JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

APLICACIONES DEL CÁLCULO DE ORDEN NO ENTERO A PROBLEMAS DE INGENIERÍA

Martínez Álvarez Alexander (1), Rosales García J. Juan (2)

1 [Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica, División de Ingenierías, DICIS, Universidad de Guanajuato] | Dirección de correo electrónico: [a.martinez.alvarez@ugto.mx]

2 [Departamento de Eléctrica, División de Ingenierías, DICIS, Universidad de Guanajuato] | Dirección de correo electrónico: [rosales@ugto.mx]

Resumen

El cálculo fraccionario (CF) es la generalización natural del cálculo ordinario (CO). A diferencia del CO, el CF tiene que ver con derivadas no enteras, es decir, de orden 1/2, 1/3. etc. así como integrales de orden no entero y por consiguiente, con ecuaciones diferenciales fraccionarias (EDF). En muchos casos, las EDF describen mejor los fenómenos físicos, sobre todo en sistemas complejos. En este proyecto se analizará, el bien conocido tiro parabólico en un medio resistivo usando la derivada conformable.

Abstract

The fractional calculation (FC) is the natural generalization of ordinary calculation (OC). Unlike OC, FC has to do with non-integer derivatives, that is, of order 1/2, 1/3. etc. as well as integrals of non-integer order and therefore, with fractional differential equations (FDE). In many cases, FDEs describe better the physical phenomena, especially in complex systems. In this project we will analyze the well known parabolic shot in a resistive medium using the conformable derivative.

Palabras Clave | Calculo Fraccional; Tiro parabólico; Derivada conformable

INTRODUCCIÓN

En la mayoría de los casos a lo largo de la educación académica se muestra un panorama acerca del cálculo diferencial e integral de orden entero en la cual el estudiante investiga todos estos casos posibles de este campo, así como también para ecuaciones diferenciales ordinarias de orden también entero. Hoy en día, de acuerdo a los campos de investigación se exigen mayores resultados ya sea de una índole más precisa y exacta en la exigencia de los resultados e interpretación de los fenómenos físicos, biológicos, químicos, etc., para ellos se debe introducir una herramienta matemática más precisa, como lo es el cálculo fraccionario.

Desde 1695 a 1974 muchos científicos han contribuido con la formación de esta poderosa herramienta matemática como lo son Lagrange, Laplace, de Morgan, Liouville, Riemann, Euler, entre otros [1]. Como ya se mencionó, para este objetivo en específico se basará en el método de la derivada conformable para la resolución del problema que se suscitará a continuación [2].

MATERIALES Y MÉTODOS

Lanzamiento de un proyectil formando un ángulo \theta respecto a la horizontal, tomando en cuenta la resistencia del aire proporcional a la velocidad. El estudio teórico se hace usando la derivada conformable. Así como aplicando la famosa función gamma, γ, también uno de los artículos extra de los que se estudió sobre el tema fue el del asesor del proyecto respectivo, ya que sus artículos son una fuente de información muy importante por el conocimiento amplio en el dominio del tema [5]

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para el movimiento del proyectil en un medio resistivo, con una fuerza resistiva proporcional a la velocidad se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dv_x}{dt} + kv_x = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} + kv_y = -g, \qquad (2)$$

donde k es una constante dimensional positiva inversa a los segundos, es decir {k}=s^{-1}. Las condiciones iniciales son:

$$x_0 = x(0) = 0\,m, \qquad \dot{x} = v_0 \cos\theta, \qquad (3)$$

$$y_0 = y(0) = 0\,m, \qquad \dot{y} = v_0 \sin\theta \qquad (4)$$

Donde el proyectil empieza desde el reposo y con una magnitud de velocidad inicial v_o y un ángulo θ con respecto al eje x, ahora de las soluciones de las ecuaciones (1) y (2) que satisfacen las condiciones iniciales (3) y (4) se tiene entonces lo siguiente [3]

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta \, e^{-kt}, \qquad (5)$$

$$v_y(t) = -\frac{g}{k} + \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right) e^{-kt}, \qquad (6)$$

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\theta}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \qquad (7)$$

$$y(t) = -\frac{g}{k} t + \frac{1}{k}\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right)\left(1 - e^{-kt}\right), \qquad (8)$$

Ahora para el caso específico que se analizara aquí, es decir el caso del movimiento en un medio resistivo:

$$\frac{d}{dt} \to k^{1-\gamma} t^{1-\gamma} \frac{d}{dt}, \qquad 0 < \gamma \leq 1. \qquad (9)$$

Sustituyendo el operador de la ecuación (9) en las ecuaciones (1) y (2), se tiene las siguientes ecuaciones diferenciales conformables

$$\frac{dv_x}{dt} + k^{\gamma} t^{1-\gamma} v_x = 0, \qquad (10)$$

$$\frac{dv_y}{dt} + k^{\gamma} t^{1-\gamma} v_y = -g k^{1-\gamma} t^{1-\gamma}, \qquad (11)$$

Estas ecuaciones son lineales con coeficientes variables de exponencial no entero. Las soluciones analíticas de acuerdo con las condiciones iniciales (3) y (4) son:

$$v_x(t;\, \gamma) = v_0 \cos\theta \, e^{\left(\frac{k^{\gamma}}{\gamma} t^{\gamma}\right)} \qquad (12)$$

$$v_y(t;\, \gamma) = -\frac{g}{k} + \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right) e^{\left(\frac{k^{\gamma}}{\gamma} t^{\gamma}\right)} \qquad (13)$$

Se puede observar que estas ecuaciones dependen de la función gamma γ, por tanto, dicha función gamma puede asignársele distintos valores para que la trayectoria parabólica muestre distintas trayectorias en función de la altura y el alcance, etc. Nuevamente, reemplazando la ecuación (9) en las ecuaciones anteriores, es decir, (12) y (13) e integrando, se obtiene la formula paramétrica siguiente:

$$x(t;\gamma) = \frac{v_0 \cos\theta}{k}\left(1 - e^{\left(-\frac{k^{\gamma}}{\gamma} t^{\gamma}\right)}\right), \qquad (14)$$

$$y(t;\gamma) = -\frac{g k^{\gamma-2}}{\gamma} t^{\gamma} + \frac{1}{k}\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{k}\right)\left(1 - e^{\left(-\frac{k^{\gamma}}{\gamma} t^{\gamma}\right)}\right), \qquad (15)$$

Además, si γ=1, las ecuaciones (14) y (15) se pueden convertir en las ecuaciones ordinarias. Para el caso en que el ángulo θ=90º se tiene:

$$x(t;\, \gamma) = 0, \qquad (16)$$

$$y(t;\gamma) = -\frac{gk^{\gamma-2}}{\gamma}t^{\gamma} + \frac{1}{k}\left(v_0 + \frac{g}{k}\right)\left(1 - e^{\left(-\frac{k^{\gamma}}{\gamma}t^{\gamma}\right)}\right), \quad (17).$$

Que es el caso de una trayectoria vertical [4].

CONCLUSIONES

La realización y desarrollo de este trabajo conlleva, una vez más, a una investigación a nivel licenciatura en el campo científico y tecnológico por lo cual, para este proyecto en específico se desarrollaron apenas una breve introducción sobre este amplio tema del que forma parte el cálculo fraccionario. Es importante señalar que este problema ha sido resuelto usando otro tipo de derivadas fraccionarias, sin embargo, la derivada conformable ha tenido muchas aplicaciones debido a la simplicidad.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Dr. Rosales García J. Juan, por el apoyo que otorgó en todo momento a lo largo de esta estancia de verano de investigación 2018. A la DICIS por proporcionar las herramientas necesarias para desarrollar el trabajo, así como al personal administrativo del Verano de Investigación 2018 por sus atentos servicios a la comunidad estudiantil con el fin de fomentar y cultivar el amor al conocimiento e investigación.

REFERENCIAS

[1] Arafet Padilla Pedro, Domínguez Abreu Hugo, Chang Mumañ Francisco (2008). Introducción al Cálculo Fraccionario.
[2] Ortega A., Rosales García J. Juan, Martínez L. & Cruz Duarte. (2018). Analysis of proyectile motion in view of conformable derivative. De Gruyter, 16:1-7.
[3] S. T. Thornton, J. B. Marion. (2004). Classical dynamics of Particles and systems. Ed. Thomson Brooks.
[4] Rosales García J. J., Guía M., Gómez F., Aguilar F. Martínez J. (2014). Two dimensional fractional projectile motion in a resisting medium. Cent. Eur. J. Phys. 12(7),517-520.