generación de movimiento no solo implica que sea capaz de pasar exactamente por todas las poses de forma aislada como lo garantizan los métodos de síntesis cinemática. También debe ser capaz de moverse de forma continua, sin necesidad de desensamblarse, y con un movimiento de entrada unidireccional. Este es un paso necesario para lograr un diseño cinemático integral del mecanismo, y para ello, deben aplicarse metodologías para la rectificación que eliminen sus defectos.

La síntesis cinemática en conjunto con la rectificación del diseño de un mecanismo poco estudiado representa un desafío muy interesante y se espera que esta investigación sea un aporte académico significativo.

Capítulo 1

Antecedentes y definición del proyecto de tesis

En la primera parte de este capítulo se hace una revisión bibliográfica que muestra los antecedentes del presente proyecto de investigación. Primero, una breve reseña histórica acerca del mecanismo de Wanzer es presentada. Luego se mencionan aquellas publicaciones que han hecho aportes sobre el mismo en las áreas de cinemática y cinética de mecanismos. En la parte final de este capítulo se define el proyecto de tesis, así como los alcances que éste tiene.

1.1. Antecedentes del proyecto de tesis.

El mecanismo de Wanzer debe su nombre al empresario estadounidense Richard Mott Wanzer (1818 – 1900). El dispositivo apareció en los últimos modelos de las máquinas de coser que su empresa fabricaba durante la segunda mitad del siglo XIX. Wanzer se mudó a Hamilton (Canadá) alrededor de 1859 después de tener dificultades económicas en Buffalo, N.Y. (EE.UU). En 1860 comenzó a fabricar sus primeras máquinas de coser, pasó de producir máquinas diseñadas por otras compañías como Singer y Wheeler & Wilson a fabricar máquinas de su propio diseño en 1862 [1]. El empresario usaba su creación para guiar el movimiento vertical de la aguja de coser de sus máquinas.

En la Fig. 1.1¹ se muestra la portada y una de las páginas del manual de usuario de la máquina de coser Wanzer modelo C introducida al mercado en algún momento entre los años 1877 y 1881. En ella puede notarse una vista de sección parcial del ensamble que mueve la aguja de la máquina y que corresponde al mecanismo de Wanzer. La particularidad de este mecanismo es que transforma el movimiento rotatorio del disco en un movimiento cíclico de la aguja.

El mecanismo de Wanzer es un dispositivo mecánico de movimiento plano con seis eslabones basado en la cadena cinemática de doble corredera, cuyas inversiones dan origen a mecanismos más

¹Cortesía de: *Canada Science and Technology Museums Corporation*, ubicado en Ottawa, CA. (<http://www.techno-science.ca/>)

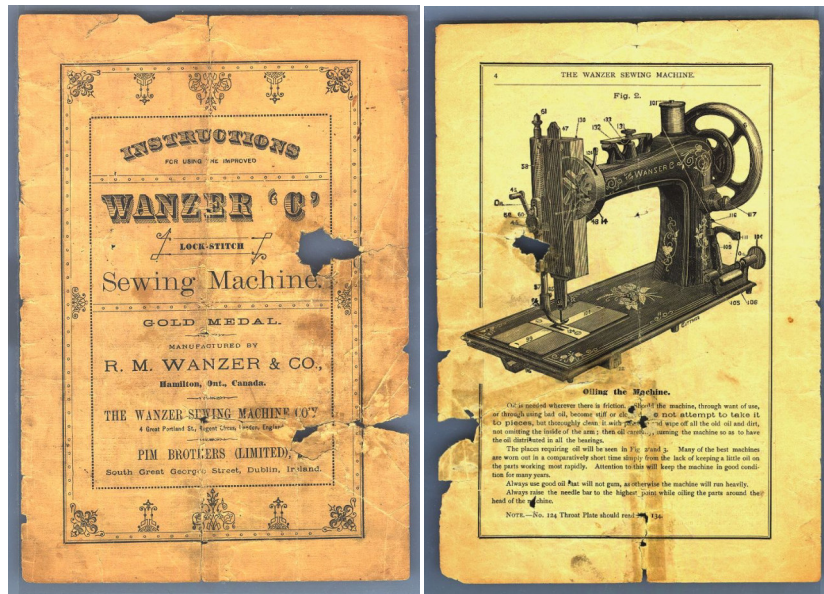


Figura 1.1. Páginas del manual de usuario de la máquina de coser Wanzer modelo C.

conocidos como el elipsógrafo de Arquímedes, el mecanismo de Yugo Escocés o el acople de Oldham, los cuales son mostrados en la Fig. 1.2.

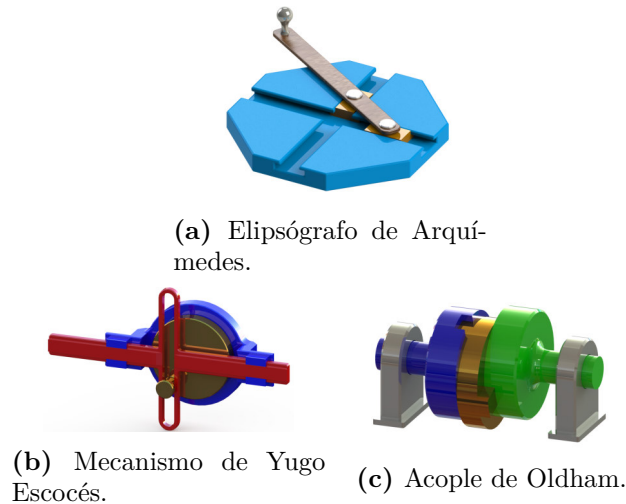


Figura 1.2. Inversiones de la cadena cinemática de doble corredera.

El eslabón de entrada del mecanismo de Wanzer corresponde a un disco giratorio que tiene dos ranuras perpendiculares entre sí. Dentro de cada ranura desliza una corredera que se une a un eslabón móvil común que finalmente se conecta al eslabón de salida correspondiente a otra corredera que se mueve a lo largo de una ranura vertical fija, tal y como se muestra en la Fig. 1.3.

Siguiendo la clasificación de Torfason presentada por Shigley [2], el mecanismo de Wanzer se clasifica como un mecanismo alternante, en el que la rotación del disco en una misma dirección se transforma en un movimiento alternante de la corredera vertical.

Se han encontrado pocas publicaciones relacionadas con el estudio del mecanismo de Wanzer en las áreas de cinemática y dinámica. Una de las primeras menciones la hace Dent [3] en 1921, que lo utiliza como ejemplo para hacer el análisis de velocidad y de fuerzas usando métodos gráficos, específicamente polígonos de velocidad. La configuración que usó se muestra en la Fig. 1.4.

Steeds [4] en 1940 y Holowenko [5] en 1955 la emplean para el análisis gráfico de velocidad, Chace [6] en 1963 realiza un análisis de posición, velocidad y aceleración usando métodos vectoriales para deducir las ecuaciones que gobiernan el movimiento del mecanismo. Beggs [7] en 1966 aplica métodos gráficos para el análisis de velocidad, aceleración y sacudida (*jerk*), al mismo tiempo que usa métodos analíticos para el análisis de posición y velocidad del mecanismo.

Hunt [8] en 1990 presenta una versión generalizada del mecanismo de Wanzer, en la que las correderas del disco rotatorio no son necesariamente perpendiculares entre sí y además, la corredera fija tiene una excentricidad respecto al centro de rotación del disco. Este ensamble se muestra en la Fig. 1.5.

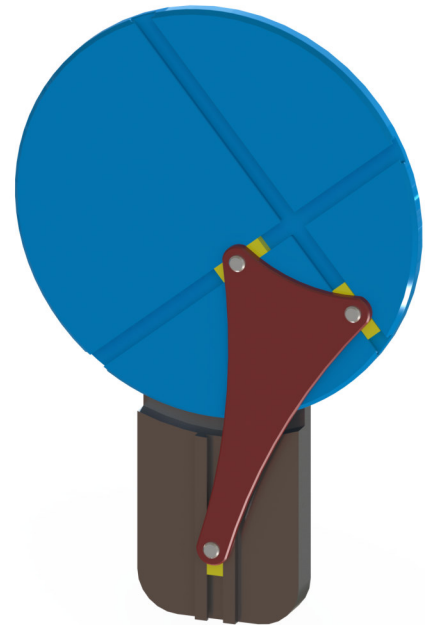


Figura 1.3. El mecanismo de Wanzer.

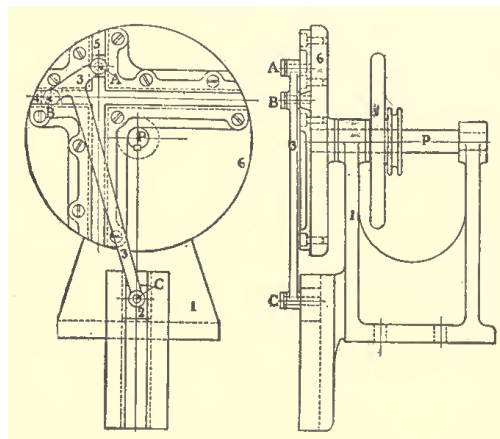


Figura 1.4. Esquema del mecanismo de Wanzer presentado por Dent [3].

El análisis cinemático que estos autores hacen de este mecanismo se basa en una geometría preestablecida y permite conocer los parámetros de movimiento de todos los eslabones. Si se desea hacer el proceso inverso, es decir, especificar un mecanismo que cumpla unas características de movimiento determinadas debe aplicarse lo que se conoce como síntesis cinemática. Dependiendo

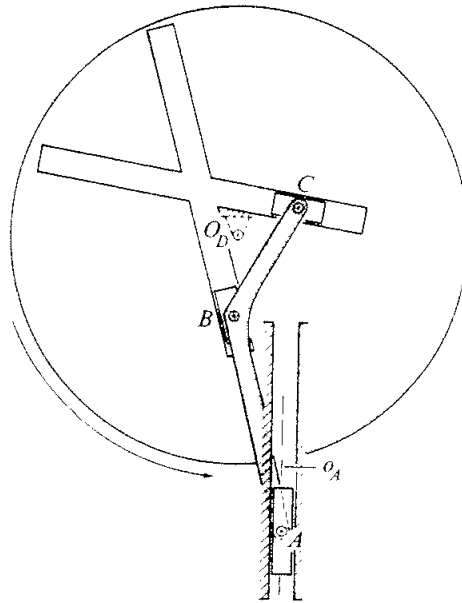


Figura 1.5. Esquema del mecanismo de Wanzler presentado por Hunt [8].

del grado de generalidad del problema de diseño, puede hablarse de tres etapas [9] en el proceso de síntesis:

- (1) **Síntesis de tipo:** trata con la selección del tipo de mecanismo que mejor se adapte a los requerimientos de movimiento, aunque en este nivel se le da más importancia a criterios como: facilidad de manufactura, elección de materiales, espacio disponible y otros. Aquí se busca establecer si el mecanismo debe basarse en eslabones, levas, engranajes y demás.
- (2) **Síntesis de número:** esta etapa se concentra en determinar la cantidad de eslabones y el tipo de pares cinemáticos necesarios para obtener un número de grados de libertad específicos para el mecanismo. Aquí entran en juego el criterio de Grashof para mecanismos $4R$ o el criterio de *Chebyshev-Grübler-Kutzbach*, que es más general y abarca la mayoría de mecanismos planos con ciertas excepciones.
- (3) **Síntesis dimensional:** si se ha establecido con anterioridad el tipo de mecanismo y los eslabones que va a tener, las variables restantes por determinar serán las dimensiones de todas sus partes. De esto se encarga la síntesis dimensional.

Hablando específicamente de la síntesis dimensional, existen distintos tipos de problemas que ésta puede solucionar, y que varios autores han reunido en tres grandes grupos [2], [9]-[12]:

- (1) **Generación de movimiento:** en la que un cuerpo rígido debe guiarse a través de un conjunto de poses especificadas por el diseñador. Cuando se habla de poses, se refiere a las coordenadas de un punto del cuerpo rígido así como su orientación.

- (2) **Generación de trayectoria:** que implica mover un punto de un cuerpo rígido a través de una trayectoria preestablecida, ya sea cumpliendo de forma exacta un conjunto de coordenadas de la trayectoria o minimizando el error en toda su longitud.
- (3) **Generación de funciones:** con la cual es necesario coordinar los movimientos del eslabón de entrada y otro eslabón (generalmente el de salida) del mecanismo de acuerdo a una relación matemática deseada.

La síntesis cinemática de un mecanismo que cumpla las características de movimiento de cualquiera de los grupos anteriores puede llevarse a cabo a través de dos enfoques, el enfoque geométrico o gráfico, y el enfoque analítico o algebraico. Los métodos gráficos pueden llevar a soluciones rápidas y confiables con cierta exactitud para ciertos problemas. Si se requiere más precisión en el diseño o si se están diseñando mecanismos espaciales, los métodos algebraicos son más idóneos [9].

Dentro de los métodos algebraicos de síntesis cinemática dimensional existen varias formas de obtener las expresiones que relacionan los parámetros del mecanismo. Se tienen las ecuaciones de desplazamiento, las cuales relacionan variables de entrada y de salida con los parámetros geométricos. También está el uso de números complejos con los cuales el movimiento del mecanismo se define mediante la notación compleja, facilitando la obtención de una relación entre los ángulos y longitudes de sus eslabones. Además, se pueden plantear restricciones geométricas en las cuales usando las propias limitaciones de movimiento que generan los pares cinemáticos del mecanismo se obtienen ecuaciones que relacionan sus parámetros de diseño.

Al aplicar un método algebraico de síntesis se obtiene un sistema de ecuaciones polinomiales que no siempre es fácil de resolver. Encontrar la solución a estos sistemas se puede hacer a través de varias formas. Por ejemplo, McCarthy [11] usa métodos de eliminación algebraica para obtener el diseño de un mecanismo plano de cuatro barras para cinco puntos de precisión. Crane y Duffy [13] usan los métodos de resultantes de Sylvester y Bezout [14] para resolver el análisis de posición para cadenas cinemáticas espaciales, Parrish y McCarthy [15] usan la formulación de Dixon [16] (derivada del método creado por Bezout) para sintetizar un mecanismo plano de seis barras.

Métodos de solución numérica también se han aplicado para resolver problemas de síntesis dimensional, los cuales han aprovechado el cada vez mayor poder de procesamiento de las computadoras que existen actualmente. Por ejemplo, Plecnik y McCarthy [17] usan métodos de continuación numérica para hacer la síntesis de mecanismos de seis eslabones para la generación de funciones, Schreiber et al. [18] aplican estos mismos métodos en la síntesis de mecanismos de Stephenson para la generación de movimiento, mientras que Pantoja-García et al. [19] usan un algoritmo evolutivo para hacer la síntesis de un generador de trayectoria plana usado en la marcha bípeda de un robot.

Estudios relacionados con la síntesis dimensional para la generación de movimiento de mecanismos planos de un grado de libertad son escasos. Si el problema de síntesis requiere que un cuerpo rígido por cinco o menos poses, puede usarse un mecanismo plano de 4 barras [20]-[24], así como también un mecanismo de Watt tipo I de seis eslabones [25]. En caso de que el problema de síntesis requiera guiar un cuerpo rígido por más de cinco poses, deben buscarse mecanismos con mejores capacidades de movimiento, como el planteado por Chen y Angeles [26].

1.2. Definición del proyecto de tesis.

La manera en que está estructurado el mecanismo de Wanzel permite que el eslabón que acopla a todas las correderas describa un movimiento plano general y en la síntesis para la generación de movimiento es una característica necesaria. Esto implica que sería posible utilizar este dispositivo para ubicar un cuerpo rígido en un conjunto cualquiera de posiciones en su plano de trabajo.

Con base en lo anterior, y teniendo en cuenta que las publicaciones anteriores se han concentrado en el análisis cinemático del mecanismo bajo estudio, la presente investigación se centrará en dos aspectos principales:

- (a) Encontrar un conjunto de ecuaciones que permitan obtener las dimensiones de un mecanismo modificado de Wanzel para mover el eslabón acoplador a través de un conjunto arbitrario de poses en el plano.
- (b) Determinar el número máximo de poses por las que pueda pasar de manera exacta el eslabón acoplador del mecanismo en análisis.

Con esta investigación se pretende complementar la información disponible sobre el mecanismo de Wanzel, específicamente sobre su diseño cinemático y sus limitaciones a la hora de utilizarlo para solucionar problemas de síntesis para la generación de movimiento. Todas aquellas cadenas cinemáticas que permitan cumplir una tarea de generación de movimiento para más de cinco poses serán consideradas y se espera que este nuevo dispositivo mecánico se presente como un buen candidato en la selección de mecanismos con capacidad de alcanzar un mayor número de poses en el plano.

Capítulo 2

Análisis cinemático del mecanismo de Wanzer

En este capítulo se presenta el análisis cinemático de posición del mecanismo de Wanzer. Primeramente, se expone su estructura cinemática y los parámetros que definen su movimiento. Luego, se obtienen las ecuaciones de restricción en posición que representan cualquier configuración adoptada por el mecanismo.

2.1. Descripción del mecanismo.

El mecanismo de Wanzer consta de un disco ranurado 1 que gira alrededor del punto fijo Q y que tiene dos ranuras perpendiculares entre sí, dentro de las que se desplazan los bloques deslizantes 2 y 3. El bloque 4 se conecta con los bloques 2, 3 y 5, mediante revolutas localizadas en los puntos B , C y A respectivamente. Finalmente, el bloque 5 desliza a lo largo de la ranura fija mostrada.

Las correderas de los bloques deslizantes 2 y 3 están ubicadas respecto al punto Q a una distancia a y b respectivamente. La corredera vertical fija está ubicada a una distancia horizontal ε respecto al mismo punto.

Al describir un mecanismo, es esencial hablar de su movilidad. Esta se refiere al número de grados de libertad que posee, y es posible determinarla a partir del

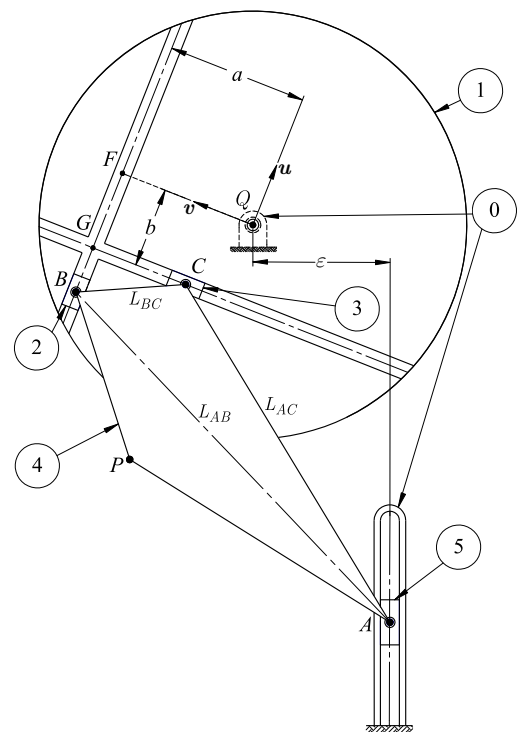
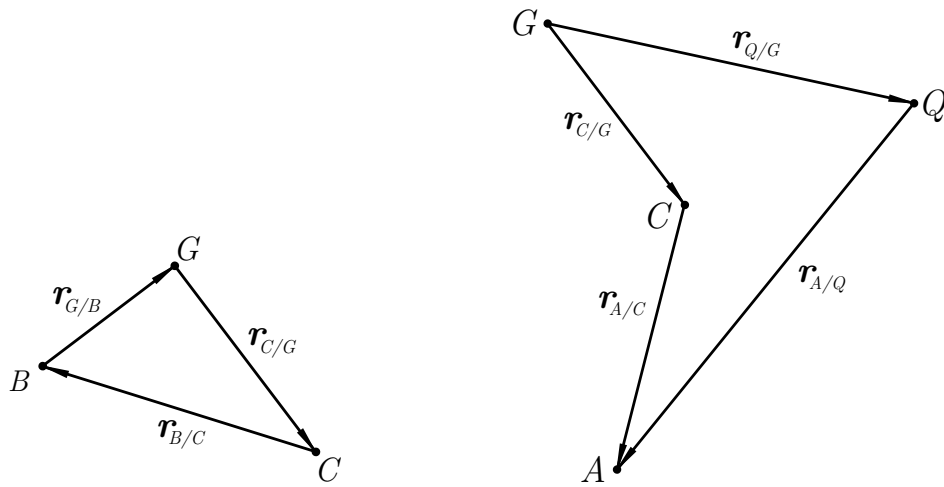


Figura 2.1. Diagrama esquemático del mecanismo de Wanzer.

2 con respecto al disco ranurado 1, r es el desplazamiento de traslación del bloque 3 con respecto al disco ranurado 1, y φ es un ángulo utilizado para representar la rotación del eslabón acoplador 4 con respecto al disco ranurado 1.

2.2.2. Polígonos de vectores posición.

Del diagrama cinemático auxiliar mostrado en la Fig. 2.2 se observa que durante el movimiento del mecanismo de Wanzer se preservan dos polígonos: BGC y $GCAQ$. Ambos se muestran en la Fig. 2.3.



(a) Polígono de vectores posición BGC . (b) Polígono de vectores posición $GCAQ$.

Figura 2.3. Polígonos de vectores posición del mecanismo de Wanzer.

Primeramente, la ecuación representativa del polígono BGC mostrado en la Fig. 2.3a se puede plantear como:

$$\mathbf{r}_{B/C} + \mathbf{r}_{G/B} + \mathbf{r}_{C/G} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Por otro lado, la ecuación representativa del polígono $GCAQ$ que aparece dibujado en la Fig. 2.3b viene dada por:

$$\mathbf{r}_{C/G} + \mathbf{r}_{A/C} - \mathbf{r}_{Q/G} - \mathbf{r}_{A/Q} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Las ecuaciones vectoriales (2.3) y (2.4) serán posteriormente utilizadas para obtener las ecuaciones de restricción en posición del mecanismo de Wanzer.

2.3. Ecuaciones de restricción en posición.

Antes de plantear las ecuaciones de restricción en posición, primero se definen los vectores posición involucrados en las ecuaciones (2.3) y (2.4). Para ello, de la geometría mostrada en la Fig. 2.2 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{B/C} &= L_{BC} \cos \varphi \mathbf{u} + L_{BC} \sin \varphi \mathbf{v} \\
 \mathbf{r}_{G/B} &= -q \mathbf{u} \\
 \mathbf{r}_{C/G} &= -r \mathbf{v} \\
 \mathbf{r}_{A/C} &= L_{AC} \cos (\varphi + \alpha) \mathbf{u} + L_{AC} \sin (\varphi + \alpha) \mathbf{v} \\
 \mathbf{r}_{Q/G} &= b \mathbf{u} + a \mathbf{v} \\
 \mathbf{r}_{A/Q} &= (\varepsilon \cos \theta + p \sin \theta) \mathbf{u} + (-\varepsilon \sin \theta + p \cos \theta) \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{v} son los vectores unitarios de un sistema de referencia móvil vinculado al disco ranurado 1, ver Fig. 2.2. Ahora, al sustituir los vectores posición definidos en la ecuación (2.5) en la ecuación (2.3) asociada al polígono BGC se obtiene:

$$\begin{bmatrix} L_{BC} \cos \varphi \\ L_{BC} \sin \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Después de separar las componentes en \mathbf{u} y en \mathbf{v} se obtiene que:

$$L_{BC} \cos \varphi - q = 0 \tag{2.6}$$

$$L_{BC} \sin \varphi - r = 0 \tag{2.7}$$

Procediendo de manera similar para la ecuación (2.4) asociada al polígono $GCAQ$ se tiene ahora que:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{AC} \cos (\varphi + \alpha) \\ L_{AC} \sin (\varphi + \alpha) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon \cos \theta + p \sin \theta \\ -\varepsilon \sin \theta + p \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

separando componentes en \mathbf{u} y en \mathbf{v} :

$$L_{AC} \cos (\varphi + \alpha) - b - \varepsilon \cos \theta - p \sin \theta = 0 \tag{2.8}$$

$$-r + L_{AC} \sin (\varphi + \alpha) - a + \varepsilon \sin \theta - p \cos \theta = 0 \tag{2.9}$$

Las expresiones (2.6) a (2.9) representan las ecuaciones de restricción en posición del mecanismo de Wanzler y relacionan los parámetros geométricos del mecanismo a , b , ε , L_{AB} , L_{AC} y α con los elementos del vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} .

Capítulo 3

Ecuaciones de síntesis cinemática

En este capítulo se presenta el desarrollo matemático que conduce a la obtención de un conjunto de expresiones algebraicas que permitirán diseñar (sintetizar) cinemáticamente al mecanismo de Wanzer. Estas ecuaciones de síntesis involucran una serie de parámetros geométricos de diseño que caracterizan la estructura cinemática de este mecanismo.

3.1. Poses del eslabón acoplador.

El objetivo primordial que se persigue al diseñar cinemáticamente el mecanismo de Wanzer es lograr que el eslabón acoplador 4, mostrado en la Fig. 2.1, alcance de manera exacta el mayor número de poses posibles. Entonces, para definir una pose general del eslabón acoplador se utilizarán las coordenadas cartesianas x, y del punto P , así como el ángulo de orientación β .

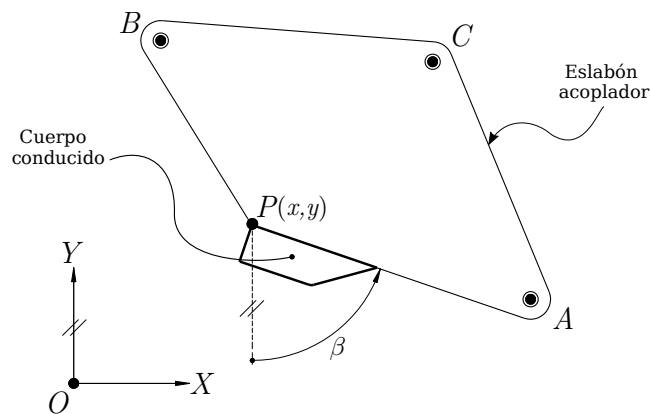


Figura 3.1. Eslabón acoplador 4 y los parámetros x, y, β utilizados para definir su ubicación.

3.2. Poses originales y poses modificadas.

El conjunto de n poses originales por las que se espera pase el cuerpo conducido se ilustran gráficamente en la Fig. 3.2. Entonces, las *poses originales* serán definidas mediante los vectores posición $\mathbf{r}_i = (X_i, Y_i)^T$ y los ángulos de orientación β_i , para $i = 0, 1, \dots, n$. Debe notarse que los vectores posición se definen con respecto a un punto arbitrario fijo O y los ángulos de orientación se miden con respecto a un eje arbitrario Y .

Por otro lado, las que serán conocidas como *poses modificadas*, se definirán en la manera gráficamente ilustrada en la Fig. 3.3. De esta forma, las poses modificadas se representarán mediante los vectores posición relativos, $\mathbf{p}_i \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$, así como los ángulos de orientación relativa, $\phi_i \equiv \beta_i - \beta_0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Es importante notar que los vectores posición se definen ahora con respecto al punto P_0 el cual representa a la primera pose deseada. Además los ángulos de orientación se miden ahora con respecto al eje de orientación de la primera pose deseada.

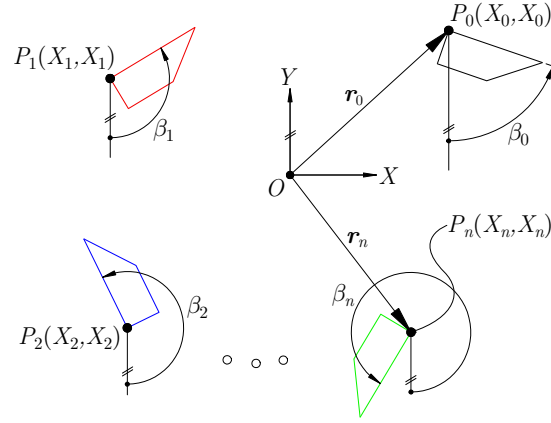


Figura 3.2. Poses originales del cuerpo conducido.

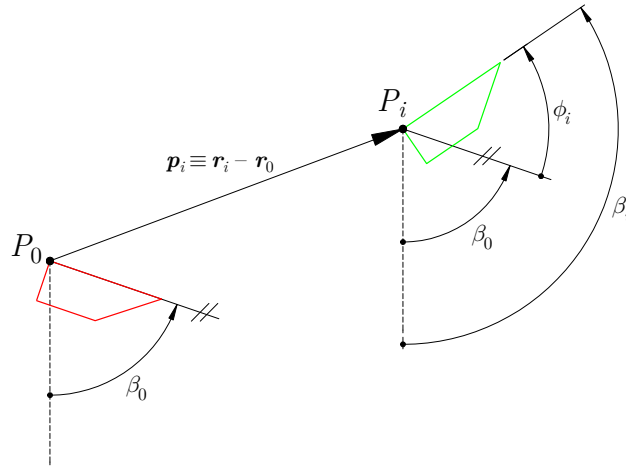


Figura 3.3. Poses modificadas del cuerpo conducido.

El objetivo que se persigue al cambiar de las poses originales a las poses modificadas tiene dos partes principales: (a) facilitar el proceso de síntesis cinemática, (b) disminuir en uno el número de poses resultantes, es decir, el número de poses originales es igual al número de poses modificadas mas uno. Sin embargo, ambos conjuntos de poses, originales y modificadas, son completamente equivalentes entre sí.

3.3. Geometría de las poses del mecanismo de Wanzer.

La etapa de síntesis dimensional consiste en encontrar las dimensiones del mecanismo para que el cuerpo conducido que está unido al eslabón acoplador 4 alcance ciertas posiciones con cierta orientación. El proceso inicia dibujando este eslabón en la pose 0 y en una pose arbitraria i , tal como se muestra en la Fig. 3.4.

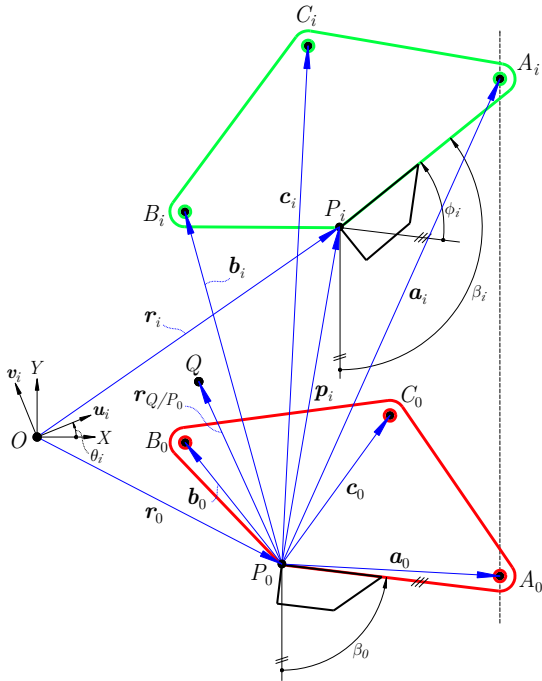


Figura 3.4. Poses del eslabón acoplador.

La forma geométrica del eslabón acoplador 4 se describe mediante los vectores \mathbf{a}_0 , \mathbf{b}_0 y \mathbf{c}_0 , asociados a los puntos A_0 , B_0 y C_0 , respectivamente, y se definen con respecto al punto P_0 de la primera pose deseada. Así mismo, el vector \mathbf{r}_{Q/P_0} asociado al punto Q define la posición del centro de rotación del disco ranurado 1.

Cuando el eslabón 4 se mueve a la pose i , los nuevos vectores posición se denotan como \mathbf{a}_i , \mathbf{b}_i y \mathbf{c}_i , y se asocian a los puntos A_i , B_i y C_i respectivamente.

Aunado a esto, la orientación del disco 1 cambia, por tanto, los vectores unitarios del sistema de referencia móvil se expresan como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \cos \theta_i \mathbf{i} + \text{sen } \theta_i \mathbf{j} \\ \mathbf{v}_i &= -\text{sen } \theta_i \mathbf{i} + \cos \theta_i \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.1)$$

que se mantiene para cualquier configuración del mecanismo, es decir, para $i = 0, 1, \dots, n$.

Estos vectores permitirán asociar la información de las poses con los parámetros geométricos del mecanismo de Wanzer y describir sus condiciones geométricas mientras se mueve por todas las poses deseadas.

3.4. Primera condición geométrica.

La primera condición geométrica se relaciona con la excentricidad de una de las correderas del disco ranurado 1, definida mediante el parámetro a mostrado en la Fig. 2.1. Usando los vectores definidos en la Fig. 3.4, dicho parámetro se puede calcular como:

$$(\mathbf{r}_{Q/P_0} - \mathbf{b}_i) \cdot \mathbf{v}_i = a \quad (3.2)$$

La excentricidad de la corredera se mantiene constante durante todo el movimiento, así que esta relación se mantiene en cualquier configuración del mecanismo, es decir, para $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Al reescribir la ecuación (3.2) relacionando todas las poses respecto a la primera se obtiene:

$$(\mathbf{r}_{Q/P_0} - \mathbf{b}_0) \cdot \mathbf{v}_0 = (\mathbf{r}_{Q/P_0} - \mathbf{b}_i) \cdot \mathbf{v}_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

Con esto se logra eliminar el parámetro a . Ahora, los vectores posición de los puntos B y Q del eslabón acoplador en la pose 0 se definen respecto al sistema de coordenadas de la pose como sigue:

$$\mathbf{b}_0 = x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{r}_{Q/P_0} = x_Q \mathbf{i} + y_Q \mathbf{j} \quad (3.5)$$

En la pose i , el vector posición del punto B_i se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{p}_i + \mathbf{R}_{0 \rightarrow i} \mathbf{b}_0 \quad (3.6)$$

donde $\mathbf{R}_{0 \rightarrow i}$ representa la matriz de rotación del eslabón acoplador 4 respecto al eje perpendicular al plano de movimiento, que lo lleva de la pose 0 a la pose i ; \mathbf{p}_i representa el vector de traslación de la pose i respecto a la pose 0, los cuales se definen en la ecuación (3.7) y (3.8) respectivamente:

$$\mathbf{R}_{0 \rightarrow i} = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\text{sen } \phi_i \\ \text{sen } \phi_i & \cos \phi_i \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{p}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} \quad (3.8)$$

De lo anterior, \mathbf{b}_i puede ser escrito como:

$$\mathbf{b}_i = (x_i + x_B \cos \phi_i - y_B \text{sen } \phi_i) \mathbf{i} + (y_i + x_B \text{sen } (\phi_i) + y_B \cos \phi_i) \mathbf{j} \quad (3.9)$$

luego, al sustituir la ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.9) en la (3.3) se llega a la siguiente expresión:

$$[(x_Q - x_B) \mathbf{i} + (y_Q - y_B) \mathbf{j}] \cdot \mathbf{v}_0 = [(x_Q - x_i - x_B \cos \phi_i + y_B \text{sen } \phi_i) \mathbf{i} + (y_Q - y_i - x_B \text{sen } \phi_i - y_B \cos \phi_i) \mathbf{j}] \cdot \mathbf{v}_i \quad (3.10)$$

Sustituyendo la ecuación (3.1) en la (3.10) y usando la representación matricial del producto escalar se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -(x_Q - x_B) \\ y_Q - y_B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_Q - x_i - x_B \cos \phi_i + y_B \text{sen } \phi_i \\ -(y_Q - y_i - x_B \text{sen } \phi_i - y_B \cos \phi_i) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_i \\ \cos \theta_i \end{bmatrix} = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

La expresión (3.11) es una primera ecuación de diseño que relaciona las coordenadas del punto B dadas por parámetros x_B y y_B , las coordenadas del punto Q dadas por los parámetros x_Q y y_Q , y la orientación del disco rotatorio 1 definida por θ_0 en la pose 0 y θ_i en i -ésima pose.

3.5. Segunda condición geométrica.

La siguiente condición geométrica para el mecanismo de Wanzler se relaciona con la distancia de la segunda corredera del disco ranurado 1, medida respecto al punto Q y que se denota por b , tal y como se muestra en la Fig. 2.1. Este parámetro se puede calcular como:

$$(\mathbf{r}_{Q/P_0} - \mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{u}_i = b \quad (3.12)$$

expresión que también se mantiene para cualquier configuración del mecanismo, es decir, para $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Y al igual que en la primera condición geométrica, la ecuación (3.12) se reescribe relacionando todas las poses respecto a la primera, obteniendo:

$$(\mathbf{r}_{Q/P_0} - \mathbf{c}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = (\mathbf{r}_{Q/P_0} - \mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{u}_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.13)$$

El vector posición del punto C_0 se define como:

$$\mathbf{c}_0 = x_C \mathbf{i} + y_C \mathbf{j} \quad (3.14)$$

En la pose i , el vector posición del punto C_i se obtiene de manera semejante al vector \mathbf{b}_i :

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{p}_i + \mathbf{R}_{0 \rightarrow i} \mathbf{c}_0 \quad (3.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.14) en la (3.15):

$$\mathbf{c}_i = (x_i + x_C \cos \phi_i - y_C \sin \phi_i) \mathbf{i} + (y_i + x_C \sin \phi_i + y_C \cos \phi_i) \mathbf{j} \quad (3.16)$$

Siguiendo el mismo procedimiento de la primera condición geométrica, la ecuación (3.13) se reescribe después de sustituir (3.5), (3.14) y (3.16):

$$[x_Q \mathbf{i} + y_Q \mathbf{j} - (x_C \mathbf{i} + y_C \mathbf{j})] \cdot \mathbf{u}_0 = (x_Q \mathbf{i} + y_Q \mathbf{j} - ((x_i + x_C \cos \phi_i - y_C \sin \phi_i) \mathbf{i} + (y_i + x_C \sin \phi_i + y_C \cos \phi_i) \mathbf{j})) \cdot \mathbf{u}_i \quad (3.17)$$

Al sustituir los vectores unitarios del sistema de coordenadas móvil dados por la ecuación (3.1) en la (3.17) se obtiene la siguiente expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} x_Q - x_C \\ y_Q - y_C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_Q - x_i - x_C \cos \phi_i + y_C \sin \phi_i \\ y_Q - y_i - x_C \sin \phi_i - y_C \cos \phi_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) es una segunda ecuación de diseño, muy similar a la primera, que relaciona las coordenadas del punto C dadas por los parámetros x_C y y_C , las coordenadas del punto Q dadas por los parámetros x_Q y y_Q , y la orientación del disco rotatorio 1 definida por el parámetro θ_0 en la pose 0 y θ_i en la pose i .

3.6. Tercera condición geométrica.

Finalmente, existe una tercera condición geométrica relacionada con el parámetro geométrico definido como ε , el cual se puede asociar con la corredera vertical del mecanismo de Wanzer. El parámetro ε se puede calcular como:

$$(\mathbf{r}_{Q/P_0} - \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{i} = \varepsilon \quad (3.19)$$

y al igual que la primera y segunda condiciones geométricas, esta relación se mantiene para cualquier configuración del mecanismo, es decir, para $i = 0, 1, 2, \dots, n$. La ecuación (3.19) se puede reescribir relacionando todas las poses respecto a la primera obteniendo:

$$(\mathbf{r}_{Q/P_0} - \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{r}_{Q/P_0} - \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{i} \quad (3.20)$$

El vector posición del punto A del eslabón acoplador 4 en la pose 0 se define como:

$$\mathbf{a}_0 = x_A \mathbf{i} + y_A \mathbf{j} \quad (3.21)$$

Ahora, en la pose i el vector posición del punto A_i del eslabón acoplador 4 está definido como sigue:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{p}_i + \mathbf{R}_{0 \rightarrow i} \mathbf{a}_0 \quad (3.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.21) en la (3.22):

$$\mathbf{a}_i = (x_i + x_A \cos \phi_i - y_A \sin \phi_i) \mathbf{i} + (y_i + x_A \sin \phi_i + y_A \cos \phi_i) \mathbf{j} \quad (3.23)$$

Como último paso, se sustituyen las ecuaciones (3.5), (3.21) y (3.23) en la (3.20) y se simplifican términos con lo que se obtiene:

$$x_A(\cos \phi_i - 1) + x_i - y_A \operatorname{sen} \phi_i = 0 \quad (3.24)$$

La ecuación (3.24) es la tercera ecuación de diseño del mecanismo de Wanzler y en ella aparecen los últimos parámetros que faltaban por relacionar: las coordenadas x_A y y_A del punto A . Para n poses del eslabón acoplador, la ecuación (3.24) puede ser expresada matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \cos \phi_1 - 1 & -\operatorname{sen} \phi_1 \\ \cos \phi_2 - 1 & -\operatorname{sen} \phi_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \phi_n - 1 & -\operatorname{sen} \phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

siendo (3.25) un sistema lineal de n ecuaciones con las dos incógnitas x_A y y_A .

Capítulo 4

Síntesis cinemática del mecanismo de Wanzler

En este capítulo se presenta el desarrollo matemático que permite obtener la forma algebraica final de las ecuaciones de diseño cinemático del mecanismo. Dicho desarrollo se basa en las ecuaciones que fueron expuestas para cada condición geométrica en el capítulo anterior.

4.1. Estrategia de síntesis cinemática para la generación de movimiento.

La estrategia general de síntesis cinemática se basa en la utilización de las ecuaciones (3.11), (3.18) y (3.24), obtenidas en el capítulo 3. El Cuadro 4.1 permite visualizar las variables involucradas en cada una de estas ecuaciones.

Cuadro 4.1. Ecuaciones de diseño y variables involucradas.

| Ecuación | Variables |
|----------|---|
| (3.11) | $x_B, y_B, x_Q, y_Q, \theta_0, \theta_i.$ |
| (3.18) | $x_C, y_C, x_Q, y_Q, \theta_0, \theta_i.$ |
| (3.24) | $x_A, y_A.$ |

Primeramente, se observa que las incógnitas involucradas en la primera ecuación de diseño cinemático (3.11) son las coordenadas de los puntos B , Q , la orientación θ_0 del disco ranurado en la pose 0 y θ_i en la pose i . Por su parte, la segunda ecuación de diseño cinemático (3.18) incluye como incógnitas a las coordenadas de los puntos C , Q , la orientación θ_0 del disco ranurado en la pose 0 y θ_i en la i -ésima pose. Finalmente puede notarse que la tercera ecuación de diseño cinemático (3.24) involucra únicamente a las coordenadas cartesianas del punto A , representadas por x_A y y_A .

El desarrollo matemático comienza por visualizar a θ_i como una variable intermedia, la cual no es un parámetro geométrico de diseño, y por lo tanto, no resulta de interés en la síntesis cinemática. Con esto en mente, debe notarse que dicha variable se puede eliminar de las ecuaciones (3.11) y (3.18) si estas se resuelven simultáneamente. Para ello, se comienza utilizando la siguiente forma compacta de las ecuaciones (3.11) y (3.18):

$$\mathbf{G} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{k} \quad (4.1)$$

donde la matriz \mathbf{G} y los vectores $\boldsymbol{\mu}$ y \mathbf{k} se definen como:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_i \\ \text{cos } \theta_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

Con las siguientes definiciones adicionales:

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_i - x_Q + x_B \cos \phi_i - y_B \text{sen } \phi_i \\ g_{12} &= y_i - y_Q + x_B \text{sen } \phi_i + y_B \cos \phi_i \\ k_1 &= -(x_B - x_Q) \text{sen } \theta_0 + (y_B - y_Q) \cos \theta_0 \\ g_{21} &= y_i - y_Q + x_C \text{sen } \phi_i + y_C \cos \phi_i \\ g_{22} &= x_i - x_Q + x_C \cos \phi_i - y_C \text{sen } \phi_i \\ k_2 &= (x_C - x_Q) \cos \theta_0 + (y_C - y_Q) \text{sen } \theta_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como el objetivo es encontrar $\boldsymbol{\mu}$, entonces se puede comenzar pre-multiplicando ambos lados de la ecuación (4.1) por la matriz inversa de \mathbf{G} :

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{k} \quad (4.3)$$

donde, a partir de la definición de la matriz inversa:

$$\mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & -g_{11} \end{bmatrix}, \quad \Delta \equiv \det \mathbf{G} = -(g_{11}g_{22} + g_{12}g_{21}).$$

Finalmente, resulta que el vector $\boldsymbol{\mu}$ estará dado por:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_1 g_{22} - g_{12} k_2 \\ -(k_1 g_{21} + g_{11} k_2) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

por lo que, al separar las componentes del vector $\boldsymbol{\mu}$ se encuentra que:

$$\text{sen } \theta_i = \frac{k_1 g_{22} - g_{12} k_2}{g_{11} g_{22} + g_{12} g_{21}} \quad (4.5)$$

$$\text{cos } \theta_i = -\frac{k_1 g_{21} + g_{11} k_2}{g_{11} g_{22} + g_{12} g_{21}} \quad (4.6)$$

Aplicando ahora la identidad trigonométrica $\text{sen}^2 \theta_i + \text{cos}^2 \theta_i = 1$, se obtiene que:

$$(k_1 g_{22} - g_{12} k_2)^2 + (k_1 g_{21} + g_{11} k_2)^2 - (g_{11} g_{22} + g_{12} g_{21})^2 = 0 \quad (4.7)$$

la cual es una ecuación que ya no contiene a la variable θ_i . Adicionalmente, también debe aclararse que dicha ecuación contiene ahora a los parámetros de diseño x_B, y_B, x_C, y_C, x_Q y y_Q , así como a la incógnita θ_0 . Debe entenderse que θ_0 no solo define la orientación del disco ranurado 1, sino que también implícitamente indica la orientación que deben tener las correderas para que el mecanismo cumpla con la tarea de generación de movimiento especificada.

Una mejor manera de presentar la información matemática representada mediante la ecuación (4.7) es la siguiente:

$$\Psi_1 \text{cos}^2 \theta_0 + \Psi_2 \text{sen } \theta_0 \text{cos } \theta_0 + \Psi_3 \text{sen}^2 \theta_0 + \Psi_4 = 0 \quad (4.8)$$

donde Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 y Ψ_4 son polinomios que dependen de las variables $x_B, y_B, x_C, y_C, x_Q, y_Q$, y que por limitaciones de espacio no se muestran de forma explícita.

La ecuación (4.8) puede simplificarse de manera significativa mediante la utilización de las siguientes identidades trigonométricas para ángulos dobles:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta_0 \text{cos } \theta_0 &= \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta_0 \\ \text{cos}^2 \theta_0 &= \frac{1}{2} (1 + \text{cos } 2\theta_0) \\ \text{sen}^2 \theta_0 &= \frac{1}{2} (1 - \text{cos } 2\theta_0) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Al sustituir las ecuaciones (4.9) en la ecuación (4.8), se obtiene que:

$$(\Psi_1 - \Psi_3) \text{cos } 2\theta_0 + \Psi_2 \text{sen } 2\theta_0 + \Psi_1 + \Psi_3 + 2\Psi_4 = 0 \quad (4.10)$$

Con este simple cambio de variable se logran eliminar los términos cuadráticos que involucran a las funciones trigonométricas $\text{sen } \theta_0$ y $\text{cos } \theta_0$, reduciendo así el grado de la expresión resultante. Adicionalmente, la ecuación (4.10) puede transformarse en un polinomio si se utilizan ahora las siguientes identidades de Weierstrass [27]:

$$\text{sen } 2\theta_0 = \frac{2\tau}{\tau^2 + 1} \quad (4.11)$$

$$\text{cos } 2\theta_0 = \frac{1 - \tau^2}{\tau^2 + 1} \quad (4.12)$$

donde:

$$\tau = \tan \theta_0$$

Con base en lo anterior se encuentra un polinomio de grado 6 definido como:

$$\frac{1}{1 + \tau^2} \sum_{k=1}^{316} \sigma_k x_B^{\xi_1} y_B^{\xi_2} x_C^{\xi_3} y_C^{\xi_4} x_Q^{\xi_5} y_Q^{\xi_6} \tau^{\xi_7} = 0 \quad (4.13)$$

que después de simplificar el denominador se reduce a:

$$\sum_{k=1}^{316} \sigma_k x_B^{\xi_1} y_B^{\xi_2} x_C^{\xi_3} y_C^{\xi_4} x_Q^{\xi_5} y_Q^{\xi_6} \tau^{\xi_7} = 0 \quad (4.14)$$

Es importante hacer notar que la ecuación (4.14) es un polinomio multivariable que tiene las siguientes características:

- (1) Cada coeficiente σ_k es una función de los parámetros x_i , y_i y ϕ_i , esto es, $\sigma_k = \sigma_k(x_i, y_i, \phi_i)$.
- (2) Es un polinomio multivariable de sexto grado, ya que $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 + \xi_7 \leq 6$.
- (3) Tiene cinco potencias que pueden ser cuadráticas como máximo, es decir, $\xi_1 \leq 2$, $\xi_2 \leq 2$, $\xi_3 \leq 2$, $\xi_4 \leq 2$ o $\xi_7 \leq 2$.
- (4) Contiene dos potencias que pueden llegar a ser cúbicas como máximo, $\xi_5 \leq 3$ o $\xi_6 \leq 3$.

Desde el punto de vista cinemático, la ecuación (4.14) involucra siete parámetros geométricos del mecanismo, a saber, x_B y y_B que definen la ubicación del punto B , x_C y y_C que definen la ubicación del punto C , x_Q y y_Q que definen la ubicación del punto Q correspondiente al centro de rotación del disco, y τ que representa al parámetro θ_0 , el cual define la orientación que tiene el disco 1 en la pose 0.

4.2. Modificación al mecanismo de Wanzler.

Sintetizar un mecanismo de este tipo para que pase exactamente por $n + 1$ poses requiere que se satisfagan simultáneamente las ecuaciones de diseño (3.24) y (4.14). La ecuación (4.14) tiene como

incógnitas a siete parámetros geométricos, que son: $x_B, y_B, x_C, y_C, x_Q, y_Q$ y τ . Si solo se tiene en cuenta esta ecuación, sería posible sintetizar un mecanismo de Wanzler para que pase exactamente por hasta ocho poses ya que se genera un sistema de siete ecuaciones con siete incógnitas.

Por otra parte, la ecuación (3.24) correspondiente a la tercera condición geométrica es una ecuación lineal en dos incógnitas: x_A y y_A , por lo que solo sería posible sintetizar el mecanismo para que pase exactamente por máximo tres poses independientes entre sí. En caso de requerir que éste pase exactamente por más de 3 poses, éstas deben estar condicionadas a que el sistema de ecuaciones generado por la ecuación (3.24) sea linealmente dependiente, de otra forma, la solución deja de ser exacta y se estaría tratando con un problema de síntesis dimensional aproximada.

Para permitir que el mecanismo de Wanzler alcance más de tres poses independientes entre sí se hace una modificación al tipo de junta que conecta el bloque deslizante 5 con el cuerpo fijo 0 (ver Fig. 2.1). En lugar de una corredera vertical, se propone un mecanismo plano de cuatro barras en el que el bloque deslizante 5 se transforma en el acoplador 5 y mantiene su conexión con el eslabón acoplador 4 mediante la junta de tipo revoluta. La representación esquemática del nuevo mecanismo se muestra en la Fig. 4.1.

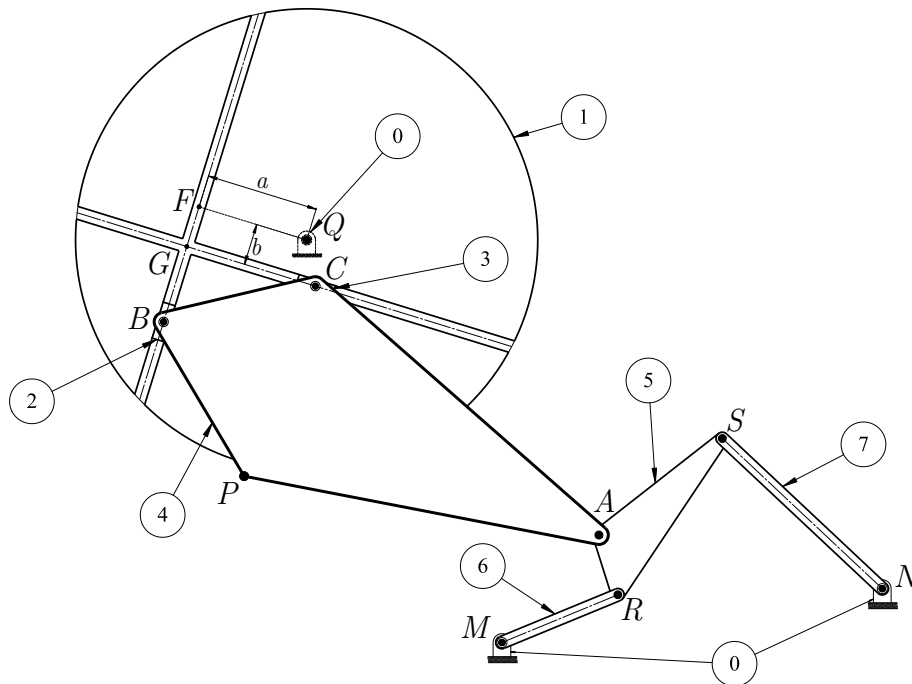


Figura 4.1. Diagrama esquemático del mecanismo modificado de Wanzler.

De esta manera, el punto A ya no debe trazar una trayectoria en línea recta, por lo que la condición geométrica asociada a la ecuación (3.24), y por lo tanto su restricción en el número máximo de poses, deja de tener efecto. Además, la junta de tipo revoluta del punto A permite que el eslabón acoplador 4 se oriente sin importar la orientación que tenga el eslabón acoplador 5 del mecanismo plano de 4 barras.

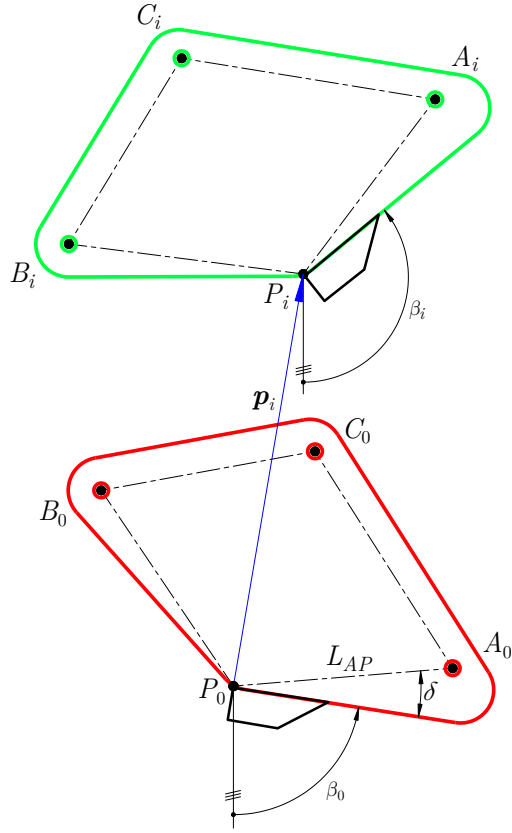


Figura 4.2. Diagrama esquemático del eslabón 4.

Con esta modificación, la ubicación del punto A en el eslabón 4 puede ser definida arbitrariamente. Y para hacerlo se utilizarán el parámetro L_{AP} que define la magnitud del vector \mathbf{a}_i , y el parámetro δ que representa el ángulo de este vector respecto a la pose i , tal como se muestra en la Fig. 4.2. Hay que aclarar que δ será positivo cuando se mida en sentido antihorario, y como es un ángulo que se mide entre dos líneas del cuerpo rígido, éste permanecerá constante durante el movimiento del mecanismo. Así que para hacer más simple el proceso de diseño cinemático del eslabón acoplador 4, el ángulo δ se medirá a partir de la pose 0.

Entonces, el vector \mathbf{a}_i puede ser definido como:

$$\mathbf{a}_i = \begin{cases} L_{AP} \operatorname{sen}(\beta_i + \delta) \mathbf{i} - L_{AP} \operatorname{cos}(\beta_i + \delta) \mathbf{j}, & \text{para } i = 0. \\ \mathbf{p}_i + L_{AP} \operatorname{sen}(\beta_i + \delta) \mathbf{i} - L_{AP} \operatorname{cos}(\beta_i + \delta) \mathbf{j}, & \text{para } i = 1, \dots, 7. \end{cases} \quad (4.15)$$

La modificación conduce a que el diseño del mecanismo de Wanzel original quede restringido solo por la ecuación (4.14), la cual involucra el conjunto de siete parámetros: $x_B, y_B, x_C, y_C, x_Q, y_Q, \tau$. Esto implica que se podría diseñar un mecanismo de Wanzel para que pase por hasta ocho poses en el plano. Ésta es la razón por la que se propone la nueva variante que involucra un mecanismo 4R. Como el punto A deberá trazar una cierta trayectoria, entonces, el diseño del mecanismo 4R se reduce a un problema de síntesis para la generación de trayectoria.

Es bien conocido que el mecanismo plano tipo 4R puede diseñarse para que su punto acoplador (Punto A) pase por una trayectoria con un máximo de nueve puntos de precisión [28]-[31], cantidad que viene definida en general por el número de parámetros constantes (dimensiones de eslabones y coordenadas de las juntas fijas) que especifican completamente la geometría del mecanismo. En el siguiente capítulo se plantea un nuevo enfoque de la síntesis para generación de trayectoria del mecanismo 4R.

4.3. Red topológica y movilidad del mecanismo modificado de Wanzel.

La red topológica de esta nueva variante del mecanismo se muestra en la Fig. 4.3. La adición del mecanismo 4R genera un lazo cinemático adicional. Sin embargo al aplicar nuevamente el criterio de *Chebyshev-Grübler-Kutzbach* presentado en el Capítulo 2, se encuentra que la movilidad del nuevo mecanismo permanece invariante respecto al original, tal y como lo muestra el Cuadro 4.2. Esto es importante porque se mantiene la característica de generar el movimiento teniendo sólo un eslabón motriz.

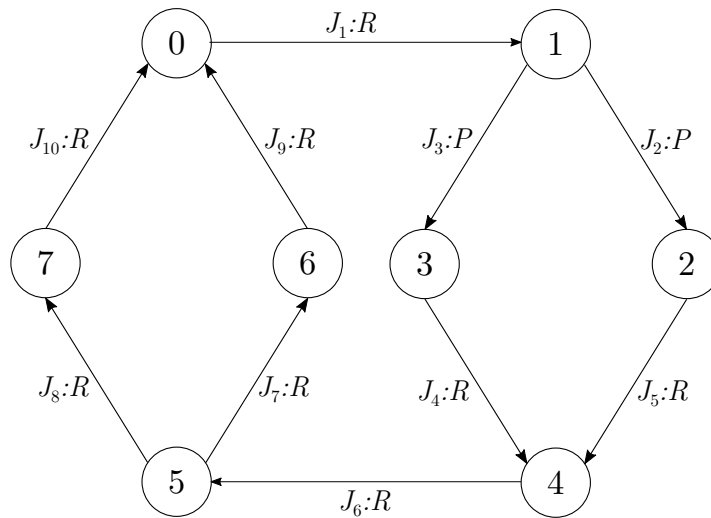


Figura 4.3. Red topológica del mecanismo modificado de Wanzel.

La modificación incluye cambiar el eslabón motriz. Se pasa del disco ranurado 1 al eslabón 6, perteneciente al lazo cinemático del mecanismo 4R. Esto con el objetivo de tener un mejor control sobre el movimiento del mecanismo, ya que para la cadena 4R se conocen bien las condiciones en las que el eslabón 6 puede tener un movimiento continuo y sin necesidad de invertir el sentido de su movimiento giratorio mientras se alcanzan las poses deseadas.

Cuadro 4.2. Comparación de la movilidad de los mecanismos.

| <i>Parámetro</i> | <i>Mecanismo original</i> | <i>Mecanismo modificado</i> |
|--|---------------------------|-----------------------------|
| No. de eslabones (n) | 6 | 8 |
| No. de juntas de un grado de libertad (j_1) | 7 | 10 |
| No. de juntas de dos grado de libertad (j_2) | 0 | 0 |
| Movilidad | 1 | 1 |

Capítulo 5

Síntesis cinemática del mecanismo 4R para la generación de trayectoria

En este capítulo se presenta la derivación de la ecuación de diseño de un mecanismo plano tipo 4R para generación de trayectoria. La formulación aquí planteada no depende de parámetros angulares, por lo que no aparecen funciones trigonométricas que dificulten aún más la búsqueda de soluciones. El mecanismo 4R trabajará en conjunto con el de Wanzler para generar el movimiento de cuerpo rígido tal como se describió en el capítulo anterior.

5.1. Estrategia de síntesis para la generación de trayectoria.

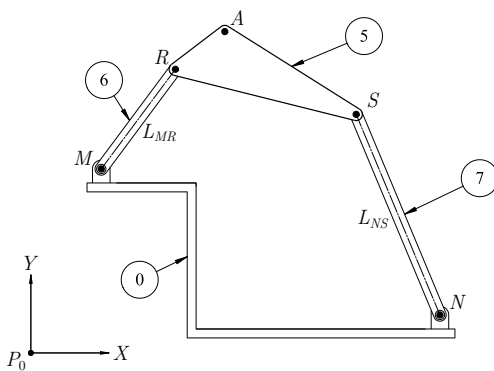


Figura 5.1. Diagrama esquemático del mecanismo plano de 4 barras.

La síntesis de una cadena cinemática 4R para la generación de trayectoria se puede hacer para que un punto arbitrario del acoplador pase por hasta nueve puntos de precisión y, al igual que con el mecanismo de Wanzler, se aplicará un enfoque analítico. Para empezar con el proceso de síntesis, se considerará una configuración arbitraria del ensamble mostrado en la Fig. 5.1.

El punto de referencia para el diseño del mecanismo de 4 barras será el punto P_0 correspondiente a la posición de la pose 0. Es decir, las coordenadas de los puntos M , R , S y N que describen la ubicación de las revolutas se definirán con respecto al punto P_0 con un sistema de coordenadas X , Y alineado con la orientación de la pose 0 definida por el ángulo β_0 .

La trayectoria que debe trazar el acoplador 5 estará determinada por las coordenadas del punto A , conocidas de antemano por medio de la ecuación (4.15).

5.2. Curvas de acoplador del mecanismo plano 4R.

Del diagrama esquemático de la Fig. 5.1 se puede notar que para todo su rango de movimiento se preserva el polígono P_0MRASN mostrado en la Fig. 5.2. A partir de este polígono se plantearán las ecuaciones de lazo necesarias para deducir la ecuación de diseño para la generación de trayectoria.

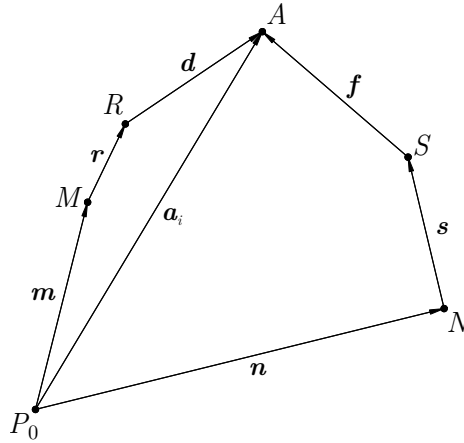


Figura 5.2. Polígono P_0MRASN de vectores posición para la cadena 4R.

Entonces, de la Fig. 5.2 se pueden formular las siguientes ecuaciones de lazo:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{m} + \mathbf{r} + \mathbf{d} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{n} + \mathbf{s} + \mathbf{f} \quad (5.2)$$

Despejando \mathbf{r} y \mathbf{s} de la ecuaciones (5.1) y (5.2) se obtiene:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_i - \mathbf{m} - \mathbf{d} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_i - \mathbf{n} - \mathbf{f} \quad (5.4)$$

Por otro lado, las longitudes de los eslabones 6 y 7, denotadas como L_{MR} y L_{NS} respectivamente, se pueden calcular así:

$$L_{MR}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{a}_i - \mathbf{m} - \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{m} - \mathbf{d}) \quad (5.5)$$

$$L_{NS}^2 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = (\mathbf{a}_i - \mathbf{n} - \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{n} - \mathbf{f}) \quad (5.6)$$

Desarrollando los productos escalares involucrados en las expresiones (5.5) y (5.6), se obtiene que:

$$L_{MR}^2 = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i + \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} - 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}_i - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_i + 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{d} \quad (5.7)$$

$$L_{NS}^2 = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} - 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_i - 2\mathbf{f} \cdot \mathbf{a}_i + 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \quad (5.8)$$

Al mismo tiempo, las componentes de los vectores \mathbf{d} y \mathbf{f} se pueden relacionar con la geometría del acoplador 5 y usando el ángulo φ que define su orientación, tal como se muestra en la Fig. 5.3. Aquí se plantea un nuevo marco de referencia móvil M ubicado en D , con ejes coordenados $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\zeta}$, el cual facilita esta tarea.

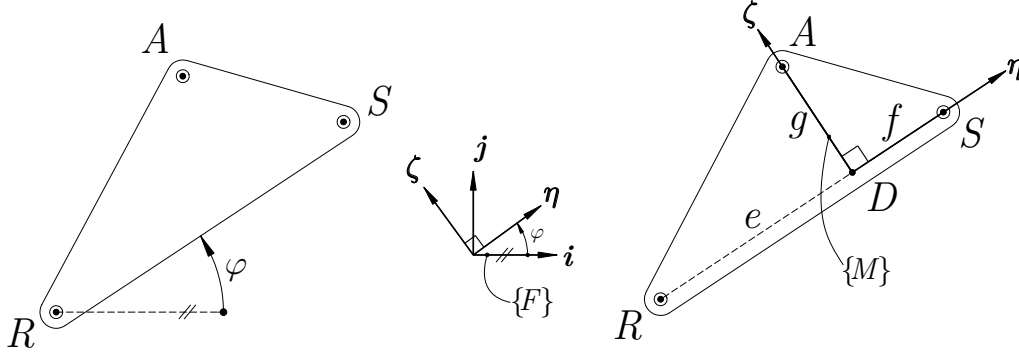


Figura 5.3. Geometría del acoplador 5 del mecanismo plano 4R.

De la Fig. 5.3, y usando la notación de Angeles [32] se puede establecer que:

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{r}_{A/R}, \quad (\mathbf{d})_M = e \boldsymbol{\eta} + g \boldsymbol{\zeta} \quad (5.9a)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_{M \rightarrow F} (\mathbf{d})_M = [\mathbf{I} \cos \varphi + \mathbf{E} \operatorname{sen} \varphi] (\mathbf{d})_M \quad (5.9b)$$

La ecuación (5.9b) define el vector \mathbf{d} en el sistema de coordenadas fijo F en función de sus componentes en el marco móvil M (correspondiente al vector $(\mathbf{d})_M$). Aplicando este mismo razonamiento para el vector \mathbf{f} :

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{r}_{A/S}, \quad (\mathbf{f})_M = -f \boldsymbol{\eta} + g \boldsymbol{\zeta} \quad (5.10a)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}_{M \rightarrow F} (\mathbf{f})_M = [\mathbf{I} \cos \varphi + \mathbf{E} \operatorname{sen} \varphi] (\mathbf{f})_M \quad (5.10b)$$

donde:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{M \rightarrow F} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Volviendo a la ecuación (5.7), esta se reescribe usando el parámetro w_1 :

$$2\mathbf{d} \cdot \mathbf{m} - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_i = w_1 \quad (5.12)$$

donde w_1 se define como:

$$w_1 \equiv L_{MR}^2 + 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \quad (5.13)$$

Ahora, expresando los productos escalares como productos de matrices, sustituyendo la ecuación (5.9b) en la ecuación (5.12) y reorganizando términos se obtiene:

$$2(\mathbf{d})_M^T \mathbf{E}^T (\mathbf{m} - \mathbf{a}_i) \text{sen } \varphi + 2(\mathbf{d})_M^T (\mathbf{m} - \mathbf{a}_i) \text{cos } \varphi = w_1 \quad (5.14)$$

Siguiendo el mismo procedimiento con las ecuaciones (5.8) y (5.10b):

$$2(\mathbf{f})_M^T \mathbf{E}^T (\mathbf{n} - \mathbf{a}_i) \text{sen } \varphi + 2(\mathbf{f})_M^T (\mathbf{n} - \mathbf{a}_i) \text{cos } \varphi = w_2 \quad (5.15)$$

y para este caso, el parámetro w_2 se define como:

$$w_2 \equiv L_{NS}^2 + 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} \quad (5.16)$$

Con estas manipulaciones se logra obtener un sistema de ecuaciones lineal en las funciones $\text{sen } \varphi$ y $\text{cos } \varphi$, el cual está conformado por las ecuaciones (5.14) y (5.15). Este sistema se puede arreglar matricialmente de la siguiente manera:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{w} \quad (5.17)$$

donde:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \text{sen } \varphi \\ \text{cos } \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

con las definiciones adicionales:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 2(\mathbf{d})_M^T \mathbf{E}^T (\mathbf{m} - \mathbf{a}_i) & k_{12} &= 2(\mathbf{d})_M^T (\mathbf{m} - \mathbf{a}_i) \\ k_{21} &= 2(\mathbf{f})_M^T \mathbf{E}^T (\mathbf{n} - \mathbf{a}_i) & k_{22} &= 2(\mathbf{f})_M^T (\mathbf{n} - \mathbf{a}_i) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Resolviendo la ecuación (5.17) para $\boldsymbol{\sigma}$ lleva a:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{w} \quad (5.19)$$

donde:

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{\Delta_K} \begin{bmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

siendo $\Delta_K = \det \mathbf{K}$.

A partir de la definición de $\boldsymbol{\sigma}$ se encuentra el valor de las variables $\text{sen } \varphi$ y $\text{cos } \varphi$:

$$\text{sen } \varphi = \frac{w_1 k_{22} - w_2 k_{12}}{\Delta_K}, \quad \text{cos } \varphi = \frac{-w_1 k_{21} + w_2 k_{11}}{\Delta_K}. \quad (5.21)$$

Habiendo llegado a este punto, la variable φ , y por consiguiente la dificultad de tratar con funciones trigonométricas, se elimina aplicando la relación trigonométrica $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, y después de sustituir $\Delta_K = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}$, se obtiene:

$$(w_1 k_{22} - w_2 k_{12})^2 + (-w_1 k_{21} + w_2 k_{11})^2 - (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})^2 = 0 \quad (5.22)$$

La expresión (5.22) es la ecuación de diseño que se buscaba para resolver el problema de la generación de trayectoria. Las variables que describen las dimensiones del mecanismo están implícitas dentro de todos los parámetros que aparecen en ella. Las expresiones contenidas en estos parámetros se obtienen desarrollando los productos matriciales para los elementos de la matriz de coeficientes \mathbf{K} :

$$\begin{aligned} (\mathbf{d})_M^T \mathbf{E}^T (\mathbf{m} - \mathbf{a}_i) &= [e \quad g] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M - x_{Ai} \\ y_M - y_{Ai} \end{bmatrix} = e(y_M - y_{Ai}) - g(x_M - x_{Ai}) \\ k_{11} &= 2e(y_M - y_{Ai}) - 2g(x_M - x_{Ai}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{d})_M^T (\mathbf{m} - \mathbf{a}_i) &= [e \quad g] \begin{bmatrix} x_M - x_{Ai} \\ y_M - y_{Ai} \end{bmatrix} = e(x_M - x_{Ai}) + g(y_M - y_{Ai}) \\ k_{12} &= 2e(x_M - x_{Ai}) + 2g(y_M - y_{Ai}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{f})_M^T \mathbf{E}^T (\mathbf{n} - \mathbf{a}_i) &= [-f \quad g] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N - x_{Ai} \\ y_N - y_{Ai} \end{bmatrix} = -f(y_N - y_{Ai}) - g(x_N - x_{Ai}) \\ k_{21} &= -2f(y_N - y_{Ai}) - 2g(x_N - x_{Ai}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{f})_M^T (\mathbf{n} - \mathbf{a}_i) &= [-f \quad g] \begin{bmatrix} x_N - x_{Ai} \\ y_N - y_{Ai} \end{bmatrix} = -f(x_N - x_{Ai}) + g(y_N - y_{Ai}) \\ k_{22} &= -2f(x_N - x_{Ai}) + 2g(y_N - y_{Ai}) \end{aligned}$$

Ahora, desarrollando las formas escalares de las ecuaciones (5.13) y (5.16), se obtienen así las respectivas expresiones finales para los parámetros w_1 y w_2 :

$$w_1 = L_{MR}^2 + 2x_{Ai} x_M + 2y_{Ai} y_M - x_{Ai}^2 - y_{Ai}^2 - x_M^2 - y_M^2 - e^2 - g^2 \quad (5.23)$$

$$w_2 = L_{NS}^2 + 2x_{Ai} x_N + 2y_{Ai} y_N - x_{Ai}^2 - y_{Ai}^2 - x_N^2 - y_N^2 - f^2 - g^2 \quad (5.24)$$

La forma explícita de la ecuación (5.22) que resulta después de sustituir todos los parámetros involucra nueve variables: $x_M, y_M, x_N, y_N, e, f, g, r, s$. Entonces, tal ecuación puede aplicarse para una trayectoria con un máximo de nueve puntos de precisión $A_i = \{x_{Ai}, y_{Ai}\}$. Sin embargo, al acoplar el mecanismo 4R con el de Wanzler, el número máximo de puntos de precisión por los que puede pasar el eslabón 4 está limitado a ocho, es decir, en el sistema (5.22) queda un parámetro libre. Esto es de gran importancia, ya que el número de soluciones que puede obtenerse para él se vuelve infinito, repercutiendo en que existen mejores posibilidades de encontrar un diseño factible en el sentido práctico.

Capítulo 6

Rectificación del diseño del mecanismo modificado de Wanzer

En este capítulo se presenta una metodología basada en las curvas de acoplador del mecanismo modificado de Wanzer para identificar y descartar aquellas soluciones de las ecuaciones de diseño cinemático que generan defectos durante el movimiento. Los defectos analizados son los de ramal y circuito, así como el defecto de Grashof para el mecanismo plano tipo 4R.

La solución de las ecuaciones de síntesis asegura que el mecanismo puede ensamblarse en las poses requeridas, sin embargo, no garantiza nada respecto a su comportamiento en configuraciones intermedias. Mientras el mecanismo se está moviendo pueden presentarse diferentes problemáticas de comportamiento cinemático [33] que las ecuaciones de síntesis no los toman en cuenta y por lo tanto no pueden resolver. Estas problemáticas o defectos presentes en los mecanismos se pueden identificar como::

- (1) Defectos de circuito: Hay que desensamblar y ensamblar el mecanismo mientras se mueve entre poses.
- (2) Defectos de ramal: El mecanismo pasa por configuraciones singulares y no puede moverse de forma continua entre las poses deseadas.
- (3) Defectos de orden: El movimiento entre las poses es continuo pero el orden de ocurrencia es incorrecto.
- (4) Defectos de Grashof: Exclusivo de los mecanismos tipo 4R, el eslabón de entrada debe cambiar el sentido de giro para que el mecanismo alcance todas las poses.
- (5) Ángulos de transmisión deficientes: El eslabón de salida y el acoplador forman un ángulo muy pequeño que impide hacer una buena transmisión de fuerza.

La rectificación del diseño de un mecanismo consiste en eliminar los defectos indicados anteriormente. Esta comienza con su detección al momento de ejecutar tareas de generación de movimiento,

funciones o trayectoria.

Cuando el mecanismo es de múltiples lazos, como es el caso del mecanismo modificado de Wanzer, hay que tener en cuenta que las problemáticas pueden aparecer en cada uno de ellos. El fin último de la rectificación del diseño es garantizar que la solución obtenida por las ecuaciones de diseño sea útil en un sentido práctico. Aquí se presenta un procedimiento de rectificación que incluye el análisis de defectos de ramal, de circuito y de Grashof, el cual parte del análisis cinemático de posición del mecanismo modificado de Wanzer.

6.1. Rectificación del diseño del lazo 4R.

Se inicia con el mecanismo 4R ya que el eslabón de entrada (eslabón 6) se encuentra en esta cadena cinemática. Una vez resuelta la rectificación para este lazo, se puede pasar al siguiente, correspondiente al mecanismo de Wanzer original. El lazo 4R incluye a los eslabones 0, 5, 6 y 7 de acuerdo a la red topológica mostrada en la Fig. 4.3.

6.1.1. Sobre el defecto de Grashof.

Si el mecanismo 4R no tiene ningún eslabón que sea capaz de dar una vuelta completa (girar 360°), se dice que presenta defectos de Grashof. Esto se puede resolver seleccionando únicamente aquellas soluciones de la ecuación (5.22) que cumplan con la regla de Grashof. Aquí es de gran utilidad que la ecuación (5.22) tenga un parámetro libre. Con ello se tendrá un número casi infinito de soluciones potenciales, de entre las cuales se podrán seleccionar aquellas que no presenten defectos. La regla de Grashof establece que:

$$l_{MAX} + l_{MIN} \leq l' + l'' \quad (6.1)$$

donde l_{MAX} es la longitud del eslabón más largo, l_{MIN} es la longitud del eslabón más corto, y l' junto con l'' representan las longitudes de los eslabones restantes. Además, para que el eslabón de entrada sea capaz de dar una vuelta completa, debe cumplirse que éste, o bien, el eslabón fijo, |sea el eslabón más corto.

6.1.2. Sobre los defectos de circuito y ramal.

A partir de la ecuación de entrada-salida del mecanismo 4R pueden identificarse las configuraciones en las que puede ensamblarse dicho mecanismo. La ecuación de entrada-salida se determina a partir del diagrama cinemático auxiliar presentado en la Fig. 6.1.

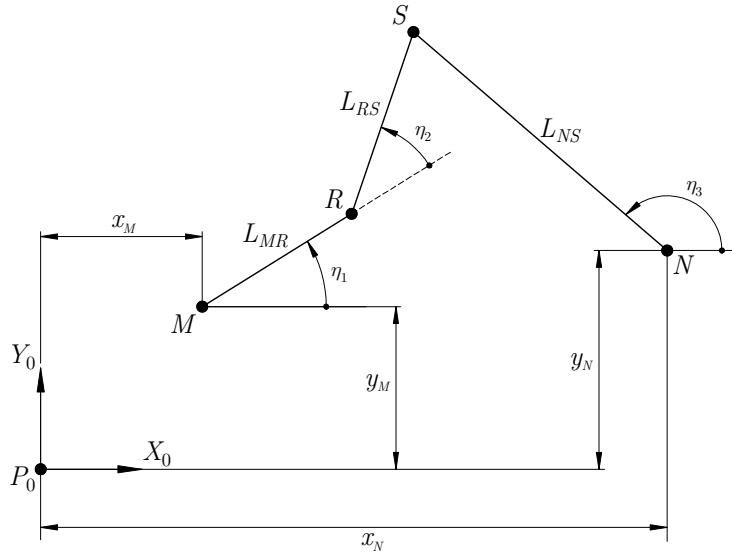


Figura 6.1. Diagrama cinemático auxiliar del mecanismo 4R.

Las ecuaciones de lazo resultantes son:

$$x_M + L_{MR} \cos \eta_1 + L_{RS} \cos (\eta_1 + \eta_2) - L_{NS} \cos \eta_3 - x_N = 0 \quad (6.2)$$

$$y_M + L_{MR} \sin \eta_1 + L_{RS} \sin (\eta_1 + \eta_2) - L_{NS} \sin \eta_3 - y_N = 0 \quad (6.3)$$

Eliminando el ángulo compuesto $(\eta_1 + \eta_2)$ de las ecuaciones (6.2) y (6.3) se obtiene:

$$F_1 \cos \eta_3 + F_2 \sin \eta_3 + F_3 = 0 \quad (6.4)$$

donde:

$$F_1 = 2L_{NS}(x_N - x_M - L_{MR} \cos \eta_1)$$

$$F_2 = 2L_{NS}(y_N - y_M - L_{MR} \sin \eta_1)$$

$$F_3 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + L_{NS}^2 + L_{MR}^2 - L_{RS}^2 - 2L_{MR}((x_N - x_M) \cos \eta_1 + (y_N - y_M) \sin \eta_1)$$

Aplicando la identidad de Weierstrass, la ecuación trigonométrica (6.4) se transforma en un polinomio de segundo grado:

$$(F_3 - F_1)\kappa^2 + 2F_2\kappa + F_3 + F_1 = 0 \quad (6.5)$$

donde $\kappa = \tan(\eta_3/2)$.

Las raíces de la ecuación (6.5) serán:

$$\kappa = \frac{-F_2 \pm \sqrt{\Delta_\eta}}{F_3 - F_1} \quad (6.6)$$

siendo $\Delta_\eta = F_1^2 + F_2^2 - F_3^2$ el discriminante de la ecuación cuadrática (6.5). Si $\Delta_\eta > 0$, κ tendrá dos valores reales diferentes asociados a cada valor η_1 . Esto implica que el mecanismo 4R podrá ensamblarse en dos configuraciones diferentes para un mismo ángulo de entrada, las cuales pueden asociarse al signo de la raíz cuadrada. Puede considerarse que el mecanismo 4R estará parcialmente libre de defectos de ramal cuando el signo de la ecuación (6.6) no cambia al momento de pasar de una pose a otra. Adicionalmente, para que el mecanismo diseñado esté completamente libre del defecto de Grashof, se tendrá que cumplir también que se mantenga siempre el mismo signo que precede al radicando $\sqrt{\Delta_\eta}$ a lo largo de cada uno de los puntos que componen a la(s) curva(s) del acoplador.

6.2. Rectificación del diseño para el lazo de Wanzer.

Este lazo cinemático a los eslabones 0, 1, 2, 3 y 4. De aquí en adelante, a esta sección del mecanismo se identificará como el *tramel* de Wanzer. Para analizar las posibles configuraciones que puede tener, se comienza por hacer su análisis cinemático de posición. La meta será llegar a una ecuación de entrada-salida en la que las variables a ingresar sean las coordenadas cartesianas del punto A, y la variable de salida sea el ángulo de orientación θ del disco ranurado 1.

Las ecuaciones de lazo fueron definidas en el Capítulo 2 y se mantienen para el mecanismo modificado de Wanzer, con la única diferencia en que las coordenadas del punto A ahora están restringidas a pasar a lo largo de las curvas de acoplador generadas por la cadena 4R. Las nuevas ecuaciones de lazo teniendo en cuenta esta nueva restricción resultan de la siguiente manera:

$$L_{BC} \cos \varphi - q = 0 \quad (6.7)$$

$$L_{BC} \sin \varphi - r = 0 \quad (6.8)$$

$$L_{AC} \cos(\varphi + \alpha) - b - x_{AQ} \cos \theta + y_{AQ} \sin \theta = 0 \quad (6.9)$$

$$-r + L_{AC} \sin(\varphi + \alpha) - a + x_{AQ} \sin \theta - y_{AQ} \cos \theta = 0 \quad (6.10)$$

donde x_{AQ} y y_{AQ} representan a las coordenadas cartesianas del punto A, medidas con respecto al punto Q.

6.2.1. Ecuación de entrada-salida del tramel de Wanzer.

Esta ecuación se determina con las nuevas ecuaciones de lazo, expresiones (6.7) a (6.10). Primero se elimina la variable r de la ecuación (6.10) usando (6.8), y después de aplicar identidades trigonométricas de la suma de ángulos se obtiene:

$$(L_{AC} \cos \alpha - L_{BC}) \sin \varphi + L_{AC} \sin \alpha \cos \varphi = -x_{AQ} \sin \theta + y_{AQ} \cos \theta - a \quad (6.11)$$

Las ecuaciones (6.9) y (6.11) se pueden organizar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} L_{AC} \cos \alpha - L_{BC} & L_{AC} \sin \alpha \\ -L_{AC} \sin \alpha & L_{AC} \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{AQ} \sin \theta + y_{AQ} \cos \theta - a \\ b + x_{AQ} \cos \theta + y_{AQ} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Al solucionar el sistema (6.12) para las funciones $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$ y aplicando la identidad trigonométrica $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, la variable φ se elimina, obteniéndose una ecuación trigonométrica de la forma:

$$H_1 \cos^2 \theta + H_2 \sin \theta \cos \theta + H_3 \cos \theta + H_4 \sin \theta + H_5 = 0 \quad (6.13)$$

donde:

$$\begin{aligned} H_1 &= -4x_{AQ}y_{AQ}L_{AC}L_{BC} \sin \alpha - 2x_{AQ}^2L_{AC}L_{BC} \cos \alpha + 2y_{AQ}^2L_{AC}L_{BC} \cos \alpha + L_{BC}^2x_{AQ}^2 - L_{BC}^2y_{AQ}^2 \\ H_2 &= 2x_{AQ}^2L_{AC}L_{BC} \sin \alpha - 2y_{AQ}^2L_{AC}L_{BC} \sin \alpha - 4x_{AQ}y_{AQ}L_{AC}L_{BC} \cos \alpha + 2L_{BC}^2x_{AQ}y_{AQ} \\ H_3 &= -2ax_{AQ}L_{AC}L_{BC} \sin \alpha - 2by_{AQ}L_{AC}L_{BC} \sin \alpha - 4bx_{AQ}L_{AC}L_{BC} \cos \alpha + 2ay_{AQ}L_{AC}^2 + \dots \\ &\quad \dots + 2bx_{AQ}L_{AC}^2 + 2bx_{AQ}L_{BC}^2 \\ H_4 &= -2ay_{AQ}L_{AC}L_{BC} \sin \alpha + 2bx_{AQ}L_{AC}L_{BC} \sin \alpha - 4by_{AQ}L_{AC}L_{BC} \cos \alpha - 2ax_{AQ}L_{AC}^2 + \dots \\ &\quad \dots + 2by_{AQ}L_{AC}^2 + 2by_{AQ}L_{BC}^2 \\ H_5 &= -L_{AC}^2L_{BC}^2 \cos^2 \alpha + 2L_{AC}^3L_{BC} \cos \alpha - 2abL_{AC}L_{BC} \sin \alpha + 2x_{AQ}y_{AQ}L_{AC}L_{BC} \sin \alpha - \dots \\ &\quad \dots - 2b^2L_{AC}L_{BC} \cos \alpha - 2y_{AQ}^2L_{AC}L_{BC} \cos \alpha - L_{AC}^4 + a^2L_{AC}^2 + b^2L_{AC}^2 + x_{AQ}^2L_{AC}^2 + \dots \\ &\quad \dots + y_{AQ}^2L_{AC}^2 + b^2L_{BC}^2 + y_{AQ}^2L_{BC}^2 \end{aligned}$$

Al aplicar nuevamente la identidad de Weierstrass para transformar la ecuación trigonométrica (6.13) en un polinomio se obtiene la siguiente ecuación algebraica de cuarto grado:

$$\psi^4 + h_3\psi^3 + h_2\psi^2 + h_1\psi + h_0 = 0 \quad (6.14)$$

donde:

$$\begin{aligned} \psi &= \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ h_0 &= \frac{H_1 + H_3 + H_5}{H_1 - H_3 + H_5} & h_1 &= \frac{2H_2 + 2H_4}{H_1 - H_3 + H_5} \\ h_2 &= \frac{2H_5 - 2H_1}{H_1 - H_3 + H_5} & h_3 &= \frac{2H_4 - H_2}{H_1 - H_3 + H_5} \end{aligned}$$

La expresión (6.14) es la ecuación de entrada-salida para el tramel de Wanzer. Relaciona las coordenadas del punto A (incluidas en los coeficientes h_i) con el ángulo θ del disco ranurado 1. Esta es una ecuación cuártica y a partir de la naturaleza de sus raíces puede establecerse la cantidad de configuraciones que puede tener el tramel de Wanzer para la misma entrada. La ecuación (6.14) puede tener cero, dos o cuatro raíces reales y estas pueden determinarse algebraicamente usando la formulación planteada en Beyer [34]:

$$\begin{aligned}\psi_{1,2} &= -\frac{1}{4}h_3 + \frac{1}{2}R_1 \pm \frac{1}{2}S_1 \\ \psi_{3,4} &= -\frac{1}{4}h_3 - \frac{1}{2}R_1 \pm \frac{1}{2}S_2\end{aligned}\tag{6.15}$$

donde:

$$\begin{aligned}R_1 &= \sqrt{\frac{1}{4}h_3^2 - h_2 + z_1} \\ S_1 &= \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{4}h_3^2 - R_1^2 - 2h_2 + \frac{4h_3h_2 - 8h_1 - h_3^3}{4R_1}}, & \text{si } R_1 \neq 0. \\ \sqrt{\frac{3}{4}h_3^2 - 2h_2 + 2\sqrt{z_1^2 - 4h_0}}, & \text{si } R_1 = 0. \end{cases} \\ S_2 &= \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{4}h_3^2 - R_1^2 - 2h_2 - \frac{4h_3h_2 - 8h_1 - h_3^3}{4R_1}}, & \text{si } R_1 \neq 0. \\ \sqrt{\frac{3}{4}h_3^2 - 2h_2 - 2\sqrt{z_1^2 - 4h_0}}, & \text{si } R_1 = 0. \end{cases}\end{aligned}\tag{6.16}$$

Aquí aparece un nuevo parámetro: z_1 . Este corresponde a una raíz real del resolvente cúbico de la ecuación cuártica, el cual puede obtenerse algebraicamente usando la formulación de Abramowitz y Stegun [35]. El resolvente cúbico es de la forma:

$$z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0 = 0\tag{6.17}$$

donde:

$$\begin{aligned}b_2 &= -h_2 \\ b_1 &= h_1h_3 - 4h_0 \\ b_0 &= 4h_2h_0 - h_1^2 - h_3^2h_0\end{aligned}$$

y sus raíces serán:

$$\begin{aligned}
z_1 &= s_1 + s_2 - \frac{b_2}{3} \\
z_2 &= -\frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{b_2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}i(s_1 - s_2) \\
z_3 &= -\frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{b_2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}i(s_1 - s_2)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

aquí se considera que $i \equiv \sqrt{-1}$ y representa la unidad imaginaria. Las raíces del resolvente cúbico también usan las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
q &= \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{9}b_2^2 \\
r &= \frac{1}{6}(b_1b_2 - 3b_0) - \frac{1}{27}b_2^3 \\
s_1 &= \left(r + (q^3 + r^2)^{1/2}\right)^{1/3} \\
s_2 &= \left(r - (q^3 + r^2)^{1/2}\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

La ecuación (6.14) puede tener cuatro, dos o cero raíces reales y en un sentido físico, esto se traducirá en la cantidad de orientaciones que puede tener el disco ranurado 1, tal como se ilustra en la Fig. 6.2. Para una misma configuración del mecanismo 4R, el disco ranurado 1 puede orientarse en hasta cuatro ángulos θ_i diferentes.

Por otro lado, el discriminante de la ecuación (6.14) se puede utilizar para identificar las configuraciones de bloqueo del mecanismo modificado de Wanzler. De acuerdo a Kohli, Cheng y Tsai [36], existirá una configuración de bloqueo cuando Δ_C sea igual a cero. Este se define como [37]:

$$\Delta_C \equiv I^3 - 27J^2 \tag{6.19}$$

donde:

$$\begin{aligned}
h_1^* &= \frac{h_1}{4}, \quad h_2^* = \frac{h_2}{6}, \quad h_3^* = \frac{h_3}{4}, \\
I &= h_0 - 4h_3^*h_1^* + 3h_2^{*2}, \\
J &= h_2^*h_0^* + 2h_3^*h_2^*h_1^* - h_1^{*2} - h_0h_3^{*2} - h_2^{*3}.
\end{aligned}$$

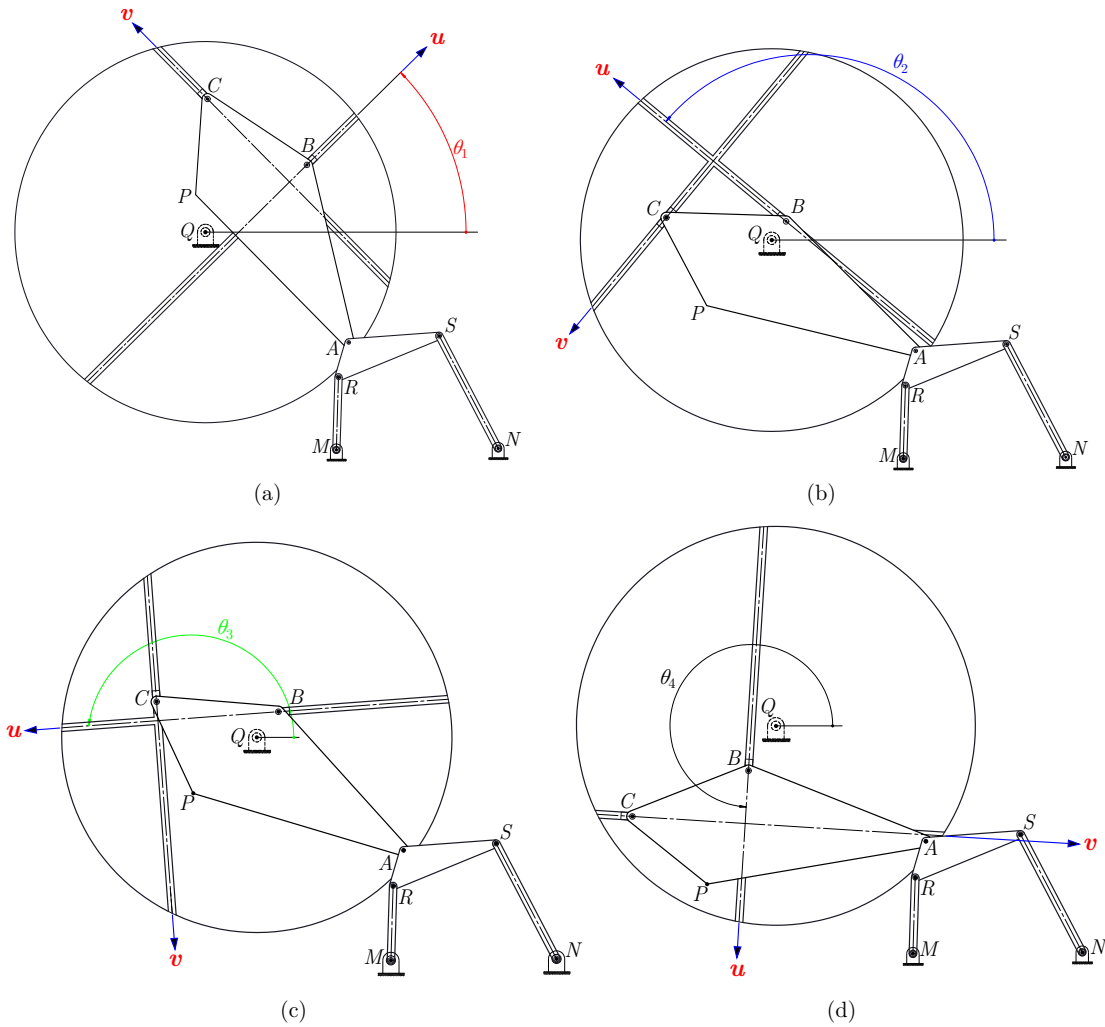


Figura 6.2. Posibles orientaciones del disco ranurado 1.

La ecuación (6.19) también depende de las coordenadas x_{AQ} , y_{AQ} , y con ella pueden determinarse todos aquellos valores de x_{AQ} y y_{AQ} para los cuales existe una configuración de bloqueo en el mecanismo modificado de Wanzer. Estos valores pueden compararse con aquellos que traza el acoplador 5 del mecanismo 4R para saber si todo el ensamblaje pasará por alguna configuración de bloqueo. Gráficamente, esto equivale a buscar las intersecciones entre la curva de acoplador para el punto A del lazo 4R y la curva generada por la ecuación (6.19). Si dichas intersecciones no existen, es porque el mecanismo completo no tiene configuraciones de bloqueo.

6.2.2. Uso de la curva de acoplador para el mecanismo de Wanzer original.

Habiendo determinado las posibles orientaciones del disco ranurado 1 con la ecuación (6.14), las distintas posiciones del punto P del eslabón acoplador 4 pueden calcularse con ayuda de los vectores definidos por la geometría mostrada en la Fig. 6.3.

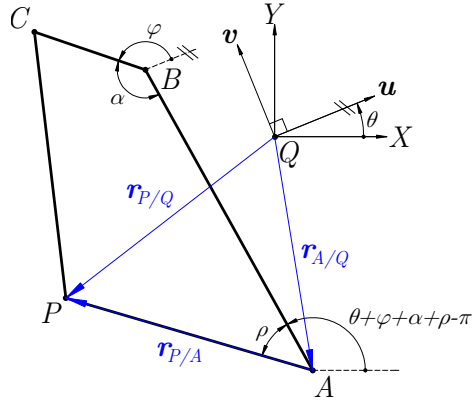


Figura 6.3. Posición del punto P relativa a Q .

El vector posición del punto P respecto al punto Q se puede definir como:

$$\mathbf{r}_{P/Q} = \mathbf{r}_{A/Q} + \mathbf{r}_{P/A} \quad (6.20)$$

Expresando la ecuación (6.20) en términos de sus componentes:

$$\begin{bmatrix} x_{PQ} \\ y_{PQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{AQ} \\ y_{AQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{AP} \cos(\theta + \varphi + \alpha + \rho - \pi) \\ L_{AP} \sin(\theta + \varphi + \alpha + \rho - \pi) \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

donde x_{PQ} y y_{PQ} son las coordenadas del punto P medidas desde el punto Q , mientras que x_{AQ} y y_{AQ} denotan la posición del punto A , también a partir de Q . Ambos pares de coordenadas son medidos con respecto a un sistema de coordenadas $X - Y$ alineado con la pose 0.

Luego, al separar componentes y aplicar identidades trigonométricas para la suma de ángulos se llega a:

$$x_{PQ} = -L_{AP}(\cos \varphi \cos(\theta + \alpha + \rho) - \sin \varphi \sin(\theta + \alpha + \rho)) + x_{AQ} \quad (6.22)$$

$$y_{PQ} = -L_{AP}(\sin \varphi \cos(\theta + \alpha + \rho) + \cos \varphi \sin(\theta + \alpha + \rho)) + y_{AQ} \quad (6.23)$$

Aquí, α y ρ son parámetros geométricos que pueden calcularse luego de tener las coordenadas iniciales de los puntos A , B , C y P que dan forma al eslabón 4. Con las ecuaciones (6.22) y (6.23) se busca una relación entre la posición del punto P y la de A . Por ello, las funciones $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$ no son de interés y deben eliminarse. Para tal fin, se usa la solución del sistema de ecuaciones (6.12) y se sustituye en las expresiones (6.22) y (6.23).

El resultado son dos funciones que por su tamaño no es práctico mostrar, en ellas se relacionan x_{PQ} y y_{PQ} con x_{AQ} y y_{AQ} , ya que finalmente θ es dependiente de x_{AQ} y y_{AQ} . Éstas funciones

permiten construir las curvas de acoplador del mecanismo modificado de Wanzler teniendo en cuenta el máximo número de configuraciones posible.

6.2.3. Utilización de parámetros libres en el proceso de síntesis.

Es recomendable tener parámetros libres al momento de diseñar el mecanismo. Con esto se consigue un número de soluciones prácticamente infinito, dentro del que se pueden encontrar configuraciones inutilizables así como también ensambles factibles. Teniendo una infinidad de resultados, existen más oportunidades de encontrar un diseño exitoso que no solo satisfaga las ecuaciones de síntesis sino que también estén libres de defectos de circuito, de ramal y de Grashof. Con esto en mente, el proceso de síntesis se hará para seis, siete y ocho poses, dejando como parámetros libres aquellos especificados en el Cuadro 6.1.

Cuadro 6.1. Parámetros de diseño y parámetros libres para la síntesis del mecanismo modificado de Wanzler.

| Ecuación | Parámetros de diseño | Parámetros libres | Número de poses |
|-----------------|---|--------------------------|------------------------|
| (4.14) | $x_B, y_B, y_C, x_Q, y_Q.$ | $x_C, \theta_0.$ | 6 |
| (5.22) | $x_M, x_N, L_{MR}, L_{NS}, e, f.$ | $y_M, y_N, g.$ | |
| (4.14) | $x_B, y_B, x_C, y_C, x_Q, y_Q.$ | θ_0 | 7 |
| (5.22) | $x_M, y_M, x_N, L_{MR}, L_{NS}, e, f.$ | $y_N, g.$ | |
| (4.14) | $x_B, y_B, x_C, y_C, x_Q, y_Q, \theta_0.$ | - | 8 |
| (5.22) | $x_M, y_M, x_N, y_N, L_{MR}, L_{NS}, e, f.$ | g | |

Se selecciona un valor numérico para cada parámetro libre y se obtiene un conjunto de soluciones para las ecuaciones de diseño (4.14) y (5.22). Si al analizar cada resultado se encuentra que ninguno está libre de defectos se cambia el valor del parámetro libre y se intenta con el nuevo conjunto de soluciones resultante. Con los parámetros libres de la ecuación (5.22) se busca eliminar el defecto de Grashof, mientras que al modificar los parámetros libres de la expresión (4.14) se tiene como objetivo desaparecer los defectos de circuito y ramal.

Capítulo 7

Ejemplos de diseño cinemático del mecanismo modificado de Wanzer

En este capítulo se presentan ejemplos numéricos del diseño cinemático del mecanismo modificado de Wanzer, los cuales involucran la solución de las ecuaciones de diseño presentadas en los Capítulos 4 y 5. Posteriormente se aplica la metodología de rectificación del diseño expuesta en el Capítulo 6. La solución a los diferentes sistemas de ecuaciones se encontró usando MATLAB y el *solver* Bertini [38]. Este es un programa de código abierto creado para la investigación en métodos de continuación polinomial y permite encontrar soluciones numéricas a sistemas de ecuaciones polinomiales usando métodos de homotopía. Para todos los casos se usó una computadora de escritorio equipada con un procesador Intel Xeon E3-1245 V3 de 8 núcleos @ 3.2 GHz y 4 GB de RAM ejecutando Ubuntu 16.04 LTS.

7.1. Estrategia de diseño cinemático.

El requerimiento a cumplir del mecanismo modificado de Wanzer será hacer pasar un cuerpo rígido por un conjunto de seis, siete y ocho *poses* en el plano definidas por el diseñador. Después del proceso de síntesis y rectificación, el mecanismo diseñado no debe presentar defectos de Grashof, orden, ramal o circuito. El procedimiento a seguir para diseñarlo se explicará brevemente.

Primero es necesario establecer el vector posición y la orientación de las poses originales (identificados por \mathbf{r}_i y β_i respectivamente) por las que debe pasar el cuerpo rígido que estará unido en el punto P al eslabón acoplador 4 del mecanismo modificado de Wanzer. Con estos datos se calculan las poses modificadas representadas por \mathbf{p}_i y ϕ_i de acuerdo a la Fig. 3.3, ya que estos valores son los que se usarán para el resto del proceso de síntesis.

Luego, se deben elegir valores numéricos para L_{AP} y δ , que definen la ubicación del punto A en el eslabón acoplador 4 de acuerdo a la Fig. 4.2, y cuyas coordenadas (contenidas en los vectores \mathbf{a}_i) serán el conjunto de datos de entrada para diseñar el mecanismo 4R. Sus parámetros de diseño

se determinan de acuerdo al número de poses requeridas como se estableció en el Cuadro 6.1, los cuales son solución del sistema de ecuaciones (5.22). Hasta esta etapa se habrán determinado todos los parámetros que definen la geometría del mecanismo 4R. Aquí se debe revisar si el mecanismo tiene alguno de los defectos mencionados en el capítulo 6, y si eso pasa, se debe repetir el proceso con nuevos valores para los parámetros libres.

Continuando con el diseño del trammel de Wanzler, primero se deben seleccionar valores numéricos adecuados para los parámetros libres de acuerdo al Cuadro 6.1, lo que da paso al cálculo de los parámetros de diseño restantes, mediante la solución del sistema de ecuaciones (4.14).

Es importante resaltar que la obtención del diseño de un mecanismo modificado de Wanzler previo a la rectificación del diseño depende de dos tareas independientes entre sí: solucionar el sistema de ecuaciones generado por la expresión (4.14) que determina las dimensiones del mecanismo de Wanzler; y solucionar el sistema de ecuaciones formado a partir de la expresión (5.22) que determina las dimensiones del mecanismo 4R que generará la trayectoria. La búsqueda y rectificación del diseño se hizo a través de los algoritmos de solución numérica de MATLAB y el programa de código abierto *Bertini*, este último usa métodos de continuación polinomial para resolver dicho tipo de sistemas.

A manera de resumen, en las Figuras 7.1 y 7.2 se presentan los pasos para el diseño cinemático del mecanismo de Wanzler modificado.

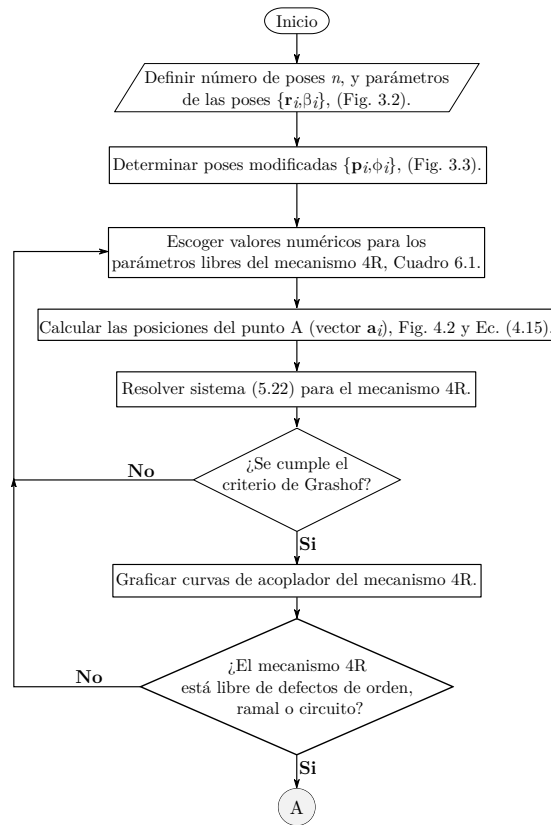


Figura 7.1. Diagrama de flujo para el diseño cinemático del mecanismo modificado de Wanzler.

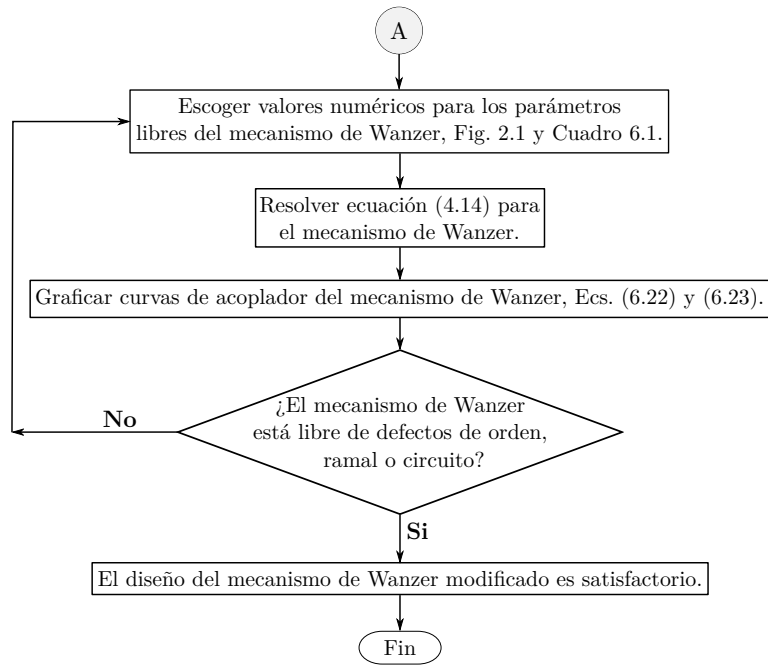


Figura 7.2. Diagrama de flujo para el diseño cinemático del mecanismo modificado de Wanzler (cont.).

Con este algoritmo es posible encontrar un diseño factible para el mecanismo de Wanzler modificado que pase por hasta ocho poses, y para verificar que funcione se usarán casos de diseño tomados de publicaciones previas.

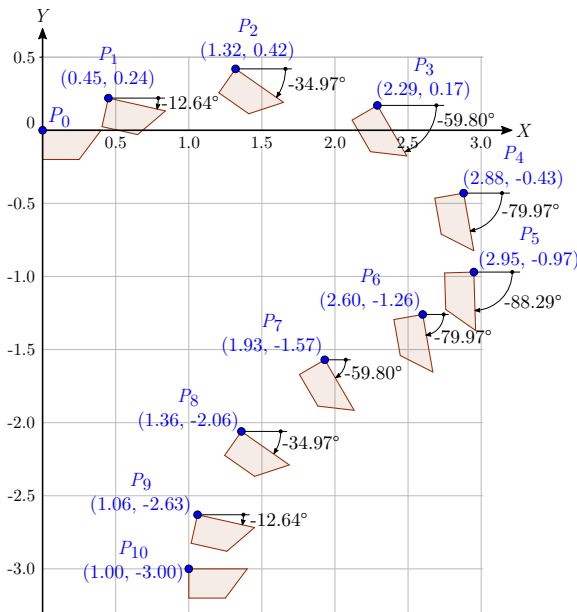


Figura 7.3. Conjunto de 11 poses usadas por Chen.

Como ejercicio de diseño, se usará el conjunto de poses propuesto en primera instancia por McCarthy [39] en 2002, y luego usado por Chen et al. [26].

Ellos plantearon la síntesis de un mecanismo plano para 11 poses. A partir de este grupo se pueden tomar diferentes subgrupos de poses y tener varios casos de diseño para el mecanismo. Aquí se presentan ejemplos de solución para el subgrupo de las seis, siete y ocho primeras poses.

El conjunto total de 11 poses junto con su información concerniente a las coordenadas y orientación se muestra en la Fig. 7.3.

7.2. Ejemplo de diseño 1.

Como primer ejemplo se toman las seis primeras poses del conjunto de Chen. Siguiendo el algoritmo de diseño de las Figuras 7.1 y 7.2, el conjunto solución satisfactorio para las ecuaciones de diseño del mecanismo modificado de Wanzler se muestra en el Cuadro 7.1.

Cuadro 7.1. Parámetros de diseño del mecanismo modificado de Wanzler del ejemplo de diseño 1.

| MECANISMO DE WANZLER ORIGINAL | | MECANISMO 4R | |
|-------------------------------|-----------|--------------|---------|
| Parámetro | Valor | Parámetro | Valor |
| x_B | 1.9791 | x_M | -0.6476 |
| y_B | 0.2393 | y_M | 0.6000 |
| x_C | 0.0000 | x_N | -2.3886 |
| y_C | -0.6422 | y_N | -3.2500 |
| x_Q | 1.3258 | e | 0.6259 |
| y_Q | -1.8859 | f | 2.4334 |
| θ_0 | 0.0000° | L_{MR} | 1.0570 |
| a | -2.1252 | L_{NS} | 2.2288 |
| b | 1.3258 | g | 1.8000 |
| L_{AP} | 2.0000 | - | - |
| δ | 240.0000° | - | - |

Obtenidas las coordenadas de todos los puntos del mecanismo de Wanzler modificado es posible determinar sus parámetros geométricos y esquematizar sus eslabones. El mecanismo diseñado ubicado en una pose arbitraria se muestra en la Fig. 7.4.

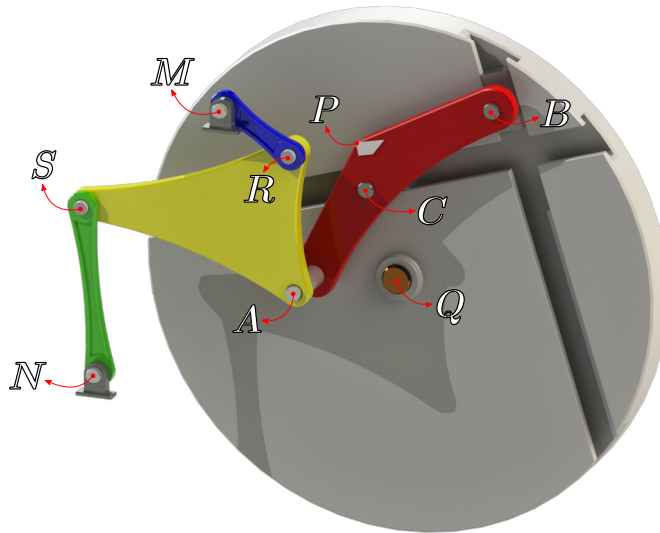


Figura 7.4. Mecanismo diseñado para el ejemplo de diseño 1.

Con la intención de mostrar el movimiento del mecanismo, en la Fig. 7.5 se ilustra como este alcanza todas las poses del ejemplo de diseño.

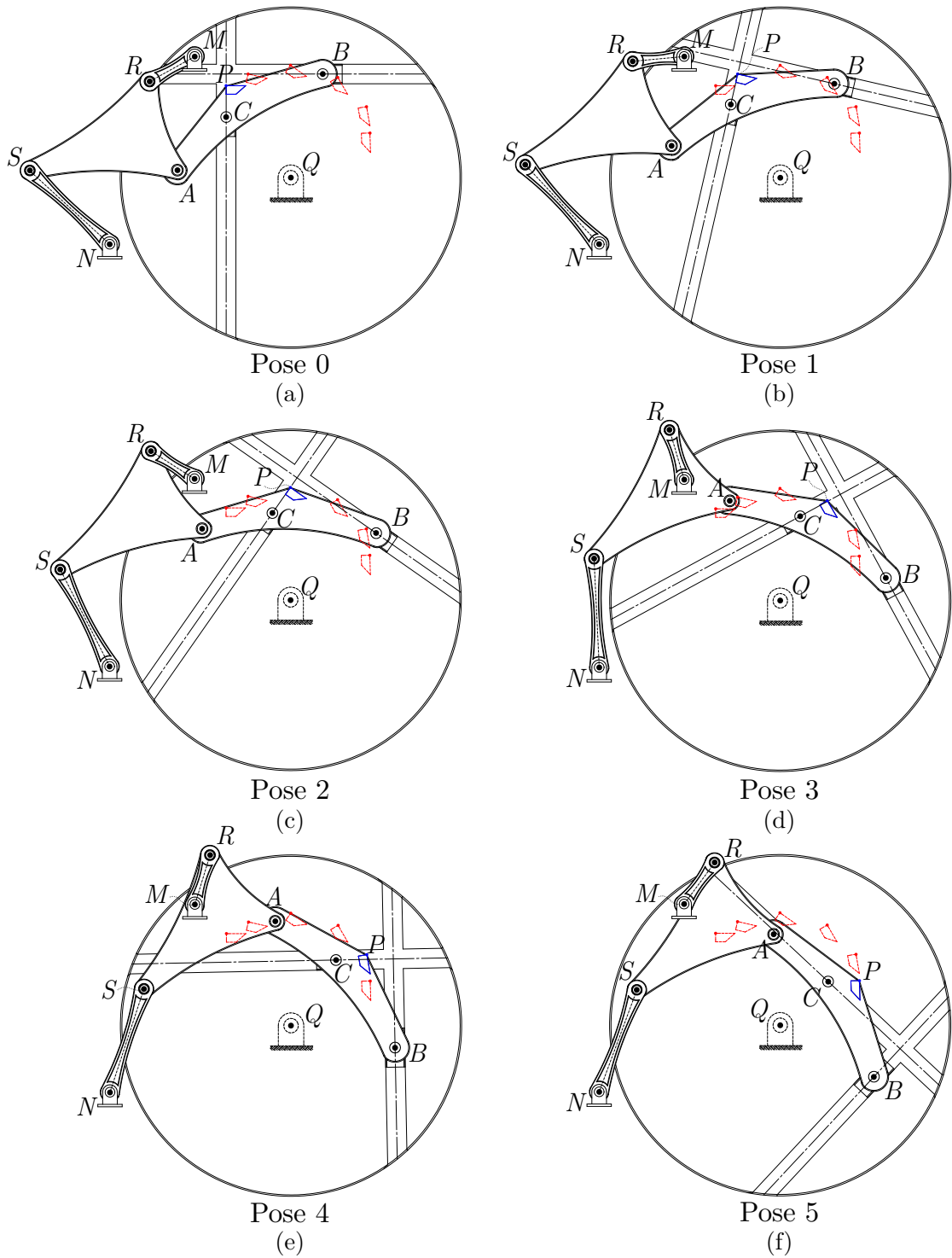


Figura 7.5. Poses del mecanismo modificado de Wanzler para el ejemplo de diseño 1.

7.2.1. Análisis de defectos para el mecanismo del ejemplo de diseño 1.

Primeramente, el mecanismo 4R diseñado cumple con el criterio de Grashof, esto es, el eslabón de entrada (eslabón 6) puede rotar completamente. Además, todos los puntos A_i se ubican sobre una sola curva de acoplador y están en el orden deseado como puede notarse en la Fig. 7.6, lo que implica que en primera instancia, el mecanismo 4R no sufre de defectos de circuito, ramal ni orden.

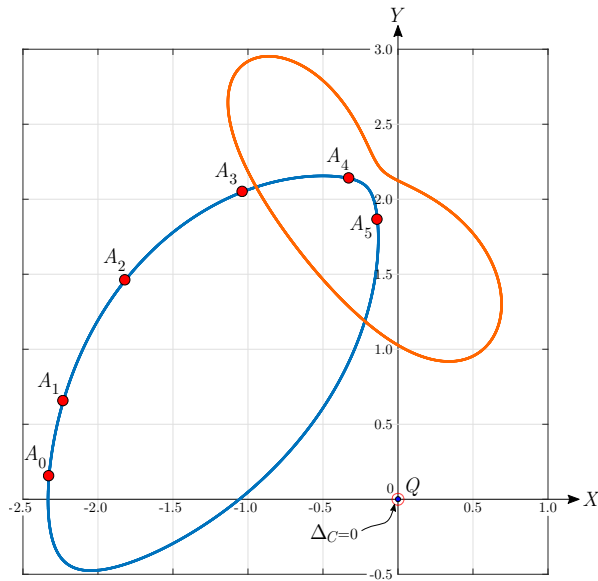


Figura 7.6. Curvas de acoplador del punto A para el ejemplo de diseño 1.

Aquí también está graficada la curva de bloqueo $\Delta_C = 0$, y como puede observarse, ésta no se interseca con las curvas de acoplador por lo que no existen configuraciones de bloqueo para este mecanismo.

Pasando al mecanismo de Wanzler original, y usando las curvas de acoplador de la Fig. 7.6, pueden graficarse todas las posibles posiciones del punto P del acoplador 4 tal como se comentó en la sección 6.2.2. Estas curvas se muestran en la Fig. 7.7. Cada segmento coloreado está asociado a una de las soluciones θ_i , dadas en la ecuación (6.15). Las soluciones se complementan de tal forma que generan cuatro trayectorias cerradas, correspondientes a cuatro circuitos del mecanismo de Wanzler original, dos por cada curva de acoplador del mecanismo 4R.

Se observa que todos los puntos P_i del acoplador 4 se ubican sobre un mismo circuito y además ocurren en el orden deseado, por lo que se deduce que el lazo cinemático asociado al mecanismo de Wanzler original está libre de defectos de orden, ramal y circuito.

La Fig. 7.8 brinda algo más de información acerca del movimiento del disco ranurado 1, la relación entre las soluciones de la ecuación (6.14) y la identificación de los circuitos. Por un lado, allí se muestra un mapeo de las posiciones del punto P en las regiones de solución del ángulo θ , que indica que todos los puntos se ubican sobre una sola región de solución.

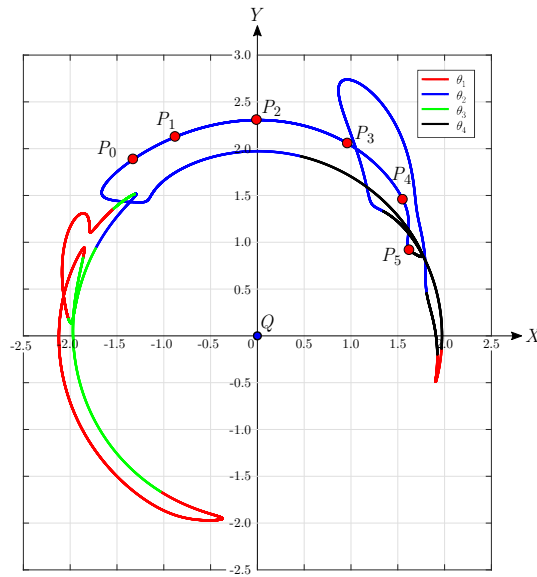


Figura 7.7. Curvas de acoplador del punto P para el ejemplo de diseño 1.

Por otro lado, la continuidad de las curvas de acoplador mostradas en la Fig. 7.7 puede asociarse al solapamiento que hay entre las distintas regiones de solución de θ . Si dicho solapamiento existe, se puede pasar de una solución a otra sin modificar la forma en la que está ensamblado el mecanismo. Por último, puede notarse que θ va incrementando de forma secuencial en sentido horario, a medida que se alcanzan los puntos P_0 a P_5 , confirmando que el mecanismo no sufre defectos de orden.

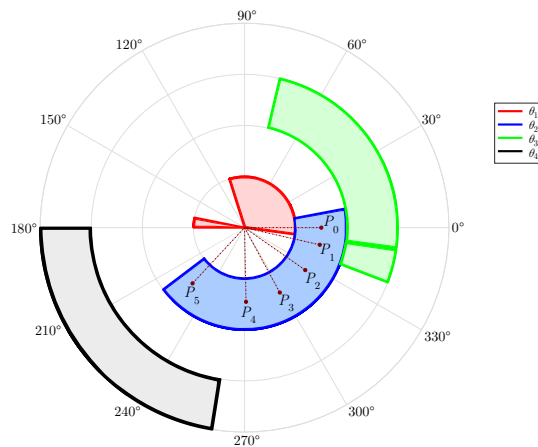


Figura 7.8. Mapeo de los puntos P_i sobre las regiones de solución del ángulo θ para el ejemplo de diseño 1.

Con toda la información proporcionada por las diferentes curvas de trayectoria del mecanismo se puede determinar que este cumple satisfactoriamente con todas las poses requeridas, y a su vez, que el diseño se encuentra libre de defectos de circuito, ramal, orden y de Grashof.

7.3. Ejemplo de diseño 2.

En el segundo ejemplo de diseño, la tarea de generación de movimiento se especifica por las primeras siete poses del conjunto de Chen. Al aplicar el algoritmo de diseño se obtiene el conjunto solución mostrado en el Cuadro 7.2.

Cuadro 7.2. Parámetros de diseño del mecanismo modificado de Wanzler del ejemplo de diseño 2.

| MECANISMO DE WANZLER ORIGINAL | | MECANISMO 4R | |
|-------------------------------|-----------|--------------|---------|
| Parámetro | Valor | Parámetro | Valor |
| x_B | 1.7931 | x_M | 0.3259 |
| y_B | -0.0272 | y_M | 2.0997 |
| x_C | 1.2916 | x_N | -1.3909 |
| y_C | -1.0358 | y_N | -1.7500 |
| x_Q | 1.5249 | e | 2.3850 |
| y_Q | -1.5556 | f | 1.1688 |
| θ_0 | 0.0000° | L_{MR} | 1.1179 |
| a | -1.5284 | L_{NS} | 1.8230 |
| b | 0.2333 | g | 1.8000 |
| L_{AP} | 2.0000 | - | - |
| δ | 240.0000° | - | - |

Obtenidas las coordenadas de todos los puntos del mecanismo de Wanzler modificado es posible determinar sus parámetros geométricos y esquematizar sus eslabones. El mecanismo diseñado ubicado en una pose arbitraria se muestra en la Fig. 7.9.

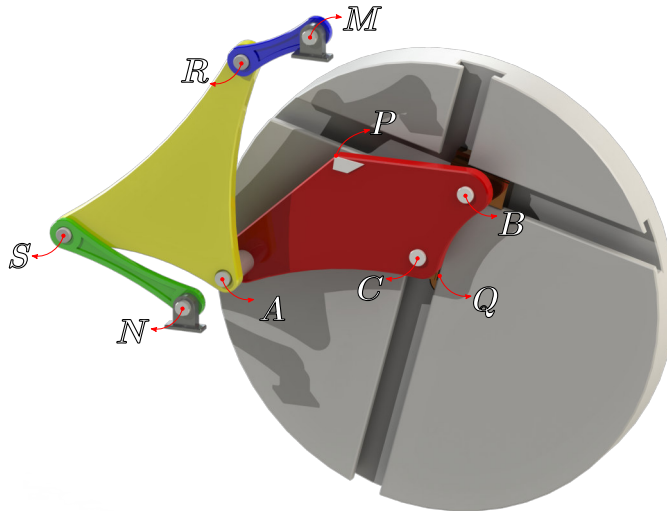


Figura 7.9. Mecanismo diseñado para el ejemplo de diseño 2.

Con la intención de mostrar el movimiento del mecanismo, en las figuras 7.10 y 7.11 se ilustra como éste alcanza todas las poses del ejemplo de diseño.

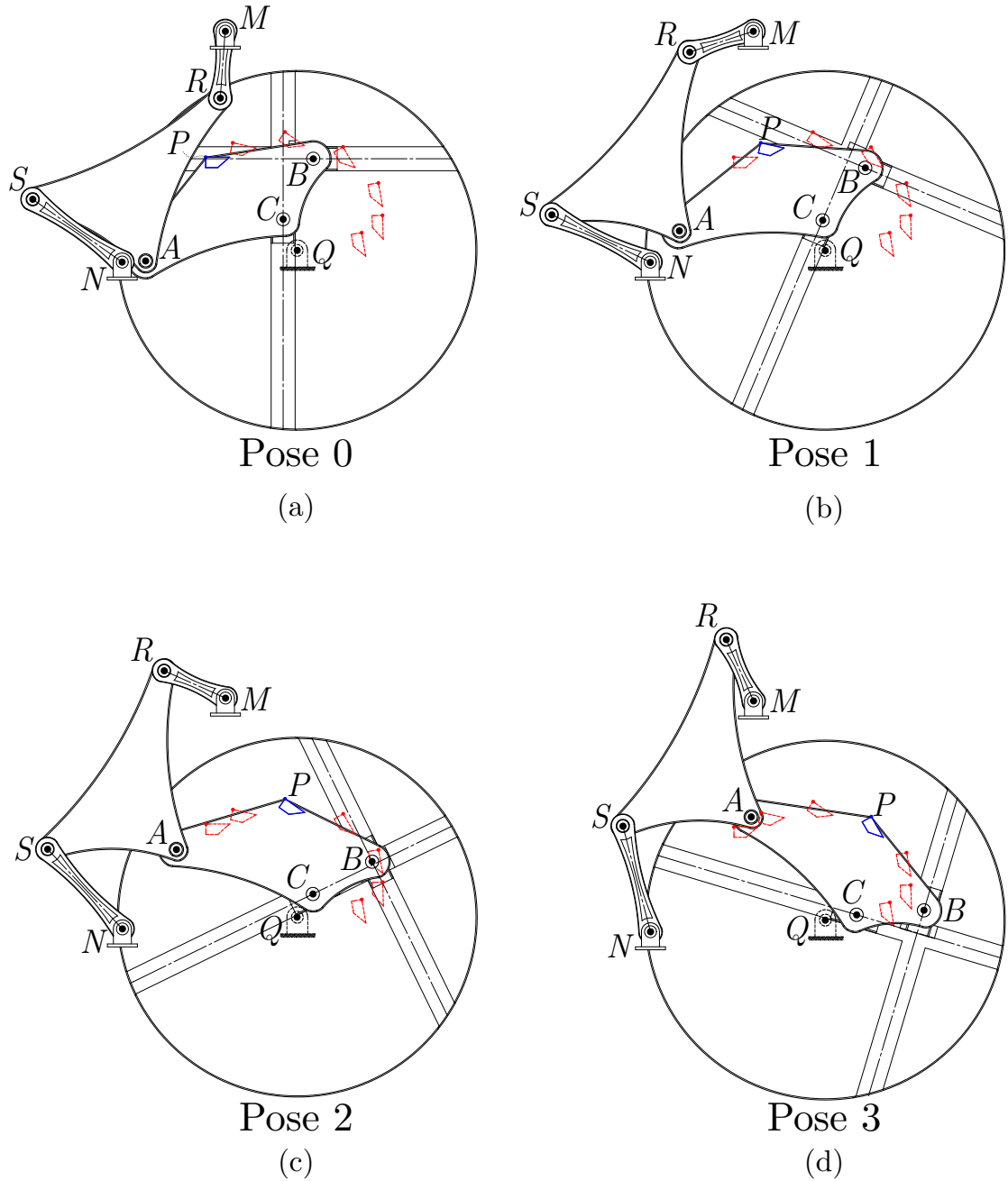


Figura 7.10. Poses 0 a 3 del mecanismo modificado de Wanzler para el ejemplo de diseño 2.

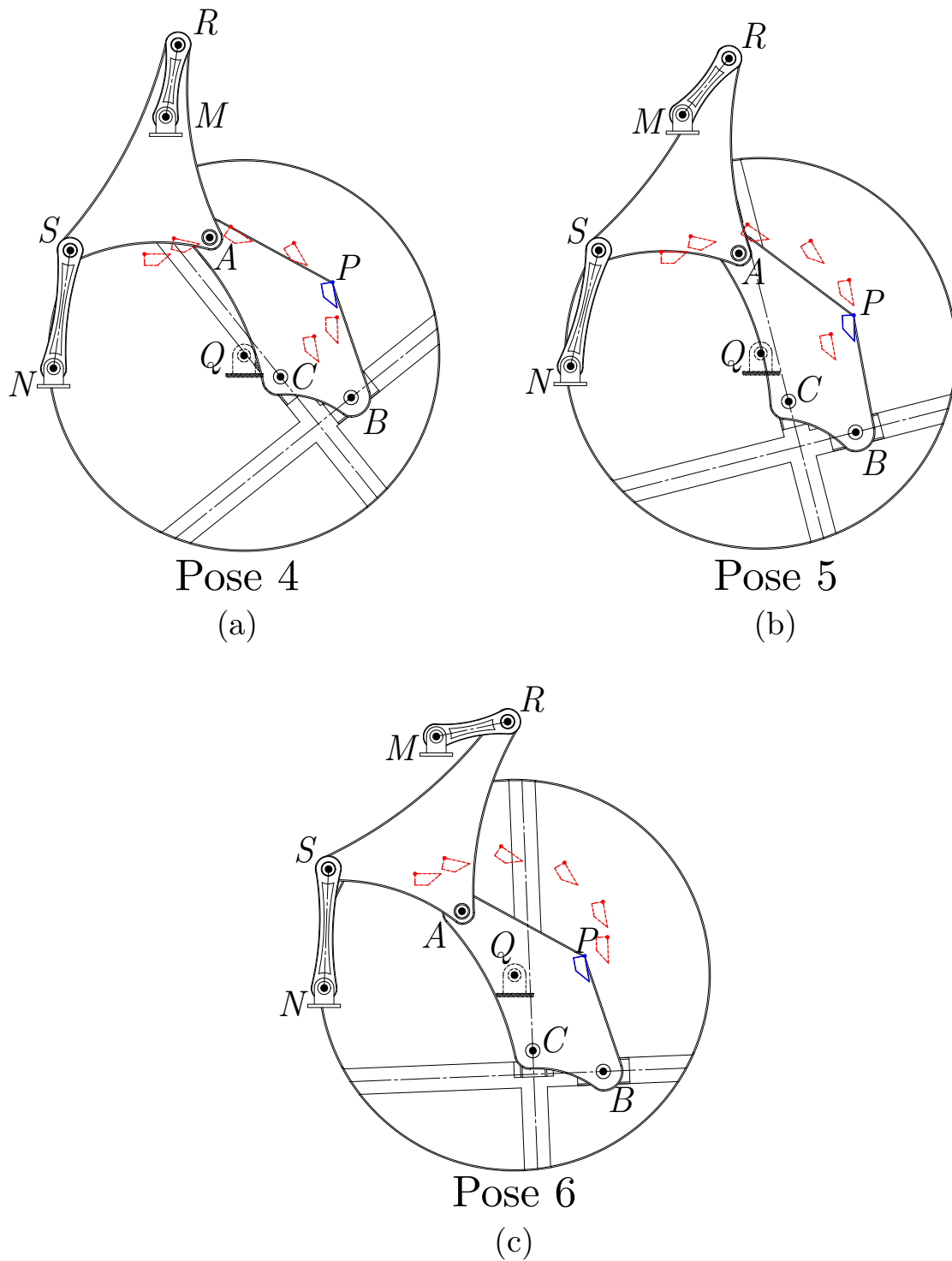


Figura 7.11. Poses 4 a 6 del mecanismo modificado de Wanzler para el ejemplo de diseño 2.

7.3.1. Análisis de defectos para el mecanismo del ejemplo de diseño 2.

El mecanismo 4R diseñado para este ejemplo también satisface el criterio de Grashof, al revisar las curvas de acoplador plasmadas en la Fig. 7.12 pueden distinguirse claramente los dos circuitos que tiene el mecanismo 4R. Debe notarse que todos los puntos A_i están sobre el mismo circuito y suceden en el orden deseado por lo que esta cadena cinemática está libre de defectos.

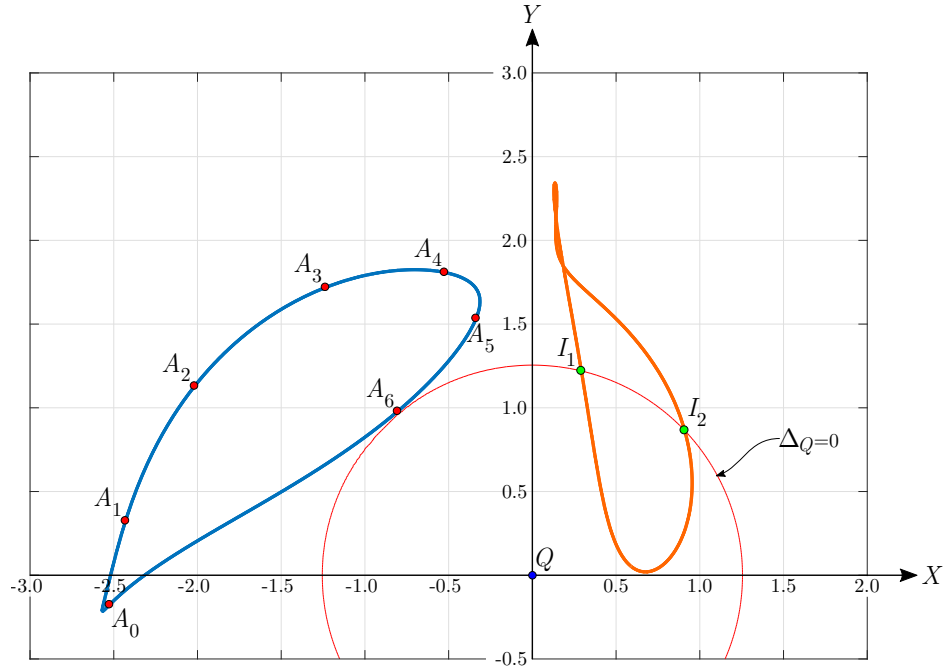


Figura 7.12. Curvas de acoplador del punto A para el ejemplo de diseño 2.

Aquí ocurre que la curva de acoplador de uno de los circuitos intersecta a la curva de bloqueo $\Delta_Q = 0$, por lo que este circuito tendría posiciones de bloqueo en los puntos I_1 e I_2 . En el otro circuito pasa lo contrario, aunque su curva de acoplador está muy cerca de la curva de bloqueo, estas no se intersectan. Por lo tanto, para las poses requeridas, el mecanismo no tendrá configuraciones de bloqueo.

En la Fig. 7.13 se muestra como el trammel de Wanzler para este ejemplo de diseño genera dos tipos de trayectorias para cada curva de acoplador del mecanismo 4R. Aquella curva que no tiene puntos de bloqueo genera dos trayectorias cerradas, mientras que la segunda curva de acoplador del mecanismo 4R que tiene puntos de bloqueo genera una sola trayectoria con dos discontinuidades, correspondientes a los puntos de bloqueo.

Los puntos P_i del acoplador 4 están localizados sobre una misma trayectoria cerrada, por lo que no habría necesidad de desensamblar el mecanismo para pasar entre las poses. Además, la ocurrencia de estos puntos está en el orden deseado. De aquí se concluye que el mecanismo diseñado para este ejemplo no tiene defectos de orden, ramal o circuito.

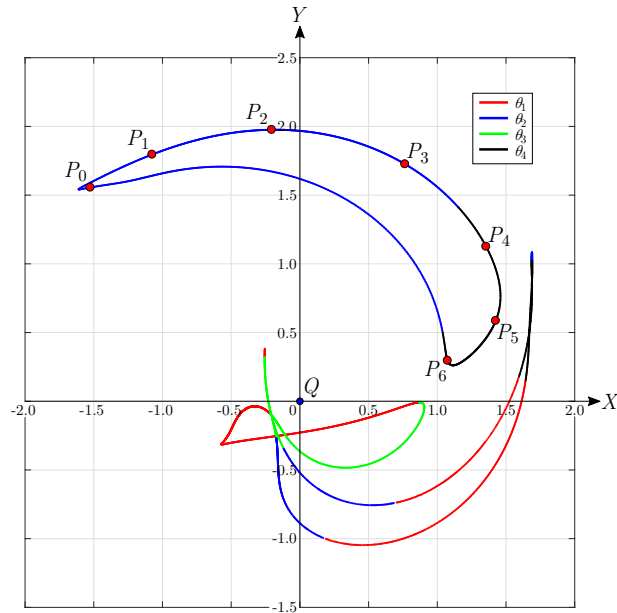


Figura 7.13. Curvas de acoplador del punto P para el ejemplo de diseño 2.

Aún cuando los puntos se ubican sobre soluciones diferentes, al revisar el mapeo de estos puntos sobre los rangos de solución de θ (ver Fig. 7.14) puede apreciarse el solapamiento existente entre las soluciones que componen cada circuito, indicando que es posible pasar de una solución a otra sin desensamblar el mecanismo.

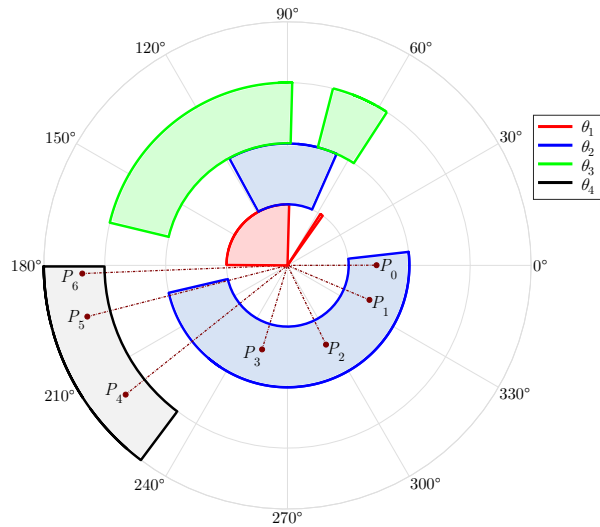


Figura 7.14. Mapeo de los puntos P_i sobre las regiones de solución del ángulo θ para el ejemplo de diseño 2.

La Fig. 7.14 es muy útil para corroborar la continuidad del movimiento del mecanismo, y permite deducir que este diseño está libre de defectos de circuito, orden, ramal y de Grashof. Al mismo tiempo que es capaz de cumplir con el requerimiento de movimiento especificado.

7.4. Ejemplo de diseño 3.

En el último ejemplo basado en las poses de Chen [26], se usan las ocho primeras poses. La aplicación del algoritmo de diseño para este caso lleva a las soluciones mostradas en el Cuadro 7.3. Con estos parámetros de diseño se construyó el modelo tridimensional del mecanismo mostrado en la Fig. 7.15.

Cuadro 7.3. Parámetros de diseño del mecanismo modificado de Wanzler del ejemplo de diseño 3.

| MECANISMO DE WANZLER ORIGINAL | | MECANISMO 4R | |
|-------------------------------|-----------|--------------|---------|
| Parámetro | Valor | Parámetro | Valor |
| x_B | -1.0555 | x_M | 2.4618 |
| y_B | -3.1004 | y_M | 2.6287 |
| x_C | 3.6548 | x_N | 6.3114 |
| y_C | -0.7435 | y_N | -6.8307 |
| x_Q | 3.5231 | e | 2.8766 |
| y_Q | -3.3015 | f | 0.2351 |
| θ_0 | 2.8975° | L_{MR} | 2.1484 |
| a | 0.0306 | L_{NS} | 10.5636 |
| b | -0.0023 | g | 2.2857 |
| L_{AP} | 2.0000 | - | - |
| δ | 240.0000° | - | - |

El acoplador 5 se dibujó hueco con el objetivo de visualizar mejor el movimiento del eslabón acoplador 4 a través de todas las poses.

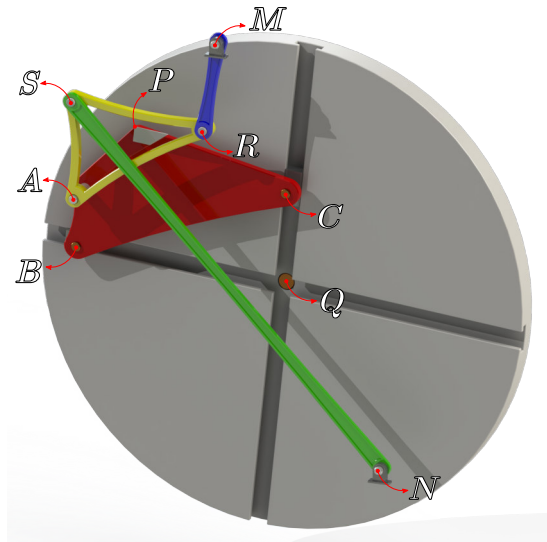


Figura 7.15. Mecanismo resultante para el ejemplo de diseño 3.

La forma en la que el mecanismo pasa por todas las poses se muestra en las figuras 7.16 y 7.17.

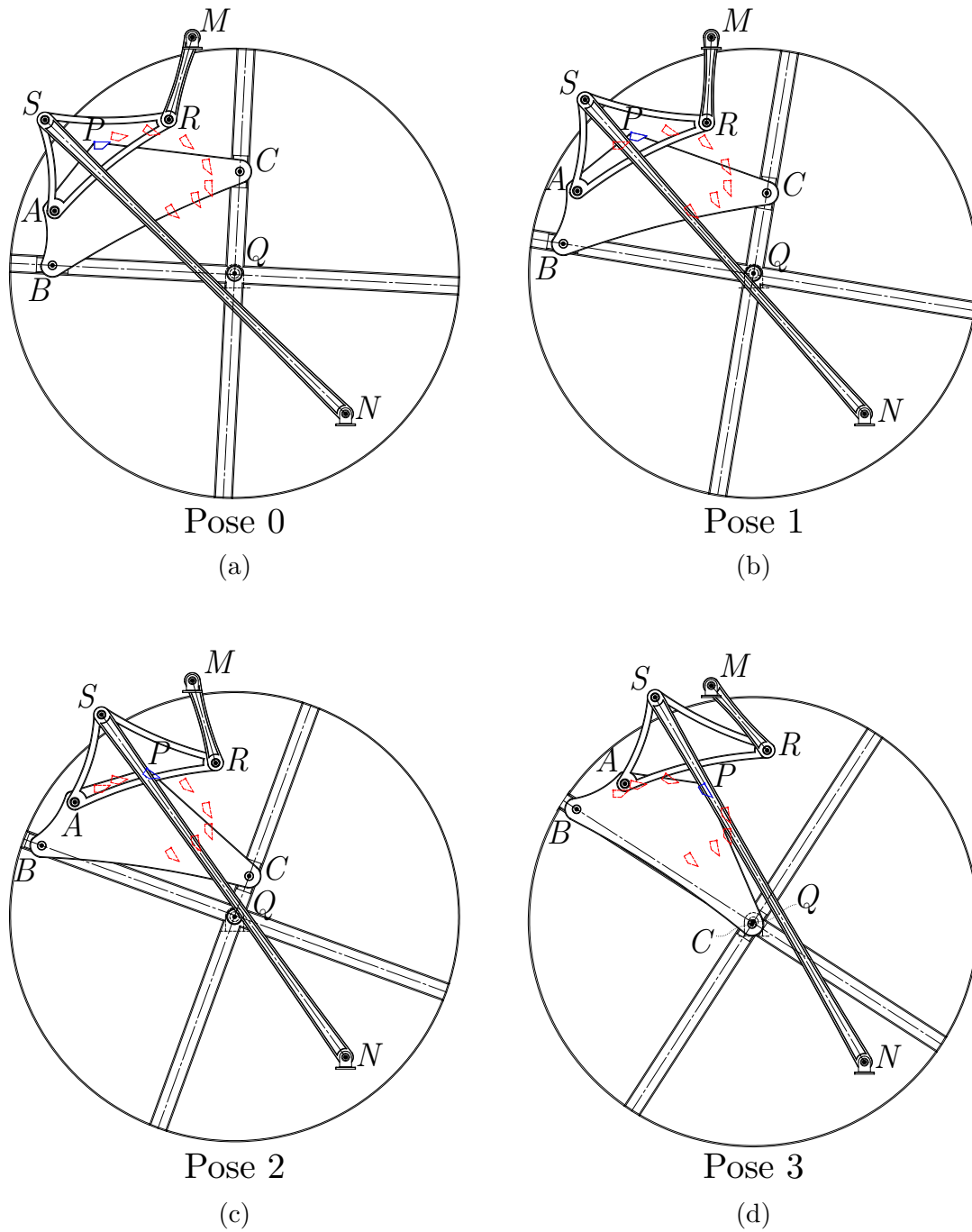


Figura 7.16. Poses 0 a 3 del mecanismo modificado de Wanzler para el ejemplo de diseño 3.

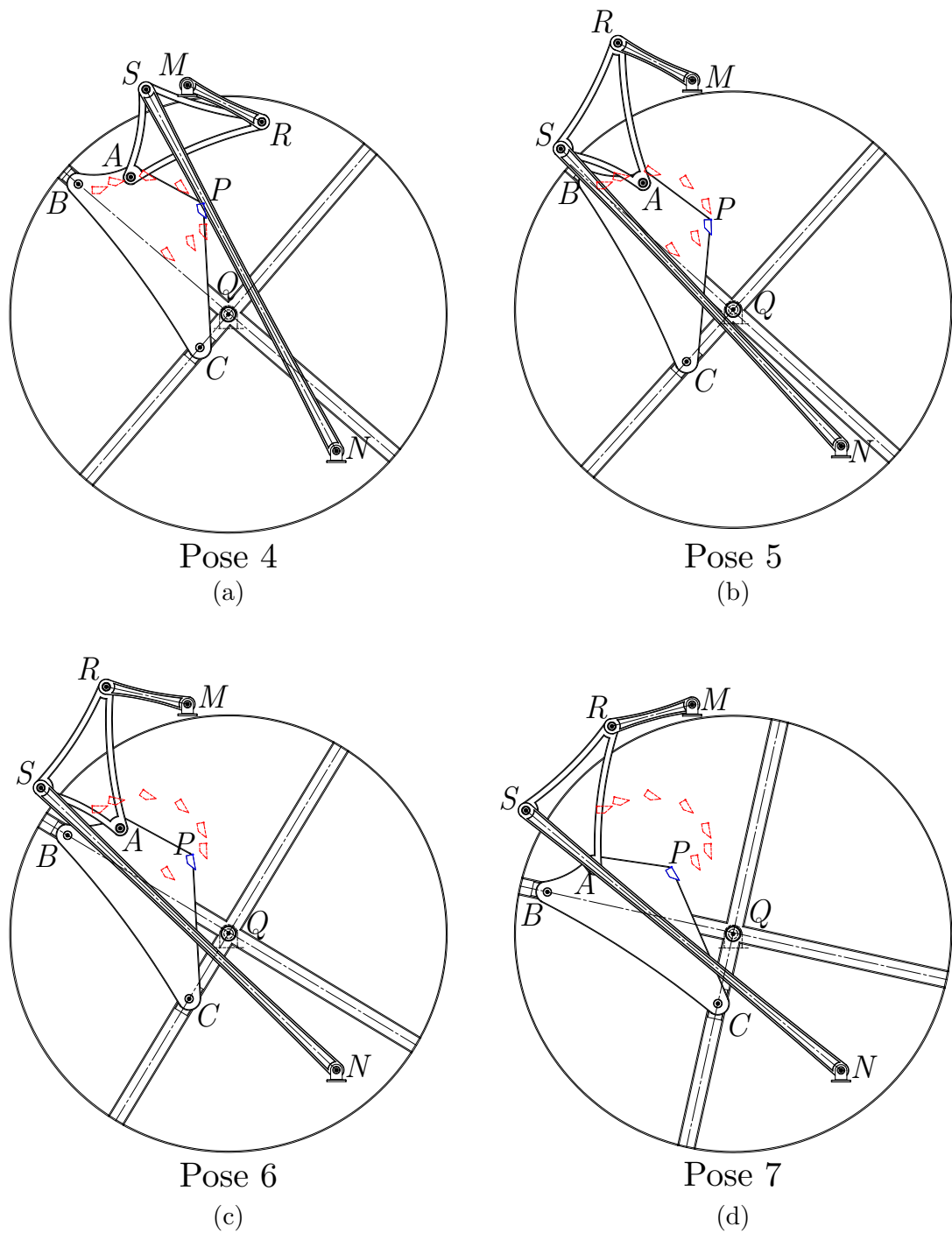


Figura 7.17. Poses 4 a 7 del mecanismo modificado de Wanzler para el ejemplo de diseño 3.

7.4.1. Análisis de defectos del mecanismo del ejemplo de diseño 3.

Las dimensiones del mecanismo 4R diseñado satisfacen el criterio de Grashof, y como puede observarse en la fig. 7.18, todos los puntos A_i caen sobre una misma curva de acoplador, y también suceden en el orden esperado, dando a entender que el mecanismo 4R no tiene defectos de orden, ramal o circuito.

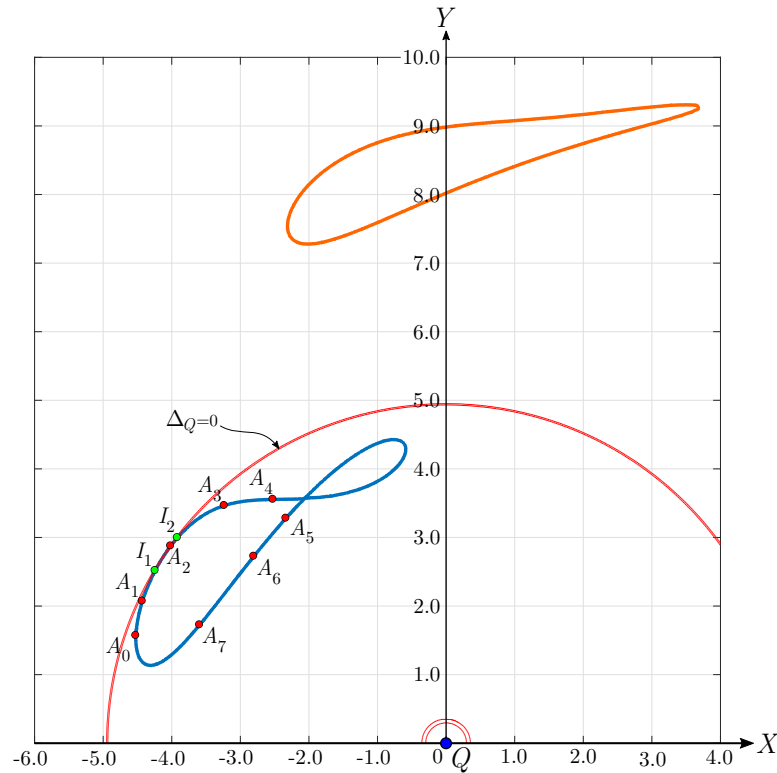


Figura 7.18. Curvas de acoplador del punto A para el ejemplo de diseño 3.

Sin embargo, para este ejemplo de diseño no es posible eliminar otro tipo de defecto. Una de las curvas de bloqueo del mecanismo de Wanzler original si interseca a la curva de acoplador del punto A en los puntos I_1 e I_2 . En estos puntos, el movimiento del mecanismo modificado de Wanzler se interrumpirá.

Continuando ahora con el análisis de las curvas de acoplador del punto P del tramel de Wanzler presentada en la Fig. 7.19, se observa que los puntos P_i están ubicados sobre trayectorias diferentes, y además existe una discontinuidad entre ellas. Esto está asociado a las configuraciones de bloqueo dadas por las intersecciones de las curvas de acoplador del punto A de la Fig. 7.18. De la Fig. 7.19 puede detectarse que el mecanismo de Wanzler original tiene defectos de orden, ramal y circuito. Este último es menos notable ya que los segmentos asociados a cada solución θ_i están muy cerca, por ejemplo, el punto P_5 pertenece a la solución θ_4 , mientras que el punto P_4 y P_6 pertenece a la solución θ_2 .

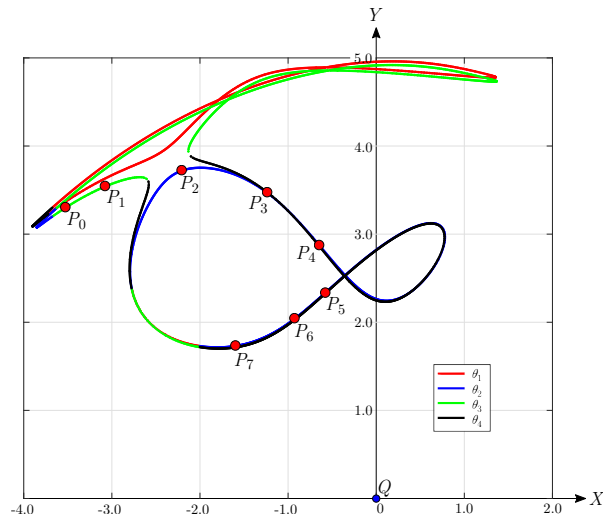


Figura 7.19. Curvas de acoplador del punto P para el ejemplo de diseño 3.

El mapeo de los puntos P_i sobre los rangos de solución de θ mostrado en la Fig. 7.20 ayuda a confirmar la aparición de los defectos de circuito. Hay zonas en donde están los puntos P_i que no se solapan. Esto da la idea de que el mecanismo debe desensamblarse para pasar de los puntos P_0 , P_1 , P_3 y P_5 a los puntos P_2 , P_4 , P_6 y P_7 .

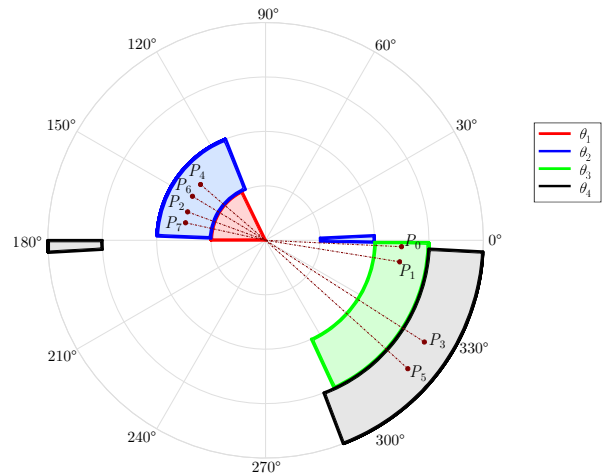


Figura 7.20. Mapeo de los puntos P_i sobre las regiones de solución del ángulo θ para el ejemplo de diseño 3.

Aunque el mecanismo modificado de Wanzler diseñado para este ejemplo cumple con las poses descritas, presenta problemas en el movimiento intermedio de éstas. Los defectos de circuito y bloqueo hacen que sea inutilizable en un ámbito práctico.

7.5. Discusión de resultados.

Las soluciones a los sistemas de ecuaciones resultantes en cada ejemplo de diseño cumplen satisfactoriamente sus requerimientos, sin embargo, en el caso de las ecuaciones de diseño del mecanismo 4R hay que enfatizar que no todos los resultados generan diseños factibles. La mayoría de las veces el algoritmo de cómputo encontraba soluciones en las que los puntos R y S eran coincidentes, haciendo el mecanismo 4R inutilizable. El hecho de que las ecuaciones de diseño tengan parámetros libres ayuda a mitigar esta situación y además ayuda a que el algoritmo pueda encontrar un mayor número de soluciones reales.

La posibilidad de tener parámetros libres también afecta que tan exitoso es el proceso de rectificación del diseño. Como se vio en el ejemplo 3, la falta de parámetros libres en la ecuación de diseño del mecanismo de Wanzler original limita la diversidad de resultados llegando a casos en los que el mecanismo aún sufre algún tipo de defecto.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo se exponen los resultados finales de esta investigación y las ideas para futuros trabajos relacionados con el mecanismo de Wanzer.

8.1. Conclusiones.

Se presenta un conjunto de ecuaciones de síntesis para la generación de movimiento nunca antes desarrollado para el mecanismo que Richard Mott Wanzer usó originalmente en el siglo XIX. Las características matemáticas de estas ecuaciones permiten ver que es un dispositivo generador de movimiento muy limitado. Es posible sintetizar un mecanismo de este tipo para sólo tres poses y la razón de esto es la restricción que impone el par prismático que une el eslabón acoplador 4 con el bloque deslizante 5 (Ver Fig. 2.1).

Con la nueva arquitectura cinemática propuesta para el mecanismo de Wanzer se consigue aumentar el número de poses a alcanzar a un máximo de ocho, resaltando que se mantiene un grado de libertad. Esta variante del mecanismo se basa en la eliminación del par prismático que corresponde a la corredera vertical del mecanismo, a la que luego se acopla una cadena cinemática 4R. Esta adición conlleva a solucionar también un problema de síntesis para la generación de trayectoria, el cual se resuelve con un nuevo conjunto de expresiones algebraicas que no involucra variables de tipo angular que aumenten la complejidad del sistema de ecuaciones.

El análisis cinemático del mecanismo aquí planteado da origen a una alternativa gráfica viable para la rectificación de su diseño. Por medio de las curvas de acoplador de los distintos lazos cinemáticos que lo conforman, fue posible detectar defectos de circuito, ramal y orden, aceptando solo aquellos diseños libres de estas problemáticas. Aún cuando haya sido necesario recurrir a los mapeos presentados en la Figuras 7.8, 7.14 y 7.20 para confirmar tal afirmación.

Las identidades de Weierstrass y su capacidad para transformar ecuaciones trigonométricas en polinomios tienen gran relevancia en la ecuación de diseño del mecanismo de Wanzer. Aunque no es un paso obligatorio en el proceso de encontrar sus raíces, si permiten el uso de métodos alternativos

de solución algebraica como son las formulaciones de Dixon [16] o Bezout [14]; o facilitar la aplicación de métodos numéricos como el que usa el programa *Bertini* [38].

El uso de métodos vectoriales para la síntesis cinemática del mecanismo de Wanzer facilita la obtención de las ecuaciones de diseño. A pesar de que en los pasos finales del proceso de síntesis es necesario trabajar con la forma escalar de las ecuaciones, desde el principio la forma matemática de las restricciones geométricas del mecanismo se presenta de una forma clara y compacta haciendo que sea fácil de entender y de asociar con el comportamiento físico del mecanismo.

Se espera que con los resultados obtenidos al desarrollar el presente proyecto de tesis, se haya podido contribuir en la búsqueda de mecanismos planos con una mayor capacidad de alcanzar poses sobre un plano.

8.2. Trabajo futuro.

Es posible extender el algoritmo de diseño mostrado en el Capítulo 7 para incluir la representación 3D del mecanismo. Hasta este punto, la búsqueda de soluciones es automática, en el sentido de que el código escrito en MATLAB permite encontrar soluciones viables sin contar el proceso de rectificación del diseño. Automatizando la tarea de modelamiento 3D a través de la integración con *SolidWorks* o cualquier otro programa CAD sería posible obtener una herramienta computacional que genere un diseño completamente libre de defectos del mecanismo de Wanzer modificado. Sólo sería necesario una interacción del usuario al momento de ingresar los datos de las poses y la cantidad de parámetros libres acordes al número de poses especificadas.

El análisis del mecanismo modificado de Wanzer aun no incluye su comportamiento dinámico, el cual involucra el estudio de las relaciones entre fuerzas y sus elementos inerciales. Esta nueva parte del análisis también puede incluir la comparación de su rendimiento con otros mecanismos planos usados en tareas de generación de movimiento.

Bibliografía

- [1] F. Halpenny y J. Hamelin, *Dictionary of Canadian biography*, 1.^a ed. Toronto: University of Toronto Press, 1982.
- [2] J. E. Shigley y J. J. Uicker, *Theory of Machines and Mechanisms*, 2.^a ed. McGraw-Hill, Inc., 1995, pp. 22.
- [3] J. A. Dent y A. C. Harper, *Kinematics and kinetics of machinery*. Nueva York: Jhon Wiley & Sons, Inc., 1921.
- [4] W. Steeds, *Mechanism and the kinematics of machines*. Londres: Longmans, Green & Co., 1940.
- [5] A. R. Holowenko, *Dynamics of Machinery*. Jhon Wiley & Sons, Inc., 1955.
- [6] M. A. Chace, «Vector Analysis of Linkages», *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 85, No. 3, pp. 289-297, 1963. DOI: 10.1115/1.3669867.
- [7] J. S. Beggs, *Advanced mechanism*. Nueva York: Macmillan, 1966.
- [8] K. H. Hunt, *Kinematic geometry of mechanisms*. Nueva York: Oxford University Press, 1990.
- [9] R. S. Hartenberg y J. Denavit, *Kinematic Synthesis of Linkages*. McGraw-Hill, Inc, 1964.
- [10] A. K. Mallik, A. Ghosh y G. Dittrich, *Kinematic analysis and synthesis of mechanisms*. CRC Press, 1994.
- [11] J. McCarthy y G. Soh, *Geometric Design of Linkages*, 2.^a ed. Springer Science+Business Media, LLC, 2011.
- [12] A. G. Erdman y G. N. Sandor, *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*, 3.^a ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc., 1997, Vol. 1.
- [13] C. D. Crane y J. Duffy, *Kinematic Analysis of Robot Manipulators*. Nueva York: Cambridge University Press, 2008.
- [14] J. J. Sylvester, «On a Theory of the Syzygetic Relations of Two Rational Integral Functions, Comprising an Application to the Theory of Sturm's Functions, and That of the Greatest Algebraical Common Measure», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 143, pp. 407-548, 1853. dirección: <http://www.jstor.org/stable/108572>.
- [15] B. Parrish y J. McCarthy, «Identification of a usable six-bar linkage for dimensional synthesis», *Mechanisms and Machine Science*, No. 7, pp. 255-262, 2013. DOI: 10.1007/978-94-007-4902-3_27.

- [16] A. L. Dixon, «The Eliminant of Three Quantics in two Independent Variables», *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. s2-7, No. 1, pp. 49-69, 1909. DOI: 10.1112/plms/s2-7.1.49.
- [17] M. Plecnik y J. McCarthy, «Numerical Synthesis of Six-Bar Linkages for Mechanical Computation», *Journal of Mechanisms and Robotics*, Vol. 6, No. 3, pp. 031012-1-031012-12, 2014. DOI: 10.1115/1.4027443.
- [18] H. Schreiber, K. Meer y B. Schmitt, «Dimensional synthesis of planar Stephenson mechanisms for motion generation using circlepoint search and homotopy methods», *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, No. 7, pp. 717-737, 2002. DOI: 10.1016/S0094-114X(02)00016-2.
- [19] J. S. Pantoja-Garcia, M. G. Villareal-Cervantes, J. C. Gonzales-Robles y G. S. Cervantes, «Síntesis óptima de un mecanismo para la marcha bípeda utilizando evolución diferencial», *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 33, No. 1-2, pp. 138-153, 2017. DOI: 10.1016/j.rimni.2016.04.004.
- [20] C. W. Chang, J. Angeles y M. A. González-Palacios, «A Semigraphical Method for the Solution of the Burmester Problem», en *Advances in Design Automation*, Proceedings of ASME Design Automation Conference (22-25 de sep. de 1991), Miami, FL., 1991, pp. 321-326.
- [21] K. Al-Widyan, J. Angeles y J. J. Cervantes-Sánchez, «A Numerically Robust Algorithm to Solve the Five-Pose Burmester Problem», en *27th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences (29 de sep.-2 de oct. de 2002), Vol. 5, Montreal, Quebec, CA., 2002, pp. 617-626. DOI: 10.1115/DETC2002/MECH-34270.
- [22] M. J. D. Hayes y P. J. Zsombor-Murray, «Solving the Burmester Problem Using Kinematic Mapping», en *27th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences (29 de sep.-2 de oct. de 2002), Vol. 5, Montreal, Quebec, CA., 2002, pp. 1439-1446. DOI: 10.1115/DETC2002/MECH-34378.
- [23] K. Brunthaler, M. Pfurner y M. Husty, «Synthesis of planar four-bar mechanisms», *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, Vol. 30, No. 2, pp. 297, 2006.
- [24] Q. J. Ge, P. Zhao y A. Purwar, «Decomposition of Planar Burmester Problems Using Kinematic Mapping», en *Advances in Mechanisms, Robotics and Design Education and Research*, V. Kumar, J. Schmiedeler, S. V. Sreenivasan y H.-J. Su, eds. Heidelberg: Springer International Publishing, 2013, pp. 145-157. DOI: 10.1007/978-3-319-00398-6_11.
- [25] G. S. Soh y J. M. McCarthy, «The synthesis of six-bar linkages as constrained planar 3R chains», *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 43, No. 2, pp. 160-170, 2008. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2007.02.004.
- [26] C. Chen y J. Angeles, «A novel family of linkages for advanced motion synthesis», *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 43, No. 7, pp. 882-890, 2008. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2007.06.007.
- [27] J. Stewart, *Single variable calculus: Concepts and contexts*. Cengage Learning, 2009.
- [28] A. Hernández, *Cinemática de mecanismos: Análisis y diseño*. Madrid, España: Sintesis, 2004, pp. 249-252.
- [29] J. Nieto, *Síntesis de mecanismos*. Madrid, España: Editorial AC, 1978, pp. 88-97.

- [30] C. W. Wampler, A. P. Morgan y S. A. J., «Complete Solution of the Nine-Point Path Synthesis Problem for Four-Bar Linkages», *Journal of Mechanical Design*, Vol. 114, No. 1, pp. 153-159, 1992. DOI: 10.1115/1.2916909.
- [31] B. Roth y F. Freudenstein, «Synthesis of Path-Generating Mechanisms by Numerical Methods», *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 85, No. 3, pp. 298-304, 1963. DOI: 10.1115/1.3669870.
- [32] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, 3.^a ed. Nueva York: Springer Science+Business Media, LLC, 2007.
- [33] S. S. Balli y S. Chand, «Defects in link mechanisms and solution rectification», *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, pp. 851-876, 2002. DOI: 10.1016/S0094-114X(02)00035-6.
- [34] W. H. Beyer, *Standard mathematical tables and formulae*, 29.^a ed. Boca Raton: CRC Press, 1991, pp. 12.
- [35] M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Nueva York: Dover, 1972, Vol. 9.
- [36] D. Kohli, J.-C. Cheng y K. Y. Tsai, «Assemblability, Circuits, Branches, Locking Positions, and Rotatability of Input Links of Mechanisms With Four Closures», *Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, No. 1, pp. 92-98, 1994. DOI: 10.1115/1.2919383.
- [37] W. S. Burnside y A. W. Panton, *Theory of Equations*. Dublin, Irlanda: Dublin University Press, 1886, pp. 142.
- [38] D. J. Bates, J. D. Hauenstein, A. J. Sommese y C. W. Wampler, *Bertini: Software for Numerical Algebraic Geometry*, Disponible en bertini.nd.edu. DOI: 10.7274/R0H41PB5.
- [39] J. McCarthy, *Desafío de diseño para alcanzar 11 poses en el plano de manera exacta*, Exposición pública, 2002.