

LAS CURVAS DE BURMESTER Y LA SÍNTESES CINEMÁTICA EXACTA DE MECANISMOS PLANOS TIPO 4R

Rodríguez González, Selma Jannine (1), Cervantes Sánchez, Jesus J. (2)

1 [Licenciatura en Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías, Campus Irapuato- Salamanca, Universidad de Guanajuato] | [jannine_mafiboo@hotmail.com]

2 [Departamento de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías Campus Irapuato- Salamanca] | [jecer@ugto.mx]

Resumen

Este trabajo de investigación aborda una metodología para diseñar un mecanismo plano de cuatro barras por medio de las curvas de Burmester. Se muestra una derivación detallada de las ecuaciones de diseño para calcular las dimensiones geométricas de un mecanismo plano de cuatro barras que puede visitar exactamente cinco poses en un plano. La aplicabilidad y la validez del enfoque propuesto se muestran mediante un ejemplo numérico detallado.

Abstract

This research work addresses a methodology to design a planar four bar linkage by means of the Burmester curves. It is shown a detailed derivation of the design equations to compute the geometrical dimensions of a planar four bar linkage that can visit exactly five poses on a plane. The applicability and the validity of the proposed approach is shown by means of a detailed numerical example.

Palabras Clave

Curvas de Burmester; diseño; mecanismo plano; poses.

INTRODUCCIÓN

Muchas tareas industriales pueden ser visualizadas como una serie finita de poses sobre un plano. Cuando el número de poses referidas es igual o menor que cinco, se puede utilizar un mecanismo plano tipo 4R. En la referencia [1] se diseña un mecanismo plano tipo 4R utilizando matrices 4×4 que pueden ser singulares. Posteriormente, en la referencia [2] se utilizan unas nuevas matrices 4×4 que son numéricamente robustas. En este trabajo, se presenta un método para el diseño de mecanismos planos tipo 4R basado en la geometría de líneas.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El problema de síntesis consiste en calcular las longitudes de los eslabones de un mecanismo plano tipo 4R de modo que un cuerpo rígido pueda ser guiado a través de un conjunto de cinco poses finitamente separadas.

En la Figura 1 se muestran cinco poses arbitrarias con la finalidad de exponer la manera correcta de definir las. Idealmente, por dichas poses pasará el cuerpo rígido acoplado al mecanismo de cuatro barras que será diseñado.

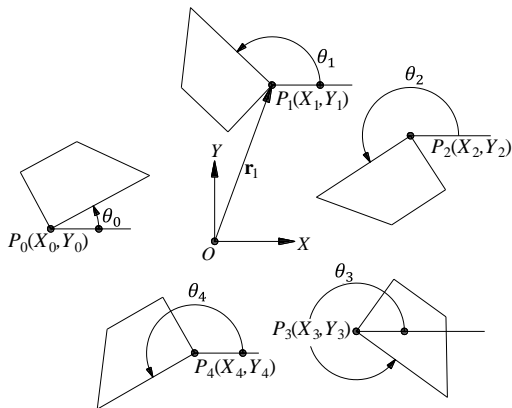


Figura 1. Cinco poses deseadas.

MECANISMO PLANO TIPO 4R

El mecanismo a ser sintetizado está compuesto de cuatro uniones tipo revoluta, las cuales son usadas para unir el eslabón acoplador 2 con los eslabones

conducido y conductor, 1 y 3, respectivamente, con el eslabón fijo 0, tal como se muestra en la Figura 2.

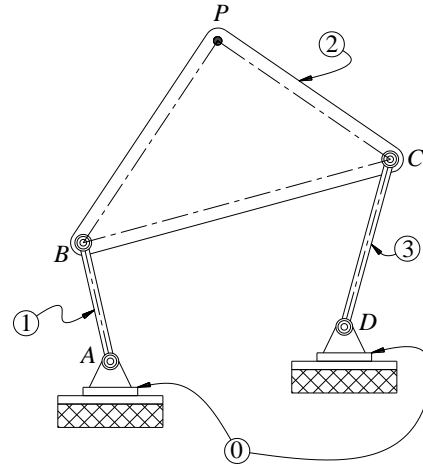


Figura 2. Mecanismo plano tipo 4R.

El cuerpo que será guiado estará rígidamente unido al acoplador 2 del mecanismo plano tipo 4R.

ECUACIÓN DE DISEÑO

Primeramente, en la Figura 3 se muestra un mecanismo tipo 4R en una configuración de referencia y también en una configuración arbitraria.

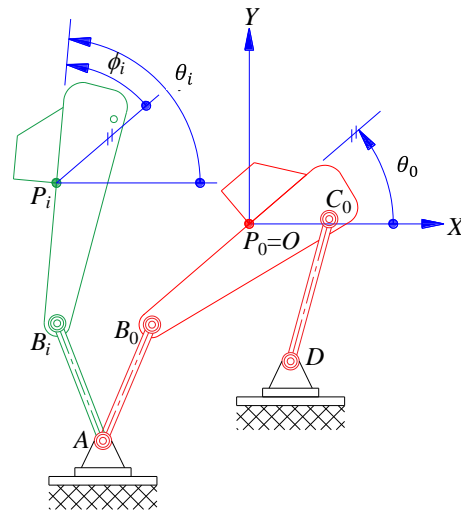


Figura 3. Configuración de referencia y arbitraria del mecanismo plano tipo 4R.

Como se ilustra gráficamente en la Figura 3, en cada configuración del mecanismo, el cuerpo guía adopta una cierta pose. Además, sin perder

generalidad, se adopta la primera pose (pose 0) como pose o configuración de referencia. Como resultado de ello, el origen O del sistema de referencia fijo XY coincidirá con el primer punto deseado, esto es, $P_0=O$. En consecuencia, $\mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$, $x_i \equiv X_i - X_0$, $y_i \equiv Y_i - Y_0$. Además, todas las orientaciones deseadas, θ_i , serán referidas a la primera orientación, θ_0 , resultando así que $\phi_i \equiv \theta_i - \theta_0$, ver Figura 3. El razonamiento anterior simplifica el desarrollo matemático.

Por otro lado, puede observarse en la Figura 4, que durante el movimiento del mecanismo, la distancia que existe entre los puntos B_0 y A , y B_i y A , debe preservarse, obteniéndose así que:

$$(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b}_i - \mathbf{a}) = (\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}) \quad (1)$$

donde: $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{p}_i + \mathbf{R}_{0 \rightarrow i} \mathbf{b}_0 \quad (2)$$

siendo, $\mathbf{R}_{0 \rightarrow i}$ una matriz de rotación definida como:

$$\mathbf{R}_{0 \rightarrow i} = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & -\text{sen}\phi_i \\ \text{sen}\phi_i & \cos\phi_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

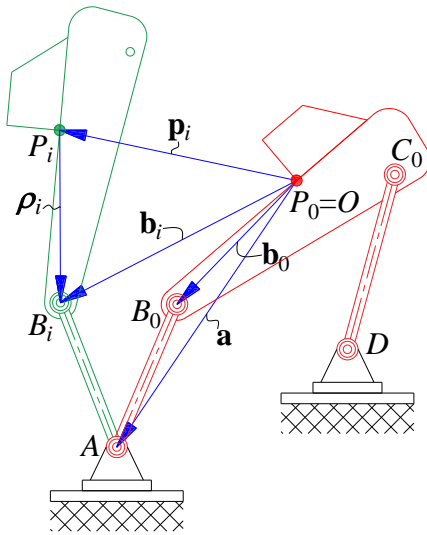


Figura 4. Geometría de una pose arbitraria con respecto a la pose de referencia.

Efectuando las operaciones indicadas en la ecuación (1) y simplificando, se obtiene:

$$k_{i1}x + k_{i2}y + k_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

donde:

$$k_{i1} \equiv 2\cos\phi_i u - 2\text{sen}\phi_i v - 2u + 2x_i.$$

$$k_{i2} \equiv 2\cos\phi_i v + 2\text{sen}\phi_i u - 2v + 2y_i.$$

$$k_{i3} \equiv -2x_i \cos\phi_i u - 2y_i \cos\phi_i v - 2y_i \text{sen}\phi_i u + 2x_i \text{sen}\phi_i v - x_i^2 - y_i^2.$$

La ecuación (4), constituye la ecuación de diseño, en su forma escalar más compacta.

CURVAS DE BURMESTER

Debe observarse que la ecuación (4) es válida para $i = 1, 2, 3, 4$. Primeramente, haciendo que $i = 1, 2, 3$, se obtiene que:

$$k_{11}x + k_{12}y + k_{13} = 0 \quad (5)$$

$$k_{21}x + k_{22}y + k_{23} = 0 \quad (6)$$

$$k_{31}x + k_{32}y + k_{33} = 0 \quad (7)$$

Las ecuaciones (5)-(7) constituyen un sistema lineal de tres ecuaciones con dos incógnitas, x, y . Para que dicho sistema tenga una solución diferente a la trivial, se requiere que la matriz de coeficientes:

$$\mathbf{B}_1 \equiv \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

asociada con dicho sistema cumpla la siguiente condición:

$$f_1(u, v) \equiv \det(\mathbf{B}_1) = \lambda_1 u^3 + \lambda_2 u^2 v + \lambda_3 u v^2 + \lambda_4 v^3 + \lambda_5 u^2 + \lambda_6 u v + \lambda_7 v^2 + \lambda_8 u + \lambda_9 v + \lambda_{10} = 0 \quad (9)$$

La ecuación (9) define la primera curva de Burmester [3] que satisface las poses 0, 1, 2 y 3, siendo ésta de tercer orden.

De manera similar, haciendo ahora $i = 1, 2, 4$, en la ecuación (4), se obtiene que:

$$k_{11}x + k_{12}y + k_{13} = 0 \quad (10)$$

$$k_{21}x + k_{22}y + k_{23} = 0 \quad (11)$$

$$k_{41}x + k_{42}y + k_{43} = 0 \quad (12)$$

siendo ahora la matriz de coeficientes:

$$\mathbf{B}_2 \equiv \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} \end{bmatrix} \quad (13)$$

y, para que el sistema (10)-(12) tenga una solución diferente a la trivial, se requiere que:

$$f_2(u, v) \equiv \det(\mathbf{B}_2) = \mu_1 u^3 + \mu_2 u^2 v + \mu_3 u v^2 + \mu_4 v^3 + \mu_5 u^2 + \mu_6 u v + \mu_7 v^2 + \mu_8 u + \mu_9 v + \mu_{10} = 0 \quad (14)$$

La ecuación (14) es la segunda curva de Burmester que satisface las poses 0, 1, 2 y 4.

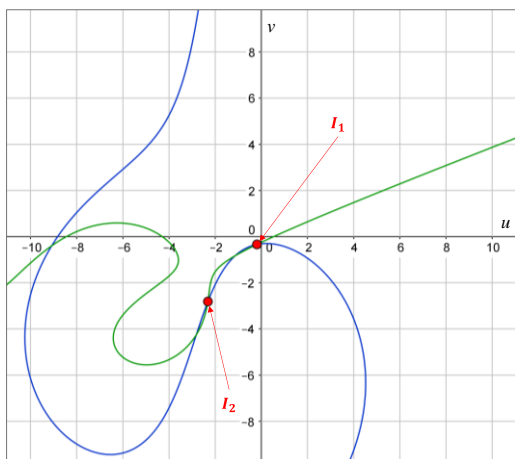
Resumiendo, f_1 y f_2 son dos curvas de Burmester asociadas con cinco poses. Cuando se intersectan ambas curvas en un punto común, se obtienen las dimensiones del mecanismo que satisface las cinco poses deseadas.

Para entender lo anterior, se considerará un ejemplo tomado de la referencia [1]. Primeramente la Tabla 1 muestra las poses originales.

Pose	0	1	2	3	4
X_i	10	6.2	3.6	2	5
Y_i	1.5	-6.3	-6.4	2	4
θ_i	-21°	-78°	148°	270°	60°

Tabla 1. Poses originales.

Haciendo los cálculos correspondientes y usando un software de algebra simbólica se obtienen f_1 y f_2 . Seguido de esto, se sustituyen los valores que aparecen en la Tabla 1 en las ecuaciones (9) y (14). Al graficar las ecuaciones obtenidas en términos de u y v , se obtiene la Gráfica 1.



Gráfica 1. Curvas de Burmester f_1 y f_2 .

Haciendo un análisis detallado, se aprecia que ambas curvas intersectan en los puntos I_1 e I_2 , por

ende, tienen las soluciones reales mostradas en la Tabla 2.

Sol.	Parámetro	Valor numérico	Parámetro	Valor numérico
I_1	u	-0.1917521611	x	-4.607155589
	v	-0.3410770151	y	-2.792090660
I_2	u	-2.315573341	x	-7.604954208
	v	-2.816055196	y	-2.050310194

Tabla 2. Soluciones del ejemplo.

De las soluciones reales obtenidas anteriormente, el primer conjunto de soluciones representará la ubicación de los puntos A y B , mientras que el segundo conjunto servirá para localizar a los puntos C y D .

Aclarado lo anterior, se procede a graficar las correspondientes coordenadas que aparecen en la Tabla 2 y se localizan los puntos A , B , C y D . Se unen de tal manera que se obtiene el diagrama esquemático del mecanismo plano de cuatro barras, pasando por cada una de las poses deseadas, tal como se muestra en las Figuras 5 - 9.

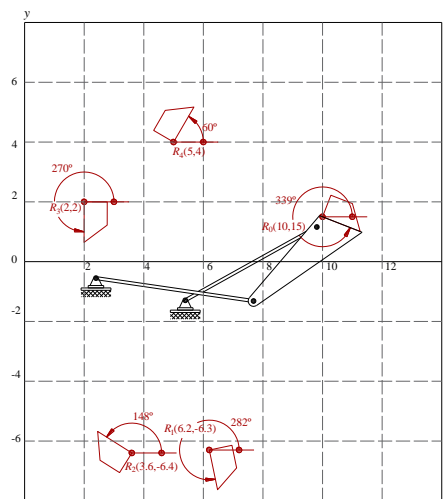


Figura 5. Mecanismo sintetizado, pose 0.

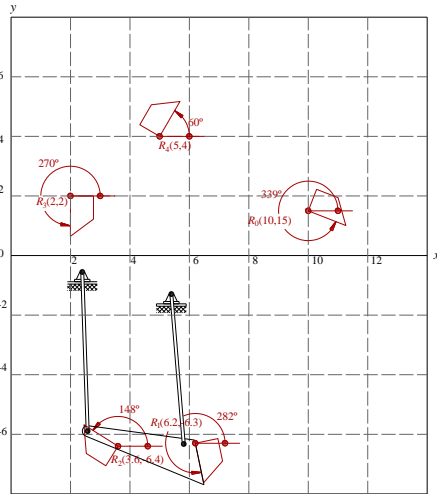


Figura 6. Mecanismo sintetizado, pose 1.

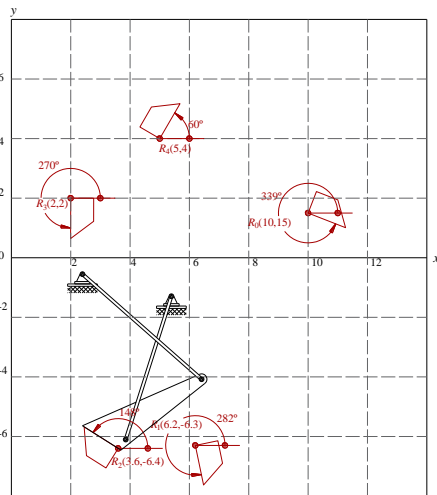


Figura 7. Mecanismo sintetizado, pose 2.

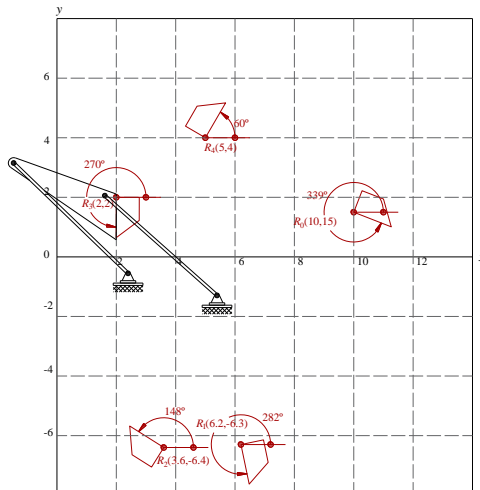


Figura 8. Mecanismo sintetizado, pose 3.

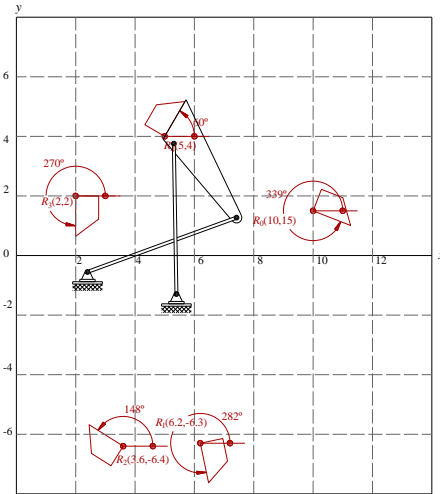


Figura 9. Mecanismo sintetizado, pose 4.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se ha propuesto una derivación detallada de las ecuaciones de diseño que finalmente sirven para calcular las dimensiones de un mecanismo plano de cuatro barras que pasa por cinco poses definidas.

CONCLUSIONES

El método que incluye la derivación de las ecuaciones de diseño es muy fácil de implementar con el uso de un software de álgebra simbólica, como el que se utilizó para este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

A la DICIS, por todas las facilidades brindadas para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] C. W. Chang, J. Angeles, M. A. González-Palacios, 1991, "A Semigraphical Method for the Solutions of the Burmester Problem", *Proc. 1991 ASME Design Automation Conference, Advances in Design Automation*, Sept. 22-25, Miami, FL, Vol. 2, pp. 321-326.
- [2] K. Al-Widyan, J. Angeles, J. Jesús Cervantes-Sánchez, 2002, "A Numerically Robust Algorithm to Solve the Five-Pose Burmester Problem", *Proc. 2002 ASME Design Engineering Technical Conferences, Advances in Design Automations*, September 29-October 2, Montreal, Quebec, CA, DETC2002/MECH-34270, pp. 1-10.
- [3] C. H. Chiang, 2000. *Kinematics and design of planar mechanisms*. Malabar, FL: Krieger Publishing Company.