



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS ECONÓMICO
ADMINISTRATIVAS

CAMPUS GUANAJUATO

“PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL
PRONÓSTICO DE CICLOS ECONÓMICOS A
PARTIR DE ANÁLISIS FOURIER”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN ECONOMÍA Y FINANZAS

P R E S E N T A :

JOSÉ LUIS CARRILLO RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. FERNANDO GARCÍA BARRAGÁN

CODIRECTOR : EDGAR BERNABÉ CRUZ GONZÁLEZ

GUANAJUATO, GTO., MÉXICO.

AGOSTO 2020

DEDICATORIA

A mi esposa e hijas.

Índice

Introducción	1
Alcances de la Tesis	3
Capítulo I: Antecedentes	5
1.1 Ciclos económicos	7
1.2 Producto Interno Bruto	9
1.3 La naturaleza del ciclo económico	12
1.4 Series de tiempo	15
1.4.1 Modelación	17
1.4.2 Pronóstico	18
1.4.3 Filtros Hodrick-Prescott y Baxter-King	20
1.4.4 Modelos ARMA	22
1.5 Modelos DSGE o EGDE	24
1.6 Análisis de series de tiempo con enfoque espectral	27
Capítulo II: Marco Teórico	29
2.1 Análisis de Fourier	29
2.1.1 Series de Fourier	29

2.1.2	Forma compleja de las series de Fourier	34
2.1.3	Transformada de Fourier y espectro de frecuencia	36
2.1.4	Transformada discreta de Fourier	38
2.1.5	Transformada Rápida de Fourier	40
2.2	Estimación espectral por métodos no paramétricos	41
2.2.1	Periodograma	42
2.2.2	Periodograma de Bartlett	43
2.2.3	Periodograma de Welch	45
2.2.4	Método de Wichert & Fokianos	47
2.3	Interpretación de la densidad espectral de potencia de series estacionarias	49
2.3.1	Comparativo de periodogramas	50
2.4	Estacionariedad de series de tiempo y proceso estocásticos	53
2.5	Pruebas de raíz unitaria	54
2.5.1	Eliminación de componente de tendencia en series temporales no estacionarias	55
2.6	Modelos ARIMA	57
Capítulo III: Marco Metodológico		61
3.1	Regresión polinomial para la obtención de la tendencia de largo plazo	62
3.2	Obtención del PIB de corto plazo	64
3.3	Análisis frecuencial del PIB de corto plazo	66
3.3.1	Prueba de estacionariedad	68
3.3.2	Obtención e interpretación del periodograma de Wichert	69

3.4	Modelado del PIB de corto plazo a partir de funciones sinusoidales	71
3.5	Modelado del PIB efectivo	74
3.6	Estimación parcial para PIB de corto plazo	76
3.7	Estimación parcial para PIB efectivo	77
3.8	Estimación del PIB efectivo	77
3.9	Estimación de bandas de frontera	81
3.10	Estimación del PIB de corto plazo	83
Capítulo IV: Resultados		85
4.1	Comparativo de métodos estimativos para PIB de México	85
4.2	Comparativo de métodos estimativos para PIB de EEUU	91
4.3	Comparativo de métodos estimativos para PIB de países de la OCDE	93
4.3.1	Estimación para el periodo 2018	93
4.3.2	Estimaciones para los periodos 2017 y 2018	94
4.3.3	Estimación para los periodos 2017, 2018 y 2019	94
4.4	Comparativo de métodos estimativos para PIB de países del mundo	95
4.4.1	Cuando es conveniente usar ECF	96
4.4.2	Cuando NO es conveniente usar ECF	97
Capítulo Complementario: Manual de uso del programa		101
5.1	Uso de programa para estimación por modelo ECF	101
5.1.1	Estructura del archivo de datos	101
5.1.2	Estructura del código	102

5.1.3	Uso de <code>SingleIteration.R</code> para la estimación parcial para PIB real y de corto plazo	103
5.1.4	Salidas del programa SingleIteration.R	104
5.1.5	Uso de <code>FullModel.R</code> para la estimación definitiva de PIB real y de corto plazo	107
5.1.6	Salidas del programa FullModel.R	108
5.2	Estimación por modelos <i>ARIMA</i>	110
5.3	Uso de programa para estimación por modelo ARIMA	112
	Conclusiones	115
	Apéndice A	117
	Apéndice B	121
	Apéndice C	127
	Referencias	141

INTRODUCCIÓN

En el análisis económico, múltiples autores han estudiado la periodicidad en el crecimiento y contracción de las economías; *Shumpeter*, por ejemplo, incluso propuso duraciones para lo que normalmente se denomina ciclo económico.

Si bien la econometría en general se vale de distintas herramientas matemáticas para, en medida de lo posible, pronosticar tales periodicidades, llama la atención la escasa literatura que sustente los pronósticos en la *Transformada de Fourier*.

La *Transformada de Fourier* es una herramienta matemática específicamente diseñada para encontrar periodicidades o componentes frecuenciales en "señales"¹ o series de datos. Sin embargo, un estudio más profundo de la literatura especializada revela que dicha herramienta ha sido previamente explorada, sin embargo, debido a varias circunstancias no era factible su uso, a continuación, se resumen algunos de estos motivos.

Por una parte, la *Transformada de Fourier* es una herramienta diseñada para el procesamiento de señales electrónicas, donde la cantidad de datos se cuenta por miles o millones, mientras que los datos de series económicas suelen contener un margen menos amplio.

Por otra parte, para funciones discretas o series de datos, requiere de un elevado número de operaciones matemáticas, por lo que se requiere del uso de herramientas de cómputo, hasta hace algunas décadas inaccesibles.

Por último, las herramientas generadas a partir de la *Transformada de Fourier* para

¹Término que se explica en el Capítulo II.

estimar componentes frecuenciales en series de datos estocásticas de reducido tamaño, no habían mostrado resultados razonablemente aceptables hasta hace unos pocos años.

Tomando en cuenta lo anterior, la presente Tesis recupera la hipótesis de que las series económicas, particularmente la *Producción Interna Bruta anual*, tienen un comportamiento periódico; y por ello, la *Transformada de Fourier* debe ser capaz de encontrar lo que se denominan *componentes frecuenciales*. No obstante, parte del hecho de que este tipo de series de datos son de tamaño muy reducido para ser procesadas con el mismo enfoque empleado en el ámbito del procesamiento de señales, y por ello se recurren a las aportaciones llevadas a cabo por *Sofia Wichert* y *Konstantinos Fokianos* quienes se encontraron ante un problema similar para series de datos en el ámbito de los estudios genéticos (Wichert and Fokianos, 2004), y cuyos resultados han implementado en el software de análisis estadístico *R*.

A diferencia de otros autores que han estudiado los ciclos económicos, el método que aquí se propone, no busca dar explicación a los mismos; tampoco busca aislar o determinar su duración promedio, sino que, a partir de la información de periodicidad descubierta por las herramientas matemáticas mencionadas, procura llevar a cabo pronósticos acertados.

Los resultados serán comparados con aquellos obtenidos a partir de otros modelos matemáticos actualmente empleados que ofrecen resultados razonablemente aceptables, y así determinar si el enfoque propuesto tiene o no validez predictiva.

ALCANCES DE LA TESIS

Objetivo: Usar el análisis de Fourier junto con avances estadísticos recientes, particularmente los trabajos de Wichert and Fokianos (2004), para la elaboración y programación de un método de estimación o pronóstico para las Producción Interna Bruta de los países.

Metodología: Para la comprobación de los resultados, se realizará la programación en el lenguaje y plataforma de desarrollo estadístico R y se comprobarán los mismos con los obtenidos mediante los modelos $ARMA(1, 1)$, que como se ve más adelante, es la metodología que entrega los resultados más aproximados en comparación con otras alternativas.

Precisiones adicionales: No es objetivo de la tesis refutar modelo alguno, sino, proporcionar herramientas adicionales para la elaboración de pronósticos precisos en el desarrollo futuro de las economías y brindar elementos suficientes para discernir cuando el modelo propuesto resulta o no de utilidad.

Capítulo I

ANTECEDENTES

En la literatura económica es generalmente aceptado que el análisis macroeconómico tiene sus orígenes en las ideas postuladas por *John Maynard Keynes* quien proponía dotar a los gobiernos de herramientas fiscales que les permitieran hacer frente a las crisis financieras; ideas que revolucionaron en su momento el pensamiento económico clásico que hasta los años treinta del siglo veinte eran incuestionables.

Las contribuciones de Keynes, documentadas en su obra principal *The General Theory of Employment, Interest and Money*, además de otras; han sido usadas desde entonces, por partidarios y detractores, como base para el desarrollo de múltiples teorías y modelos para la interpretación del comportamiento de las economías, incluyendo su crecimiento de largo plazo y las fluctuaciones económicas.

En particular el tema de los ciclos económicos, cómo Hurtado and Franco (2011) lo precisa, es ampliamente debatido dentro de la teoría económica, y existen discrepancias respecto a cuál es el enfoque más apropiado para llevar a cabo este tipo de análisis.

De los autores que han defendido la perspectiva deductiva se encuentran Keynes (1936), Hicks (1950), Samuelson (1939) y Shumpeter (1934), mientras que los autores que prefieren centrar el análisis en una metodología de carácter inductivo están Burns and Mitchell (1947), Kitchin (1923), Juglar (1862), Kondratieff (1979) y Jevons (1905).

En décadas posteriores, surgieron nuevas teorías que profundizan en el uso de métodos

no lineales para el análisis de la dinámica económica y se desarrollaron metodologías robustas con la intención de segregar las componentes de tendencia y cíclicas de las series de tiempo.

Una de estas metodologías es la desarrollada por Hodrick and Prescott (1980), la cual consiste en un filtro paso alto que elimina las variaciones de menor frecuencia y suaviza la serie de tiempo para obtener una estimación de la componente de tendencia.

Por otra parte Baxter and King (1995), propusieron un filtro paso banda que elimina las frecuencias más bajas y también las más altas, conservando solamente las componentes con fluctuaciones de entre dieciocho y noventa y seis meses, según la definición del ciclo comercial de Burns and Mitchell (1947).

En el mismo sentido, Christiano and Fitzgerald (1999) desarrollaron un filtro paso banda que, a diferencia de Baxter and King (1995), ajusta la banda de paso según el tamaño de la muestra.

Continuando en el mismo sentido, el propósito de este estudio es determinar si las fluctuaciones de la economía cuentan con una periodicidad observable, y de ser así, si a partir de dicha información es posible elaborar pronósticos en el desarrollo de la economía tomando como indicador base la *Producción Interna Bruta* de cada país.

Antes de profundizar en tal idea, resulta importante conocer las definiciones y términos económicos aceptados por los analistas a fin de sentar las bases conceptuales requeridas para el desarrollo teórico y práctico de las ideas propuestas. Sirvan las siguientes secciones para tal propósito.

1.1 Ciclos económicos

Burns and Mitchell (1947) ofrecen la definición clásica del ciclo económico: "El ciclo económico es un tipo de fluctuación de las actividades económicas agregadas de los países que organizan su trabajo principalmente en negocios empresariales". Consideran además que el ciclo económico está definido por tres características:

- **Fase de expansión:** Cuando varias actividades económicas experimentan crecimiento simultáneo.
- **Fase de recesión:** Contracción simultánea y posterior recuperación de varias actividades económicas, la cual forma parte de la fase de expansión del siguiente ciclo.
- **Recurrencia:** Los ciclos económicos se repiten en las economías, varían en duración y no ocurren a intervalos predecibles.

Existen varias definiciones adicionales para los ciclos económicos, también llamados "*ciclos de negocios*", "*ciclos comerciales*" o "*fluctuaciones cíclicas*", por ejemplo, Gregory Mankiw en su libro *Principios de Economía*, propone la siguiente definición.

Las fluctuaciones de la economía suelen llamarse ciclo económico, como sugiere esta expresión, las fluctuaciones económicas corresponden a los cambios de la situación económica. Cuando el PIB real crece rápidamente, la situación económica es buena. Durante esos periodos de expansión económica, la mayoría de las empresas observan que tienen muchos clientes y que los beneficios aumentan. Cuando el PIB real disminuye durante las recesiones, las empresas tienen problemas; durante esos periodos de contracción económica, las ventas

y los beneficios disminuyen en la mayoría. La expresión "ciclo económico" es algo engañosa, ya que parece sugerir que las fluctuaciones económicas siguen una pauta regular y predecible. En realidad, las fluctuaciones económicas no son en absoluto regulares y casi siempre son imposibles de predecir con mucha precisión (Mankiw, 2007, p.438).

La Agencia Nacional de Investigación Económica (*NBER* por sus siglas en inglés) considera que la fase de expansión corresponde al periodo entre el punto más bajo de la actividad económica hasta el siguiente punto más alto. De manera análoga, la fase de contracción comienza en el punto más alto de la actividad económica y termina en el punto más bajo; y define una recesión como la reducción significativa de la actividad económica en la mayoría de los sectores económicos, misma que puede durar varios meses (NBER, 2010).

En forma general, las fases o etapas de un ciclo económico son reconocidas de la manera que se ilustra en la figura 1:

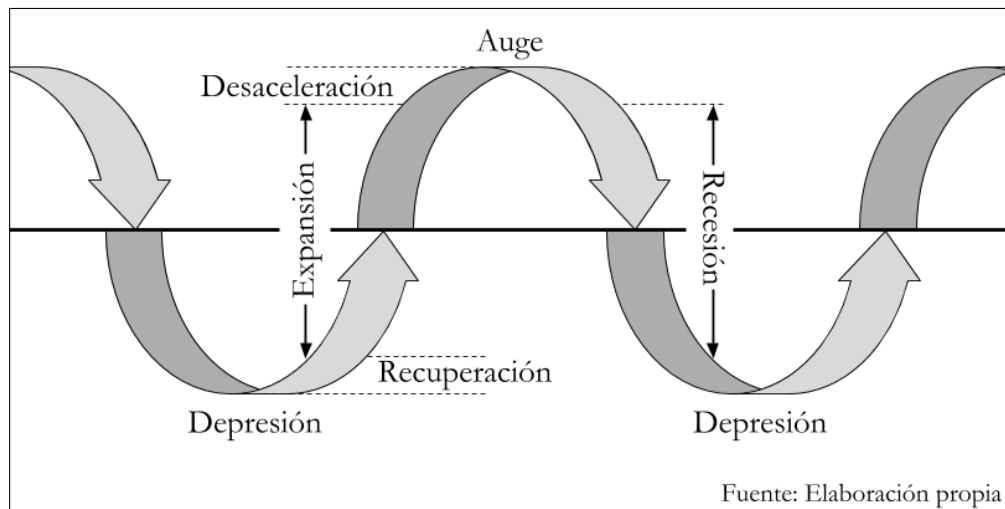


Figura 1: Fases del ciclo económico.

1. **Expansión:** La economía se encuentra en franco crecimiento;
2. **Desaceleración:** El ritmo de crecimiento se empieza a reducir;
3. **Auge:** En un nivel máximo, el crecimiento de la economía frena;
4. **Recesión:** La economía se encuentra en decrecimiento;
5. **Depresión:** El decrecimiento económico se desacelera; y
6. **Recuperación:** La economía muestra signos de nuevo crecimiento.

Los ciclos de negocios se miden principalmente en niveles de actividad económica o la producción interna de una economía; en términos simples, cuando la producción sube, la economía se encuentra en un ciclo expansivo, pero si baja, la economía está en un ciclo recesivo y, aunque es sencillo determinar en que parte del ciclo se encuentra tal economía, es difícil determinar en que momento terminará o iniciará uno nuevo.

1.2 Producto Interno Bruto

El *Producto Interno Bruto (PIB)* o *GDP* por sus siglas en inglés (*Gross Domestic Product*), representa el valor monetario total de todos los bienes y servicios producidos en una economía y vendidos en el mercado durante un periodo determinado, normalmente, un año o un trimestre.

El término "*Bruto*" indica que los productos contribuyen al indicador independiente de su uso posterior. De esta manera, un producto generado por una economía puede ser usado para consumo, inversión o remplazo de un activo; en todos los casos es la venta del bien o servicio lo que aporta a la producción del país.

El *PIB* es uno de los indicadores mayormente empleados en el análisis macroeconómico ya que su principal objetivo es medir la actividad económica formal de un país o región y su tasa de crecimiento proporcionan información importante de las condiciones económicas.

Para analizar el comportamiento del *PIB* de un país es necesario diferenciar entre los distintos tipos que existen del mismo:

- **PIB nominal:** Calcula el valor de los bienes y servicios a precios corrientes.²
- **PIB real o efectivo:** Calcula el valor de los bienes y servicios a precios constantes de un año base o de referencia. Lo anterior permite cuantificar de manera más equiparable la variación de la producción, ya que la inflación y variación de los precios puede alterar la percepción del *PIB*.
- **PIB potencial:** Corresponde a un modelado teórico que permite medir la tasa máxima de crecimiento de una economía sin generar presión inflacionaria.
- **PIB de largo plazo:** Corresponde a la tendencia general del *PIB* de una economía, es de gran importancia para el análisis económico porque describe el potencial de crecimiento de un país, ya que incluso pequeñas tasas de crecimiento tienen un efecto significativo a largo plazo.
- **PIB de corto plazo:** La variación a corto plazo del crecimiento económico se conoce como ciclo de negocio o ciclo económico y corresponde a las etapas de recesión y expansión por las que las economías atraviesan periódicamente.

La diferencia entre el PIB Nominal y el PIB Potencial se conoce como brecha de producción (output gap). Cuando la actividad económica crece por encima de su potencial, se genera un output gap positivo. asociado a presiones inflacionarias. Al contrario, cuando la actividad económica cae por debajo de

²Los precios corrientes son aquellos establecidos al momento del cálculo.

su nivel potencial, el output gap es negativo y se asocia con una ausencia de presiones inflacionarias, o bien, con una economía con capacidad ociosa. Por esto, la producción potencial también se puede considerar como una estimación de la tendencia de largo plazo del PIB (Heath, 2011).

Una brecha positiva se asocia con un crecimiento no sostenible por encima del potencial de una economía producto de un exceso de demanda y generador de presiones inflacionarias. En contraparte, una brecha negativa indica un exceso de capacidad productiva o de baja demanda lo que conlleva un crecimiento en la economía por debajo de su potencial.

Cuando el *PIB Nominal* pasa de una brecha positiva a una negativa o viceversa se generan los ciclos económicos, así, Las políticas contracíclicas intentan influir en la demanda agregada para retornar el PIB a su trayectoria potencial y reducir la brecha de producción para lograr un crecimiento saludable y sostenido de la economía.

Una de las metas más importantes de los analistas económicos es lograr estimar con cierto grado de confiabilidad el *PIB potencial* de una economía para lo que disponen de distintas estrategias, mismas que se pueden clasificar en tres principales categorías: Métodos que separan la tendencia de la parte cíclica mediante técnicas estadísticas y métodos estructurales que se sustentan en teoría económica.

Los métodos estructurales, basados en modelos teóricos que relacionan distintas variables entre sí, normalmente, requieren de una gran cantidad de datos, no siempre disponibles, motivo por el cual es difícil definir una metodología estándar y se emplea aquella que se ajusta mejor a la situación de cada país.

La mayoría de los métodos estadísticos muestran cierta flexibilidad en la cantidad de información requerida entre los que destacan los modelos *ARIMA* y el filtro de *Hodrick* –

Prescott(HP), que le dan particular relevancia a la componente cíclica del *PIB* y en general de una serie de datos, como se estudia más adelante.

1.3 La naturaleza del ciclo económico

Hurtado and Franco (2011), hacen una excelente reseña histórica sobre la discusión existente sobre las causas de fluctuaciones económicas; mencionan que una de las principales interpretaciones desde el punto de vista del ciclo económico como fenómeno endógeno la ofrece Samuel Joines Loyd en 1837, que lo relaciona a las fases del comercio. Por su parte, Kitchin (1923), afirma que se trata de movimientos que afectan las economías en intervalos de tiempo de entre tres y cuatro años. Kuznets (1930) proponía ciclos con una duración de entre quince y veinticinco años, que se explicaban mediante procesos demográficos, particularmente migratorios. Kondratieff (1979) asevera que, aunque sí se observan pequeños ciclos como propuso Kitchin (1923), estos forman parte de otros de mayor duración; de aproximadamente cincuenta años. A continuación, se muestra un resumen de los tipos de fluctuaciones.

Movimientos cortos:

Semanales: Cíclicos con duración de unos pocos días.

Mensuales: Cíclicos con duración de cuatro a cinco semanas.

Estacionales: Son inferiores a un año, se reproducen con regularidad de un año a otro.

Interanuales (ciclo Kitchin): Movimientos con efecto en tres o cuatro años, su auge o depresión no son detectados por el público.

Movimientos largos:

Interdecenales (ciclo Kondratieff): Movimientos con duración de entre cincuenta y sesenta años, considerando la fase ascendente y descendente.

Tendencia secular: Duración de aproximadamente cien años, determinada por una tendencia alcista o bajista.

Interciclo: Fluctuación intermedia entre el ciclo juglar y kondratieff, que abarca un ciclo intradecenal completo y parte de otro.

Por otra parte, de entre quienes estudiaron el ciclo económico desde el punto de vista exógeno, destacan Wicksell (2001) quien diferenciara la tasa de interés del mercado de la natural, teorizando una economía de mercado sin dinero donde el ahorro es igual a la inversión. Para Kalecki (1995), el ciclo es un hecho que obedece al ciclo político y lo explica a través del rezago temporal entre la decisión de invertir y la instalación de inversiones, fenómeno que genera crisis periódicas. En contraste, Shumpeter (1934) explica los ciclos económicos con base a la innovación, y el surgimiento de nuevas tecnologías que estimulan la inversión, la demanda y el empleo.

Como se ha explicado, la mayoría de las teorías más influyentes para el estudio de ciclos económicos provienen de la primera mitad del siglo XX, sin embargo, eran difíciles de comprobar en la práctica debido a la escasez de datos históricos, y fue hasta cuando Burns and Mitchell (1947), con su publicación "measuring business cycles", propusieron el primer estudio de ciclos económicos basado en series de tiempo, aunque los trabajo de Ramsey (1928) sentarían las bases para los modelos de *equilibrio general de optimización dinámica* (EGDE), que a días de hoy son una herramienta recurrente para sistematizar, analizar y proyectar complejos procesos económicos.

En años posteriores, se llevaron a cabo esfuerzos para explicar el comportamiento de las economías a partir de las fluctuaciones de los factores que la comprenden, tal es el caso del modelo TFP.

La *productividad total de los factores* (TFP, por sus siglas en inglés) corresponde a la parte de la producción que no puede ser explicada únicamente por la cantidad de recursos usados; en cuyo caso, el nivel de producción está determinado por la eficiencia y rendimiento que se obtiene al emplear tales recursos.

En este sentido, la TFP adopta un papel relevante para explicar las fluctuaciones económicas; encontrando que la TFP está correlacionada con la producción y las horas de trabajo. Con base en estas observaciones, Kydland and Prescott (1982) desarrollaron las primeras ideas del ciclo comercial real (RBC, por sus siglas en inglés).

Los estudios de estas ideas sentaron precedentes para el desarrollo de las metodologías de Hodrick and Prescott (1980) y Baxter and King (1995) que fueron pioneras en abordar la perspectiva dinámica del análisis económico tomando en cuenta las características oscilatorias de las series de tiempo. Ambas metodologías buscan segregar la tendencia estocástica, suavizando su comportamiento a lo largo del tiempo, lo cual consiguen con la eliminación de ciertas variabilidades que cada metodología justifica.

La supresión de dichas variabilidades se consigue mediante un proceso de filtrado, mismo que depende de la identificación de componentes frecuenciales. En el caso del filtro de Baxter and King (1995) no son propiamente identificadas, sino que, son establecidas por el modelo; a diferencia del filtro de Christiano and Fitzgerald (1999) en el que las componentes frecuenciales eliminadas dependen de las características de la serie de tiempo a procesar.

En lo que respecta al análisis de ciclos económicos, el filtro de Christiano-Fitzgerlad presenta mayores ventajas, ya que, se apoya de diferentes métodos de detección de los mismos; sin embargo, la finitud y granularidad de las series temporales reales son un severo inconveniente para conseguir un filtrado óptimo, lo cual se refleja en la obtención de resultados que,

con regularidad, desechan información frecuencial relevante.

1.4 Series de tiempo

Una serie temporal se define como "una sucesión de observaciones de una variable tomadas en el transcurso del tiempo, de manera que los valores que toma la variable aparecen ordenados en el tiempo". (de la Fuente, 2013); idealmente las observaciones son tomadas en intervalos regulares y no hay ausencia de observaciones intermedias.

Bajo esta definición, se admite que una serie temporal es una función del tiempo, asumiendo éste el rol de la variable independiente o explicativa, sin embargo, hay que precisar que el tiempo no es de hecho una variable explicativa sino más bien un marco de referencia o escenario en el que tiene lugar una serie temporal. A tal perspectiva de estudio de las series de tiempo, se le conoce como enfoque clásico y plantea que cualquier serie temporal puede ser explicada a partir de otras series.

El análisis de series temporales tiene dos principales objetivos, por una parte, procura explicar las variaciones observadas en el pasado, tratando de determinar si existe un patrón en el comportamiento de la variable de estudio. Por otra parte, si logra establecer dicho patrón, buscará pronosticar el comportamiento futuro de la misma.

Con base a lo anterior, toda serie de tiempo se puede asumir como el resultado de cuatro componentes:

1. **Tendencia:** Movimiento regular de la serie a largo plazo.
2. **Variaciones cíclicas:** Oscilaciones en torno a la tendencia cuyo período y amplitud presentan cierta regularidad, pero cuyos factores no se encuentran claramente identificados.

3. **Variaciones estacionales:** Oscilaciones que se producen dentro de un periodo corto y conocido, normalmente relacionado a causas identificadas, tales como factores climáticos o institucionales.
4. **Variaciones aleatorias:** Fluctuaciones producidas por factores impredecibles que no muestran periodicidad.

Como Snowdon and Vane (2005) sugieren, estas características en las series de tiempo agregadas son el principal interés de la macroeconomía, aunque algunos autores engloban las componentes de variaciones cíclicas y estacionales en una sola.

La macroeconomía centra su estudio en las causas e impactos de las fluctuaciones de la actividad económica en el corto plazo (ciclos económicos) y la tendencia de largo plazo (crecimiento económico).

El objetivo principal de la macroeconomía es analizar y entender los determinantes de las series económicas agregadas, como por ejemplo el producto bruto interno (PIB), el desempleo, la inflación y las transacciones internacionales (tanto en el sector real como financiero). En particular, la macroeconomía estudia los determinantes e impactos de las fluctuaciones de la actividad económica en el corto plazo (ciclos económicos) y los determinantes de la senda de largo plazo de la actividad económica (crecimiento económico) (Snowdon and Vane, 2005, p.1).

Una de las series temporales que tienen principal interés para los economistas es la correspondiente a la producción de los países, ya que esta describe en gran medida el comportamiento de las economías y expectativas de las mismas hacia el futuro; y es de hecho, el objeto de análisis del presente trabajo.

1.4.1 Modelación

Uno de los principales retos que enfrenta la econometría de series temporales modernas es desarrollar modelos capaces de pronosticar, interpretar y probar hipótesis sobre datos económicos. De hecho, el uso original del análisis de series temporales fue principalmente como una ayuda para la predicción, y como tal, se desarrollaron metodologías para descomponer una serie en componentes de tendencia, estacional, irregular y aleatoria.

La metodología general utilizada para llevar a cabo pronósticos implica encontrar la ecuación de movimiento que impulsa un proceso estocástico y emplear esa ecuación para predecir resultados posteriores.

Denotando como y_t el valor de una variable observada en el periodo t , como se explica en la sección 1.4, una serie de tiempo puede descomponerse en cuatro componentes: tendencia, cíclica, estacional y aleatoria.

Algunos autores incorporan los efectos de la componente cíclica y estacional en una sola, bajo la perspectiva de que ambas conforman una componente oscilatoria; enfoque que se adopta para este trabajo definiendo como S_t la componente que engloba los efectos causados por dichas componentes, siendo T_t la componente de tendencia, S_t la componente oscilatoria y ϵ_t la componente aleatoria.

Los modelos clásicos de series de tiempo proponen que la serie de tiempo y_t puede ser expresada como una suma o producto de sus componentes, de lo que se desprenden los modelos aditivos ($y_t = T_t + S_t + \epsilon_t$) y multiplicativos ($y_t = T_t * S_t * \epsilon_t$).

Modelos que se emplean en el análisis de las series de tiempo cuyo principal objetivo es la realización de pronósticos en el comportamiento de una variable de interés con la finalidad

de prevenir o planificar líneas de acción ante determinados escenarios o circunstancias.

1.4.2 Pronóstico

Dependiendo del tipo de organización o entidad; las predicciones de corto, mediano o largo plazo; pueden ser de mucha utilidad, por ejemplo, a las instituciones financieras o Gobiernos de países les resulta de particular interés pronosticar el estado de la economía en el mediano plazo a fin de tomar las decisiones necesarias que maximicen los beneficios económicos.

La aplicación de las series de tiempo no se restringe a los ámbitos financieros y resultan de gran utilidad a otras áreas y ciencias, como la meteorología, química, medicina, etc. Sin embargo, para esta tesis nos centraremos en el análisis de series económicas y particularmente el *PIB* de los países.

Como Ríos (2008) expresa:

Al hablar de pronósticos se debe distinguir entre proyecciones dentro y fuera de la muestra. En las primeras, las proyecciones realizadas se refieren a los mismos datos que se emplearon para la construcción del modelo (la muestra), mientras que "las proyecciones fuera de la muestra" se refiere a datos fuera o posteriores a la misma (p.7).

Lo anterior tiene relación directa con las dos formas existentes de evaluar la precisión de los pronósticos intramuestrales, ya que, por una parte, se puede llevar a cabo el pronóstico a futuro y esperar hasta disponer del dato real para comprobar la precisión. Sin embargo, la forma más empleada consiste en evaluar la precisión del modelo sobre la base de un subconjunto de datos de la muestra original, de la que se omiten intencionalmente los últimos valores conformando lo que se conoce como *conjunto de entrenamiento*, mientras que los datos

omitidos reciben el nombre de *conjunto de evaluación*.

La composición y tamaño de los conjuntos de *evaluación* y *entrenamiento* debe tomar en cuenta los siguientes factores:

- **Tamaño de la muestra:** Salvo el conjunto de *evaluación*, normalmente para un modelo se trabaja con la totalidad de datos disponibles, ya que, en muestras pequeñas, la calidad del modelo se podría ver comprometida, sin embargo, si fuese necesario omitir ciertos datos de la muestra es importante justificar la razón y procurar que no impacte negativamente en la calidad de los pronósticos.
- **Tipo de metodología:** Dependiendo del tipo de metodología de pronóstico se puede requerir un mayor o menor número de datos en el conjunto de *entrenamiento*.

Por otra parte, el horizonte de un pronóstico puede ser de corto, mediano o largo plazo, y dependiendo de la industria u organización puede existir mayor interés por alguno en particular y aunque no existe un estándar para el alcance de cada horizonte, normalmente se aceptan como válidos los de "Corto plazo" (días, semanas, meses o máximo un año), "Mediano plazo" (de uno a seis años) y "Largo plazo" (de seis hasta cincuenta años) (Ríos, 2008).

Resulta importante tomar en cuenta que mientras más largo sea el horizonte de tiempo de un pronóstico, mayor es el nivel de incertidumbre de este.

Con dichos antecedentes, resulta evidente la necesidad de realizar modelos confiables para la descripción del comportamiento de una serie temporal, para lo que se recurre a modelar individualmente cada una de las componentes de la misma (tendencia, cíclica y aleatoria).

En lo que respecta a la componente de tendencia, existen varias metodologías, ya sea para modelarla o eliminarla, a fin de favorecer el análisis de la componente cíclica. Tema que se aborda más detalladamente en el Capítulo II, sin que ello implique que se hagan nuevas propuestas.

La componente aleatoria por su parte, por definición no se puede modelar, ya que al ser aleatoria sus causas dependen del azar y no son predecibles, sin embargo, dicha componente puede ser al menos identificada si las componentes de tendencia y cíclicas son adecuadamente modeladas.

Por último, la componente cíclica ha sido históricamente la más complicada de modelar, aunque existen actualmente varios métodos para su análisis con niveles de confiabilidad bastante aceptables, sin embargo, es un tema abierto a mejoras y sobre el cual esta tesis propone una metodología de modelado, misma que se detalla en los capítulos posteriores.

1.4.3 Filtros Hodrick-Prescott y Baxter-King

El *filtro HP*, desarrollado por Hodrick y Prescott en 1980, es una herramienta muy popular entre los investigadores del ciclo económico; se enfoca en eliminar las componentes no estacionarias, de hasta cuarto orden, de la series de tiempo; es decir, equivale a un proceso de ajuste de la curva que da como resultado la construcción de una tendencia lo más suave posible.

Posteriormente, en 1995 Baxter y King propusieron un nuevo tipo filtro buscando la aproximación lineal óptima a un filtro pasa banda ideal. Con base a los trabajos de Hodrick-Prescott, construyeron un filtro pasobanda adicionando un filtro pasobajos que conserva todas las frecuencias que se encuentren por debajo de la frecuencia de corte y elimina las que

están por encima. Esto implica que a todas las frecuencias se les asocia una unidad de peso que las clasifica dentro o fuera de la banda de paso. A este filtro se le conoce como *filtro BK*.

Respecto a la efectividad de estas herramientas para el análisis de ciclos económicos y el pronóstico de los mismos, se han llevado a cabo múltiples trabajos que, en general, consideran que su capacidad de estimación son más bien reducidos, como explica Canova (1997).

Las fluctuaciones de los ciclos comerciales se identifican típicamente con desviaciones de la tendencia del proceso. Sin embargo, en la literatura empírica existe un desacuerdo fundamental sobre las propiedades de la tendencia y sobre su relación con el componente cíclico de una serie...

...la teoría económica dinámica no indica el tipo de tendencia económica que pueden mostrar las series ni la relación exacta entre las componentes seculares y cíclicas (Canova, 1997).

Al respecto, Guay (1997), en su artículo *Do the Hodrick-Prescott and Baxter-King Filters Provide a Good Approximation of Business Cycles?*, también explica:

Los filtros HP y BK funcionan bien en cuanto a la extracción de frecuencias de ciclos de negocios de series de tiempo cuyos espectros tienen un pico en tales frecuencias. Desafortunadamente, el pico de la densidad espectral de la mayoría de las series macroeconómicas está en frecuencias más bajas. De hecho, es bien sabido que las series macroeconómicas tienen la forma espectral típica identificada por Granger (1966). Tales series tienen la mayor parte de su potencia en las frecuencias bajas y sus espectros disminuyen brusca y monótonamente en

las frecuencias más altas. En el caso de esas series, los filtros HP y BK tienen un rendimiento deficiente en cuanto a la extracción de frecuencias de ciclo comercial. La intuición detrás de este resultado es simple. El problema es que gran parte de la potencia de las series temporales macroeconómicas típicas en las frecuencias de ciclo comercial se concentra en la banda en la que la ganancia cuadrada de los filtros HP y BK difiere de la de un filtro ideal. Además, la forma de la ganancia cuadrada de esos filtros, cuando se aplica a las series temporales macroeconómicas típicas, induce un pico en el espectro del componente cíclico que está ausente en la serie original. Dos consecuencias de la aplicación de los filtros HP y BK son que, inducen propiedades dinámicas espurias y que extraen una componente cíclica que no logra captar una fracción significativa de la varianza contenida en las frecuencias del ciclo económico (Guay, 1997, p.2).

Por lo anterior, el presente trabajo no tomará este enfoque de análisis de los ciclos económicos como marco de referencia o comparación; en cambio, partirá de un análisis espectral que no elimina o filtra frecuencia alguna, es decir, no se establece la suposición de que alguna componente cíclica es irrelevante.

1.4.4 Modelos ARMA

Ante la necesidad de realizar pronósticos en series de tiempo, en los años setentas George E. P. Box y Gwilym Jenkins desarrollaron la metodología Box-Jenkins, dando pie a los modelos conocidos como *modelos autorregresivos de media móvil ARMA* por sus siglas en inglés.

Dicha metodología aplica para modelos aditivos de la forma $y_t = T_t + S_t + \epsilon_t$ una vez

que se ha comprobado que ϵ_t es corresponde a un ruido blanco.

El modelo está integrado por dos partes:

1. Medias Móviles de orden q , $MA(q)$.
2. Autorregresivos de orden p , $AR(p)$.

De donde recibe el nombre $ARMA(p, q)$, estos modelos estadísticos consideran la dependencia existente entre los datos, modelando cada observación en función de los valores anteriores.

Algunas de las características más relevantes de estos modelos consisten en que sólo toma en cuenta la tendencia pasada de la serie de tiempo, no toma en cuenta la información de las variables causales, utiliza la observación más reciente como valor inicial y a partir del análisis de errores en pronósticos recientemente realizados, selecciona el ajuste apropiado para futuros periodos (Ríos, 2008).

El análisis económico de los modelos de regresión lineal multivariados han sido ampliamente utilizados con fines predictivos pero según Evans (2003); los resultados han sido pobres, por lo que, los economistas han recurrido a los modelos de series de tiempo univariados logrando con ello mejores pronósticos, pero con el inconveniente de que basa la predicción en el comportamiento anterior de la misma variable para la realización de la predicción.

Respecto a la precisión de los modelos $ARMA$ para la elaboración de pronósticos, Mazzeu and Ruiz (2015) concluyen:

Mostramos que la fuente más importante de incertidumbre al construir pronósticos de densidad para horizontes cortos es la distribución de errores. Sin embargo, a medida que aumenta el horizonte de pronóstico, la aproximación

normal de la densidad es más apropiada.

Alternativamente, los procesos bayesianos requieren mucho tiempo y son computacionalmente complicados cuando se incorporan simultáneamente incertidumbres de parámetros y órdenes de retraso sin suponer una distribución de error particular. Finalmente, los procedimientos de impulso parecen ser una alternativa factible si el tamaño de la muestra es grande, incluso cuando se desconoce la distribución del error (p.24).

El estudio concluye que, si bien, los pronósticos pueden presentar errores, cuando la muestra es grande las estimaciones son más o menos precisas y los modelos *ARMA* presentan una mejor alternativa que los modelos bayesianos.

1.5 Modelos DSGE o EGDE

Las teorías clásicas de los ciclos económicos tienen una fuerte debilidad en la elaboración de pronósticos, ya que, en su mayoría fueron concebidas para estimar la duración de los ciclos, pero no para pronosticarlos. Fueron otros modelos como el propuesto por Ramsey (1928) los que sentaron las bases para el desarrollo de modelos capaces de generar pronósticos, de entre los que destacan los modelos de *Equilibrio General Dinámico EGDE* o también conocidos como *DSGE* por sus siglas en inglés.

Los modelos de optimización dinámica son desarrollados bajo el supuesto de que algunos, o todos los agentes, participan en la economía por más de un periodo y toman decisiones buscando maximizar sus beneficios en los mismos. Un aspecto crucial de los modelos *EGDE* es que requieren especificar el conocimiento del que disponen los agentes sobre valores futuros de variables que no están bajo su control, por ejemplo, los precios de los bienes que adquieren.

Los modelos *EGDE* pueden ser clasificados en dos principales categorías. La primera corresponde a los modelos de ciclo real de negocios, o *RBC* por sus siglas en inglés, y tienen por característica principal la suposición de que la economía opera bajo competencia perfecta. La consecuencia es que los ciclos económicos son el resultado de ajustes óptimos de la economía ante choques principalmente tecnológicos. Por tanto, las políticas fiscales y monetarias no juegan un papel relevante en la estabilización de la economía. Por otra parte, los modelos *EGDE* que incorporan competencia imperfecta se denominan no-keynesianos (*NK*), y permiten desarrollar modelos de desempleo y de los ciclos económicos como consecuencia de choques de demanda, mismos que pueden ser estabilizados y contrarrestados por la intervención de la autoridad económica.

Como Suescún and Steiner (2017) explican:

Un método que se desprende naturalmente de la estructura estocástica de los modelos EGDE es la estimación de máxima verosimilitud a partir de series de tiempo observadas. Sin embargo, este enfoque resulta altamente restrictivo en la medida que requiere especificar detalladamente las distribuciones de probabilidad que requieren los choques aleatorios del modelo. Esta inflexibilidad motivó el desarrollo del método generalizado de momentos (GMM, por sus siglas en inglés) introducido por Hansen en 1982 y ampliamente utilizado hasta el día de hoy, que no requiere una especificación completa de las distribuciones de los choques aleatorios. Más recientemente, con el avance del poder de los computadores, han sido utilizados métodos de estadística bayesiana (en particular, los métodos basados en cadenas de Markov de Monte Carlo) para obtener distribuciones de probabilidad sobre los valores creíbles de los parámetros del

modelo (p.16).

En general los modelos macroeconómicos se centran en los efectos de distintas perturbaciones, es decir, estudian como las principales variables macroeconómicas se comportan con el tiempo ante cambios o alteraciones en las variables de política económica, lo que se conoce como *análisis impulso-respuesta*.

El empleo de este tipo de análisis tiene su motivación principal en que las variables económicas se mueven a velocidades muy diferentes; de tal forma que ante una perturbación, la respuesta de la economía no es instantánea.

Lo anterior da pie a la existencia de respuestas complejas consecuencia de relaciones positivas o negativas de las variables macroeconómicas involucradas (Torres, 2012).

Wickens (2012) pone a prueba la precisión de los modelos *EGDE*, tomando en cuenta que estos ni el análisis clásico de series de tiempo lograron predecir la recesión iniciada en 2007, y que igualmente los pronósticos futuros llevados a cabo con dicha metodología entregó pobres resultados.

Encontramos que los pronósticos de los modelos EGDE no son más precisos que los pronósticos oficiales de los modelos de series de tiempo, pero tampoco son peores. También encontramos que los tres tipos de pronósticos no pudieron predecir la recesión que comenzó en 2007 y continuaron pronosticando mal incluso después de que se sabía que la recesión había iniciado. Investigamos por qué se dan estos resultados al examinar la estructura de la solución de los modelos EGDE y se compararon con los modelos de series temporales puras. Mostramos que el factor principal es la estructura dinámica de los modelos EGDE. Su dinámica retroactiva le da una estructura de pronóstico similar a

los modelos de series de tiempo y su dinámica proactiva, que consiste en valores esperados de variables exógenas, es difícil de pronosticar con precisión. Como resultado, sugerimos que los modelos EGDE no se deben probar a través de su capacidad de pronóstico (Wickens, 2012, p.211).

1.6 Análisis de series de tiempo con enfoque espectral

Mientras que los métodos para el análisis de series temporales toman el tiempo como variable independiente (*dominio del tiempo*), existe otro enfoque poderoso que consiste en el análisis de los datos asumiendo como variable independiente la frecuencia (*dominio de la frecuencia*); donde la *transformada de Fourier* tiene un papel fundamental.

El análisis de Fourier tiene sus fundamentos en la descomposición de una serie o función de tiempo en componentes individuales de comportamiento periódico; cada una tiene características claramente definidas, como son la intensidad de su efecto, periodicidad y fase.

En las áreas de ingeniería es una herramienta utilizada cotidianamente, sin embargo, a diferencia del área económica, suele disponer de una gran cantidad de datos o es empleada con información no estocástica, al contrario de las series de tiempo económicas que tienen fuertes componentes aleatorias y los datos disponibles, en la mayoría de los casos, son menores a un centenar.

Una serie de tiempo, al ser discreta por definición, no puede ser procesada por la *transformada de Fourier* en su forma natural, sino que debe usarse lo que se conoce como la *transformada discreta de Fourier* enfocada en el procesamiento de funciones o series discretas en el tiempo, sin embargo, a diferencia de la *transformada de Fourier* aplicada a funciones continuas, el vector de fases se pierde, es decir, no se dispone de la información que indica el

preciso momento inicia el periodo de cada componente periódica.

Por lo anterior, es común que el *análisis de Fourier* se use para determinar la duración de los ciclos presentes en una economía, pero no para indicar el momento de su inicio o finalización, es decir, normalmente no se emplea para la elaboración de pronósticos.

Capítulo II

MARCO TEÓRICO

2.1 Análisis de Fourier

Joseph Fourier (1768-1830) estudió la representación de funciones como la superposición de funciones trigonométricas básicas, demostrando que cualquier función periódica puede ser representada por la sumatoria de componentes senoidales (senos y/o cosenos) de diferentes frecuencias, cada una de las cuales se denomina armónica, a dicha representación se le conoce como *Series de Fourier*.

El análisis de Fourier también permite encontrar las frecuencias de las funciones componentes o armónicas mediante lo que se denomina *Transformada de Fourier*, dicha herramienta matemática transforma la función para intercambiar de dominios, es decir, permite representar una función del dominio del tiempo en el dominio de la frecuencia donde ciertos cálculos matemáticos son más fáciles de llevar a cabo y ciertas características matemáticamente más fáciles de determinar.

2.1.1 Series de Fourier

Una función periódica $f(t)$ de período T , puede ser representada por la serie trigonométrica:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + \dots + a_1\sin(\omega_0 t) + a_2\sin(2\omega_0 t) + \dots$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n\cos(n\omega_0 t) + a_n\sin(n\omega_0 t)) \quad (2.1)$$

donde:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

La serie 2.1 se conoce como la *serie trigonométrica de Fourier*, misma que puede ser representada de la siguiente manera:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n (a_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)) \quad (2.2)$$

La componente senoidal de frecuencia $\omega_n = n\omega_0$ se denomina la *enésima armónica* de la función periódica. La primera armónica es conocida como la *componente fundamental* porque tiene el mismo periodo de la función ($\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$) y se le refiere como la *frecuencia angular fundamental*; los coeficientes C_n y los ángulos θ_n se conocen como *amplitudes de armónicas* y *ángulos de fase*, respectivamente.

La *serie trigonométrica de Fourier* 2.1 queda expresada en términos de senos y cosenos de distintas frecuencias que, como se verá, son funciones ortogonales entre sí.

El concepto de originalidad parte del hecho de que matemáticamente una función es considerada la generalización de un vector, en cuyo caso dos vectores son ortogonales o perpendiculares si su producto interno es cero. El producto interno de dos funciones f_1 y f_2 en un intervalo $[a, b]$ será el resultado de la siguiente operación:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$$

Las funciones f_1 y f_2 son ortogonales en el intervalo $[a, b]$ si

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0$$

Mediante el cálculo elemental se puede demostrar que para todo valor de m y n siendo

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}:$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sen}(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (2.3)$$

Es decir, las funciones $\text{sen}(m\omega_0 t)$ y $\cos(m\omega_0 t)$ son ortogonales entre si.³

Empleando este resultado se pueden evaluar los coeficientes de la serie de Fourier expresados en 2.1, obteniendo:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Sin ser necesario que el intervalo de integración sea simétrico alrededor del origen, solo siendo requisito que para la integral se tome un periodo completo.⁴

La importancia de la *serie de Fourier* 2.1 es que una función periódica puede ser descompuesta en términos de infinitas funciones periódicas básicas (senos y/o cosenos) cuyas frecuencias son múltiplos de la señal original (armónicas); pero para términos prácticos el número de armónicas debe ser finito, siendo demostrable que para dicha finalidad una función periódica $f(t)$ puede ser aproximada mediante una *serie finita de Fourier* $q(t)$.

$$q(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

de tal forma que $f(t)$ se aproxima a $q(t)$, es decir:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) + \epsilon_k(t)$$

$$\epsilon_k(t) = f(t) - q(t)$$

³La demostración se puede consultar en (Hsu, 1998, p.5).

⁴La demostración se puede consultar en (Hsu, 1998, p.7).

Las condiciones que una función $f(t)$ debe acreditar para poder ser representada mediante *series finitas de Fourier* son conocidas como las *condiciones de Dirichlet*, enunciadas a continuación.

La función $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un período.

La función $f(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un período.

La integral del valor absoluto $f(t)$ en un período es finita.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty$$

Cuando una función cumple con las primeras dos condiciones se dice que es *continua a tramos* en el intervalo finito definido.

Para el cálculo de las series de Fourier es relevante la simetría de las funciones senoidales, las cuales pueden ser identificadas a partir de su paridad. Una función $f(t)$ es impar, si:

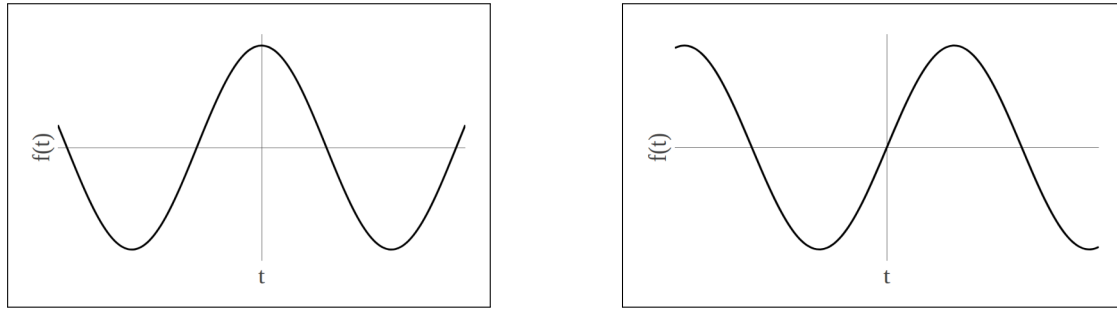
$$f(t) = f(-t)$$

y se considera impar si:

$$-f(t) = f(-t)$$

Se puede observar que, una función *par* presenta simetría respecto al eje de las ordenadas; mientras que, una función *impar* presenta simetría rotacional de 180 grados, así la función coseno es *par* mientras que la función seno es *impar*.

El uso de estas propiedades de simetría puede facilitar el cálculo de las *series de Fourier* ya que una función periódica *par* puede ser expresada sólo en términos de cosenos y una función periódica *impar* puede ser expresada sólo en términos de senos, esto es:



(a) función par

(b) función impar

Figura 2: Funciones pares e impares.

Si $f(t)$ es una función periódica *par* de período T , entonces.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \quad (2.4)$$

Siendo

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(T) \cos(n\omega_0 t)$$

Mientras que si $f(t)$ es una función periódica *impar* de período T , entonces.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (2.5)$$

Siendo

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(T) \sin(n\omega_0 t)$$

Y mediante el uso de estas propiedades de simetría es posible demostrar que para una función $f(t)$ no periódica, definida en un intervalo finito $(0, L)$, se puede desarrollar en una *serie de Fourier* con cualquier frecuencia fundamental ω_0 deseada; además $f(t)$ se puede representar en términos de senos o cosenos solamente, como las series 2.4 y 2.5 (Hsu, 1998, p.8).

2.1.2 Forma compleja de las series de Fourier

Un número complejo z es un par ordenado de números reales (x, y) , al valor x se le denomina *parte real* y al valor y *parte imaginaria*. Estos números complejos pueden representarse entre paréntesis, cómo se ha acaba de hacer, o de la *forma binómica*:

$$z = x + iy$$

Siendo $i = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria.⁵

Mientras que los números reales pueden ser ubicados a lo largo de una recta numérica unidimensional, los números complejos pueden ser vectorialmente ubicados dentro de un plano bidimensional, siendo la parte real representada por el eje de las abscisas y la parte imaginaria por el eje de las ordenadas; de esta manera, se da paso a la *representación polar* de las componentes de un número complejo, obteniendo:

$$x = r \cos\phi$$

$$y = r \sin\phi$$

Donde r corresponde al módulo del número complejo z y ϕ a su argumento.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Unificando la representación *polar* y *binómica* se obtiene la *forma trigonométrica* del número complejo z con módulo r y argumento ϕ .

$$z = r (\cos\phi + i \sin\phi)$$

⁵Dependiendo del campo de estudio se puede emplear i o j como el número complejo unitario, en el presente documento se emplea la letra i .

Mediante *series de Taylor* se puede demostrar que:

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}) \\ \sin\phi &= \frac{1}{2i}(e^\phi - e^{-\phi})\end{aligned}$$

De donde se desprende la conocida *identidad de Euler*:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi \quad (2.6)$$

Por lo que, realizando las sustituciones correspondientes en las *series de Fourier* de la expresión 2.1, se obtiene:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega_0 t} + c_{-n} e^{-in\omega_0 t})$$

Siendo $c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$.

Simplificando:⁶

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (2.7)$$

Expresión que se denomina *serie compleja de Fourier* de $f(t)$.

Los coeficientes c_n se pueden evaluar en términos de a_n y b_n obtenidos en 2.4 y 2.5.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Quedando el módulo de c_n :

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Y el argumento o fase:

$$\phi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

para todos los valores de n , excepto $n = 0$, en cuyo caso:

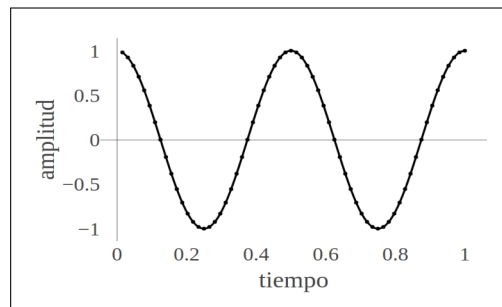
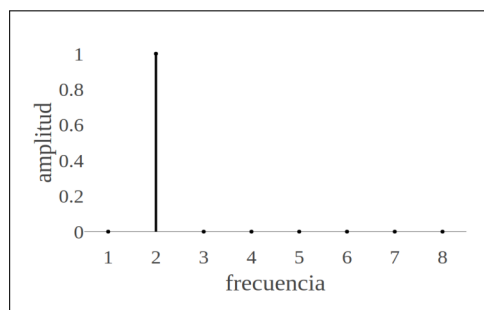
$$c_0 = \frac{1}{2}a_0$$

⁶Se puede consultar el desarrollo matemático completo en (Hsu, 1998, p.52).

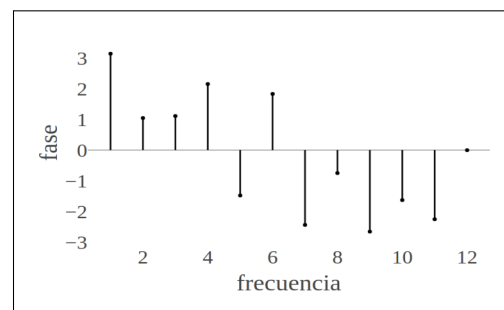
2.1.3 Transformada de Fourier y espectro de frecuencia

La gráfica del módulo de los coeficientes c_n de la *serie compleja de Fourier* 2.7, versus la *frecuencia* ω , se denomina *espectro de amplitud* de la función $f(t)$. Mientras que, la gráfica de los *ángulos de fase* ϕ_n se denomina *espectro de fase* de $f(t)$. Puesto que n toma sólo valores enteros, los *espectros de amplitud y fase* son funciones discretas para múltiplos de variable ω_0 y se le conoce como *espectro de frecuencia discreta*, como se puede ver en la Figura 3.

El *espectro de frecuencias o descomposición espectral de frecuencias* puede aplicarse a cualquier concepto asociado con periodicidad o movimientos ondulatorios. Pero la generalización de este concepto se puede hacer extensivas a funciones no periódicas mediante ciertas consideraciones y cálculos matemáticos.

(a) función $f(t)$ 

(b) espectro de amplitud



(c) espectro de fase

Figura 3: descomposición espectral de una función $f(t)$.

Si $f(t)$ es una función periódica con periodo T ; cuando T se acerca a ∞ , $f(t)$ se convierte en una función no periódica y matemáticamente es demostrable que en el límite $T \rightarrow \infty$, $\omega_0 = \Delta\omega \rightarrow 0$ y la *serie compleja de Fourier* 2.7 se convierte en:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega t} d\omega \quad (2.8)$$

Si se define:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.9)$$

La expresión 2.8 se convierte en:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.10)$$

La expresión $F(\omega)$ transforma la función $f(t)$ del dominio del tiempo a su función equivalente en el dominio de la frecuencia, y 2.1.3 invierte el proceso. De ahí, que la expresión 2.11 se conoce como la *transformada de Fourier* de $f(t)$ y se representa de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.11)$$

De forma análoga la expresión 2.1.3 se conoce como la *transformada inversa de Fourier* y se representa:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

La condición necesaria, pero no suficiente, para que exista $\mathcal{F}[f(t)]$ está dada por: (Hsu, 1998, p.74)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

La función $F(\omega)$ es en general compleja, por lo que se puede representar de la siguiente manera:

$$F(\omega) = R(\omega) + i X(\omega)$$

donde $|F(\omega)|$ se denomina *espectro de magnitud* de $f(t)$ y $\phi(\omega)$, *espectro de fase* de $f(t)$, siendo demostrable que: ⁷

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Empleando la *identidad de Euler* 2.6 es fácilmente observable que, si la *transformada de Fourier* de una función real $f(t)$ es real, entonces $f(t)$ es una función par de t , es decir, se puede representar a partir de funciones periódicas básicas pares (cosenos); y que si la *transformada de Fourier* de una función real $f(t)$ es imaginaria pura, entonces $f(t)$ es una función impar de t , es decir, se puede representar a partir de funciones periódicas básicas impares (senos).

2.1.4 Transformada discreta de Fourier

La *DFT* por sus siglas en inglés "*Discrete Fourier Transform*" es la generalización de la *transformada de Fourier* 2.11 para funciones discretas f_k

$$DFT = \hat{f}_k = \sum_{k=0}^{N-1} f_n e^{\frac{-i\omega k}{N}} \quad (2.12)$$

Para la función discreta $f_k \equiv f(t_k)$ donde $t_k = \Delta k$ para $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Análogamente la *transformada inversa de Fourier discreta* quedará especificada de la siguiente manera:

$$IDFT = f_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}_k e^{\frac{i\omega n}{N}} \quad (2.13)$$

⁷La demostración se puede consultar en (Hsu, 1998, p.75).

La *DFT* es de gran utilidad ya que permite trabajar con funciones o señales digitalizadas y encontrar componentes periódicas y su predominancia en la composición de estas. Cabe mencionar que la *DFT* y no la *CFT* "*Transformada Continua de Fourier*" 2.11 se emplea cuando se trabaja con sistemas de cómputo, ya que estos siempre emplearán funciones o señales digitalizadas que por definición son discretas.

De esta manera, cuando una función continua en el tiempo debe ser digitalizada, se lleva a cabo un procedimiento conocido como muestreo, que consiste en tomar los valores de la función para cada período de muestreo T_m , y aunque existe un tipo de *Transformada de Fourier* que estudia el caso de funciones o señales aperiódicamente discretas, normalmente los sistemas de cómputo trabajarán con el tipo de funciones o señales muestreadas a intervalos regulares de tiempo Δt .

En esta sección se ha usado el término de "*señal*", concepto que se emplea para identificar la variación a través del tiempo en la medición de intensidad de un fenómeno físico; "Desde el punto de vista matemático una señal es una función de una o varias variables cuyo dominio de definición puede ser un continuo o una cantidad finita de puntos" (Hernández, 2006).

Para sistemas digitales, el conocido *Teorema de Nyquist* calcula el intervalo regular de tiempo Δt , al que debe ser muestreada una señal de tal manera que se pueda reconstruir sin error, dicho teorema demuestra que la frecuencia de muestreo debe ser como mínimo el doble de la máxima frecuencia contenida en la señal a muestrear. En la mayoría de los casos, el muestreo se lleva a cabo desde la recopilación de los datos y no a posteriori.

2.1.5 Transformada Rápida de Fourier

El cálculo de la *transformada de Fourier* a partir de la definición 2.12 implica la realización de $2N^2$ operaciones matemáticas (N^2 multiplicaciones y N^2 sumas), lo cual requería, hasta hace algunas décadas, el uso significativo de tiempo y recursos de cómputo, motivo por el cual, a lo largo de las últimas décadas se han buscado métodos que reduzcan la cantidad de operaciones, siendo el algoritmo de *Cooley-Tukey* el más común, este algoritmo desarrollado en la década de los sesentas, se basa en el *Lema de Danielson-Lanczos* que propone dividir recursivamente en dos grupos el número de valores, hasta llegar el nivel de dos muestras sobre las cuales realizar la transformada, lo cual implica que la cantidad de datos a analizar deben ser potencias de dos para tener máxima certeza en los resultados.⁸

El método antes mencionado se conoce como *FFT*, por sus siglas en inglés *Fast Fourier Transform*, y requiere la realización de $N \log_2 N$ operaciones matemáticas, que son aproximadamente, cincuenta veces menos que las requeridas para el cálculo de la *DFT* a partir de su definición; y aunque hoy en día la capacidad de cómputo es mucho mayor, la *FFT* es extensamente empleada ya que los sistemas computacionales, al ser binarios, trabajarán normalmente de forma nativa con cantidades de datos en potencias de dos, también para procesos que generan grandes cantidades de datos la *FFT* sigue teniendo ventajas significativas.

Tomando en cuenta que la *DFT* es muy fácil de programar, no es de extrañar que los programas de análisis matemáticos, como *Matlab* o *R*, sólo tengan implementada la *transformada Rápida de Fourier*, aunque pueden diferir en el algoritmo empleado para su cálculo.

⁸El desarrollo matemático para la obtención de la *FFT* se puede encontrar en (Smith, 1999, p.225).

2.2 Estimación espectral por métodos no paramétricos

La energía para señales finitas en el tiempo se define como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

El valor absoluto indica que la energía no es el área bajo la curva, ya que puede tener intervalos con signo negativo que podrían contrarrestar los intervalos con signo positivo anulando o contrarrestando la media. Para una señal discreta la energía quedaría definida de la siguiente manera:

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]|^2$$

Si en una función continua de tiempo no es finita o la amplitud no tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito, la energía de la señal sería infinita, por lo que para señales periódicas, una mejor medida sería el promedio de energía a lo largo de un periodo T , así la definición de potencia sería:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Sustituyendo la *serie compleja de Fourier* 2.7, se obtiene:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Que es la suma de los cuadrados de los coeficientes de la *serie compleja de Fourier*, obteniendo un tren de pulsos de distinta magnitud a ambos lados del eje de ordenadas, teniendo en cuenta que las frecuencias negativas tienen poco significado, el espectro de potencia puede representarse empleando sólo los armónicos de frecuencias positivas y nula.

La *estimación espectral de potencia* de una señal aleatoria no es tan simple de obtener, en este caso, los métodos no paramétricos proporcionan una alternativa efectiva para analizar

las componentes frecuenciales de una función no determinista con base en un conjunto finito de observaciones, aunque una importante limitación es que la estimación del *espectro de potencia* se basa en una secuencia de autocorrelación por ventanas, lo que provoca que sean sesgados.

Como características fundamentales de los estimadores no paramétricos o clásicos, se puede mencionar que son sesgados, aunque asintóticamente insesgados, e inconsistentes (Ríos, 2005).

2.2.1 Periodograma

El *periodograma* es un método no paramétrico para la estimación de la *densidad espectral de potencia* (*PSD*, por sus siglas en inglés) de una señal aleatoria, y se basa en el teorema de representación espectral de *Wiener-Khinchin*, que establece que la función de autocovarianza y la función de *PSD* son *transformadas de Fourier* una de la otra.

$$S(\omega) = \mathcal{F}[R(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Siendo $\omega = 2\pi f$ la frecuencia angular.

Para tiempo continuo, el teorema de *Wiener-Khinchin* dice que si $x(t)$ es un proceso estacionario en sentido amplio (*WSS*), su *función de autocorrelación* también conocida como *autocovarianza* queda definida por el valor esperado estadístico.

$$R(\tau) = E[x(t)^* x(t - \tau)] \quad (2.14)$$

Para el caso discreto, se tiene:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{-i\omega k}$$

⁸Un proceso es estacionario en sentido amplio si es estable en media y autocovarianza a lo largo del tiempo.

Dicha expresión se conoce como *periodograma*, que aunque su nombre no lo denota, estima una función de frecuencias.

Desafortunadamente, para señales no deterministas la expresión antes mencionada no puede ser aplicada de forma inmediata; de hecho, la función de autocorrelación 2.14 no se puede conocer, y por consecuencia no se puede calcular la *transformada de Fourier*.

Por lo anterior, es necesario recurrir a métodos no paramétricos para la estimación del periodograma, en cuyo caso, la estimación del *PSD* quedará determinada por la siguiente expresión.⁹

$$S(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\omega nk/N} \right|^2 \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.15)$$

Para N cantidad de datos y frecuencias $f_k = k/N$

Su gran inconveniente, es que al contar una cantidad finita y limitada de datos, cada componente frecuencial produce lóbulos secundarios, y la estimación resultante contará con una considerable cantidad de ruido; situación que no mejora a pesar de usar muestras de tamaño cada vez más grandes.

Existen otros métodos que con el uso de ventanas temporales y a cambio de perder resolución, a medida que el tamaño de la muestra aumenta, mejora parcialmente el efecto de los lóbulos secundarios y la cantidad de ruido resultante, tal es el caso del *periodograma de Bartlett* o el de *Welch*.

2.2.2 Periodograma de Bartlett

A partir de 1953, *M.S. Bartlett* inició el estudio de la promediación de los periodogramas para estimar los espectros de potencia de una señal. El método que él propuso para reducir

⁹El desarrollo matemático se puede encontrar en (Proakis and Manolakis, 1999, c.14).

la varianza en el periodograma consiste en tres pasos.

1. El segmento original de N muestra se divide en K segmentos no solapados de longitud M , obteniendo así K segmentos de datos.

$$x_j(n) = x(n + jM) \quad \begin{array}{l} j = 0, 1, \dots, K - 1 \\ n = 0, 1, \dots, M - 1 \end{array}$$

2. Para cada segmento se calcula el periodograma 2.15

$$S_j^b(\omega) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_j(n) e^{-i\omega nk} \right|^2 \quad j = 0, 1, \dots, K - 1$$

3. Se promedian los periodogramas para los K segmentos para obtener la DEF estimada de Bartlett.¹⁰

$$S^B(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} S_j(\omega)$$

El efecto de reducir la longitud de datos de N a $M = N/K$ da lugar a una ventana cuya anchura espectral se ha incrementado en un factor de K . En consecuencia, la resolución en frecuencia se ha reducido en un factor K (Proakis and Manolakis, 1999).

Sin profundizar en la demostración, "la varianza será inversamente proporcional al número de periodogramas promediados y a medida que se incrementa, la varianza tiende a cero. Por lo tanto, la promediación de los periodogramas podría producir un estimado del espectro de potencia real asintóticamente insesgado" (Proakis and Manolakis, 1999).

Hasta este momento para el cálculo del periodograma se ha empleado la ventana rectangular y no se han efectuado solapamiento de los segmentos. Fue hasta 1967 que *Peter D. Welch* demostraría que, usando otro tipo de ventana, aunado al solapamiento de los segmentos, la varianza se reduce casi por un factor de dos, obteniendo la máxima reducción cuando el solapamiento corresponde a la mitad del segmento (Báez, 2008).

¹⁰El desarrollo matemático se puede encontrar en (Proakis and Manolakis, 1999, c.14).

2.2.3 Periodograma de Welch

El método de *Peter D. Welch* realiza dos modificaciones básicas al método de *Bartlett*. En primera instancia emplea el solapamiento de segmentos, efecto conocido como *overlap* y que para un segmento original de N muestras puede representarse de la siguiente manera:

$$x_j(n) = x(n + jD) \quad \begin{array}{l} j = 0, 1, \dots, L - 1 \\ n = 0, 1, \dots, M - 1 \end{array}$$

Siendo jD el punto de partida de la secuencia j .

El solapamiento entre dos secuencias consecutivas $x_j(n)$ y $x_{j+1}(n)$ es de $L - D$ puntos, y si las K secuencias cubren una longitud de N puntos entonces:

$$N = L + D(K - 1)$$

Si no se diera solapamiento entre las secciones ($D = M$); se obtendrían $K = N/M$ secciones de longitud M , como en el caso del método de *Bartlett*; sin embargo, si $D = M/2$, existirá un 50% de solapamiento entre segmentos consecutivos de datos, el número K de secciones de longitud M será:

$$K = \frac{2N}{M} - 1$$

De esta manera, si bien la longitud de la secuencia no varía respecto al método *Bartlett*, se consigue que al doblar en número de periodogramas modificados que van a ser promediados, se vea reducida. Con un solapamiento del 50% también se pueden formar K secuencias de longitud $2M$, donde k es:

$$K = \frac{N}{M} - 1$$

Es importante notar que si $D = M$, los segmentos no se solapan y el número L de segmentos es igual al número K ; en el método de *Bartlett*, sin embargo, si $D = M/2$,

existe un 50% de solapamiento entre segmentos de datos consecutivos y se obtienen $L = 2K$ segmentos. Alternativamente, se pueden formar K segmentos de datos de longitud $2M$ cada uno.¹¹

La segunda modificación llevada a cabo por *Welch* para el método *Bartlett* consiste en inventanar cada segmento de datos $x_j(n)$ con una ventana general $W(n)$ (no necesariamente rectangular) previo al cálculo del periodograma. Así el periodograma modificado de *Wichert&Fokianos* quedaría expresado de la como a continuación se muestra:

$$S_j^m(\omega) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_j(n)W(n) e^{-i\omega n} \right|^2 \quad j = 0, 1, \dots, K - 1$$

Donde U es un factor de normalización para la potencia de la función de ventana $W(n)$

$$U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} W^2(n)$$

El estimado del espectro de potencia de *Welch* es la media de estos periodogramas modificados:¹²

$$S^W(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} S_j^m(\omega)$$

Como Báez (2008) explica, el problema del estimador de *Welch* es que al reducir la estimación del espectro de N a M muestras, el sesgo aumenta. Para reducir el sesgo hay que aumentar el valor de M tanto como sea posible. Una forma de aumentar M es solapar las tramas; sin embargo, el solapamiento excesivo provoca que los periodogramas de cada trama dejen de ser independientes entre sí, condición necesaria para la reducción de la varianza. Como solución, se puede permitir un solape de hasta $M/2$ muestras. Así el estimador de *Welch* reduce la varianza a costa de aumentar el sesgo. Aún así, el estimados de *Welch*

¹¹El desarrollo matemático se puede encontrar en (Ríos, 2005, c.2).

¹²El desarrollo matemático se puede encontrar en (Proakis and Manolakis, 1999, c.14).

es asintóticamente insesgado y consistente, pues si N tiende a infinito, también K tiende a infinito y la varianza del estimador *Welch* tiende a cero, definición de estimador consistente.

2.2.4 Método de Wichert & Fokianos

Cuando se obtiene el periodograma de una señal por alguno de los métodos previamente vistos, estos mostrarán valores muy elevados de potencia en las componentes frecuenciales más bajas, en comparación con las de frecuencia más altas. Estos valores elevados de potencia provocan "fugas" hacia las frecuencias aledañas, por lo que resulta conveniente desechar algunos de dichos componentes, para lo cual se han desarrollado múltiples métodos (Báez, 2008).

En el año 2004, Sofia Wichert, Konstantinos Fokianos y Korbinian Strimmer de la Universidad de Munich desarrollaron un método para identificar periodicidades en presencia de "microarrays"¹³ en series temporales de datos para estudios biológicos-genéticos. Ellos desarrollaron un método estadístico para la detección de señales y selección de genes con base a series de datos temporales.

Introducimos dos métodos estadísticos simples pero eficientes para la detección de señales y la selección de genes en datos de series de tiempo de expresión génica. Primero, sugerimos el periodograma promedio como un dispositivo exploratorio para la evaluación gráfica de la presencia de transcripciones periódicas en los datos. En segundo lugar, describimos una prueba estadística exacta para identificar genes expresados periódicamente que permiten distinguir los procesos periódicos de los puramente aleatorios. Este método de identificación

¹³"DNA microarray" es una colección de fragmentos de ADN.

se basa en el llamado estadístico g y utiliza el enfoque de tasa de descubrimiento falso para múltiples pruebas (Wichert and Fokianos, 2004, p.5).

La metodología que propusieron consiste en los siguientes cuatro pasos:

1. Usando el promediado de periodogramas, se verifica la existencia de componentes frecuenciales.
2. Para cada serie de tiempo se calcula el *estadístico de Fisher*.
3. Para cada uno de los estadísticos de prueba, calcular su correspondiente *p – value*.
4. Se identifican los casos para los cuales la hipótesis nula es rechazada, ya que, estas serán las componentes estadísticamente significativas en el periodograma.

La mayoría de las teorías establecidas para análisis de series de tiempo deben lidiar con resultados asintóticos bajo la presunción Gaussiana. Sin embargo, hay un estimado previo por parte de Fisher (1929) que es válido también para muestras finitas, proponiendo una prueba exacta del periodograma máximo mediante el estadístico g (Wichert and Fokianos, 2004).

$$g = \frac{\max_k S(\omega_k)}{\sum_{k=1}^{N/2} S(\omega_k)}$$

Como Wichert y Fokianos (2004) mencionan, valores elevados de g conllevarán al rechazo de la hipótesis nula de procesos puramente aleatorios (p. 7).

El método propuesto resulta en un periodograma con menos ruido, donde la *PSD* indica la correlación de cada armónica con la señal temporal. Es importante no perder de vista que este método está enfocado en series temporales de pocos datos para los cuales entrega los mejores resultados, para series con un amplio número de muestras, otros métodos como el de *Welch* o *Bartlett* pueden ser mejores alternativas.¹⁴

¹⁴Los algoritmos se encuentran disponibles en el paquete *GeneTS* del software *R*.

2.3 Interpretación de la densidad espectral de potencia de series estacionarias

La frecuencia de una señal $x(t)$ se mide en Hertz [Hz] y se define como el inverso de la duración de su periodo T normalmente medido en segundos (seg), de tal forma que 1 [Hz] corresponde a la frecuencia de una señal $x(t)$ cuyo periodo es de 1 [seg].

En el caso de procesamiento de señales es muy común referirse a las frecuencias hertzianas empleando los prefijos propuestos por el sistema internacional de unidades, como se indica en la tabla 1, por ejemplo, una señal de que se repite a razón de mil periodos por segundo tendrá una frecuencia de 1 [kHz].

Tabla 1: *Prefijos de unidades del sistema internacional.*

Valor	Prefijo	Símbolo
1, 000, 000, 000, 000 = 10^{12}	tera	T
1, 000, 000, 000 = 10^9	giga	G
1, 000, 000 = 10^6	mega	M
1, 000 = 10^3	kilo	k
1, 000 = 10^{-3}	mili	m
1, 000, 000 = 10^{-6}	micro	μ
1, 000, 000, 000 = 10^{-9}	nano	n
1, 000, 000, 000, 000 = 10^{-12}	pico	p

Sin embargo, para *series temporales estacionarias*, es habitual normalizar la frecuencia de manera que su frecuencia fundamental f_0 corresponda a 1 [Hz], esto tiene principal sentido

para series temporales con frecuencias muy bajas, por ejemplo, para una serie de datos en una ventana de tiempo anual, el periodo sería $T_0 = 31,536,000$ [seg] es decir, la frecuencia fundamental corresponde a $f_0 = 1/T = 3.17 \times 10^{-8} = 0.317$ [nHz], que resulta poco práctico para llevar a cabo un análisis matemático y/o estadístico.

La forma más recurrente de normalizar la frecuencia de una serie temporal estacionaria es establecer T_0 a la misma duración de la serie de datos, de esta manera, sin importar el intervalo temporal de la serie, su frecuencia fundamental f_0 quedará normalizada a 1 [Hz].

No obstante, a lo largo de este documento para todas las expresiones se ha empleado la frecuencia angular que se representa por la letra ω con unidades de [rad/seg] (radianes por segundo); la relación entre la frecuencia angular y hertziana es:

$$\omega = 2\pi f \quad (2.16)$$

Los periodogramas generados por los métodos de *DFT*, *FFT*, *Bartlett* y *Wichert* generarán la mitad de armónicos que la cantidad de muestras n en la serie de tiempo (debido al teorema de *Nyquist*)¹⁵, así si la serie está normalizada, la escala de frecuencias irá de 0[Hz] a $n/2$ [Hz].

2.3.1 Comparativo de periodogramas

En la figura 4 se puede ver el resultado de aplicar los distintos métodos estudiados a una función temporal que se puede visualizar en el subgráfico (a). La función elegida para ejemplificar corresponde a:

$$f(t) = 2\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(8\pi)$$

¹⁵El teorema de *Nyquist* establece que, para poder reconstruir una señal a partir de sus componentes armónicos, la frecuencia de muestreo debe ser el doble de la frecuencia del armónico más alto.

Se puede ver con claridad que $f(t)$ consta de dos componentes de frecuencia angular $\omega_1 = 2\pi$ y $\omega_2 = 8\pi$, de la relación 2.16 se puede fácilmente obtener que las frecuencias hertzianas serán $f_1 = 1[Hz]$ y $f_2 = 4[Hz]$; en el caso de la componente f_1 se tiene además un desfase de $\pi/2[rad]$.

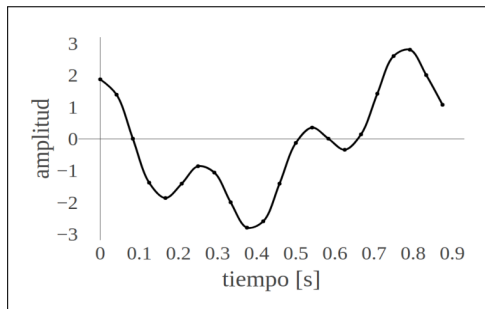
La función fue muestreada durante 3 segundos a una frecuencia de 24 muestras por segundo ($\frac{1}{24}[Hz]$) de las cuales fueron tomadas sólo las primeras 22, equivalente a 0.92 segundos (92% de un periodo), es decir se omite intencionalmente parte de la información para comprobar la efectividad de cálculo de cada periodograma.

Los subgráficos (b) y (c) muestran los resultados de aplicar la *transformada discreta de Fourier* y la *transformada rápida de Fourier* respectivamente, donde se puede apreciar que los resultados son esencialmente los mismos, aunque vale la pena destacar, que no se está haciendo el comparativo del espectro de fases donde las diferencias pueden ser mayores.

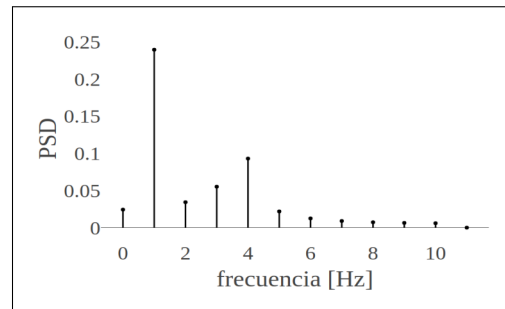
El subgráfico (d) presenta el resultado de aplicar el método de *Bartlett*, que como se había explicado, genera un periodograma suavizado, pero con mayor cantidad de ruido y armónicos.

El subgráfico (e) corresponde al periodograma de *Welch*, que como se esperaba, es muy suavizado; pero muestra un claro sesgo y prácticamente no describe la función temporal.

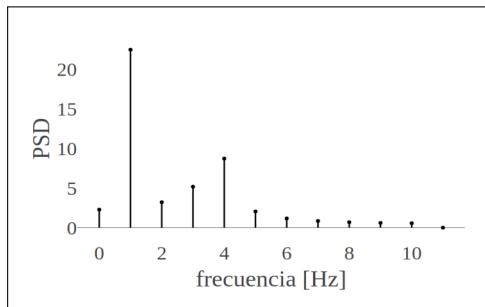
Finalmente, el subgráfico (f) muestra el periodograma resultante de aplicar el método de *Wichert*, y para el ejemplo empleado, extrae con bastante precisión las componentes frecuenciales.



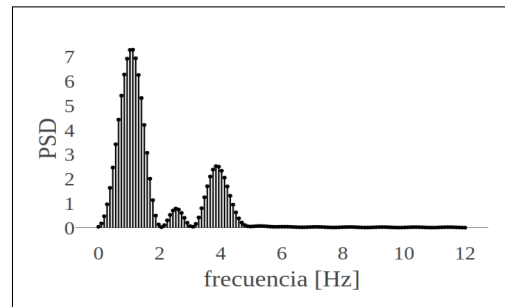
(a) función temporal compuesta



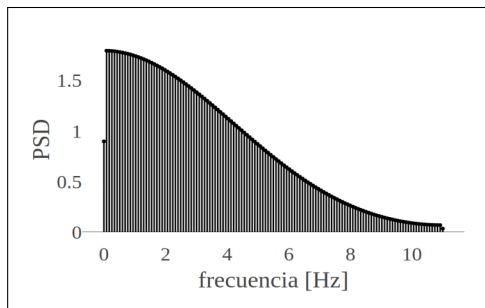
(b) transformada discreta de Fourier



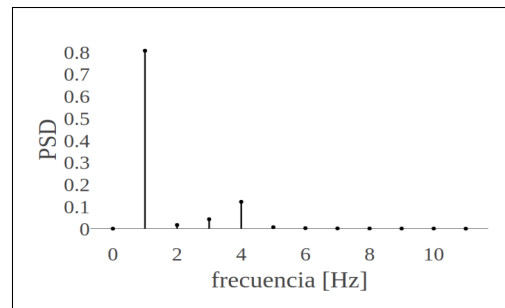
(c) transformada rápida de Fourier



(d) periodograma de Bartlett



(e) periodograma de Welch



(f) periodograma de Wichert

Figura 4: Análisis espectral.

Comparativamente, a excepción del de Welch, los periodogramas mostrados estiman con buena precisión las armónicas de la función temporal, a pesar de las pocas muestras disponibles para el análisis (independientemente del desfase de algunas de ellas); en particular, el periodograma obtenido con el método de *Wichert* presenta los mejores resul-

tados; sin perder de vista, como lo expresan los autores en su publicación (2004), que el método se enfoca en "limpiar" el periodograma promediado y ofrece los mejores resultados para series temporales con un reducido número de muestras.

Vale la pena destacar que, en los distintos métodos, la intensidad de cada componente se expresa de manera diferente, en el caso particular del periodograma de *Wichert*, se usa una escala que cuantifica correlación, es decir, en qué porcentaje cada armónico se correlaciona con la función temporal original.

2.4 Estacionariedad de series de tiempo y proceso estocásticos

Un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias $\{z_t\}$, donde t son valores de tiempo en un intervalo C , los valores observados de las variables aleatorias en los distintos instantes constituyen una serie temporal. En otras palabras, un proceso estocástico puede generar tantas series de tiempo como variables aleatorias tenga.

En el teorema de *Wiener-Khinchin* los autores demostraron que, para procesos estocásticos la obtención del periodograma es sólo posible si el proceso en sí es estacionario en sentido amplio (WSS); por lo que, antes de llevar a cabo un análisis frecuencial de una serie de tiempo o proceso estocástico es necesario asegurar su estacionariedad.

En el contexto de procesos estocásticos la estacionariedad se puede clasificar en *sentido amplio* (también conocido como estacionariedad de *sentido débil*) o de *sentido estricto*; pero hablando de series temporales, se tienen sólo las siguientes clasificaciones:

- **Estacionarias:** Las series de tiempo son estacionarias (en el sentido débil) si su media es constante y su función de autocovarianza no depende explícitamente del tiempo,

sino de la ventana temporal de cálculo. Este concepto engloba el supuesto de que la varianza debe ser constante y finita.

- **No estacionarias:** Las series no estacionarias son aquellas en las cuales la media y/o varianza cambian a lo largo del tiempo.

Las series no estacionarias pueden tener tendencia, lo que corresponde a una variación en la media a lo largo del tiempo. Pueden presentar efectos estacionales, esto es, que en ciertos periodos de tiempo el comportamiento de la serie es similar.

Una posible solución al problema descrito consiste en aplicar a la secuencia de valores que se va a someter a la *FFT*, un procedimiento que permita despojar a esta secuencia de determinados componentes de frecuencia, es decir, realizar un filtrado de la secuencia que elimine los componente que luego crearían los pronunciados valores de potencia. A dichos métodos se le conoce como *detrending* o eliminación de tendencia.

2.5 Pruebas de raíz unitaria

El llamado problema de la regresión espúrea es muy usual en series no estacionarias, este consiste en obtener resultados engañosos en pruebas estadísticas lo que puede conducir a conclusiones erróneas. De ahí la importancia de verificar la existencia de estacionariedad en la serie temporal, y en su caso, corregirla.

Para verificar la estacionariedad de una serie de tiempo, se emplean lo que se conoce como *pruebas de raíz unitaria*. Hay dos enfoques diferentes: Algunas pruebas consideran como hipótesis nula H_0 que la serie es estacionaria (prueba de *KPSS*, prueba de *Leybourne y McCabe*); y para otras, por el contrario, se considera como hipótesis nula H_0 que la serie es no estacionaria (prueba de *Dickey-Fuller*, prueba de *Phillips-Perron*).

En la práctica, la prueba de *Dickey-Fuller* es la más utilizada, la cual parte del modelo:

$$x_t = \rho x_{t-1} + u_t$$

donde $-1 \leq \rho \leq 1$

Sustrayendo x_{t-1} de ambos lados de la expresión:

$$x_{t-1} + \Delta x_t = \rho x_{t-1} + u_t$$

$$\Delta x_t = \rho x_{t-1} - x_{t-1} + u_t$$

$$\Delta x_t = (\rho - 1)x_{t-1} + u_t$$

El estadístico de prueba es t sobre la variable dependiente rezagada. Si $\rho > 1$ el coeficiente de la variable dependiente será positivo. Si ρ es igual a la unidad, $\rho - 1$ será igual a cero. En ambos casos x_t será no estacionaria.

La hipótesis nula en la prueba de *Dickey-Fuller* es: $H_0 : \rho = 1$.

La hipótesis alternativa sería entonces: $H_1 : \rho < 0$.

Lo anterior significa que, de comprobarse la hipótesis alternativa, $(\rho - 1) < 1$ indicaría un proceso estacionario.

Si $\rho = 1$ se está en el caso de raíz unitaria y se acepta la hipótesis nula que establece que x_t es no estacionaria.

2.5.1 Eliminación de componente de tendencia en series temporales no estacionarias

En el análisis clásico de las series de tiempo, se hace la suposición de que, los valores que adopta la variable observada es la consecuencia de tres componentes, cuyo efecto conjunto da como resultado los valores medidos de la serie a largo plazo (Villavicencio, 2010).

- **Componente de tendencia:** Cambio a largo plazo que se produce con relación al nivel medio, es decir, el cambio de la media a largo plazo.
- **Componente cíclica:** Es la presencia de cierta periodicidad o variación en los datos en intervalos más o menos observables de tiempo; algunos autores la dividen en *componente estacional* y *componente cíclica* para diferenciar las causas.
- **Componente aleatoria:** Corresponde a la presencia de un efecto no predecible que incide de forma aislada en una serie de tiempo.

Mientras que las primeras dos componentes son determinísticas, la tercera es aleatoria.

Para eliminar la componente de tendencia y lograr así una función estacionaria, existen varios métodos, entre los que destacan, "*primeras diferencias*", "*medias móviles*", "*Filtrado*" (Hodrick-Prescott, Baxter-King, etc.) y "*tendencia polinómica*".

El método de *primeras diferencias* consiste en eliminar el efecto no observado restando, la observación del momento t menos la observación del momento $t - 1$.

Las *medias móviles* o tendencias evolutivas asumen que la tendencia de una función cambia lentamente y que puede aproximarse a intervalos cortos por una función simple de tiempo.

Los filtrados son métodos que descomponen la serie observada en dos componentes, la tendencia y el ciclo. Un parámetro (λ para el caso del filtro *Hodrick-Prescott*) modula la suavidad de la tendencia y la elección apropiada de este parámetro depende de la longitud de los ciclos que se quieran extraer y la periodicidad de la serie de datos.

El método de *tendencia polinómica* consiste en obtener la función que mejor describe la distribución de los puntos, es decir, aquella que tiene el menor valor de varianza respecto a los valores de la serie de tiempo.

Dependiendo del problema, puede ser mejor utiliza un método u otro, pero es necesario tomar en cuenta que el empleo de filtros o de medias móviles, normalmente dificultan el recuperar la función original, es por ello que, los métodos más recurrentes en el análisis financiero suelen ser los de *primeras diferencias* o *tendencia polinómica*.

2.6 Modelos ARIMA

En los años setentas, Box y Jenkis desarrollaron una herramienta de predicción conocida como la metodología *Box – Jenkis*. Dicha metodología es un procedimiento de análisis estadístico para ajustar a una serie en tiempo que considera la dependencia entre los datos, es decir, cada obsevación es modelada en función de los valores anteriores. Los modelos se conocen con el nombre técnico de *ARIMA* (autorregresivo integrado de media móvil), que proviene de sus tres componentes *AR* (autorregresivo), *I* (integrado) y *MA* (medias móviles)

Para un modelo puramente autorregresivo (*AR*), bajo la suposición de que $\{\epsilon_t\}$ es un proceso aleatorio con media 0 y varianza σ^2 , el proceso y_t es definido de la siguiente manera:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} \dots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t \quad (2.17)$$

Se le conoce como un proceso autorregresivo de orden p y se le denota como $AR(p)$.

Para un proceso de medias móviles (*MA*), bajo la misma suposición de que $\{\epsilon_t\}$ es un proceso aleatorio con media 0 y varianza σ^2 , el proceso Y_t es definido de la siguiente manera:

$$y_t = \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q} \quad (2.18)$$

Se le conoce como un proceso de medias móviles de orden q , y se denota como $MA(q)$.

Es poco recurrente encontrar modelos que sean puramente *AR* o *MA*, normalmente las series económicas presentan ambas estructuras. A los modelos que tienen componente

autorregresiva (*AR*) y de medias móviles (*MA*), se les conoce como *ARMA* de orden (p, q) y se definen de la siguiente manera (Casas, 1999):

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q}$$

Un proceso *ARMA*($p, 0$) representa un proceso *AR*(p), de forma análoga un proceso *ARMA*($0, q$) es un proceso *MA*(q) puro.

El proceso *ARMA* más sencillo es el *ARMA*($1, 1$) y queda representado por la siguiente expresión:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1}$$

Hasta ahora los modelos de series de tiempo analizados se basan en el supuesto de que son estacionarias en sentido débil. Sin embargo, muchas series de tiempo económicas son *no estacionarias*, es decir, *integradas*.

Como se explica en secciones anteriores, existen diferentes alternativas para lograr la estacionariedad de una serie, incluyendo la eliminación de tendencia polinómica (cuando es viable) y la obtención de las primeras diferencias de la serie.

Cuando es necesario diferenciar una serie de tiempo d veces para lograr la estacionariedad, y conseguir aplicar el modelo *ARMA*(p, q), se dice que la serie de tiempo original es *ARIMA*(p, d, q), es decir, una serie de tiempo *autorregresiva integrada de medias móviles*, donde p denota en número de términos autorregresivos, d el número de veces que la serie debe ser diferenciada para lograr la estacionariedad y q el número de términos de medias móviles. Así el modelo *ARIMA*($1, 0, 1$) corresponderá igualmente al modelo *ARMA*($1, 1$).

Dado lo anterior, se puede observar que para emplear la metodología de *Box – Jenkins* se debe tener una serie de tiempo estacionaria o que sea estacionaria después de una o más

diferenciaciones (Gujarati, 2010).

La metodología de *Box – Jenkins* permite describir un valor como una función lineal de datos anteriores tomando en cuenta la componente cíclica, y se resume en cuatro fases:

1. Asegurar la estacionariedad de la serie o determinar la cantidad de veces que se debe diferenciar a fin de conseguirlo (valor de d).
2. Identificar los valores apropiados de p y q , lo que muchas veces se consigue mediante prueba y error o estimación de máxima verosimilitud.
3. Comprobar que los residuos no tienen estructura de dependencia y siguen un proceso de ruido blanco.
4. Una vez que se ha obtenido un modelo adecuado se realizan predicciones a partir del mismo.

Existen múltiples herramientas de software que realizan de forma automatizada varias fases de la metodología, tales como *Gretl*, *Matlab* o *R*, alguna de las cuales se emplea en capítulos posteriores para llevar a cabo los análisis correspondientes.

Capítulo III

MARCO METODOLÓGICO

La propuesta de la presente Tesis consiste en una metodología para el pronóstico del Producto Interno Bruto, a partir de las componentes frecuenciales detectadas, con el análisis de Fourier y el periodograma de *Wichert*, en las series de datos históricas del indicador. Dicha metodología será nombrada **Estimación por Componentes Frecuenciales (ECF)**.

El método propuesto es iterativo, es decir, requiere llevar a cabo repetidamente un procedimiento para eventualmente obtener un pronóstico final a partir de los resultados parciales de cada iteración.

Los pasos llevados a cabo por cada iteración, y que se explican detalladamente en cada sección, son los siguientes:

1. Regresión polinomial para la obtención de la tendencia de largo plazo.
2. Obtención del *PIB de corto plazo*.
3. Análisis frecuencial del *PIB de corto plazo*.
4. Modelado del *PIB de corto plazo* a partir de funciones sinusoidales.
5. Modelado del *PIB efectivo*.
6. Estimación parcial del *PIB de corto plazo*.
7. Estimación parcial del *PIB efectivo*.

Para cada iteración se incrementará en uno el número de observaciones respecto a la anterior para llevar a cabo el procedimiento matemático, acorde a los lineamientos descritos en la sección 3.8; para finalmente obtener la estimación definitiva de *PIB efectivo* y *PIB de corto plazo*, como se explica en las secciones 3.8 a 3.10.

3.1 Regresión polinomial para la obtención de la tendencia de largo plazo

El primer paso consiste en obtener una regresión polinomial de los datos de *PIB* del país en cuestión.

La regresión polinomial es una variación de la regresión lineal donde se agregan estimadores adicionales elevando cada uno de ellos a alguna potencia. Para el caso particular de una sola variable explicativa x , y es modelada como un polinomio grado n .

$$y = \alpha + \epsilon_i + \sum_{i=1}^n \beta_i x^i$$

Aunque la regresión polinomial se ajusta a los datos como un modelo no lineal, como prueba de estimación estadística sí lo es, ya que por una parte, se pueden ajustar mediante regresión lineal por mínimos cuadrados y aunque generan modelos no lineales, su ecuación conserva la estructura de una ecuación lineal.

Lo anterior es fácil de visualizar si simplemente se definen las variables explicativas $x_i \equiv x^i$, con lo que el modelo polinomial podría ser expresado como:

$$y = \alpha + \epsilon_i + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$$

Esta expresión corresponde a la definición de un modelo lineal de n variables explicativas, sin embargo, James (2013) sugiere evitar modelos polinomiales de grado tres o superiores debido al fenómeno conocido como *overfitting* que esencialmente indica un sobreajuste del ruido.

Para el método *ECF* propuesto, la tendencia de largo plazo se modela con un polinomio

de segundo grado, dando por resultado la siguiente expresión:

$$\bar{Y}_t = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2 \quad (3.19)$$

Siendo \bar{Y}_t la tendencia de largo plazo del *PIB* en función del tiempo.

El modelo polinomial obtenido para la economía mexicana con variable explicativa t (tiempo) y con datos del INEGI correspondiente a los años 1980-2018, corresponde al siguiente:

$$\bar{Y}_t = 7310642.8 + 163071.8t + 3172.316t^2 \quad (3.20)$$

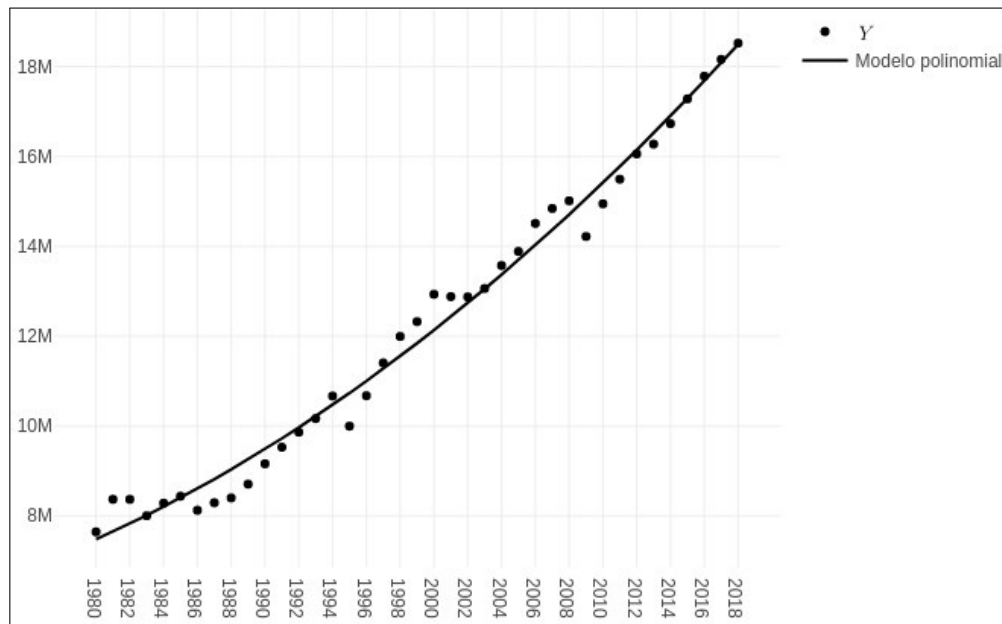


Figura 5: Modelo polinomial de grado dos para el PIB Mexicano (1980-2018).

Para medir la bondad de ajuste de un modelo lineal se emplea el *coeficiente de determinación*, conocido como R^2 . Existen varias definiciones para dicho estadístico, muchas veces equivalentes. Para el caso particular de un modelo de regresión lineal, R^2 corresponde al cuadrado del *coeficiente de correlación de Pearson*.

El *coeficiente de correlación de Pearson* es una medida de relación lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas continuas y se define de la siguiente manera:

$$R = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Si $R = 1$, entonces existe correlación positiva perfecta; en caso contrario cuando $R = -1$, existe correlación negativa perfecta; finalmente si $R = 0$, entonces no existe relación lineal.

Este estadístico puede ser empleado, por una parte, para medir la bondad de ajuste de un modelo, pero también para medir la correlación existente entre dos variables, provenientes o no de un proceso modelador.

El *coeficiente de correlación de Pearson* para el modelo polinomial de segundo grado obtenido para la economía mexicana es:

$$R = 0.9929862$$

Mientras que para un modelo lineal simple es:

$$R = 0.9870302$$

Lo anterior comprueba que el ajuste del modelo polinomial es mejor que el lineal simple y es, de hecho, el más empleado para describir la tendencia de crecimiento del *PIB efectivo* de las diferentes economías, en ocasiones nombrado como *PIB de largo plazo*.

3.2 Obtención del PIB de corto plazo

Como Jones (2010) refiere, la producción efectiva o real de una economía puede interpretarse como la suma de la tendencia a largo plazo y las fluctuaciones a corto plazo, lo que describe con la siguiente expresión:

$$Y_t = \bar{Y}_t + \tilde{Y}_t$$

Donde:

Y_t : Producción real o efectiva.

\bar{Y}_t : Tendencia de largo plazo.

\tilde{Y}_t : Fluctuaciones de corto plazo.

En la práctica, las fluctuaciones de corto plazo se acostumbran medir en términos porcentuales y se calcula de la manera siguiente:

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t - \bar{Y}_t}{\bar{Y}_t} \quad (3.21)$$

Aplicando 3.21, a partir del modelo generado con la expresión 3.19 y los datos para el *PIB* de México (1980-2018) se obtiene el resultado de la figura 6.

A partir de dicha figura es fácil identificar los ciclos expansivos y recesivos de la economía. El comienzo de una recesión es generalmente aceptado cuando la producción efectiva es menor a su nivel potencial, es decir, cuando el *PIB* de corto plazo se encuentra en valores negativos. De igual manera, se acepta que el ciclo recesivo concluye cuando la tendencia negativa del *PIB* de corto plazo se revierte y se acerca nuevamente a su nivel potencial.

Ocurre lo mismo para los ciclos expansivos, cuyo comienzo es generalmente aceptado cuando la producción efectiva es superior a su nivel potencial, es decir, cuando el *PIB de corto plazo* se encuentra en valores positivos.

Debe notarse que el *PIB potencial* no siempre es descrito por la tendencia de largo plazo, y es más bien determinado periodo a periodo por los bancos centrales o analistas económicos, sin embargo, suele usarse como una buena aproximación teórica, tal es el caso para el método *ECF* propuesto en este documento.

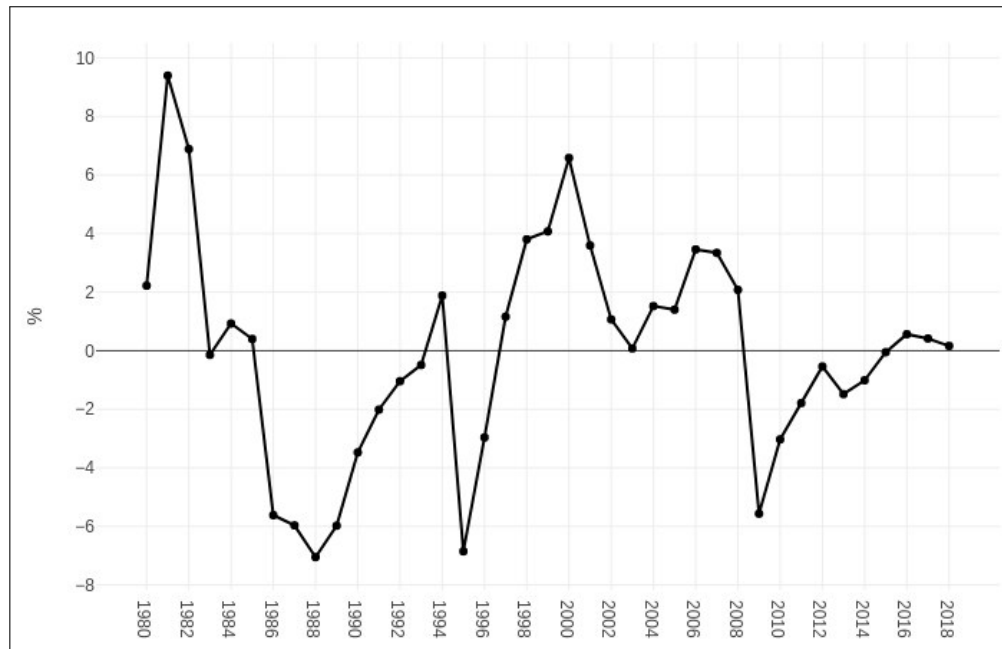


Figura 6: Fluctuación de corto plazo para el PIB Mexicano (1980-2018).

3.3 Análisis frecuencial del PIB de corto plazo

El método propuesto parte del análisis frecuencial de una serie de tiempo con base en la transformada de Fourier, la cual permite obtener el espectro de frecuencias de una señal¹⁶periódica compuesta. No obstante, como se explica en el Capítulo II, la transformada de Fourier para la obtención del espectro de frecuencias de una serie de tiempo descriptiva de un proceso estocástico, presenta normalmente una gran cantidad de armónicos que complican la identificación de posibles componentes frecuenciales.

Para resolver dicho problema y como se detalla en el Capítulo II, existen varios métodos estadísticos que "filtran" el espectro obtenido para descubrir aquellas componentes frecuenciales más relevantes, generando lo que se conoce como *periodograma*.

En el caso particular de las series de tiempo *PIB* anual, que no excede un centenar de

¹⁶Una señal es la medición de la variación en la medición de intensidad de un fenómeno físico.

muestras (un número muy bajo para el análisis frecuencial de Fourier), sólo el *periodograma de Wichert* es adecuado, ya que es el único desarrollado específicamente para trabajar con muestras de tamaño reducido.

*Mediante el uso de datos simulados, se muestra que el método sugerido es capaz de identificar genes activados por el ciclo celular en un conjunto de datos de expresión génica, incluso si el número de genes cíclicos es muy pequeño e independientemente de la presencia de un componente no periódico dominante en el datos (Wichert and Fokianos, 2004, p.5).*¹⁷

Por tal motivo, se emplea el *periodograma de Wichert* para obtener las componentes frecuenciales en las series de datos de PIB de los países, y dado que se encuentra implementado sólo en el software de análisis estadístico *R*, se ha seleccionado esta herramienta para la programación del método.

El periodograma de Wichert es definido como:

$$I(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N Y_t e^{-i\omega t} \right|^2, \omega \in [0, \pi]$$

Donde N es el tamaño de la muestra y ω corresponde a variable continua o discreta con valores $\frac{2\pi k}{N}$, $k=0,1,\dots,[N/2]$

Si la serie de tiempo presenta una significativa componente sinusoidal de frecuencia $\omega_0 \in [0, \pi]$, entonces el periodograma exhibe un pico en tal frecuencia. Si la serie de tiempo es totalmente aleatoria, entonces la gráfica del periodograma contra las frecuencias de Fourier se reduce a una línea recta (Wichert and Fokianos, 2004, p. 6).

¹⁷El enfoque se ha implementado en el paquete *R* GeneTS disponible bajo los términos de la Licencia Pública General de GNU (Wichert and Fokianos, 2004, p. 5).

El *periodograma promediado* puede definirse como:

$$AI(\omega) = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^G I_k(\omega)$$

Donde $I_i(\omega)$ es el periodograma de la serie de tiempo i .

Así la gráfica de $AI(\omega_k)$ contra $\omega_k = 2\pi k/N$ donde $k = 0, 1, \dots, [N/2]$, debería revelar si hay o no componentes periódicos en los datos (Wichert and Fokianos, 2004, p. 6).

3.3.1 Prueba de estacionariedad

"El teorema de *Wiener – Khinchin* demuestra que, para procesos estocásticos, la obtención del periodograma es sólo posible si el proceso en sí es estacionario en sentido amplio (*WSS*). Por lo que antes de llevar a cabo el análisis frecuencial de una serie de tiempo o proceso estocástico es necesario asegurar su estacionariedad".

Para la eliminación de la componente de tendencia se disponen de varios métodos, entre ellos podemos destacar los de *primeras diferencias*, *medias móviles* o *tendencia polinómica*, siendo este último método el llevado a cabo en el apartado anterior, de tal forma, que \tilde{Y}_t en la expresión 3.21 es el resultado de aplicar dicho proceso a la serie de tiempo y cuyo resultado se ilustra en la figura 6.

Para comprobar su estacionariedad, se lleva a cabo un contraste de raíz unitaria mediante la prueba de *Dickey-Fuller aumentada*, previamente explicada en el Capítulo II, cuyo resultado es:

$$\rho = 0.06595$$

Dado que el estadístico $\rho < 0.1$ y muy cercano a 0.05 se puede rechazar la hipótesis nula H_0 de no estacionariedad, y se asume entonces que la serie de tiempo \tilde{Y}_t es estacionaria y se

puede llevar a cabo el proceso de obtención del periodograma, cuyo resultado se muestra en la figura 7

3.3.2 Obtención e interpretación del periodograma de Wichert

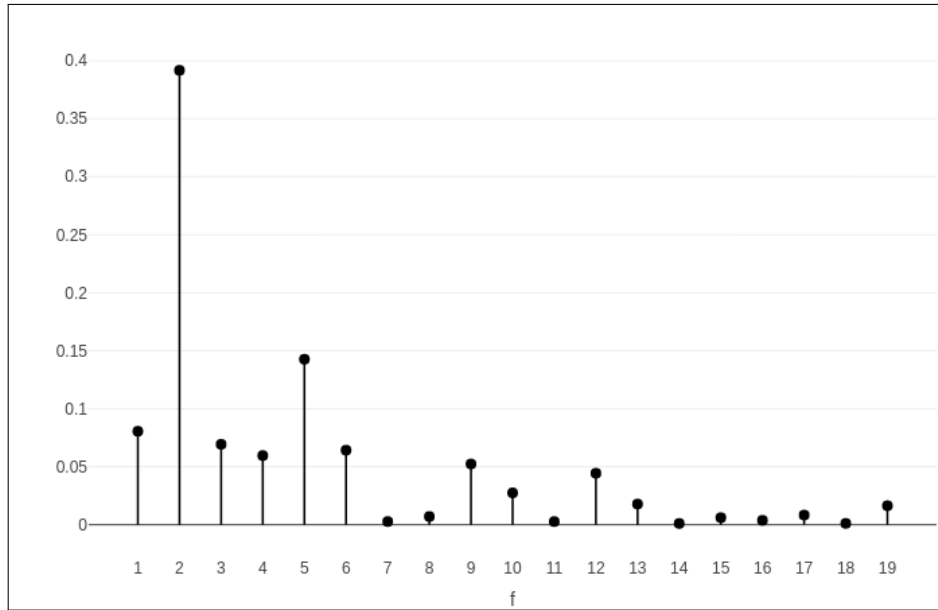


Figura 7: Periodograma de *Wichert* de estimación de frecuencias para \tilde{Y}_t de la economía mexicana (1980-2018).

La figura 7 muestra el periodograma de *Wichert* para la serie del *PIB* de corto plazo obtenido en el apartado anterior, cada armónico es un indicador de correlación de una función senoidal $I_k(\omega)$ de frecuencia angular $\omega = 2\pi f_k$.

Definiendo I_k como la amplitud de la componente frecuencial k obtenida en el correlograma, la función en el dominio del tiempo generada a partir de tales componentes corresponde a la siguiente:

$$i_b(t) = \sum_{k=1}^G I_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \quad (3.22)$$

Donde ω_0 es la frecuencia fundamental $1/T_0$, ϕ_k corresponde al factor de desfaseamiento de la componente frecuencial k y G representa la cantidad de componentes frecuenciales obtenidas con el periodograma.

Para facilitar los cálculos es conveniente normalizar la frecuencia fundamental de tal forma que se hace $\omega_0 = 1$, lo que implica que el intervalo de tiempo en el que se ubican la totalidad de las muestras corresponde a un periodo fundamental de tiempo T_0 .

Lo anterior implica, que para la serie de tiempo del *PIB* mexicano de corto plazo obtenido en el apartado anterior será $T_0 = 39$ años, así las frecuencias obtenidas en el periodograma tendrían su correspondiente periodo:

$$T_k = T_0 \frac{1}{f_k}$$

De tal manera que, para cada componente frecuencial normalizada se tendría correspondencia en periodos de tiempo indicada en la tabla 2.

Tabla 2: Correspondencia en periodos de tiempo para componentes frecuenciales normalizadas del periodograma de Wichert para el PIB de corto plazo mexicano.

Frecuencia normalizada [Hz]		Periodo temporal [años]
1	→	39
2	→	19.5
3	→	13
4	→	9.75
...		...

Tomando en cuenta que cada armónico es un indicador de correlación de una función

senoidal de frecuencia normalizada f_k , del periodograma obtenido se puede interpretar que existe una fuerte componente cíclica cada 19.5 años con una correlación del 40%, siendo esta la de mayor intensidad.

3.4 Modelado del PIB de corto plazo a partir de funciones sinusoidales

Las frecuencias de los armónicos obtenidos con el periodograma permiten regenerar la función temporal como se muestra en la expresión 3.22, la cual se puede normalizar a amplitud unitaria de la siguiente manera:

$$i_n(t) = \frac{1}{\max(I_t)} \sum_{k=1}^G I_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

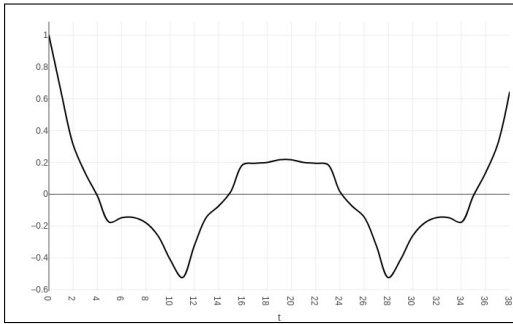
Sin embargo, los métodos estadísticos empleados para la obtención del periodograma de una serie de tiempo estocástica provoca la pérdida del valor de fase ϕ_k , y no existen métodos precisos para su recuperación, por lo que las fases individuales reducidas a cero entregan los mejores resultados. De esta forma la serie temporal compuesta, al ser construida a partir de funciones periódicas pares (cosenos) se encontrará desfasada de la serie estocástica a modelar.

Para desplazar la función compuesta será necesario agregar un desplazamiento general Δt a la variable de tiempo cuyo valor dependerá de cuán amplio sea ese desplazamiento que se requiere lograr, obteniendo la siguiente expresión matemática.

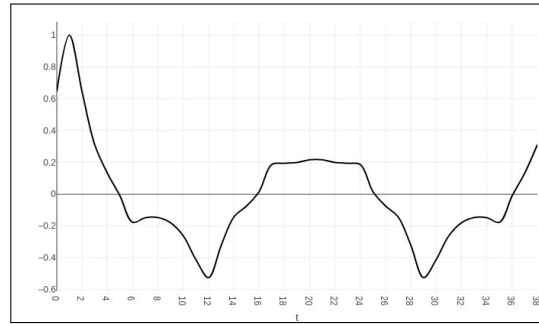
$$i_n(t) \approx \frac{1}{\max(I_t)} \sum_{k=1}^G I_k \cos(k\omega_0(t + \Delta t)) \quad (3.23)$$

En la siguiente figura se puede ver el efecto de ϕ en el desplazamiento en el eje de tiempo

para la función compuesta.



(a) función compuesta con $\phi_k = 0$.



(b) función compuesta con fase temporal Δt .

Figura 8: Función compuesta con fase $\phi_k = 0$ en componentes individuales vs desplazamiento temporal general Δt .

$i_n(t)$ es una función continua en el tiempo, por lo que, para modelar la serie discreta \tilde{Y}_t debe obtenerse la correspondiente función discreta i_t .

Para ello, se recurre a la función de *tren de pulsos unitarios* $\delta(t)$, que permitirá muestrear la función i_t .

Siendo dicha función:

$$\delta(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

Dado que la serie de tiempo se encuentra sólo definida para valores positivos y hasta M igual al número de muestras existentes en \tilde{Y}_t , entonces, la función discreta normalizada i_{nt} quedará especificada por la siguiente expresión.

$$i_{nt} = i_n(t) \sum_{m=1}^M \delta(t - mT_m)$$

Siendo $T_m = 1/M$.

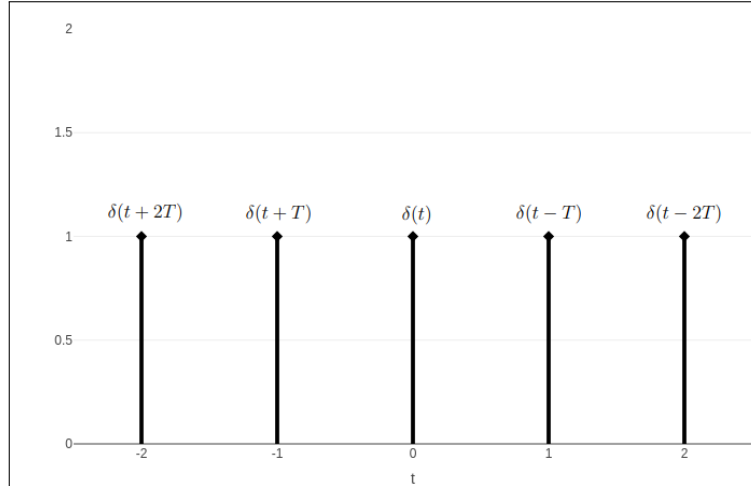


Figura 9: Tren periódico de pulsos unitarios.

Sustituyendo la expresión 3.23 correspondiente a $i_n(t)$, se obtiene:

$$i_{nt} = \frac{1}{\max(I_t)} \sum_{k=1}^G I_k \cos(k\omega_0(t + \Delta t)) \sum_{m=1}^M \delta(t - mT_m)$$

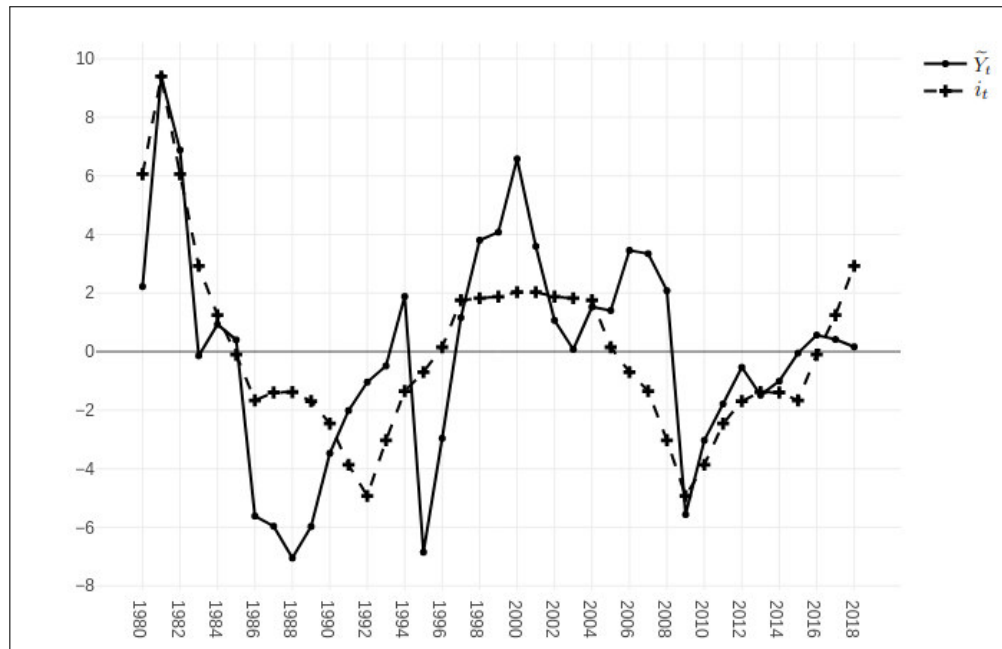
Tomando en cuenta que i_{nt} tiene amplitud normalizada, al ser multiplicada por el valor de amplitud (valor máximo) de \tilde{Y}_t se obtendrá la función i_t con amplitud ajustada a \tilde{Y}_t , obteniendo finalmente la siguiente expresión general.

$$i_t = \frac{\max(\tilde{Y}_t)}{\max(I_t)} \sum_{k=1}^G I_k \cos(k\omega_0(t + \Delta t)) \sum_{m=1}^M \delta(t - mT_m)$$

para $\Delta t | \max(r_{i\tilde{Y}})$

Donde $r_{i\tilde{Y}}$ es el coeficiente de correlación de *Pearson* para i_t e \tilde{Y}_t .

En la figura 10 se puede observar el resultado del procedimiento aplicado sobre el *PIB* de corto plazo \tilde{Y}_t .

Figura 10: i_t vs \tilde{Y}_t .

3.5 Modelado del PIB efectivo

de 3.21:

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t - \bar{Y}_t}{\bar{Y}_t} \quad (3.24)$$

si $i_t \approx \tilde{Y}_t$, entonces:

$$i_t \approx \frac{Y_t - \bar{Y}_t}{\bar{Y}_t} \quad (3.25)$$

de donde se obtiene:

$$Y_t \approx i_t \bar{Y}_t + \bar{Y}_t \quad (3.26)$$

sea \hat{Y}_t el modelo obtenido a partir 3.26, de tal manera que:

$$\hat{Y}_t = i_t \bar{Y}_t + \bar{Y}_t \quad (3.27)$$



Figura 11: Comparativo entre PIB efectivo Y_t , tendencia de largo plazo \bar{Y}_t y \hat{Y}_t .

Para comprobar si \hat{Y}_t tiene una mejor aproximación a Y_t que \bar{Y}_t , se lleva a cabo una prueba de correlación de *Pearson*, obteniendo para este caso:

$$r_{\bar{Y}_t, Y} = 0.9929862$$

$$r_{\hat{Y}_t, Y} = 0.9954097$$

Siendo $r_{\hat{Y}_t, Y} > r_{\bar{Y}_t, Y}$ se confirmaría que el modelo propuesto \hat{Y}_t ofrece una mejor aproximación que el modelo polinomial \bar{Y} , sin que de momento, esto signifique que puede pronosticar con razonable precisión los posibles futuros valores para Y_t .

3.6 Estimación parcial para PIB de corto plazo

Dado que i_t (expresión 3.4) es una función periódica con frecuencia angular fundamental ω_0 , se puede conocer el valor de $i_t[M + p]$ (léase i_t evaluado en $M + p$), de la siguiente manera:

$$i_t[M + p] = i_t[p] \quad (3.28)$$

para $1 < p < M$, siendo M el número de muestras.

Al aplicar la expresión 3.28 a la serie de datos del PIB mexicano, se obtiene el resultado que se muestra en la figura 12, donde la amplitud de las últimas tres muestras (unidas por la línea continua), es igual al de las primeras tres de la serie de tiempo.

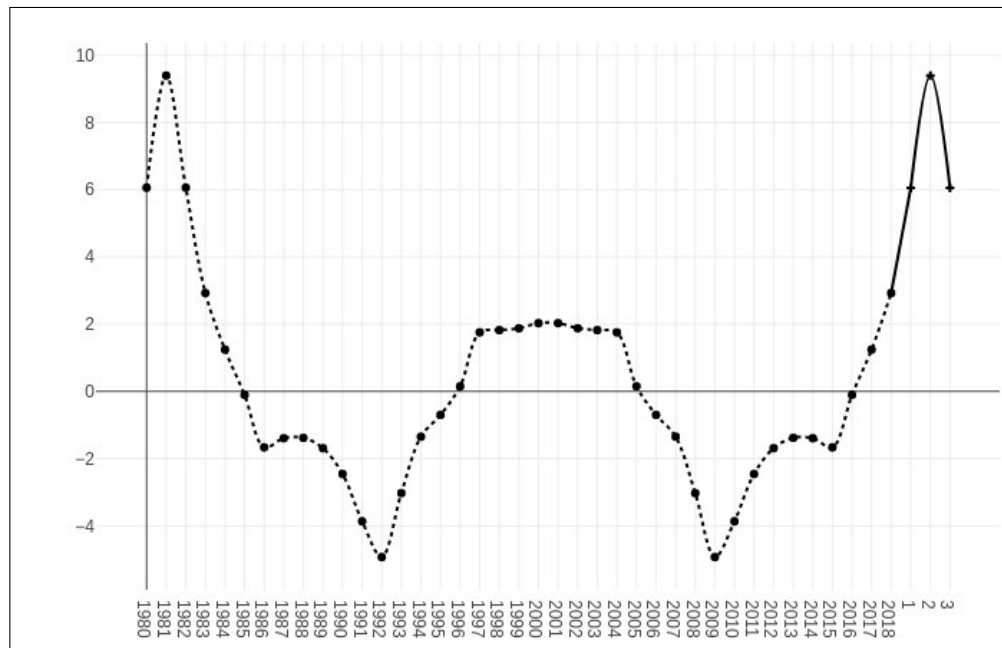


Figura 12: Estimación de i_t para $p = 1, 2, 3$.

3.7 Estimación parcial para PIB efectivo

Reincorporando la componente de tendencia de largo plazo \bar{Y}_t , de la expresión 3.27, se puede obtener los valores de $\hat{Y}_t[M + p]$ de la siguiente manera:

$$\hat{Y}_t[M + p] = i_t \bar{Y}_t[M + p] + \bar{Y}_t[M + p]$$

para $1 < p < M$, siendo M el número de observaciones.

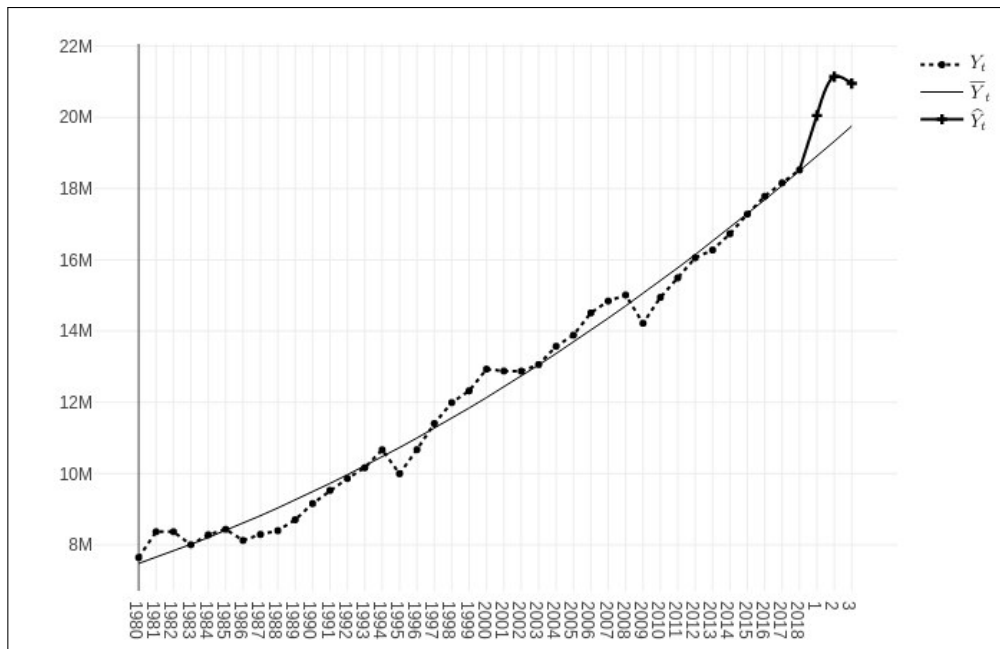


Figura 13: Estimación parcial de \hat{Y}_t para $p = 1, 2, 3$.

3.8 Estimación del PIB efectivo

De la figura 13 se puede apreciar que el pronóstico se aleja considerablemente de la componente de tendencia \bar{Y} , y si se repite el ejercicio empleando una menor cantidad de observaciones, el resultado puede variar sustancialmente, por lo anterior, para obtener la estimación definitiva se recurre al siguiente procedimiento:

Sea K un conjunto de n números enteros tal que:

$$K = \{(M - n + 1), (M - n + 2), \dots, (M - 2), (M - 1), M\}$$

siendo M el número de observaciones en Y_t .

Tal que exista un subconjunto Y_K de las últimas n observaciones de Y_t .

$$Y_K \in Y_t : Y_K = \{Y_{(M-n+1)}, Y_{(M-n+2)}, \dots, Y_{(M-2)}, Y_{(M-1)}, Y_{(M)}\}$$

siendo $n \geq 4$, lo anterior debido a que se requieren por lo menos cuatro observaciones para generar una función periódica a partir de la cual estimar valores futuros.

Así, la expresión 3.24, se puede reescribir como:

$$\tilde{Y}_K = \frac{Y_K - \bar{Y}_K}{\bar{Y}_K}$$

y 3.27:

$$\hat{Y}_K = i_K \bar{Y}_K + \bar{Y}_K$$

y el valor de estimación de PIB efectivo para el subconjunto K en el tiempo p posterior a la observación M será:

$$\hat{Y}_K[M + p] = (i_K[M + p] * \bar{Y}_K[M + p]) + \bar{Y}_K[M + p]$$

Dado que Y_t consta de M observaciones, se pueden generar $M - 4$ modelos \hat{Y}_K diferentes, el valor de estimación para $\hat{Y}_t[M + p]$ propuesto para el método, será:

$$\hat{Y}_t[M + p] = \frac{1}{(M' - 4)} \sum_{\dim(K)=4}^{M'} \hat{Y}_K[M + p] \quad (3.29)$$

para:

$$M' : r_{Y, \hat{Y}_K} > r_{Y, \bar{Y}} \quad \text{y} \quad (M' + 1) : r_{Y, \hat{Y}_K} < r_{Y, \bar{Y}}$$

Siendo:

r_{Y, \hat{Y}_K} el coeficiente de correlación de *Pearson* entre Y_t y \hat{Y}_K .

$r_{Y, \bar{Y}}$ el coeficiente de correlación de *Pearson* entre Y_t y \bar{Y}_t

Es decir, iterativamente se obtienen los valores de estimación $\hat{Y}_K[M + p]$ mientras la correlación de *Pearson* entre la serie de datos del *PIB efectivo* Y_t y el modelo generado \hat{Y}_K sea mayor que la correlación entre la misma Y_t y el modelo polinomial \bar{Y}_t obtenido a partir de la totalidad de observaciones del *PIB efectivo*, en la tabla 3 se muestran los valores de correlación r_{Y, \hat{Y}_K} y $r_{Y, \bar{Y}}$ para algunas iteraciones.¹⁸

Tabla 3: Comparativo de correlaciones r_{Y, \hat{Y}_K} y $r_{Y, \bar{Y}}$ para algunos tamaños n de muestras

$n = \dim(K)$	r_{Y, \hat{Y}_K}	$r_{Y, \bar{Y}}$
4	1.0000	0.9996
5	1.0000	0.9998
...
37	0.9951	0.9933
38	0.9949	0.9927
39	0.9954	0.9930

Finalmente, el valor $\hat{Y}_t[M + p]$ será el promedio de los valores $\hat{Y}_K[M + p]$ obtenidos iterativamente, tal como se indica en la expresión 3.29, y se muestra en la tabla 4.

El resultado obtenido es el que se muestra en la figura 14.

¹⁸En el caso particular de la serie del PIB mexicano, para todos los valores de $\dim(K) > 4$ $r_{Y, \hat{Y}_K} > r_{Y, \bar{Y}}$, es decir, $M' = M - 4$.

Tabla 4: Valores de $\hat{Y}_K[M + p]$ y su promediado para la obtención de $\hat{Y}_t[M + p]$

dim(K)	$\hat{Y}_K[M + 1]$	$\hat{Y}_K[M + 2]$	$\hat{Y}_K[M + 3]$
4	18774027.82	19007138.86	19101958.14
5	118791050.25	18969369.42	19123582.67
...
38	19332454.75	19662611.71	20022149.46
39	20055175.83	21145252.12	20952873.91
	$\hat{Y}_t[M + 1]$	$\hat{Y}_t[M + 2]$	$\hat{Y}_t[M + 2]$
media	18949120.63	19384093.07	19761893.05

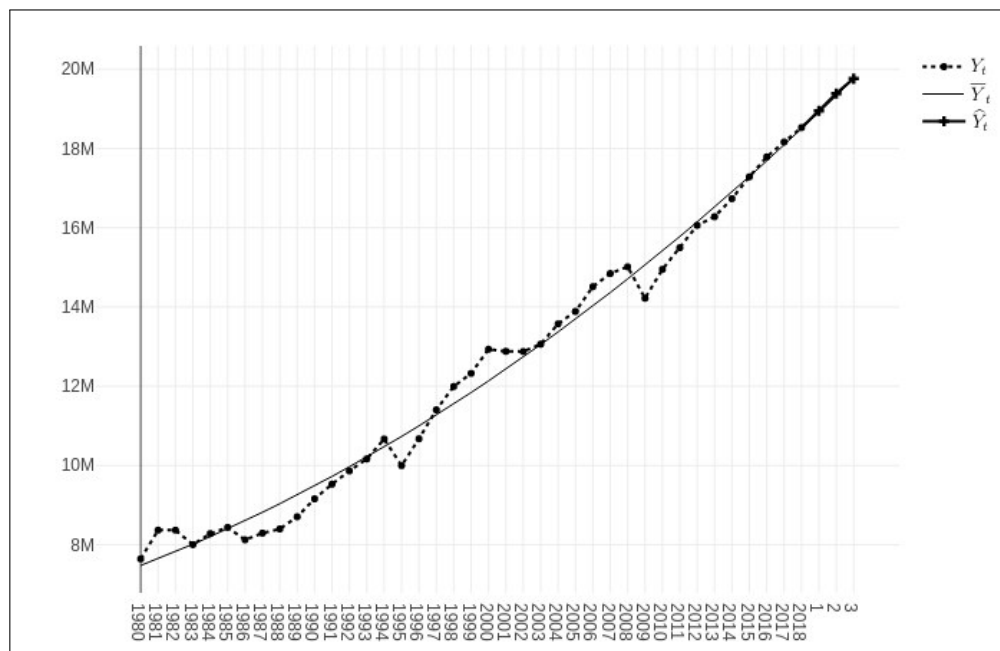


Figura 14: Estimación de \hat{Y}_t para $p = 1, 2, 3$.

Cada una de las columnas en la tabla 4 se puede representar como un vector de la siguiente manera:

$$\vec{Y}_k[M+p] = \{(\hat{Y}_K[M+p] : \dim(K) = 4), (\hat{Y}_K[M+p] : \dim(K) = 5), \dots, (\hat{Y}_K[M+p] : \dim(K) = M')\} \quad (3.30)$$

para:

$$M' : r_{Y, \hat{Y}_K} > r_{Y, \bar{Y}} \quad \text{y} \quad (M' + 1) : r_{Y, \hat{Y}_K} < r_{Y, \bar{Y}}$$

Siendo:

r_{Y, \hat{Y}_K} el coeficiente de correlación de *Pearson* entre Y_t y \hat{Y}_K .

$r_{Y, \bar{Y}}$ el coeficiente de correlación de *Pearson* entre Y_t y \bar{Y}_t

De tal forma que el valor estimado $\hat{Y}_t[M + p]$ para el periodo p , resultante de aplicar la media a las columnas de la tabla 4, se puede representar de la siguiente manera:

$$\hat{Y}_t[M + p] = \text{mean}\{\vec{Y}_k[M + p]\}$$

3.9 Estimación de bandas de frontera

A diferencia de otros modelos para series temporales de datos, como los modelos autorregresivos, donde los límites para una estimación son estadísticamente determinados; en el método *CF* aquí propuesto, se recurre al siguiente procedimiento para la obtención de estos.

El método propone la definición de *ancho de banda de estimación* (*EBW*) como la diferencia entre la mayor y la menor estimación obtenidas por las $(M' - 4)$ iteraciones de \hat{Y}_K , esto es:

$$EBW[M + p] = \max\{\vec{Y}_k[M + p]\} - \min\{\vec{Y}_k[M + p]\} \quad (3.31)$$

Y los límites en los que se espera que la observación real se ubique se han denominado *bandas de fronteras* (*FB*), siendo FBl_t la banda de frontera inferior y FBU_t la banda de frontera superior, definidas de la siguiente manera:

$$FBl_t[M + p] = \hat{Y}_t[M + p] - \frac{EBW}{2}$$

$$FBU_t[M + p] = \hat{Y}_t[M + p] + \frac{EBW}{2}$$

Tabla 5: Obtención de bandas de frontera para $\hat{Y}_t[M + p]$.

	$p = 1$ (2019)	$p = 2$ (2020)	$p = 3$ (2021)
$mean\{\vec{Y}_k[M + p]\}$	18949120.63	19384093.07	19761893.05
$max\{\vec{Y}_k[M + p]\}$	20055175.83	21145252.12	21125818.27
$min\{\vec{Y}_k[M + p]\}$	18238795.05	18559064.92	18894521.75
$EBW[M + p]$	1816380.77	2586187.20	2231296.51
$FBu_t[M + p]$	19857311.02	20677186.67	20877541.30
$FBl_t[M + p]$	18040930.24	18090999.47	18646244.79

En la figura 15 se puede ver la representación de estos valores sobre la serie de datos del PIB mexicano, a partir de la cual se obtuvieron.

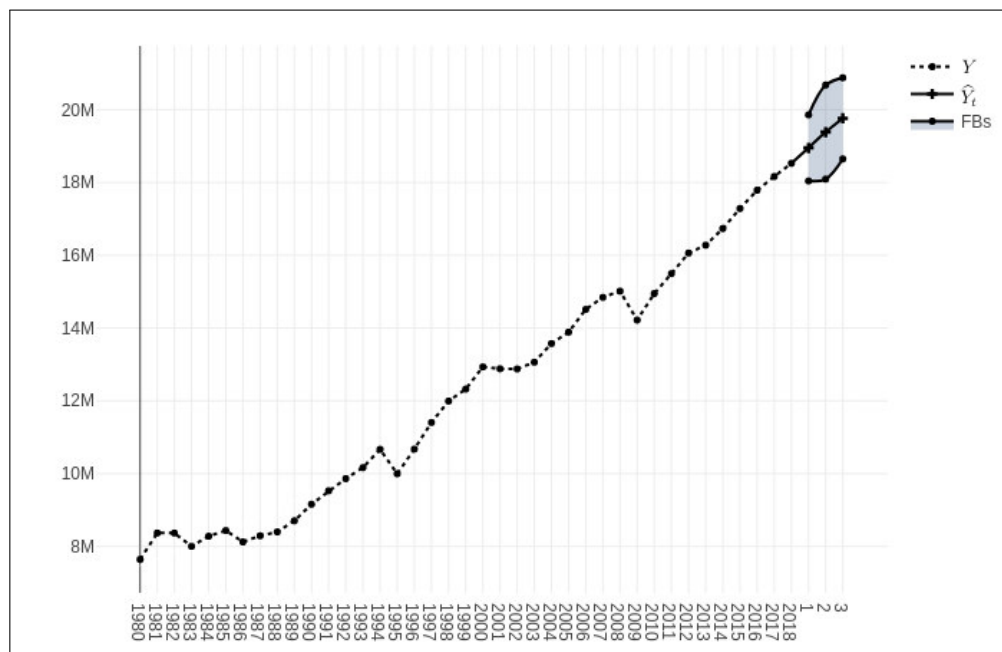


Figura 15: Estimación de \hat{Y}_t para $p = 1, 2, 3$ con bandas de frontera FBs y ancho de banda de estimación EBW .

3.10 Estimación del PIB de corto plazo

Para la estimación del PIB de corto plazo \tilde{Y}_t simplemente hay que eliminar la componente de tendencia polinómica \bar{Y}_t , tanto para los valores estimados \hat{Y}_t como para las *bandas de frontera* FBs , así, de 3.21 tenemos:

$$\tilde{Y}_t[M+p] = \frac{Y_t[M+p] - \bar{Y}_t[M+p]}{\bar{Y}_t[M+p]} \quad (3.32)$$

$$\widetilde{FBl}_t[M+p] = \frac{FBl_t[M+p] - \bar{Y}_t[M+p]}{\bar{Y}_t[M+p]} \quad (3.33)$$

$$\widetilde{FBu}_t[M+p] = \frac{FBu_t[M+p] - \bar{Y}_t[M+p]}{\bar{Y}_t[M+p]} \quad (3.34)$$

La estimación \tilde{Y}_t para el *PIB* de corto plazo, así como las bandas de frontera \widetilde{FBl} y \widetilde{FBu} obtenidas para el *PIB* mexicano eliminando la componente de tendencia \bar{Y}_t obtenida en la expresión 3.20, se muestran en la tabla 6 se muestran los valores obtenidos.

Tabla 6: *PIB de corto plazo y bandas de frontera de estimadas de la economía mexicana para los periodos 2019-2021.*

	$p = 1$ (2019)	$p = 2$ (2020)	$p = 3$ (2021)
$\hat{Y}_t[M+p]$	0.21%	0.28%	0.03%
$\widetilde{FBu}_t[M+p]$	5.01%	6.97%	5.67%
$\widetilde{FBl}_t[M+p]$	-4.59%	-6.4%	-5.6%

Mismos que se grafican en la figura 16.

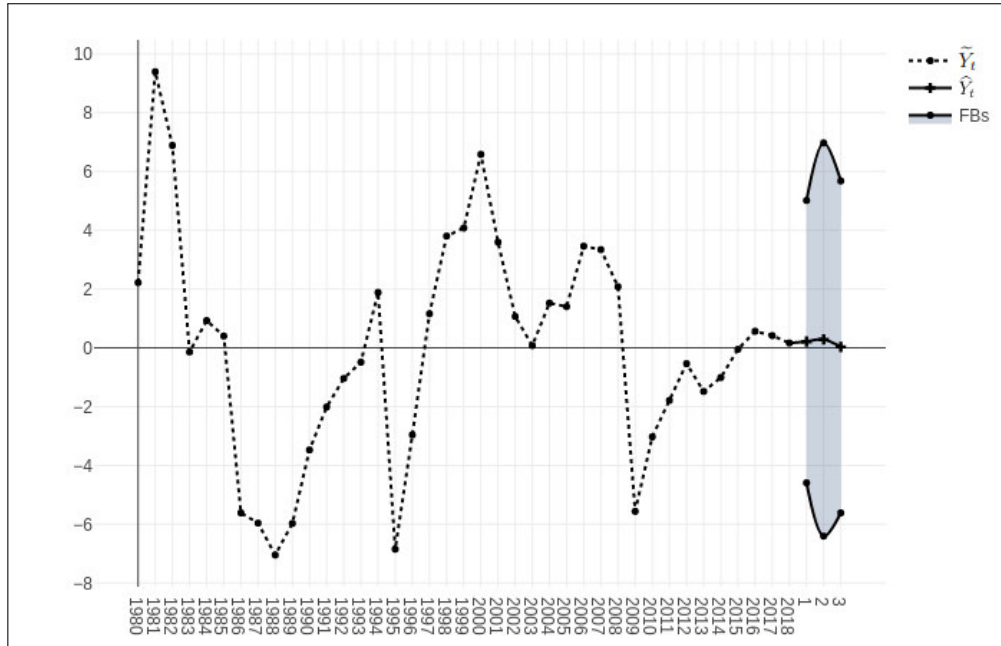


Figura 16: Estimación de \hat{Y}_t para $p = 1, 2, 3$ con bandas de frontera FBs y ancho de banda de estimación EBW .

Capítulo IV

RESULTADOS

En el presente capítulo se presentan los resultados obtenidos de realizar estimaciones de *Producción Interna Bruta* para series de datos de países del mundo de los cuales el Banco Mundial dispone de información continua, en particular para aquellos que son miembros de la *OCDE*.

Se llevarán a cabo pronósticos por cada serie de datos por dos métodos diferentes, **Estimación por Componentes Frecuenciales (ECM)**, propuesto y desarrollado en la presente tesis; y **ARMA(1,1)**, siendo el método de mayor uso y que en general entrega los mejores resultados.

De los resultados obtenidos por cada método se comparan dos aspectos:

- Cuál entrega la mejor estimación o predicción, individual y estadísticamente.
- Qué tan diferentes son los resultados entre sí.

4.1 Comparativo de métodos estimativos para PIB de México

Para ejemplificar el uso de los métodos, se realizará en primera instancia la estimación para los dos últimos periodos disponibles en las series de datos, a fin de poder realizar el comparativo entre el valor estimado y el real. Ya que como se ve en los apéndices, la mayor precisión se consigue en los primeros dos periodos pronosticados.

Para el caso de México, la ejecución del método *ECF* generó la salida gráfica mostrada en la figura 17.

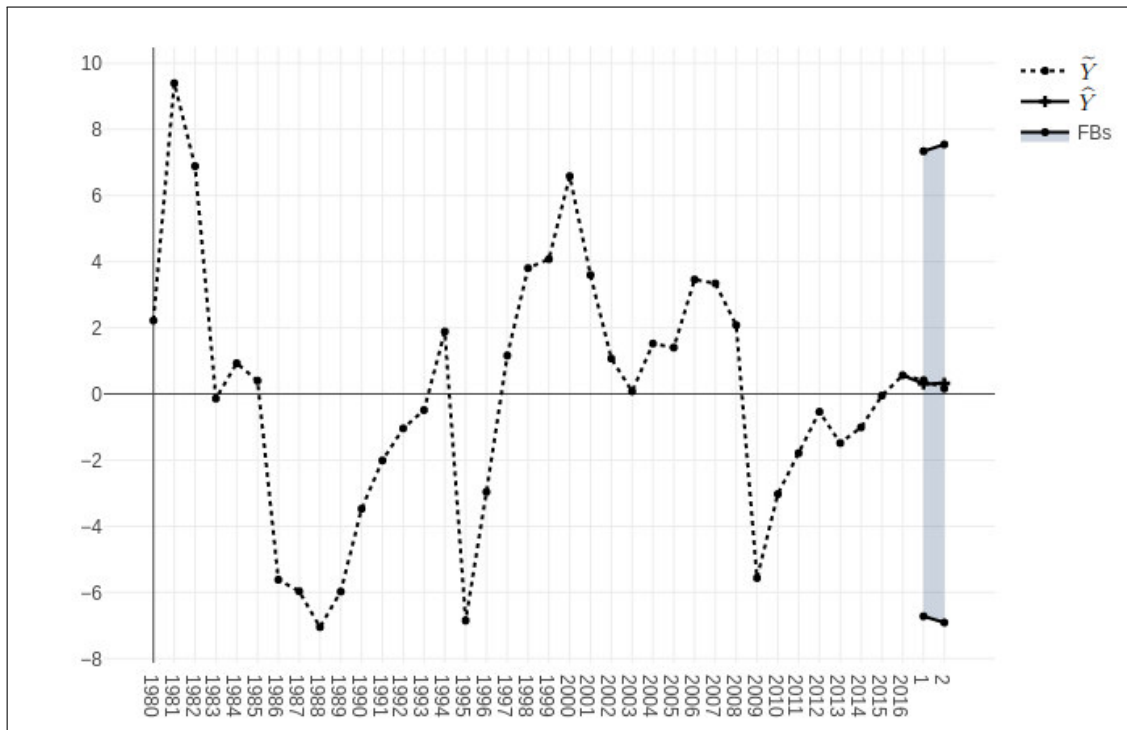


Figura 17: PIB de corto plazo estimado con el método *ECF* para los últimos dos periodos.

Resultados resumidos en la tabla 7.

Tabla 7: *PIB de corto plazo vs ECF.*

	2017	2018
PIB corto plazo	0.58%	0.34%
ECF	0.47%	0.49%

La estimación de *PIB efectivo* que se obtiene de la ejecución de *ECF* reincorporando la tendencia polinómica, se resume en la tabla 8 y la figura 18.

Tabla 8: PIB efectivo vs ECF expresado en millones de pesos a precios de 2013.

	2017	2018
PIB efectivo	18,163,490	18,525,881
ECF	18,143,990	18,554,035

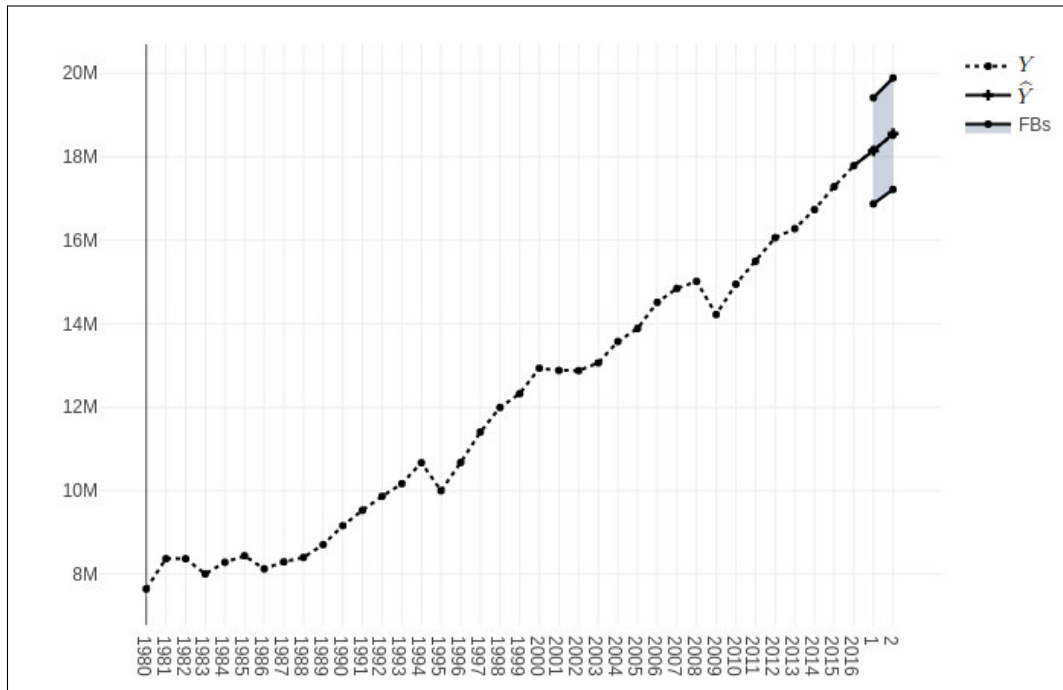


Figura 18: PIB efectivo estimado con el método ECF para los últimos dos periodos.

Para poder llevar a cabo el comparativo entre ambos métodos, se ejecuta $ARMA(1,1)$ para su posterior comparación.

Los resultados obtenidos por $ARMA(1,1)$ para la estimación del PIB de corto plazo se resumen en la tabla 9 y la salida gráfica se muestra en la 19.

Tabla 9: PIB de corto plazo vs ARMA(1,1).

	2017	2018
PIB corto plazo	0.58%	0.34%
ARMA(1,1)	0.50%	0.26%

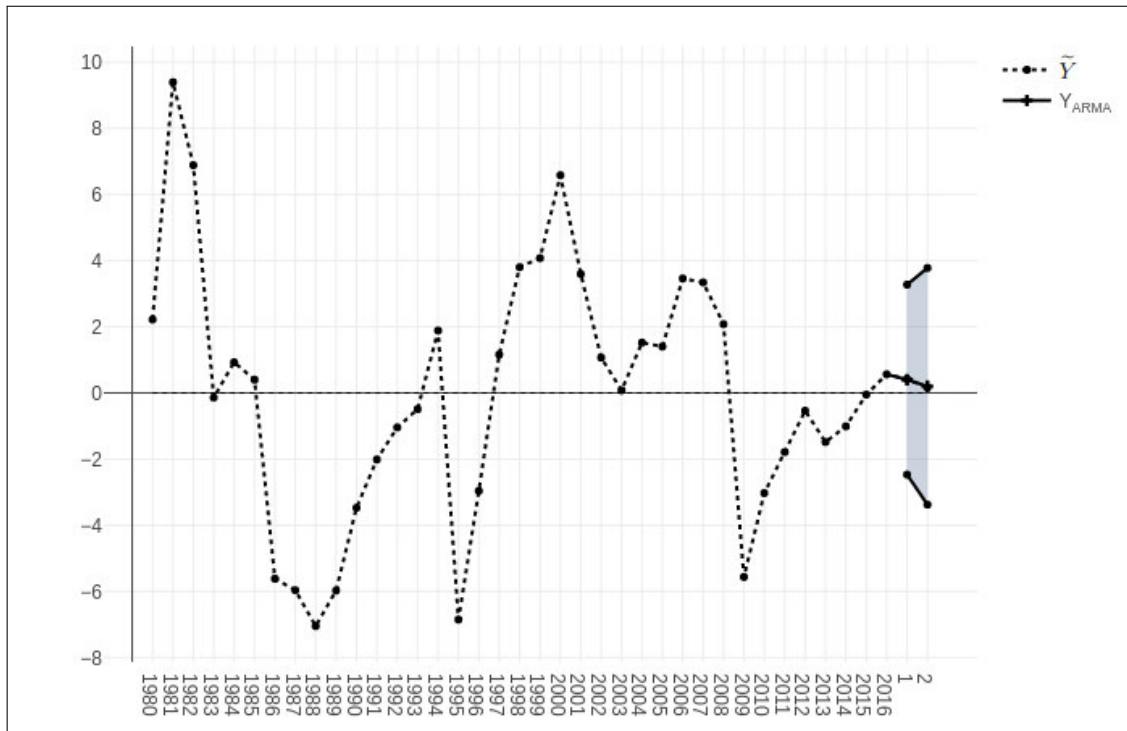


Figura 19: PIB de corto plazo estimado con el método ARMA(1,1) para los últimos dos periodos.

La estimación de PIB efectivo que se obtiene por el método ARMA(1,1), reincorporando la tendencia polinómica son los indicados en la tabla 10 y el resultado gráfico se muestra en la figura 20.

Tabla 10: PIB efectivo vs ARMA(1,1) expresado en millones de pesos a precios de 2013.

	2017	2018
PIB efectivo	18,163,490	18,525,881
ARMA(1,1)	18,149,698	18,511,464

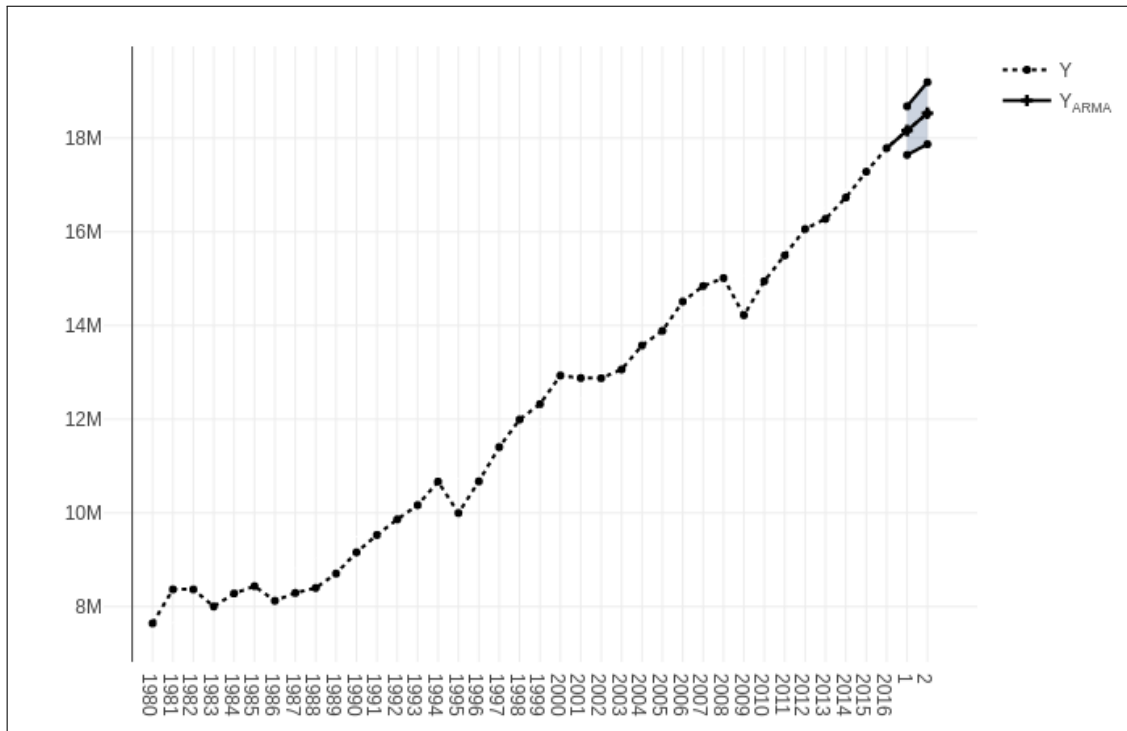


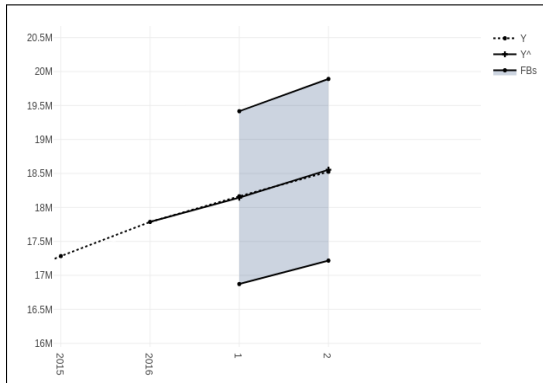
Figura 20: PIB efectivo estimado con el método ARMA(1, 1) para los últimos dos periodos.

En la tabla 11 se muestra el comparativo de los resultados obtenidos con ambos métodos, indicando en negritas la mejor estimación.

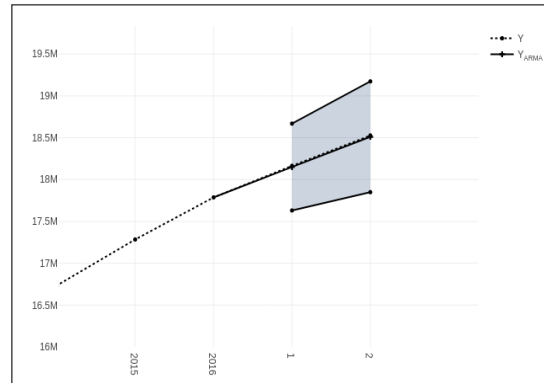
Tabla 11: Comparativo de estimación para PIB efectivo de México entre ECF y ARMA(1,1)

	2017	2018
PIB efectivo	18,163,490	18,525,881
ECF	18,143,990	18,554,035
ARMA(1,1)	18,149,698	18,511,464

En la imagen ampliada mostrada en la figura 21, se puede ver con más precisión las estimaciones obtenidas con cada modelo siendo, en este caso, el modelo $ARMA(1,1)$ el que obtiene el mejor pronóstico.



(a) Estimación por ECF



(b) Estimación por ARMA(1,1)

Figura 21: Vista ampliada de estimaciones por ambos métodos.

Para medir en términos de porcentaje que tan semejante o diferente es una estimación de la otra, se hacen las siguientes definiciones:

Sea:

$$\Delta Y_{ECF,t} = |\hat{Y}_t - Y_t|$$

$$\Delta Y_{ARMA,t} = |Y_{ARMA,t} - Y_t|$$

Tal que:

$$\Delta Y_{min,t} = \min\{\Delta Y_{ECF,t}, \Delta Y_{ARMA,t}\}$$

$$\Delta Y_{max,t} = \max\{\Delta Y_{ECF,t}, \Delta Y_{ARMA,t}\}$$

Y finalmente, la semejanza porcentual entre la mejor estimación y la otra será:

$$\% \Delta Y_t = \frac{\Delta Y_{min,t}}{\Delta Y_{max,t}} * 100 \quad (4.35)$$

$\% \Delta Y_t$ tendrá un valor menor a 100%, en cuyo caso las dos estimaciones serían igual de buenas, mientras más cercano sea el valor a 0, más diferentes serán las estimaciones.

Para el caso del PIB Mexicano trabajado en esta sección se tendrá para el periodo $t = 2017$:

$$\Delta Y_{ECF,2017} = |18143990 - 18163490| = 19,500$$

$$\Delta Y_{ARMA,2017} = |18149698 - 18163490| = 13,792$$

$$\Delta Y_{min,2017} = 13,792$$

$$\Delta Y_{max,2017} = 19,500$$

$$\% \Delta Y_{2017} = \frac{13,792}{19,500} * 100 = 41.38\%$$

Análogamente para el periodo $t = 2018$

$$\% \Delta Y_{2018} = 95.28\%$$

Lo que indica que ambas estimaciones son casi iguales, para este caso en particular, la estimación del modelo $ARMA(1, 1)$ es más cercana al valor real, aunque la diferencia entre ambos métodos no es sustancial, ya que ambos valores quedan dentro de los rangos de error propuestos por los dos métodos.

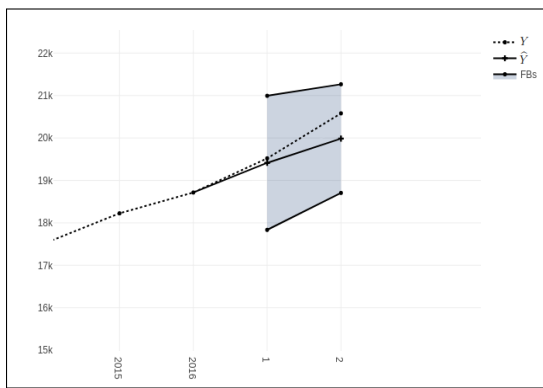
4.2 Comparativo de métodos estimativos para PIB de EEUU

Repitiendo el procedimiento de la sección anterior para datos de producción interna bruta de Estados Unidos, estimando para los periodos 2017 y 2018 a partir de datos obtenidos de la

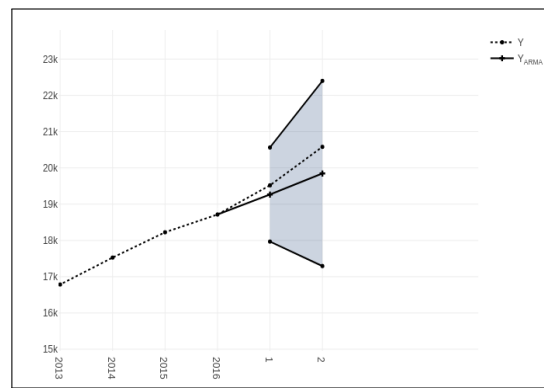
"Federal Reserve Economic Data" (FRED, 2019). Se obtienen los resultados mostrados en la tabla 12 que compara el PIB efectivo obtenido por ambos métodos, indicando en negritas la mejor estimación.

Tabla 12: Comparativo de estimación para PIB efectivo de EEUU entre ECF y ARMA(1,1)

	2017	2018
PIB efectivo	19,519.42	20,580.22
ECF	19,413.66	19,985.16
ARMA(1,1)	19,265.04	19,846.04



(a) Estimación por ECF



(b) Estimación por ARMA(1,1)

Figura 22: Vista ampliada de estimaciones por ambos métodos para PIB de EEUU

La figura 22 muestra una vista ampliada de los resultados obtenidos, y se comprueba que, en este caso y para ambos periodos, el método ECF obtiene mejores estimaciones.

Aplicando la expresión 4.35 se obtiene la semejanza porcentual entre ambos métodos:

$$\% \Delta Y_{2017} = 41.57\%$$

$$\% \Delta Y_{2018} = 81.05\%$$

Lo que permite observar que ambas estimaciones son relativamente cercanas entre sí, aún cuando el método ECF generó los mejores resultados.

4.3 Comparativo de métodos estimativos para PIB de países de la OCDE

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (*OCDE*) es una sociedad de países que promueve políticas para mejorar el bienestar económico y social alrededor del mundo. Actualmente está compuesta por treinta y seis países miembros, incluyendo México.

Los países que conforman esta sociedad resultan de particular interés ya que en general cuenta con datos históricos desde hace varias décadas y se apegan a políticas económicas similares.

Por lo anterior, se emplearon los métodos *ECF* y *ARMA(1, 1)* para estimar los valores de PIB de los últimos periodos, llevando a cabo tres análisis independientes.

1. Estimación para el periodo 2018.
2. Estimaciones para los periodos 2017 y 2018.
3. Estimaciones para los periodos 2017, 2018 y 2019.

4.3.1 Estimación para el periodo 2018

Los resultados de la estimación de sólo el periodo 2018 se muestran en Apéndice A, a partir de los cuales se resumen los siguientes resultados:

- *ECF* obtuvo mejores estimaciones el 47.22% de las veces (17 de 36).
- *ARMA(1, 1)* obtuvo mejores estimaciones el 52.78% de las veces (19 de 36).
- El promedio de $\% \Delta Y_{2018} = 35.88\%$, es decir, en promedio las estimaciones son 35.88% semejantes entre sí.

4.3.2 Estimaciones para los periodos 2017 y 2018

Los resultados de ejecutar los métodos para estimar los periodos 2017 y 2018 se muestran en el Apéndice B, a partir de los cuales se resumen los siguientes resultados.

Para el primer periodo (2017):

- *ECF* obtuvo mejores estimaciones el 63.89% de las veces (23 de 36).
- *ARMA(1, 1)* obtuvo mejores estimaciones el 36.11% de las veces (13 de 36).
- El promedio de $\% \Delta Y_{2017} = 35.82\%$, es decir, en promedio las estimaciones son 35.82% semejantes entre sí.

Para el segundo periodo (2018):

- *ECF* obtuvo mejores estimaciones el 36.11% de las veces (13 de 36).
- *ARMA(1, 1)* obtuvo mejores estimaciones el 36.89% de las veces (13 de 36).
- El promedio de $\% \Delta Y_{2018} = 35.27\%$.

4.3.3 Estimación para los periodos 2017, 2018 y 2019

Los resultados de ejecutar los métodos para estimar los periodos 2016, 2017 y 2018 se muestran en el Apéndice C, a partir de los cuales se resumen los siguientes resultados.

Para el primer periodo (2016):

- *ECF* obtuvo mejores estimaciones el 52.78% de las veces (19 de 36).
- *ARMA(1, 1)* obtuvo mejores estimaciones el 47.22% de las veces (17 de 36).
- El promedio de $\% \Delta Y_{2016} = 41.62\%$.

Para el segundo periodo (2017):

- *ECF* obtuvo mejores estimaciones el 33.33% de las veces (12 de 36).
- *ARMA(1, 1)* obtuvo mejores estimaciones el 66.67% de las veces (24 de 36).
- El promedio de $\% \Delta Y_{2017} = 40.48\%$.

Para el tercer periodo (2018):

- *ECF* obtuvo mejores estimaciones el 22.22% de las veces (8 de 36).
- *ARMA(1, 1)* obtuvo mejores estimaciones el 77.78% de las veces (28 de 36).
- El promedio de $\% \Delta Y_{2018} = 30.32\%$.

4.4 Comparativo de métodos estimativos para PIB de países del mundo

Usando la base de datos de producción interna bruta para los países del mundo, se llevó a cabo el análisis para la estimación de los últimos tres periodos (2016, 2017 y 2018) omitiendo aquellos países que tenían información discontinua, con lo que se analizaron doscientos cincuenta y dos series de datos obteniendo los siguientes resultados (BancoMundial, 2019).

Para el primer periodo (2016):

- *ECF* obtuvo mejores estimaciones el 45.24% de las veces (114 de 252).
- *ARMA(1, 1)* obtuvo mejores estimaciones el 54.76% de las veces (138 de 252).
- El promedio de $\% \Delta Y_{2016} = 39.59\%$.

Para el segundo periodo (2017):

- *ECF* obtuvo mejores estimaciones el 53.17% de las veces (134 de 252).
- *ARMA(1, 1)* obtuvo mejores estimaciones el 46.82% de las veces (118 de 252).
- El promedio de $\% \Delta Y_{2017} = 43.39\%$.

Para el tercer periodo (2018):

- *ECF* obtuvo mejores estimaciones el 43.25% de las veces (109 de 252).
- *ARMA(1, 1)* obtuvo mejores estimaciones el 56.74% de las veces (143 de 252).
- El promedio de $\% \Delta Y_{2018} = 37.41\%$.

4.4.1 Cuando es conveniente usar ECF

El modelo *ECF* resulta particularmente útil en aquellos casos que las estimaciones obtenidas por el modelo *ARMA* están fuera de la desviación estándar de la tendencia polinomial.

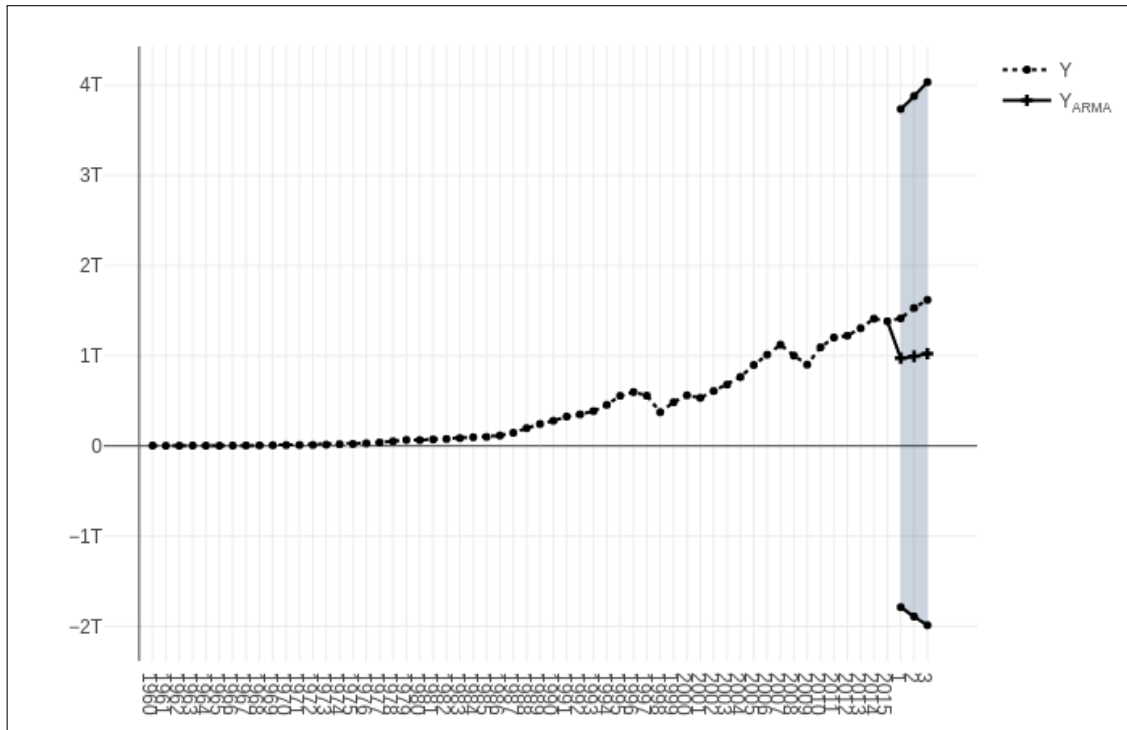


Figura 23: PIB efectivo estimado para Corea con el método *ARMA*(1, 1) ¹⁹

En la figura 23 se puede observar como, para el PIB de Corea, la estimación que hace el modelo *ARMA*(1, 1) se aleja visiblemente de la tendencia de la serie de datos.

Por su parte, el modelo *ECF*, por la naturaleza de los cálculos que realiza, no puede general saltos tan abruptos en las estimaciones, pudiendo confiar en que los pronósticos que realice serán, en casos como este, más cercanos al valor real; tal como se puede observar en la figura 24.

¹⁹Datos obtenidos del Banco Mundial (BancoMundial, 2019).

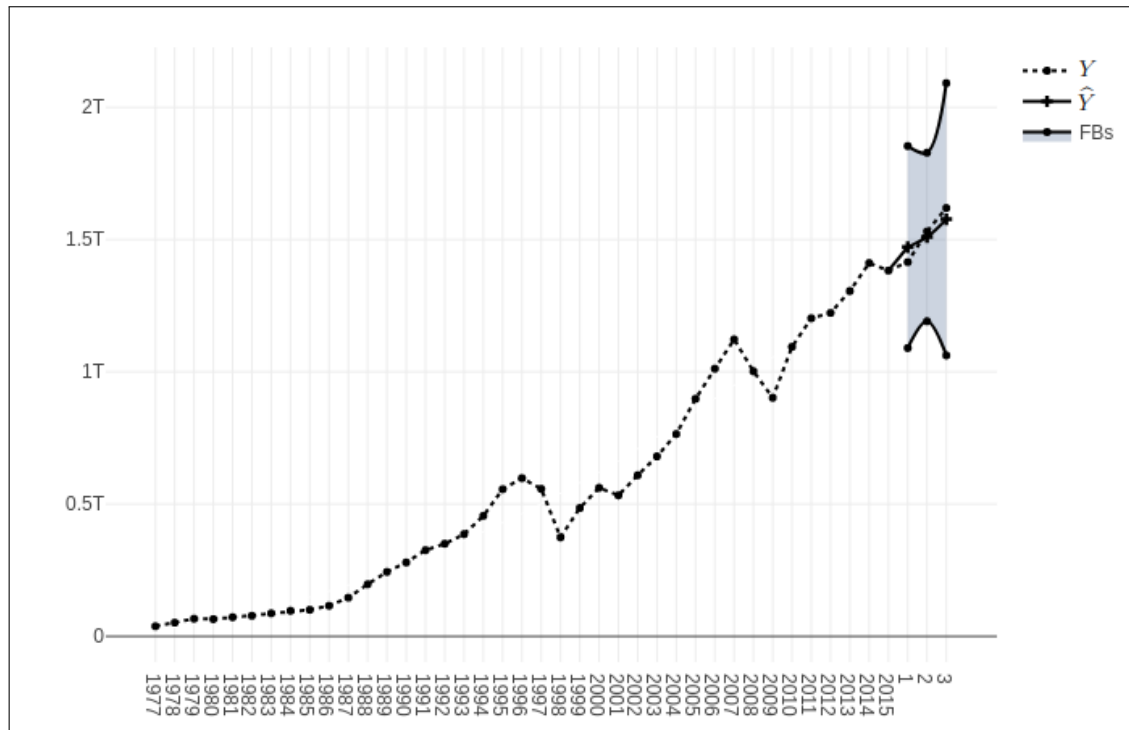


Figura 24: PIB efectivo estimado para Corea con el método *ECF*

4.4.2 Cuando NO es conveniente usar *ECF*

el método *ECF* propuesto en esta tesis, busca componentes frecuenciales iterativamente en subsets de la serie de datos original, de tal forma que, si sólo encuentra componentes frecuenciales en algunos pocos de los últimos datos de la misma, significa que de hecho no es una serie que tenga un comportamiento particularmente periódico.

En la figura 25 se muestra como ejemplo el caso de Canadá, al aplicar el método *ECF* se puede ver que sólo encuentra componentes frecuenciales relevantes en los últimos dieciocho periodos (1997-2015) a pesar de contar con datos desde el año 1961, y es notorio a primera vista que las estimaciones obtenidas aparentemente tratan de completar un senoide que inicia en el primer año observable en la gráfica.

²⁰Datos obtenidos del Banco Mundial (BancoMundial, 2019).

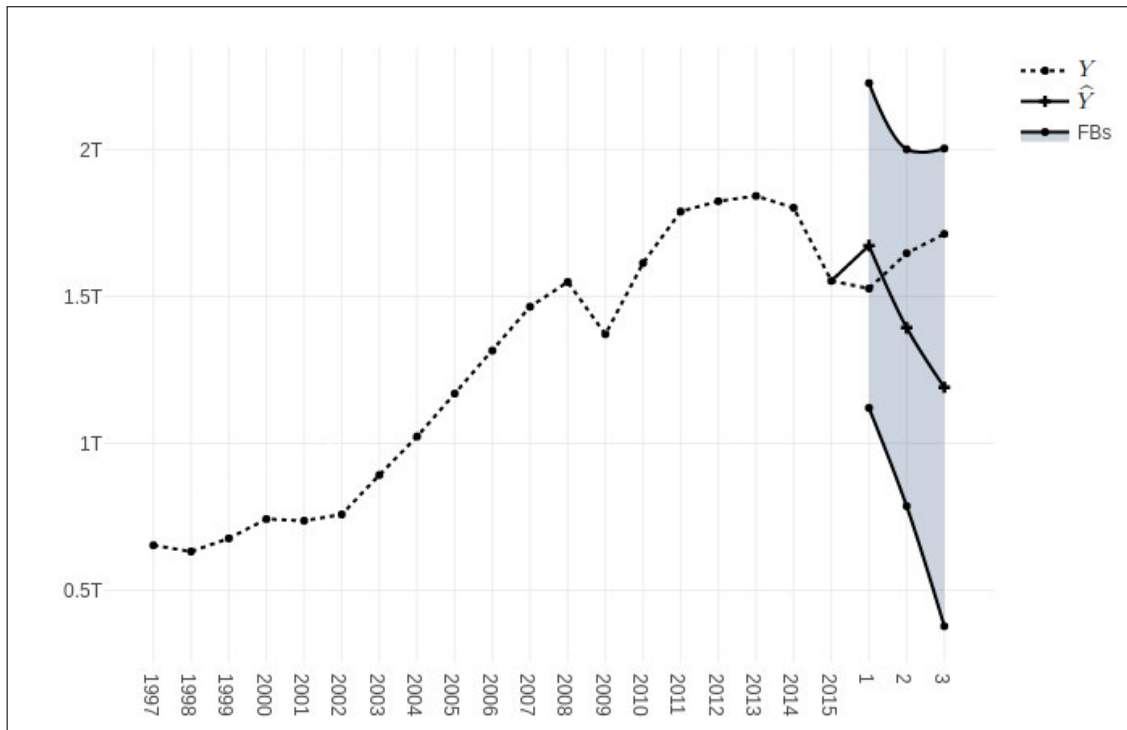


Figura 25: PIB efectivo estimado para Canadá con el método ECF ²⁰

En situaciones como la anterior, se puede concluir que la serie de datos no cuenta con componentes frecuenciales relevantes y es conveniente recurrir a otro tipo de métodos como el $ARMA$. El resultado obtenido por $ARMA(1, 1)$ para la estimación del PIB Canadiense se encuentra en la figura 26.

Los ejemplos usados en esta y la anterior sección muestran las circunstancias en las que el método ECF puede ser efectivo y cuando no, y como ECF muestra intuitiva y claramente cuando las estimaciones que genera son confiables y cuando no.

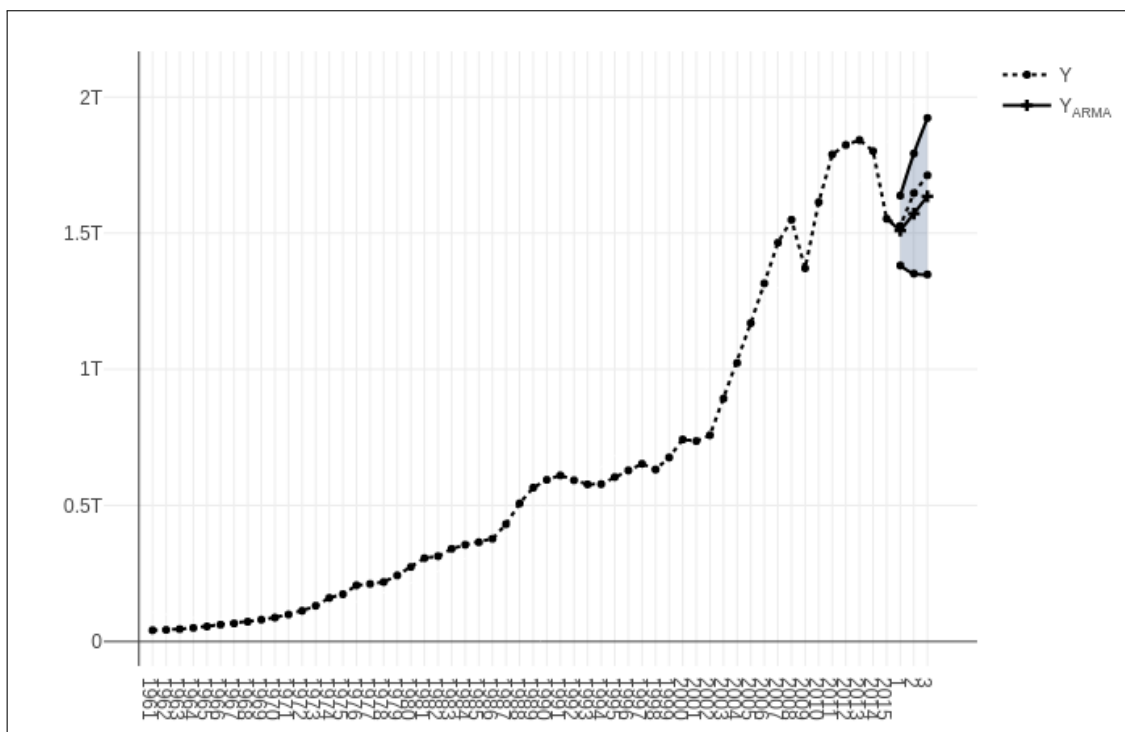


Figura 26: PIB efectivo estimado para Canadá con el método $ARMA(1,1)$

Capítulo Complementario

MANUAL DE USO DEL PROGRAMA

5.1 Uso de programa para estimación por modelo ECF

El código para la obtención del periodograma desarrollado por Wichert & Fokianos se encuentra sólo disponible en el software de análisis estadístico *R*, motivo por el cual, el programa para la implementación del método *ECF* se desarrolló en el mismo entorno y lenguaje de programación.

Previo a la ejecución del código se deberán instalar los siguientes paquetes del entorno *R*;

- **plotly**: Para la elaboración de gráficas enriquecidas.
- **shiny**: Para la graficación en entornos web.
- **GenCycle**: Para la obtención del periodograma de Wichert.

El código procurará llevar a cabo la instalación de dichos paquetes, pero en caso de no contar con las dependencias de software necesarias, esto no será posible, por lo que es necesario comprobar su disponibilidad.

5.1.1 Estructura del archivo de datos

Los datos deben estar contenidos en un fichero separado por comas (.csv), y constar de dos columnas, la primera llamada **Date** y la segunda **GDP**, la columna "Date" se leerá como un

vector de cadenas de texto y se espera que contenga los años o periodos de cada observación. La columna "GDP" se leerá como un vector de números y deberá contener sin formato los valores de *PIB efectivo* correspondiente a cada periodo de tiempo de la columna "Date".

Las dos columnas deben tener la misma cantidad de datos. A continuación, se muestra parte del contenido del archivo empleado en las secciones anteriores.

Tabla 13: *Ejemplo de estructura de un archivo de datos*

Date	GDP
1980	7642962
1981	8368150
...	...
2017	18163490
2018	18525881

5.1.2 Estructura del código

El programa consta de tres ficheros de código con los siguientes nombres:

1. **Functions.R**
2. **SingleIteration.R**
3. **FullModel.R**

Functions.R Contiene todas las funciones que se emplean durante la ejecución del programa principal, se ejecuta previamente a la ejecución de cualquiera de los otros dos ficheros y no dispone de parámetros configurables por el usuario. Al ejecutarse, almacenará en memoria todas las funciones requeridas por cualquiera de los otros dos programas.

SingleIteration.R Contiene el código para la estimación del PIB real y de corto plazo, para un tamaño específico de muestras o número de observaciones $n = \dim(K)$.

FullModel.R Contiene el código para la obtención de la estimación definitiva $\widehat{Y}_t[M+p]$ y tomará en cuenta la totalidad de los datos.

En las siguientes subsecciones se explica el uso de cada uno de estos programas.

5.1.3 Uso de **SingleIteration.R** para la estimación parcial para PIB real y de corto plazo

El uso de este programa es principalmente para entender el funcionamiento del método *ECF* mediante la realización detallada del procedimiento para iteraciones individuales.

Los parámetros configurables son los siguientes:

- **path**: Especifica la ruta del archivo con la serie de datos de PIB.
- **filename**: Especifica el nombre del archivo que contiene los datos de PIB.
- **serie.size**: Especifica la cantidad de observaciones de la serie de datos a emplear de la última observación hacia atrás. Para emplear todos los datos utilizar la constante definida **alldata**.
- **avoid.samples**: Especifica el número de las últimas observaciones que se desean omitir del cálculo, esto permite comparar el valor real de la serie de datos, contra el valor estimado por el método.
- **estimate.values**: Permite especificar la cantidad de estimaciones a llevar a cabo, en caso de que **avoid.samples** > 1 se mostrará el comparativo entre los valores estimados y reales.

²¹El código mostrado se ejecutó sobre un sistema operativo Linux, para Windows o MAC OSx puede cambiar la estructura de la cadena de directorios

```

##### INICIA: SECCION DE CONFIGURACION DE PARAMETROS #####
      path="/media/Documents/Data"           #ESPECIFICAR LA UBICACION DE CARPETA DE DATOS
      filename="MEX-GDP-YR-INEGI.csv"        #ESPECIFICAR EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE ORIGEN

setwd(path)                                #NO MODIFICAR
datos=read.csv(filename,sep=",")           #NO MODIFICAR
alldata=length(datos$GDP)                  #NO MODIFICAR

      serie.size=alldata                    #ESPECIFICAR LA CANTIDAD DE DATOS A USAR, 'alldata' PARA USAR TODOS LOS DATOS
      avoid.samples=0                      #ESPECIFICAR LA CANTIDAD DE DATOS DE LA COLA A OMITIR DE LA MUESTRA
      estimate.values=3                    #ESPECIFICAR LA CANTIDAD DE VALORES A ESTIMAR ,MAXIMO 9

##### TERMINA: SECCION DE CONFIGURACION DE PARAMETROS #####

```

Figura 27: Ejemplo de configuración de parámetros en el fichero **SingleIteration.R** ²¹

5.1.4 Salidas del programa **SingleIteration.R**

La ejecución del programa generará tres salidas de tipo *data.frame* y ocho imágenes. Las salidas de tipo *data.frame* corresponde a tablas o vectores de datos con los siguientes nombres:

estimated.sgdp: Contiene los valores estimados de PIB de corto plazo para los periodos especificados.

estimated.rgdp: Contiene los valores estimados de PIB efectivo para los periodos especificados.

correlations: Contiene los valores obtenidos de la correlación de *Pearson*, con los siguientes nombres:

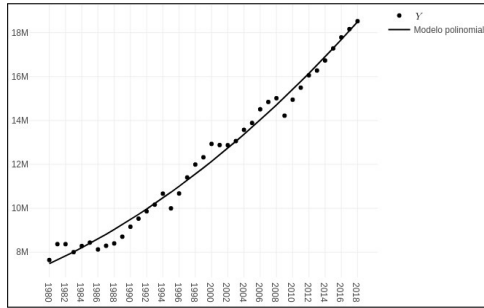
models: Correlación entre el modelo polinomial y el modelo propuesto.

orgmodel: Correlación entre el modelo polinomial y la serie de datos de PIB efectivo.

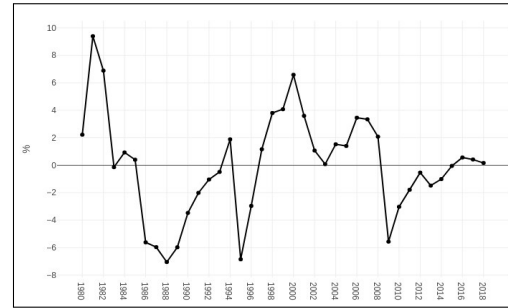
newmodel: Correlación entre el modelo propuesto y la serie de datos de PIB efectivo.

Por otra parte, dado que este programa tiene la finalidad de que el usuario entienda el procedimiento llevado a cabo para la obtención de las estimaciones, genera una gran cantidad de gráficos que muestran el resultado de cada uno de los procedimientos.

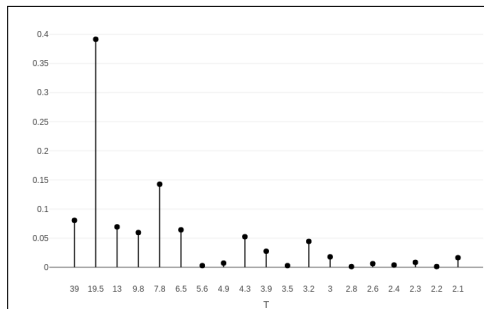
Las primeras cuatro corresponden a:



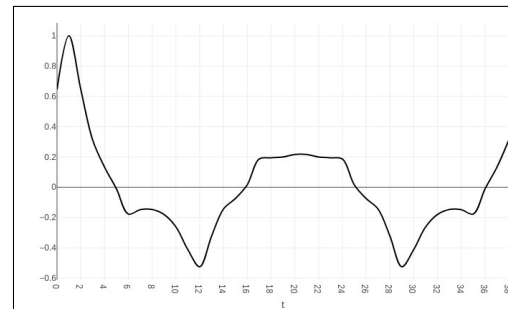
(a) PIB efectivo y tendencia polinómica



(b) PIB de corto plazo



(c) Periodograma de Wichert



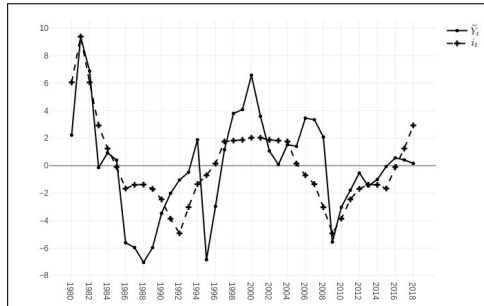
(d) Función de tiempo a partir de armónicas

Figura 28: Primeras cuatro gráficas generadas por **SingleIteration.R**

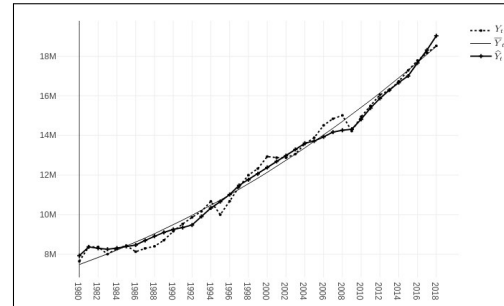
28.b muestra el resultado de eliminar la componente de tendencia polinómica del *PIB efectivo*, mostrados en 28.a.

28.d muestra la forma de la señal compuesta por funciones *cosenoidales* cuyas frecuencias y amplitudes fueron determinadas por el periodograma de Wichert mostrado en 28.c.

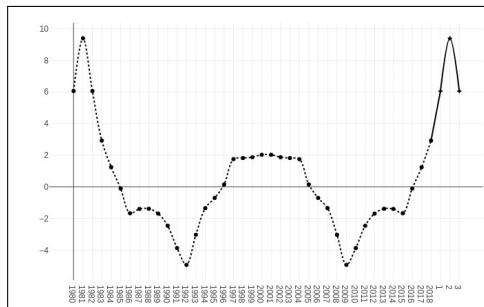
Las últimas cuatro gráficas se muestran en la figura 29



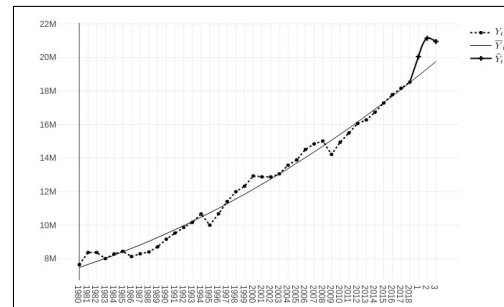
(a) Modelado de PIB de corto plazo



(b) Modelado de PIB efectivo



(c) Estimación de PIB de corto plazo



(d) Estimación de PIB efectivo

Figura 29: Últimas cuatro gráficas generadas por **SingleIteration.R**

29.a muestra un comparativo entre el *PIB de corto plazo* original y el modelo obtenido en la figura 28.b, la figura 29.b muestra el comparativo entre la serie de datos original del *PIB efectivo*, el modelo polinomial, y la estimación mostrada en 28.b una vez reincorporada la tendencia polinómica.

29.c muestra la estimación de *PIB de corto plazo* para los periodos posteriores especificados, y finalmente 29.d muestra el pronóstico de *PIB efectivo* para los mismos periodos.

5.1.5 Uso de FullModel.R para la estimación definitiva de PIB real y de corto plazo

A diferencia de **SingleIteration.R** cuyo propósito era principalmente ilustrativo y de ejecución optativa, en el fichero **FullModel.R** se encuentra el código completo para la ejecución del modelo *ECF*, y dará como resultado los pronósticos solicitados.

Los parámetros configurables son los siguientes:

- **path**: Especifica la ruta del archivo con la serie de datos de *PIB*.
- **filename**: Especifica el nombre del archivo que contiene los datos de *PIB*.
- **avoid.samples**: Especifica el número de las últimas observaciones que se desean omitir del cálculo, esto permite comparar el valor real de la serie de datos, contra el valor estimado por el método.
- **estimate.values**: Permite especificar la cantidad de periodos para llevar a cabo el pronóstico, en caso de que **avoid.samples** > 1 se mostrará el comparativo entre los valores pronosticados y reales.

```
##### INICIA: SECCION DE CONFIGURACION DE PARAMETROS #####
path="/media/Documents/Data"      #ESPECIFICAR LA UBICACION DE CARPETA DE DATOS
filename="MEX-GDP-YR-INEGI.csv"    #ESPECIFICAR EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE ORIGEN

avoid.samples=3                   #ESPECIFICAR LA CANTIDAD DE DATOS DE LA COLA A OMITIR DE LA MUESTRA
estimate.values=3                 #ESPECIFICAR LA CANTIDAD DE VALORES A PREDECIR MAXIMO 9
##### TERMINA: SECCION DE CONFIGURACION DE PARAMETROS #####
```

Figura 30: Ejemplo de configuración de parámetros en el fichero **FullModel.R**

5.1.6 Salidas del programa FullModel.R

La ejecución del programa generará tres salidas de tipo *data.frame* y dos imágenes. Las salidas de tipo *data.frame* corresponde a tablas o matrices de datos con los siguientes nombres:

estimated.sgdp: Contiene los valores estimados de *PIB de corto plazo* para los periodos especificados, incluyendo los valores de las *bandas de frontera*.

estimated.rgdp: Contiene los valores estimados de *PIB efectivo* para los periodos especificados, incluyendo los valores de las *bandas de frontera*.

correlations: Contiene los valores obtenidos de la correlación de *Pearson*, con los siguientes nombres:

iteration: Corresponde al número de iteración, simplemente sumando 3 se puede intuir el tamaño de la serie de datos empleado para la misma.

newmodel: Correlación entre el modelo propuesto y la serie de datos de *PIB efectivo*.

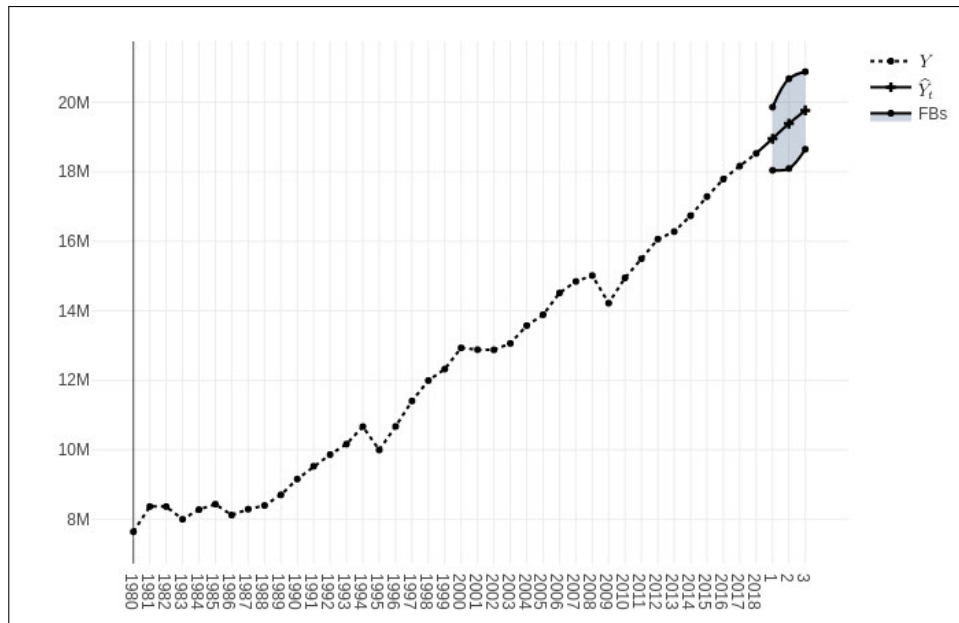
orgmodel: Correlación entre el modelo polinomial y la serie de datos de *PIB efectivo*.

Nota: Para todas las iteraciones, **newmodel** debe ser mayor que **orgmodel**

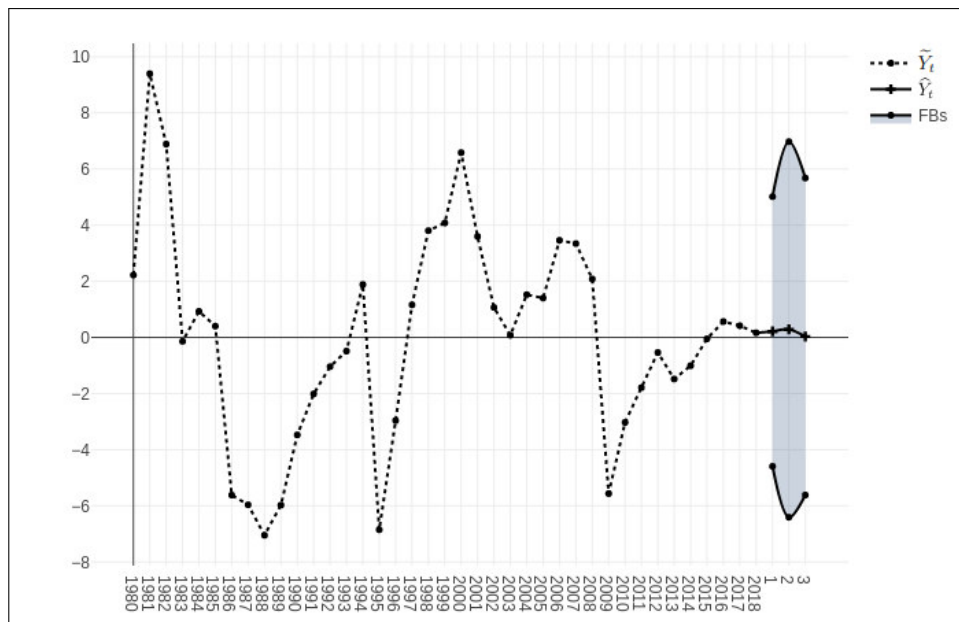
Respecto a las gráficas, se generarán sólo dos, mostrando los resultados de la estimación.

31.a muestra el pronóstico del *PIB efectivo* para los periodos especificados y muestra el comparativo con el modelo polinomial y la serie de datos empleada, en caso de que los pronósticos se lleven a cabo para periodos en los que se tienen observaciones en el archivo de datos, se mostrará el comparativo.

31.b muestra las mismas estimaciones, pero para el *PIB de corto plazo*, contraponiendo también los valores obtenidos a partir de la serie de datos original.



(a) Estimación de PIB efectivo



(b) Estimación de PIB de corto plazo

Figura 31: Gráficas generadas por FullModel.R

5.2 Estimación por modelos *ARIMA*

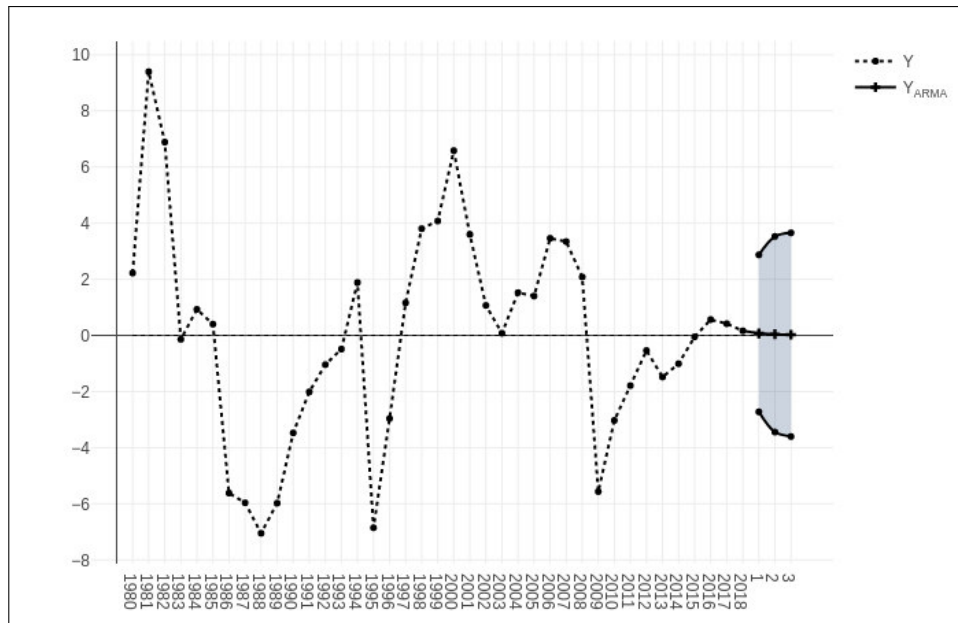
La metodología de *Box – Jenkins* es quizás la más empleada para llevar a cabo pronósticos en series temporales económicas de producción interna bruta ya que consigue las mejores predicciones. Es por ello, que los resultados obtenidos con el método propuesto se comparan con los obtenidos mediante esta metodología, para lo que se ha desarrollado un código en lenguaje *R* que lleve a cabo automatizadamente dicho procedimiento.

En primera instancia es necesario lograr la estacionariedad de la serie de tiempo, lo cual se puede llevar a cabo mediante primeras diferencias, no obstante, para equiparar los métodos tanto como sea posible, se obtendrá el *PIB de corto plazo* eliminando la tendencia polinómica como se explicó en la sección 3.2, logrando así la estacionariedad buscada.

Una vez que se ha eliminado la tendencia y se ha conseguido la estacionariedad de la serie, se procederá a la ejecución del modelo, usando el *ARIMA(1, 0, 1)* o *ARMA(1, 1)*, que se encontró es el que obtiene la mejor estimación de *PIB* para la mayoría de los países que forman parte del estudio.

En la figura 32.a se puede observar el resultado obtenido de ejecutar el código, el cual se encarga de validar la estacionariedad de los datos previo a la ejecución del modelo.

A partir de dicho resultado y siguiendo el procedimiento explicado en la sección 3.5, se incorpora nuevamente la tendencia polinómica para obtener finalmente el pronóstico de *PIB efectivo*, como se muestra en la figura 32.b.



(a) Estimaciones para el PIB mexicano de corto plazo empleando un modelo $ARMA(1,1)$



(b) Estimaciones para el PIB efectivo mexicano empleando un modelo $ARMA(1,1)$

Figura 32: Estimaciones de PIB empleando modelo $ARIMA(1,0,1)$

5.3 Uso de programa para estimación por modelo ARIMA

Al igual que el método *ECF*, la estimación del modelo *ARIMA* se codificó en lenguaje *R* y comparten varias de las dependencias de librerías y paquetes.

El código consta de un solo fichero con nombre **ARIMA_GDP.R** que no requiere la ejecución previa de ningún archivo adicional.

Previo a la ejecución del código se deberán instalar los siguientes paquetes del entorno *R*;

plotly: Para la elaboración de gráficas enriquecidas.

shiny: Para la graficación en entornos web.

tstool: Para el procesamiento de series de tiempo incluyendo modelos *ARIMA*.

El programa procurará llevar a cabo la instalación de dichos paquetes, pero en caso de no contar con las dependencias de software necesarias, esto no será posible, por lo que es necesario comprobar su disponibilidad.

En lo que refiere a la estructura de los archivos con los datos de *PIB* de cada país, debe respetar la misma estructura que se describe en la sección 5.1.1.

Los parámetros configurables son los siguientes:

- **path**: Especifica la ruta del archivo con la serie de datos de *PIB*.
- **filename**: Especifica el nombre del archivo que contiene los datos de *PIB*.
- **avoid.samples**: Especifica el número de las últimas observaciones que se desean omitir del cálculo, esto permite comparar el valor real de la serie de datos, contra el valor pronosticado por el modelo.
- **estimate.values**: Permite especificar el número de periodos para llevar a cabo el pronóstico, en caso de que **avoid.samples** > 1 se mostrará el comparativo entre los

valores pronosticados y reales.

- **p**: Especifica el orden del proceso autorregresivo (componente *AR*).
- **d**: Especifica la cantidad de veces que se debe diferenciar la serie de tiempo para lograr la estacionariedad. (componente *I*).
- **q**: Especifica el orden del proceso de medias móviles (componente *MA*)

```
##### INICIA: SECCION DE CONFIGURACION DE PARAMETROS #####
path="/media/Documents/Tesis/Datos"      #ESPECIFICAR LA UBICACION DE CARPETA DE DATOS
filename="MEX-GDP-YR-INEGI.csv"          #ESPECIFICAR EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE ORIGEN

avoid.samples=0                          #ESPECIFICAR LA CANTIDAD DE DATOS DE LA COLA A OMITIR DE LA MUESTRA
estimate.values=3                        #ESPECIFICAR LA CANTIDAD DE VALORES A ESTIMAR ,MAXIMO 9

p=1                                       #ESPECIFICAR LOS TERMINOS AUTORREGRESIVOS
d=0                                       #ESPECIFICAR LA CANTIDAD DE DIFERENCIACIONES
q=1                                       #ESPECIFICAR LOS TERMINOS DE MEDIAS MOVILES

##### TERMINA: SECCION DE CONFIGURACION DE PARAMETROS #####
```

Figura 33: Ejemplo de configuración de parámetros en el fichero **ARIMA_GDP.R**

Las salidas producidas por la ejecución del programa serán las imágenes correspondientes a los pronósticos de *PIB de corto plazo* y *efectivo* que se muestran en la figura 32 mostrando como área sombreada el intervalo de confianza al 95% , además de imprimir en pantalla el valor de las estimaciones solicitadas, resultado que es almacenado en los vectores **ESTIMATED.GDPS** y **ESTIMATED.RGDP** para la estimación de *PIB de corto plazo* y *efectivo* respectivamente.

CONCLUSIONES

Con el método de *Estimación de componentes frecuenciales (ECF)*, propuesto en esta Tesis, se han llevado a cabo pronósticos anuales del *PIB* de los países que conforman la *OCDE* para los últimos uno, dos y tres años de los que se tenía registro al momento de la elaboración de la presente Tesis; resultados que comparados con los obtenidos por el método *ARMA(1, 1)* se resumen en lo siguiente:

Para el primer periodo pronosticado el método *ECF* genera mejores resultados que el método *ARMA(1, 1)* aproximadamente la mitad de las veces, mientras que para el segundo periodo sólo es mejor aproximadamente la tercera parte de las ocasiones.

Cuando *ECF* obtiene mejores pronósticos que *ARMA(1, 1)*, la diferencia es de aproximadamente %35; en caso contrario, cuando *ARMA(1, 1)* obtiene mejores pronósticos, la diferencia también es de aproximadamente %35.

Para el caso del resto de los países del mundo, se llevaron a cabo pronósticos de *PIB* pero sólo para los últimos tres años, obteniendo resultados iguales a los anteriormente descritos.

Se puede concluir que muchas de las series de *PIB* de las naciones, pero no todas, tienen acentuadas *componentes frecuenciales* en cuyo caso el método *ECF* genera buenos resultados. Sin que esto signifique que *ECF* es mejor que el *ARMA(1, 1)* pero si demuestra ser una herramienta adicional para la elaboración de pronósticos, particularmente para el pronóstico del periodo posterior inmediato a los disponibles en la serie de datos, y puede ser de gran utilidad en aquellos casos en los que los resultados de *ARMA(1, 1)* se alejan

sustancialmente de la tendencia polinómica, en cuyo contexto, los pronósticos por *ECF* son considerablemente mejores.

Cabe mencionar que *ECF* fue desarrollado específicamente para pronóstico de *PIB* anual, por lo que no se puede generalizar los resultados a otro tipo de serie de datos, en cuyo caso sería necesario profundizar en su estudio y generación de datos comparativos, dejando oportunidades abiertas para la exploración del uso de la herramienta para otros fines o ámbitos.

APÉNDICE A

Comparativo de los resultados obtenidos de la ejecución del método de componentes frecuenciales y el modelo $ARMA(1,1)$ llevando a cabo la estimación para un sólo periodo (2018) para los países miembros de la OCDE con información obtenida del Banco Mundial.

*Nota: Para cada país se indica en **negritas** la mejor estimación.*

AUS (Australia)

	2018
PIB efectivo	1.43e+12
ECF	1.31e+12
ARMA(1,1)	1.46e+12

Mejor estimación: **ARMA(1,1)**

AUT (Austria)

	2018
PIB efectivo	4.54e+11
ECF	4.25e+11
ARMA(1,1)	6.66e+11

Mejor estimación: **ECF**

BEL (Bélgica)

	2018
PIB efectivo	5.32e+11
ECF	5.01e+11
ARMA(1,1)	5.08e+11

Mejor estimación: **ARMA(1,1)**

CAN (Canadá)

	2018
PIB efectivo	1.71e+12
ECF	1.63e+12
ARMA(1,1)	1.73e+12

Mejor estimación: **ARMA(1,1)**

CHE (Suiza)

	2018
PIB efectivo	7.06e+11
ECF	6.84e+11
ARMA(1,1)	7.04e+11

Mejor estimación: **ARMA(1,1)**

CHL (Chile)

	2018
PIB efectivo	2.98e+11
ECF	2.91e+11
ARMA(1,1)	-2.96e+10

Mejor estimación: **ECF**

CZE (Rep. Checa)

	2018
PIB efectivo	2.45e+11
ECF	2.18e+11
ARMA(1,1)	2.41e+11

Mejor estimación: **ARMA(1,1)**

DEU (Alemania)

	2018
PIB efectivo	4.00e+12
ECF	3.80e+12
ARMA(1,1)	3.81e+12

Mejor estimación: **ARMA(1,1)**

DNK (Dinamarca)

	2018
PIB efectivo	3.52e+10
ECF	3.38e+11
ARMA(1,1)	9.53e+10

Mejor estimación: **ECF**

ESP (España)

	2018
PIB efectivo	1.31e+12
ECF	1.20e+12
ARMA(1,1)	1.41e+12

Mejor estimación: ARMA(1,1)

EST (Estonia)

	2018
PIB efectivo	3.03e+10
ECF	2.65e+10
ARMA(1,1)	2.85e+10

Mejor estimación: ARMA(1,1)

FIN (Finlandia)

	2018
PIB efectivo	2.74e+11
ECF	2.58e+11
ARMA(1,1)	1.65e+11

Mejor estimación: ECF

FRA (Francia)

	2018
PIB efectivo	2.78e+12
ECF	2.63e+12
ARMA(1,1)	1.38e+12

Mejor estimación: ECF

GBR (Reino Unido)

	2018
PIB efectivo	2.83e+12
ECF	2.80e+12
ARMA(1,1)	2.73e+12

Mejor estimación: ECF

GRC (Grecia)

	2018
PIB efectivo	2.18e+11
ECF	2.01e+11
ARMA(1,1)	2.42e+11

Mejor estimación: ECF

HUN (Hungría)

	2018
PIB efectivo	1.56e+11
ECF	1.41e+11
ARMA(1,1)	1.42e+11

Mejor estimación: ARMA(1,1)

IRL (Irlanda)

	2018
PIB efectivo	3.82e+11
ECF	3.54e+11
ARMA(1,1)	-6.03e+11

Mejor estimación: ECF

ISL (Islandia)

	2018
PIB efectivo	2.59e+10
ECF	2.32e+10
ARMA(1,1)	2.47e+10

Mejor estimación: ARMA(1,1)

ISR (Israel)

	2018
PIB efectivo	3.70e+11
ECF	3.76e+11
ARMA(1,1)	3.74e+11

Mejor estimación: ARMA(1,1)

ITA (Italia)

	2018
PIB efectivo	2.07e+12
ECF	1.92e+12
ARMA(1,1)	2.01e+12

Mejor estimación: ARMA(1,1)

JPN (Japón)

	2018
PIB efectivo	4.97e+12
ECF	4.67e+12
ARMA(1,1)	5.02e+12

Mejor estimación: ARMA(1,1)

KOR (Corea)

	2018
PIB efectivo	1.62e+12
ECF	1.62e+12
ARMA(1,1)	5.19e+11

Mejor estimación: ECF

LTU (Lituania)

	2018
PIB efectivo	5.33e+10
ECF	5.06e+10
ARMA(1,1)	4.92e+10

Mejor estimación: ECF

LUX (Luxemburgo)

	2018
PIB efectivo	6.95e+10
ECF	6.53e+10
ARMA(1,1)	6.43e+10

Mejor estimación: ECF

LVA (Letonia)

	2018
PIB efectivo	3.48e+10
ECF	2.99e+10
ARMA(1,1)	3.53e+10

Mejor estimación: ARMA(1,1)

MEX (México)

	2018
PIB efectivo	1.22e+12
ECF	1.21e+12
ARMA(1,1)	1.29e+12

Mejor estimación: ECF

NLD (Países Bajos)

	2018
PIB efectivo	9.14e+11
ECF	8.42e+11
ARMA(1,1)	1.15e+12

Mejor estimación: ECF

NOR (Noruega)

	2018
PIB efectivo	4.35e+11
ECF	3.94e+11
ARMA(1,1)	4.20e+11

Mejor estimación: ARMA(1,1)

NZL (Nueva Zelanda)

	2018
PIB efectivo	2.05e+11
ECF	2.14e+11
ARMA(1,1)	2.08e+11

Mejor estimación: ARMA(1,1)

POL (Polonia)

	2018
PIB efectivo	5.86e+11
ECF	5.39e+11
ARMA(1,1)	5.75e+11

Mejor estimación: ARMA(1,1)

PRT (Portugal)

	2018
PIB efectivo	2.38e+11
ECF	2.16e+11
ARMA(1,1)	1.83e+11

Mejor estimación: ECF

SVK (Rep. Eslovaca)

	2018
PIB efectivo	1.06e+11
ECF	9.78e+10
ARMA(1,1)	9.63e+10

Mejor estimación: ECF

SVN (Eslovenia)

	2018
PIB efectivo	5.42e+10
ECF	4.91e+10
ARMA(1,1)	5.18e+10

Mejor estimación: ARMA(1,1)

SWE (Suecia)

	2018
PIB efectivo	5.51e+11
ECF	5.55e+11
ARMA(1,1)	5.65e+11

Mejor estimación: **ECF**

TUR (Turquía)

	2018
PIB efectivo	7.67e+11
ECF	9.22e+11
ARMA(1,1)	8.90e+12

Mejor estimación: **ECF**

USA (Estados Unidos)

	2018
PIB efectivo	2.05e+13
ECF	2.01e+13
ARMA(1,1)	2.03e+13

Mejor estimación: **ARMA(1,1)**

APÉNDICE B

Comparativo de los resultados obtenidos de la ejecución del método de componentes frecuenciales y el modelo $ARMA(1,1)$ llevando a cabo la estimación para dos periodos (2017-2018) para los países miembros de la OCDE con información obtenida del Banco Mundial.

*Nota: Para cada país se indica en **negritas** la mejor estimación.*

AUS (Australia)

	2017	2018
PIB efectivo	1.33e+12	1.43e+12
ECF	1.12e+12	8.15e+11
ARMA(1,1)	1.20e+12	1.26e+12

Mejor estimación 1er periodo: **ARMA(1,1)**

Mejor estimación 2do periodo: **ARMA(1,1)**

AUT (Austria)

	2017	2018
PIB efectivo	4.17e+11	4.56e+11
ECF	4.09e+11	3.64e+11
ARMA(1,1)	1.49e+11	1.57e+11

Mejor estimación 1er periodo: **ECF**

Mejor estimación 2do periodo: **ECF**

BEL (Bélgica)

	2017	2018
PIB efectivo	4.95e+11	5.32e+11
ECF	4.86e+11	4.27e+11
ARMA(1,1)	-9.37e+10	1.19e+12

Mejor estimación 1er periodo: **ECF**

Mejor estimación 2do periodo: **ECF**

CAN (Canadá)

	2017	2018
PIB efectivo	1.65e+12	1.71e+12
ECF	1.55e+12	1.31e+12
ARMA(1,1)	1.60e+12	1.68e+12

Mejor estimación 1er periodo: **ARMA(1,1)**

Mejor estimación 2do periodo: **ARMA(1,1)**

CHE (Suiza)

	2017	2018
PIB efectivo	6.79e+11	7.06e+11
ECF	7.20e+11	6.65e+11
ARMA(1,1)	6.91e+11	7.19e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

CHL (Chile)

	2017	2018
PIB efectivo	2.78e+11	2.98e+11
ECF	2.66e+11	2.34e+11
ARMA(1,1)	2.09e+11	2.17e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

CZE (Rep. Checa)

	2017	2018
PIB efectivo	2.16e+11	2.45e+11
ECF	1.89e+11	1.65e+11
ARMA(1,1)	2.27e+11	2.58e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

DEU (Alemania)

	2017	2018
PIB efectivo	3.69e+12	4.00e+12
ECF	3.64e+12	3.36e+12
ARMA(1,1)	3.86e+12	4.06e+12

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

DNK (Dinamarca)

	2017	2018
PIB efectivo	3.30e+11	3.52e+11
ECF	3.18e+11	2.83e+11
ARMA(1,1)	6.93e+11	6.88e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

ESP (España)

	2017	2018
PIB efectivo	1.31e+12	1.43e+12
ECF	1.20e+12	1.02e+12
ARMA(1,1)	2.56e+12	2.53e+12

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

EST (Estonia)

	2017	2018
PIB efectivo	2.66e+10	3.03e+10
ECF	2.39e+10	2.19e+10
ARMA(1,1)	2.80e+10	3.10e+10

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

FIN (Finlandia)

	2017	2018
PIB efectivo	2.52e+11	2.74e+11
ECF	2.44e+11	2.13e+11
ARMA(1,1)	3.11e+11	3.14e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

FRA (Francia)

	2017	2018
PIB efectivo	2.59e+12	2.78e+12
ECF	2.51e+12	2.18e+12
ARMA(1,1)	2.23e+12	2.65e+12

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

GBR (Reino Unido)

	2017	2018
PIB efectivo	2.64e+12	2.83e+12
ECF	2.91e+12	2.78e+12
ARMA(1,1)	2.00e+12	2.50e+12

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

GRC (Grecia)

	2017	2018
PIB efectivo	2.03e+11	2.18e+11
ECF	1.87e+11	1.34e+11
ARMA(1,1)	3.81e+11	3.81e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

HUN (Hungría)

	2017	2018
PIB efectivo	1.40e+11	1.56e+11
ECF	1.25e+11	1.08e+11
ARMA(1,1)	1.44e+11	1.52e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

IRL (Irlanda)

	2017	2018
PIB efectivo	3.35e+11	3.82e+11
ECF	3.18e+11	3.23e+11
ARMA(1,1)	4.25e+11	4.35e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

ISL (Islandia)

	2017	2018
PIB efectivo	2.45e+10	2.59e+10
ECF	2.10e+10	2.19e+10
ARMA(1,1)	2.28e+10	2.29e+10

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

ISR (Israel)

	2017	2018
PIB efectivo	3.53e+11	3.70e+11
ECF	3.49e+11	3.42e+11
ARMA(1,1)	3.41e+11	3.60e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

ITA (Italia)

	2017	2018
PIB efectivo	1.95e+12	2.07e+12
ECF	1.88e+12	1.62e+12
ARMA(1,1)	1.53e+12	1.81e+12

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

JPN (Japón)

	2017	2018
PIB efectivo	4.86e+12	4.97e+12
ECF	4.65e+12	4.58e+12
ARMA(1,1)	5.04e+12	5.06e+12

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

KOR (Corea)

	2017	2018
PIB efectivo	1.41e+12	1.53e+12
ECF	1.48e+12	1.52e+12
ARMA(1,1)	1.01e+12	1.05e+12

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

LTU (Lituania)

	2017	2018
PIB efectivo	4.75e+10	5.33e+10
ECF	4.35e+10	3.82e+10
ARMA(1,1)	5.35e+10	5.96e+10

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

LUX (Luxemburgo)

	2017	2018
PIB efectivo	6.23e+10	6.95e+10
ECF	6.38e+10	5.55e+10
ARMA(1,1)	6.48e+10	6.81e+10

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

LVA (Letonia)

	2017	2018
PIB efectivo	3.05e+10	3.48e+10
ECF	2.72e+10	2.37e+10
ARMA(1,1)	3.25e+10	3.83e+10

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

MEX (México)

	2017	2018
PIB efectivo	1.16e+12	1.22e+12
ECF	1.20e+12	1.15e+12
ARMA(1,1)	1.16e+12	1.28e+12

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ECF

NLD (Países Bajos)

	2017	2018
PIB efectivo	8.32e+11	9.14e+11
ECF	7.89e+11	6.91e+11
ARMA(1,1)	5.84e+11	6.47e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

NOR (Noruega)

	2017	2018
PIB efectivo	3.99e+11	4.35e+11
ECF	3.82e+11	2.68e+11
ARMA(1,1)	3.97e+11	4.18e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

NZL (Nueva Zelanda)

	2017	2018
PIB efectivo	2.03e+11	2.05e+11
ECF	2.00e+11	1.91e+11
ARMA(1,1)	2.07e+11	2.15e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

POL (Polonia)

	2017	2018
PIB efectivo	5.26e+11	5.86e+11
ECF	4.82e+11	4.05e+11
ARMA(1,1)	5.19e+11	5.63e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

PRT (Portugal)

	2017	2018
PIB efectivo	2.19e+11	2.38e+11
ECF	2.02e+11	1.76e+11
ARMA(1,1)	1.58e+11	1.85e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

SVK (Rep. Eslovaca)

	2017	2018
PIB efectivo	9.56e+10	1.06e+11
ECF	9.32e+10	7.80e+10
ARMA(1,1)	1.08e+11	1.20e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

SVN (Eslovenia)

	2017	2018
PIB efectivo	4.85e+10	5.42e+10
ECF	4.47e+10	3.84e+10
ARMA(1,1)	4.98e+10	5.40e+10

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

SWE (Suecia)

	2017	2018
PIB efectivo	5.36e+11	5.51e+11
ECF	5.48e+11	4.97e+11
ARMA(1,1)	5.56e+11	5.81e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

TUR (Turquía)

	2017	2018
PIB efectivo	8.52e+11	7.67e+11
ECF	9.91e+11	8.22e+11
ARMA(1,1)	8.13e+11	-7.26e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

USA (Estados Unidos)

	2017	2018
PIB efectivo	1.95e+13	2.05e+13
ECF	1.94e+13	2.00e+13
ARMA(1,1)	1.93e+13	2.01e+13

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

APÉNDICE C

Comparativo de los resultados obtenidos de la ejecución del método de componentes frecuenciales y el modelo $ARMA(1, 1)$ llevando a cabo la estimación para tres periodos (2016-2018) para los países miembros de la OCDE con información obtenida del Banco Mundial.

*Nota: Para cada país se indica en **negritas** la mejor estimación.*

AUS (Australia)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	1.21e+12	1.33e+12	1.43e+12
ECF	1.60e+12	1.31e+12	1.15e+12
ARMA(1,1)	1.36e+12	1.44e+12	1.53e+12

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

AUT (Austria)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	3.94e+11	4.17e+11	4.56e+11
ECF	4.06e+11	3.56e+11	3.14e+11
ARMA(1,1)	3.63e+11	3.84e+11	4.07e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

BEL (Bélgica)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	4.70e+11	4.95e+11	5.32e+11
ECF	4.84e+11	4.18e+11	3.61e+11
ARMA(1,1)	4.59e+11	5.08e+11	5.49e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

CAN (Canadá)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	1.53e+12	1.65e+12	1.71e+12
ECF	1.67e+12	1.39e+12	2.00e+12
ARMA(1,1)	1.51e+12	1.57e+12	1.64e+12

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

CHE (Suiza)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	6.70e+11	6.79e+11	7.06e+11
ECF	7.39e+11	7.01e+11	6.76e+11
ARMA(1,1)	6.87e+11	7.11e+11	7.36e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ECF

CHL (Chile)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	2.50e+11	2.78e+11	2.98e+11
ECF	2.65e+11	2.23e+11	1.94e+11
ARMA(1,1)	-7.97e+11	-9.32e+11	-1.05e+12

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ECF

CZE (Rep. Checa)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	1.95e+11	2.16e+11	2.45e+11
ECF	2.06e+11	1.57e+11	1.29e+11
ARMA(1,1)	2.00e+11	2.34e+11	2.64e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

DEU (Alemania)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	3.50e+12	3.69e+12	4.00e+12
ECF	3.72e+12	3.73e+12	3.69e+12
ARMA(1,1)	3.39e+12	3.72e+12	3.99e+12

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

DNK (Dinamarca)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	3.12e+11	3.30e+11	3.52e+11
ECF	3.26e+11	2.85e+11	2.50e+11
ARMA(1,1)	3.01e+11	3.28e+11	3.54e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

ESP (España)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	1.24e+12	1.31e+12	1.43e+12
ECF	1.23e+12	9.89e+11	8.06e+11
ARMA(1,1)	1.22e+12	1.35e+12	1.48e+12

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

EST (Estonia)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	2.40e+10	2.66e+10	3.03e+10
ECF	2.41e+10	2.16e+10	1.99e+10
ARMA(1,1)	2.26e+10	2.54e+10	2.82e+10

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

FIN (Finlandia)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	2.39e+11	2.52e+11	2.74e+11
ECF	2.50e+11	2.15e+11	1.84e+11
ARMA(1,1)	2.23e+11	2.37e+11	2.52e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

FRA (Francia)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	2.47e+12	2.59e+12	2.78e+12
ECF	2.61e+12	2.25e+12	1.94e+12
ARMA(1,1)	2.45e+12	2.82e+12	3.20e+12

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

GBR (Reino Unido)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	2.66e+12	2.64e+12	2.83e+12
ECF	3.13e+12	3.09e+12	3.07e+12
ARMA(1,1)	2.84e+12	2.98e+12	3.13e+12

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ECF

GRC (Grecia)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	1.95e+11	2.03e+11	2.18e+11
ECF	1.93e+11	1.34e+11	8.37e+10
ARMA(1,1)	5.35e+11	4.52e+11	5.47e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ECF

HUN (Hungria)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	1.26e+11	1.40e+11	1.56e+11
ECF	1.29e+11	1.09e+11	9.49e+10
ARMA(1,1)	1.17e+11	1.29e+11	1.40e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

IRL (Irlanda)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	3.01e+11	3.35e+11	3.82e+11
ECF	2.99e+11	3.09e+11	3.20e+11
ARMA(1,1)	-1.35e+13	-1.36e+13	-1.37e+13

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ECF

ISL (Islandia)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	2.07e+10	2.45e+10	2.59e+10
ECF	1.92e+10	1.97e+10	1.99e+10
ARMA(1,1)	1.76e+10	1.88e+10	2.00e+10

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ECF

ISR (Israel)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	3.19e+11	3.53e+11	3.70e+11
ECF	3.33e+11	3.29e+11	3.31e+11
ARMA(1,1)	3.09e+11	3.23e+11	3.37e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

ITA (Italia)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	1.87e+12	1.95e+12	2.07e+12
ECF	1.89e+12	1.61e+12	1.34e+12
ARMA(1,1)	1.55e+12	1.76e+12	1.94e+12

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

JPN (Japón)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	4.93e+12	4.86e+12	4.97e+12
ECF	4.72e+12	4.36e+12	4.04e+12
ARMA(1,1)	5.14e+12	5.16e+12	5.18e+12

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

KOR (Corea)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	1.41e+12	1.53e+12	1.62e+12
ECF	1.47e+12	1.51e+12	1.58e+12
ARMA(1,1)	9.74e+11	9.94e+11	1.02e+12

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ECF

LTU (Lituania)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	4.30e+10	4.75e+10	5.33e+10
ECF	4.74e+10	3.90e+10	3.43e+10
ARMA(1,1)	3.77e+10	4.44e+10	5.07e+10

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

LUX (Luxemburgo)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	5.90e+10	6.23e+10	6.95e+10
ECF	6.42e+10	5.71e+10	5.20e+10
ARMA(1,1)	5.47e+10	5.93e+10	6.39e+10

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

LVA (Letonia)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	2.77e+10	3.05e+10	3.48e+10
ECF	2.82e+10	2.40e+10	2.06e+10
ARMA(1,1)	2.72e+10	3.20e+10	3.66e+10

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

MEX (México)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	1.08e+12	1.16e+12	1.22e+12
ECF	1.29e+12	1.23e+12	1.20e+12
ARMA(1,1)	1.16e+12	1.27e+12	1.38e+12

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ECF

NLD (Países Bajos)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	7.84e+11	8.32e+11	9.14e+11
ECF	7.91e+11	6.78e+11	9.70e+11
ARMA(1,1)	7.84e+11	8.76e+11	9.53e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

NOR (Noruega)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	3.71e+11	3.99e+11	4.35e+11
ECF	4.53e+11	3.25e+11	2.40e+11
ARMA(1,1)	3.51e+11	3.69e+11	3.88e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

NZL (Nueva Zelanda)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	1.88e+11	2.03e+11	2.05e+11
ECF	1.94e+11	1.83e+11	1.76e+11
ARMA(1,1)	1.68e+11	1.77e+11	1.87e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

POL (Polonia)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	4.72e+11	5.26e+11	5.86e+11
ECF	5.31e+11	4.49e+11	3.93e+11
ARMA(1,1)	5.14e+11	6.02e+11	6.61e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

PRT (Portugal)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	2.06e+11	2.19e+11	2.38e+11
ECF	2.05e+11	1.75e+11	1.46e+11
ARMA(1,1)	2.00e+11	2.23e+11	2.45e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

SVK (Rep. Eslovaca)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	8.98e+10	9.56e+10	1.06e+11
ECF	9.66e+10	7.81e+10	6.80e+10
ARMA(1,1)	8.18e+10	9.15e+10	1.01e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

SVN (Eslovenia)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	4.46e+10	4.85e+10	5.42e+10
ECF	4.55e+10	3.80e+10	3.21e+10
ARMA(1,1)	4.69e+10	5.47e+10	5.95e+10

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

SWE (Suecia)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	5.12e+11	5.36e+11	5.51e+11
ECF	5.61e+11	5.01e+11	4.44e+11
ARMA(1,1)	5.08e+11	5.50e+11	5.85e+11

Mejor estimación 1er periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 2do periodo: ARMA(1,1)

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

TUR (Turquía)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	8.64e+11	8.52e+11	7.67e+11
ECF	1.01e+12	8.35e+11	7.66e+11
ARMA(1,1)	-3.27e+11	-3.33e+11	-3.49e+11

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ECF

USA (Estados Unidos)

	2016	2017	2018
PIB efectivo	1.87e+13	1.95e+13	2.05e+13
ECF	1.89e+13	1.94e+13	2.00e+13
ARMA(1,1)	1.89e+13	1.96e+13	2.03e+13

Mejor estimación 1er periodo: ECF

Mejor estimación 2do periodo: ECF

Mejor estimación 3er periodo: ARMA(1,1)

Referencias

- Báez, M. E. (2008). *Análisis espectral mediante el uso de la FFT*. Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.
- BancoMundial (2019). PIB (US\$ a precios actuales). <https://datos.bancomundial.org/indicador/NY.GDP.MKTP.CD>.
- Baxter, M. and King, R. (1995). Measuring business cycles approximate band-pass filters for economic time series. *NBER Working Paper Series*, WP(5022).
- Burns, A. and Mitchell, W. (1947). Measuring business cycles. *National Bureau of Economic Research, Inc, New York*.
- Canova, F. (1997). Detrending and business cycle facts. *Journal of Monetary Economics* 41.
- Casas, C. (1999). Econometría moderna. *Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico. Documento en preparación*.
- Christiano, L. J. and Fitzgerald, T. J. (1999). The band pass filter. *NBER Working paper series*, NA(7257).
- de la Fuente, S. (2013). Series temporales. *Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales*.
- Evans, M. K. (2003). *Practical business forecasting*. Blackwell (Malden).

- FRED (2019). Real Gross Domestic Product. <https://fred.stlouisfed.org/series/GDPC1>.
- Granger, J. (1966). The typical spectral shape of an economic variable. *The Econometric Society*, 34(1):150–161.
- Guay, A. (1997). Do the hodrick-prescott and baxter-king filters provide a good approximation of business cycles? *Annales d'économie et de statistique*.
- Gujarati, D. N. (2010). *Econometría*. McGraw-Hill.
- Heath, J. (2011). El PIB Potencial. <https://jonathanheath.net/el-pib-potencial/>.
- Hernández, E. (2006). Matemáticas de las señales. *Encuentros Multidisciplinares, Universidad Autónoma de Madrid*, VIII(23):1.
- Hicks, J. R. (1950). *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*. Clarendon Press.
- Hodrick, R. and Prescott, E. (1980). Post-war u.s. business cycles: An empirical investigation. *Working Paper, Carnegie-Mellon*, 29(1).
- Hsu, H. P. (1998). *Análisis de Fourier*. Pearson.
- Hurtado, A. and Franco, H. (2011). Los modelos dsge: Una respuesta de la discusión macroeconómica. *Estudios Económicos*, XXVIII(57):59–77.
- James, G. (2013). *An introduction to statistical learning*. Springer.
- Jevons, S. (1905). *Principles of Economics*. MacMillan and Co.
- Jones, C. I. (2010). *Macroeconomía*. Antoni Bosch editor.

- Juglar, J. C. (1862). *Crisses Commerciales*. Gillaumin Et, Libraires-Editeurs.
- Kalecki, M. (1995). *Teoría de la dinámica económica*. Fondo de Cultura Económica de España.
- Keynes, J. M. (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Palgrave Macmillan.
- Kitchin, J. (1923). Cycles and trends in economic factors. *The Review of Economics and Statistics*, 5(1):10–16.
- Kondratieff, N. (1979). The long waves in economic life. *Research Foundation of State University of New York*, 2(4):519–562.
- Kuznets, S. (1930). *Secular movements in production and prices. Their nature and their bearing upon cyclical fluctuations*. Houghton Mifflin.
- Kydland, F. E. and Prescott, E. C. (1982). Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica, journal of the econometric society*, 50(6).
- Mankiw, G. (2007). *Principios de economía*. McGraw-Hill.
- Mazzeu, J. and Ruiz, E. (2015). Model uncertainty and the forecast accuracy of arma models: A survey. *Working Papers Statistics and Econometrics*.
- NBER (2010). US Business Cycle Expansions and Contractions. <http://www.nber.org/cycles/cyclesmain.html>.
- Proakis, J. G. and Manolakis, D. G. (1999). *Tratamiento digital de señales*. Prentice-Hall International.

- Ríos, G. (2008). *Series de tiempo*. PhD thesis, Universidad de Chile.
- Ríos, M. J. (2005). *Análisis espectral multivariable aplicado a señales cerebrales reales (EEG)*. PhD thesis, Universidad de Sevilla.
- Samuelson, P. (1939). Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration. *Review of Economic Statistics*.
- Shumpeter, J. A. (1934). *The Theory of Economic Development*. President and Fellows of Harvard College.
- Smith, S. W. (1999). *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*. California Technical Publishing.
- Snowdon, B. and Vane, A. H. R. (2005). *Modern macroeconomics*. Edsard Elgar.
- Suescún, R. and Steiner, R. (2017). *Un modelo de equilibrio dinámico para la evaluación de la política económica en Colombia*. Fedesarrollo.
- Torres, J. L. (2012). *Introducción al equilibrio general dinámico macroeconómico*. Universidad de Málaga.
- Villavicencio, J. (2010). *Introducción a series de tiempo*. Universidad Nacional Pedro Ruíz Gallo.
- Wichert, S. and Fokianos, K. (2004). Identifying periodically expressed transcripts in microarray time series data. *Bioinformatics*, 20(1):5–20.
- Wickens, M. (2012). *How useful are DSGE macroeconomic models for forecasting?* PhD thesis, Cardiff Business School, University of York.

Wicksell, K. (1907 [2001]). A new theory of crisis, structural change and economic dynamics.

Economic Journal.