



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CAMPUS IRAPUATO - SALAMANCA
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

**“GENERACIÓN DE LUZ ESTRUCTURADA EMPLEANDO TEORÍA DE
DIFRACCIÓN ESCALAR Y UN MODULADOR ESPACIAL DE LUZ”**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA ELÉCTRICA PRESENTA:

**ING. JORGE ANDRÉS ORTEGA
CONTRERAS**

**CO-DIRECTORES:
DR. JOSÉ AMPARO ANDRADE LUCIO
DR. IGOR GURYEV**

SALAMANCA, GTO.

ABRIL de 2019.

Agradecimientos

*“El conocimiento no es una vasija que se llena,
sino un fuego que se enciende”*

- Plutarco

A mi madre, por acompañarme hasta este punto

A mi padre, aunque no estés a mi lado, jamás dejarás de estar conmigo.

Al Dr. Amparo Andrade, porque sin su apoyo y tutela esto no hubiera sido posible.

A el M.I. José Luis López Ramírez por ponerme de nuevo en el camino.

A el Dr. Edgar Alvarado por su apoyo académico y moral

A mis compañeros del posgrado, el tiempo que pasamos juntos
me acompañará por siempre.

A todos mis profesores, pero en especial para aquella cuyo ejemplo de vida
quedó grabado en mí, QFB. Consuelo Galván, al fin abrí las alas.

Para mis amigos, David, Israel, Francisco, Oscar y Víctor, por ayudarme a encontrar la paz,
este logro también es suyo.

Contenido

1	Introducción	1
1.1	Antecedentes	3
1.2	Objetivos	4
1.2.1	Objetivo General	4
1.2.2	Objetivos Particulares	4
1.3	Justificación	5
1.4	Estructura de la tesis	6
2	Marco Teórico	7
2.1	Fundamentos de la teoría de difracción escalar	7
2.1.1	Introducción Histórica	7
2.1.2	Teorema integral de Helmholtz-Kirchoff. Formulación de Rayleigh-Sommerfeld	9
2.1.3	Propagación de campos ópticos	12
2.1.4	Respuesta al impulso en espacio libre	14
2.1.5	Aproximación paraxial y Difracción escalar	15
2.1.6	Aproximación de Fresnel y Franhoffer	15
2.2	Problema de recuperación de fase	19
2.2.1	Algoritmo de Gerchberg-Saxton	20
2.2.2	Algoritmo de Fienup	22
2.3	Moduladores espaciales de luz	23
2.3.1	Cristales líquidos	23
2.3.2	Propagación de la luz en Twisted Nematic LCs	26
3	Metodología	29
3.1	Modelo matemático del TN-SLM	29
3.1.1	Muestreo del SLM	30
3.2	Respuesta al impulso	31
3.3	Determinación de la matriz de Jones	33
3.4	Modelo general para problemas de recuperación de fase	36

4	Resultados	38
4.1	GUI para manejo del LC2002 en Python	38
4.2	Estimación del error	41
4.3	Estimación de la matriz de Jones para el SLM	53
5	Conclusiones	61
6	Anexos	63
6.1	Comparativas de Error, Algoritmo Gerchberg-Saxton	63
6.2	Comparativas de Error, Algoritmo Compresión de Fase	66
6.3	Comparativas de Error, Algoritmo de FienUp	70

Lista de figuras

1.1	Cambio de distribución de intensidad	2
1.2	Comparativa de lente Fresnel y plan-convexa	2
2.1	Geometría para la fórmula de Raleigh-Sommerfeld	11
2.2	Dirección de propagación de un plano	13
2.3	Propagación de una onda esférica	15
2.4	Error en la expansión en series de Taylor para el coseno	15
2.5	Geometría de la difracción de Fresnel	16
2.6	Aproximaciones para difracción respecto a la distancia de propagación	18
2.7	Diagrama de flujo que muestra las etapas del algoritmo de GS	20
2.8	Resultados tras iterar el método de Gerchberg-Saxton para recuperación de fase	21
2.9	Operaciones sobre el dominio de Fourier	22
2.10	Moduladores espaciales de luz marca HOLOEYE	23
2.11	Orientaciones típicas en una capa nemática	24
2.12	Director de una molécula	25
2.13	Ángulo de rotación general para una celda TN	26
2.14	Propagación de la luz desde el vector de Jones J_1 en la entrada del vector O_s hasta la salida de las matrices de transmisión T_v y de rotación R_v	27
3.1	Celda unitaria en un LCD	29
3.2	Sistema de Imagen	30
3.3	Mediciones de transmisión para determinar la matriz de Jones	34
3.4	Generalización de los métodos de recuperación de fase	36
4.1	Ventana de objetivo en el plano de observación	38
4.2	Ventana para visualizar la máscara de fase estimada	39
4.3	Ventana con la simulación de la imagen obtenida en el plano de observación	39

4.4	Visualización del DOE	40
4.5	Patrones de prueba	41
4.6	PSNR para el método de GS	43
4.7	PSNR para el método de PC	43
4.8	PSNR para el método de FienUp	44
4.9	Error de las métricas agrupadas por método y patrón	45
4.10	Mejor solución agrupada por método y patrón	45
4.11	PSNR de las mejores iteraciones	46
4.12	PSNR de las mejores soluciones	47
4.13	Reconstrucción teórica de los patrones de prueba	48
4.14	Reconstrucción teórica de los patrones de prueba	49
4.15	Comparativa frecuencia de mejores resultados	50
4.16	Máscara de fase obtenida por patrón	51
4.17	Máscara de fase obtenida por patrón	52
4.18	Transmitancia del sistema con el SLM apagado	54
4.19	Valores de $f(\gamma)$ -f	56
4.20	Soluciones para $\alpha(\theta_1)$	57
4.21	Soluciones para $f(\gamma)$	58
4.22	SLM -	59
4.23	SLM +	60
6.1	Error para el patrón COORD	63
6.2	Error para el patrón GRID	64
6.3	Error para el patrón RINGS	64
6.4	Error para el patrón SQUARES	65
6.5	Error para el patrón LEENA	65
6.6	Error para el patrón LEENA256	66
6.7	Error para el patrón COORD	67
6.8	Error para el patrón GRID	67
6.9	Error para el patrón RINGS	68
6.10	Error para el patrón SQUARES	68
6.11	Error para el patrón LEENA	69
6.12	Error para el patrón LEENA256	69
6.13	Error para el patrón COORD	70
6.14	Error para el patrón GRID	71
6.15	Error para el patrón RINGS	71
6.16	Error para el patrón SQUARES	72
6.17	Error para el patrón LEENA	72

6.18 Error para el patrón LEENA256 73

Lista de tablas

2.1	Modos de propagación	12
4.1	Resultados de la regresión de Levenberg-Marquardt	54
4.2	Parámetros de Jones estimados	55
4.3	Parámetros físicos del SLM	58

Capítulo 1

Introducción

El término difracción proviene del latín “diffringere” que significa “partir en pedazos” y se refiere a la fragmentación del frente de onda por la interacción de la luz con la materia, en esta, la luz se “curva” en presencia de un cuerpo opaco, además describe la propagación de ondas con extensión infinita. Este fenómeno ocurre en una gran parte del espectro electromagnético, incluyendo el ultravioleta, visible, infrarrojo y ondas de radio. Se manifiesta por picos de intensidad en el campo propagado debido a la superposición coherente de las fracciones difractadas y no difractadas de campo radiado. La difracción fue estudiada por varios físicos prominentes tales como Isaac Newton, Augustin-Jean Fresnel, Christiaan Huygens, Thomas Young, y Joseph von Fraunhofer.

La óptica difractiva tiene particular importancia en situaciones en las que es necesario cambiar la distribución de irradiancia de un haz fuente (Figura 1.1), esto se puede lograr a través del diseño de un elemento óptico difractivo (DOE), al resultado de esta transformación espacial, en este caso debido a la difracción se le denomina luz estructurada. Algunas de las aplicaciones suceden en campos tales como la computación óptica, maquinado láser, pantallas, escaneo de códigos de barras, sistemas de iluminación, codificadores de posición, sistemas de almacenamiento de datos, fotolitografía, comunicaciones ópticas y sensores biológicos entre otros. Los elementos ópticos comunes se generan a través de técnicas de desgaste y pulido, obteniendo una calidad superior. Sin embargo, existe un límite para el tipo de óptica que puede ser producida.

La primera aplicación fue dentro de la holografía (1930), posteriormente (1960) sucedió con las rejillas con relieve de superficie de fase coherente. Este tipo de elemento evolucionó lentamente debido a las limitaciones de su fabricación. Actualmente, gracias a los avances en técnicas de micro maquinado, esta tecnología ha dominado el campo de la óptica difractiva.

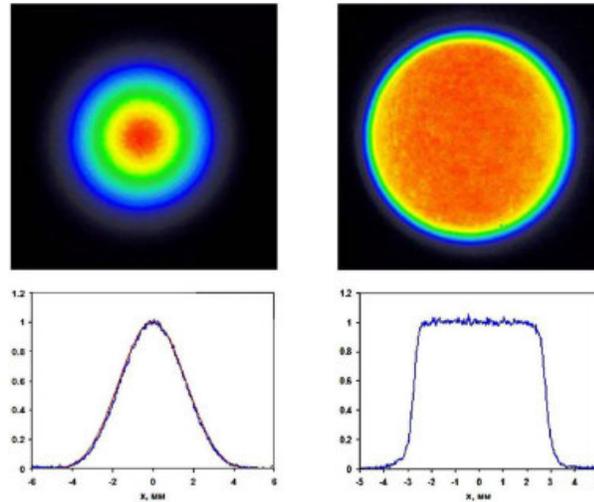


Figura 1.1: Modificación de los perfiles de intensidad de gaussiano a flat-top

Un claro ejemplo de DOE son las lentes, en la figura 1.2 se muestran los perfiles de dos lentes de potencias similares producidas por técnicas diferentes. A medida que se ha hecho posible fabricar características cada vez más pequeñas con litografía mejorada, holografía y micro-maquinado la necesidad por modelos más confiables basados en una rigurosa teoría electromagnética derivada de las ecuaciones de Maxwell se ha convertido en una necesidad emergente, debido a la complejidad computacional de éstas se han propuesto diversas aproximaciones numéricas [1, 2].

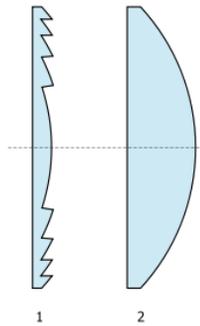


Figura 1.2: A la izquierda la lente de Fresnel, a la derecha una lente plano-convexa

1.1 Antecedentes

El estudio de técnicas de recuperación de fase tuvo un fuerte apogeo tras la publicación de el artículo “A Practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures” [3], en el que se propone un método iterativo que permite recuperar la fase empleando las distribuciones de intensidad en los planos de imagen y difracción.

En “Phase retrieval from modulus data” [4] se ejemplifica la posibilidad de aplicar restricciones adicionales a la reconstrucción de la fase además de una discusión acerca de la unicidad de las soluciones.

En 1978 Fienup en su artículo “Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform” [5] presenta una nueva metodología para problemas de reconstrucción de fase.

En “Phase Retrieval And Diversity In Adaptive Optics” [6], presenta una técnica y simulaciones computacionales acerca de la estimación de fase para el alineamiento de sistemas ópticos.

En el artículo “Phase retrieval algorithms: a comparison” [7], se hace una comparación de las técnicas de recuperación de fase como problemas de búsqueda por comparación de gradiente.

El estudio “Effects of spatial light modulator opaque dead zones on optical correlation” [8] se presentan cálculos y simulaciones que revelan la modulación de amplitud y fase producidos por el área inactiva entre pixeles.

Un análisis de el comportamiento de la luz al interactuar con una molécula TN representado en la esfera de Poincaré se discute en “Light Behavior Analysis of Twisted Nematic Liquid Cristal Display” [9]

La relación entre la modulación de amplitud y fase con respecto a la polarización de el haz de entrada empleando una interpretación geométrica es presentada en “Phase and amplitude modulation of elliptic polarization states by nonabsorbing anisotropic elements: application to liquid-crystal devices” [10].

Una metodología que aumenta la modulación de fase en un TNLCD a través de la correcta selección del estado de polarización es discutida en “Extended phase modulation depth in twisted nematic liquid crystal displays” [11].

El método iterativo más popular para la reconstrucción de fase es, sin duda, el algoritmo GS, en el artículo “Investigation on specific solutions of Gerchberg-Saxton algorithm” [12], se proponen algunas configuraciones de

haces incidentes y de salida donde se obtienen soluciones exactas.

Para celebrar el nacimiento de W. Owen Saxton’s el artículo “Legacies of the Gerchberg–Saxton algorithm” [13] presenta el impacto que ha tenido el algoritmo de Gerchberg-Saxton algorithm durante los últimos 40 años.

El algoritmo de GS tiende a estancarse tras algunas iteraciones y han habido varios esfuerzos por corregir este efecto, en “A hybrid Gerchberg–Saxton-like algorithm for DOE and CGH calculation” [14], se propone una estrategia de búsqueda por gradiente descendiente y pesado.

Los moduladores espaciales de luz han sido empleados dentro de múltiples aplicaciones de óptica adaptativa, en “LCoS SLM Study and Its Application in Wavelength Selective Switch” [15], se hace alusión a diversos tipos, ventajas y desventajas de los moduladores espaciales de luz (SLM) así como su aplicación dentro de los conmutadores de longitud de onda selectiva (WSS).

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Diseñar una interfaz en Python que permita calcular la máscara de fase que es capaz de transformar un haz de luz gaussiano a una distribución de irradiancia arbitraria sobre un plano de observación, empleando técnicas de reconstrucción de fase, dicha interfaz deberá poder operar un SLM en modo de modulación de fase como elemento modulador de un sistema optoelectrónico.

1.2.2 Objetivos Particulares

- Encontrar un modelo que permita agrupar diferentes técnicas de recuperación de fase.
- Encontrar la técnica de difracción escalar que resulte más eficiente al reconstruir un haz.
- Evaluar el error a través de diferentes funciones de mérito y verificar su influencia en la calidad de la reconstrucción.
- Minimizar efecto del área muerta entre pixeles sobre la reconstrucción mediante el modelado de los parámetros ópticos del SLM.

1.3 Justificación

Poder realizar transformaciones espaciales a un haz gaussiano tiene aplicación dentro de diversas áreas, tal como se menciona durante la introducción, más allá de ello el poder tener un software que controle a un dispositivo optoelectrónico y un sistema óptico que permita realizar estas transformaciones, dota a el laboratorio de una potente herramienta para el desarrollo de investigación y docencia.

Esta tesis propone realizar un estudio comparativo de diferentes metodologías para el cálculo de las transformaciones a través de algoritmos de recuperación de fase e implementarlas en software, a su vez éste podrá enviar la información de la fase reconstruida a un dispositivo optoelectrónico que sea capaz de modular la fase de un haz incidente. Adicionalmente se encontrará la caracterización del sistema óptico que realice la transformación de irradiancia.

Se ha elegido utilizar modulación en fase y no en amplitud por la eficiencia, la primera siempre ofrece un mejor transporte de intensidad [16]. Una parte fundamental de este proyecto es la determinación de las máscaras de fase, estas pueden trabajo a través de métodos de desenvolvimiento de fase tales como Gerchberg-Saxton ó Yang-Gu, en el artículo “Gerchberg–Saxton and Yang–Gu algorithms for phase retrieval in a nonunitary transform system: a comparison” [17] se presenta una discusión acerca de ellos. Ambos son algoritmos iterativos que bajo un criterio de tolerancia devuelven la máscara de fase para cambiar el perfil de irradiancia.

Estos métodos están basados en transformaciones hacia y desde el espacio de Fourier. Considerando una difracción en campo lejano este esquema ofrece buenos resultados, salvo el ruido de fondo creado tras la discretización de la FFT, estos pueden mejorarse considerando una difracción de Fresnel, en la que la integral de difracción de Franhouffer sería sustituida por la transformada inversa de Fourier de la convolución entre las transformadas de Fourier de la función de apertura y la fase cuadrática.

Para obtener un mejor resultado se precisa de un cómputo más complejo y con mayor costo computacional, como es el caso de los algoritmos de elemento finito [18], en este trabajo se discutirán las perspectivas de diseño desde un punto de vista geométrico apoyado con teoría de difracción escalar.

1.4 Estructura de la tesis

En el capítulo 2, Marco Teórico, se concentran los fundamentos empleados en el desarrollo de esta tesis, partiendo desde los principios de la difracción en campo lejano y terminando con las propiedades ópticas de los moduladores espaciales de luz (SLM).

A lo largo del capítulo 3, Metodología, el lector encontrará el modelo matemático de un modulador espacial de luz(SLM) que puede ser empleado para explicar el comportamiento de una difracción tras pasar por el modulador, nuevamente basándose en principios de difracción escalar. Se revela un modelo unificado de recuperación de fase y se explica el experimento necesario para estimar las propiedades ópticas del dispositivo LC2002.

Durante el Capítulo 4, Resultados, se describen las pruebas correspondientes a las tres técnicas de recuperación de fase empleadas. Así como el efecto que tiene emplear diferentes funciones para evaluar el error sobre el número de iteraciones y calidad de difracción. La experimentación sobre la intensidad de transmisión en el modulador espacial de luz permiten calcular sus parámetros ópticos, se presenta el modelo teórico del cual se parte y el cálculo numérico de la matriz de Jones.

Finalmente en el Capítulo 5, Conclusiones, se detallan las metas alcanzadas durante este trabajo y la información encontrada durante la etapa experimental.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Fundamentos de la teoría de difracción escalar

El fenómeno conocido como difracción juega un papel importante en las ramas de la física e ingeniería que traten con la propagación de ondas. En este capítulo se discuten los conceptos relacionados a su aplicación dentro de la óptica.

2.1.1 Introducción Histórica

La teoría de difracción fue desarrollada por Augustin Jean Fresnel (1788-1827). Fresnel basaba sus teorías en el principio de Huygens, que afirma que cada punto de un frente de onda propagándose puede ser tratado como una fuente de ondas esféricas secundarias. Fresnel usó el principio de Huygens para calcular el patrón de interferencia en campo lejano debido a las fuentes secundarias ocasionadas por la interacción de un frente de onda que incide sobre una apertura. La teoría de Fresnel es cinemática, en el sentido de que sus resultados no están derivados de la solución de alguna ecuación matemática, sino de fundamentaciones geométricas.

En 1859, Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) dio una sustentación matemática al trabajo de Fresnel, mismo que derivó en el principio de Huygens para ondas monocromáticas en forma de una ecuación integral. Una representación más general del principio de Huygens válida para ondas con independencia temporal, fué derivada en 1882 por Gustav Kirchoff (1824-1887). Con aproximaciones y asunciones significativas, la aplicación de la integral de Kirchoff a problemas de difracción arrojaban los mismos resultados que la de Fresnel.

Kirchoff mostró que el éxito de la teoría de Fresnel era en parte debido a el hecho de que la longitud de onda de la luz es significativamente menor que las dimensiones de los cuerpos difractantes, para mayores longitudes de onda las aproximaciones de Fresnel y Kirchoff no pueden ser consideradas como precisas.

La teoría de difracción adquiere una importancia práctica debido a sus aplicaciones dentro de el diseño y uso de instrumentos ópticos. La teoría escalar de la difracción permite tratar el comportamiento de la propagación de la luz de una forma simplificada, ya que no tiene en cuenta el carácter vectorial de las ondas electromagnéticas.

Esta simplificación da resultados precisos si se cumplen dos condiciones básicas:

a) la abertura de difracción debe ser grande comparada con la longitud de onda y b) la distancia de observación del campo difractado debe ser suficientemente grande en comparación con las dimensiones de la abertura, en estas condiciones la polarización del campo electromagnético no varía, lo que permite prescindir del formalismo vectorial. Teniendo esto en cuenta vemos que la teoría escalar de la difracción es adecuada para plantear la reconstrucción de objetos mediante la propagación de la luz, objeto de estudio en el presente trabajo. Consideremos una onda escalar perfectamente monocromática $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{-i\omega t}$. En el vacío cumple la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Y la parte espacial cumple, por tanto, la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 U(\vec{r}) = -k^2 U(\vec{r}) \quad (2.2)$$

El cálculo de $U(r)$ en cualquier punto del espacio se puede realizar utilizando el teorema de Green: sean $U(P)$ y $G(P)$ dos funciones de valores complejos cualesquiera, continuas y con la primera y segunda derivadas continuas dentro de un recinto cerrado V , entonces se cumple:

$$\int_V [G\Delta U - U\Delta G] dv = \int_S \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds \quad (2.3)$$

Donde $\Delta = \nabla^2$, la elección de una función G y de una superficie S adecuadas permiten la aplicación directa de este teorema para resolver el problema de la difracción.

2.1.2 Teorema integral de Helmholtz-Kirchoff. Formulación de Rayleigh-Sommerfeld

Consideremos un punto $P \in V$ donde realizaremos la observación del campo y centraremos el origen de coordenadas. Definimos una posible función de Green como:

$$G = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.4)$$

Para evitar la discontinuidad en $r = 0$ definimos una superficie esférica S_ϵ alrededor del punto con radio ϵ infinitesimal. Por tanto la nueva superficie de integración será $S = S' + S_\epsilon$ y el nuevo volumen $V' = V - V_\epsilon$.

La función G es una onda esférica de amplitud unitaria y por tanto cumple la ecuación de Helmholtz. Así al aplicar el teorema de Green en el nuevo recinto de integración V' obtenemos:

$$\int_{V'} [G\Delta U - U\Delta G] dv = \int_{V'} [k^2 GU - k^2 UG] dv = 0 \quad (2.5)$$

Por lo tanto,

$$\int_S \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = 0 \quad (2.6)$$

y teniendo en cuenta que $S = S' + S_\epsilon$:

$$\int_S \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = - \int_{S_\epsilon} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds \quad (2.7)$$

Para evaluar la integral sobre la superficie S_ϵ se calcula el límite cuando el radio ϵ tiende a 0:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds \quad (2.8)$$

Si tenemos en cuenta que la superficie S_ϵ es esférica podemos evaluar la derivada respecto la normal de G , con lo que,

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left[\frac{1}{\epsilon} - ik \right] \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \quad (2.9)$$

Substituyendo dentro de la integral y teniendo en cuenta que $ds = \epsilon^2 d\Omega$, donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[\frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} - U \left[\frac{1}{\epsilon} - ik \right] \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \right] \epsilon^2 d\Omega \quad (2.10)$$

De los tres sumandos dentro de la integral solo uno no es igual a cero, ya que las funciones y sus derivadas están acotadas. Si se considera además la continuidad de U ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \int_{S_\epsilon} U \frac{1}{\epsilon} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \epsilon^2 d\Omega = -U(P) \int_{S_\epsilon} d\Omega = -4\pi U(P) \quad (2.11)$$

Finalmente, si aplicamos este resultado a la ecuación del límite obtenemos lo que se conoce como el teorema integral de Helmholtz-Kirchoff:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds \quad (2.12)$$

Si se aplica este teorema al problema de la difracción de una onda escalar a través de una abertura contenida en una superficie plana, al utilizar la función de Green de la ecuación anterior se obtiene la fórmula de Fresnel-Kirchoff, que da resultados experimentales suficientemente precisos pero tiene ciertas inconsistencias formales en el desarrollo matemático, derivadas de la imposición de ciertas condiciones de contorno. Estas dificultades se solventan utilizando el formalismo de Rayleigh-Sommerfeld que utiliza una nueva función de Green, con la que no es necesario imponer condiciones de contorno ni requiere la utilización de una iluminación con ondas esféricas. La nueva función de Green tiene la siguiente forma:

$$G(P) = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikR}}{R} \quad (2.13)$$

La geometría del problema se describe en la figura 2.1, P es el punto donde se realiza la observación, P' es un punto simétrico a P respecto al plano Σ . R y r son las distancias de los puntos P y P' a un punto cualquiera de la abertura Σ . Para los puntos pertenecientes al plano se cumple que $G(P_\Sigma) = 0$ y además $\cos(\vec{n}; \vec{r}) = -\cos(\vec{n}; \vec{R})$

2.1. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE DIFRACCIÓN ESCALAR 11

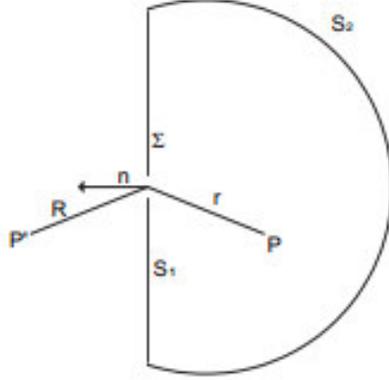


Figura 2.1: Geometría para la fórmula de Raleigh-Sommerfeld

Si aplicamos el teorema de Helmholtz-Kirchoff con la nueva función de Green obtendremos la fórmula de difracción, para ello antes hay que considerar la derivada de G respecto la normal en los puntos de la superficie Σ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= \cos(\vec{n}, \vec{r}) \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} - \cos(\vec{n}, \vec{R}) \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \\ &\approx 2\cos(\vec{n}, \vec{r}) ik \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Esta expresión se puede sustituir en la integral de Helmholtz-Kirchoff considerando además que $G(P_\Sigma) = 0$,

$$\begin{aligned} U(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left[G(P_\Sigma) \frac{\partial U}{\partial n}(P_\Sigma) - U(P_\Sigma) \frac{\partial G}{\partial n}(P_\Sigma) \right] ds \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} U(P_\Sigma) \frac{\partial G}{\partial n}(P_\Sigma) ds \\ &= \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(P_\Sigma) \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\vec{n}, \vec{r}) ds \end{aligned} \quad (2.15)$$

Este resultado se conoce como la fórmula de la difracción de Rayleigh-Sommerfeld. En el caso de iluminación con ondas esféricas este resultado es

igual al de la fórmula de Fresnel-Kirchoff. Cuando los ángulos son pequeños, es decir, las distancias axiales son mucho mayores que las distancias laterales, el factor de oblicuidad se puede aproximar a la unidad, $\cos(\vec{n}, \vec{r}) \approx 1$, y la formula queda como:

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(P_{\Sigma}) \frac{e^{ikr}}{r} ds \quad (2.16)$$

2.1.3 Propagación de campos ópticos

Una importante aplicación de los sistemas lineales en óptica es el tratar la propagación de campos ópticos a través de un sistema de funciones base que satisfagan la ecuación de onda (Ec. 2.17).

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

Donde ∇^2 es el Laplaciano, y c es una constante. Las soluciones a esta ecuación que satisfacen condiciones de frontera particular son llamadas *modos*. Algunos ejemplos importantes están listados en la tabla 2.1.

Modo	Aplicación
Wavelet de Huygens	Difracción como superposición de frentes de onda esféricos
Hermite-Gauss	Modos de una cavidad óptica y diseño óptico coherente
Laguerre-Gauss	Análisis de sistemas con simetría azimutal
Ondas planas TE/TM	Modos de una guía de onda

Table 2.1: Modos de propagación

El campo óptico escalar es denotado como $u(x, y, z)$. La notación \mathbf{E} es usada para indicar de forma explícita. La dirección de propagación de una onda plana es:

$$\hat{k} = \gamma_x \hat{x} + \gamma_y \hat{y} + \gamma_z \hat{z} \quad (2.18)$$

Donde γ_x, γ_y y γ_z son los cosenos directores dados por el ángulo entre \hat{k} y los ejes coordinados y satisfacen:

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = 1 \quad (2.19)$$

2.1. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE DIFRACCIÓN ESCALAR 13

Un plano con número de onda $k = 2\pi/\lambda$ propagándose en la dirección \mathbf{k} puede ser expresada como:

$$u(x, y, z) = u_0 e^{ik(\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z)} \quad (2.20)$$

Considere el campo en el plano $z = 0$ escrito en términos de su transformada de Fourier

$$u(x, y, z = 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \nu, z = 0) e^{2\pi i(\xi x + \nu y)} d\xi d\nu \quad (2.21)$$

Los cosenos directores pueden ser expresados en términos de sus frecuencias espaciales como

$$\gamma_x = \lambda\xi \quad \gamma_y = \lambda\nu \quad \gamma_z = \sqrt{1 - \lambda^2(\xi^2 + \nu^2)} \quad (2.22)$$

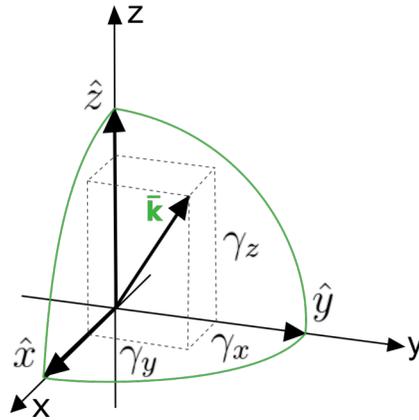


Figura 2.2: Dirección de propagación de un plano

La transformada de Fourier es solo una superposición de ondas planas propagándose en diferentes direcciones, que resultan en el término espectro de onda plana o espectro angular. Para frecuencias espaciales donde

$$\lambda^2(\xi^2 + \nu^2) \leq 1$$

la dirección del coseno γ_z es puramente real, y la onda plana es propagada. Para frecuencias espaciales

$$\lambda^2(\xi^2 + \nu^2) > 1$$

la dirección del coseno γ_z es imaginaria y la onda plana es evanescente. Las ondas de este tipo decaen exponencialmente y solo pueden ser observadas en el campo cercano.

2.1.4 Respuesta al impulso en espacio libre

Una vez que se ha determinado el espectro angular de el campo,este se puede propagar desde $z = z_0$ a $z = z_1$ usando la función de transferencia en espacio libre.

$$U(\xi, \nu, z = z_1) = U(\xi, \nu, z = z_0)H_{01}(\xi, \nu) \quad (2.23)$$

Donde H_{01} está definido como

$$H_{01}(\xi, \nu) = e^{ik\gamma_z(z_1-z_0)} \quad (2.24)$$

Comenzando con la integral de Weyl's se puede probar que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^{ikR}}{2\pi R} \right] = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{ik\gamma_z z} e^{i2\pi(\xi x + \nu y)} d^2 \rho = \mathcal{F}_{xy}^{-1} \left\{ e^{ik\gamma_z z} \right\} \quad (2.25)$$

La función de transferencia y la respuesta al impulso son pares de Fourier, incluso si ellas estan derivadas desde dos argumentos físicos

$$h_{01}(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ H_{01}(\xi, \nu) \right\} \quad (2.26)$$

Esto sienta las bases para el concepto general de difracción como una convolución de el campo con la respuesta al impulso.

2.1.5 Aproximación paraxial y Difracción escalar

La primera aproximación dentro el concepto de difracción escalar es usualmente la paraxial. Esta reduce el cálculo asumiendo ángulos pequeños e incluso usando únicamente el primer orden de sus respectivas expansiones en series de Taylor. Más específicamente, es usado para ignorar γ_x y γ_y en cálculos de amplitudes fijando $\gamma_z = 1$, lo que conduce a $R \approx z_{01}$

$$u(\mathbf{r}_1) \approx \frac{1}{i\lambda z_{01}} \iint_{-\infty}^{\infty} u(\mathbf{r}_0) e^{ikR} d^2r_0 \quad (2.27)$$

En la figura se muestra como la aproximación paraxial es válida, conforme las distancias de propagación aumentan el radio de una onda esférica se incrementa y su contribución se asemeja a una onda plana.

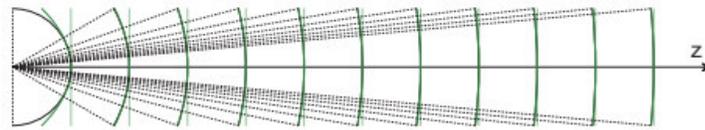


Figura 2.3: Propagación de una onda esférica

La adición de un segundo término de la serie de Taylor provee un mejor rango de precisión.

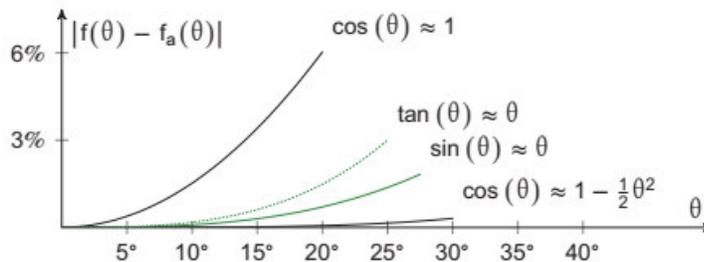


Figura 2.4: Error en la expansión en series de Taylor para el coseno

2.1.6 Aproximación de Fresnel y Franhouffer

El siguiente paso para aproximar el cálculo de la difracción se realiza considerando el caso de coordenadas rectangulares, fijando unos ejes de coordenadas en (x_0, y_0) en la pantalla que contiene la abertura y considerando el

eje z como el eje normal al del plano que contiene la abertura, con origen en dicho plano, como se muestra en la figura 2.5

El punto P de observación tendrá coordenadas (x, y, z) . Si se consideran

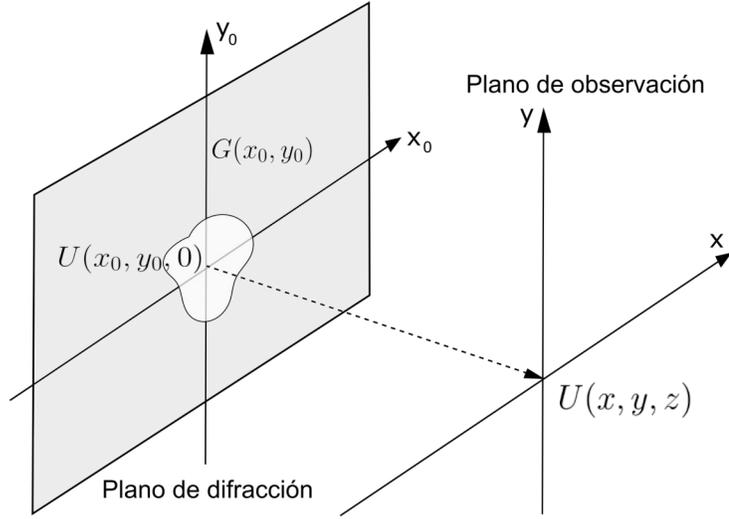


Figura 2.5: Geometría de la difracción de Fresnel

distancias de observación mayores que las distancias transversales asociadas el término del factor de oblicuidad se puede aproximar como $\cos(\vec{n}, \vec{r}) \approx 1$, así la formula de Rayleigh-Sommerfeld (2.15) en coordenadas cartesianas queda como:

$$U(P) \approx \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(x_0, y_0, 0) \frac{\exp(ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2})}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} dx_0 dy_0 \quad (2.28)$$

La distancia entre un punto de la abertura $(x_0, y_0, 0)$ y el punto de observación $P(x, y, z)$ es

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x-x_0)^2}{z^2} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2}} \quad (2.29)$$

La aproximación de Fresnel se realiza entonces si se verifica que $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \ll z^2$, entonces se puede aproximar r por z . En el caso de la exponencial este cambio no se puede realizar directamente ya que el periodo de las oscilaciones es muy rápido (debido al factor $2\pi/\lambda$) y la sustitución

2.1. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE DIFRACCIÓN ESCALAR 17

directa puede producir errores importantes en la estimación del ángulo. Lo que se hace es aproximar la raíz mediante una serie de Taylor hasta primer grado,

$$r = z\sqrt{1 + \frac{(x-x_0)^2}{z^2} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2}} \approx z\left[1 + \frac{(x-x_0)^2}{2z^2} + \frac{(y-y_0)^2}{2z^2}\right] \quad (2.30)$$

Esta aproximación equivale a aproximar una esfera por una superficie parabólica. De ésta forma obtenemos la fórmula de difracción de Fresnel,

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{\Sigma} U(x_0, y_0, 0) e^{\frac{ik}{2z}((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)} dx_0 dy_0 \quad (2.31)$$

Los límites de integración se extienden al campo de la abertura Σ . Estos límites se pueden extender de $(-\infty, +\infty)$ considerando que el campo eléctrico fuera de la abertura es cero y haciendo $(x, y) = U(x, y, 0)G(x, y)$, con $G(x, y)$ la función que describe la geometría de la abertura. La integral de la difracción de Fresnel puede ser interpretada como el producto de convolución entre el campo en el plano $z = 0$, $\psi(x, y)$, y la respuesta al impulso en espacio libre $h(x, y, z)$

$$U(x, y, z) = \psi(x, y) * h(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) h(x - x_0, y - y_0, z) dx_0 dy_0 \quad (2.32)$$

donde,

$$h(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \quad (2.33)$$

Esta función $h(x, y, z)$ que forma el núcleo de la convolución corresponde a la expresión de una onda esférica con origen en $z = 0$ que ha viajado una distancia z , multiplicada por el factor $1/i\lambda$. Por tanto en la aproximación de Fresnel, el campo eléctrico escalar a una distancia z se obtiene mediante la convolución del campo en $z = 0$ con una onda esférica que ha viajado la distancia z .

Otra interpretación se puede obtener si se desarrollan los binomios $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ de la integral de difracción (ecuación 2.31)

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)} dx_0 dy_0 \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-2\pi i(\frac{x}{\lambda z}x_0 + \frac{y}{\lambda z}y_0)} \quad (2.34) \end{aligned}$$

Así la difracción de Fresnel se puede obtener a partir de una Transformada de Fourier escalada λz de $\psi(x_0, y_0) \exp(ik(x_0^2 + y_0^2)/2z)$ y una multiplicación por unos factores de fase constantes en el plano z :

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{F}_{\lambda z}(\psi(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}(x_0^2+y_0^2)}) \quad (2.35)$$

Si se consideran distancias de observación z grandes, que cumplan $z \gg k(x^2 + y^2)_{max}/2$, entonces la exponencial dentro de la integral anterior se puede aproximar a 1, obteniendo así la aproximación de Fraunhofer para la difracción:

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{F}_{\lambda z}(\psi(x_0, y_0)) \quad (2.36)$$

En este caso la difracción es directamente proporcional a una transformada de Fourier del campo eléctrico en la abertura, escalada λz . Los términos exponenciales que aparecen fuera de la integral no se pueden aproximar ya que las dimensiones del plano de observación no tienen por que ser pequeñas respecto a z , de todas formas, si se considera solo la intensidad del campo eléctrico estos términos quedan anulados al realizar el cuadrado del campo, $I(x, y, z) \propto |\mathcal{F}_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0)]|^2$. Todas las integrales de difracción deben ser calculadas como una contribución progresiva simplificada de cada una de las fuentes secundarias. Debido a la naturaleza de la propagación en espacio libre, cada fragmento de la onda se expande, conforme la onda viaja, la importancia de mantener términos extras para alcanzar resultados precisos se decrementa (Fig 2.6).

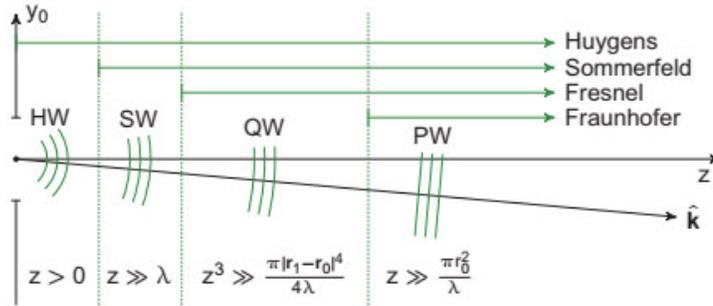


Figura 2.6: Aproximaciones para difracción escalar respecto a la distancia de propagación

2.2 Problema de recuperación de fase

El problema de recuperación de fase es uno de los más desafiantes problemas computacionales. Existen técnicas como la ecuación de transporte de intensidad[19] que relaciona la intensidad derivada de una fracción del campo (en la zona de Fresnel) a fase del gradiente transversal. Algunos algoritmos bien conocidos son del método de Fienup o el de Gerchberg-Saxton serán discutidos. El problema de recuperación de fase puede ser enunciado como:

Determinar una función objetivo desconocida $g(x, y)$ a partir de la magnitud $|G(f_x, f_y)|$ de su transformada de Fourier.

Claramente cualquier fase seleccionada de forma aleatoria a la que se le asocie la magnitud $\|G\|$ corresponderá a una solución. El desafío en esta tarea consiste en encontrar una función de fase que satisfaga restricciones físicas significativas. La solución iterativa evalúa las restricciones de magnitud en el dominio de Fourier, éstas representan cualquier propiedad física deseable de la solución $g(x, y)$ en el dominio de imagen.

El problema de fase ocurre de forma natural en el estudio de la difracción de Fraunhofer, donde la medición de el patrón de intensidad $|G(f_x, f_y)|^2$ no es suficiente para reconstruir el objeto debido a la pobre o nula información de fase.

Otro caso donde el problema de recuperación de fase ocurre es en la captura de imágenes astronómicas a través de la atmósfera turbulenta. Por ejemplo, es la técnica conocida como interferometría por “speckle”, la exposición corta de imágenes de una estrella $o(x, y)$ es grabada de forma secuencial para múltiples realizaciones de turbulencia atmosférica. El conjunto de imágenes resultantes puede ser descrito por:

$$g_k(x, y) = o(x, y) * p_k(x, y) \quad (2.37)$$

Donde $p_k(x, y)$ denota la PSF combinada del telescopio y los efectos atmosféricos. El promediado es hecho en el dominio de Fourier como:

$$\langle |G(f_x, f_y)|^2 \rangle = |O(f_x, f_y)|^2 \langle |P_k(f_x, f_y)|^2 \rangle \quad (2.38)$$

La cantidad $\langle |P_k(f_x, f_y)|^2 \rangle$ puede ser medida de forma separada. El resultado es obtenido por la intensidad de la transformada de Fourier del objeto de interés.

2.2.1 Algoritmo de Gerchberg-Saxton

Este método también es conocido como método de reducción de error, su estructura básica esta descrita en el siguiente diagrama de flujo (Fig. 2.7) Dados los datos correspondientes a la medición de el módulo $|G(f_x, f_y)|$ de

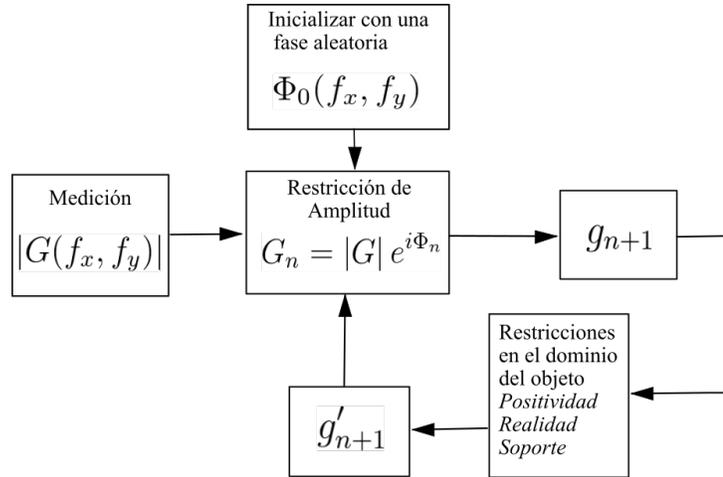


Figura 2.7: Diagrama de flujo que muestra las etapas del algoritmo de GS

la transformada de Fourier se usa como solución inicial la función de fase $\phi_0(f_x, f_y)$ con una distribución de fase entre $[-\pi, \pi]$. Las etapas en las n -ésimas iteraciones del algoritmo son como sigue:

1. La función $G_n(f_x, f_y)$ es la transformada de Fourier inversa para obtener una solución inicial $g_{n+1}(x, y)$.
2. Cualquier información acerca de el objeto es aplicada a la solución $g_{n+1}(x, y)$ para obtener una solución modificada $g'_{n+1}(x, y)$. Las restricciones de interés pueden incluir positividad de la solución $g(x, y)$, información de soporte, etc. Los pixeles de la imagen que no satisfacen la restricción son puestos en cero.
3. Se calcula la transformada de Fourier de la solución modificada para obtener la siguiente solución $G_{n+1}(f_x, f_y)$, esta función es modificada reemplazando su amplitud con el módulo conocido $|G(x, y)|$ y preservando la fase.

La figura 2.8 muestra la recuperación de una imagen a través de la magnitud de su transformada de Fourier usando 1,10,100 iteraciones del método de GS.

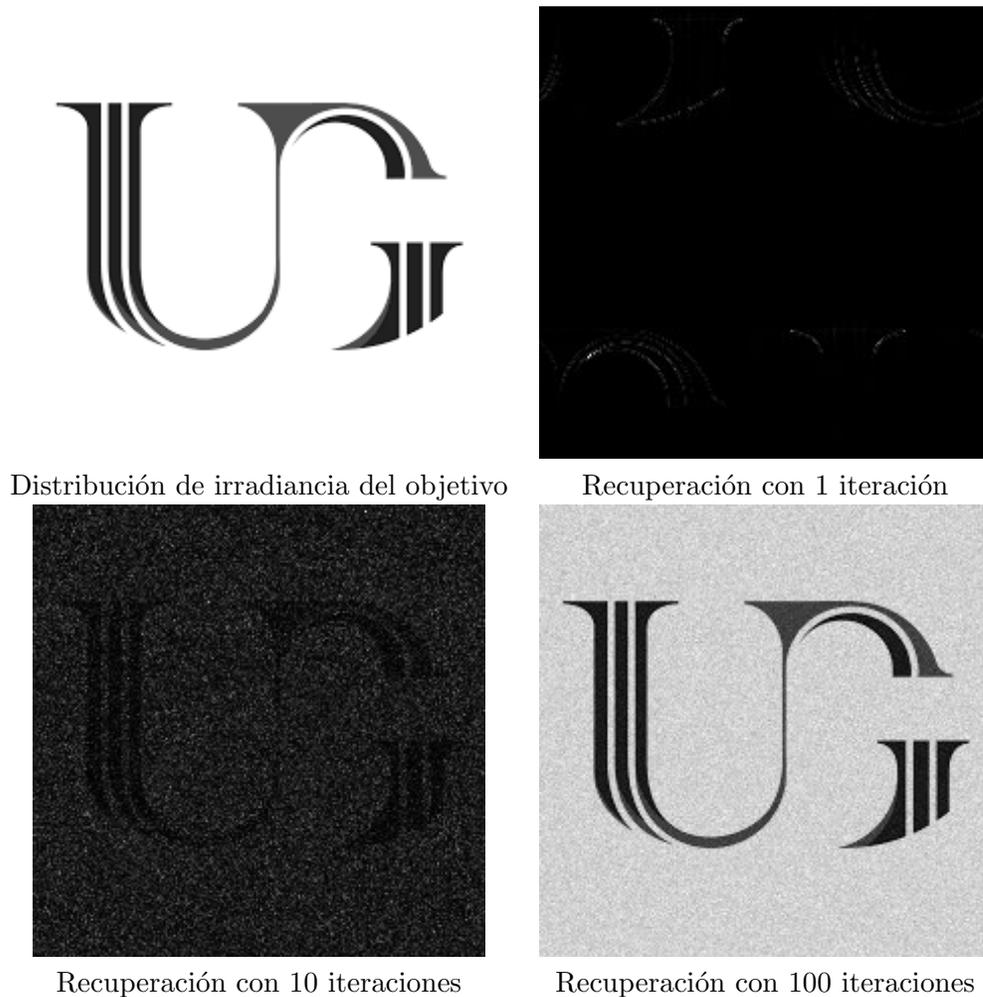


Figura 2.8: [Resultados tras iterar el método de Gerchberg-Saxton para recuperación de fase

2.2.2 Algoritmo de Fienup

Mientras que el algoritmo de GS trabaja bien para objetos con alto contraste suele tener problemas de mínimos locales para objetos en escala de grises. Un importante avance sobre el método de GS es presentado por el algoritmo de entrada-salida híbrida (*HIO*) de Fienup. Este algoritmo trata las etapas de actualización como un problema con retroalimentación negativa. Similar al algoritmo de GS existe una transformación entre el dominio de imagen y el de Fourier (Figura 2.9), la imagen $g(x, y)$ es llevada al plano de Fourier y la amplitud resultante es reemplazada por el módulo conocido $|G|$. Durante la inversa se obtiene una nueva función $\hat{g}(x, y)$. Los pixeles son divididos en dos conjuntos, aquellos que satisfacen la restricción en el dominio del objeto (denotada por el conjunto Γ), y los que no. Los pixeles que no obedecen las restricciones permiten una retroalimentación negativa para estimar una nueva siguiente solución. La actualización para el método HIO esta dada por:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x, y) &= \hat{g}_n(x, y) & (x, y) \in \Gamma \\ &= g_n(x, y) - \beta \hat{g}_n(x, y) & (x, y) \notin \Gamma \end{aligned} \quad (2.39)$$

El parámetro β toma un valor arbitrario entre $(0, 1)$.



Figura 2.9: Operaciones sobre el dominio de Fourier

2.3 Moduladores espaciales de luz

Los moduladores espaciales de luz (*SLM*) crean una variación espacial de la amplitud y/o fase de un haz luminoso. Éstos pueden ser programados para actuar como diferentes elementos ópticos difractivos usando transformadas de Fourier, ofrecen diversas ventajas con respecto a los métodos tradicionales para modificar la luz porque éstos son dinámicos y tienen alta resolución.

El tipo más común de SLMs está basado en cristales líquidos, algunos otros se basan en químicos, superficies mecánicamente deformables y efectos opto-acústicos y magneto-ópticos. Además pueden actuar como dispositivos de transmisión o reflexión, y de ser controlados mediante señales ópticas o eléctricas. Sus usos abarcan la investigación científica y un gran número de aplicaciones comerciales.

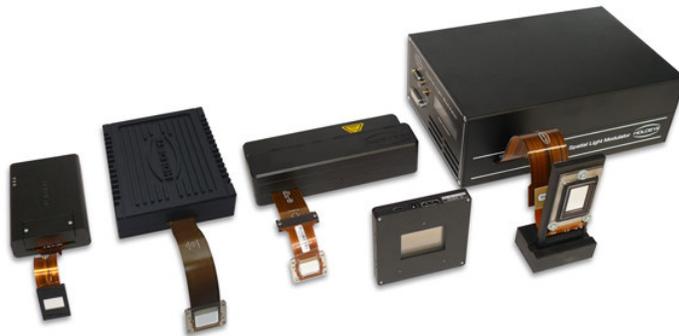


Figura 2.10: Moduladores espaciales de luz marca HOLOEYE

2.3.1 Cristales líquidos

Se suele atribuir el descubrimiento de los cristales líquidos al botánico Friedrich Reinitzer que en 1888 encontró una sustancia que parecía tener dos puntos de fusión. Un año más tarde Otto Lehmann solventó el problema con la descripción de un nuevo estado de la materia medio entre un líquido y un cristal. Finalmente, Friedel, en 1922, fue quien habló por primera vez de “mesofase”.

En 1888, cuando Friedrich Reinitzer estudiaba derivados del colesterol encontró un compuesto que parecía tener dos puntos de fusión; en principio, los

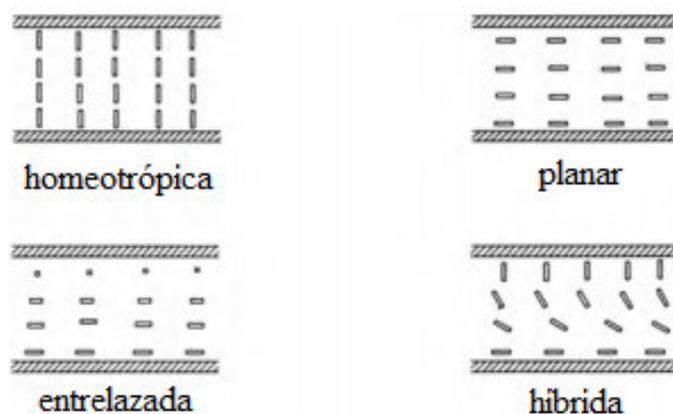


Figura 2.11: Orientaciones típicas en una capa nemática

crisales se fundían generando un fluido denso y opaco. Luego, a una temperatura superior, éste se convertía en un líquido transparente parecido al agua. Para caracterizar un compuesto sólido se obtiene un cristal y se mide su punto de fusión. Si la sustancia es pura, su temperatura de fusión es constante; de otro modo, se trata de una mezcla. Hasta entonces (1888), sólo se conocían tres fases de la materia: sólido, líquido y gas; pero al observar, con un microscopio de polarización, este fluido denso mostraba una estructura interna característica de los cristales sólidos. Esto parecía ser el descubrimiento de una nueva fase de la materia. Estimulados por esto, los científicos comenzaron la búsqueda de otras sustancias que también mostraran la llamada mesofase, es decir, sustancias líquidas con una estructura interna en un rango constante de temperatura.

Se encontraron varios derivados del colesterol que se comportaban así. Se llevaron a cabo diferentes medidas y se propusieron teorías para predecir la existencia de la mesofase (fase entre el estado sólido y líquido). Estas teorías en un principio sólo consideraban moléculas tipo bastón pero actualmente abarcan también otras moléculas no esféricas (anisótropas).

En 1970 se demostró que la corriente eléctrica de baja intensidad cambia la estructura interna de la mesofase, también llamada “estado mesomórfico”, lo que provoca variaciones en las propiedades ópticas de los líquidos. También es posible manipular las propiedades ópticas de un cristal líquido sometiéndolo

a un campo magnético que, como un campo eléctrico, cambia la orientación de sus moléculas.

Fases y propiedades básicas

El cristal líquido (*LC*) es un estado de la materia entre el líquido y sólido, y por ello exhibe propiedades únicas. Las moléculas de un LC son muy largas en comparación a su ancho, esto causa que creen atracciones intermoleculares fuertes. Además deben de tener una región central rígida para que se puedan mover como un grupo. las moléculas en un sólido tienen dos ordenaciones, la posicional y la de orientación. En los líquidos ninguno; en un cristal líquido únicamente poseen el segundo.

En un LC las moléculas tienen la misma orientación (a ésta se le conoce como *director*), pero son libres de fluir en cualquier dirección.

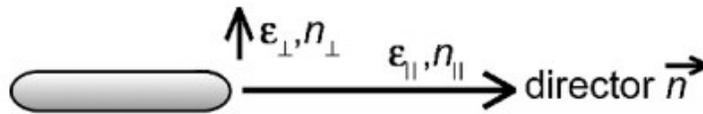


Figura 2.12: Director de una molécula

El parámetro de orden en una molécula describe la desviación promedio de la misma con respecto a su director e indica en que dirección el LC actúa como un sólido. Debido a que las moléculas del LC son dipolos, el director es sumamente sensible a cambios en el campo eléctrico de las superficies adyacentes.

Existen diversos tipos de LCs, incluyendo los *nemáticos*, que tienen su orden de orientación sobre el eje largo; y *esméticos* que están organizados en más de una dimensión.

Los LCs son birrefringentes por ello la luz viaja a diferentes velocidades dependiendo si del campo eléctrico de la luz viaja perpendicular o paralelo al director. Aplicar un voltaje normal al LC causa una diferencia entre los índices de refracción en los ejes ordinario y extraordinario creando una mayor birrefringencia.

para un elemento diferencial rebanado desde el anterior en un ángulo ε se cumple que

$$\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{p}{2\pi} \quad (2.44)$$

Donde el ángulo ε corresponde a un espesor d_ε

El vector de Jones J_1 a la entrada es trasladado al vector O_1 en la salida con una primer rebanada de espesor d_ε , obteniendo que

$$\begin{aligned} O_1 &= \begin{pmatrix} J_{1x} \\ J_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik_x d_\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-ik_y d_\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} \\ &= e^{-i2\pi(\bar{n}/\lambda)d_\varepsilon} \begin{pmatrix} e^{-i\pi(\Delta n/\lambda)d_\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{i\pi(\Delta n/\lambda)d_\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$O_1 = T(\varepsilon) \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

con

$$\bar{n} = \frac{n_{\parallel} + n_{\perp}}{2} \quad (2.47)$$

Futuras propagaciones de la luz a través de las $s - 1$ rebanadas restantes se muestran en la figura 2.14 con las matrices de rotación

$$R_v(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \quad v = 2, 3 \dots s - 1 \quad (2.48)$$

y las matrices de transmisión

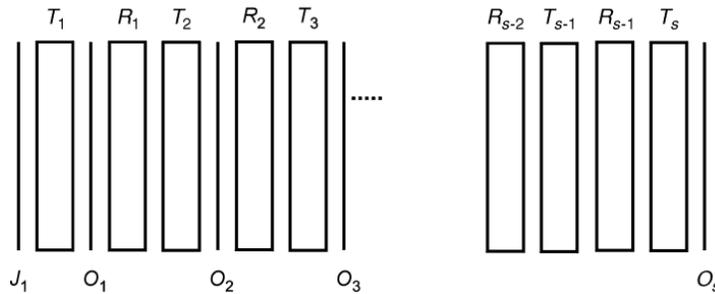


Figura 2.14: Propagación de la luz desde el vector de Jones J_1 en la entrada del vector O_s hasta la salida de las matrices de transmisión T_v y de rotación R_v

$$T_v(\varepsilon) = e^{-i2\pi(\bar{n}/\lambda)d_\varepsilon} \begin{pmatrix} e^{-i\pi(\Delta n/\lambda)d_\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{i\pi(\Delta n/\lambda)d_\varepsilon} \end{pmatrix} \quad v = 2, 3 \dots s \quad (2.49)$$

El vector de Jones O_s a la salida $z = d$ medida en la coordenadas σ y τ denotadas en la figura 2.13 puede denotarse como

$$O_s = \begin{pmatrix} O_{s\sigma} \\ O_{s\tau} \end{pmatrix} = (T(\varepsilon)R(\varepsilon))^{s-1} \cdot T(\varepsilon)R(-\alpha) \begin{pmatrix} E_{\xi 0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Reduciendo esta expresión se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O_{s\sigma} \\ O_{s\tau} \end{pmatrix} &= \left[e^{-i(\bar{n}/\lambda)p\varepsilon} \begin{pmatrix} e^{-ia\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{ia\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \right]^{(2\pi d/p\varepsilon)} \\ &= R^{-1}(\varepsilon)T^{-1}(\varepsilon)R(-\alpha) \begin{pmatrix} E_{\xi 0} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde

$$a = \frac{\Delta n}{2\lambda} p \quad (2.52)$$

Se desea obtener esta solución con $\varepsilon \rightarrow 0$ para un tamaño infinitesimal de el espesor de las rebanadas, determinando así la solución exacta. Mediante álgebra lineal es posible llegar a

$$\begin{pmatrix} O_{s\sigma} \\ O_{s\tau} \end{pmatrix} = e^{-i2\pi(\bar{n}d/\lambda)} \begin{pmatrix} \cos \gamma + i\beta_0 \sin \gamma & \beta \sin \gamma \\ -\beta \sin \gamma & \cos \gamma - i\beta_0 \sin \gamma \end{pmatrix} R(-\alpha) \begin{pmatrix} E_{\xi 0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

expresada en las coordenadas $\sigma - \tau$, una evaluación de este resultado sobre los ejes $x' - y'$ requiere una rotación por el ángulo Ψ resultando en

$$\begin{pmatrix} O_{sx'} \\ O_{sy'} \end{pmatrix} = R(-\Psi) e^{-i2\pi(\bar{n}d/\lambda)} \begin{pmatrix} \cos \gamma + i\beta_0 \sin \gamma & \beta \sin \gamma \\ -\beta \sin \gamma & \cos \gamma - i\beta_0 \sin \gamma \end{pmatrix} R(-\alpha) \begin{pmatrix} E_{\xi 0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

donde

$$\gamma = \frac{2\pi d}{p} \sqrt{1 + a^2} \quad (2.55)$$

$$a = \frac{p\Delta n}{2\lambda} \quad (2.56)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{p} d \quad (2.57)$$

$$\beta_0 = \pi \frac{d\Delta n}{\lambda} = a\beta \quad (2.58)$$

Capítulo 3

Metodología

3.1 Modelo matemático del TN-SLM

La matriz de pixeles en una LCD monocromática esta equiespaciada, sin embargo no toda la región es capaz de hacer una modulación en amplitud/fase al espacio con transmitancia fija se le conoce como zona muerta. Si bien, esta región no es capaz de realizar una modulación activa, su presencia causa cambios de fase no deseados [8].

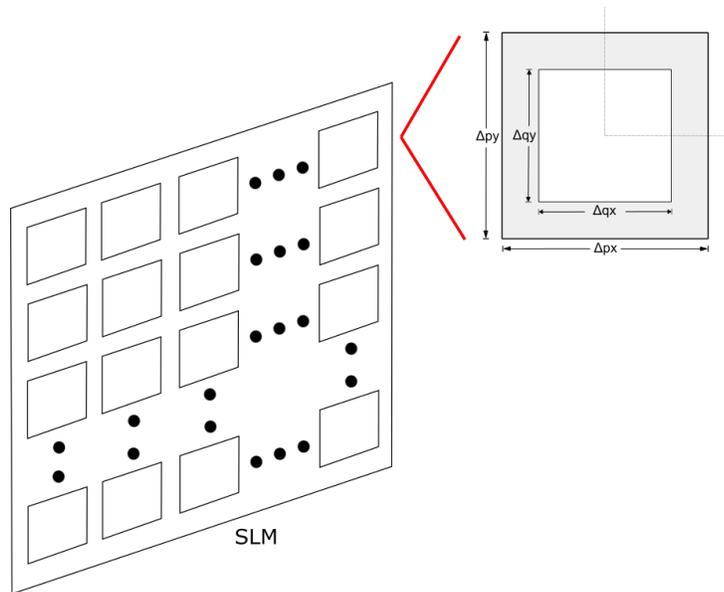


Figura 3.1: Celda unitaria en un LCD

3.1.1 Muestreo del SLM

Una perspectiva general para un sistema de imagen es mostrado en la figura 3.2, un frente de onda incide en el plano $\Sigma(u, v)$ y pasa a través de una apertura plana cuya función de transmitancia compleja esta dada por

$$T(u, v) = \sigma(u, v)e^{j\phi(u, v)} \quad (3.1)$$

Donde $\sigma(u, v)$ representa la modulación espacial en amplitud y $\phi(u, v)$ es la función de modulación en fase.

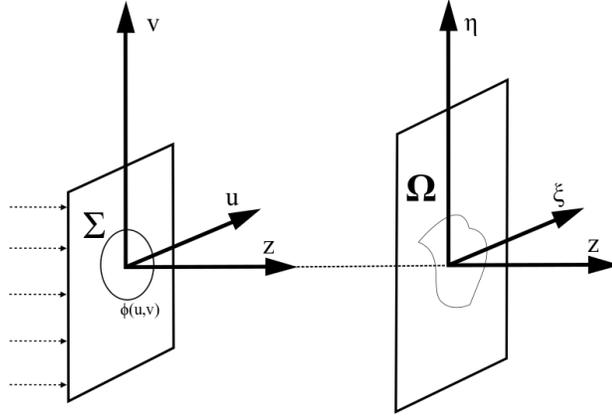


Figura 3.2: Sistema de Imagen

El área activa en cada pixel de un SLM suele ser modelado como una región completamente uniforme. La amplitud o fase que se asocia a cada pixel es un valor constante que se propaga por toda el área activa, a fin de representar esta condición es necesario muestrear el espacio a lo largo de las dimensiones del modulador.

Tomando como base la definición de la función *Shah* bidimensional(Ec 3.1) y su propiedad de replicación se propone el modelo siguiente

$${}^2\mathbb{I}\mathbb{I}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m, y - n) \quad (3.2)$$

$$T(u, v) = \left\{ \left[G(k, l) \operatorname{rect}\left(\frac{u}{\Delta q_x}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{v}{\Delta q_y}\right) \right] \otimes \frac{1}{\Delta p_x \Delta p_y} {}^2\text{III}\left(\frac{u}{\Delta p_x}, \frac{v}{\Delta p_y}\right) \right\} \operatorname{rect}\left(\frac{u}{N \Delta p_x}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{v}{M \Delta p_y}\right) \quad (3.3)$$

Acorde con la figura 3.1, Δp_x y Δp_y corresponden a las dimensiones de cada pixel, Δq_x y Δq_y es el tamaño del área activa, M y N corresponden a las resolución vertical y horizontal respectivamente en pixeles. La función rect está definida como:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{x}{b}\right) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{b}{2} \\ \frac{1}{2} & |x| = \frac{b}{2} \\ 0 & |x| > \frac{b}{2} \end{cases}$$

$G(k, l)$ está enteramente definido en cualquier valor en el espacio (u, v) y toma el valor de la modulación (real o compleja) deseada en cada pixel.

3.2 Respuesta al impulso

En la aproximación paraxial de la teoría de difracción escalar, la amplitud compleja de la radiancia de entrada (asumiendo modulación de fase pura) en el plano de la apertura esta dado por

$$W(u, v) = A(u, v) e^{j\phi(u, v)} \quad (3.4)$$

Donde $A(u, v)$ es la radiancia incidente $e^{j\phi(u, v)}$ es la modulación de fase de la apertura y $W(u, v)$ representa la intensidad justo después del plano Σ .

La difracción del plano $\Sigma(u, v)$ a $\Omega(\xi, \eta)$ esta descrita por

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{j\lambda z} \iint W(u, v) H(u - \xi, v - \eta) du dv \quad (3.5)$$

Donde

$$H(u - \xi, v - \eta) = e^{\left[\frac{jk}{2z} ((u - \xi)^2 + (v - \eta)^2) \right]} \quad (3.6)$$

Asumiendo una iluminación uniforme con frente de onda plano en que $A(u, v) = 1$ y reemplazando la modulación de fase por la función de transmisión del

modulador es posible encontrar la onda propagada en cualquier plano aplicando la Ec. 3.5. Para una difracción de Franhouffer es posible verificar que

$$\begin{aligned}
F(\xi, \eta) &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)}}{i\lambda z} \mathcal{F}(T(u, v)) \\
\mathcal{F}(T(u, v)) &= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} G(k, l) \mathcal{F} \left\{ \text{rect} \left(\frac{u - l\Delta p_x}{\Delta q_x} \right) \text{rect} \left(\frac{v - k\Delta p_y}{\Delta q_y} \right) \right\} \\
&= \text{sinc}(\Delta q_x f_x) \text{sinc}(\Delta q_y f_y) \Delta q_x \Delta q_y \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} H(k, l) e^{i2\pi[f_x l \Delta p_x + f_y k \Delta p_y]}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\xi}{\lambda z} & f_y &= \frac{\eta}{\lambda z} \\
F(\xi, \eta) &= \frac{e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)}}{i\lambda z} \text{sinc} \left(\Delta q_x \frac{\xi}{\lambda z} \right) \text{sinc} \left(\Delta q_y \frac{\eta}{\lambda z} \right) \Delta q_x \Delta q_y \\
&\quad \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} H(k, l) e^{\frac{i2\pi}{\lambda z} [\xi l \Delta p_x + \eta k \Delta p_y]}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

La validez de estas suposiciones son apoyadas posteriormente en la sección de resultados.

3.3 Determinación de la matriz de Jones

El nivel de intensidad es capaz de torcer las moléculas del LC causando distintos estados de polarización. Para diferentes posiciones del analizador la intensidad será medida para un conjunto de niveles de gris. Para nueve niveles de gris (255,224,192,160...32,0) se determinará el ángulo de rotación donde sucede la menor y mayor medición de intensidad. La representación gráfica de estos resultados serán diferentes elipses de polarización para cada nivel de gris.

De forma paramétrica, el semieje mayor a corresponde a la máxima potencia, mientras que el semieje menor b a la potencia mínima. El ángulo del analizador para la máxima potencia corresponde al ángulo Δ , que denota la rotación del semieje mayor con respecto al eje x. Las ecuaciones paramétricas para una elipse con semiejes a, b con sus ejes rotados un ángulo Δ están dados por

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Delta) & -\sin(\Delta) \\ \sin(\Delta) & \cos(\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

La máxima modulación de fase de un SLM basado en cristal líquido depende del índice de refracción del LC, el espesor del mismo y la longitud de onda de la fuente luminosa empleada. Debido a que no se tiene control sobre el material ni el espesor, la longitud de onda, así como la transmitancia del pixel determinarán la magnitud del cambio de fase.

Los moduladores espaciales del tipo **TNLC** (Cristal líquido de nemática rotada) generan modulaciones acopladas de amplitud y fase. Sin embargo mediante las condiciones apropiadas de polarización del haz incidente es posible obtener modulación pura de fase o amplitud. Por ello es necesario estudiar los estados de eigenpolarización [11] para obtener modulación de fase.

Para predecir las características de transmisión de un display de cristal líquido es necesario encontrar la matriz de Jones W . Ésta depende de los parámetros α , β y ψ . Usando medidas de transmisión es posible determinar estos parámetros. Para la estimación de distintas birrefringencias β es necesario utilizar varias longitudes de onda y niveles de gris. Considere el arreglo experimental propuesto en la figura 3.3.

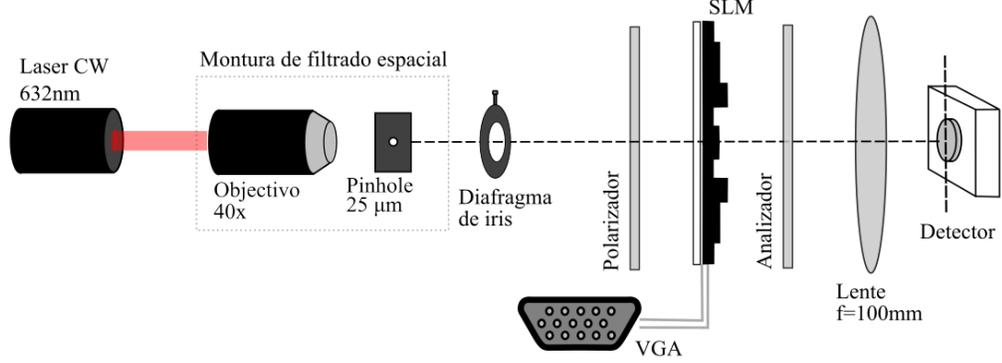


Figura 3.3: Mediciones de transmisión para determinar la matriz de Jones

La matriz de Jones para una celda TNLC esta dada por

$$W_{TN-LC} = R(\alpha) \cdot e^{-i(\beta+\Phi_0)} \begin{pmatrix} \cos\gamma - i \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \sin\gamma & -\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \sin\gamma \\ \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \sin\gamma & \cos\gamma + i \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \sin\gamma \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Donde α es el ángulo que giran de las moléculas desde la entrada hacia la salida de la celda, γ esta dada por

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (3.11)$$

La birrefringencia β es dependiente de la diferencia del índice refracción $\Delta n = n_e - n_o$, el espesor de la celda y la longitud de onda.

$$\beta = \frac{\Gamma}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} (n_e - n_o) \quad (3.12)$$

Debido a que el índice extraordinario n_e es dependiente de la orientación de las moléculas y por ello, al voltaje aplicado a la celda LC, la birrefringencia también es dependiente del voltaje. La diferencia de fase absoluta puede ser escrita como

$$\Phi = \beta + \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot n_o = \beta + \Phi_0 \quad (3.13)$$

Asumiendo que no hay tensión aplicada a la celda la ecuación 3.10 puede ser reescrita en términos de la notación de Jones como

$$W_{TN-LC}^{fghj} = e^{-i\beta} \begin{pmatrix} f - i \cdot g & n - i \cdot j \\ -h - i \cdot j & f + i \cdot g \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Donde las componentes de Jones f, g, h y j son dependientes de los parámetros del display.

$$\begin{aligned}
 f &= \cos \gamma \cdot \cos \alpha + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \sin \gamma \cdot \sin \alpha \\
 h &= \cos \gamma \cdot \sin \alpha - \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha \\
 g &= \frac{\beta}{\gamma} \cdot \sin \gamma \cdot \cos (2\psi - \alpha) \\
 j &= \frac{\beta}{\gamma} \cdot \sin \gamma \cdot \sin (2\psi - \alpha)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Con el ángulo director describiendo la posición del eje largo de la molécula. La matriz de Jones satisface que $f^2 + g^2 + h^2 + j^2 = 1$. La transmitancia del sistema completo esta dada por

$$\begin{aligned}
 T(\theta_1, \theta_2) &= f^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) + fh \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) + h^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \\
 &\quad + g^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + gj \sin(2\theta_1 + 2\theta_2) + j^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Se escogen dos combinaciones de rotación para la determinación de los parámetros, la primera es con θ_1 y θ_2 moviéndose en la misma dirección, y la segunda con los polarizadores moviéndose de forma opuesta. Esto causará que la ecuación 3.16 se reduzca a la forma

$$T(\theta) = C_1 + C_2 \cdot \sin(4\theta + \varphi) \tag{3.17}$$

Las mediciones obtenidas pueden ser ajustadas a el modelo anterior a través de cualquier método de ajuste no lineal. En este trabajo se escogió una regresión de Levenberg-Marquardt.

3.4 Modelo general para problemas de recuperación de fase

Los métodos iterativos han sido ampliamente usados para resolver los problemas de recuperación de fase. Esto es, sintetizar la función de fase de un elemento óptico sabiendo las distribuciones de irradiancia a la entrada y en un plano de observación.

En la figura 3.4, se propone una estrategia general para resolver el problema de recuperación de fase. Bajo este esquema, la proyección de un plano a otro puede ser simplificada a una difracción de Fresnel, Fraunhofer o alguna otra aproximación por diferencias finitas (Yoshikawa [1]).

Los bloques G y G' son un conjunto de restricciones físicas que se desean superimponer a la solución buscada (positividad, realidad, soporte) además de reglas de actualización y métricas de error en los dominios de entrada o de observación. En este trabajo se comparan los métodos de Gerchberg-Saxton[3, 12, 13], Yang-Gu[17] y Fienup[7].

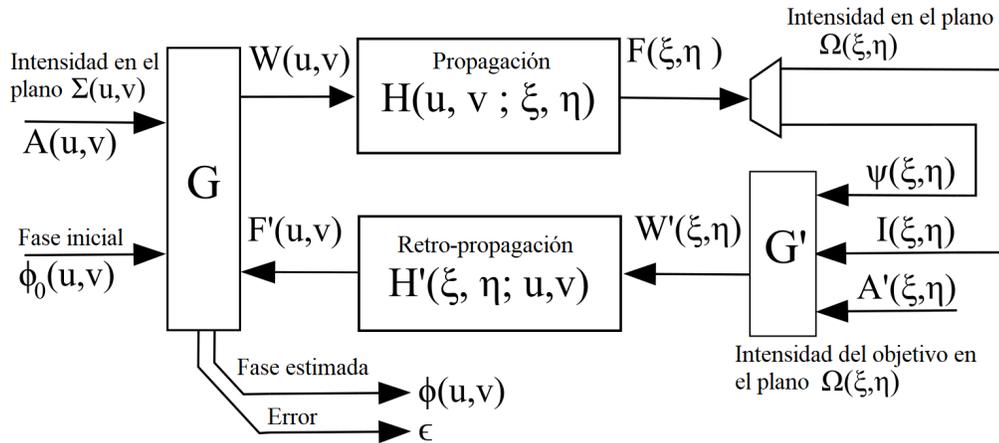


Figura 3.4: Generalización de los métodos de recuperación de fase

3.4. MODELO GENERAL PARA PROBLEMAS DE RECUPERACIÓN DE FASE37

Para cuantificar el error se han escogido las siguientes medidas de distancia.

$$\begin{aligned}d^1 &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\d^2 &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \\d^\gamma &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^\gamma \right)^{1/\gamma} \quad \gamma < 1 \\DKL(P \parallel Q) &= \sum_{i=0}^n P(i) \ln \frac{P(i)}{Q(i)} \\DMah(x, y) &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{(x_i - y_i)^2}{\sigma_{xy}^i} \right)\end{aligned} \tag{3.18}$$

Se utilizan la distancia fraccional a pesar de ser una pseudométrica, acorde a lo discutido en “On the Surprising Behavior of Distance Metrics in High Dimensional Space” [20] para espacios de gran dimensionalidad el concepto de proximidad puede ser evaluado a través de distancias de menor orden. La divergencia de Kullback-Leibner [21] es usada para validar la calidad del intercambio de información, por ello también será considerada en este estudio.

Capítulo 4

Resultados

4.1 GUI para manejo del LC2002 en Python

El LC2002 tiene una interfaz VGA mediante la cual recibe la información de intensidad que debe mostrar sobre el área activa del LCD. Con el fin de poder establecer comunicación con ella se desarrollo una interfaz gráfica de usuario en QT para Python.

Esta GUI tiene cuatros pestañas principales, la primera, la del objetivo (Fig.4.1), en esta ventana se elige que distribución de intensidad se busca obtener en el plano de observación. Es posible elegir una imagen que para su procesamiento será remuestreada a 256x256 pixeles, esto debido a recomendaciones del fabricante. Se agregan además modos de propagación Hermite-Gauss, Laguerre-Gauss y Flat-top.

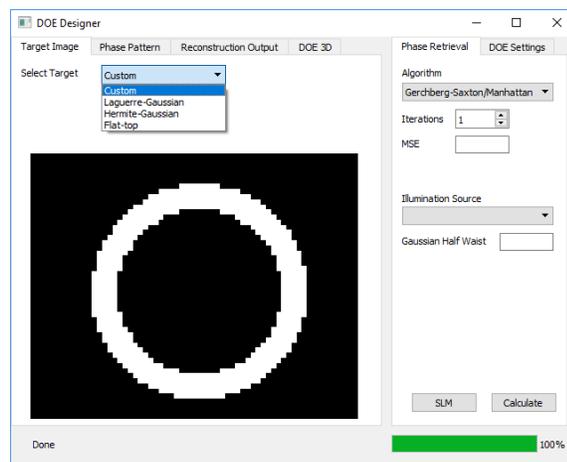


Figura 4.1: Ventana de objetivo en el plano de observación

La segunda pestaña (Fig. 4.2) revela el resultado de la máscara de fase obtenida, además es posible imponer una fase prismática que permite desplazar los órdenes de difracción o bien una fase de lente, modificando la distancia a la que se puede encontrar el plano de difracción. La máscara de fase obtenida se replica de forma periódica sobre los 800x600 píxeles que tiene la LCD.

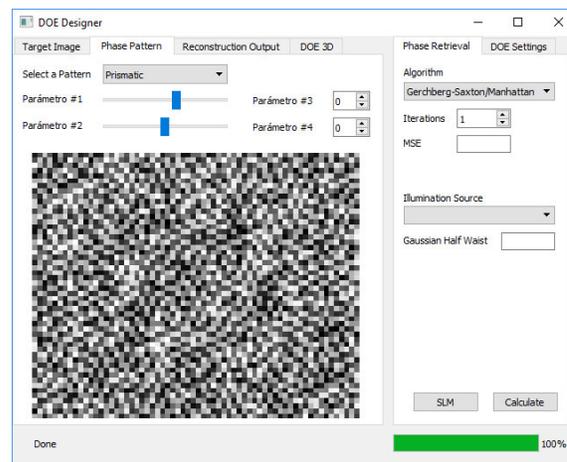


Figura 4.2: Ventana para visualizar la máscara de fase estimada

En la tercera (Fig. 4.3) se encuentra la estimación numérica del patrón de difracción obtenido.

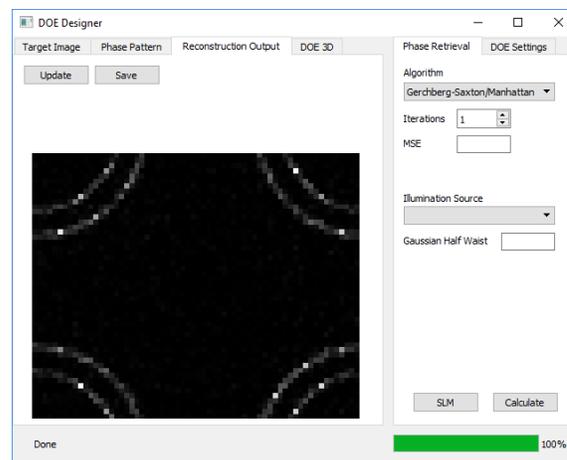


Figura 4.3: Ventana con la simulación de la imagen obtenida en el plano de observación

Finalmente en la última pestaña (Fig.4.4) es posible visualizar en 3D el elemento óptico difractivo que es capaz de realizar la transformación estimada por el software, puede guardarse en formato STL. Las dimensiones de esta son determinadas mediante el índice de refracción del material con el que será manufacturado.

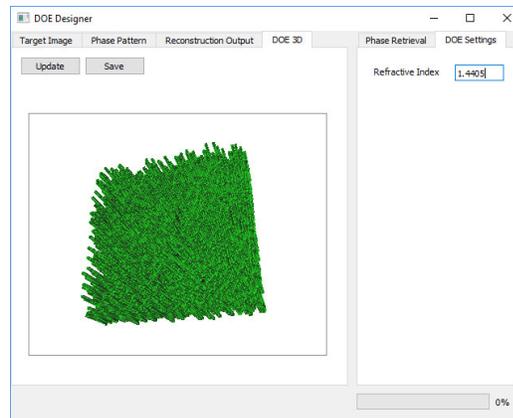


Figura 4.4: Visualización del DOE

A la derecha se encuentran dos pestañas donde es posible escoger el método de solución, la métrica deseada para ponderar el error, el error esperado, el número máximo de iteraciones, y el tipo de fuente luminosa, que puede ser uniforme o gaussiana. En la parte inferior están los botones para comenzar el cálculo, una vez realizado si el LC2002 está conectado a el ordenador es posible enviar la máscara de fase usando el botón SLM.

4.2 Estimación del error

El modelo generalizado propuesto en esta trabajo se validó usando 6 patrones de prueba con características diferentes, pueden ser encontrados en la figura 4.5. Todos los patrones son cuadrados. El patrón A, es una imagen de 256 pixeles con 256 niveles de intensidad, el B es el mismo que el anterior pero binarizada. Los patrones C-F son centro-simétricos, todos ellos son monocromáticos pero con geometrías diferentes.

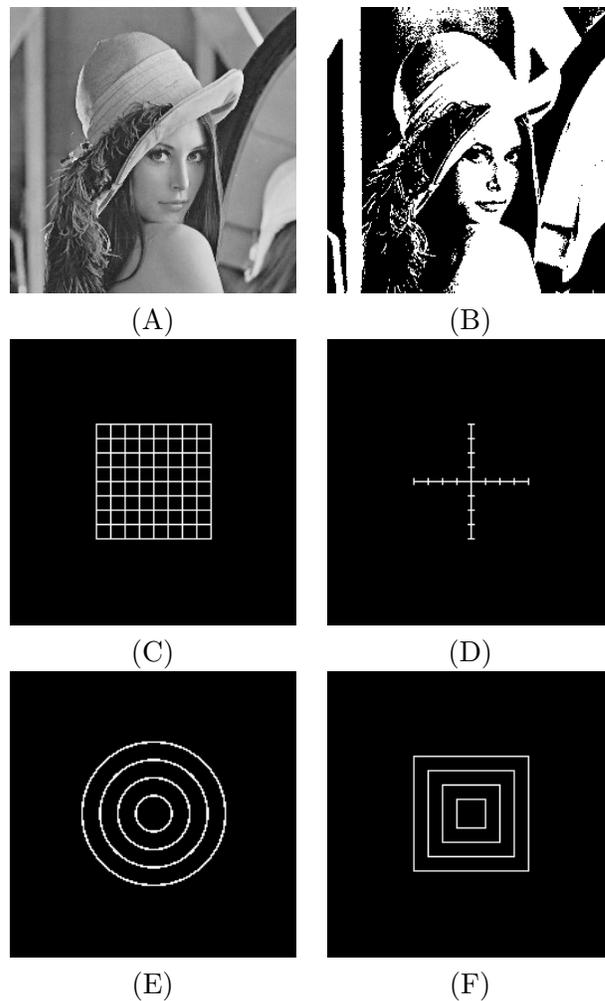


Figura 4.5: Patrones de prueba

El modelo generalizado aquí propuesto puede resolver el problema de recuperación de fase aplicando las restricciones de los métodos de Gerchberg-Saxton, Compresión de fase y FienUp.

Como función de evaluación de error se emplearon las siguientes:

- Distancia norma 1
- Distancia norma 2
- Distancia de Mahalanobis
- Divergencia de Kullback-Leibner
- Desviación estándar
- Distancia fraccional orden $\gamma = 0.8, 0.9, 0.98$

A fin de obtener una comparativa se encontró el error normalizado, en el Anexo 6.1-6.3 puede encontrar gráficas que concentran de la evolución del error calculado con las diferentes funciones para cada uno de los patrones y empleando las tres metodologías de recuperación de fase.

Tras las pruebas de desempeño se encontró en que iteración la función de error devolvió el valor más bajo, y se aceptó esta como la mejor solución de cada ensayo. Sin embargo, cada función de error corresponde a una métrica (ó pseudométrica) para el espacio definido por la región de la reconstrucción y sus valores, a pesar de ser iguales no representan la misma solución, pues cada una de ellas mapea una configuración de la solución desde la topología del conjunto de formas distintas.

Debido a esto, se determinará la eficiencia de difracción que produce cada método durante las iteraciones, esta medición es una de las metodologías más usadas [22, 23] en el diseño de elementos ópticos difractivos, también es conocida como la relación PSNR (Peak-signal Noise Ratio) que esta definida por:

$$RMSE = \sqrt{\text{mean} \left[(\hat{I}_0(u, v) - I_0(u, v))^2 \right]} \quad (4.1)$$

$$PSNR = 20 \log \left(\frac{\max_{u,v} I_0(u, v)}{RMSE} \right) \quad (4.2)$$

Donde \hat{I}_0 es la reconstrucción de I_0 , $\max_{u,v} I_0(u,v)$ es el valor pico máximo del perfil de intensidad deseado. a mayor valor del PSNR, se obtiene una mejor reconstrucción, generalmente se asume que para un valor mayor a 30dB se tiene una reconstrucción de alta calidad. Las figuras 4.6-8 muestran el valor de PSNR obtenido para cada método y patrón.

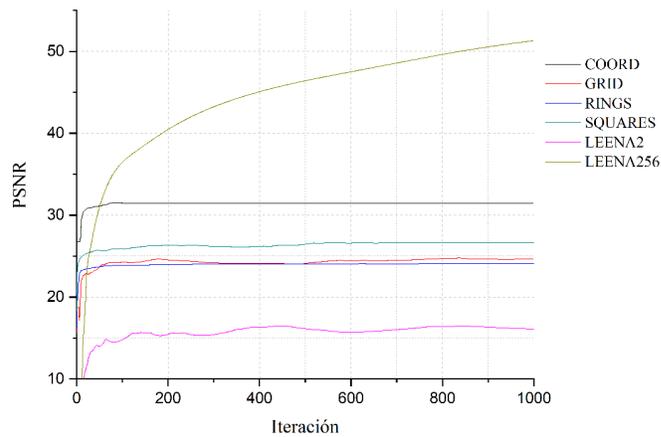


Figura 4.6: Comparativa de PSNR para el método de Gerchberg-Saxton

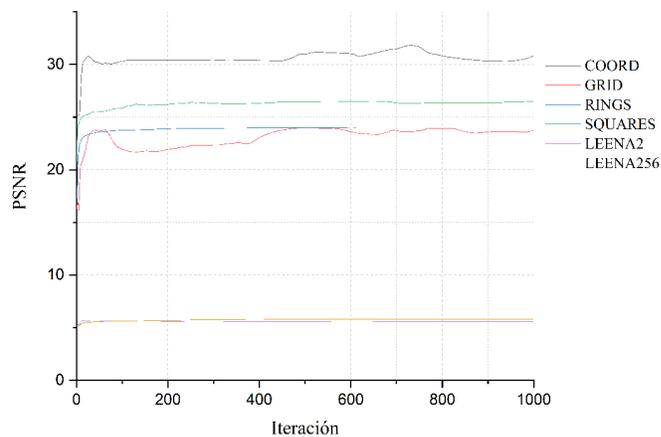


Figura 4.7: Comparativa de PSNR para el método de compresión de fase

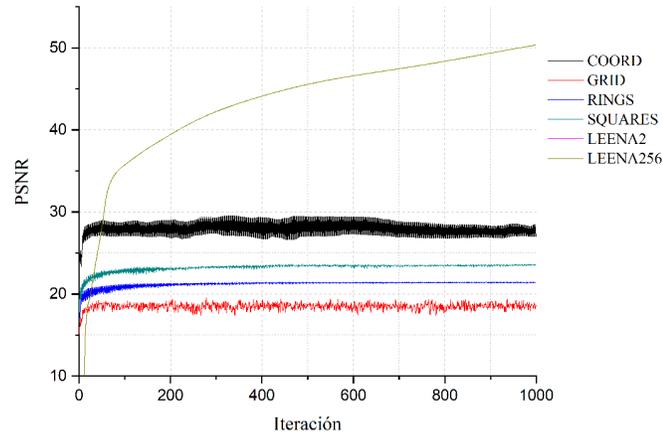


Figura 4.8: Comparativa de PSNR para el método de FienUp

El PSNR mide la eficiencia con la que la luz incidente es llevada a la salida, los métodos que realizan el transporte con mayor eficiencia son el de Gerchberg-Saxton y Fienup, sin embargo los tres métodos logran una correcta reconstrucción espacial. Se estableció como criterio de convergencia que el error estimado fuera igual a cero, o bien que su diferencia con la iteración anterior fuese menor que $1E-5$, en la figura 4.9 se observan las mejores soluciones agrupadas por cada métrica, patrón y método.

Acorde al dicho gráfico, podremos notar que para las métricas 5-8 comienza a existir problemas para evaluar algunos de los patrones, puesto que las funciones de error convergen tras escasas iteraciones.

En la figura 4.10 podemos observar la gráfica anterior como un mapa de calor, las tonalidades rojas son las que requieren mayor número de iteraciones, se observa una similitud alta entre los resultados obtenidos por las métricas de orden p ($p - norm$). Las funciones de error que convergen con mayor velocidad son desviación estándar, distancia de Mahalanobis y divergencia de Kullback-Leibler para la mayoría de los patrones. El patrón A tiene mayor variación de intensidad que los demás, y en general, requiere mayor número de iteraciones para ser resuelto por cualquiera de los métodos implementados.

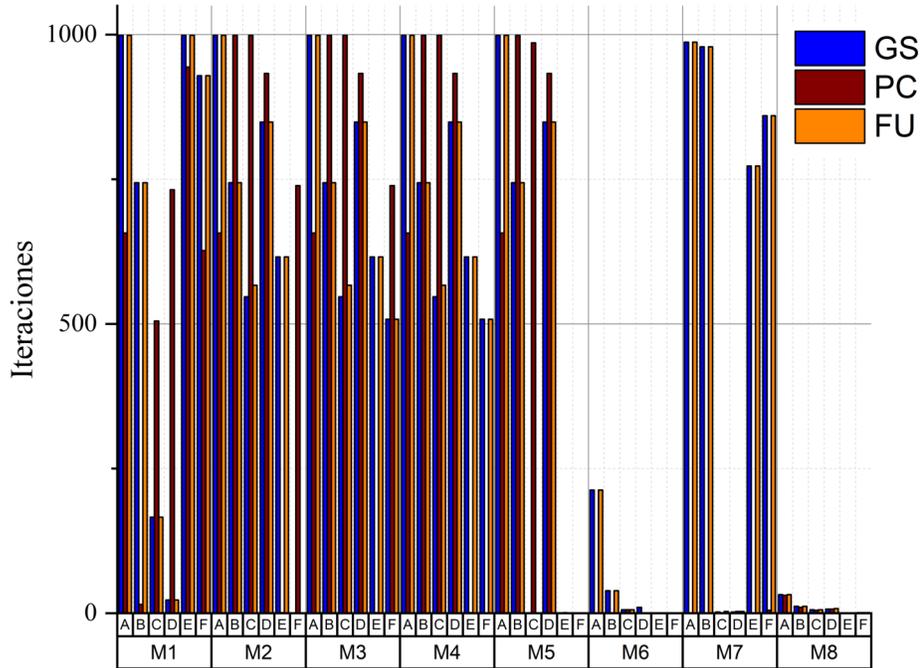


Figura 4.9: Error de las métricas agrupadas por métrica y patrón

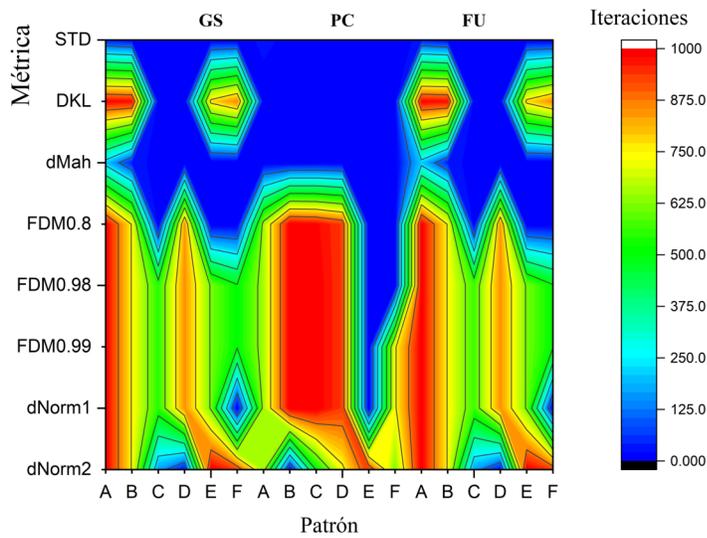


Figura 4.10: Mejor solución agrupada por método y patrón

En la figura 4.11 se encuentra el PSNR de las soluciones anteriores, tal como se observaba en las gráficas 4.6-8 el PSNR de las soluciones obtenidas por el método de Compresión de fase es menor que para Gerchberg-Saxton (GS) ó Fienup (FU).

El método de GS es capaz de lograr una reconstrucción con un PNSR mayor en todos los patrones, las funciones de error que arrojan mejores resultados son la norma 2, las normas fraccionarias 0.98 y 0.99, aunque también son aquellas que usan mayor número de iteraciones.

Otra manera de observar el error es el mapa de calor presentado en la figura 4.12, resulta claro que el patrón reconstruido con mejor transporte de intensidad es el A, salvo el caso del algoritmo PC.

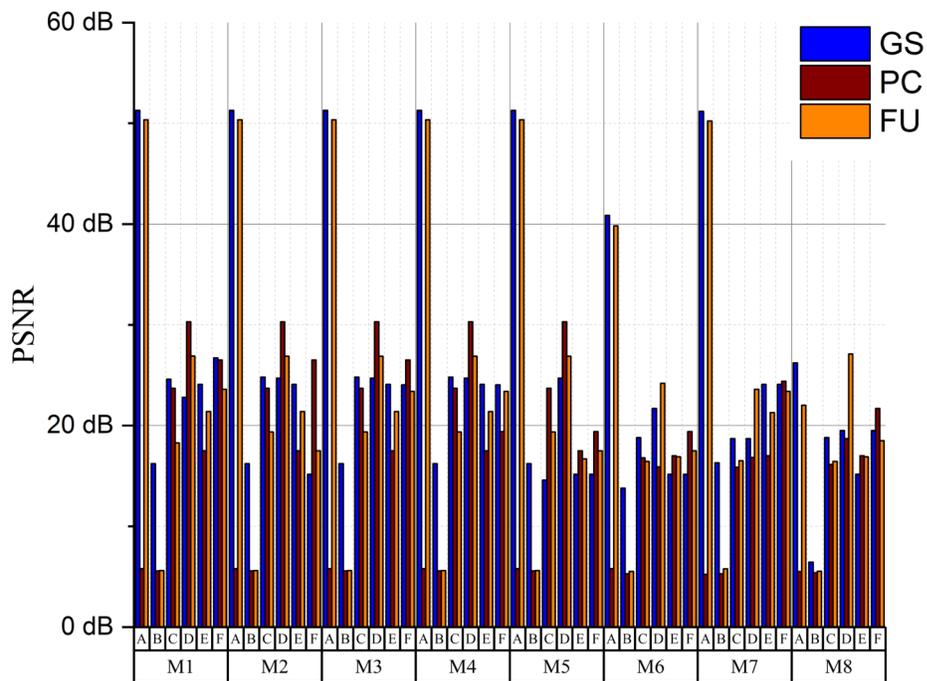


Figura 4.11: PSNR de las mejores iteraciones

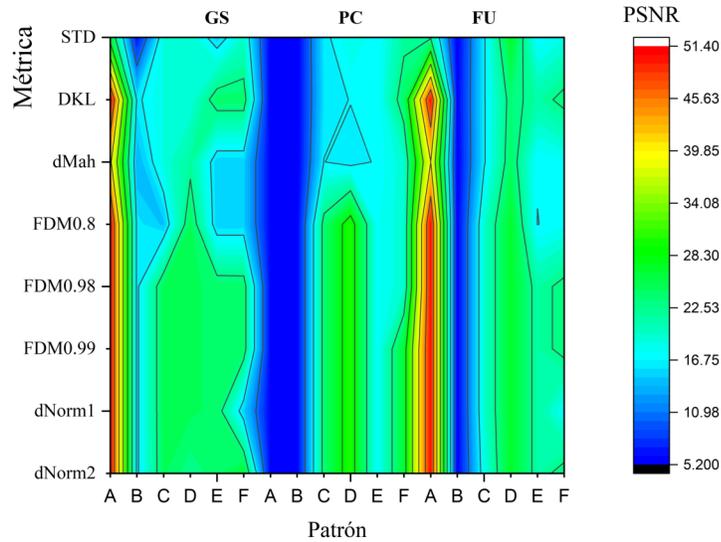


Figura 4.12: PSNR de las mejores soluciones

En la figura 4.13 vemos la comparativa de las reconstrucciones logradas por los tres métodos implementados, es notoria la pérdida de intensidad en los patrones A y B mediante el método PC, sin embargo la reconstrucción es fiel en cuanto a la distribución de irradiancia, para el método FU en el patrón B se observa una mala reconstrucción, con pérdidas de intensidad pero también en la distribución.

El patrón C es el primero de los que tienen centrosimetría, nuevamente el método FU tiene problemas para recuperar la distribución original.

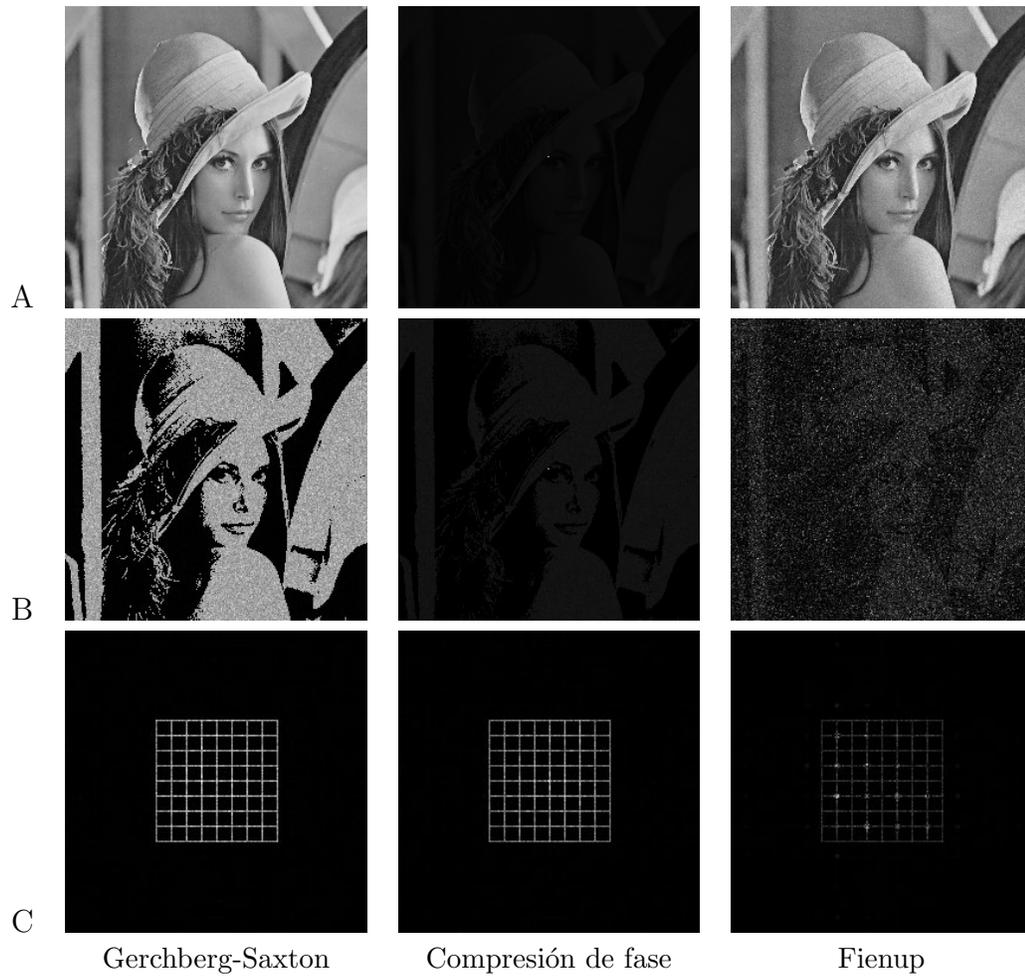


Figura 4.13: Reconstrucción teórica de los patrones de prueba

Los resultados de las reconstrucciones para los patrones D-F se muestran en la figura 4.14. El patrón D por el método FU es el más pobremente difractado, sin embargo E-F presentan resultados satisfactorios.

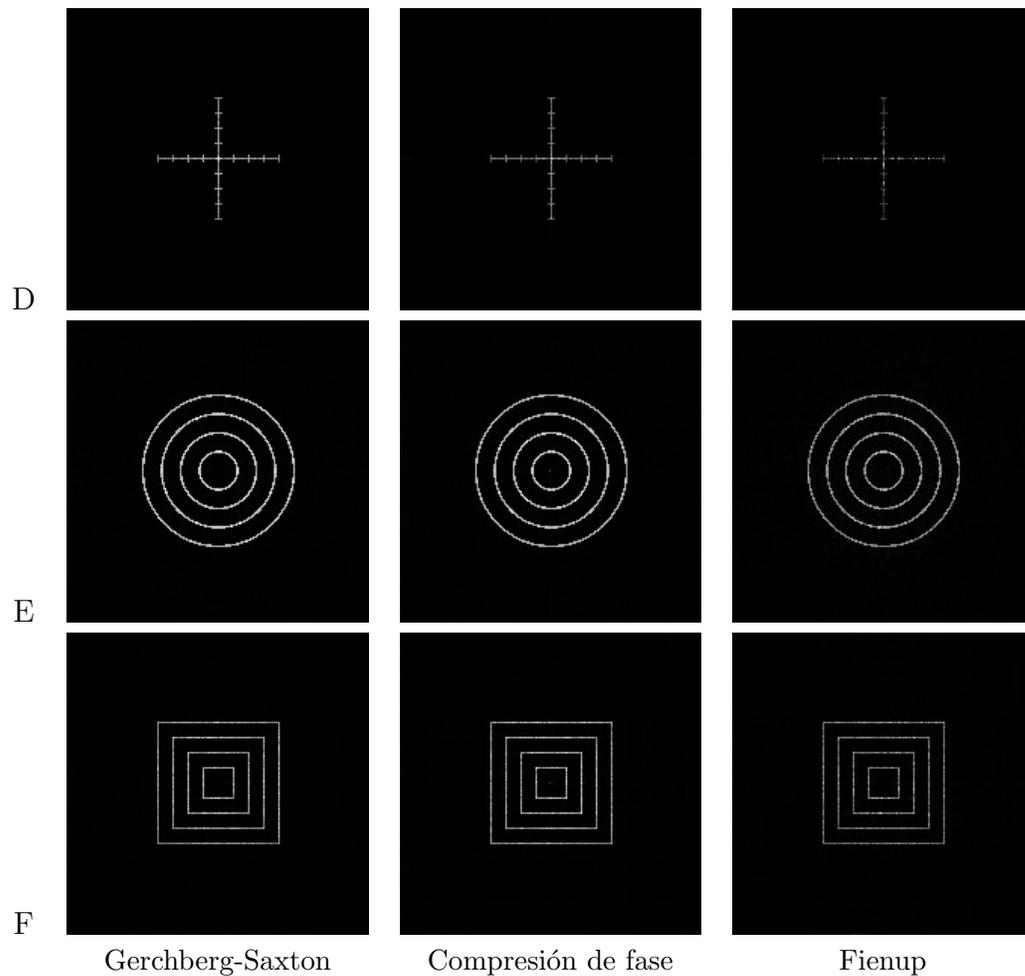


Figura 4.14: Reconstrucción teórica de los patrones de prueba

Finalmente se han determinado cuales fueron las mejores eficiencias de difracción con relación a las diferentes funciones de error, los resultados se concentran en la figura 4.15. La mayor parte de las difracciones son mejor evaluadas a través de las métricas 1 y 3 independientemente del patrón, de los 18 ensayos (3 algoritmos con 6 patrones de prueba) solamente uno fue mejor evaluado con la séptima función de error (divergencia de Kullback-Leibler). Es importante destacar que la diferencia en el PSNR encontrado por las métricas de orden p son muy similares, en especial la de orden 2 y el orden fraccional 0.98.

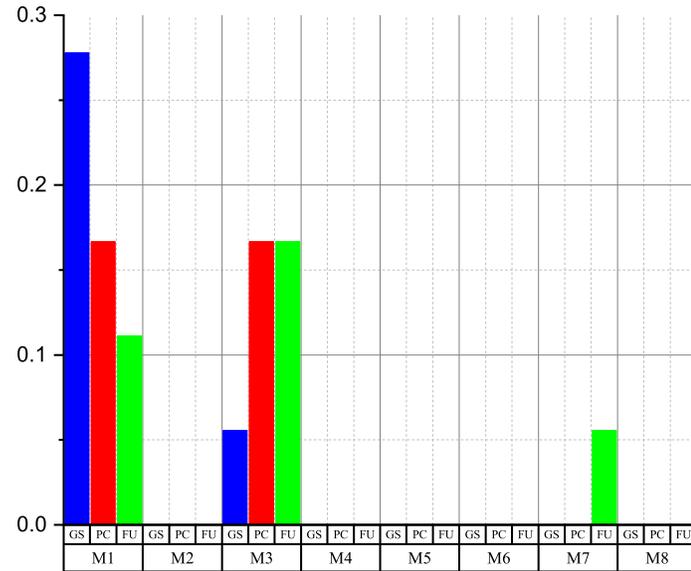


Figura 4.15: Comparativa frecuencia de mejores resultados

Las figuras 4.16-17 muestran las máscaras de fase (PM) correspondientes a la mejor solución encontrada para cada método/patrón. Las tonalidades de oscuras-claras corresponden a un cambio de fase entre $[0, 2\pi]$ estas máscaras tienen las mismas dimensiones que los patrones 256 px para los casos A, B y 200 px para el resto.

El modulador espacial de luz (*SLM*) que se empleará para reconstruir los patrones tiene una resolución de 800x600 píxeles, la máscara de fase empleada en la etapa experimental se obtendrá repitiendo las *PM* en las direcciones vertical y horizontal hasta cubrir todo el *SLM*.

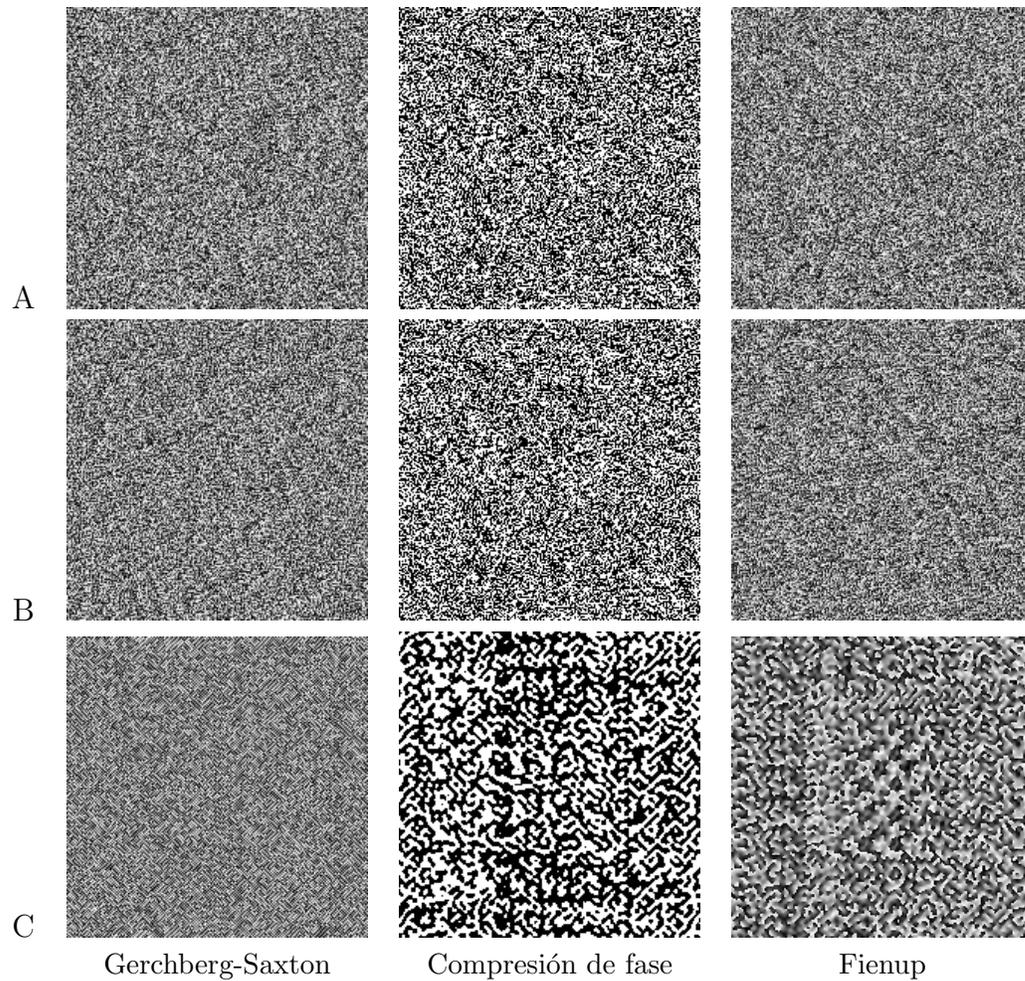


Figura 4.16: Máscara de fase obtenida por patrón

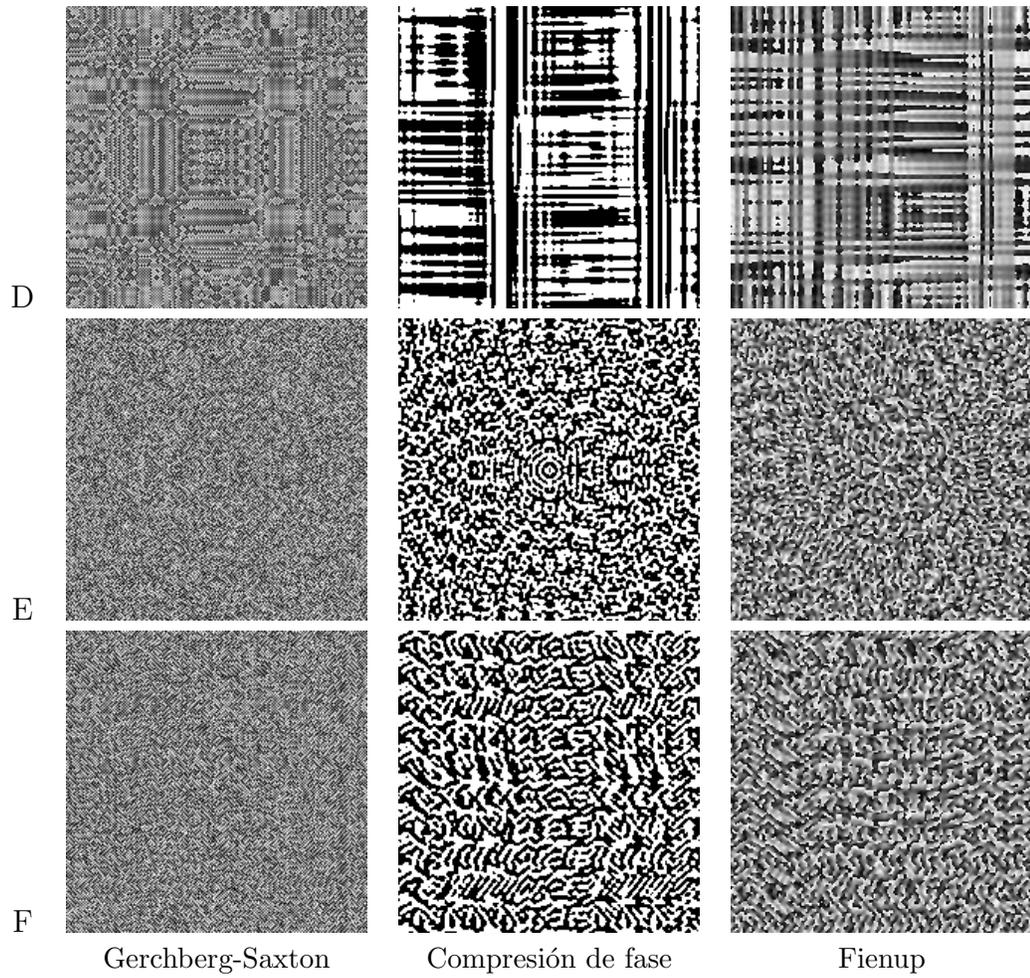


Figura 4.17: Máscara de fase obtenida por patrón

4.3 Estimación de la matriz de Jones para el SLM

La ecuación 3.14 expresa la matriz de Jones en términos de los parámetros f, g, h, j . En la ecuación 3.16 encontraremos la función de transmisión de un sistema óptico con dos polarizadores a la entrada y salida del SLM. Asumiendo que los ángulos son iguales, pero pueden moverse ya sea en el mismo sentido, o bien en sentidos opuestos, obtenemos dos funciones de transmisión para secuencias positivas y negativas cuyo resultados son:

$$\begin{aligned} T(\theta_1, \theta_1) &= f^2 + (g \cdot \cos(2\theta_1) + j \cdot \sin(2\theta_1))^2 \\ T(\theta_1, -\theta_1) &= g^2 + (f \cdot \cos(2\theta_1) + h \cdot \sin(2\theta_1))^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Una vez montado el arreglo de la figura 3.3 se procedió a medir la intensidad para un intervalo de 0 a 180 grados con incrementos de 10 grados, para secuencias positivas (misma dirección) y negativas (direcciones opuestas). Para poder encontrar una medición normalizada adicionalmente es necesario medir la intensidad en una dirección perpendicular del analizador, la suma de estas intensidades corresponde a la intensidad máxima en la dirección del polarizador de entrada. Existe una incertidumbre de medición debido a que los soportes de los polarizadores son mecánicos.

Las ecuaciones 4.3 pueden ser llevadas a la forma:

$$T^\pm(\theta) = C_1^\pm + C_2^\pm \sin(4\theta + \Phi^\pm) \quad (4.4)$$

Donde la notación \pm se usa para denotar secuencias positivas (θ_1, θ_1) o negativas $(\theta_1, -\theta_1)$. En relación a la ecuación anterior los parámetros de Jones se pueden determinar como

$$\begin{aligned} f^+ &= \pm \sqrt{C_1^+ - C_2^+} & g^- &= \pm \sqrt{C_1^- - C_2^-} \\ g^+ &= \pm \sqrt{2C_2^+ \sin(\Phi^+)} & f^- &= \pm \sqrt{2C_2^- \sin(\Phi^-)} \\ j^+ &= \pm \sqrt{2C_2^+ \cos(\Phi^+)} & h^- &= \pm \sqrt{2C_2^- \cos(\Phi^-)} \\ h^+ &= \pm \sqrt{1 - f^{+2} - g^{+2} - j^{+2}} & j^- &= \pm \sqrt{1 - f^{-2} - g^{-2} - h^{-2}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Para determinar los valores de las constantes C_1^\pm, C_2^\pm y Φ^\pm que modelen de forma óptima la ecuación 4.4 para ambos casos se empleó el método de Levenberg-Marquardt. Los valores encontrados mediante la regresión no lineal están en la tabla 4.1.

	C_1	C_2	Φ	RMSE
θ^+	0.3744	0.0634	1.3251	0.0126
θ^-	0.5559	0.4366	2.502	0.0081

Table 4.1: Resultados de la regresión de Levenberg-Marquardt

En la figura 4.18 se aprecian los datos recolectados, los puntos azules pertenecen a las mediciones para la secuencia negativa y los negros a las positivas. Además se muestran mediante líneas punteadas los comportamientos modelados.

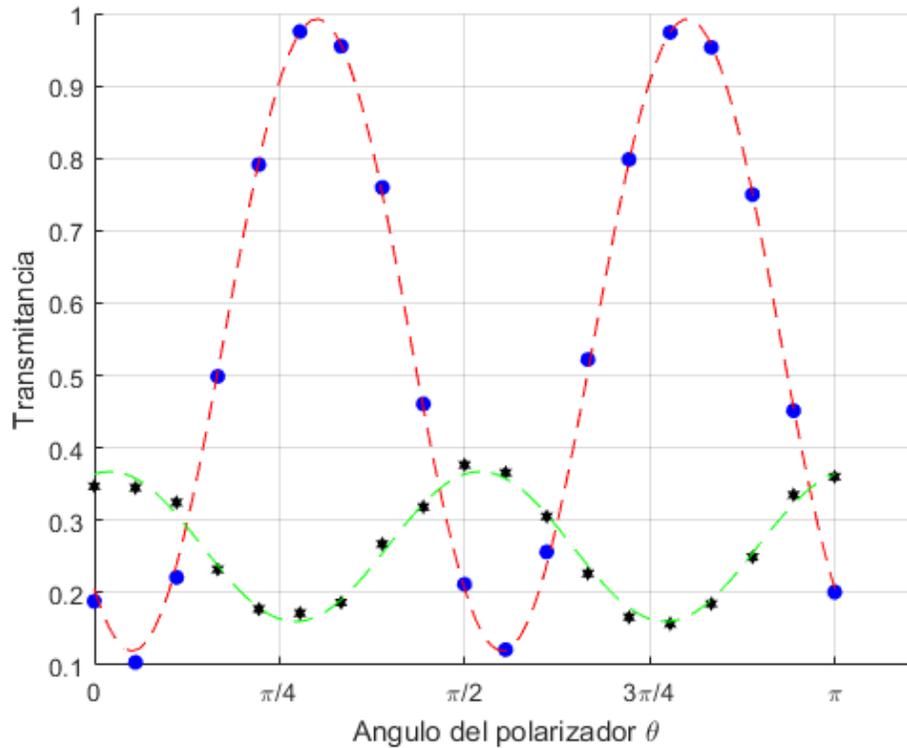


Figura 4.18: Transmitancia del sistema con el SLM apagado

Usando los valores hallados durante la regresión y las ecuaciones 4.5 es posible determinar el valor de los parámetros de Jones, en el caso ideal la solución para ambas secuencias debe de ser la misma, se presentan los resultados, el valor medio y la banda de error en la tabla 4.2.

	f	g	j	h
θ^+	0.5310	0.3234	0.0825	0.7322
θ^-	0.5577	0.3454	0.0866	0.7497
θ	0.54435 ± 0.0077	0.3344 ± 0.0064	0.0846 ± 0.0012	0.741 ± 0.0051

Table 4.2: Parámetros de Jones estimados

El ángulo α puede obtenerse de las ecuaciones para los parámetros f y h de la ec. 3.15 se puede deducir que

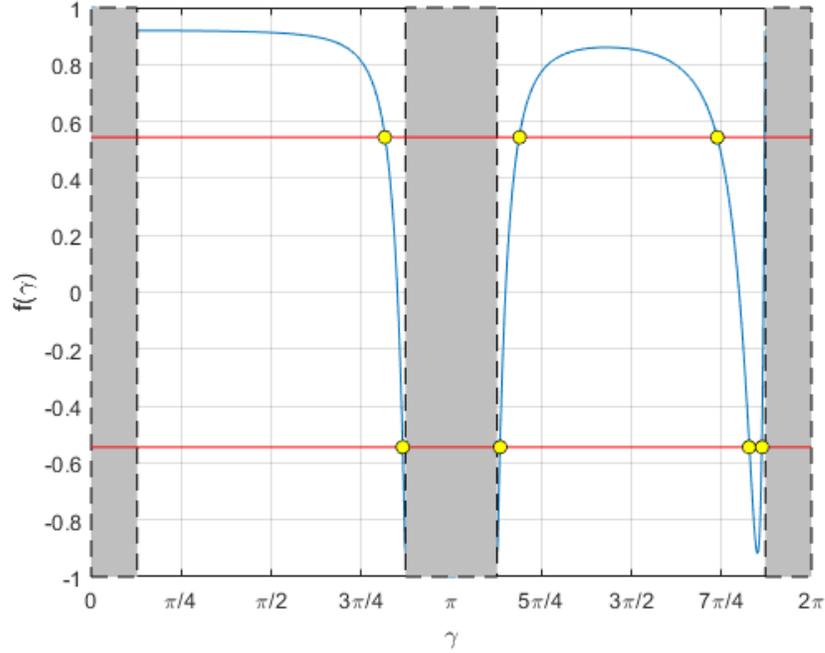
$$|\alpha| = \gamma \sqrt{\frac{f^2 + h^2 - \cos^2(\gamma)}{\sin^2(\gamma)}} \quad (4.6)$$

Y reemplazando esta en el parámetro f se obtiene

$$f(\gamma) = \sqrt{\frac{f^2 + h^2 - \cos^2(\gamma)}{\sin^2(\gamma)}} \sin(\gamma) \sin\left(\gamma \sqrt{\frac{f^2 + h^2 - \cos^2(\gamma)}{\sin^2(\gamma)}}\right) + \cos(\gamma) \cos\left(\gamma \sqrt{\frac{f^2 + h^2 - \cos^2(\gamma)}{\sin^2(\gamma)}}\right) \quad (4.7)$$

La figura 4.19 muestra las soluciones analíticas para la ecuación anterior. Las zonas en gris representan las regiones donde no existe solución real para $f(\gamma)$. En el artículo “Origin and characteristics of ambiguous properties in measuring physical parameters of twisted nematic liquid crystal spatial light modulators” [24] los autores prueban matemáticamente las ambigüedades que se originan durante el cálculo de los parámetros físicos del TNLCD y hablan de sus orígenes.

Las ecuaciones que rigen la transmitancia de un arreglo de Polarizador-LCD-Analizador según Kanghua et al [25] son:

Figura 4.19: Valores de $f(\gamma)$ -f

$$T_{crossed} = \mathcal{L} \left\{ \left[\sin(\alpha)\cos(\gamma) - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\cos(\alpha)\sin(\gamma) \right]^2 + \left[\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)\sin(\gamma)\sin(\alpha + 2\psi_D - 2\theta_1) \right]^2 \right\} \quad (4.8)$$

$$T_{parallel} = \mathcal{L} \left\{ \left[\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\sin(\alpha)\sin(\gamma) \right]^2 + \left[\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)\sin(\gamma)\cos(\alpha + 2\psi_D - 2\theta_1) \right]^2 \right\} \quad (4.9)$$

Los valores mínimos para estas configuraciones pueden ser determinados a través de los datos del modelo para secuencias positivas encontrado ante-

riormente. El valor mínimo que puede tomar la ecuación 4.6 sucede para:

$$\alpha + 2\psi_D - 2\theta_1 = 0 \quad (4.10)$$

Además usando las ecuaciones 3.15 que relacionan los parámetros de Jones con los parámetros físicos del SLM es posible determinar que:

$$\tan(2\psi_D - \alpha) = \frac{j}{g} \quad (4.11)$$

Empleando las ecuaciones anteriores resulta simple probar que

$$\tan(2\alpha) = \tan(2\theta_1 - (2\psi_D - \alpha)) \quad (4.12)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{\tan(2\theta_1) - \tan(2\psi_D - \alpha)}{1 + \tan(2\theta_1)\tan((2\psi_D - \alpha))}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{g \cdot \tan(2\theta_1) - j}{g + j \cdot \tan(2\theta_1)}$$

En donde θ_1 corresponde a el ángulo de los polarizadores y α es el ángulo total de rotación del eje extraordinario en torno al eje z . La figura 4.20 muestra las soluciones analíticas de la ecuación 4.10 para α .

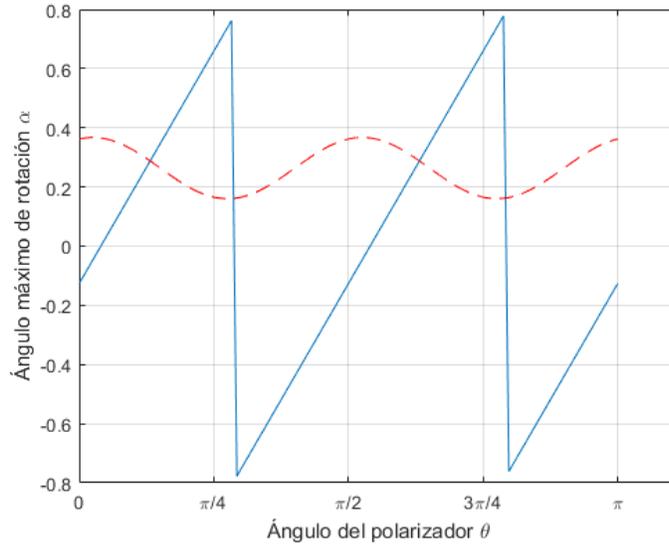


Figura 4.20: Soluciones para $\alpha(\theta_1)$

Una vez determinado el ángulo α las constantes γ y β pueden ser halladas usando:

$$f = \cos\gamma \cdot \cos\alpha + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \sin\gamma \cdot \sin\alpha$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$
(4.13)

El valor de γ fue calculado de forma numérica, la gráfica 4.21 muestra el valor de $f(\gamma) - f$ una vez obtenido es posible determinar el valor de la birrefringencia local β . La solución encontrada para γ coincide con una de las soluciones

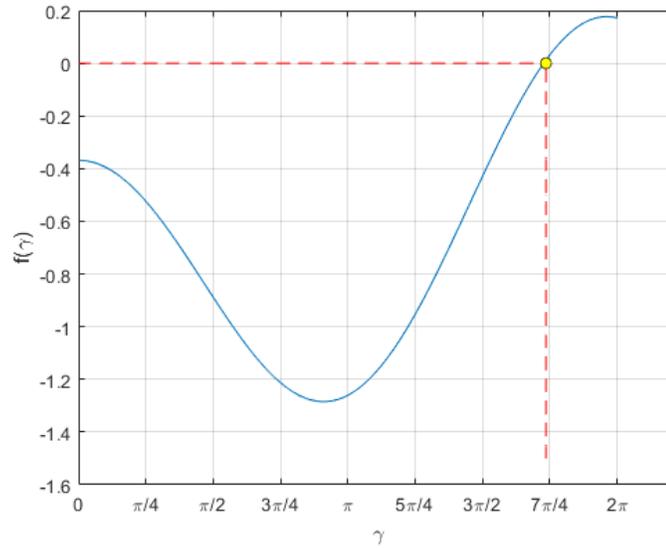


Figura 4.21: Soluciones para $f(\gamma)$

analíticas dando certeza de que ese es el parámetro físico buscado. La tabla 4.3 concentra los resultados obtenidos

α	γ	β_{max}	ψ
0.7763	5.453	5.397	0.5149

Table 4.3: Parámetros físicos del SLM

La birrefringencia $beta$ es una función del voltaje aplicado a cada pixel del TNLCD, unicamente con mediciones de intensidad no es posible encontrar

una relación directa entre el voltaje aplicado a la celda (o intensidad en escala de grises) y la birrefringencia(β), por lo que se ha realizado un barrido en secuencias positivas y negativas variando la intensidad de 0 a 255 con incrementos de 32 unidades de intensidad.

Los resultados experimentales se pueden observar en las gráficas 4.22 para secuencia negativa y 4.23 para la positiva. A través de regresiones no lineales fue posible determinar que en ángulo donde se genera mayor diferencia de transmitancia es a 53.4 deg en una secuencia negativa, este será el ángulo ideal para realizar la reconstrucción de fase.

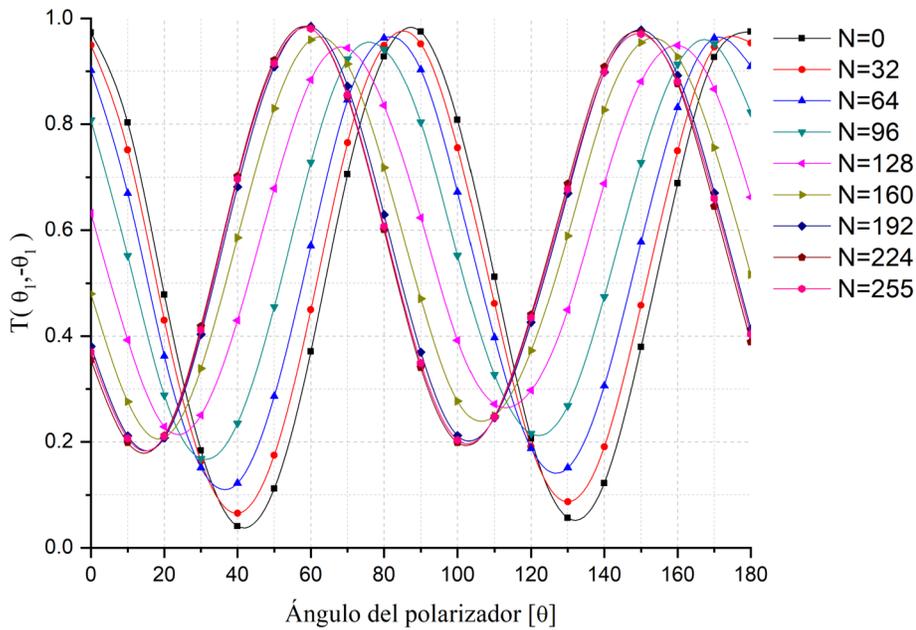


Figura 4.22

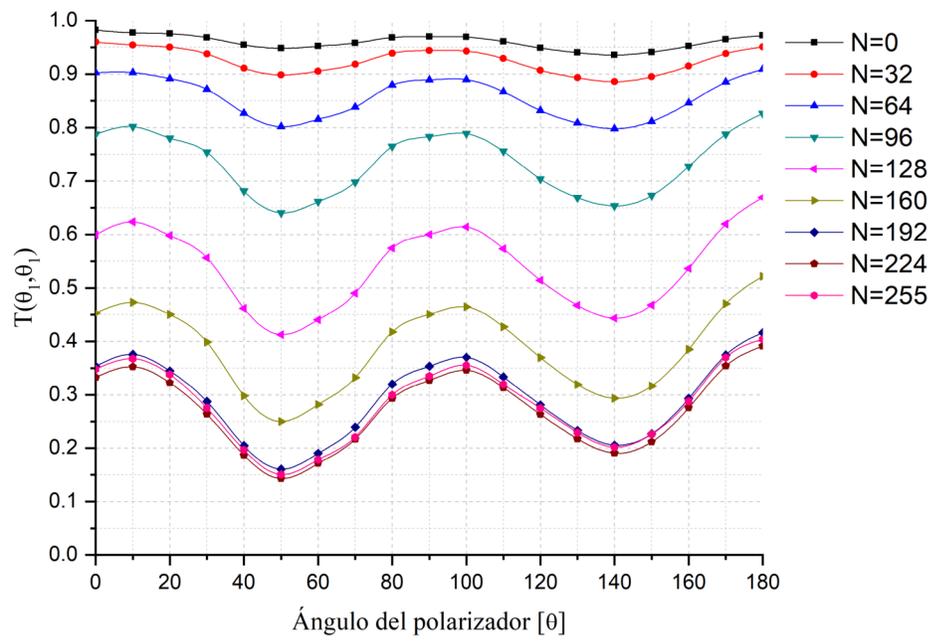


Figura 4.23

Capítulo 5

Conclusiones

La propuesta de unificación de los métodos de Gerchberg-Saxton, compresión de Fase y Fienup fué exitosa, se logró una implementación que concentrara sus funciones de actualización y restricciones en el dominio de Fourier, además se deja abierta la opción de poder modificar la función de propagación y contra-propagación. Los algoritmos que se basan en teoría de difracción escalar generan buenos resultados teóricos, sin embargo la puesta en marcha empleando componentes optoelectrónicos requiere de un modelado que sea capaz de tomar en cuenta el estado de polarización del haz de entrada.

La evaluación del error a través de diferentes métricas y pseudométricas reveló interesantes resultados, para el caso de la normal-p fraccional (NPF) como función de error, una vez normalizado en amplitud, se observó un comportamiento similar a la norma 2 para valores de γ cercanos a la unidad. El método convencional de medición de error para los algoritmos de recuperación de fase es la norma 2, porque existe una relación física entre ella y el fenómeno, puesto que el cuadrado del campo eléctrico es proporcional a la intensidad, sin embargo es posible intercambiarlo por la NPF y obtener resultados similares.

El modulador empleado (LC2002) a pesar de tener una baja resolución y una baja capacidad de modulación es capaz de manipular la fase y generar reconstrucciones para patrones monocromáticos con una buena calidad. En el caso de las imágenes con diferentes niveles de intensidad el modulador no fue capaz de lograr una reconstrucción, esto se le atribuye a la necesidad de una mayor amplitud de modulación de fase, en los experimentos realizados se encontró que la mayor inclinación posible del eje extraordinario es de 0.773 rad .

La presencia de estados de polarización elípticos revela la incapacidad del modulador para realizar una modulación de fase completa. Esto puede ser fácilmente comprobado observando las gráficas 4.22 y 4.23 donde se muestran que no existe un valor de orientación del polarizador de entrada que sea capaz de lograr una transición de la transmitancia mínima a la máxima para los diferentes niveles de intensidad (N).

Finalmente, las implementaciones de los algoritmos y métricas de error pueden ser usadas desde una GUI que interactúa a través de una interfaz VGA con el SLM LC2002, para su ejecución es necesario contar con Python y PyQt5. La interfaz cuenta con las opciones más comunes para manipular las máscaras encontradas durante la recuperación de fase. Aunque el programa puede usar como señal objetivo una imagen de cualquier tamaño se recomienda no exceder la resolución de 256x256 recomendada por el fabricante del modulador.

Como función adicional a diferencia el software del fabricante “HOLOEYE SLM Application Software”, el aquí presentado puede crear un archivo STL de la máscara de fase calculada, las dimensiones son las mismas que las del área efectiva del modulador (21x26 mm), la altura de cada pixel está determinada por el material del cual será construido, el índice de refracción del material es usado para calcularlo, asumiendo que éste no presenta comportamientos no lineales.

Capítulo 6

Anexos

6.1 Comparativas de Error, Algoritmo Gerchberg-Saxton

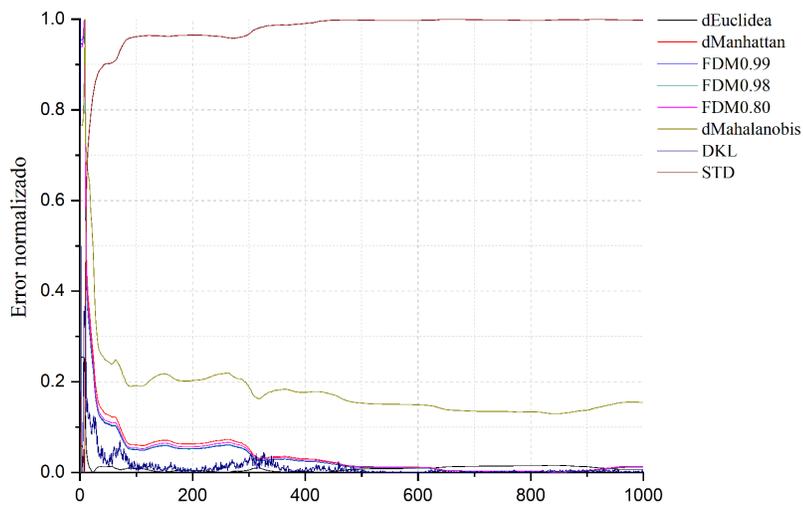


Figura 6.1: Comparativa de error para el patrón COORD

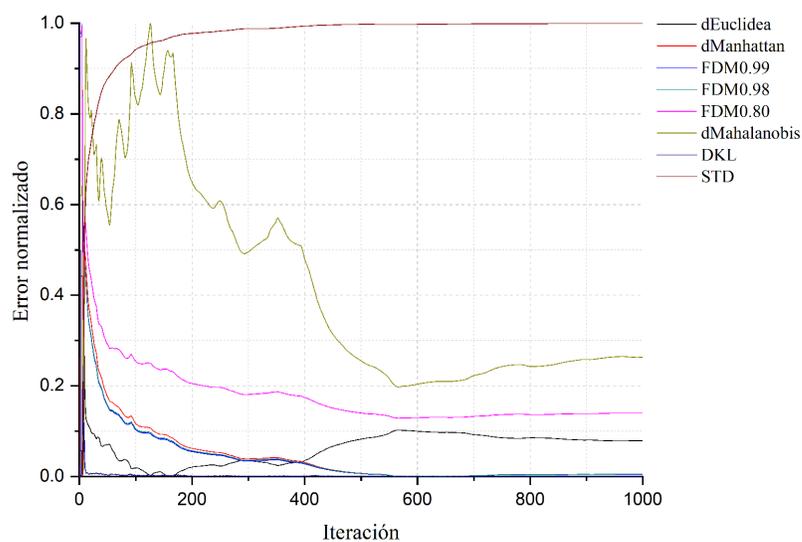


Figura 6.2: Comparativa de error para el patrón GRID

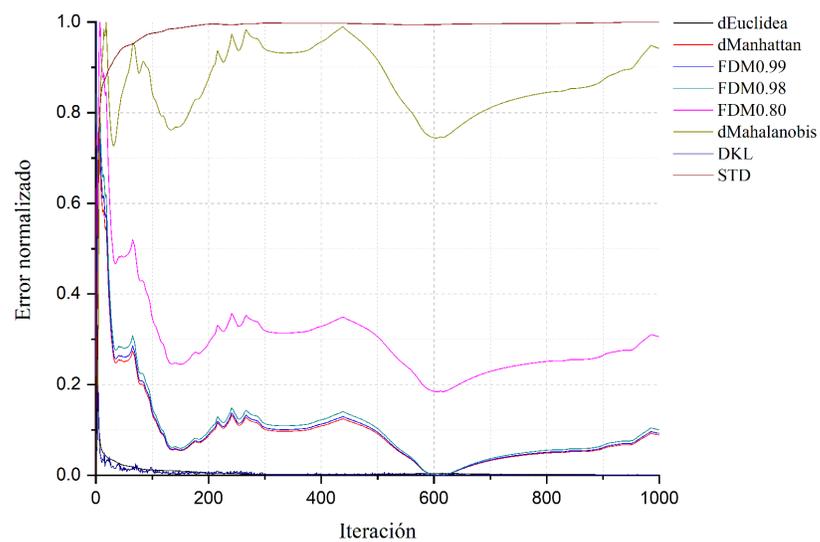


Figura 6.3: Comparativa de error para el patrón RINGS

6.1. COMPARATIVAS DE ERROR, ALGORITMO GERCHBERG-SAXTON65

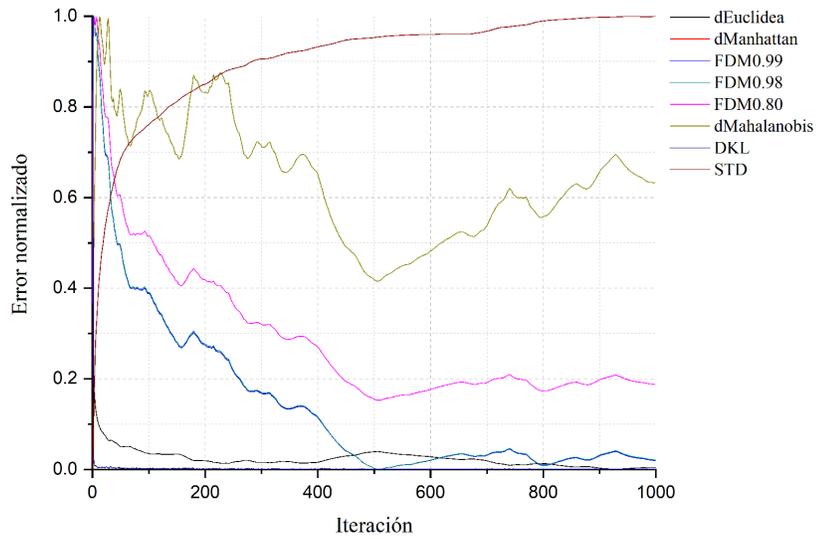


Figura 6.4: Comparativa de error para el patrón SQUARES

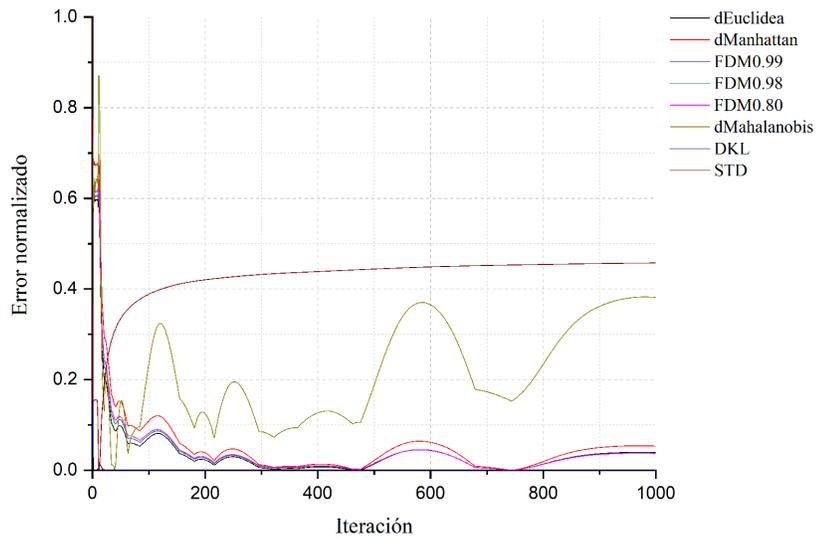


Figura 6.5: Comparativa de error para el patrón LEENA

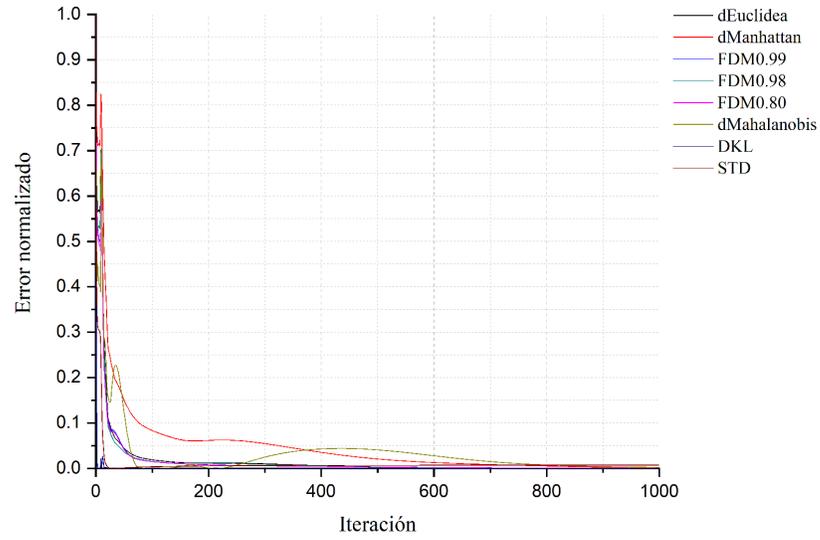


Figura 6.6: Comparativa de error para el patrón LEENA256

6.2 Comparativas de Error, Algoritmo Compresión de Fase

6.2. COMPARATIVAS DE ERROR, ALGORITMO COMPRESIÓN DE FASE67

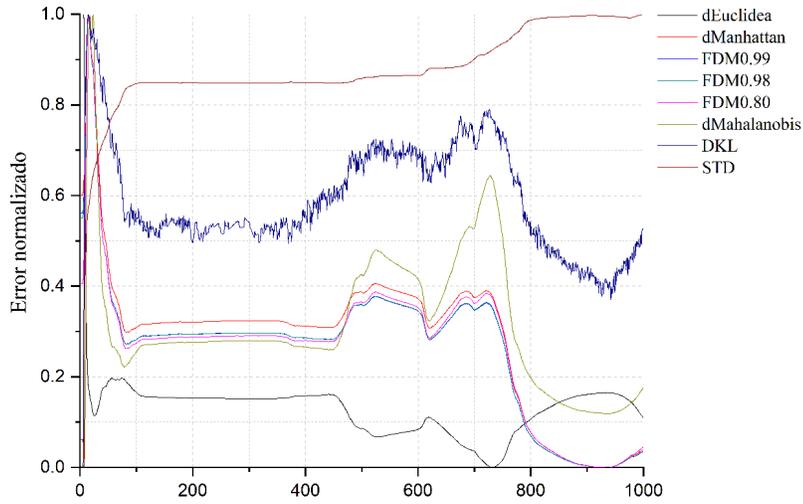


Figura 6.7: Comparativa de error para el patrón COORD

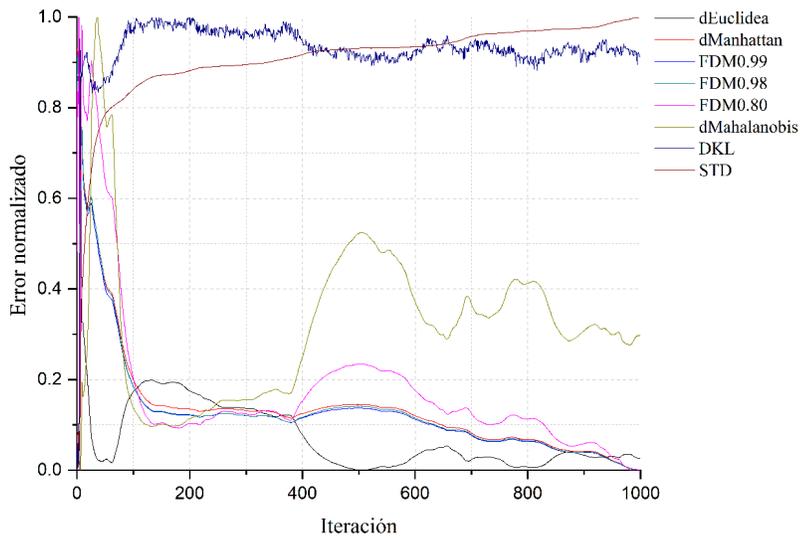


Figura 6.8: Comparativa de error para el patrón GRID

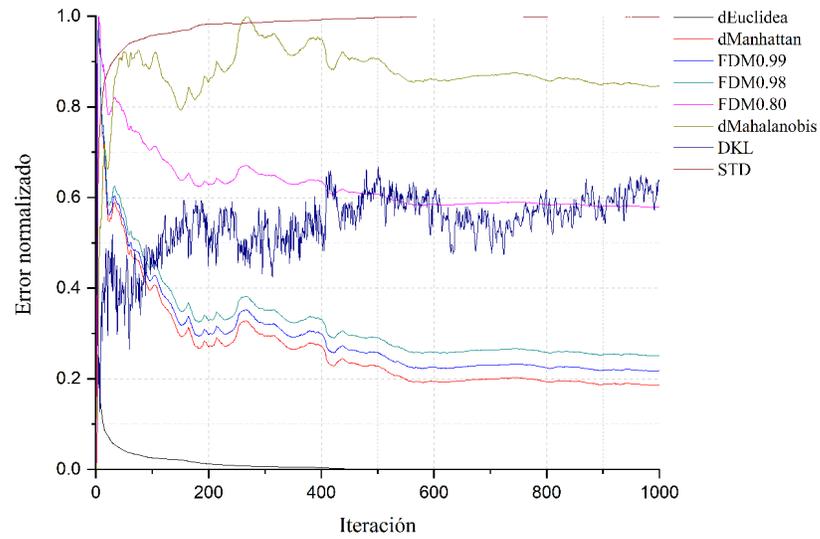


Figura 6.9: Comparativa de error para el patrón RINGS

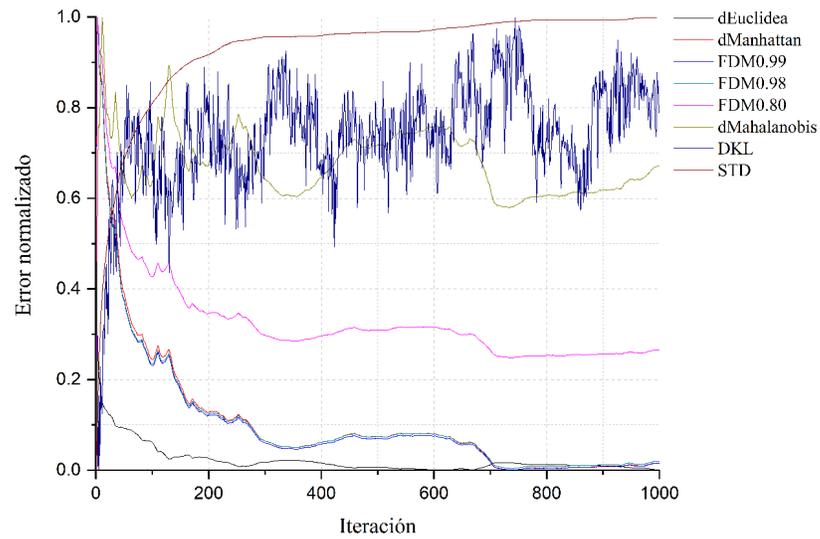


Figura 6.10: Comparativa de error para el patrón SQUARES

6.2. COMPARATIVAS DE ERROR, ALGORITMO COMPRESIÓN DE FASE69

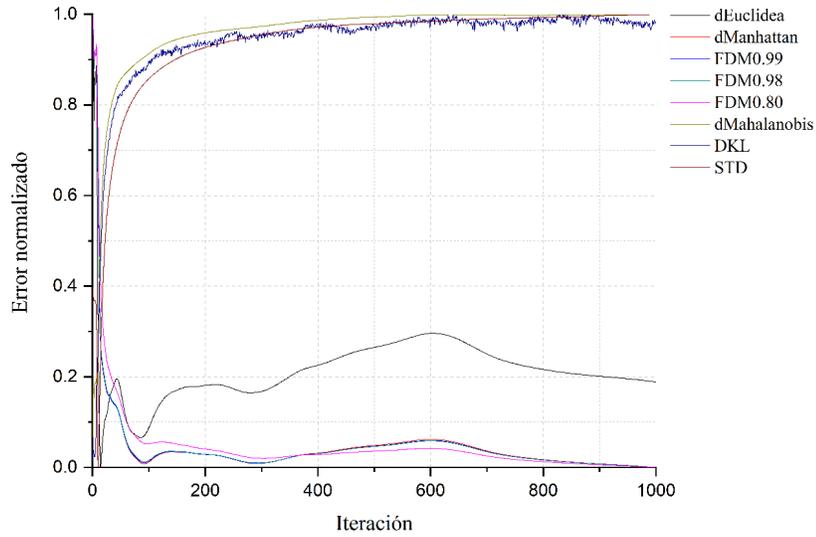


Figura 6.11: Comparativa de error para el patrón LEENA

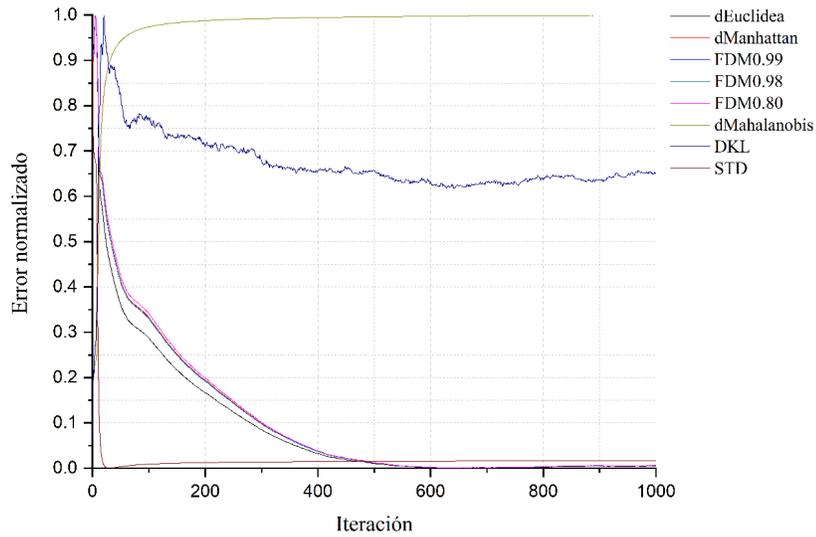


Figura 6.12: Comparativa de error para el patrón LEENA256

6.3 Comparativas de Error, Algoritmo de FienUp

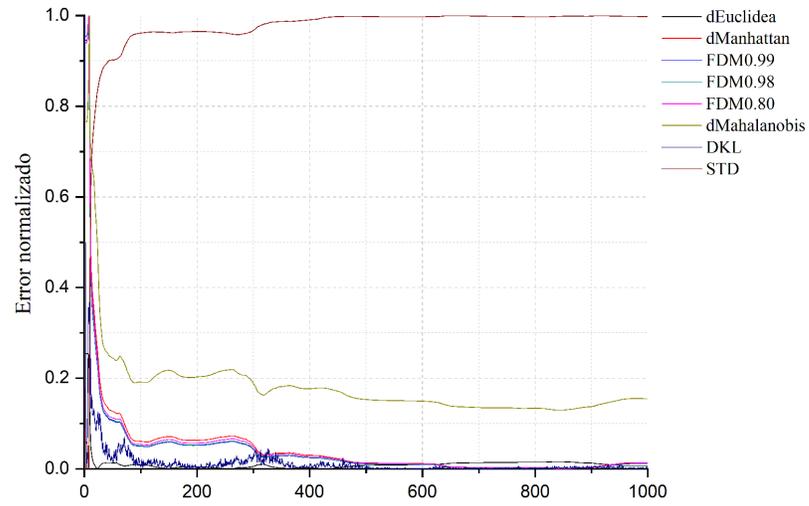


Figura 6.13: Comparativa de error para el patrón COORD

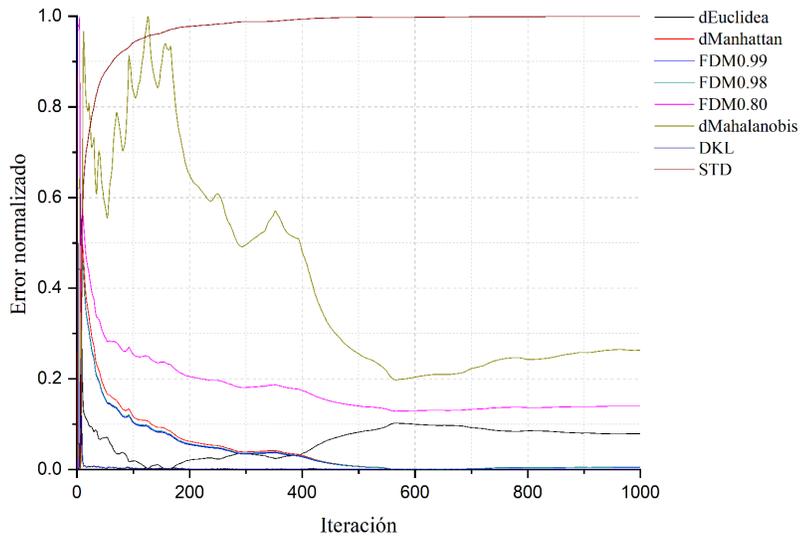


Figura 6.14: Comparativa de error para el patrón GRID

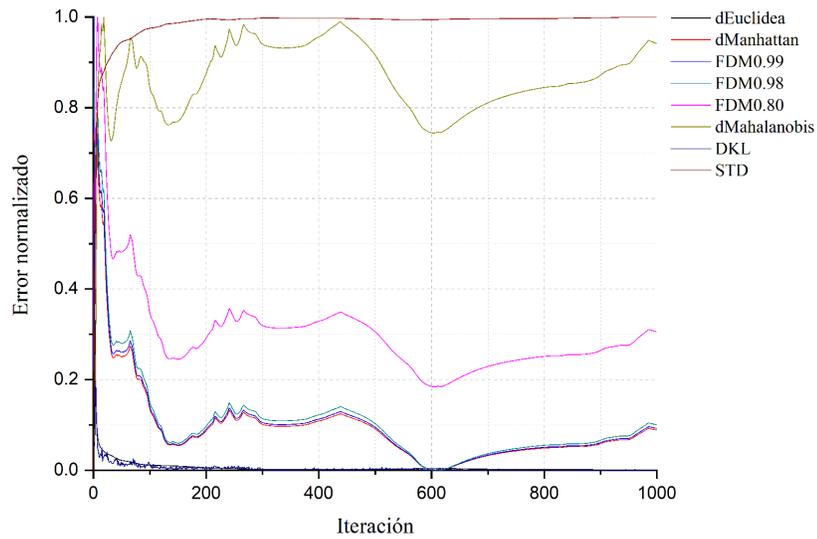


Figura 6.15: Comparativa de error para el patrón RINGS

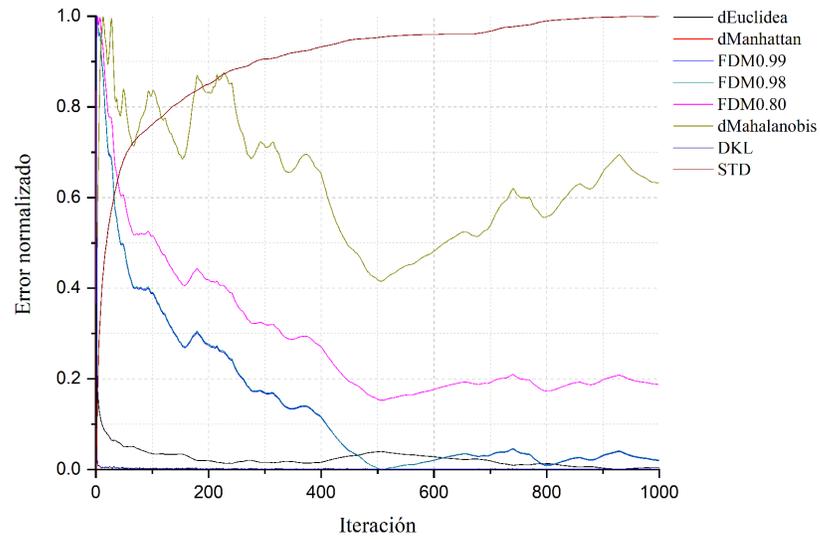


Figura 6.16: Comparativa de error para el patrón SQUARES

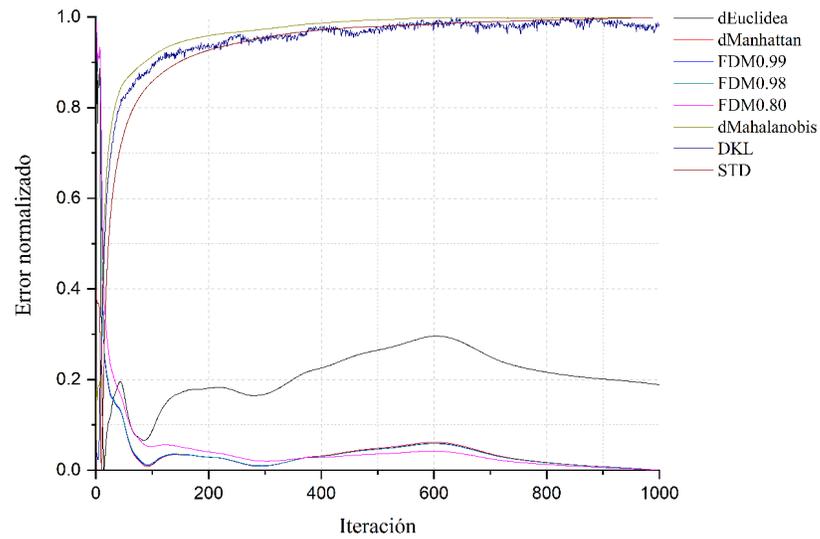


Figura 6.17: Comparativa de error para el patrón LEENA

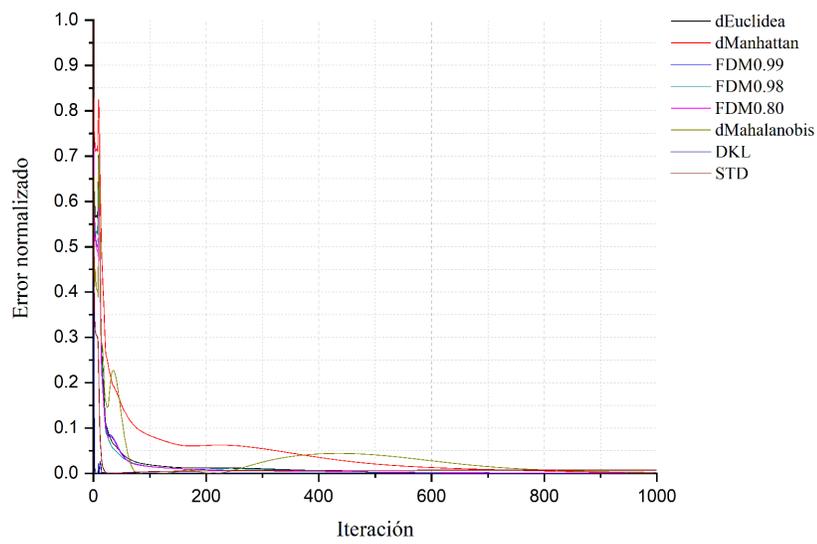


Figura 6.18: Comparativa de error para el patrón LEENA256

Bibliografía

- [1] Hiroshi Yoshikawa. Fast computation of Fresnel holograms employing difference. *Optical Review*, 2001.
- [2] Gang Bao, Tao Cui, and Peijun Li. Inverse diffraction grating of Maxwell's equations in biperiodic structures. *Optics Express*, 22(4):4799, 2014.
- [3] R W Gerchberg and W O Saxton. A Practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures. Technical Report 2, 1969.
- [4] R. a. Gonsalves. Phase retrieval from modulus data. *Journal of the Optical Society of America*, 1976.
- [5] J. R. Fienup. Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform. *Optics Letters*, 1978.
- [6] Robert A. Gonsalves. Phase Retrieval And Diversity In Adaptive Optics. *Optical Engineering*, 1982.
- [7] J. R. Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison. *Applied Optics*, 1982.
- [8] P. D. Gianino and C. L. Woods. Effects of spatial light modulator opaque dead zones on optical correlation. *Applied Optics*, 1992.
- [9] Jack R. Kelly Hidefumi Yoshida. Light Behavior Analisis of Twisted Nematic Liquid Cristal Display. *Appl. Phys.*, 36:2116–2127, 1997.
- [10] Juan Campos and Josep Nicola. Phase and amplitude modulation of elliptic polarization states by nonabsorbing anisotropic elements: application to liquid-crystal devices. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(5):1013–1020, 2002.

- [11] José Luis Martínez, Ignacio Moreno, J A Davis, Travis J Hernandez, and Kevin P McAuley. Extended phase modulation depth in twisted nematic liquid crystal displays. *Applied optics*, 49(30):5929–37, 2010.
- [12] Pasquale Memmolo, Lisa Miccio, Francesco Merola, Antonio Paciello, Valerio Embrione, Sabato Fusco, Pietro Ferraro, and Paolo Antonio Netti. Investigation on specific solutions of Gerchberg-Saxton algorithm. *Optics and Lasers in Engineering*, 2014.
- [13] M. A. Fiddy and U. Shahid. Legacies of the Gerchberg-Saxton algorithm. *Ultramicroscopy*, 2013.
- [14] Haichao Wang, Weirui Yue, Qiang Song, Jingdan Liu, and Guohai Situ. A hybrid Gerchberg–Saxton-like algorithm for DOE and CGH calculation. *Optics and Lasers in Engineering*, 2016.
- [15] Mi Wang, Liangjia Zong, Lei Mao, Andres Marquez, Yabin Ye, Han Zhao, and Francisco Vaquero Caballero. LCoS SLM Study and Its Application in Wavelength Selective Switch. *Photonics*, 2017.
- [16] Parker Kuhl and Okan K. Ersoy. Design of diffractive optical elements: Optimality, scale and nearfield diffraction considerations. Technical report, Purdue University, 01 2003.
- [17] Guo-zhen Yang, Bi-zhen Dong, Ben-yuan Gu, Jie-yao Zhuang, and Okan K. Ersoy. Gerchberg–Saxton and Yang–Gu algorithms for phase retrieval in a nonunitary transform system: a comparison. *Applied Optics*, 1994.
- [18] Jin-Fa Lee Paul H. Aoyai and Raj Mittra. A hybrid yee algorithm/scalar wave equation approach. *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES*, 41(9), 1993.
- [19] Wei-Shuo Li, Chun-Wei Chen, Kuo-Feng Lin, Hou-Ren Chen, Chih-Ya Tsai, Chyong-Hua Chen, and Wen-Feng Hsieh. Phase retrieval by using the transport-of-intensity equation with hilbert transform. *Opt. Lett.*, 41(7):1616–1619, Apr 2016.
- [20] Charu C. Aggarwal, Alexander Hinneburg, and Daniel A. Keim. On the surprising behavior of distance metrics in high dimensional space. In Jan Van den Bussche and Victor Vianu, editors, *Database Theory* —

- ICDT 2001*, pages 420–434, Berlin, Heidelberg, 2001. Springer Berlin Heidelberg.
- [21] James M. Joyce. *Kullback-Leibler Divergence*, pages 720–722. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [22] E. Katz and Y. Bar-Ness. Comparison of snr and peak-snr (psnr) as performance measures and signals for peak-limited two-dimensional (2d) pixelated optical wireless communication. In *2014 48th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pages 1880–1884, Nov 2014.
- [23] Hiroshi Yoshikawa and Takeshi Yamaguchi. Image quality evaluation of a computer-generated hologram. In *Digital Holography & 3-D Imaging Meeting*, page DT2A.8. Optical Society of America, 2015.
- [24] Makoto Yamauchi. Origin and characteristics of ambiguous properties in measuring physical parameters of twisted nematic liquid crystal spatial light modulators. *Optical Engineering*, 41(5):1134 – 1141 – 8, 2002.
- [25] Kanghua Lu Colin Soutar. Determination of the physical properties of an arbitrary twisted-nematic liquid crystal cell. *Optical Engineering*, 33:33 – 33 – 9, 1994.