MÉTODO

ACERCA DE LOS TEOREMAS MECÁNICOS

ARQUÍMEDES

Presentación de

Juan Villoro

Prólogo de

Jesús Gerardo Valdés Vázquez

Clásicos UG

Método acerca de los teoremas mecánicos

Clásicos UG

ARQUÍMEDES

Método acerca de los teoremas mecánicos

Presentación de
JUAN VILLORO

Prólogo de
JESÚS GERARDO VALDÉS VÁZQUEZ

Traducción de
CORA RATTO DE SADOSKY

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

Método acerca de los teoremas mecánicos
Primera edición, 2018

Traducción: Cora Ratto de Sadosky

Lascuráin de Retana núm. 5, Centro
Guanajuato, Gto., México
C. P. 36000

Producción:
Editorial de la Universidad de Guanajuato
Mesón de San Antonio
Alonso núm. 12, Centro
Guanajuato, Gto.
C. P. 36000
editorial@ugto.mx

Formación: Jorge Alberto León Soto
Diseño de forros: Jaime Romero Baltazar
Corrección: Fabiola Correa Rico

ISBN PDF: 978-607-441-547-6

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

ÍNDICE

Presentación

LA INVENCIÓN DEL FUTURO

Juan Villoro

Un libro cerrado no es una obra de arte; es la *posibilidad* de una obra de arte: solo se convierte en hecho estético al ser leído. Su destino depende de quienes se asoman a sus páginas o, en tiempos más recientes, de quienes reciben su mensaje de luz en una pantalla.

Ningún libro inicia sus días como un clásico. No hay manera de anticipar desde un principio si perdurará en el gusto de la gente. Son los lectores los que deciden salvarlo del fuego y el olvido. En forma asombrosa, ese fervor puede durar lo suficiente para que un filósofo o un poeta sobreviva a la civilización que le dio origen. Desde el siglo VIII antes de Cristo, Homero —o los muchos recitadores que asociamos con ese nombre— no ha perdido vigencia. Su lengua se convirtió en otra y el mundo que vio antes de quedarse ciego dejó de existir, pero el desafío de Ulises sigue siendo el nuestro: en una época de exilios y desplazados, donde las grandes ciudades nos desconciertan con sus laberintos, ningún recorrido supera al de volver a casa.

"El amor es eterno mientras dura", escribió el poeta y letrista de *bossa nova* Vinicius de Moraes. Lo mismo sucede con los clásicos. Hay obras que cautivan a varias generaciones y más tarde son relegadas al rincón de las bibliotecas que solo disfrutan los ratones.

Resulta imposible saber durante cuánto tiempo un clásico estará vigente o en qué momento alcanzará ese rango. Ciertas historias comienzan sus días como muestras de ingenio y entretenimiento, pero están destinadas a fundar una tradición todavía futura. El caso más evidente es el *Quijote*. El gran cervantista Francisco Rico ha llamado la atención sobre un hecho singular: durante un par de siglos, los avatares del Caballero de la Triste Figura fueron apreciados como un arte mayor en Francia, Inglaterra y Alemania y solo más tarde adquirieron el mismo prestigio en España, donde la novela de Cervantes había sido leída como un divertimento popular.

Ningún escritor decide la forma en que perdura su trabajo. Esa magia le corresponde a los lectores. Defoe no pensó que sería recordado por *Robinson Crusoe* y apostó a que la posteridad leyera algunos de sus versos, del mismo modo en que Cervantes creyó sellar su pacto con la gloria con su última obra, *Los trabajos de Persiles y Segismunda*, menos leída que el *Quijote*. Ni Defoe ni Cervantes podían prever los gustos del porvenir. Nadie es contemporáneo de su futuro. Por eso Oscar Wilde pudo decir con ironía: “Hasta ahora, la posteridad no ha hecho nada por nosotros”.

Algunos autores han desarrollado brillantes estrategias para definir la forma en que deben ser leídos, pero eso solo atañe a su presente. Pessoa juzgó que la tradición lírica portuguesa era demasiado pobre y decidió inventar a sus precursores a través de las biografías imaginarias y las variadas obras de Alberto Caeiro, Bernardo Soares, Ricardo Reis, Álvaro de Campos y otros heterónimos destinados a dotarlo de una genealogía.

Si el poeta portugués se adjudicó un linaje literario, Borges transformó su contexto cultural para insertarse en él de manera conveniente. En una de sus clases de literatura, Ricardo Piglia afirmó: "Borges construye una tradición con sus lecturas [...] No quiere ser leído desde una tradición narrativa en el interior de la cual sus textos no valgan nada. Si Borges es leído desde Dostoievsky o desde Proust, no queda nada de él. Como no quedó nada durante años porque era, se decía, 'algebraico', 'cerebral', en sus textos no había 'vida'. Esto quiere decir que Borges hizo y construyó toda una red de lecturas —alguna vez habrá que hacer un seminario sobre él como crítico— hasta terminar por imponer el contexto dentro del cual sus textos fueran leídos".

Tanto Borges como Pessoa influyen en la valoración que de ellos hacen sus contemporáneos; crean un modo propicio para ser entendidos y valorados. Pero no aseguran su futuro. Eso les corresponde a los desconocidos que los seguirán leyendo o no. Consciente de esto, Borges señala que un clásico no es otra cosa que un libro "que los hombres no han dejado morir".

La historia de la cultura incluye la historia de su destrucción. Esquilo escribió 82 obras de las que se conservan siete; se estima que Sófocles concluyó 123 piezas y también en su caso solo disponemos de siete; conocemos 18 obras de las 92 que compuso Eurípides (o 19, si se acepta su autoría de *Reso*). La incesante labor de las termitas, la humedad, los incendios, los tiranos, las mudanzas, los robos y los fanatismos han acabado con buena parte del acervo cultural. Pero nada es tan frágil como el gusto.

Y pese a todo, Esopo, Virgilio, Apuleyo, Aristóteles, Horacio, Arquímedes y otros autores resistentes llegan a nosotros. Ninguno de ellos estuvo conforme con su tiempo. Si los seguimos leyendo es porque no han dejado de manifestar su rebeldía o, mejor aún, porque la seguimos necesitando y no permitimos que desaparezca. Desde el presente, garantizamos su porvenir.

Los libros son más significativos que los autores. Con el tiempo, dicen cosas que pueden llegar a contradecir a quienes los concibieron. Esto se debe a la cambiante manera en que son leídos. Dostoievsky escribió *Crimen y castigo* para criticar a los anarquistas que tomaban el destino en sus manos y no reconocían otro tribunal ético que su libre albedrío: "Si Dios no existe, todo está permitido", opina Raskolnikov, el inconforme que protagoniza la novela. Dostoievsky cuestiona el individualismo que puede llevar al crimen en aras de ideales "superiores". Leída muchos años después, en los cafés humeantes de París donde se fundaba el existencialismo, la misma historia adquirió un valor distinto. Jean-Paul Sartre encontró en ella un desafío para la elección individual. Raskolnikov piensa que el ser libre no debe rendirle cuentas a Dios; Sartre está de acuerdo con él, pero agrega que no por ello todo está permitido. La ética existencial consiste en actuar correctamente sin una coacción externa. La actitud de Raskolnikov, que para Dostoievsky solo se redime a través de un castigo, representa para Sartre el inquietante reto de elegir.

La escritura no existiría sin una noción de futuro. Toda historia se dirige hacia un desenlace: algo que no ha ocurrido, ocurrirá. Ese horizonte determina la aventura de Ulises. A lo largo de veinte años se somete a tentaciones que podrían desviar su travesía. Oye el seductor canto de las sirenas y pide que lo amarren al mástil de su embarcación para no abandonar la ruta; rechaza el paraíso artificial de los lotos alucinógenos; repudia la poción de Circe, fantástica hechicera; llega al Hades y dialoga con el profeta Tiresias; puede obtener la vida eterna, pero prefiere seguir su inalterable destino. ¿Por qué se resiste a estos prodigios? Cuando enfrenta a los lotófagos, teme que la droga borre sus recuerdos. Desea atesorar lo ocurrido para contarlo al volver a Ítaca, la isla de la que partió. Su auténtica misión es el *nóstos*, el regreso. Italo Calvino comenta que Ulises no tiene miedo de olvidar el pasado, sino el futuro, la historia que vive en tiempo real y que deberá contar. Se arriesga en el presente para que su historia posterior exista.

Siglos más tarde, ante el mismo mar, Platón dirá que el conocimiento es una forma del recuerdo. Etimológicamente, "recordar" significa "volver a pasar por el corazón". Ulises se somete a sus tareas para que eso emocione después.

Cada escritor vive su propia odisea. Emprende un viaje que lo devolverá al punto de partida y espera, como el esforzado Ulises (que los griegos llamaron Odiseo), que sus peripecias tengan sentido en otro tiempo: "La memoria solo cuenta verdaderamente —para los individuos, las colectividades, las civilizaciones— si reúne la impronta del pasado y el proyecto del futuro", escribe Calvino.

Los autores que hemos convertido en clásicos proponen un singular modo de leer que no se limita a sus libros, sino que abarca la realidad circundante. Al levantar la vista de la página, el mundo puede parecer kafkiano o quijotesco. La literatura expande su efecto hacia el entorno y modifica a quien la lee. El máximo personaje de Platón es el lector platónico.

Hemos sido inventados por los clásicos y los defendemos para que no olviden su futuro.

Prólogo

ARQUÍMEDES:
descubrimientos e influencia

Jesús Gerardo Valdés Vázquez

Genios antes del nacimiento de Cristo

Para hablar de Arquímedes, empecemos por describir cómo era la vida hace más de 2 000 años, cómo era la ciencia y qué científicos trabajan para el progreso de la humanidad antes del nacimiento de Cristo.

En el siglo III a. C., Roma era toda una potencia, dominaba por completo el mar mediterráneo bajo su mando militar y político. Sin embargo, el dominio científico era por parte de los griegos y su principal centro cultural y científico se encontraba en Alejandría, Egipto; en esa época, se construyó la Biblioteca, lugar en el que se guardaban todos los aportes científicos y también lugar de enseñanza por excelencia.

Durante el llamado periodo de oro, sobresalen las tres figuras de las matemáticas de la antigüedad: Euclides, Arquímedes y Apolonio. Otros personajes también importantes fueron: Pitágoras que destacó en el área de las matemáticas; Hipócrates en el área de la medicina; Sócrates en la filosofía; Demócrito, a quien se atribuye el descubrimiento del átomo; y Eratóstenes, quien calculó con gran precisión la circunferencia de la Tierra. Si hace más de 2 000 años ya se sabía que la tierra era redonda, ¿cómo es que en la Edad Media se creía que la tierra era plana y Cristóbal Colón fue quien aseguró que no lo era? En esa época, la ciencia, el arte y la filosofía de los griegos era tan extraordinaria que solo existieron aportaciones nuevas dos mil años después.

En el año 287 a.C. nació Arquímedes. También conocido como Arquímedes de Siracusa, debe su nombre a la ciudad que lo vio nacer, en la actual Italia. Siracusa era una ciudad rica y poderosa con aproximadamente medio millón de habitantes situada sobre la isla de Sicilia. Arquímedes fue ingeniero, inventor, físico, astrónomo y matemático, era hijo de Fidias, astrónomo del Palacio Real. De su madre no se sabe mucho, pero lo que sí se sabe es que Arquímedes estaba vinculado a la familia real de Siracusa, gobernada por el rey Hierón.

En algún momento de su juventud, Arquímedes viajó a Alejandría para continuar con su formación. Ahí se encontraba Euclides —el maestro por excelencia, quien se dedicó a escribir lo que hoy en día sería un libro de texto científico—, se dice que Arquímedes no estudió directamente con él, sino con sus discípulos Conon de Samos, Dositeo de Pelusa y Eratóstenes de Cirene, este último fue director de la Biblioteca.

El palimpsesto de Arquímedes

De acuerdo con el diccionario de la Real Academia Española, un palimpsesto es un “manuscrito antiguo que conserva huellas de una escritura anterior la cual ha sido borrada” (2018). En el año 1906, el historiador danés J.L. Heiberg viajó a Constantinopla y examinó un pergamino de piel de 174 páginas del siglo XIII, cuál sería su sorpresa al percatarse de que se trataba de un palimpsesto, pues el pergamino contenía texto que había sido sobrescrito encima de otro de mayor antigüedad. El raspado de la tinta de un documento existente era una práctica común en la Edad Media, para reutilizar la vitela[1] en un nuevo escrito, ya que esta era cara.

Las obras que se encontraron en el palimpsesto consistían en diferentes tratados desconocidos de Arquímedes. Este pergamino había pasado varios siglos en la biblioteca del monasterio del Santo Sepulcro en Constantinopla. En la década de 1920 fue vendida a un coleccionista privado. Años después, fue subastado en Nueva York en 1998 y adquirido por un comprador anónimo por la cantidad de dos millones de dólares. En la actualidad, el palimpsesto de Arquímedes se encuentra en el Walters Art Museum en Baltimore, Maryland, en Estados Unidos, donde ha pasado por diferentes pruebas de rayos X y luz ultravioleta para descubrir el texto original. Los siete tratados, de gran contribución para la ciencia y la ingeniería, que contiene el palimpsesto son:

1. Sobre los cuerpos flotantes
2. Medida del círculo
3. Sobre el equilibrio de los planos
4. Sobre las espirales
5. Sobre la esfera y el cilindro
6. Método acerca de los teoremas mecánicos
7. *Stomachion* (el rompecabezas geométrico más antiguo que se conoce)

[1] La vitela es una piel de vaca o ternera, adobada y muy pulida, la que sirve para pintar o escribir sobre ella. (RAE, 2018).

Eureka, lo he encontrado

Al terminar sus estudios en Alejandría, Arquímedes regresó a Siracusa. Una vez ahí, fue llevado por su padre ante el rey Hierón, el cual le encomendó una tarea que requeriría de todos los conocimientos del joven científico. Resulta que el rey Hierón había mandado hacer una corona con el orfebre del palacio, pero dudaba que fuera cien por ciento de oro sólido, y temía que le hubieran mezclado algún otro tipo de material para robarle. Pero, ¿cómo podrían saber si la corona era de oro sólido sin destruirla? Al preguntarle a Arquímedes si era capaz de saber si su composición era de oro puro, respondió que necesitaba unos días para averiguarlo.

Arquímedes y su padre sabían que si conocían el volumen de la corona (unidades en metros cúbicos, por ejemplo), podrían saber cuál debería de ser su peso exacto. Debido a que el oro tiene un peso específico (cuyas unidades son kilogramo sobre metro cúbico), al multiplicar el volumen de la corona por el peso específico del oro obtendrían como resultado el peso de esta. El problema principal era: ¿cómo calcular el volumen?, pues no se tenían instrumentos de medición precisos para objetos tan irregulares como una corona.

Ya que Arquímedes era un investigador innato, su mente estaba siempre trabajando, a pesar de que podría encontrarse haciendo otras actividades, no abandonaba nunca una idea. Un día asistió junto con su padre a los baños en tina de Siracusa, mientras se disponía a disfrutar de un momento de relajación, notó que al momento de introducirse en la bañera el agua se derramaba. Entonces observó que si se salía de la bañera el agua bajaba de nivel, y si se volvía a meter, este volvía a subir. En ese momento exclamó: ¡eureka!, cuyo significado en español es: ¡lo he encontrado! Se cuenta que Arquímedes salió rápidamente de la bañera y corrió desnudo por toda la ciudad hasta llegar a su casa. La idea que estaba en su mente para resolver el problema de la corona era tan poderosa que no podía darse el lujo de pensar en ninguna otra cosa, como vestirse para ir a casa.

Al llegar a su hogar, Arquímedes comenzó a experimentar con un balde de agua hasta el tope, al cual introdujo diferentes objetos. Dedujo que el volumen del agua desalojada era igual al volumen de los objetos introducidos. De esta manera, pudo calcular el volumen de la corona del rey Hierón, para a continuación multiplicarlo por el peso del oro. Este peso debería coincidir con el de la corona. Al no ser así, Arquímedes dedujo que la corona tenía mezclados otros minerales. El orfebre, quien se encontraba ahí, se defendió de la acusación diciendo que lo que Arquímedes acababa de demostrar no era cierto. Tal era la convicción científica de Arquímedes, que le dijo al príncipe que podía cortar su mano si estaba equivocado. Finalmente, para demostrar que tenía la razón, rompió la corona de oro sólido y encontró que en su interior estaba formada por otro material y solo estaba recubierta de oro. A partir de ahí, se dieron cuenta de que la ciencia no era simplemente un pasatiempo abstracto, sino que podía aplicarse en beneficio de la vida diaria.

Después de este episodio Arquímedes siguió investigado con el agua hasta llegar a lo que hoy conocemos como Principio de Arquímedes, dando inicio a una serie de descubrimientos y aportaciones en beneficio de la humanidad. El Principio de Arquímedes afirma que todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del fluido desalojado. Este resultado se encuentra en su tratado *Sobre los cuerpos flotantes*.

La cuadratura del círculo

Arquímedes también se ocupó de calcular el valor de π. En ese entonces no se sabía la relación entre la superficie de un círculo con su radio, al cual decidió llamar π. Arquímedes desarrolló un método utilizando cuadrados inscritos y circunscritos en un círculo, como se aprecia en la Figura 1.

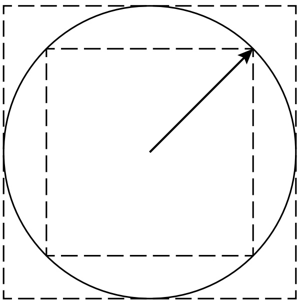

Figura 1. Cuadratura del círculo

De acuerdo con la Figura 1, Arquímedes dedujo que el cuadrado inscrito en el círculo (cuadrado dentro del círculo) tenía una superficie menor que la del círculo. Por otro lado, también sabía que el cuadrado circunscrito en el círculo (cuadrado fuera del círculo) tenía una superficie mayor que la del círculo. Si sabemos que el radio del círculo es r, entonces el área del círculo será πr^2. Por otro lado, el área del cuadrado inscrito será $2r^2$, así como el área del cuadrado circunscrito será $4r^2$. De esta manera, Arquímedes dedujo que $2 \leq \pi \leq 4$ si se toma como referencia el cuadrado de la Figura 1.

Arquímedes continuó con su método para determinar π, y decidió aumentar el número de lados, como se aprecia en la Figura 2. De esta forma, la diferencia entre las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos sería menor a medida que se aumente el número de lados, y el resultado de π sería más exacto.

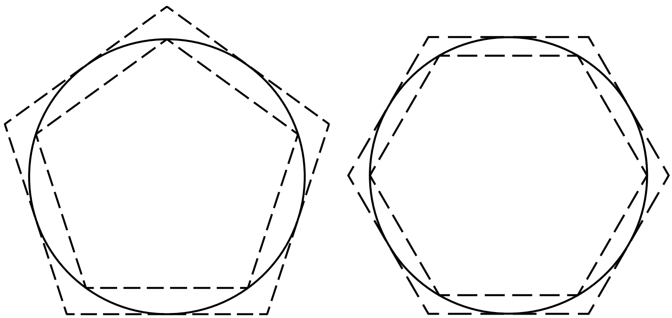

Figura 2. Polígonos de 5 y 6 lados

Con esta metodología, Arquímedes llevó el Método Exhaustivo (también conocido como Método de Exhaución) a calcular que $3.14085 \leq \pi \leq 3.14286$ en su tratado *Medida del Círculo* utilizando polígonos inscritos y circunscritos de hasta 96 lados. Previo a los trabajos de Arquímedes para la medida del círculo, Antifonte de Atenas, quien había nacido un par de siglos antes, trató de determinar el área del círculo inscribiendo el mayor número de pequeños triángulos posible, hasta que este se colmara. El trabajo de Arquímedes dio una mejor aproximación para el cálculo de áreas de círculos.

Este método permitió a Isaac Newton y Gottfried Leibniz, en el siglo XVII, unificar el cálculo diferencial con el cálculo integral. Más tarde, Bernard Bolzano, Augustin Louis Cauchy y Karl Weierstrass pudieron definir de manera rigurosa el límite de una función. El mismo método exhaustivo es el precursor del concepto de la Sumatoria de Riemann, que permite definir la integral de una función en un intervalo cerrado.

Reducción al absurdo

Arquímedes estableció un procedimiento que nombró doble reducción al absurdo, la cual utilizaba cuando se encontraba en medio de la demostración de un tema complicado. Arquímedes sabía que para dos cantidades, A y B, solo era cierto uno de los siguientes resultados:

1. $A > B$
2. $A = B$
3. $A < B$

El objetivo de Arquímedes era demostrar que $A = B$. Ya que esta demostración es demasiado complicada, opta por seguir un camino alterno. Primero supone que $A > B$, y a partir de ahí realiza todo un procedimiento matemático que lo lleva a una contradicción. Posteriormente asume que $A < B$, tras realizar un procedimiento similar al anterior, llega nuevamente a una contradicción. Una vez eliminadas ambas posibilidades, solo queda una y es que $A = B$, que es una manera indirecta de encontrar la demostración que buscaba.

El tornillo sin fin

Durante un tiempo en el que Arquímedes se trasladó al valle del Nilo, inventó el tornillo sin fin para elevar agua desde un punto más bajo hasta otro más alto. Esta máquina, conocida también como tornillo de Arquímedes, consiste en un tornillo helicoidal que está rodeado de un tubo, como se aprecia en la Figura 3.

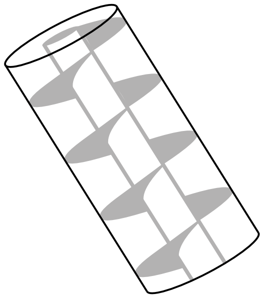

Figura 3. Tornillo de Arquímedes

El tornillo de Arquímedes es utilizado aún hoy en día gracias a su gran versatilidad, ya que no solo sirve para bombear agua, sino que es un invento capaz de bombear material sólido. Por ejemplo, se utiliza mucho en plantas de tratamiento de aguas residuales, drenajes, la industria de envasado de alimentos, y en general, en cualquier sistema que contenga líquidos (incluyendo partículas sólidas) que requieren ser elevados.

La polea y la palanca

Una de las más grandes invenciones de Arquímedes es sin duda la polea compuesta. Aunque existen vestigios de que la polea era ya utilizada por los egipcios, ha podido demostrarse que se trata de una idea de Arquímedes. En nuestros días, las poleas son la parte fundamental de muchas máquinas que podemos encontrar en numerosas piezas mecánicas. Por otro lado, Arquímedes también realizó una justificación rigurosa del funcionamiento de la palanca, considerada una de las máquinas simples, la cual consta de una barra rígida que gira libremente alrededor de un punto de apoyo y permite multiplicar la fuerza aplicada a un objeto.

Con ambos descubrimientos, Arquímedes logró realizar una gran proeza. El rey Hierón había mandado construir un gran barco, que resultó ser el más grande de su tiempo. Sin embargo, esta nave era tan grande que encalló, con la consecuente pérdida de una gran inversión, el rey Hierón llamó a Arquímedes, quien para resolver el problema se puso a construir una torre a la que estaba sujeta un sistema de poleas. Estas, junto con palancas apoyadas en puntos estratégicos, permitieron a Arquímedes poner la enorme nave nuevamente a flote. La gente no podía creer lo que sus ojos veían. Con una sola mano, Arquímedes dio vuelta al sistema que controlaba las poleas y de esta manera pudo levantar el barco. Gracias a esta hazaña, se hizo de una enorme fama en todos los territorios. También le debemos la célebre frase: “Denme un punto de apoyo y moveré el mundo”.

Artefactos bélicos

En la época de Arquímedes, el Imperio romano trataba de conquistar la ciudad de Cartago, (actual Túnez), y debido a que Siracusa era su aliada, ambas fueron objeto de ataques romanos. Hacia el año 214 a.C. y bajo las órdenes del cónsul romano Marco Claudio Marcelo,[2] se decide también conquistar Siracusa. En ese entonces, ya habían fallecido tanto el rey Hierón, como su hijo, Hierón II. Así que el comandante de las fuerzas armadas de la ciudad solicitó a Arquímedes que le ayudara con la defensa de la misma.

---

[2] Marcelo fue un político y militar romano, comandante del ejército, al cual dirigió durante la Segunda Guerra Púnica.

Arquímedes ya había trabajado en el perfeccionamiento de la catapulta, la cual tenía ahora un poder de alcance mayor, por el aumento en la tensión de las cuerdas proporcionada por sus poleas compuestas; también creó la catapulta múltiple. Estos inventos fueron puestos al servicio de la defensa de Siracusa, los cuales evitaban que las tropas enemigas se acercaran a la ciudad.

Otro invento usado en la defensa fue la llamada garra de Arquímedes, que consistía en una enorme grúa con un brazo articulado movido a base de poleas compuestas y que en un extremo tenía un gancho de metal. Su funcionamiento consistía en posicionar el gancho por encima de las embarcaciones que se aproximaban a la muralla de la ciudad, después el gancho se dejaba caer y mediante las poleas era recogido, como si se tratara de un anzuelo, para levantar el barco, lo que a veces producía el hundimiento del mismo. En otras ocasiones, simplemente los dejaba muy dañados y emprendían la retirada. En un documental del año 2005 llamado *Súper armas del mundo antiguo* (Bada, Z. O.), se construyó una réplica de la garra de Arquímedes y se concluyó que era un arma factible.

Entre los muchos inventos para la defensa de Siracusa, Arquímedes pudo haber inventado el rayo de calor, el cual estaba formado por espejos cóncavos de gran tamaño, los cuales concentraban en su foco los rayos solares. De esta manera, la luz solar se concentraba en los barcos enemigos con la finalidad de incendiarlos. Sin embargo, la credibilidad de esta arma ha sido objeto de debate desde la época del Renacimiento. René Descartes fue el primero en decir que el invento no pudo haber cumplido con su objetivo. En la década de 1970, el Dr. Ioannis Sakkas de Grecia, realizó un experimento usando 70 espejos cubiertos con una capa de cobre, los cuales dirigió hacia una maqueta de madera de un barco romano a una distancia de 50 m. El barco ardió en pocos segundos después de que se le enfocaron con precisión los rayos del sol, se cree que la pintura que revestía la madera pudo haber ocasionado la rápida combustión.

En el 2006, el programa de televisión *Cazadores de mitos* (Dowlearn, R.) repitió el experimento. A pesar de que brotaron llamas en el barco, categorizaron el invento de falso, pues Siracusa mira hacia el Este, y la flota romana debería haber atacado durante la mañana para conseguir la máxima reflexión solar. Además, armas convencionales como flechas en llamas o catapultas con fuego hubieran podido incendiar los barcos cercanos de una manera mucho más efectiva y simple.

La muerte de Arquímedes

Los inventos de Arquímedes para la defensa de Siracusa impidieron a los romanos realizar la conquista de la ciudad como se lo habían imaginado. Tanto era el temor hacia estos inventos que solo bastaba que alguna viga se asomara por encima de las murallas para que los romanos emprendieran la retirada. Al saber que los artefactos de guerra creados para la defensa de la ciudad eran obra de Arquímedes, Marcelo ordenó que se mantuviera con vida a tan brillante genio cuando lograran su objetivo, el cual ocurriría tarde o temprano.

Al no poder contra las armas de defensa, se decidió sitiar la ciudad de Siracusa en el año 214 a.C. por órdenes de Marcelo. Tuvieron que pasar dos años para que la ciudad por fin cayera en control de los romanos, en el año 212 a.C. Se cuenta que Marcelo, al ver la grandeza y hermosura de la ciudad, ordenó que no se matara ni esclavizara a ningún siracusano, sin embargo, no pudo evitar verse afligido por la muerte del inventor griego. Se dice que un soldado llegó a la casa de Arquímedes, quien se encontraba muy concentrado en la solución de un problema. El soldado le demandó que lo siguiera para ser llevado ante Marcelo, Arquímedes le dijo que en ese momento no lo haría, pues estaba resolviendo un problema que no podía abandonar mientras no demostrara su solución. Esta respuesta ocasionó la ira del soldado, quien, con espada desenvainada, le dio muerte.

El deseo expresado por Arquímedes fue que en su tumba se grabaran una esfera y un cilindro, pues en uno de sus más grandes descubrimientos geométricos logró demostrar que el volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circular circunscrito a ella, tal como aparece en la Figura 4.

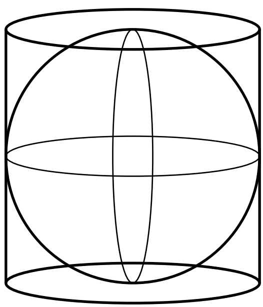

Figura 4. Esfera y cilindro de la tumba de Arquímedes

Método de Arquímedes

Gracias al descubrimiento del palimpsesto de Arquímedes en 1906, se logró recuperar la única copia de su obra denominada *Método,* en él se da en primer lugar una explicación de algunos problemas matemáticos, y a continuación propone un planteamiento que haga posible su demostración. También se tratan métodos geométricos junto con métodos mecánicos para encontrar propiedades métricas de área, volúmenes y centros de gravedad mediante el uso del método de la doble reducción al absurdo y el método exhaustivo.

El *Método* de Arquímedes es una combinación geométrica-mecánica que encierra procedimientos del análisis infinitesimal, con lo cual Arquímedes consiguió resultados que hoy se obtienen mediante el cálculo integral. Este procedimiento se explica en detalle en una carta que dirigió Arquímedes a Eratóstenes en el cual reveló partes del proceso mental que utilizó en sus descubrimientos y que se desconocían en sus escritos científicos anteriores.

Aquí se encuentran 11 lemas y 16 proposiciones, en algunas de las cuales se obtiene el mismo resultado utilizando demostraciones geométricas.

Referencias

Barillé, A. (Director) (1994) "Arquímedes y los griegos", en *Érase una vez... los inventores* [serie de televisión] Francia: Procidis.

Dowlearn, R. (Productor) (2006), "Revisión del rayo de la muerte de Arquímedes", en *Cazadores de mitos* [serie de televisión] México: Discovery Channel.

Marengo, A. (Director) (2004), *Súper armas del mundo antiguo* [documental], Z.O. Bada (productor), México: Discovery Communications, Inc.

Palimpsesto. (2018), en *Diccionario de la lengua española* [en línea], Madrid: Real Academia Española, disponible en http://dle.rae.es/?id=GzV3CkN

Vitela. (2018), en *Diccionario de la lengua española* [en línea], Madrid: Real Academia Española, disponible en http://dle.rae.es/?id=GzV3CkN

Bibliografía

Eriksson, K., D. Estep y C. Johson (2004), *Applied Mathematics: Body and Soul* (vol. 3), Alemania: Springer-Verlag.

Medina, C. (2014), "Biografías - Arquímedes", *Revista Tecno Historia*, 5 (1), pp. 53-54.

Parra, S. E. (2008), "Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna", *Revista digital matemática, educación e internet*, 9 (1), pp. 1-49.

De Arquímedes a Eratóstenes: MÉTODO ACERCA DE LOS TEOREMAS MECÁNICOS

Arquímedes a Erastóstenes, ¡salud!

Te escribí, precedentemente, acerca de algunos teoremas que encontré y te envié sus enunciados invitándote a encontrar las demostraciones que yo, entonces, no te indicaba. Los enunciados de esos teoremas eran los siguientes:

Del primero: Si en un prisma recto que tiene por base un paralelogramo se inscribe un cilindro que tiene sus bases sobre dos paralelogramos opuestos y los lados sobre los otros planos del prisma, y si por el centro del círculo base del cilindro y por un lado del cuadrado de la cara opuesta se traza un plano, este plano cortará un segmento del cilindro limitado por dos planos y la superficie del cilindro; esto es, por el plano secante, el plano en que está situada la base del cilindro y la superficie cilíndrica comprendida entre estos dos planos; el segmento así determinado del cilindro es la sexta parte de todo el prisma.

El enunciado del segundo era: Si en un cubo se inscribe un cilindro que tenga sus bases sobre dos paralelogramos opuestos y su superficie tangente a los cuatro planos restantes, y en el mismo cubo se inscribe otro cilindro con sus bases sobre otros dos paralelogramos y su superficie tangente a los cuatro planos restantes, la figura envuelta por las superficies de los cilindros y que está en ambos, es igual a los dos tercios de todo el cubo.

Estos teoremas difieren de los descubiertos precedentemente; en efecto, en aquéllos comparábamos: en cuanto al volumen, los conoides y los esferoides y sus segmentos con conos y cilindros, y ninguno de ellos resultó ser igual a una figura sólida limitada por planos; en cambio, las figuras que ahora consideramos, comprendidas entre dos planos y superficies cilíndricas, resultan ser cada una igual a una figura sólida limitada por planos.

He transcripto en este libro precisamente las demostraciones de esos teoremas y te las envío.

Sabiéndote, como ya te lo he dicho, estudioso y maestro excelente de filosofía y como sé que sabes apreciar, llegado el caso, las investigaciones matemáticas, he creído conveniente exponerte por escrito e ilustrarte en este libro la particularidad de un método, según el cual te será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos, lo cual, estoy convencido, de que será útil también para demostrar los mismos teoremas. Yo mismo, algunas de las cosas que descubrí primero por vía mecánica, las demostré luego geométricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica verdadera demostración. Pero es más fácil, una vez adquirido por este método un cierto conocimiento de los problemas, dar luego la demostración, que buscarla sin ningún conocimiento previo. Por esta razón, aun de los teoremas mismos referentes al cono y a la pirámide, que Eudoxo fue el primero en demostrar, a saber: que el cono es la tercera parte del cilindro, y la pirámide, la tercera parte del prisma, que tienen la misma base e igual altura, debe atribuirse un mérito no pequeño a Demócrito, que fue quien primero enunció, aunque sin demostrarla, esta propiedad de las mencionadas figuras. También a mí me ha ocurrido que el descubrimiento de los teoremas que ahora publico, lo hice de modo similar al de los anteriores. Y he querido exponerte por escrito el método y publicarlo, primero, porque habiendo hablado antes de él, no querría que se dijese que hablaba por hablar, y, después, porque estoy convencido también de la utilidad que puede aportar a la matemática. Pues supongo que algunos de mis contemporáneos o sucesores podrán encontrar, por este método, otros teoremas que a mí no se me han ocurrido todavía.

Expongo, en primer lugar, el que fue también el primer resultado que se me manifestó por vía mecánica, es decir, que "todo segmento de una sección cono rectángulo es igual a cuatro tercios del triángulo que tenga la misma base e igual altura", y luego cada uno de los otros resultados obtenidos con el mismo método. Al final del libro expondré las demostraciones geométricas de los teoremas cuyos enunciados te comuniqué.

Lemas

1. Si de una magnitud se quita otra magnitud, y un mismo punto es el centro de gravedad de la magnitud entera y de la que se ha quitado, el mismo punto es centro de gravedad también de la magnitud restante.
2. Si de una magnitud se quita otra magnitud, y la magnitud entera y la que se ha quitado no tienen el mismo centro de gravedad, el centro de gravedad de la magnitud restante se encuentra en la prolongación de la recta que une los centros de gravedad de la magnitud entera y la magnitud

quitada, a una distancia cuya relación con la recta que une los dichos centros de gravedad, es la misma que la del peso de la magnitud quitada con el de la magnitud restante.

3. Si los centros de gravedad de tantas magnitudes como se quiera se encuentran sobre una misma recta, el centro de gravedad de la magnitud, suma de las magnitudes consideradas, estará también sobre la misma recta.
4. El centro de gravedad de una recta cualquiera es su punto medio.
5. El centro de gravedad de un triángulo es el punto en que se cortan las rectas que unen los vértices del triángulo con los puntos medios de los lados.
6. El centro de gravedad de todo paralelogramo es el punto en el cual convergen las diagonales.
7. El centro de gravedad de un círculo es el mismo centro del círculo.
8. El centro de gravedad de todo cilindro es el punto medio del eje.
9. El centro de gravedad de todo prisma es el punto medio del eje.
10. El centro de gravedad de todo cono está sobre el eje, en un punto que lo divide de tal manera, que la parte hacia el vértice sea el triple de la restante.
11. Utilizaré también este teorema:

    Dadas tantas magnitudes como se quiera y otras magnitudes en igual número, tales que las que ocupan el mismo lugar, dos a dos, estén en la misma relación; si, además, todas o algunas de las primeras magnitudes tienen relaciones cualesquiera con otras magnitudes y las segundas magnitudes están en las mismas relaciones con otras magnitudes, entonces la suma de las primeras magnitudes es a la suma de aquellas con las que fueron puestas en relación, como la suma de las segundas es a la suma de aquellas con que fueron puestas en relación.

Proposición I
[Área de un segmento parabólico]

Sea ABC un segmento comprendido entre la recta AC y la sección ABC de un cono rectángulo, divídase AC por la mitad en D y trácense la recta DBE, paralela al diámetro, y las rectas AB y BC.

Digo que el segmento ABC es cuatro tercios del triángulo ABC. Trácense por los puntos A y C la recta AF paralela a DBE y la CF tangente a la sección; prolónguese CB hasta K y sea KH igual a CK. Considérese CH como una palanca con punto de apoyo en el punto medio K y sea MO una recta cualquiera paralela a ED.

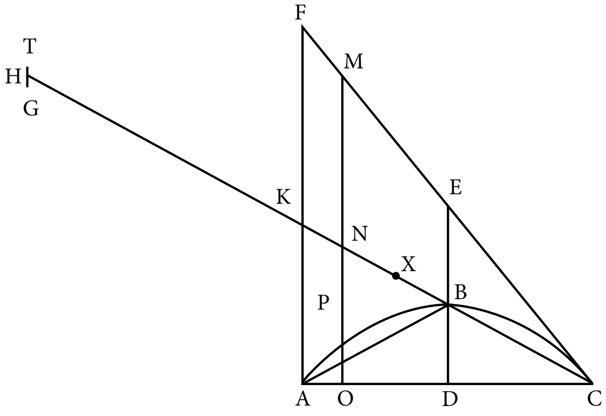

Figura 1

Puesto que CBA es una sección de un cono rectángulo y que CF es tangente a ella, y CD es una ordenada, se tiene EB = BD, como se ha demostrado en los *Elementos*. Por lo mismo, y puesto que FA y MO son paralelas a la recta ED, tendremos también que:

$$MN = NO \text{ y } FK = KA,$$

y puesto que

$$CA : AO = MO : OP$$

[lo cual se expone en un lema] y

$$CA : AO = CK : KN,$$

se tendrá, siendo también CK = KH:

$$KH : KN = MO : OP.$$

Ahora bien, puesto que el punto N es el centro de gravedad de la recta MO, por ser MN = NO [Lema 4], si tomamos la recta TG igual a OP y construimos TG con el centro de gravedad en H, de modo que sea TH = HG, la recta THG equilibrará a la MO, situada en su lugar, por estar HN dividida (por el punto K) en partes inversamente proporcionales a los pesos TG y MO; es decir, porque

$$HK : KN = MO : GT,$$

y por lo tanto K es el centro de gravedad de la suma de ambos pesos [Lema 3]. Análogamente, si en el triángulo FAC se trazan tantas paralelas como se quiera a ED, estas, permaneciendo en su lugar, equilibrarán a los segmentos intersecados sobre ellos por la sección y trasladados al punto H, de manera que el centro de gravedad de unas y otros será K.

Ahora bien, las rectas trazadas en el triángulo CFA componen el propio triángulo y los segmentos rectilíneos obtenidos en la sección del mismo modo que PO componen el segmento ABC; por lo tanto el triángulo FAC, dejado en su lugar, equilibrará, respecto del punto K, al segmento de la sección transportado hasta tener su centro de gravedad en H, de manera que el centro de gravedad de la suma de ambos será el punto K.

Divídase ahora CK por X de manera que sea CK = 3KX; el punto X será el centro de gravedad del triángulo AFC, como está demostrado en el libro *De el equilibrio*.

Por tanto, puesto que el triángulo FAC, permaneciendo en su lugar, equilibra, respecto del punto K, al segmento BAC, colocado con su centro de gravedad en H, y que X es el centro de gravedad del triángulo FAC, será, por consiguiente:

$$\text{AFC} : \text{segmento ABC colocado en H} = \text{HK} : \text{XK}$$

Mas siendo

$$\text{HK} = 3\text{KX},$$

es también

$$\text{FAC} = 3 \text{ segmento ABC}.$$

Además:

$$\text{FAC} = 4\text{ABC},$$

pues es

$$\text{FK} = \text{KA} \text{ y } \text{AD} = \text{DC},$$

luego

$$\text{segmento ABC} = \tfrac{4}{3}\,\text{ABC}.$$

En realidad, lo expresado no demuestra el resultado, pero da a la conclusión una cierta apariencia de verdad. Por lo cual, nosotros, conscientes de que la conclusión no está demostrada pero sospechando la verdadera, buscamos y encontramos su demostración geométrica, que exponemos en su lugar y que ya publicamos.

Proposición II
[Volumen de la esfera]

Toda esfera es cuatro veces mayor que el cono cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual a la radio de la esfera; a su vez, el cilindro cuya base sea igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura sea igual al diámetro de la esfera, será vez y media la esfera.

Estas proposiciones se ilustran con este método así: Supongamos una esfera en la cual el círculo máximo sea ABCD y los diámetros AC y BD, perpendiculares entre sí; supongamos, en la esfera, descripto en torno del diámetro BD, el círculo perpendicular al círculo ABCD, y sobre este círculo perpendicular constrúyase un cono que tenga su vértice en el punto A; prolongada la superficie [lateral] del cono, córtese este con un plano que pase por C y sea paralelo a la base; la sección será un círculo perpendicular a AC, de diámetro EF.

Partiendo de este círculo, descríbase un cilindro con eje igual a AC, y sean EL y FG los lados del cilindro. Prolónguese luego CA y constrúyase la línea AH igual a ella; considérese CH como una palanca con punto de apoyo en el punto medio A.

Trácese una recta MN paralela a BD que corte el círculo ABCD en los puntos O y P, el diámetro AC en S, la recta AE en Q y la recta AF en R. Levántese sobre la misma recta MN un plano perpendicular a AC; este plano cortará al cilindro según un círculo de diámetro MN; a la esfera ABCD según un círculo de diámetro OP y al cono según un círculo de diámetro QR.

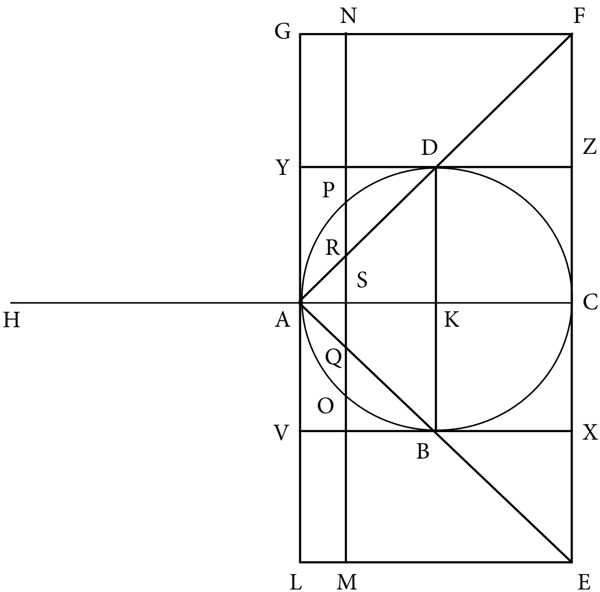

Figura 2

Ahora bien, puesto que

$$\text{rect. (CA, AS)} = \text{rect. (MS, SA)},$$

por ser

$$AC = SM, AS = AS,$$

es

$$\text{rect. (CA, AS)} = \text{cuad. AD} = \text{cuad. OS} + \text{cuad. SQ}$$

por consiguiente

$$\text{rect. (MS, SQ)} = \text{cuad. OS} + \text{cuad. SQ}.$$

Y puesto que

$$CA : AS = MS : SQ,$$

y es

$$CA = AH,$$

resulta que

$$HA : AS = MS : SQ = \text{cuad. } MS : \text{rect. } (MS, SQ).$$

Pero se demostró que

$$\text{rect. } (MS, SA) = \text{cuad. } OS + \text{cuad. } SQ,$$

por tanto:

$$AH : AS = \text{cuad. } MS : (\text{cuad. } OS + \text{cuad. } SQ).$$

Por otra parte

$$\text{cuad. } MS : (\text{cuad. } OS + \text{cuad. } SQ) = \\ = \text{cuad. } MN : (\text{cuad. } OP + \text{cuad. } QR),$$

y como el cuadrado de MN es a la suma de los cuadrados de OP y de QR, el círculo en el cilindro de diámetro MN es a la suma del círculo en el cono de diámetro QR y del círculo en la esfera de diámetro OP; por tanto: HA : AS = (círc. en el cilindro) : (círc. en la esfera + círc. en el cono).

De ahí que el círculo que está en el cilindro, permaneciendo en su lugar, equilibrará, respecto del punto A, a los dos círculos que tienen por diámetros OP y QR, trasladados y colocados de manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea H.

De la misma manera podrá demostrarse que si se traza en el paralelogramo LF otra recta paralela a EF y sobre ella se levanta un plano perpendicular a AC, el círculo que se obtiene en el cilindro, dejado en su lugar, equilibrará, respecto del punto A, a los dos círculos que se obtienen respectivamente, en la esfera y en el cono, transportados y colocados de tal modo sobre la palanca en el punto H, que el centro de gravedad de ambos sea el punto H. Así pues, llenados con tales círculos el cilindro, la esfera y el cono; el cilindro permaneciendo en su lugar, equilibrará, respecto del punto A, a la esfera y al cono juntos, transportados y colocados sobre la palanca en el punto H, de manera que el centro de gravedad de una y otro sea H.

Luego, dado que dichos sólidos se equilibran, respecto del punto A, permaneciendo el cilindro con el centro de gravedad en K y la esfera y el cono transportados, como se ha dicho, con el centro de gravedad en H, tendremos:

$$\mathrm{HA} : \mathrm{AK} = \text{cilindro} : (\text{esfera} + \text{cono AEF}).$$

Pero HA es doble de AK; luego es también cilindro = 2 (esfera + cono AEF), por tanto

$$3 \text{ cono AEF} = 2 \text{ esfera} + 2 \text{ cono AEF}.$$

Sáquense los dos conos comunes; resulta que el cono solo, cuyo triángulo por el eje es AEF, es igual a las dos susodichas esferas.

Mas, como es EF = 2 BD, se tiene:

$$\text{cono AEF} = 8 \text{ cono ABD};$$

por lo tanto

$$8 \text{ cono ABD} = 2 \text{ esfera}.$$

Luego la esfera, cuyo círculo máximo es ABCD, es el cuádruple del cono cuyo vértice es el punto A y cuya base es el círculo de diámetro BD perpendicular a AC.

Ahora bien, en el paralelogramo LF trácense, por los puntos B y D, las rectas VBX y YDZ paralelas a AC y considérese el cilindro que tiene por bases los círculos de diámetros VY y XZ por eje AC.

Puesto que

$$\text{cilindro VZ} = 2 \text{ cilindro VD}$$

y

$$\text{cilindro VD} = 3 \text{ cono ABD},$$

como se ha demostrado en los *Elementos*, se deduce:

$$\text{cilindro VZ} = 6 \text{ cono ABD}.$$

Como ya demostramos que la esfera que tiene por círculo máximo ABCD es cuádruple del mismo cono ABD, resulta que el cilindro es una vez y media la esfera; que era lo que había que demostrar. Conociendo esto, es decir, que toda esfera es cuatro veces el cono que tiene por base el círculo máximo y cuya altura es igual al radio de la esfera, se me ocurrió que la superficie de toda esfera sería cuatro veces el círculo máximo de la esfera, y como todo círculo es igual a un triángulo que tenga por base la circunferencia del círculo y por altura el radio del círculo, supuse también que toda esfera sería igual a un cono que tuviera por base la superficie de la esfera y cuya altura fuera igual al radio de la esfera.

Proposición III
[Volumen del elipsoide de revolución]

Con el mismo método se puede ver también que el cilindro cuya base es igual al círculo máximo de un esferoide y cuya altura es igual al eje del esferoide, es una vez y media el esferoide.

Esto resultará evidente si se prueba que: si se corta un esferoide con un plano que pase por el centro y sea perpendicular al eje, la mitad del esferoide es el doble del cono que tenga igual base e igual eje que el segmento.

En efecto, considérese un esferoide y córteselo con un plano por el eje; sea la intersección de este plano con la superficie del esferoide la sección de cono acutángulo ABCD, de diámetros AC y BD y de centro en K. Sea, en el mismo esferoide, el círculo de diámetro BD perpendicular a AC y considérese el cono que tenga por base dicho círculo y por vértice el punto A; prolónguese la superficie de este cono y córtese con un plano por C paralelo a su base; la sección será un círculo perpendicular a AC, de diámetro EF. Constrúyase, además, un cilindro que tenga por base el mismo círculo de diámetro EF y por eje la recta AC; prolónguese la recta AC, constrúyase AH = AC y considérese HC como una palanca cuyo punto de apoyo esté en el punto medio A.

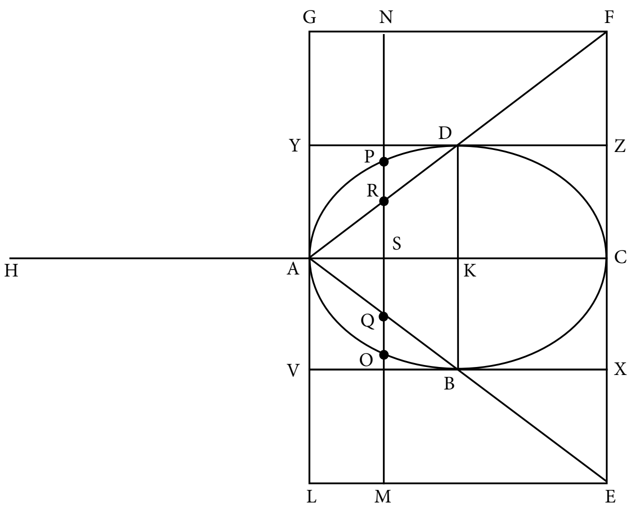

Figura 3

En el paralelogramo LF trácese una recta MN paralela a EF y por MN levántese un plano perpendicular a AC; este plano cortará al cilindro según un círculo de diámetro MN, al esferoide según un círculo de diámetro OP y al cono según un círculo de diámetro QR.

Ahora bien, como es

$$CA : AS = EA : AQ = MS : SQ.$$

y

$$CA = AH,$$

se deduce que

$$HA : AS = MS : SQ.$$

Por otra parte, como es

$$MS : SQ = \text{cuad. } MS : \text{rect. } (MS, SQ)$$

$$\text{rect. } (MS, SQ) = \text{cuad. } QS + \text{cuad. } SO.$$

En efecto, puesto que

$$\text{rect. } (AS, SC) : \text{cuad. } SO = \text{rect. } (AK, KC) :$$

$$\text{cuad. } KB = \text{cuad. } AK : \text{cuad. } KB,$$

ya que ambas relaciones son iguales a la relación entre el lado transverso y el lado recto, y puesto que

$$\text{cuad. } AK : \text{cuad. } KB = \text{cuad. } AS : \text{cuad. } SQ,$$

se obtendrá, permutando:

$$\text{cuad. } AS : \text{rect. } (AS, SC) = \text{cuad. } QS : \text{cuad. } SO.$$

Pero

$$\text{cuad. } AS : \text{rect. } (AS, SC) =$$
$$= \text{cuad. } SQ : \text{rect. } (SQ, QM),$$

luego

$$\text{rect. (SQ, QM)} = \text{cuad. OS.}$$

Súmese a ambos miembros el cuadrado de QS; resulta:

$$\text{rect. (MS, SQ)} = \text{cuad. QS} + \text{Cuad. SO,}$$

luego

$$\text{HA} : \text{AS} = \text{cuad. MS} : (\text{cuad. QS} + \text{cuad. SO}).$$

Pero como el cuadrado de MS es a la suma de los cuadrados de OS y de SQ, como el círculo en el cilindro, que tiene por diámetro MN, es a la suma de los dos círculos que tienen por diámetros a OP y QR; en consecuencia, respecto del punto A, el círculo de diámetro MN, dejado en su lugar, equilibrará a los dos círculos de diámetro OP y QR, trasladados y colocados sobre la palanca en H, de modo que el centro de gravedad de cada uno de ellos coincida con H. Ahora bien, siendo H el centro de gravedad de ambos círculos trasladados de diámetro OP y QR, y S el centro de gravedad del círculo de diámetro MN, resulta:

$$\text{HA} : \text{AS} = \text{círc. de diám. MN} :$$

$$(\text{círc. de diám. OP} + \text{círc. de diám. QR}).$$

Del mismo modo se demostrará que si se traza en el paralelogramo LF otra recta paralela a EF y por ella se levanta un plano perpendicular a AC, el círculo que se obtiene en el cilindro, dejado en su lugar, equilibrará, respecto del punto A, a los dos círculos que se obtienen respectivamente en el esferoide y en el cono transportados al punto H de la palanca, de manera que los centros de gravedad de ambos coincidan con H.

Así pues, llenados con tales círculos el cilindro, el esferoide y el cono; el cilindro, dejado en su lugar, equilibrará, respecto del punto A, al esferoide y al cono trasladados y colocados sobre la palabra en el punto H, de manera que los centros de gravedad de uno y otro coincidan con H.

Ahora bien, K es el centro de gravedad del cilindro [Lema 8] y H es el centro de gravedad común del esferoide y del cono, tal como lo hemos establecido; por tanto:

$$HA : AK = \text{cilindro} : (\text{esferoide} + \text{cono } AEF),$$

pero

$$AH = 2\ AK; \text{ luego también:}$$

$$\text{cilindro} = 2\ (\text{esferoide} + \text{cono } AEF) =$$

$$= 2 \text{ esferoide} + 2 \text{ cono } AEF.$$

Por otra parte:

$$\text{cilindro} = 3 \text{ cono } AEF;$$

luego

$$3 \text{ cono } AEF = 2 \text{ cono } AEF + 2 \text{ esferoide}.$$

Si se restan los dos conos comunes, resulta:

$$\text{cono } AEF = 2 \text{ esferoide}.$$

Pero

$$\text{cono } AEF = 8 \text{ cono } ABD;$$

por lo tanto:

$$8 \text{ cono } ABD = 2 \text{ esferoide}$$

y

$$4 \text{ cono } ABD = \text{esferoide}.$$

Por tanto, el esferoide es el cuádruple del cono cuyo vértice es el punto A y cuya base es el círculo de diámetro BD perpendicular a AC; y la mitad del esferoide es el doble de dicho cono. Trácense por los puntos B y D, en el paralelogramo LF, las rectas VX e YZ, paralelas a AC, y considérese el cilindro cuyas bases son los círculos que tienen por diámetros VY y XZ y cuyo eje es la recta AC.

Ahora bien, puesto que

$$\text{cilindro VZ} = 2 \text{ cilindro VD},$$

por ser sus bases iguales y el eje del primero doble del eje del segundo, puesto que el cilindro VD es triple del cono de vértice A cuya base es el círculo de diámetro BD perpendicular a AC, se tiene:

$$\text{cilindro VZ} = 6 \text{ cono ABD}.$$

Pero se demostró que

$$4 \text{ cono ABD} = \text{esferoide}.$$

Luego

$$\text{cilindro VZ} = \tfrac{3}{2} \text{ esferoide}.$$

Que era lo que había que demostrar.

Proposición IV
[Volumen de un segmento de paraboloide de revolución]

Todo segmento de un conoide rectángulo cortado por un plano perpendicular al eje, es una vez y media el cono que tenga la misma base y la misma altura que el segmento.

Esto puede verse por este método así:

Sea un conoide rectángulo y córtese con un plano por el eje; sea la intersección de este plano con la superficie del conoide la sección de cono rectángulo ABC. Córteselo, además, con un segundo plano perpendicular al eje y sea BC la intersección común de los dos planos. El eje del segmento sea

DA; prolónguese DA hasta H, de modo que sea AH = DA y considérese DH como una palanca con punto de apoyo en el punto medio A.

Sea el círculo de diámetro BC, perpendicular a AB, la base del segmento y considérese el cono que tiene por base el círculo de diámetro BC y por vértice el punto A; sea, además, un cilindro que tenga por base el círculo de diámetro BC y por eje AD.

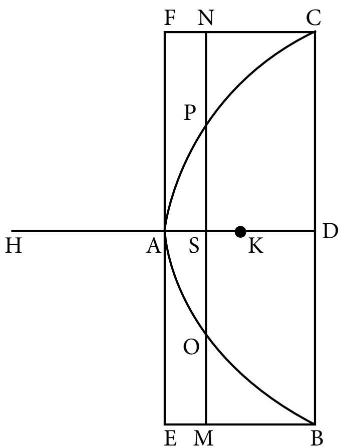

Figura 4

En el paralelogramo EC trácese una recta MN paralela a BC, y por MN levántese un plano perpendicular a AD; este plano cortará al cilindro según un círculo de diámetro MN y al segmento de conoide rectángulo según un círculo de diámetro OP.

Ahora bien, puesto que BAC es una sección de cono rectángulo, AD su diámetro y OS y BD son dos ordenadas, se tiene:

DA : AS = cuad. BD : cuad. OS.

Pero es DA = AH (y BD = MS) ; por consiguiente:

HA : AS = cuad. MS : cuad. SO.

Por otra parte como el cuadrado de MS es al cuadrado SO, como el círculo en el cilindro, que tiene por diámetro MN, es al círculo en el segmento del conoide rectángulo, que tiene por diámetro OP;

HA : AS = círc. de diám. MN : círc. de diám. OP.

Quedando, pues, donde está, el círculo de diámetro MN, situado en el cilindro, equilibrará respecto del punto A al círculo de diámetro PO, trasladado y colocado en el punto H de la palanca, de manera que ese punto H será su centro de gravedad. Además, S será el centro de gravedad del círculo cuyo diámetro sea MN, y H lo será del círculo de diámetro PO, pero desplazado, y HA estará respecto de AS en relación inversa al círculo de diámetro MN respecto del círculo de diámetro PO.

Del mismo modo se demostrará que si se traza en el paralelogramo EC otra recta paralela a BC y por ella se levanta un plano perpendicular a AH, el círculo que se obtiene en el cilindro, quedando en su lugar, equilibrará respecto del punto A el círculo que se obtiene en el segmento del conoide rectángulo trasladado sobre la palanca a H, de modo que su centro de gravedad coincida con H.

Llenados, pues, el cilindro y el segmento del conoide rectángulo, el cilindro, quedando en su lugar, equilibrará respecto del punto A al segmento del conoide rectángulo trasladado y puesto sobre la palanca en H. Entonces, puesto que esas magnitudes se equilibrarán respecto del punto A, y el centro de gravedad del cilindro es K, siendo K el punto medio de la recta AD [Lema 8] y siendo H el centro de gravedad del segmento trasladado, tendremos la proporcionalidad inversa:

$$\text{HA} : \text{AK} = \text{cilindro} : \text{segmento}.$$

Pero

$$\text{HA} = 2\ \text{AK};$$

por consiguiente:

$$\text{cilindro} = 2\ \text{segmento}.$$

Por otra parte, el mismo cilindro es triple del cono que tiene por base el círculo de diámetro BC y por vértice el punto A. De donde se infiere que segmento = $\frac{3}{2}$ cono ABC.

Proposición V
[Centro de gravedad de un segmento de paraboloide de revolución]

El centro de gravedad del segmento de conoide rectángulo, determinado por un plano perpendicular al eje, está situado sobre la recta que es eje del segmento, en el punto que divide a dicha recta, de manera que la parte hacia el vértice sea el doble de la otra parte.

Esto puede verse por el siguiente método:

Sea un segmento de conoide rectángulo determinado por un plano perpendicular al eje; córtese ese segmento con un segundo plano que pase por el eje y que corte la superficie según la sección del cono rectángulo ABC; sea BC la intersección común del plano que ha determinado el segmento y del plano secante; sea la recta AD el eje del segmento y el diámetro de la sección ABC. Sobre la prolongación de AD tómese AH = AD y considérese DH como una palanca con punto de apoyo en el punto medio A. Sea, además, un cono inscripto en el segmento que tenga por lados BA y AC y trácese en la sección de cono rectángulo una recta OP paralela a BC que interseque la sección misma en los puntos O y P y los lados del cono en los puntos Q y R.

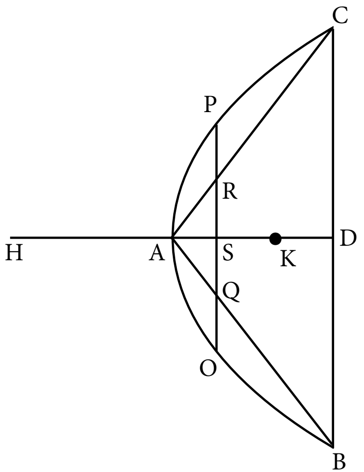

Figura 5

Ahora bien, puesto que en la sección de cono rectángulo las rectas OS y BD son perpendiculares al diámetro, se tiene:

DA : AS = cuad. BD : cuad. OS.

Por otra parte,

DA : AS = BD : QS;

BD: QS = cuad. BD; rect. (BD, QS);

de donde:

$$\text{cuad. BD : cuad. OS = cuad. BD : rect. (BD, QS)}$$

y por tanto:

$$\text{cuad. OS = rect. (BD, QS).}$$

Son, pues, proporcionales BD, SO y SQ y por ello es

$$\text{BD : QS = [rect. (BD, QS) : cuad. (QS)] = cuad. OS : cuad. SQ.}$$

Pero

$$\text{BD : QS = DA : AS = HA : AS,}$$

y, por tanto, también:

$$\text{HA : AS = cuad. OS : cuad. SQ.}$$

Levántense por OP un plano perpendicular a AD; este plano cortará al segmento de conoide rectángulo según el círculo de diámetro OP y al cono según el círculo de diámetro QR.

Y puesto que

$$\text{HA : AS = cuad. OS : cuad. SQ}$$

y

$$\text{cuad. OS : cuad. SQ = círc. de diám. OP : círc. de diám. QR;}$$

se infiere que

$$\text{HA : AS = círc. de diám. OP : círc. de diám. QR.}$$

Por esto, el círculo del diámetro OP, dejado en su lugar, equilibrará, respecto del punto A, el círculo de diámetro QR trasladado al punto H de la palanca, de modo que su centro de gravedad coincida con H. Mas como el centro de gravedad del círculo de diámetro OP, que permanece en su lugar, es S [Lema 7] y el centro de gravedad del círculo de diámetro QR, trasladado, es H, tendremos la proporcionalidad inversa:

$$HA : AS = \text{círc. de diám. } OP : \text{círc. de diám. } QR;$$

por lo cual los dos círculos, el de diámetro OP y el de diámetro QR se equilibrarán respecto del punto A.

Del mismo modo se podrá también demostrar que si se traza en la sección de cono rectángulo otra recta paralela a BC y por ella se levanta un plano perpendicular a AD, el círculo que se obtiene en el segmento del conoide rectángulo, permaneciendo en su lugar, equilibrará, respecto del punto A, al círculo que se obtiene en el cono, trasladado y colocado en el punto H de la palanca, de modo que su centro de gravedad sea H.

Llenados, pues, por tales círculos el segmento y el cono, todos los círculos del segmento, permaneciendo en su lugar, equilibrarán, respecto del punto A, a todos los círculos del cono trasladados sobre la palanca a H, de modo que sus centros de gravedad coincidan con H.

Por esto también el segmento del conoide rectángulo, permaneciendo en su lugar, equilibrará, respecto del punto A, al cono trasladado y colocado sobre la palanca en H, de modo que su centro de gravedad sea H.

Pero puesto que el centro de gravedad de ambas magnitudes reunidas en una sola es A, mientras que el centro de gravedad del cono trasladado es H, se infiere [Lema 2] que el centro de gravedad de la restante magnitud [es decir del segmento] estará sobre la recta AH prolongada más allá de A por un segmento AK tal que

$$AH : AK = \text{segmento} : \text{cono}.$$

Pero es

$$\text{Segmento} = \tfrac{3}{2}\,(\text{cono}) \qquad [\text{prop. IV}];$$

por lo tanto es también:

$$HA = \tfrac{3}{2}\,AK.$$

Es decir, que el centro de gravedad del conoide rectángulo es el punto K, que divide a AD de manera tal que la parte hacia el vértice del segmento sea doble de la parte restante.

Proposición VI
[Centro de gravedad de un hemisferio]

El centro de gravedad de todo hemisferio está situado sobre la recta que es eje del mismo, en un punto que divide al eje de manera que la parte del mismo hacia la superficie del hemisferio está con la restante en la misma relación que 5 está con 3.

Dada una esfera córtese con un plano que pase por el centro, y sea la intersección de este plano con la superficie el círculo ABCD; sean AC y BD dos diámetros del círculo perpendiculares entre sí; por BD levántese un plano perpendicular a AC y constrúyase el cono que tenga por base el círculo de diámetro BD, por vértice el punto A y por lados AB y AD. Prolónguese CA y hágase AH = CA, y considérese la recta HC como una palanca con punto de apoyo en el punto medio A.

En el semicírculo BAD trácese una recta OP paralela a BD que interseque la semicircunferencia en los puntos O y P, los lados del cono en los puntos Q y R, y la recta AD en el punto E.

Por OP levántese un plano perpendicular a AE; este plano cortará al hemisferio según el círculo de diámetro OP y al cono según el círculo de diámetro QR.

Ahora bien, puesto que

$$\mathrm{AC : AE = cuad.\ OA : cuad.\ AE},$$

y

$$\mathrm{cuad.\ OA = cuad.\ AE + cuad.\ EO},$$

$$\mathrm{AE = EQ};$$

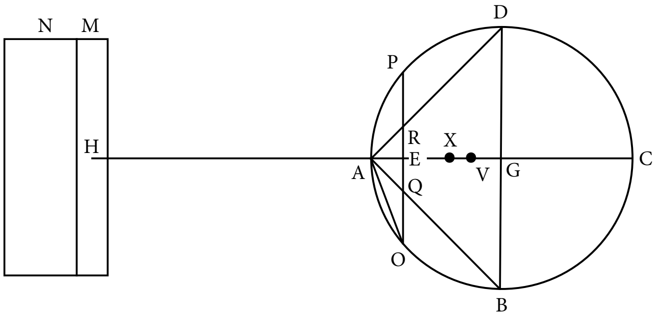

Figura 6

se infiere:

AC : AE = (cuad. OE + cuad EQ) : cuad. EQ.

Por otra parte:

(cuad. OE + cuad EQ) : cuad EQ =

= (círc. de diám. OP + círc. de diám. QR) : círc. de diám. QR,

y

CA = AH,

luego,

HA : AE = (círc. de diám. OP + círc. de diám. QR) :

: círc. de diám. QR.

Por tanto, los dos círculos de diámetros OP y QR, permaneciendo en su lugar, equilibrarán, respecto del punto A, al círculo de diámetro QR, trasladado y colocado en H de modo que su centro de gravedad sea precisamente H.

Pero, puesto que el centro de gravedad de los dos círculos de diámetro OP y QR, dejados en su lugar, es E [Lema 7] y el centro de gravedad del círculo de diámetro QR, trasladado, es H, se tiene:

$$EA : AH = \text{círc. de diám. } QR : \\ : (\text{círc. de diám. } OP + \text{círc. de diám } QR).$$

Del mismo modo, podrá también demostrarse que, si se traza en el semicírculo otra paralela a BGD y por ella se levanta un plano perpendicular a AC, los dos círculos que se determinan en el hemisferio y en el cono, quedando en su lugar, equilibrarán, respecto del punto A, al círculo que se obtiene en el cono, trasladado de modo que su centro de gravedad coincida con el punto H de la palanca. Así pues, llenados por círculos el hemisferio y el cono, todos los círculos del hemisferio y del cono, permaneciendo en su lugar, equilibrarán, respecto del punto A, a todos los círculos del cono trasladados sobre la palanca de modo que sus centros de gravedad coincidan con H.

[Ahora bien, suspéndase en H el cilindro (M + N), igual al cono ABD y córtese con un plano perpendicular al eje de manera que el cilindro M solo equilibre, respecto del punto A, al cono]. Tómese sobre AG un punto V tal que sea AV = 3VG; V será el centro de gravedad del cono [Lema 10.]

Tómese, luego, otro punto X tal que se tenga:

$$AG : AX = 8 : 5$$

o sea:

$$XG : AX = 3 : 5.$$

Puesto que el cilindro M equilibra, respecto del punto A, al cono ABD, se tendrá:

$$\text{cilindro } M : \text{cono } ABD = VA : HA = \tfrac{3}{4} AG : 2AG = 3 : 8.$$

Pero

$$\text{cono ABD} = \text{cilindro } (\text{M} + \text{N}),$$

luego

$$\text{cilindro } (\text{M} + \text{N}) : \text{cilindro M} = 8 : 3;$$

de donde

$$\text{cilindro N} : \text{cilindro } (\text{M} + \text{N}) = 5 : 8,$$

es decir

$$\text{cono ABD} : \text{cilindro N} = \text{AG} : \text{AX}.$$

Y como la esfera es el cuádruple del cono que tiene por base el círculo de diámetro de BD y por eje AGH [Proposición II] [será:

$$\text{hemisferio} : \text{cono ABD} = 2 : 1 = \text{AH} : \text{AG},$$

$$\text{hemisferio} : \text{cilindro N} = \text{AH} : \text{AX}.$$

Por tanto el cilindro N, con centro de gravedad en H, equilibra, respecto del punto A, al hemisferio.

Luego, el centro de gravedad del hemisferio es el punto X, que divide al eje de manera que la parte hacia la superficie del hemisferio está con respecto a la puerta restante en la relación de 5 a 3].

Proposición VII
[Volumen de un segmento esférico]

Con este método se puede ver que:

La relación entre todo segmento esférico [de una sola base] y el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje es igual a la relación entre la suma del radio de la esfera y la altura del segmento suplementario.

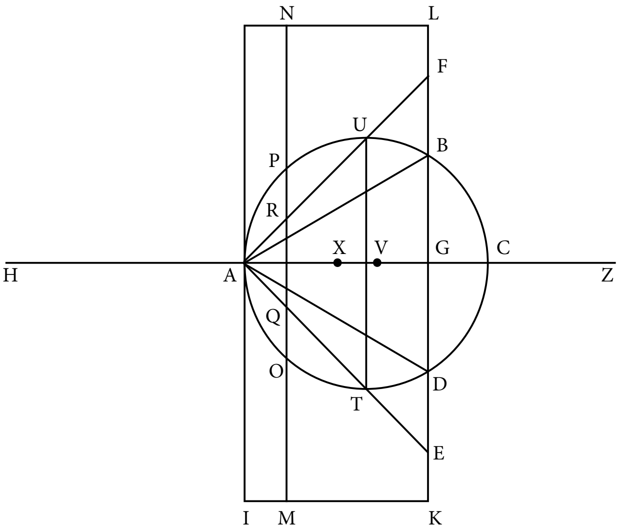

Figura 7

Sea una esfera y, en ella, el círculo máximo ABCD y los diámetros AC y TU, perpendiculares entre sí; córtese la esfera con un plano perpendicular a AC, que determine el segmento [esférico] que tenga por base el círculo de diámetro BD y sea G el punto de intersección de BD con AC. Constrúyase el cono que tiene por base el círculo de diámetro BD y por vértice el punto A. Constrúyase luego un segundo cono que tenga por base el círculo de diámetro TU y por vértice el mismo punto A; prolónguese la superficie [lateral] de este segundo cono y córtese con un plano que, pasando por BD, sea paralelo a su base; la sección será el círculo de diámetro EF. En el mismo plano, con centro en G y radio igual a AC, constrúyase el círculo de diámetro KL y considérese el cilindro que tiene por base ese círculo y por eje a AG. Prolónguese AC, más allá de C, un segmento CZ igual al radio de la esfera y, más allá de A, un segmento AH = AC, y considérese CH como una palanca cuyo punto de apoyo sea el punto medio A. En el paralelogramo IL trácese, pues, una recta MN paralela a BD, y por MN levántese un plano perpendicular a AC; este plano intersecará al cilindro según el círculo de diámetro MN, al segmento de la esfera según el círculo de diámetro OP y al cono que tiene por base el círculo de diámetro EF y por vértice el punto A, según el círculo de diámetro QR.

Como en un caso precedente [Proposición II], se demostrará que el círculo de diámetro MN, quedando en su lugar, equilibrará, respecto del punto A, a los dos círculos de diámetros PO y QR trasladados al punto H de la palanca, de manera que los centros de gravedad de ambos coincidan con H.

Y lo mismo ocurre para todo otro círculo.

Llenados pues, por círculos el cilindro, el cono y el segmento de la esfera, el cilindro, permaneciendo en su lugar, equilibrará al cono y al segmento de la esfera juntos, trasladados y colocados de manera que sus centros de gravedad coincidan ambos con H.

Córtese ahora AG en los puntos V y X de modo que sea:

$$AX = XG, \qquad GV = \tfrac{1}{3}\,AG.$$

El punto X será el centro de gravedad del cilindro, por ser el punto medio del eje AG [Lema 8].

Dado que las magnitudes antedichas se equilibran respecto del punto A, se tendrá:

$$\text{Cilindro} : (\text{cono } AEF + \text{segmento de la esfera } BAD) = \\ = HA : AX.$$

Además, como es GA = 3GV, será:

$$\text{rect. (CG, GV)} = \tfrac{1}{3}\,\text{rect. (AG, GC)}.$$

Pero

$$\text{rect. (AG, GC)} = \text{cuad. GB},$$

por tanto, también:

$$\text{rect. (CG, GV)} = \tfrac{1}{3}\,\text{cuad. BG}.$$

[Por otra parte,

$$\text{cuad. AG} = 3\ \text{rect. (AG, GV)}$$

y como es

$$\text{AG} : \text{AX} = \text{AV} : \text{VG} = 2 : 1,$$

se tiene

$$\text{cuad. AG} = 3\ \text{rect. (AX, AV)}.$$

Ahora bien, puesto que

$$\text{HA} = \text{KG y AG} = \text{GE},$$

se infiere que

$$\text{cuad. HA} : \tfrac{1}{3}\,\text{cuad. AG} = \text{cilindro que tiene por base al círculo de diámetro KL} : \text{cono AEF}.$$

Pero

$$\text{cuad. HA} : \tfrac{1}{3}\,\text{cuad. AG} = \text{cuad. HA} : \text{rect. (AX, AV)};$$

luego cuad. HA: rect. (AX, AV) = cilindro : cono AEF.]

Pero hemos demostrado que es también

HA : AX = cilindro : (segmento de la esfera ABD + cono AEF).

[Y como es

$$\text{HA} = \text{AC} = \text{AV} + \text{VC},$$

será

$$\text{cuad. HA} : (\text{rect. }(\text{AV}, \text{AX}) + \text{rect. }(\text{VC}, \text{AX})) =$$
$$= \text{cilindro} : (\text{segmento ABD} + \text{cono AEF});$$

y por tanto,

$$\text{cuad. HA} : \text{rect. }(\text{VC}, \text{AX}) = \text{cilindro} : \text{segmento.}$$

Pero

$$\text{cuad. HA} : \tfrac{1}{3}\,\text{cuad BG} = \text{cilindro} : \text{cono ABD} =$$
$$= \text{cuad. HA} : \text{rect. }(\text{CG}, \text{GV});$$

y por lo tanto

$$\text{rect. }(\text{VC}, \text{AX}) : \text{rect. }(\text{CG}, \text{GV}) =$$
$$\text{segmento de la esfera ABD} : \text{cono ABD.}$$

Ahora bien, siendo:

$$\text{AG} = 2\text{AX} = \text{AV} + \text{VG} = 3\text{VG}$$

y

$$\text{VC} = \text{VG} + \text{GC} = \tfrac{1}{3}\,\text{AG} + \text{GC},$$

será:

$$\text{rect. }(\text{VC}, \text{AX}) = \text{rect. }(\tfrac{1}{3}\,\text{AG}, \tfrac{3}{2}\text{VG} +$$
$$+ \text{rect. }(\text{CG}, \tfrac{3}{2}\text{VG}) = \text{rect. }(\tfrac{1}{2}\,\text{AC} + \text{CG}, \text{VG}) =$$
$$= \text{rect. }(\text{GZ}, \text{VG}).$$

Luego, finalmente:

$$\text{GZ} : \text{GC} = \text{segmento de la esfera ABD} : \text{cono ABD.}]$$

Proposición VIII
[Volumen de un segmento de elipsoide]

Mediante un procedimiento análogo, con el mismo método, se puede ver también que:

La relación entre el segmento de esferoide determinado por un plano perpendicular al eje y el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje, es igual a la relación de la suma del semieje del esferoide más el eje del segmento suplementario y el eje de este segmento suplementario.

Proposición IX
[Centro de gravedad de un segmento esférico]

Todo segmento esférico tiene su centro de gravedad sobre la recta que es eje del segmento, dividida de tal manera que la parte hacia el vértice y la parte restante estén en la misma relación que la suma del eje del segmento y el cuádruple del eje del segmento suplementario con la suma del eje del segmento y el doble del eje del segmento suplementario.

Sea una esfera y un plano que la corte determinando el segmento [esférico] BAD y otro plano que pase por el centro y corte a la esfera según el círculo ABDC] e interseque el plano que ha determinado el segmento [esférico] según la recta BD. Sea CA el diámetro perpendicular a BD, que corte a BD en G, de modo que el eje del segmento con vértice en A sea AG y GC resulta ser el eje del segmento suplementario.

Córtese la recta AG en X de manera que sea:

$$AX : XG = AG + 4GC : AG + 2CG.$$

X es el centro de gravedad el segmento con vértice en A.

Prolónguese también AC y tómese AH = AC, o sea CO igual al radio de la esfera, y considérese CH como una palanca con punto de apoyo en el punto medio A.

En el plano que determina el segmento descríbase un círculo con centro en G y radio igual a AG y sobre este círculo

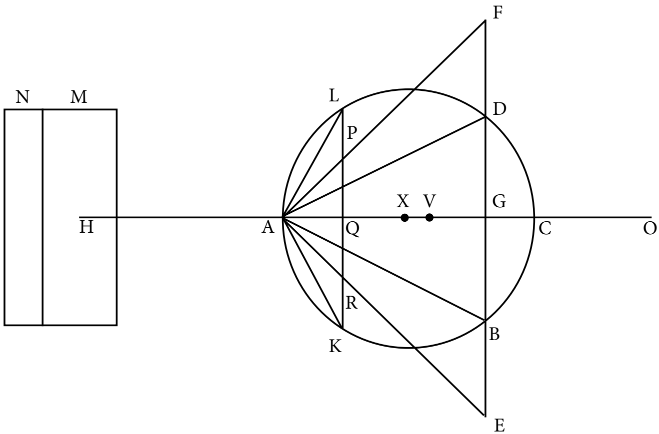

Figura 8

constrúyase un cono con vértice en A; sean AE y AF los lados de ese cono.

Trácese luego una recta KL paralela a EF que coincida con la superficie del segmento en los puntos K y L, con los lados del cono en los puntos R y P y con la recta AC en el punto Q.

Ahora bien, puesto que

$$AC : AQ = \text{cuad. } KA : \text{cuad. } AQ$$

y

$$\text{cuad. } KA = \text{cuad. } AQ + \text{cuad. } QK,$$
$$\text{cuad. } AQ = \text{cuad } QP.$$

y puesto que también es

$$\text{cuad. } AG = \text{cuad. } EG,$$

se infiere que

$$CA : AQ = (\text{cuad. } KQ + \text{cuad } QP) : \text{cuad } QP.$$

Por otra parte

$$(\text{cuad. KQ} + \text{cuad. QP}) : \text{cuad. QP} =$$
$$= (\text{círc. de diám. KL} + \text{área de diám. PR}) : \text{círc. de diám. PR},$$

y

$$\text{CA} = \text{AH};$$

resulta

$$\text{HA} : \text{AQ} = (\text{círc. de diám. KL} + \text{círc. de diám. PR}) :$$
$$: \text{círc. de diám. PR}.$$

Dado que también

$$\text{círc. de diám. KL} + \text{círc. de diám PR} : \text{círc. de diám. PR} =$$
$$= \text{AH} : \text{QA}$$

trasládase el círculo de diámetro PR y colóquese en el punto H de la palanca de modo que su centro de gravedad sea H, y entonces:

HA es a AQ

como el círculo de diámetro KL y el círculo de diámetro PR, permaneciendo en su lugar, son al círculo de diámetro PR trasladado y colocado de manera que su centro de gravedad coincida con el punto H de la palanca y, por esto, el círculo del segmento BAD y el del cono AEF equilibrará, respecto del punto A, al círculo del cono AEF.

Así también, análogamente, todos los círculos situados en el segmento BAD y todos los del cono AEF, quedando en su lugar, equilibrarán, respecto del punto A, a todos los círculos del cono AEF, trasladados y colocados de manera que sus centros de gravedad coincidan con el punto H de la palanca; y, por esto también, el segmento de la esfera ABD y el cono AEF, continuando en su lugar, equilibrarán, respecto del punto A, al cono AEF, trasladado y colocado de tal manera que su centro de gravedad coincida con el punto H de la palanca.

Sea ahora el cilindro M + N igual al cono que tiene por base el círculo de diámetro EF y por vértice el punto A, córtese AG en V de tal manera que sea AG = 4VG; el punto V será el centro de gravedad del cono EAF, como ya lo hemos establecido [Lema 10]. Córtese, además, el cilindro M + N con un plano perpendicular a su eje, de modo que el cilindro M [solo] equilibre al cono EAF.

Entonces, puesto que el cono EAF y el segmento ABD, continuando en su lugar, equilibran al como EAF, trasladado y colocado de manera que su centro de gravedad coincida con el punto H de la palanca; y puesto que el cilindro M + N es igual al cono EAF y cada uno de los cilindros M y N tiene el centro de gravedad en H y el cilindro M equilibra al cono EAF, se infiere que el cilindro N equilibrará, respecto del punto A, al segmento de la esfera.

Ahora bien, se tiene, como se ha establecido precedentemente [Proposición VII]:

segmento de la esfera BAD : cono ABD = OG : GC.

Además:

cono BAD : cono EAF =
= círc. de diám. BD : círc. de diám. EF

y como el círculo es al círculo,

como el cuad. BG es al cuad. GE,

y también

cuad. BG = rect. (CG, GA);
cuad. GE = cuad. GA.

Luego,

$$\text{cono BAD} : \text{cono EAF} = OG : GA.$$

Pero fue también demostrado que

$$\text{cono BAD} : \text{segmento BAD} = CG : GO;$$

por lo tanto

$$\text{segmento BAD} : \text{cono EAF} = OG : GA.$$

Además, puesto que

$$AX : XG = CA + 4GC : AG + 2GC,$$

invirtiendo, se tiene:

$$GX : XA = 2CG + GA : 4CG + GA,$$

y, componiendo,

$$GA : AX = 6CG + 2GA : GA + 4GC.$$

Además, como salta a la vista:

$$GO = \tfrac{1}{4}(6GC + 2GA)$$

y

$$CV = \tfrac{1}{4}(4GC + GA);$$

por lo tanto:

$$GA : AX = GO : CV,$$

y también

$$OG : GA = CV : XA.$$

Se demostró también que

$$OG : GA = \text{segmento BAD} : \text{cono EAF},$$

luego

$$\text{segmento BAD} : \text{cono EAF} = CV : XA.$$

Ahora bien, puesto que el cilindro M equilibra, respecto del punto A, al cono EAF y el centro de gravedad del cilindro es H y el del cono es V, será, en consecuencia:

$$\text{cono EAF: cilindro M} = \text{HA} : \text{AV} = \text{CA} : \text{AV};$$

y siendo

$$\text{cono EAF} = \text{cilindro } (\text{M} + \text{N}),$$

se tiene:

$$\text{cilindro } (\text{M} + \text{N}) : \text{cilindro N} = \text{CA} : \text{CV}.$$

Además

$$\text{cilindro } (\text{M} + \text{N}) = \text{cono EAF};$$

luego,

$$\text{cono EAF} : \text{cilindro N} = \text{CA} : \text{CV} = \text{HA} : \text{CV}.$$

Pero ya se demostró que

$$\text{segmento BAD} : \text{cono EAF} = \text{CV} : \text{XA};$$

luego también

$$\text{segmento BAD} : \text{cilindro N} = \text{HA} : \text{AX}.$$

Se demostró también que el segmento BAD equilibra al cilindro N respecto del punto A, y que el centro de gravedad del cilindro N es H; luego también el centro de gravedad del segmento BAD será el punto X.

Proposición X
[Centro de gravedad de un segmento elipsoide de rotación]

Con un procedimiento similar al precedente se puede ver también que:

El centro de gravedad de todo segmento de esferoide se encuentra sobre la recta que es eje del segmento, en un punto que divide a dicha recta de modo que la parte de ella hacia el vértice y la otra parte estén en la misma relación que la suma del eje del segmento más el cuádruple del eje del segmento suplementario, más el doble del eje del segmento suplementario.

Proposición XI
[Volumen y centro de gravedad de un segmento de hiperboloide de revolución de dos hojas]

Con el mismo método se puede también ver que:

La relación entre un segmento cualquiera de conoide obtusángulo y el cono que tiene la misma base y el mismo eje que el segmento, es igual a la relación entre la suma del eje del segmento más el triple de la recta agregada al eje y la suma del eje del segmento más el doble de la misma recta agregada.

El centro de gravedad de un segmento de conoide obtusángulo se encuentra sobre su eje en un punto que divide a este, de tal manera que la parte hacia el vértice y la otra parte estén en la misma relación que la suma del triple del eje más ocho veces la recta agregada y la suma del mismo eje del conoide más el cuádruple de la recta agregada.

Muchas otras cosas de esta índole pueden ser examinadas con este método, pero las dejaremos por considerar que el método queda suficientemente explicado con los ejemplos expuestos.

Proposición XII
[Volumen de la uña cilíndrica. Determinación mecánica]

Con este método se puede ver que:

Si en un prisma recto de bases cuadradas se inscribe un cilindro que tenga sus bases sobre los dos cuadrados opuestos y la superficie lateral tangente a los otros cuatro paralelogramos del prisma, y si por el centro del círculo base del cilindro y por un lado del cuadrado opuesto se traza un plano, la figura determinada por ese plano será la sexta parte de todo el prisma.

Expuesto lo cual por este método pasaré a su demostración sirviéndome de consideraciones geométricas.

Considérese un prisma recto de bases cuadradas y el prisma de un cilindro inscrito en la forma descrita. Córtese el prisma con un plano que pase por el eje perpendicularmente al plano que ha determinado el segmento del cilindro y sea la intersección de este plano con el prisma circunscripto al cilindro el paralelogramo AB, y sea la recta BC la intersección común del plano que ha determinado el segmento del cilindro y del plano trazado por el eje perpendicularmente a él. Sea la recta CD el eje del prisma y del cilindro y sea EF la perpendicular a CD en su punto medio.

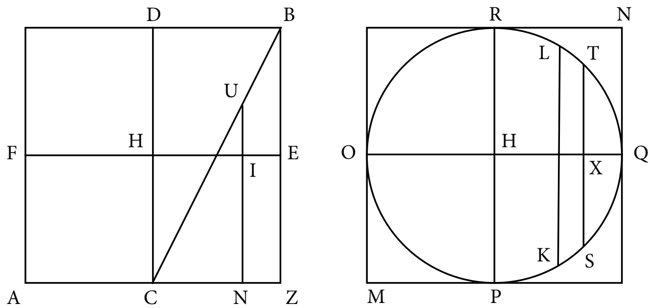

Figura 9

Por EF trácese un plano perpendicular a CD; este plano determinará sobre el prisma un cuadrado y sobre el cilindro un círculo; sea la intersección con el prisma el cuadrado MN y la intersección con el cilindro el círculo OPQR, el cual toque los lados del cuadrado en los puntos O, P, Q y R.

Sea la recta KL la intersección del plano que ha determinado el segmento cilíndrico con el plano construido por EF perpendicularmente al eje del cilindro; esta recta estará dividida en partes iguales por la recta QHO.

Trácese, en el semicírculo PQR, una recta ST, perpendicular a QX, y por ST levántese un plano perpendicular a OQ y prolónguese a ambos lados del plano que contiene al círculo OPQR.

Ese plano intersecará al semicilindro, que tiene por base al semicírculo PQR y por altura al eje del prisma, según un paralelogramo que tendrá un lado igual a ST y el otro igual al lado del cilindro; se intersecará también el segmento del cilindro según un paralelogramo con un lado igual a ST y el otro igual a NU, siendo NU una recta trazada en el paralelogramo DE, paralela a BZ, cuya distancia a ésta es EI igual a QX.

Ahora bien, puesto que EC es un paralelogramo y NI y HC son paralelas cortadas por las rectas EH y CB, se tiene:

$$EH : HI = ZC : CN = BZ : UN.$$

Pero BZ es a UN como el paralelogramo determinado en el semicilindro es al paralelogramo determinado en el segmento del cilindro, ya que ambos paralelogramos tienen un lado igual a ST y, además:

$$EH = HQ,\ IH = XH \text{ y } QH = HO;$$

luego

$$OH : HX = \text{paralelogramo en el semicilindro} : \text{paralelogramo en el segmento del cilindro.}$$

Considérese el paralelogramo del segmento cilíndrico trasladado y colocado en O, de modo que su centro de gravedad sea O, y supóngase que QO es una palanca con un punto de apoyo en su punto medio H.

Entonces el paralelogramo del semicilindro, quedando en su lugar, equilibrará al paralelogramo del segmento del cilindro trasladado y colocado en el punto O de la palanca, de modo que su centro de gravedad sea O.

Y puesto que el centro de gravedad del paralelogramo del semicilindro es X [Lema 6] y el centro de gravedad del paralelogramo del segmento del cilindro trasladado es O, y la relación entre OH y HX es igual a la relación entre el paralelogramo cuyo centro de gravedad hemos establecido que está en X y el paralelogramo cuyo centro de gravedad hemos dicho que está en O; se infiere que: el paralelogramo que tiene el centro de gravedad en X equilibrará, respecto del punto H, al paralelogramo cuyo centro de gravedad es O.

Del mismo modo, se demostrará también que si en el semicírculo PQR se traza otra recta perpendicular a QH y por ella se levanta un plano perpendicular a QH y este plano se prolonga a uno y a otro lado del plano que contiene al círculo OPQR, el paralelogramo determinado en el semicilindro, quedando en su lugar, equilibrará, respecto del punto H, al paralelogramo determinado en el segmento cilíndrico trasladado y colocado en el punto O, de modo que su centro de gravedad coincida con O.

Luego, todos los paralelogramos del semicilindro, permaneciendo en su lugar, equilibrarán, respecto del punto H, a todos los paralelogramos del segmento del cilindro trasladados y colocados sobre la palanca en el punto O; por consiguiente, también el semicilindro, dejado en su lugar, equilibrará, respecto del punto H, al segmento del cilindro trasladado y colocado en el punto O de la palanca, de modo que su centro de gravedad coincida con O.

Proposición XIII
[Segmento cilíndrico]

Considérese nuevamente el paralelogramo MN, perpendicular al eje, y el círculo OPQR; trácense las rectas HM y HG y por ellas levántese dos planos perpendiculares al plano en el que está el semicírculo PQR y prolónguese esos dos planos a ambos lados.

De este modo se formará un prisma que tendrá la base igual al triángulo HMG y la altura igual al eje del cilindro. Ese prisma es la cuarta parte del prisma entero que envuelve al cilindro.

En el semicírculo PQR y en el cuadrado MN trácense las dos rectas KL y TU, equidistantes de QO, las cuales cortarán la periferia del semicírculo PQR en los puntos K y T, el diámetro PR en los puntos S y F, y las rectas HG y HM en los puntos X y V.

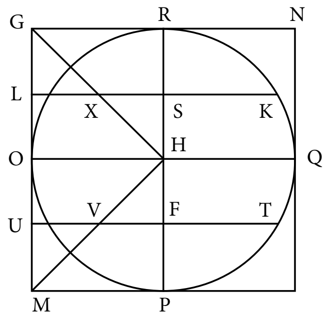

Figura 10

Por KL y TU levántense dos planos perpendiculares a PR y prolónguense de ambas partes del plano que contiene al círculo OPQR. Uno de estos planos intersecará al semicilindro que tiene por base al semicírculo PQR y una altura igual a la del cilindro, según un paralelogramo que tendrá uno de sus lados igual a KS y el otro igual al eje del cilindro; intersecará también al prisma HGM según un paralelogramo, uno de cuyos lados será igual a LX y el otro igual al eje. Por la misma razón, en el mismo semicilindro se tendrá otro paralelogramo con un lado igual a TF y el otro lado igual al eje del cilindro, y en el prisma HGM se tendrá otro paralelogramo, uno de cuyos lados será igual a UV y el otro lo será al eje del cilindro.

[Siendo los centros de gravedad de los rectángulos que tienen las bases iguales a SK y FT, respectivamente, los puntos medios de las rectas SK y FT, el centro de gravedad de los dos juntos será el punto A', en el cual la recta que une los centros de gravedad de ambos rectángulos corta a HQ [Lema 3].

Por la misma razón, el centro de gravedad de los dos rectángulos juntos que tienen las bases iguales a KL y UV, será el punto B', en el cual se encuentran la recta que une los puntos medios de las rectas KL y UV y la recta OH.

Entonces se tiene:

$$\begin{gathered}(\text{rect. SK} + \text{rect. TF}) : (\text{rect. XL} + \text{rect. UV}) = \text{SK} : \text{LX} = \\ = \text{SK} : \text{SR} = \text{cuad. SK} : \text{rect. (SR, SK)} = \\ = \text{rect. (SR, SP)} : \text{rect. (SR, SK)} = \text{SP} : \text{SK} = \\ = (\text{SR} + 2\ \text{SH}) : \text{SK} = (\text{LX} + 2\ \text{XS}) : \text{SK} = \\ = (\tfrac{1}{2}\ \text{LX} + \text{XS}) : \tfrac{1}{2}\ \text{SK} = \text{B'H} : \text{A'H}.\end{gathered}$$

Luego, la suma de los rectángulos que tienen las bases iguales a SK y a TF y la suma de los rectángulos que tienen las bases iguales a LX y a UV se equilibran respecto del punto H.

Lo mismo vale también para cualquier otro rectángulo que esté determinado de igual modo en el semicilindro y en el prisma triangular.

Por tanto, también el semicilindro y el prisma GHM, que se llenan con dichos rectángulos, se equilibran respecto del punto H.

Pero el semicilindro equilibra, respecto del punto H, al segmento cilíndrico trasladado a O, y es HO = QH; de donde resulta que el segmento cilíndrico, colocado en Q, equilibrará al prisma GHM, dejado en su lugar.

Ahora bien, el centro de gravedad del prisma está sobre la recta OH, en un punto tal que su distancia a H sea el doble de su distancia a O [lemas 9, 5]; luego:

$$\begin{gathered}\text{segmento cilíndrico} : \text{prisma GHM} = \\ = \tfrac{2}{3}\ \text{OH} : \text{QH} = 2 : 3.\end{gathered}$$

Mas como el prisma GHM es la cuarta parte de todo el prisma AB, se infiere que

segmento cilíndrico : prisma AB =
= 2 : 12 = 1 : 6.

Por tanto, el segmento cilíndrico es la sexta parte de todo el prisma circunscrito al cilindro.]

Proposición XIV
[Otra determinación del volumen de la uña cilíndrica]

Sea un prisma recto de bases cuadradas y sea una de sus bases el cuadrado ABCD. Inscríbase en el prisma un cilindro cuya

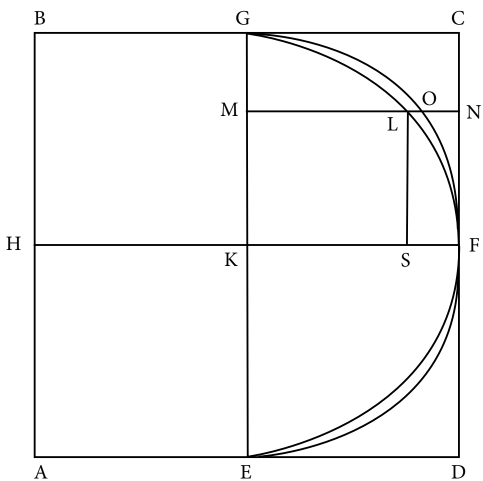

Figura 11

base sea el círculo EFGH, tangente a los lados del cuadrado ABCD en los puntos E, F, G y H. Por el centro de este círculo y por el lado del cuadrado opuesto a ABCD, correspondiente a CD, trácese un plano; este plano separará del prisma otro prisma que será la cuarta parte del prisma entero y que estará comprendido entre tres paralelogramos y dos triángulos opuestos entre sí.

En el semicírculo EFG inscríbase una sección de cono rectángulo que pase por los puntos G y E y tenga como eje a FK. En el paralelogramo DG trácese una recta MN paralela a KF; esta recta cortará a la periferia del semicírculo por O y a la sección de cono rectángulo L.

Entonces, como es evidente:

$$\text{rect. } (MN, NL) = \text{cuad. } NF;$$

y por tanto

$$MN : NL = \text{cuad. } KG : \text{cuad. } LS.$$

Por MN levántese un plano perpendicular a EG; este plano cortará al prisma ya sacado del prisma entero, según un triángulo rectángulo en el cual uno de los lados que determina el ángulo recto será MN, el otro la recta situada en el plano que pasa por CD (perpendicular al plano ABCD) perpendicular a CD en N e igual al eje del cilindro, y estando situada la hipotenusa en el mismo plano secante. El mismo plano cortará el segmento del cilindro determinado por el plano trazado por EG y por el lado del cuadrado opuesto a CD según un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos será MO, el otro la recta de la superficie cilíndrica perpendicular en O al plano KN y la hipotenusa estará situada en el mismo plano secante.

Por consiguiente, puesto que es evidente que

$$\text{rect. } (MN, ML) = \text{cuad. } MO,$$

se tendrá, como en el caso precedente:

MN : ML = cuad. MN : cuad. MO.

Pero el triángulo del prisma construido sobre MN es al triángulo del segmento cilíndrico construido sobre MO como el cuadrado de MN es al cuadrado de MO; por lo tanto:

triángulo del prisma :
triángulo del segmento del cilindro = MN : ML.

Del mismo modo, se demostrará también que si se traza en el paralelogramo circunscrito a la sección de cono rectángulo otra recta paralela a KF, y por esta recta se levanta un plano perpendicular a EG, se tendrá que el triángulo determinado en el prisma es al triángulo determinado en el segmento del cilindro como la paralela a KF situada en el paralelogramo DG es a la parte de ella comprendida entre la sección de cono rectángulo EGF y el diámetro EG.

Así pues, llenado el paralelogramo DG por rectas paralelas a KF y el segmento comprendido entre la sección de cono rectángulo y el diámetro con las partes de dichas paralelas intersecadas por el propio segmento, se tendrá que todos los triángulos del prisma estarán con todos los triángulos del segmento del cilindro en la misma relación en que todas las rectas del paralelogramo están con todas las rectas comprendidas entre la sección del cono rectángulo y el diámetro EG.

Pero el prisma está compuesto por todos los triángulos que están en el prisma, el segmento de cilindro está compuesto por todos los triángulos que están en el segmento mismo, el paralelogramo DG está compuesto por todas las rectas paralelas a KF que están en el propio paralelogramo, y el segmento de la sección de cono rectángulo está compuesto por todas las rectas (paralelas a KF) comprendidas entre la sección y EG; luego:

$$\text{prisma} : \text{segmento del cilindro} = \\ = \text{paralelogramo DG} : \text{segmento EFG}$$

comprendido entre la sección del cono rectángulo y el diámetro EG.

Pero, como fue demostrado en escritos precedentes:

$$\text{paralelogramo DG} = \tfrac{3}{2}\,\text{segmento EFG}$$

luego también:

$$\text{prisma} = \tfrac{3}{2}\,\text{segmento del cilindro}.$$

Por consiguiente:

$$\tfrac{1}{2}\ \text{segmento del cilindro} = \tfrac{1}{3}\ \text{prisma}.$$

Por otra parte,

$$\tfrac{1}{3}\ \text{prisma} = \tfrac{1}{12}\,\text{prisma total}$$

cirscunscrito al cilindro, ya que el cono es cuatro veces mayor que el otro, por tanto:

$$\tfrac{1}{2}\ \text{segmento del cilindro} = \tfrac{1}{12}\,\text{prisma total}.$$

Luego

$$\text{segmento del cilindro} = \tfrac{1}{6}\,\text{prisma total}.$$

Proposición XV
[Demostración geométrica de la Proposición XII]

Sea un prisma recto de bases cuadradas, una de las cuales sea el cuadrado ABCD. Inscríbase en el prisma un cilindro cuya base sea el círculo EFG, tangente a los lados del cuadrado en los puntos E, F, G y H, y cuyo centro sea el punto K. Por el diámetro EG [y por el lado del cuadrado opuesto correspondiente a CD trácese un plano]. Este plano separa del prisma total un prisma, y del cilindro, un segmento de cilindro.

Digo que se puede demostrar que ese segmento separado del cilindro por el plano construido en la forma indicada, es la sexta parte del prisma total.

Demostraré, ante todo, que se podrá inscribir en el segmento separado del cilindro un sólido y circunscribirle otro, compuestos ambos por prismas de igual altura y bases triangulares semejantes, tales que el sólido circunscrito supere el inscrito en una magnitud menor que cualquiera preestablecida.

Divídase el diámetro EG del semicírculo EFG sucesivamente en dos partes iguales y por los puntos de división trácense paralelas a KF; por los puntos en que éstas cortan a la semicircunferencia trácense paralelas a EG, y prolónguense estas de ambos lados hasta que corten a las dos más próximas paralelas a KF. Por estas paralelas trácense dos planos perpendiculares al plano del semicírculo.

Estos planos determinarán prismas inscritos y circunscritos al segmento del cilindro, que tendrán la misma altura y por bases triángulos rectángulos con un cateto sobre paralelas a KF.

Continúese la división de la recta EG en partes iguales hasta que los dos prismas circunscritos, que tienen la arista común en KF, sean menores que una magnitud cualquiera dada:

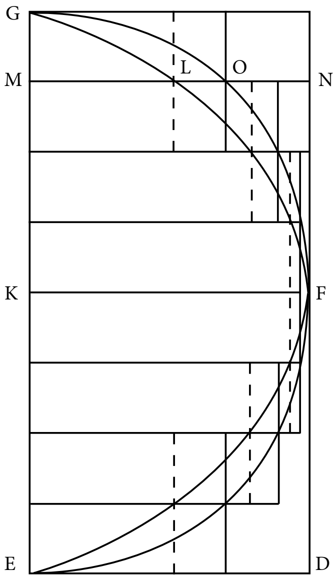

Figura 12

Entonces, la diferencia entre el sólido prismático circunscrito al segmento cilíndrico y el sólido inscrito será también menor que la magnitud dada. Tal diferencia, en efecto, es igual a la suma de los dos prismas circunscritos que tienen la arista común en KF, puesto que a todo otro prisma de figura circunscrita corresponde un prisma equivalente de la figura inscrita.

Trácese ahora, en el semicírculo, la sección de cono rectángulo EFG y por los puntos en que ella es cortada por las rectas paralelas a FK, trácense paralelas a EG; se tendrán dos figuras compuestas de paralelogramos: una circunscrita a la sección de cono rectángulo y la otra inscrita, de las cuales aquélla excede a esta en la suma de los dos paralelogramos que tienen la base común en KF, y cada uno de tales paralelogramos corresponde a una de las figuras sólidas de prisma antes citadas.

Si el segmento separado del cilindro no fuese igual a la sexta parte del prisma total, como hemos supuesto, sería mayor o menor que ella.

Supongamos, primero, que pueda ser mayor; en tal caso el prisma parcial determinado por el plano secante oblicuo será menor que $3/2$ del segmento del cilindro.

Inscríbase en ese segmento de cilindro una figura sólida y circunscríbase otra, de la misma manera antes explicada, tales que la figura circunscrita supere a la inscrita en una magnitud menor que cualquier magnitud dada.

Sea MN una de las rectas paralelas a KF trazada en el paralelogramo DG; sea ML la parte de tal recta comprendida entre la sección de cono rectángulo EFG y el diámetro EG y MO la parte comprendida entre EG y la circunferencia.

Hemos demostrado [Proposición XVI] que un plano perpendicular al paralelogramo DG, trazado por MN, corta al prisma parcial y al segmento de cilindro según dos triángulos tales que: triángulo del prisma parcial:

triángulo del segmento de cilindro = MN : ML.

Por esto también el prisma del prisma parcial que tiene por arista a MN es al prisma del sólido inscrito en el segmento del cilindro que tiene por arista a MO como MN es a ML.

Pero, por otra parte, el paralelogramo del paralelogramo DG que tiene por lado a MN es el paralelogramo inscrito en la sección del cono rectángulo que tiene por lado a ML como MN es a ML.

Resulta, pues, que:

> la suma de los prismas que componen al prisma parcial es a la suma de los prismas que componen al sólido inscrito en el segmento cilíndrico como la suma de los paralelogramos que componen el paralelogramo DG es a la suma de los paralelogramos que componen la figura inscrita en el segmento de la sección [Lema 11], luego: el prisma determinado por el plano oblicuo es a la figura inscrita en el segmento de cilindro como el paralelogramo DG es a la figura inscrita en el segmento de la sección de cono rectángulo.

Ahora bien, puesto que el prisma determinado por el plano oblicuo es menor que los 3/2 del segmento de cilindro y este supera a la figura en él inscrita por una magnitud más pequeña que cualquier magnitud dada, será también el prisma [parcial] determinado por el plano oblicuo, menor que los 3/2 del sólido inscrito en el segmento cilíndrico. Pero ya hemos demostrado que el prisma [parcial] determinado por el plano oblicuo es a la figura inscrita en el segmento cilíndrico como el paralelogramo DG es a la suma de los paralelogramos inscritos en el segmento comprendido entre la sección de cono rectángulo y la recta EG; luego el paralelogramo DG es menor que los 3/2 de la suma de los paralelogramos inscritos en el segmento comprendido entre la sección de cono rectángulo y la recta EG.

Pero esto es imposible, pues ya hemos demostrado que el paralelogramo DG es igual a los 3/2 del segmento comprendido entre la sección de cono rectángulo y la recta EG. Luego, el segmento cilíndrico no es mayor que la sexta parte del prisma total.

[Supongamos, en segundo lugar, que pueda ser menor; en tal caso el prisma [parcial] determinado por el plano oblicuo será mayor que los 3/2 del segmento cilíndrico.

Es posible inscribir y circunscribir, en el segmento cilíndrico, sólidos prismáticos tales que el prisma parcial resulte también mayor que los 3/2 del sólido circunscrito al segmento cilíndrico. Considerando ahora la figura sólida circunscrita al segmento cilíndrico y la figura circunscrita al segmento de la sección y razonando como antes, se demostrará que la suma de los prismas componentes del prisma determinado por el plano oblicuo es a la suma de los prismas que componen el sólido circunscrito al segmento del cilindro como la suma de los paralelogramos que componen el paralelogramo DG es a la suma de los paralelogramos que componen la figura circunscrita al segmento de la sección comprendido entre esa sección y la recta EG; es decir, que el prisma determinado por el plano oblicuo es al sólido circunscrito al segmento del cilindro como el paralelogramo DG es a la figura circunscrita del segmento de la sección comprendida entre la sección y la recta EG.

Pero el prisma determinado por el plano oblicuo es mayor que los 3/2 del sólido circunscrito al segmento del cilindro [luego también el paralelogramo DG será mayor que los 3/2 de la figura circunscrita en el segmento de la sección de cono rectángulo comprendido entre esa sección y la recta EG.

Pero esto es imposible, ya que hemos demostrado que el paralelogramo DG es igual a los 3/2 del mismo segmento de la sección. Por tanto, el segmento del cilindro no es menor tampoco que la sexta parte del prisma total.

No pudiendo, pues, ser ni mayor ni menor que la sexta parte del prisma total, es necesario que [el segmento cilíndrico] sea igual a la sexta parte de dicho prisma].

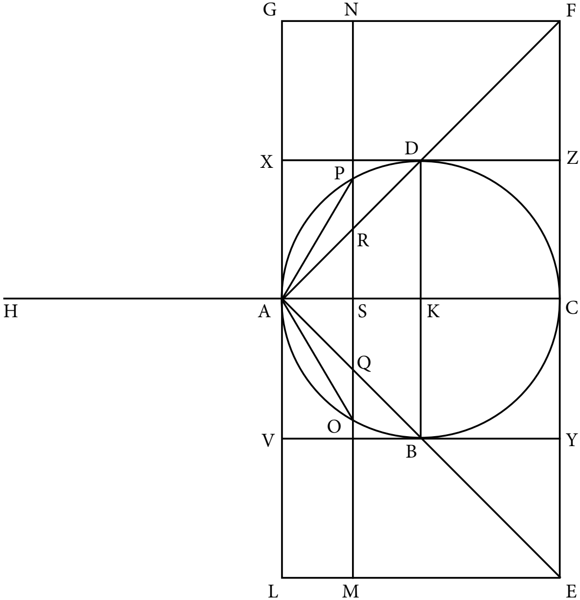

Figura 13

Proposición XVI
[Volumen del sólido común a dos cilindros inscritos en un cubo. Deducción mecánica]

Si en un cubo se inscribe un cilindro que tenga las bases sobre dos cuadrados opuestos y la superficie lateral tangente a las otras cuatro caras, y si, en el mismo cubo, se inscribe luego otro cilindro que tenga las bases sobre otros dos cuadrados y la superficie lateral tangente a las caras restantes, el sólido limitado por las superficies de los dos cilindros y común a ellos es igual a los ⅔ de todo el cubo.

Sea un cubo y en él dos cilindros inscritos en el modo antedicho.

Por el centro K del cubo constrúyase un plano perpendicular a dos caras opuestas. Este plano cortará al cubo según el cuadrado VXYZ, al cilindro cuyo eje es perpendicular al plano según el círculo ABCD y al otro cilindro según el mismo cuadrado VXYZ.

Sean AC y BD dos diámetros del círculo perpendiculares entre sí. Por BD constrúyase un plano perpendicular al cuadrado VXYZ; este plano cortará al cubo según un cuadrado perpendicular al cuadrado VXYZ, cuyo centro es el mismo punto K.

Imagínese la pirámide con vértice en A que tiene por base este cuadrado perpendicular. Prolónguese la superficie lateral de esta pirámide y córtesela con un plano que, pasando por C, sea paralelo a su base; la sección será un cuadrado perpendicular a AC, de lado EF doble de BD. Sobre este último cuadrado constrúyase un paralelepípedo que tenga el eje igual a AC; el rectángulo EFLG será su sección con el plano que, pasando por K, es perpendicular a su base.

Prolónguese luego CA y hágase AH = AC y considérese CH como una palanca con punto de apoyo en el punto medio A.

Trácese en el paralelogramo EF una recta MN paralela a BD que cortará al círculo ABCD en los puntos O y P, al diámetro AC en S, a la recta AE en Q y a la recta AF en R.

Levántese sobre la misma recta MN un plano perpendicular a AC.

Este plano cortará al paralelepípedo EFLG según un cuadrado de lado igual a MN, a la pirámide AEF según un cuadrado de lado igual a QR y al sólido común a los dos cilindros según un cuadrado cuyo lado es igual a OP.

Ahora bien (ver Proposición II, demostración):

$$\text{rect. (MS, SQ)} = \text{cuad. OS} + \text{cuad. SQ};$$

y puesto que es

$$HA : AS = MS : SQ,$$

se tendrá que

$$HA : AS = \text{cuad. MN} : (\text{cuad. OP} + \text{cuad. QR}).$$

Por tanto el cuadrado de lado MN, contenido en el paralelepípedo, permaneciendo en su lugar, equilibrará, respecto del punto A, a los dos cuadrados de la pirámide y el sólido, cuyos lados son iguales a OP y a QR, trasladados y colocados de manera que los centros de gravedad de ambos coincidan con H.

Lo análogo ocurre con todos los otros cuadrados que se obtengan con los planos perpendiculares a AC.

Por tanto, el paralelepípedo, dejado en su lugar, equilibrará, respecto del punto A, al sólido común, a los dos cilindros y a la pirámide AEF, trasladados ambos hasta hacer coincidir sus centros de gravedad con H.

Ahora bien, el centro de gravedad del paralelepípedo es K [Lema 9] luego:

$$HA : AK = \text{paralelepípedo} : (\text{sólido} + \text{pirámide}),$$

es decir

$$2 : 1 = \text{paralelepípedo} : (\text{sólido} + \tfrac{1}{3}\,\text{paralelepípedo}).$$

En consecuencia:

$$2\,\text{sólido} + \tfrac{2}{3}\,\text{paralelepípedo} = \text{paralelepípedo}$$

o sea

$$\text{sólido} = \tfrac{1}{6}\,\text{paralelepípedo} = \tfrac{2}{3}\,\text{cubo}.$$

Método acerca de los teoremas mecánicos, de Arquímedes,
con traducción de Cora Ratto de Sadosky,
terminó su producción en agosto de 2018 en la
Editorial de la Universidad de Guanajuato,
Alonso núm. 12, Centro, C. P. 36000, Guanajuato, Gto.
En su composición se utilizaron las fuentes
tipográficas Arno Pro y Minion Pro
y el cuidado de la edición estuvo a cargo
de Martín Eduardo Martínez Granados.

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

LA VERDAD OS HARA LIBRES

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

ISBN: 978-607-441-547-6

9 786074 415476