



**Asunto:** Notificación de Dictamen de Propuesta de Tesis

**C. Guzmán Cano Miguel Cipriano**  
Estudiante del Maestría en ingeniería eléctrica  
**PRESENTE.**

Una vez concluido el análisis y discusión sobre la propuesta del proyecto de tesis titulada: "**Sensores de correlación digital para alineación angular**", bajo la revisión del *Asesor(es): OJEDA CASTAÑEDA Jorge, Dr. y LEDESMA CARRILLO Luis Manuel Dr.* en su reunión ordinaria del semestre ENERO- ABRIL 2018 el Comité Doctoral del Posgrado en Maestría en Ingeniería Eléctrica acordó la siguiente resolución:

Con fundamento en las fracciones primera a cuarta del Artículo 67 y el Artículo 68 del Estatuto Académico, este comité acordó **POR UNANIMIDAD DE VOTOS ACEPTAR SU PROPUESTA DE TESIS** designando el siguiente jurado:

**Presidente:** TORRES CISNEROS Miguel, Dr.  
**Secretario:** OJEDA CASTAÑEDA Jorge, Dr.  
**Vocal 1:** ALMANZA OJEDA Dora Luz, Dra.

Se extiende la presente notificación de la resolución el 16 de marzo de 2018

**ATENTAMENTE**  
**"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"**  
**EL DIRECTOR**

  
Dr. Víctor Ayala Ramírez



**UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO**  
Campus Irapuato - Salamanca  
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

c.c.p. Dra. Rocío Alfonsina Lizárraga Morales – Secretaria Académica de la División de Ingeniería

Llenar en computadora con ayuda del oficio de modalidad.

La modalidad de tesis es única para los posgrados

| Nivel:       |   |
|--------------|---|
| Licenciatura |   |
| Maestría     | X |
| Doctorado    |   |

Marcar con una X

|                   |       |
|-------------------|-------|
| <b>Modalidad:</b> | Tesis |
|-------------------|-------|

|             |      |
|-------------|------|
| <b>Año:</b> | 2019 |
|-------------|------|

Poner el número de año p.e. 2015

### Información sobre Obtención de Grado Académico:

|                 |   |
|-----------------|---|
| <b>Nombre</b>   | Miguel Cipriano Guzmán Cano   |
| <b>NUA</b>      | 736997  |
| <b>Programa</b> | Maestría en Ingeniería Eléctrica (Instrumentación y Sistemas Digitales) |

Para modalidades con Jurado completar la siguiente información:

### Lugar, hora y fecha de la presentación

|              |                      |  |
|--------------|----------------------|--|
| <b>Lugar</b> | Auditorio 1          |  |
| <b>Hora</b>  | 12:00 horas          |  |
| <b>Fecha</b> | Miércoles 22 de mayo |  |

|                           |   |
|---------------------------|---|
| <b>Título del trabajo</b> | Sensores de correlación digital para alineación angular |
|---------------------------|---|

### Jurado

|                            |   |   |
|----------------------------|---|---|
|                            | Nombre con grado académico completo:<br>p.e. Doctor en Informática Industrial<br>Nombre Apellido Paterno Apellido Materno | Firma de autorización para<br>realización de examen de grado o<br>titulación. |
| <b>Presidente</b>          | Doctor en Ciencias<br>Miguel Torres Cisneros  |   |
| <b>Secretario</b>          | Doctor of Philosophy<br>Dr. Jorge Ojeda Castañeda   |   |
| <b>Vocal (1)</b>           | Doctor en Sistemas Informáticos y Sistemas Integrados<br>Dra. Dora Luz Almanza Ojeda                                      |   |
| <b>Vocal 2 (Doctorado)</b> |   |   |
| <b>Vocal 3 (Doctorado)</b> |   |   |

### Asesoría

|                             |                                  |
|-----------------------------|----------------------------------|
| <b>Director del trabajo</b> | Dr. Jorge Ojeda Castañeda        |
| <b>Codirector</b>           | Dr. Luis Manuel Ledesma Carrillo |

(No llenar para uso exclusivo de la Coordinación.)

|                                |
|--------------------------------|
| Valida (nombre y firma): _____ |
|--------------------------------|

Una vez terminado de llenar imprimir en dos tantos (uno para entregar al iniciar el trámite de autorización del examen de grado o titulación y otro para firma de recibido).

Salamanca, Gto., a 4 de marzo del 2019.

M. en I. HERIBERTO GUTIÉRREZ MARTÍN  
JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR  
PRESENTE.-

Por medio de la presente, se otorga autorización para proceder a los trámites de impresión, empastado de tesis y titulación al alumno(a) Miguel Cipriano Guzmán Cano del Programa de Maestría en Ingeniería Eléctrica y cuyo número de NUA es: 736997 del cual soy director. El título de la tesis es: Sensores de correlación digital para alineación angular

Hago constar que he revisado dicho trabajo y he tenido comunicación con los sinodales asignados para la revisión de la tesis, por lo que no hay impedimento alguno para fijar la fecha de examen de titulación.

ATENTAMENTE



NOMBRE Y FIRMA  
DIRECTOR DE TESIS  
SECRETARIO

Ojeda



NOMBRE Y FIRMA  
PRESIDENTE

Torres



Dr. Luis Manuel Ledesma Carrillo

NOMBRE Y FIRMA  
DIRECTOR DE TESIS

Ledesma



Dora Luz Almanza Ojeda

NOMBRE Y FIRMA  
VOCAL

Dora



# UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

---

CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

*“Sensores de correlación digital  
para alineación angular”*

## TESIS DE MAESTRÍA

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA:

**Ing. Miguel Cipriano Guzmán Cano**

DIRECTORES:

Ph. D. Jorge Ojeda Castañeda

Eng. D. Luis Manuel Ledesma Carrillo

# Agradecimientos

Agradezco a mis *padres*, por apoyarme en todo momento en mi preparación profesional.

Agradezco a mis *asesores de tesis*: *Dr. Jorge Ojeda Castañeda* y *Dr. Luis Manuel Ledesma Carrillo*, por darme la oportunidad de aprender y conocer de su trabajo, así como también por permitirme desarrollar este trabajo de tesis.

Agradezco a la *Universidad de Guanajuato*, por ser la institución que ha permitido mi desarrollo profesional hasta este punto.

Agradezco a *CONACYT*, por su apoyo mediante la beca de posgrado.

Agradezco a los *Doctores*: *Dra. Cristina Margarita Gómez Sarabia*, *Dr. Jorge Ojeda Castañeda*, *Dr. Luis Manuel Ledesma Carrillo*, *Dr. Miguel Torres Cisneros* y *Dr. Rafael Guzmán Cabera*, por permitirme aprender y ser parte de su grupo trabajo.

Agradezco a mis *sinodales*: *Dra. Dora Luz Almanza Ojeda* y al *Dr. Miguel Torres Cisneros*, por su revisión de este trabajo de tesis.

# Prólogo

Los avances en la ciencia y la tecnología se hacen presentes día a día, ya sea mediante el desarrollo de nuevos dispositivos o la innovación de los ya existentes. Este último, mediante nuevas metodologías o nuevos materiales que permitan aumentar la resolución.

Para aumentar la resolución del dispositivo, idealmente implicaría mejorar todas y cada una de sus características; sin embargo, la relación con el costo tendería a incrementarse. Una forma conveniente para ambos puntos consiste en mejorar características en algunos de sus elementos del dispositivo.

La automatización de un sistema conlleva la integración de múltiples componentes con un objetivo en común. Un sensor es uno de los componentes de mayor importancia, y en particular, un sensor de posición angular es sumamente importante en cualquier sistema de integración de componentes.

Actualmente tenemos sensores angulares que presentan una buena resolución denominados encoder, pero que requieren de un diseño complejo y de algún otro dispositivo. Tenemos dos tipos de encoder, absoluto (consiste en un disco codificado radial y angularmente) y relativo (disco con un mismo patrón angular); el primero proporciona el ángulo una vez decodificado, el segundo únicamente proporciona el cambio en ángulo respecto de una posición inicial.

Otros sensores hacen uso del diseño de máscaras, codificadas angularmente mediante alguna secuencia, lo cual les permite tener una alta inmunidad al ruido, pero la resolución es baja.

Con base en lo anterior, el objetivo de esta tesis es proponer un sensor que incremente la resolución e incremente la inmunidad al ruido, mediante el diseño de máscaras.

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Fundamentos Teóricos</b>                                      | <b>8</b>  |
| 1.1. Sensor . . . . .   | 8         |
| 1.2. Sistema de referencia . . . . .                                | 9         |
| 1.3. Señal . . . . .  | 15        |
| 1.4. Correlación . . . . .  | 17        |
| 1.5. Producto de Kronecker . . . . .                                | 21        |
| 1.6. Secuencia . . . . .  | 21        |
| 1.6.1. Secuencias Barker . . . . .                                  | 22        |
| 1.7. Matrices de Hadamard . . . . .                                 | 22        |
| 1.7.1. Propiedades . . . . .  | 23        |
| 1.8. Funciones Walsh . . . . .                                      | 24        |
| 1.8.1. Matrices Walsh o Walsh-Hadamard . . . . .                    | 24        |
| 1.9. Relación señal a ruido (SNR) . . . . .                         | 27        |
| 1.10. Motivación . . . . .  | 31        |
| 1.11. Antecedentes . . . . .  | 35        |
| 1.12. Objetivo . . . . .  | 35        |
| 1.12.1. Objetivo general . . . . .                                  | 35        |
| 1.12.2. Objetivo particular . . . . .                               | 36        |
| 1.12.3. Desarrollo . . . . .  | 36        |
| <b>2. Correladores digitales electrónicos</b>                       | <b>37</b> |
| 2.1. Correlador . . . . .   | 37        |
| 2.2. Conversión analógica-digital . . . . .                         | 38        |
| 2.2.1. Muestreo . . . . .   | 38        |
| 2.2.2. Cuantificación . . . . .                                     | 39        |
| 2.2.3. Codificación . . . . .                                       | 39        |
| 2.3. Correlador digital electrónico . . . . .                       | 40        |
| 2.3.1. Retardador . . . . .   | 41        |
| 2.3.2. Sumador . . . . .  | 42        |
| 2.3.3. Multiplicador . . . . .                                      | 43        |
| <b>3. Sensor opto-electrónico de posición angular</b>               | <b>45</b> |
| 3.1. Autocorrelación de secuencias como señales digitales . . . . . | 45        |
| 3.1.1. Secuencias Largas de Hadamard . . . . .                      | 46        |
| 3.1.2. Secuencias Largas de Walsh . . . . .                         | 48        |

---

|   |           |
|---|-----------|
| 3.2. Autocorrelación de señales digitales en forma angular . . . . .    | 50        |
| 3.2.1. Secuencias Largas de Hadamard . . . . .                          | 51        |
| 3.2.2. Secuencias Largas de Walsh . . . . .                             | 53        |
| 3.3. Codificación de máscaras binarias . . . . .                        | 54        |
| 3.3.1. Máscaras binarias de Hadamard . . . . .                          | 54        |
| 3.3.2. Máscaras binarias de Barker . . . . .                            | 59        |
| 3.3.3. Máscaras binarias de las secuencias largas de Hadamard . . . . . | 62        |
| 3.3.4. Máscaras binarias de las secuencias largas de Walsh . . . . .    | 67        |
| 3.4. Procesador óptico 4f . . . . .                                     | 72        |
| 3.4.1. Sistema óptico . . . . .   | 73        |
| 3.4.2. Secuencias Largas de Hadamard . . . . .                          | 74        |
| 3.4.3. Secuencias Largas de Walsh . . . . .                             | 74        |
| 3.5. Relación Señal a Ruido (SNR) para las secuencias . . . . .         | 75        |
| <b>4. Conclusiones generales</b>  | <b>77</b> |
| 4.0.1. Conclusiones generales . . . . .                                 | 77        |
| 4.0.2. Trabajo a futuro . . . . .                                       | 79        |
| 4.0.3. Productos obtenidos . . . . .                                    | 79        |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>81</b> |

# Índice de figuras

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1.1.  | Diagrama esquemático de un sensor. . . . .  | 8  |
| 1.2.  | Clasificación de los sensores. . . . .  | 9  |
| 1.3.  | Desplazamiento de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en coordenadas cartesianas. . . . .   | 11 |
| 1.4.  | Desplazamiento de un punto $P(r_0, \phi_0)$ en coordenadas polares. . . . .   | 12 |
| 1.5.  | Desplazamiento de un punto sobre un conjunto de planos paralelos $z = constante$ . . . . .  | 13 |
| 1.6.  | Rotación de un punto sobre los tres ejes. . . . .   | 14 |
| 1.7.  | En aeronáutica, a las rotaciones sobre el eje $z$ se le conocen como <i>Roll</i> , sobre eje $y$ como <i>Yaw</i> y sobre el eje $x$ y <i>Pitch</i> . . . . .  | 15 |
| 1.8.  | Ejemplos de algunos tipos de señales. . . . .   | 17 |
| 1.9.  | Correlaciones de $f(t)$ y $g(t)$ . . . . .  | 18 |
| 1.10. | Correlaciones de $f[n]$ y $g[n]$ . . . . .  | 20 |
| 1.11. | Cambios en signo por fila de una matriz de Hadamard $H_{4,4}$ . . . . .   | 25 |
| 1.12. | Señal con ruido y su descomposición en ambos para múltiples valores de amplitud $A$ en $f(t)$ . En g) tenemos un nivel de ruido elevado, mientras que en h) tenemos un nivel de ruido medio y finalmente en i) tenemos un nivel de ruido bajo en comparación con la señal esperada. . . . . | 28 |
| 1.13. | Señal con ruido y su SNR para múltiples valores de amplitud $A$ en $f(t)$ . . . . .   | 30 |
| 1.14. | Ejemplos de áreas de aplicación de un sensor. . . . .   | 32 |
| 1.15. | Considerando $x, y, z$ como fijo y $x', y', z'$ como móvil. Alineación de un motor con una carga. . . . .   | 33 |
| 1.16. | Considerando $x, y, z$ como fijo y $x', y', z'$ como móvil. Alineación de dos secciones de fibra para su empalme. . . . .   | 34 |
| 1.17. | Considerando $x, y, z$ como fijo y $x', y', z'$ como móvil. Artroplastia de rodilla. . . . .  | 34 |
| 2.1.  | Diagrama esquemático de un correlador analógico o digital. . . . .  | 37 |
| 2.2.  | Diagrama básico de un convertidor analógico-digital. . . . .  | 38 |
| 2.3.  | Muestreador. . . . .  | 39 |
| 2.4.  | Diagrama a bloques de la implementación de la correlación [1] descrita por la ecuación 1.9. . . . .   | 41 |
| 2.5.  | Un retardador digital consiste en un desplazamiento del punto de partida para tomar la señal discreta y digital desde la memoria, es decir, consiste en tomar “n” siguientes muestras. . . . .  | 41 |
| 2.6.  | Medio sumador digital. . . . .  | 42 |
| 2.7.  | Sumador digital completo. . . . .   | 43 |

|   |    |
|---|----|
| 2.8. Multiplicador digital. . . . .   | 44 |
| 3.1. Autocorrelación de las secuencias Barker. . . . .  | 46 |
| 3.2. Autocorrelación de las Secuencias Largas de Hadamard. . . . .  | 48 |
| 3.3. Autocorrelación de las Secuencias Largas de Walsh. . . . .   | 50 |
| 3.4. Codificación de la señal digital en forma angular. . . . .   | 51 |
| 3.5. Autocorrelación angular de las Secuencias Largas de Hadamard. . . . .  | 52 |
| 3.6. Autocorrelación angular de las Secuencias Largas de Walsh. . . . .   | 54 |
| 3.7. Máscara con codificación rectangular de Hadamard. a) Matriz de Hadamard $H_{2,2}$ en un plano mediante coordenadas cartesianas y b) su codificación rectangular para generar la máscara $H_{2,2}(\mu, \nu)$ . . . . .              | 55 |
| 3.8. Máscaras de codificación rectangular de Hadamard $H_{2^k, 2^k}(\mu, \nu)$ . . . . .  | 56 |
| 3.9. Máscara con codificación circular de Hadamard. a) Matriz de Hadamard $H_{2,2}$ en un plano mediante coordenadas polares y b) su codificación circular para generar la máscara $H_{2,2}(\mu, \nu)$ . . . . .                        | 57 |
| 3.10. Máscaras de codificación circular de Hadamard $H_{2^k, 2^k}(\mu, \nu)$ . . . . .  | 57 |
| 3.11. Máscara con codificación circular cuadrática de Hadamard. a) Matriz de Hadamard $H_{2,2}$ en un plano mediante coordenadas polares y b) su codificación circular cuadrática para generar la máscara $H_{2,2}(\mu, \nu)$ . . . . . | 58 |
| 3.12. Máscaras de codificación circular cuadrática de Hadamard $H_{2^k, 2^k}(\mu, \nu)$ . . . . .   | 59 |
| 3.13. Máscara con codificación impulso Barker. a) Secuencia Barker $N = 5$ en un plano mediante coordenadas polares y b) su codificación impulso para generar la máscara $B_2(\mu, \nu)$ . . . . .                                      | 60 |
| 3.14. Máscaras de codificación impulso de Barker $B_L(\mu, \nu)$ . . . . .  | 60 |
| 3.15. Máscara con codificación impulso anular Barker. a) Secuencia Barker $N = 5$ en un plano mediante coordenadas polares y b) su codificación impulso anular para generar la máscara $B_2(\mu, \nu)$ . . . . .                        | 61 |
| 3.16. Máscaras de codificación impulso anular de Barker $B_L(\mu, \nu)$ con un valor de $\epsilon = \frac{1}{2}$ . . . . .  | 62 |
| 3.17. Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Hadamard $LSH_{1, 2^{2k}}(\mu, \nu)$ . . . . .   | 62 |
| 3.18. Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Hadamard $LSH_{1, 4}(\mu, \nu)$ . . . . .  | 63 |
| 3.19. Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Hadamard $LSH_{1, 16}(\mu, \nu)$ . . . . .   | 64 |
| 3.20. Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Hadamard $LSH_{1, 64}(\mu, \nu)$ . . . . .   | 65 |
| 3.21. Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Hadamard $LSH_{1, 256}(\mu, \nu)$ . . . . .  | 66 |
| 3.22. Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Walsh $LSW_{1, 2^{2k}}(\mu, \nu)$ . . . . .  | 67 |
| 3.23. Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Walsh $LSW_{1, 4}(\mu, \nu)$ . . . . .   | 68 |
| 3.24. Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Walsh $LSH_{1, 16}(\mu, \nu)$ . . . . .  | 69 |
| 3.25. Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Walsh $LSW_{1, 64}(\mu, \nu)$ . . . . .  | 70 |
| 3.26. Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Walsh $LSW_{1, 256}(\mu, \nu)$ . . . . .   | 71 |
| 3.27. Procesador óptico 4f. . . . .   | 72 |
| 3.28. Procesador óptico 4f con las dos máscaras. . . . .  | 73 |
| 3.29. SNR del máximo con respecto del segundo máximo. . . . .   | 75 |
| 3.30. Gráfica comparativa de la SNR para $R_{LHS, LHS}$ y $R_{LWS, LWS}$ en función al número de elementos debidos a un valor $k$ . . . . .   | 76 |

# Índice de cuadros

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Planos coordenados y sus ejes de rotación. . . . .                            | 14 |
| 1.2. Secuencia Barker . . . . .  | 22 |
| 2.1. Cuantificación por truncamiento y redondeo a 7 cifras significativas. . . . . | 39 |
| 2.2. Suma binaria. . . . .   | 42 |
| 2.3. Suma binaria. . . . .   | 42 |
| 2.4. Multiplicación binaria. . . . .   | 43 |
| 3.1. Secuencia Barker . . . . .  | 45 |
| 3.2. Codificación de las máscaras binarias de Hadamard. . . . .                    | 55 |
| 3.3. Codificación de las máscaras binarias de Barker. . . . .                      | 59 |
| 3.4. SNR de las secuencias de Barker. . . . .                                      | 76 |
| 3.5. SNR de las Secuencias Largas de Hadamard. . . . .                             | 76 |
| 3.6. SNR de las Secuencias Largas de Walsh. . . . .                                | 76 |

# Capítulo 1

## Fundamentos Teóricos

En el presente capítulo se establecen las bases del trabajo; comenzando por las bases teóricas, posteriormente la motivación y finalmente el objetivo del trabajo.

### 1.1. Sensor

Un *sensor* es un elemento que proporciona la medición de una magnitud con base a sus propiedades.

La medición de dicha magnitud dependerá del efecto que tenga un determinado medio sobre las propiedades del sensor, es decir, los cambios en las propiedades se traducen en su presencia y/o variabilidad. Solo algunas propiedades tendrán cambios considerables para la medición de la magnitud.

Un ejemplo de un sensor se aprecia en la figura 1.1.

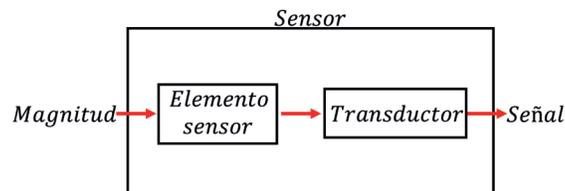


Figura 1.1: Diagrama esquemático de un sensor.

Los sensores se clasifican con base a la magnitud que proporcionan como se muestra en la figura 1.2.

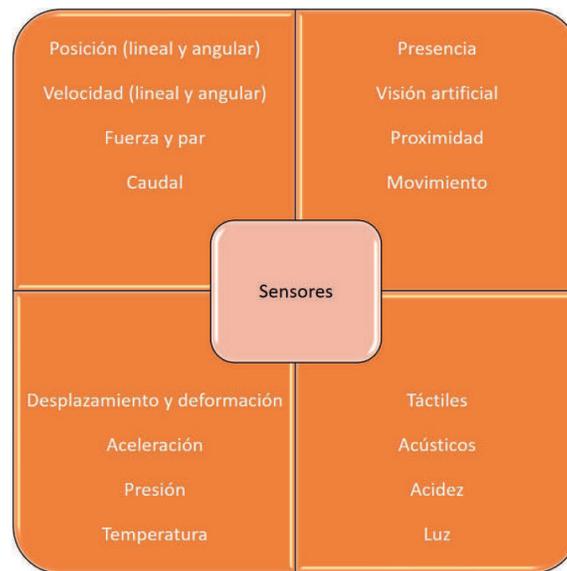


Figura 1.2: Clasificación de los sensores.

Las características de un sensor son:

- **Rango:** Dominio de la función que describe su comportamiento.
- **Precisión:** Error máximo en medición.
- **Sensibilidad:** Cambios en magnitud debido a cambios en las propiedades.
- **Resolución:** Mínimo valor en magnitud detectado.
- **Velocidad de respuesta:** Rapidez de cambios en magnitud debido a cambios en las propiedades.
- **Repetitividad:** Diferencias de magnitud para los mismos cambios en las propiedades.
- **Linealidad:** Comportamiento descrito por una función del tipo lineal.

## 1.2. Sistema de referencia

Un *sistema de referencia* consiste en un conjunto de convenciones que para un observador le permite conocer determinadas magnitudes físicas.

Una de estas magnitudes es la posición, la cual para algún punto u objeto se determina mediante sus coordenadas en un plano cartesiano.

Consideremos un plano cartesiano en tres dimensiones  $xyz$ , sobre el cual tenemos un punto en

coordenadas cartesianas  $P(x_0, y_0, z_0)$  como se muestra en la figura 1.3; debido a que el punto se encuentra sobre el plano  $xy$  tendremos que  $z_0 = 0$ .

La figura 1.3 representa un punto con desplazamientos sobre un plano  $xy$  en coordenadas cartesianas, es decir, tenemos en a) el punto definido como  $P(x_0, y_0)$ , para b) tenemos un desplazamiento  $\Delta x$  que define un punto  $P'(x_0 + \Delta x, y_0)$ , para c) tenemos un desplazamiento  $\Delta y$  que define un punto  $P'(x_0, y_0 + \Delta y)$  y finalmente para d) tenemos un desplazamiento  $\Delta x$  y  $\Delta y$  que define un punto  $P'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ .

El punto en coordenadas cartesianas mediante una notación matricial es:

$$P = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

El desplazamiento del punto en coordenadas cartesianas mediante una notación matricial es:

$$P' = \begin{bmatrix} x_0 + \Delta x \\ y_0 + \Delta y \end{bmatrix}$$

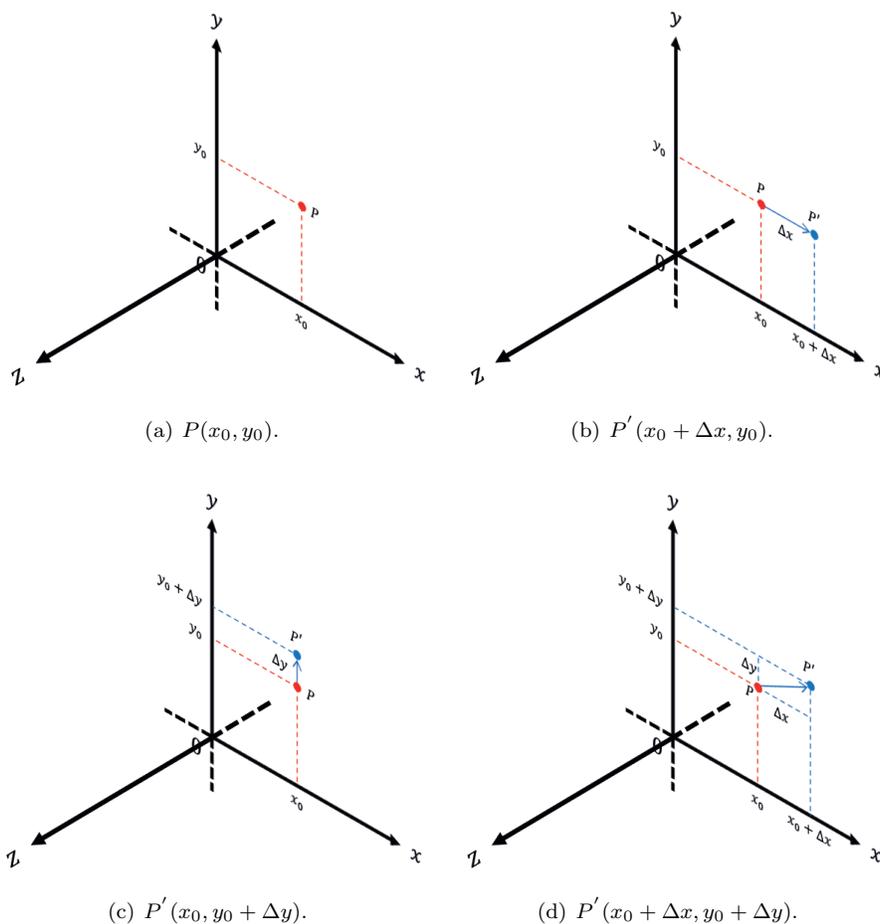


Figura 1.3: Desplazamiento de un punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  en coordenadas cartesianas.

Realizando un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares, como se muestra en las ecuaciones 1.1 y 1.2, se define la posición mediante su distancia y ángulo.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.1)$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (1.2)$$

Considerando el mismo punto sobre el plano  $xy$ , pero en coordenadas polares  $P(r_0, \phi_0)$  como se muestra en la figura 1.4.

La figura 1.4 representa un punto con desplazamientos sobre un plano  $xy$  en coordenadas polares, es decir, tenemos en a) el punto definido como  $P(r_0, \phi_0)$ , para b) tenemos un desplazamiento  $\Delta r$  que define un punto  $P'(r_0 + \Delta r, \phi_0)$ , para c) tenemos un desplazamiento  $\Delta \phi$  que define un punto  $P'(r_0, \phi_0 + \Delta \phi)$  y finalmente para d) tenemos un desplazamiento  $\Delta r$  y  $\Delta \phi$  que define un

punto  $P'(r_0 + \Delta r, \phi_0 + \Delta\phi)$ .

El punto en coordenadas polares sobre un plano y mediante una notación matricial es:

$$P = \begin{bmatrix} r_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix}$$

El desplazamiento del punto en coordenadas polares sobre un plano y mediante una notación matricial es:

$$P' = \begin{bmatrix} r_0 + \Delta r \\ \phi_0 + \Delta\phi \end{bmatrix}$$

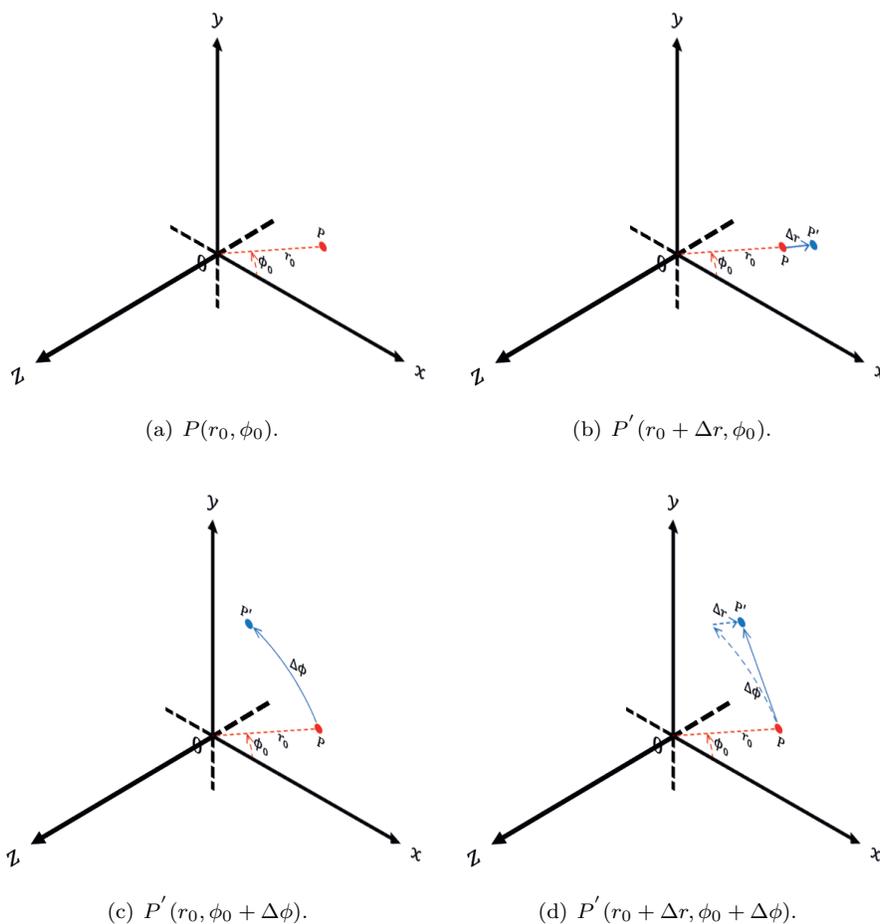


Figura 1.4: Desplazamiento de un punto  $P(r_0, \phi_0)$  en coordenadas polares.

Si el desplazamiento se describe para un valor  $z = \text{constante}$ , se tendrá el mismo comportamiento, es decir, sobre un conjunto de planos paralelos como se muestra en la figura 1.5 para un

punto  $P(x, y, z = cte)$ .

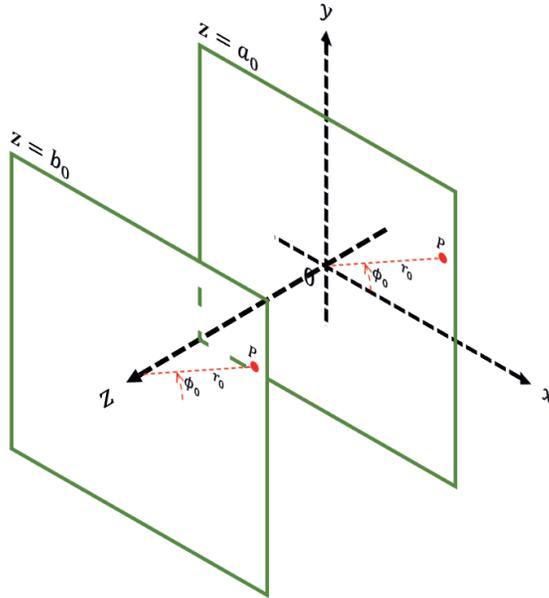


Figura 1.5: Desplazamiento de un punto sobre un conjunto de planos paralelos  $z = constante$ .

Con base a lo anterior, es posible describir cualquier trayectoria en coordenadas cartesianas y coordenadas polares en un plano cartesiano.

Una trayectoria circular o rotación se define como una variación angular sobre un determinado eje de rotación, la cual es descrita por una matriz de rotación:

$$P' \begin{bmatrix} x_0 + \Delta x \\ y_0 + \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\phi) & -\sin(\Delta\phi) \\ \sin(\Delta\phi) & \cos(\Delta\phi) \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Que en coordenadas polares se define como  $P(r_0 = cte., \phi)$ , es decir,  $P(\phi)$  y que para el desplazamiento corresponde a:

$$P' [\phi_0 + \Delta\phi]$$

Lo mismo sucede para cualquiera de las dos coordenadas restantes, siendo consideradas con un valor constante. Describir una rotación sobre cualquiera de los tres ejes de un punto  $P$  como se muestra en la figura 1.6 sería:

$$P = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} z_0 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

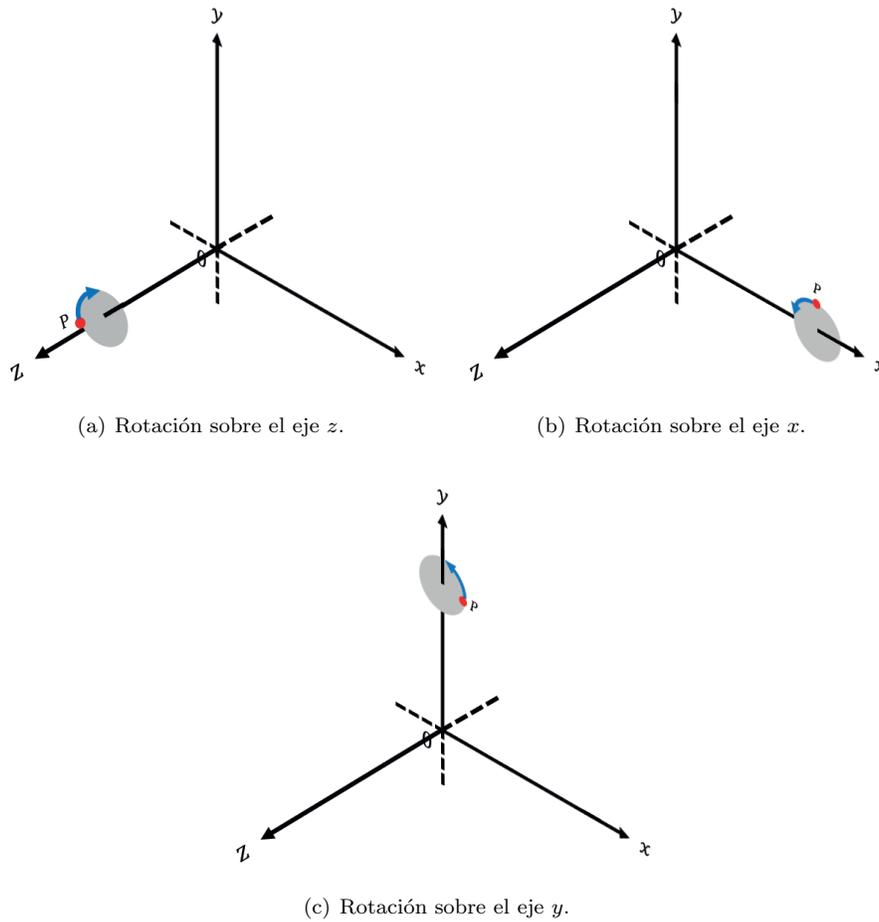


Figura 1.6: Rotación de un punto sobre los tres ejes.

El eje de rotación dependerá del plano paralelo como se describe en la tabla 1.1.

Tabla 1.1: Planos coordenados y sus ejes de rotación.

| Plano | Eje de rotación |
|-------|-----------------|
| $xy$  | $z$             |
| $yz$  | $x$             |
| $zx$  | $y$             |

En aeronáutica, a las rotaciones sobre los ejes se les conoce como *Roll* para rotaciones sobre el eje  $z$ , *Yaw* para rotaciones sobre el eje  $y$  y *Pitch* para rotaciones sobre el eje  $x$  como se muestra en la figura 1.7 bajo la regla de la mano derecha.

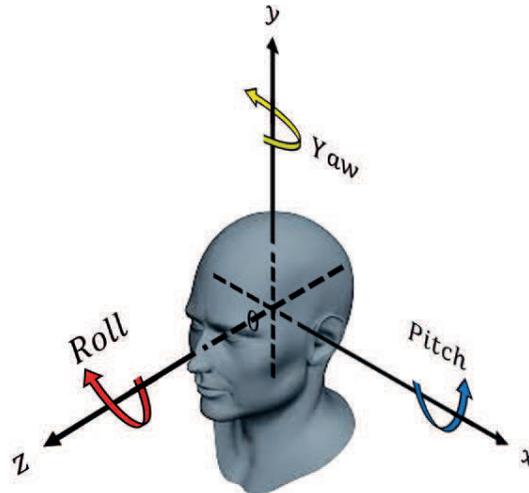


Figura 1.7: En aeronáutica, a las rotaciones sobre el eje  $z$  se le conocen como *Roll*, sobre eje  $y$  como *Yaw* y sobre el eje  $x$  *Pitch*.

### 1.3. Señal

Una *señal* es la representación del comportamiento de las propiedades de cualquier elemento.

Matemáticamente se representa como una función de variables independientes, utilizando principalmente variables en tiempo  $t$  o espacio  $x$  [2].

Algunos tipos de señales son:

- **Continuas:** De variables independientes continuas (dominio). Para una señal en tiempo  $f(t)$ .
- **Discretas:** De variables independientes discretas (dominio). Para una señal en tiempo  $f[n]$ .
- **Analógicas:** En amplitud continuo (rango).
- **Digitales:** En amplitud discreto (rango).
- **Periódicas:** Cumple con la condición  $f(t) = f(t + mT)$  o  $f[n] = f[n + kN]$ , donde  $T$  y  $N$  es el periodo.
- **Aperiódicas:** No cumple con la condición  $f(t) = f(t + mT)$  o  $f[n] = f[n + kN]$ .

- **Determinísticas:** Estacionarias o fijas descritas matemáticamente por alguna función o tabla  $f(t)$  o  $f[n]$ .
- **Aleatorias:** No estacionarias o fluctuantes descritas matemáticamente de forma independiente por una función de densidad de probabilidad (PDF)  $f(t; s)$  o  $f[n, \ell]$ .

*En el área de ingeniería electrónica es importante señalar lo siguiente. El término de señal analógica incluye a una señal continua, así pues, el término de señal digital incluye a una señal discreta.*

Un ejemplo de dos señales analógicas son las definidas matemáticamente en las ecuaciones 1.3 1.4, ambas se muestran en el apartado a) y b) de la figura 1.8 correspondientemente.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 8 \leq t \leq 24 \\ 0 & \text{si } \text{otw.} \end{cases} \quad (1.3)$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t - 1 & \text{si } 8 \leq t \leq 16 \\ 3(1 - t) & \text{si } 16 \leq t \leq 24 \\ 0 & \text{si } \text{otw.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Un ejemplo de dos señales digitales son las definidas matemáticamente en las ecuaciones 1.5 1.6, ambas se muestran en el apartado c) y d) de la figura 1.8 correspondientemente.

$$f[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 8 \leq n \leq 24 \\ 0 & \text{si } \text{otw.} \end{cases} \quad (1.5)$$

$$f[n] = \begin{cases} \frac{1}{8}n - 1 & \text{si } 8 \leq n \leq 16 \\ 3(1 - n) & \text{si } 16 \leq n \leq 24 \\ 0 & \text{si } \text{otw.} \end{cases} \quad (1.6)$$

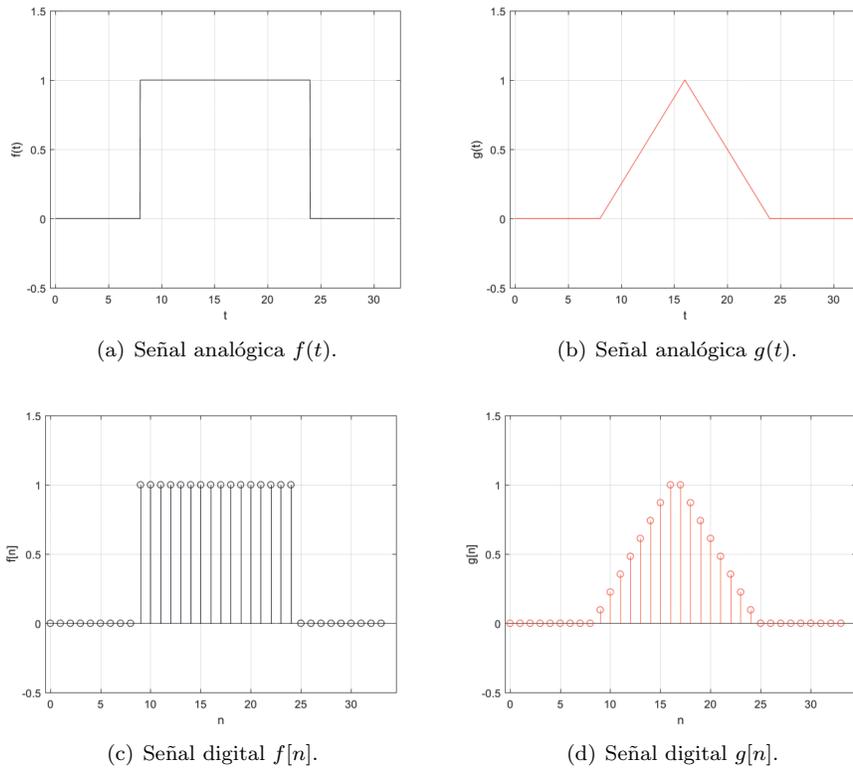


Figura 1.8: Ejemplos de algunos tipos de señales.

## 1.4. Correlación

La *correlación* se define como una operación matemática que proporciona una comparación del grado de similitud entre dos funciones (señales) [2][3].

Matemáticamente se define para una función  $f(t)$  con respecto de  $g(t)$  en la ecuación 1.7.

$$R_{f,g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau)g(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

Si  $g(t) = f(t)$  tenemos la autocorrelación de  $f(t)$  descrita en la ecuación 1.8.

$$R_{f,f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau)f(\tau) d\tau \quad (1.8)$$

Considerando las señales descritas por las ecuaciones 1.3 y 1.4, las correlaciones se muestran en la figura 1.9.

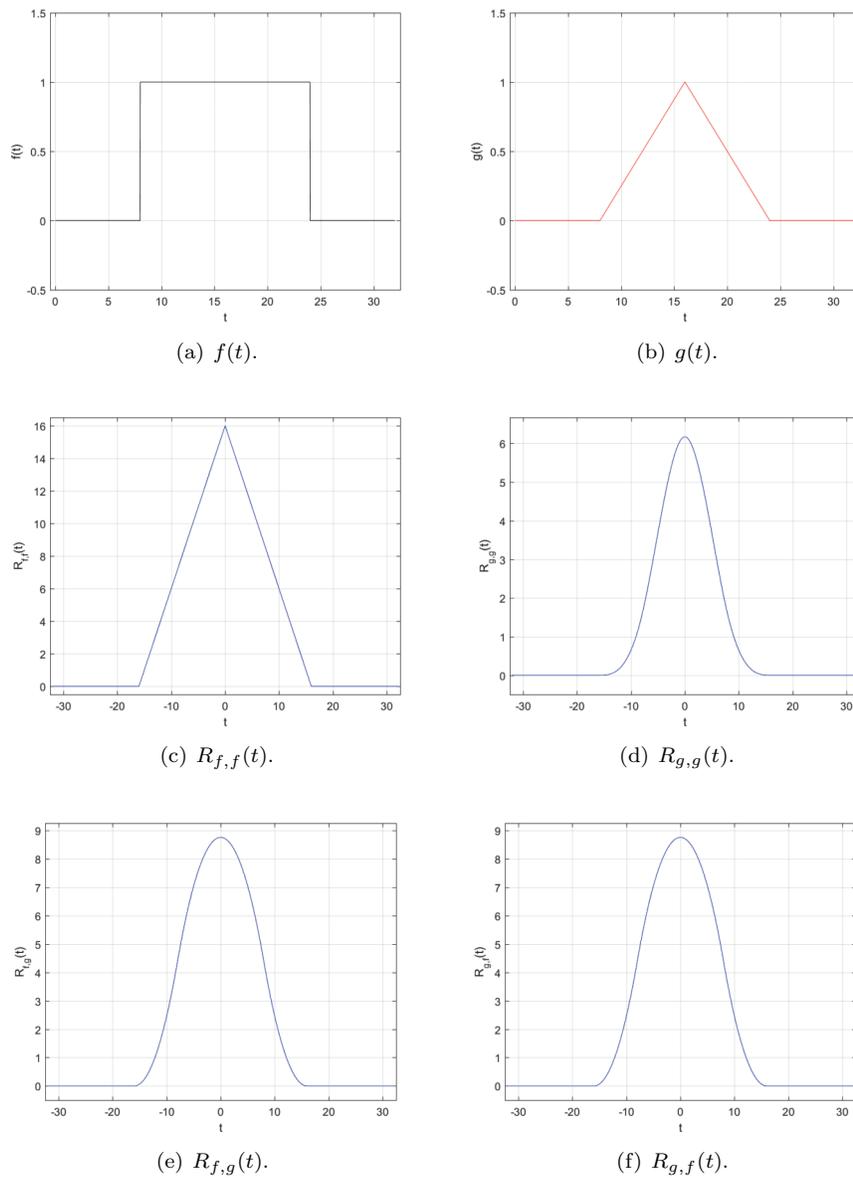


Figura 1.9: Correlaciones de  $f(t)$  y  $g(t)$ .

Para funciones discretas, matemáticamente se define para una función  $f[n]$  con respecto de  $g[n]$  en la ecuación 1.9.

$$R_{f,g}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n+m]g[m] \quad (1.9)$$

Si  $g[n] = f[n]$  tenemos la autocorrelación de  $f[n]$  descrita en la ecuación 1.10.

$$R_{f,f}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n+m]f[m] \quad (1.10)$$

Consideremos las señales descritas por las ecuaciones 1.5 y 1.6, las correlaciones se muestra en la figura 1.10.

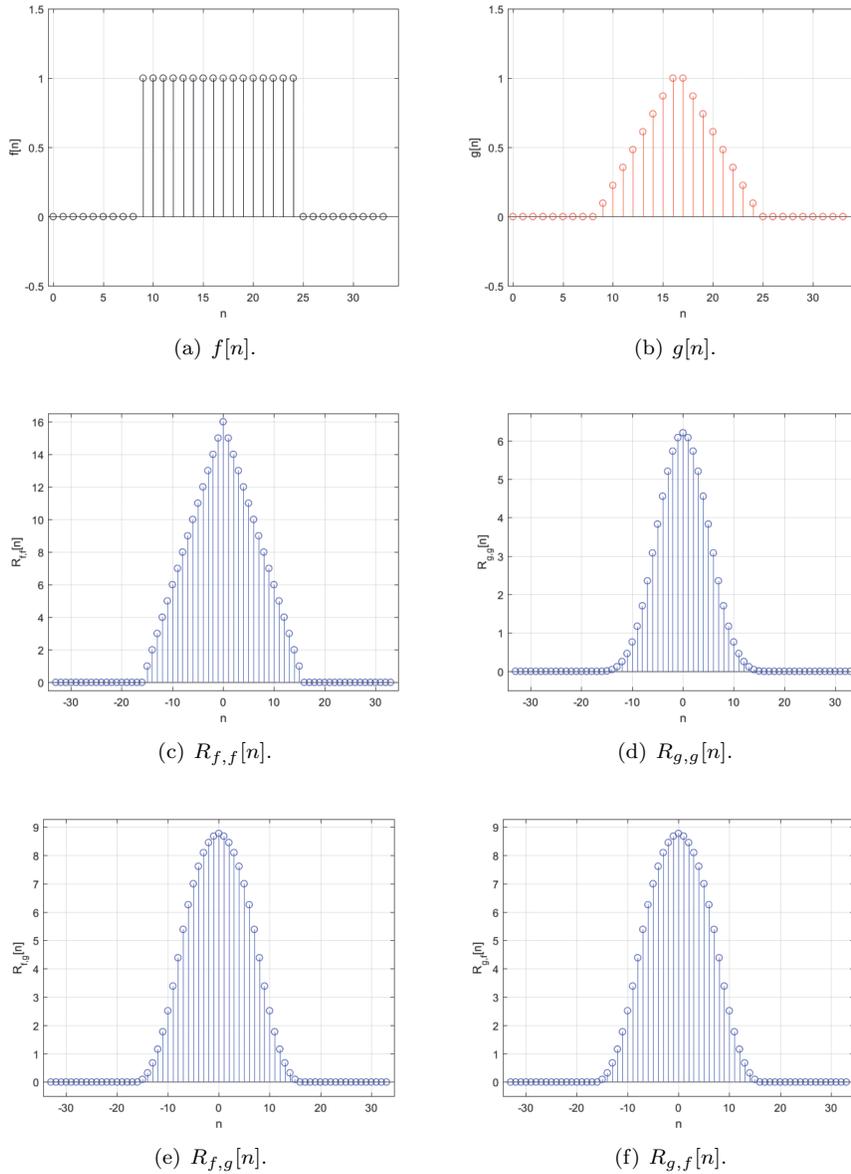


Figura 1.10: Correlaciones de  $f[n]$  y  $g[n]$ .

Dependiendo del par de funciones presentes, será el rango de la función de correlación y autocorrelación. Considerando la propia definición de la función de autocorrelación, la cual garantiza un grado máximo de similitud, es posible normalizarla de forma relativa.

$$NR_{f,f} = \frac{R_{f,f}}{\max(|R_{f,f}|)}, D = [-1, 1] \tag{1.11}$$

donde  $NR_{f,f}$  representa la función de autocorrelación normalizada y  $D$  es su dominio.

## 1.5. Producto de Kronecker

Definamos una matriz  $A$  y una matriz  $B$ .

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$B_{2,2} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

El *producto de Kronecker* para las matrices 1.12 y 1.13 se define como:

$$\begin{aligned} A_{2,2} \otimes B_{2,2} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} B_{2,2} \\ A_{2,2} \otimes B_{2,2} &= \begin{bmatrix} a_{1,1}B_{2,2} & a_{1,2}B_{2,2} \\ a_{2,1}B_{2,2} & a_{2,2}B_{2,2} \end{bmatrix} \\ A_{2,2} \otimes B_{2,2} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} & a_{1,2} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \\ a_{2,1} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} & a_{2,2} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ A_{2,2} \otimes B_{2,2} &= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} \\ a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} & a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,2}b_{1,1} & a_{2,2}b_{1,2} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,1}b_{2,2} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Redefiniendo sus elementos.

$$A_{2,2} \otimes B_{2,2} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$A_{2,2} \otimes B_{2,2} = C_{4,4}$$

Lo que nos permite concluir que:

$$A_{i,j} \otimes B_{m,n} = C_{i*m,j*n} \quad (1.14)$$

Es posible obtener el producto de Kronecker de cuales quiera sean las matrices  $n \times m$  con base a lo descrito en la ecuación 1.14.

## 1.6. Secuencia

Una *secuencia* es una colección de objetos cuya longitud está determinada por el número de miembros que la conforman, permitiendo la repetitividad de sus miembros.

Con base a lo propuesto por [4], para el desarrollo del presente trabajo consideraremos una secuencia como una señal digital.

### 1.6.1. Secuencias Barker

Propuesta por Barker R. H. [5] de longitud  $L$  y elementos con valores de  $-1$  y  $1$ .

Tabla 1.2: Secuencia Barker

| $L$ | Secuencia Barker |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
|-----|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 2   | 1                | -1 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 3   | 1                | 1  | -1 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 4   | 1                | 1  | -1 | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 5   | 1                | 1  | 1  | -1 | 1  |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 7   | 1                | 1  | 1  | -1 | -1 | 1  | -1 |    |    |    |    |    |   |
| 11  | 1                | 1  | 1  | -1 | -1 | -1 | 1  | -1 | -1 | 1  | -1 |    |   |
| 13  | 1                | 1  | 1  | 1  | 1  | -1 | -1 | 1  | 1  | -1 | 1  | -1 | 1 |

Una de las principales características de las secuencias Barker, es el hecho que su autocorrelación en un desplazamiento cero  $m = 0$  nos arroja un máximo en magnitud igual a su longitud  $L$ .

Considerando la secuencia como un vector, es posible generar secuencias de mayor longitud mediante el producto de Kronecker.

## 1.7. Matrices de Hadamard

Las matrices de Hadamard, nombradas así en honor al matemático francés Jacques Hadamard [6]; son matrices cuadradas  $n \times n$  con elementos  $1$  y  $-1$ .

Tenemos distintas aplicaciones y formas de construcción de estas matrices [7], particularmente nos centraremos en la construcción propuesta por Sylvester, denominada así en honor al matemático inglés James Joshep Sylvester [8], la cual considera matrices cuadradas que sean potencias de dos  $2^k$ .

Considerando una matriz de un solo elemento, la cual será la semilla, es decir:

$$H_{1,1} = [1] \quad (1.15)$$

Ahora considerando una matriz de cuatro elementos, la cual nos permite obtener cualquier matriz cuadrada de Hadamard, es decir:

$$C_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Obteniendo el producto de Kronecker de las matrices definidas en las ecuaciones 1.15 y 1.6

$$C_{2,2} \otimes H_{1,1} = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,1} \\ H_{1,1} & -H_{1,1} \end{bmatrix} = H_{2,2} \quad (1.17)$$

Tomando el resultado de la ecuación 1.17 y obteniendo nuevamente el producto de Kronecker con la matriz de la ecuación 1.16

$$C_{2,2} \otimes H_{2,2} = \begin{bmatrix} H_{2,2} & H_{2,2} \\ H_{2,2} & -H_{2,2} \end{bmatrix} = H_{4,4} \quad (1.18)$$

Tomando nuevamente el resultado de la ecuación 1.18 y obtenemos el producto de Kronecker nuevamente con la matriz de la ecuación 1.16

$$C_{2,2} \otimes H_{4,4} = \begin{bmatrix} H_{4,4} & H_{4,4} \\ H_{4,4} & -H_{4,4} \end{bmatrix} = H_{8,8} \quad (1.19)$$

Con base a los resultados de las ecuaciones 1.17 hasta 1.19, es posible definir la construcción de las matrices de Hadamard mediante el producto de Kronecker como se muestra en la ecuación 1.20:

$$H_{2^k, 2^k} = C_{2,2} \otimes H_{2^{k-1}, 2^{k-1}} = \begin{bmatrix} H_{2^{k-1}, 2^{k-1}} & H_{2^{k-1}, 2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}, 2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}, 2^{k-1}} \end{bmatrix}, \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.20)$$

Haciendo uso de la ecuación 1.20 se muestran a continuación las matrices de Hadamard para  $k = 1$ ,  $k = 2$  y  $k = 3$ .

$$H_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{4,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{8,8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

### 1.7.1. Propiedades

La inversa de una matriz de Hadamard  $H_{n,n}$  es:

$$H_{n,n}^{-1} = H_{n,n} \quad (1.21)$$

La transpuesta de una matriz de Hadamard  $H_{n,n}$  es:

$$H_{n,n}^t = H_{n,n} \quad (1.22)$$

De las ecuaciones 1.21 y 1.22 se puede observar que su transpuesta y su inversa son las mismas:

$$H_{n,n}^{-1} = H_{n,n}^t$$

Las matrices de Hadamard son ortogonales, ya que:

$$H_{n,n} H_{n,n}^{-1} = H_{n,n} H_{n,n}^t = nI_{n,n} \quad (1.23)$$

Es importante señalar que la ecuación 1.23 demuestra que cada renglón o columna con magnitud  $\sqrt{n}$  es ortogonal, es decir, que son linealmente independientes con respecto del resto de los renglones o columnas.

El determinante de una matriz de Hadamard  $H_{n,n}$  es:

$$\det(H_{n,n}) = \pm n^{\frac{n}{2}} \quad (1.24)$$

## 1.8. Funciones Walsh

En matemáticas, las *funciones Walsh*, propuestas por el matemático estadounidense Joseph Leonard Walsh [9], son un conjunto de funciones ortogonales conformadas por elementos equidistantes que contienen valores 1,  $-1$ , que permiten realizar la representación de cualquier función discreta.

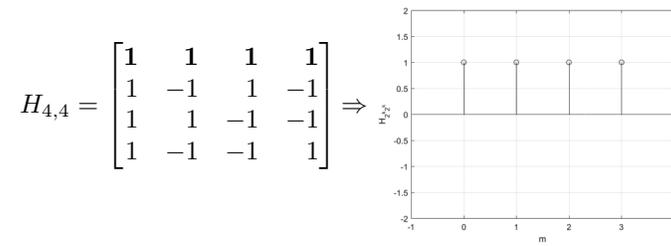
Las funciones Walsh son señales digitales, mientras que, las funciones trigonométricas son señales analógicas. Con base a lo anterior, la transformada Walsh (o transformada Hadamard) es para señales digitales, mientras que, la transformada de Fourier es para señales analógicas; así pues, la transformada Walsh es una generalización de la transformada de Fourier para señales digitales.

### 1.8.1. Matrices Walsh o Walsh-Hadamard

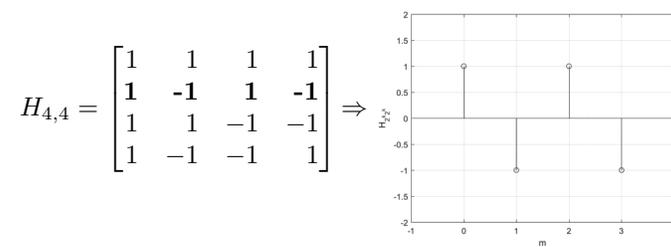
Son matrices cuadradas  $2^k \times 2^k$  con elementos 1 y  $-1$  en las cuales sus filas y columnas son ortogonales y cada fila en la matriz es una función Walsh.

Así como en las funciones trigonométricas tenemos armónicos, en las funciones Walsh propuestas mediante las matrices de Hadamard, obtendremos los armónicos mediante cambios en signo, ya que los valores de las matrices son 1 y  $-1$ . Si a una matriz Hadamard  $H_{2^k, 2^k}$  le reordenamos sus filas será una matriz Walsh.

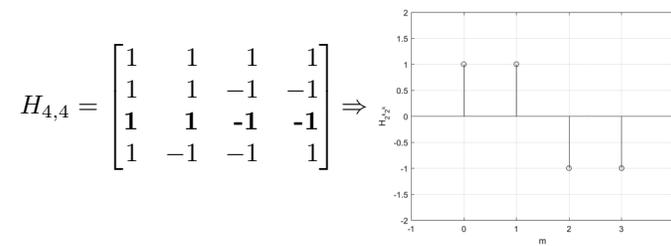
Si tenemos cambios de elemento 1 a un elemento  $-1$  o viceversa tendremos cambios en signo, como se aprecia en la figura 1.11 para una matriz Hadamard  $H_{4,4}$ .



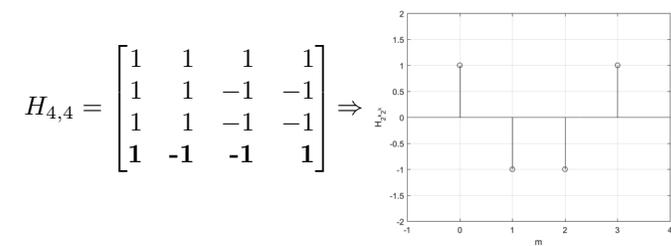
(a) 0 cambios de signo.



(b) 3 cambios de signo.



(c) 1 cambios de signo.



(d) 2 cambios de signo.

Figura 1.11: Cambios en signo por fila de una matriz de Hadamard  $H_{4,4}$ .

Los cambios de signos en las matrices de Hadamard de orden  $k = 1, 2, 3$  son:

$$H_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow 0 \\ \Rightarrow 1 \end{matrix}$$

$$H_{4,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow 0 \\ \Rightarrow 3 \\ \Rightarrow 1 \\ \Rightarrow 2 \end{matrix}$$

$$H_{8,8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow 0 \\ \Rightarrow 7 \\ \Rightarrow 3 \\ \Rightarrow 4 \\ \Rightarrow 1 \\ \Rightarrow 6 \\ \Rightarrow 2 \\ \Rightarrow 5 \end{matrix}$$

Realizando el ordenamiento de forma ascendente de las matrices de Hadamard, tenemos que:

$$W_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow 0 \\ \Rightarrow 1 \end{matrix}$$

$$W_{4,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow 0 \\ \Rightarrow 1 \\ \Rightarrow 2 \\ \Rightarrow 3 \end{matrix}$$

$$W_{8,8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow 0 \\ \Rightarrow 1 \\ \Rightarrow 2 \\ \Rightarrow 3 \\ \Rightarrow 4 \\ \Rightarrow 5 \\ \Rightarrow 6 \\ \Rightarrow 7 \end{matrix}$$

Es posible realizar diferentes ordenamientos, en particular se hace referente al ascendente debido a que es el utilizado para la transformada Walsh.

Es común escuchar el termino Walsh-Hadamard para referirse a esta matriz y a su transformación.

Para cada matriz de Hadamard  $H_{2^k, 2^k}$  es posible generar una matriz Walsh  $W_{2^k, 2^k}$ .

## 1.9. Relación señal a ruido (SNR)

La *relación señal a ruido*, en inglés *Signal to Noise Ratio* abreviado SRN, es una medida de la relación de la potencia de la señal deseada, con respecto de la potencia de la señal no deseada (ruido), expresada en decibelios (*dB*). La cual se define en la ecuación 1.25.

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_r} \quad (1.25)$$

Para señales eléctricas sabemos que  $P \propto V^2$ , por lo que tendremos como resultado la ecuación 1.26 para conocer la SNR de una señal de voltaje.

$$SNR = 20 \log_{10} \frac{V_s}{V_r} \quad (1.26)$$

Matemáticamente es posible obtener la energía y la potencia de cualquier función (no siendo una señal) sin hacer referencia a una magnitud física, por lo que es posible obtener una SNR de cualquier función.

Para conocer la potencia de una señal, es necesario conocer primero la energía de la señal en un intervalo (o un periodo  $2T$ ), como lo muestra la ecuación 1.27 para señales continuas, y la ecuación 1.28 para un intervalo (o un periodo  $2N$ ) en señales discretas. La potencia correspondiente para señales continuas y discretas están definidas en las ecuaciones 1.29 y 1.30 correspondientemente [2].

$$E = \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1.27)$$

$$E = \sum_{n=-N}^N |f[n]|^2 \quad (1.28)$$

$$P = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1.29)$$

$$P = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |f[n]|^2 \quad (1.30)$$

La energía y la potencia para un intervalo de tiempo infinito redefine las ecuaciones 1.27 a 1.30 en las ecuaciones 1.31 a 1.34

$$E_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1.31)$$

$$E_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |f[n]|^2 \quad (1.32)$$

$$P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1.33)$$

$$P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |f[n]|^2 \quad (1.34)$$

Consideremos una señal analógica definida por la ecuación 1.35, la cual es la superposición de una señal de potencia  $f(t)$ , descrita en la ecuación 1.36 y que se muestra en los apartados a), b) y c) de la figura 1.11; con una señal de potencia  $g(t; s)$  aleatoria, descrita por una PDF Gaussiana en la ecuación 1.37 y que se muestra en los apartados d), e) y f) de la figura 1.12.

$$h(t) = f(t) + g(t; s) \quad (1.35)$$

$$f(t) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (1.36)$$

$$g(t; s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.37)$$

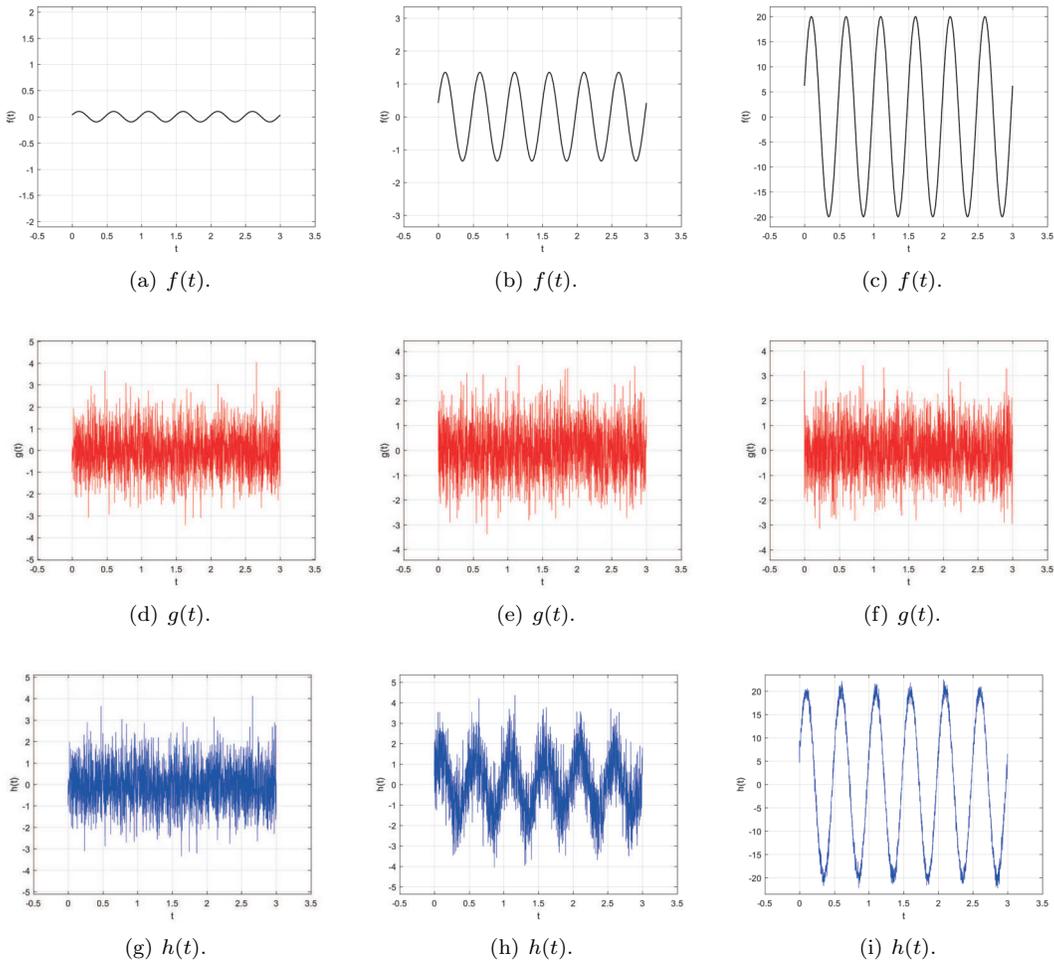
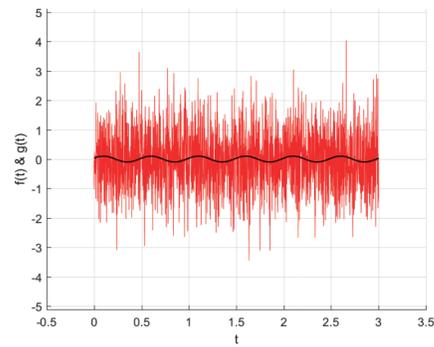


Figura 1.12: Señal con ruido y su descomposición en ambos para múltiples valores de amplitud  $A$  en  $f(t)$ . En g) tenemos un nivel de ruido elevado, mientras que en h) tenemos un nivel de ruido medio y finalmente en i) tenemos un nivel de ruido bajo en comparación con la señal esperada.

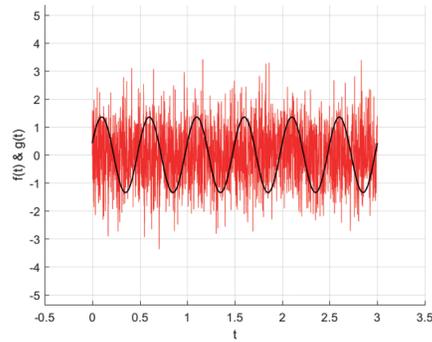
Si tenemos mismas potencias tendremos una SNR de  $0dB$ , si la potencia de la señal es mayor tendremos una SNR mayor a  $0dB$  y si la potencia del ruido es mayor será una SNR menor a  $0dB$ .

En la figura 1.13 tenemos un ejemplo del cálculo de la SNR para tres tipos de funciones, en la primera tenemos una presencia de ruido mayor que la de la señal deseada (por lo que el valor SNR será negativo), en la siguiente apreciamos un valor de señal y ruido similares (por lo que el valor SNR será cercano a 0) y finalmente un valor de señal mucho mayor en comparación con el ruido (por lo que el valor SNR será positivo).

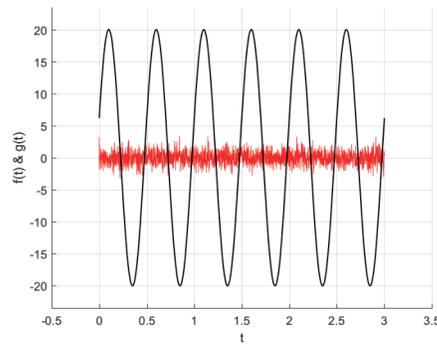
Como se puede apreciar en la figura 1.13 tenemos un incremento en el absoluto de la SNR si la diferencia entre ellas es considerable, ya dependerá de cuál de las dos sea la que se ha incrementado.



(a) Señal y ruido.



(b) Señal y ruido.



(c) Señal y ruido.

Figura 1.13: Señal con ruido y su SNR para múltiples valores de amplitud  $A$  en  $f(t)$ .

## 1.10. Motivación

Los avances tecnológicos exigen desarrollar dispositivos con mayor eficiencia a un menor costo, esto implica que cada componente o sección de un dispositivo incremente su eficiencia de forma particular. Día a día se trabaja en la búsqueda de un sistema totalmente automatizado, en donde la tradicional dependencia directa del ser humano con todo proceso industrial sea la mínima necesaria, por lo que necesitamos contar con sensores que mejoren la interacción de nuestros dispositivos con su particular medio.

Hablando en particular sobre sensores, actualmente se han desarrollado un gran número y un gran tipo de ellos, los cuales bajo un criterio cronológico han tenido mejoras, sin embargo aún no ha sido posible contar con un sensor de gran eficiencia sin un gran costo.

Si incrementamos la sensibilidad de un sensor, tendremos una reducción del error en medición provocada por el lector (dispositivo u operador), además de obtener una herramienta que permite mejorar cualquier sistema de automatización.

Un sensor de alineación determina la posición en el espacio de algún objeto (ya sea o no en función del tiempo), por lo que actualmente son muy utilizados en investigación (experimentación) y en la industria (producción), por esto es muy importante mejorar la eficiencia de estos sensores y además reducir sus costos de fabricación.

Para un sensor de rotación angular tenemos algunas áreas de aplicación en la figura 1.14. En *electrónica* se tienen en aplicaciones para motores eléctricos y circuitos [10], [11]; en *Robótica* se tienen aplicaciones en la industria, en visión artificial y en manufactura [12],[13], [14]; en *Óptica* se tienen aplicaciones en fibras ópticas y sistemas ópticos [4], [15], [16]; en *Medicina* se tienen aplicaciones en cirugías, prótesis y rehabilitación [17], [18], [19], [20]; como ejemplos de áreas de aplicación.

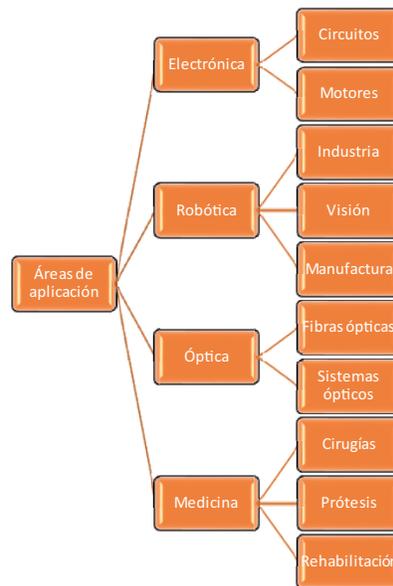


Figura 1.14: Ejemplos de áreas de aplicación de un sensor.

Un ejemplo en donde es requerido un sensor de alineamiento angular es en motores, para reducir las pérdidas debido a errores por unión como se muestra en la figura 1.15; en el empalme de dos secciones de fibra en las que se requiere un alto grado de coincidencia como se muestra en la figura 1.16; en otras como el área médica, particularmente en la artroplastia de rodilla como se muestra en la figura 1.17.

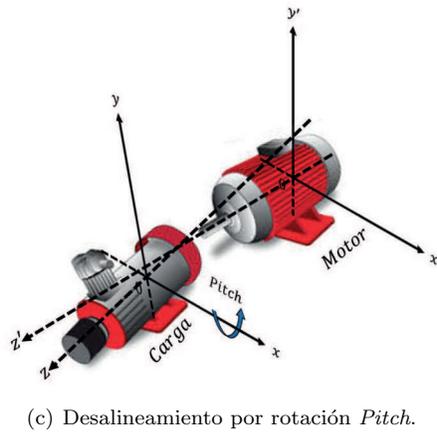
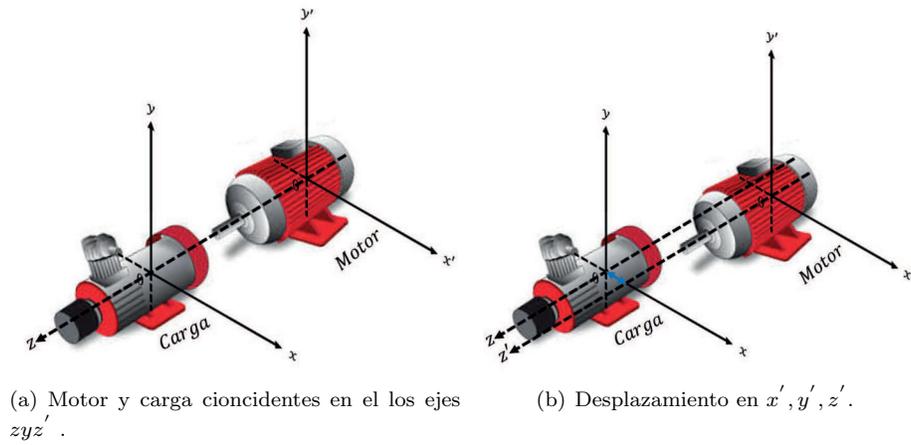
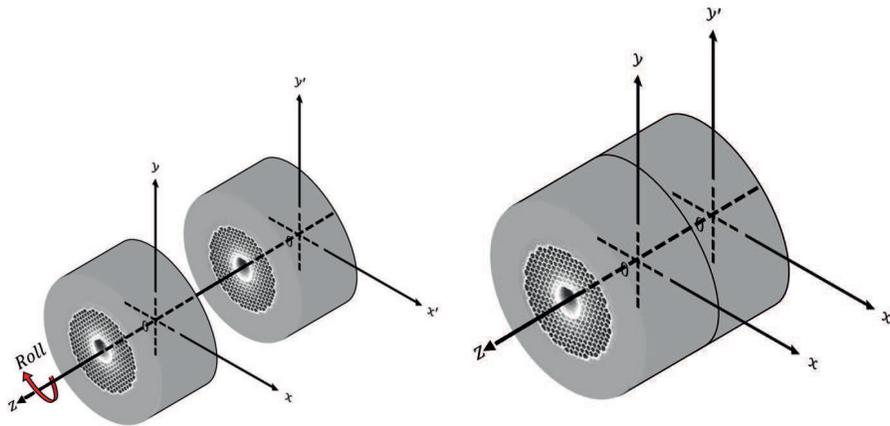


Figura 1.15: Considerando  $x, y, z$  como fijo y  $x', y', z'$  como móvil. Alineación de un motor con una carga.



(a) Ambas secciones de fibra coincidentes en los ejes  $zyz'$ , más no coincidentes en el ángulo. (b) Ambas secciones de fibra empalmadas con una coincidencia en ángulo y en los ejes  $zyz'$ .

Figura 1.16: Considerando  $x, y, z$  como fijo y  $x', y', z'$  como móvil. Alineación de dos secciones de fibra para su empalme.

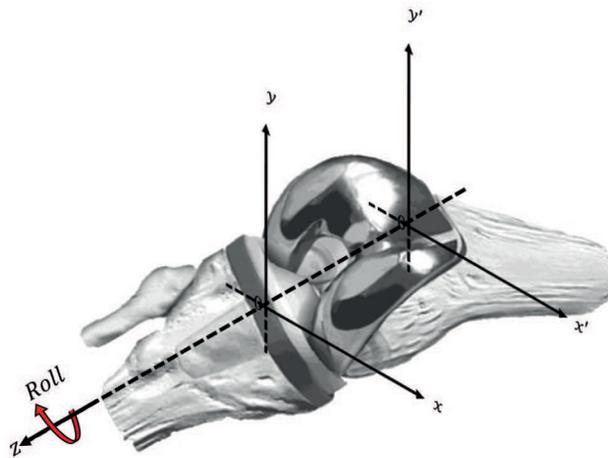


Figura 1.17: Considerando  $x, y, z$  como fijo y  $x', y', z'$  como móvil. Artroplastia de rodilla.

*Con base a lo anterior, en el presente trabajo se plantea emplear las propiedades de la correlación digital, para sensar rotaciones que permitan desarrollar dispositivos que mantengan (o mejoren) el comportamiento de los actuales, pero que el grado de dificultad para la fabricación y operación sea menor.*

## 1.11. Antecedentes

En la integración óptica de varios componentes es deseable contar con un sistema de alineación angular automático, que pueda realizar correcciones inmediatas, un ejemplo de un proceso de automatización es en el empalme de fibras ópticas, donde se requieren dispositivos que incrementen su eficiencia [14]; además que la alineación angular entre dos componentes ópticos ha sido poco estudiada y las técnicas parecen ofrecer baja versatilidad [16].

Actualmente tenemos un dispositivo sumamente utilizado denominado encoder (codificador), el cual es un codificador rotatorio (suele ser un dispositivo electromecánico) usado para convertir la posición angular de un eje a un código digital. Son utilizados en robótica, lentes fotográficas, entre algunos dispositivos en los cuales sea necesario determinar rotaciones o posiciones angulares. Tenemos dos tipos principales.

- **Absoluto:** Establece un código particular para cada ángulo. Básicamente se establece un patrón mediante contactos, para que se tenga un determinado número de ellos activos y el resto no activos para un ángulo en particular, con una resolución de  $2^n$ . Su uso está limitado por los elementos para su construcción.
- **Relativo (incremental):** Se determina la posición con base a un conteo del número de pulsos generados por la rotación del disco (mediante un fotodiodo y un fotodetector). Solo determina el cambio en posición respecto a la posición inicial, para conocer la posición angular es necesario un segundo sensor que le indique la posición inicial y si además se desea conocer el sentido es un sensor más en posiciones angulares particulares.

Un dispositivo de alineación angular con una gran resolución se propone en [4], haciendo uso de la operación matemática de correlación. Mediante el uso de secuencias Barker, realizan una propuesta para un sistema óptico, donde muestran un análisis de las aberraciones y además presentan resultados experimentales mediante polarización lineal.

La longitud de las secuencias Barker limita la resolución; en [4] indican el uso del producto de Kronecker para incrementar la resolución, sin embargo la SNR mantiene valor similar al que presenta la secuencia de máxima longitud ( $L = 13$ ). Con base a esto, se requiere explorar nuevas secuencias que mantengan las ventajas que proporcionan las secuencias Barker y que además incrementen la SNR. Además, que los resultados experimentales requieren una descripción matemática que muestre las diferencias en el comportamiento mediante polarizadores y máscaras de fase (como es que se proponen originalmente), ya que la disponibilidad y bajo costo de los polarizadores lineales permite su fácil implementación.

## 1.12. Objetivo

### 1.12.1. Objetivo general

Uso de las matrices de Hadamard para generar códigos digitales para diseñar y fabricar sensores ópticos de alineación angular.

### 1.12.2. Objetivo particular

- Analizar la correlación de secuencias digitales.
- Diseñar códigos digitales empleando las matrices de Hadamard.
- Desarrollar programas computacionales para evaluar numéricamente correlaciones angulares.

### 1.12.3. Desarrollo

En el capítulo 1 se proporcionan los conceptos fundamentales sobre un sensor, la función de correlación, las matrices de Hadamard, las matrices de Walsh, la relación señal a ruido, la motivación y los antecedentes del tema, y finalmente el objetivo de la tesis.

En el capítulo 2 se presentan los correladores y cómo es que mediante los convertidores analógico-digital se lleva un correlador digital electrónico.

En el capítulo 3 se presentan las secuencias propuestas con base a las matrices de Hadamard y sus autocorrelaciones, las formas de codificación para la generación de máscaras binarias, el sistema óptico propuesto para el diseño del sensor y la relación señal a ruido de las secuencias actualmente utilizadas en comparación con las propuestas.

En el capítulo 4 se presentan las conclusiones generales de la tesis, los trabajos a futuro y los productos obtenidos.

## Capítulo 2

# Correladores digitales electrónicos

### 2.1. Correlador

Un *correlador* es un dispositivo que utiliza la operación matemática correlación.

Matemáticamente se define en la ecuación 1.7 para señales continuas y la ecuación 1.9 para señales discretas y se representan en la figura 2.1.

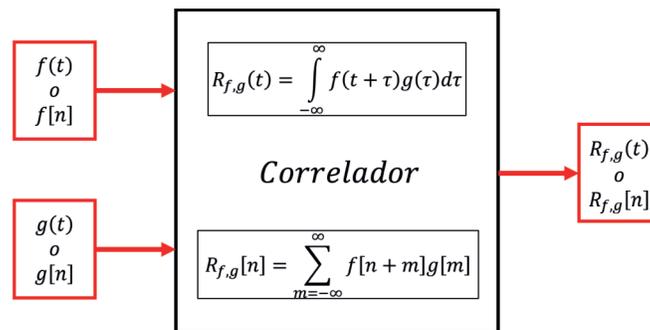


Figura 2.1: Diagrama esquemático de un correlador analógico o digital.

Como ya se definió en la sección 1.4, la correlación nos proporciona un grado de similitud para dos funciones, lo cual nos da una herramienta de comparación con respecto de una base o referencia (la cual definimos de manera específica) y con ello determinar un estado en particular.

Los correladores pueden ser de dos tipos:

- **Analógicos:** Trabajan con señales del tipo analógicas.
- **Digitales:** Trabajan con señales del tipo digital.

Para la implementación de un correlador digital se requiere adicionalmente realizar un traslado de la señal analógica a su versión en digital.

## 2.2. Conversión analógica-digital

Las señales reales (voz, biológicas, sísmicas, radar, video, audio, etc.) son del tipo analógicas, por lo que para ser procesadas por un medio digital es necesario realizar su conversión a señales digitales. El dispositivo que realiza dicha conversión es conocido como convertidor A/D (ADC) [3]. Dicho proceso se desarrolla en tres pasos como se muestra en la figura 2.2.

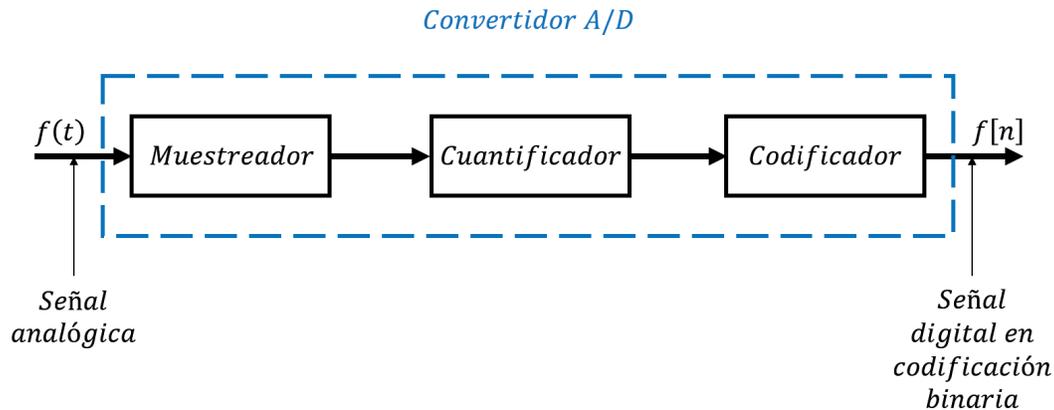


Figura 2.2: Diagrama básico de un convertidor analógico-digital.

### 2.2.1. Muestreo

#### Teorema de muestreo de Nyquist-Shannon

El teorema de muestreo de Nyquist-Shannon [21], muestra que para la reconstrucción de una señal que sea continua y limitada en banda (espectro frecuencial) a partir de sus muestras, será posible si la frecuencia de muestreo es del doble del ancho de banda. Como se muestra en la ecuación 2.1

$$w_{f_s} \geq 2w_f \quad (2.1)$$

donde  $w_f$  es la frecuencia máxima de la señal analógica y  $w_{f_s}$  es la frecuencia de muestreo.

Hablando en cuestiones prácticas tenemos tres aspectos importantes que mencionar:

- La función de impulsos en realidad presenta un ancho de duración no nulo.
- La no idealidad de los filtros para la reconstrucción de la señal.
- La limitante en banda no está perfectamente limitada, pues al ser señales en tiempo tendremos una transición en su limitante.

La forma práctica de realizar un muestreo, es considerando las muestras como los valores en magnitud del tren de impulsos, como se muestra en la ecuación 2.2

$$g[n] = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.2)$$

Un muestreador es como el que se muestra en la figura 2.3

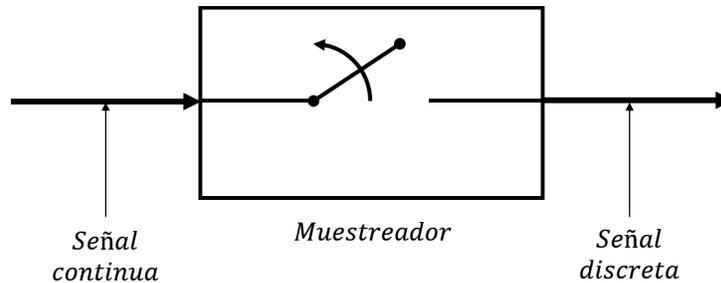


Figura 2.3: Muestreador.

### 2.2.2. Cuantificación

Es llevar una señal del tipo analógica al tipo digital (previamente desplazada de una señal continua a una señal discreta), consiste en designar un número finito a la amplitud; el error presente se le denomina error de cuantificación o ruido de cuantificación. Tenemos dos formas de realizar esta cuantificación:

- **Truncamiento:** Descartar el número de dígitos no deseados (siempre será el dígito inferior).
- **Redondeo:** Descartar después de realizar un redondeo (queda a criterio si es el dígito inferior o se mueve al siguiente).

En la tabla 2.1

Tabla 2.1: Cuantificación por truncamiento y redondeo a 7 cifras significativas.

| Cifra       | Tuncamiento | Redondeo |
|-------------|-------------|----------|
| 0.123456789 | 0.123456    | 0.123457 |

### 2.2.3. Codificación

Consiste en llevar una señal (previamente definida como una señal digital) de un lenguaje a otro; como trabajamos con sistemas digitales de base binaria (2), la codificación consiste en realizar una conversión de base, particularmente de una base decimal (10) a una base binaria.

La conversión de base decimal a binaria, consiste en realizar la división con respecto a 2 (que resulte en un cociente entero), colocando el residuo de derecha a izquierda y continuando con el cociente ahora como dividendo, hasta llegar a un dividendo de 0 o 1. Los dígitos obtenidos por el residuo es la representación con base binaria. Si deseamos realizar la conversión del número 23 con base decimal a una base binaria:

$$\frac{23}{2} \Rightarrow \text{Residuo} = 1, \text{Cociente} = 11$$

$$\frac{11}{2} \Rightarrow \text{Residuo} = 1, \text{Cociente} = 5$$

$$\frac{5}{2} \Rightarrow \text{Residuo} = 1, \text{Cociente} = 2$$

$$\frac{2}{2} \Rightarrow \text{Residuo} = 0, \text{Cociente} = 1$$

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Residuo} = 1$$

Colocando los residuos de derecha a izquierda (por representación sería de forma descendente):

$$23_{10} = 10111_2$$

## 2.3. Correlador digital electrónico

En electrónica, un correlador digital es un dispositivo que emplea la operación matemática de correlación en forma digital, como lo muestran [22] y [1]. el cual presenta múltiples arquitecturas (dependiente del tipo de elementos necesarios para las distintas áreas de aplicación). En la figura 2.4 se presenta el diagrama a bloques del correlador digital de forma general, por lo que al ser digital hace referencia a la aplicación de la ecuación 1.9.

Es importante señalar que en este punto ya se cuenta con señales del tipo digitales, por lo que los tiempos de desplazamiento quedan definidos por el muestreo. Como lo indica la ecuación 1.9 tendremos desplazamientos en los valores, por lo que el funcionamiento del correlador digital quedará definido por la velocidad que presente el dispositivo, el cual no tendrá relación con el tiempo de desplazamiento de la señal.

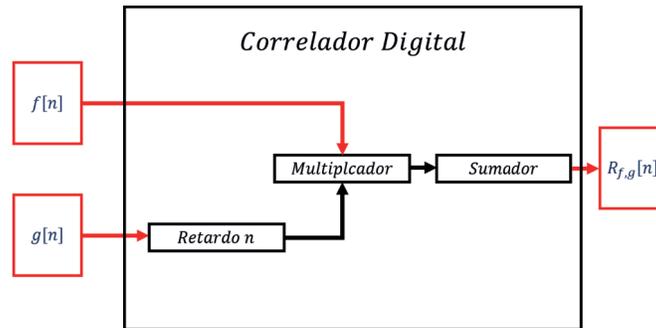


Figura 2.4: Diagrama a bloques de la implementación de la correlación [1] descrita por la ecuación 1.9.

### 2.3.1. Retardador

Un retardador, consiste en un desplazamiento del punto de partida en cualquier señal previamente discretizada y digitalizada, que se encuentra almacenada en alguna memoria como se muestra en la figura 2.5.

#### *Retardador*

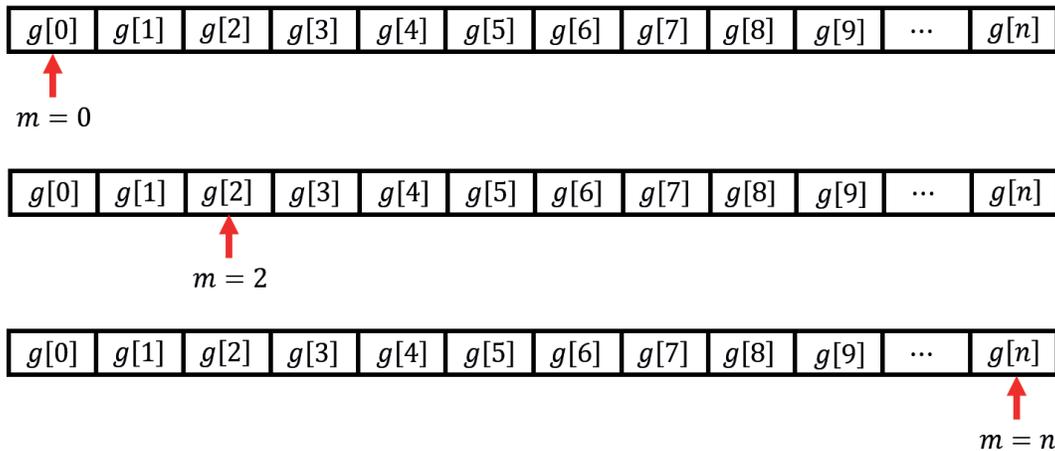


Figura 2.5: Un retardador digital consiste en un desplazamiento del punto de partida para tomar la señal discreta y digital desde la memoria, es decir, consiste en tomar “n” siguientes muestras.

### 2.3.2. Sumador

Al tener codificada la señal con base binaria, las operaciones se realizan bit a bit. La suma con base binaria se muestra en la tabla 2.2 para dos valores  $A$  y  $B$ .

Tabla 2.2: Suma binaria.

| $A$ | $B$ | $S$ | $C_{sal}$ |
|-----|-----|-----|-----------|
| 0   | 0   | 0   | 0         |
| 0   | 1   | 1   | 0         |
| 1   | 0   | 1   | 0         |
| 1   | 1   | 0   | 1         |

La suma descrita en la tabla 2.2 se implementa digitalmente de forma combinacional mediante compuertas lógicas y al cual se le conoce como medio sumador y se ilustra en la figura 2.6.

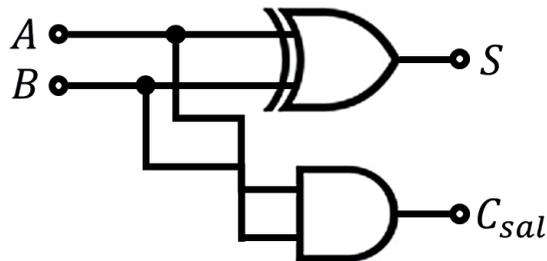


Figura 2.6: Medio sumador digital.

Ahora bien, si consideramos un  $C_{ent}$  debido a que la suma se realiza en cascada, la suma binaria para  $A$  y  $B$  se muestra en la tabla 2.3.

Tabla 2.3: Suma binaria.

| $C_{ent}$ | $A$ | $B$ | $S$ | $C_{sal}$ |
|-----------|-----|-----|-----|-----------|
| 0         | 0   | 0   | 0   | 0         |
| 0         | 0   | 1   | 1   | 0         |
| 0         | 1   | 0   | 1   | 0         |
| 0         | 1   | 1   | 0   | 1         |
| 1         | 0   | 0   | 1   | 0         |
| 1         | 0   | 1   | 0   | 1         |
| 1         | 1   | 0   | 0   | 1         |
| 1         | 1   | 1   | 1   | 1         |

La suma descrita en la tabla 2.3 se implementa digitalmente de forma combinacional mediante compuertas lógicas y al cual se le conoce como sumador completo y se ilustra en la figura 2.7.

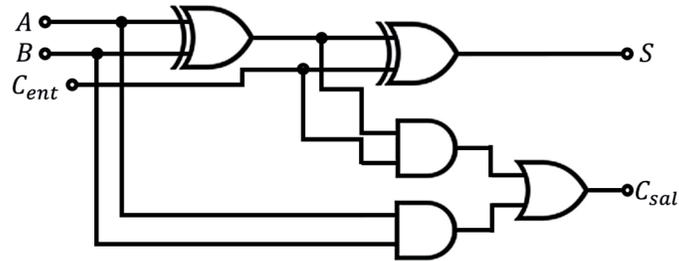


Figura 2.7: Sumador digital completo.

### 2.3.3. Multiplicador

Nuevamente al tener codificada la señal con base binaria, las operaciones se realizan bit a bit. La multiplicación con base binaria se muestra en la tabla 2.4 para dos valores  $A$  y  $B$ .

Tabla 2.4: Multiplicación binaria.

| $A$ | $B$ | $M$ |
|-----|-----|-----|
| 0   | 0   | 0   |
| 0   | 1   | 0   |
| 1   | 0   | 0   |
| 1   | 1   | 1   |

Como podemos apreciar en la tabla 2.4, la multiplicación binaria coincide con la tabla de verdad de una compuerta AND. Para un multiplicador se requiere de compuertas lógicas AND, un desplazamiento posterior al primer dígito y finalmente un sumador (ya que se realiza en base binaria), como se muestra en el diagrama de su estructura básica en la figura 2.8.

El principal uso de este tipo de correladores es para encoders, los cuales son utilizados para la medición de la posición angular (algún tipo de maquinaria) y la rotación de motores en múltiples aplicaciones; sin embargo, como se mencionó anteriormente, su implementación requiere de un procesamiento digital y lo que buscamos en esta tesis, es un sensor basado en señales analógicas (en principio luz), que incluya la parte digital en forma analógica.

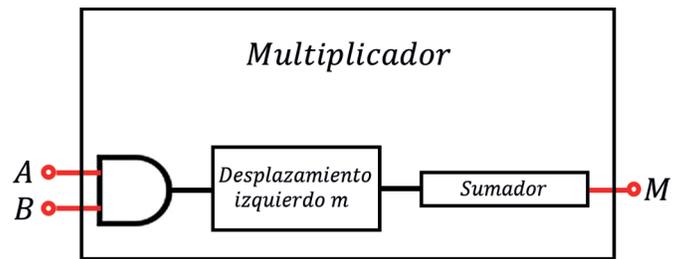


Figura 2.8: Multiplicador digital.

## Capítulo 3

# Sensor opto-electrónico de posición angular

En el presente capítulo se describen las características del sensor propuesto.

### 3.1. Autocorrelación de secuencias como señales digitales

Una secuencia puede considerarse como una señal digital de potencia, y así obtener su autocorrelación descrita por la ecuación 1.10.

Las secuencias Barker presentan una excelente propiedad en su autocorrelación, lo que permite el diseño de máscaras binarias de alineación angular [4]. La autocorrelación de las secuencias Barker se aprecia en la figura 3.1.

Tabla 3.1: Secuencia Barker

| $L$ | Secuencia Barker |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
|-----|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 2   | 1                | -1 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 3   | 1                | 1  | -1 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 4   | 1                | 1  | -1 | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 5   | 1                | 1  | 1  | -1 | 1  |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 7   | 1                | 1  | 1  | -1 | -1 | 1  | -1 |    |    |    |    |    |   |
| 11  | 1                | 1  | 1  | -1 | -1 | -1 | 1  | -1 | -1 | 1  | -1 |    |   |
| 13  | 1                | 1  | 1  | 1  | 1  | -1 | -1 | 1  | 1  | -1 | 1  | -1 | 1 |

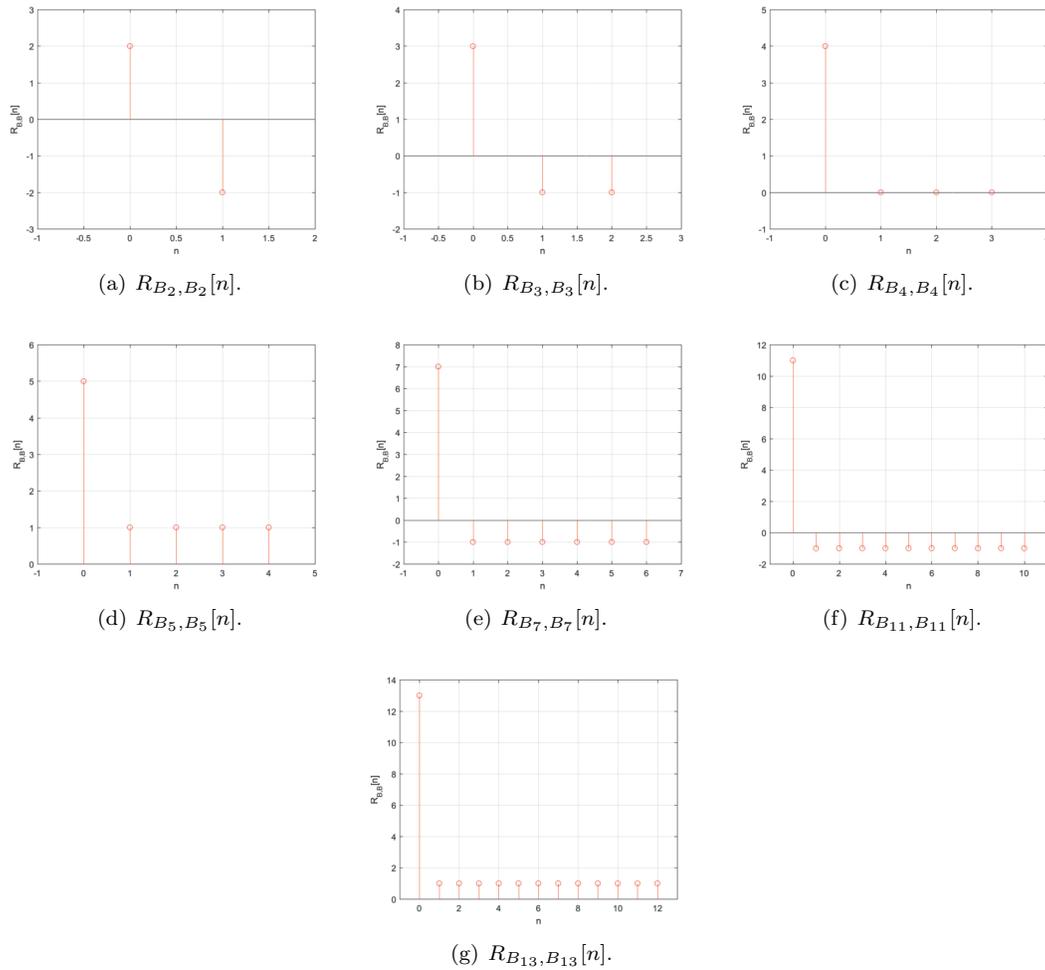


Figura 3.1: Autocorrelación de las secuencias Barker.

*En esta tesis se hará uso de las matrices de Hadamard, buscando que las correlaciones de los códigos digitales generados puedan dar pie al diseño de sensores angulares.*

### 3.1.1. Secuencias Largas de Hadamard

Las matrices de Hadamard 1.7 presentan múltiples propiedades, una de ellas es la ortogonalidad entre sus filas y columnas, que nos permite garantizar la presencia de un máximo y un mínimo periódico en la función de autocorrelación.

Con base a lo anterior, se propone una secuencia que se obtiene de la concatenación secuenciada de las filas (o columnas) de las matrices de Hadamard para generar un vector fila (o vector

columna), es decir, considerando la matriz de Hadamard  $H_{2,2}$ .

$$H_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{hrow}_1 \\ \text{hrow}_2 \end{matrix}$$

$$H_{2,2} \Rightarrow [\text{hrow}_1, \text{hrow}_2] = LHS_{1,4}$$

lo que nos lleva a.

$$H_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow [1 \ 1 \ 1 \ -1] = LHS_{1,4}$$

Tendremos una modificación de una matriz cuadrada  $H_{2^k, 2^k}$  a un vector de longitud  $LHS_{1,2^{2k}}$ .

Con base a lo anterior, se propone una *secuencia larga de Hadamard* como una señal de potencia descrita por la ecuación 3.1. Como una señal digital se representa en la ecuación 3.2

$$LHS_{1,2^{2k}} = \{\text{hrow}_1, \text{hrow}_2, \text{hrow}_3, \dots, \text{hrow}_{2^k}\} \quad (3.1)$$

$$LHS_{1,2^{2k}}[n] = [\text{hrow}_1, \text{hrow}_2, \text{hrow}_3, \dots, \text{hrow}_{2^k}] \quad (3.2)$$

La autocorrelación de las Secuencias Largas de Hadamard se muestran en la figura 3.2.

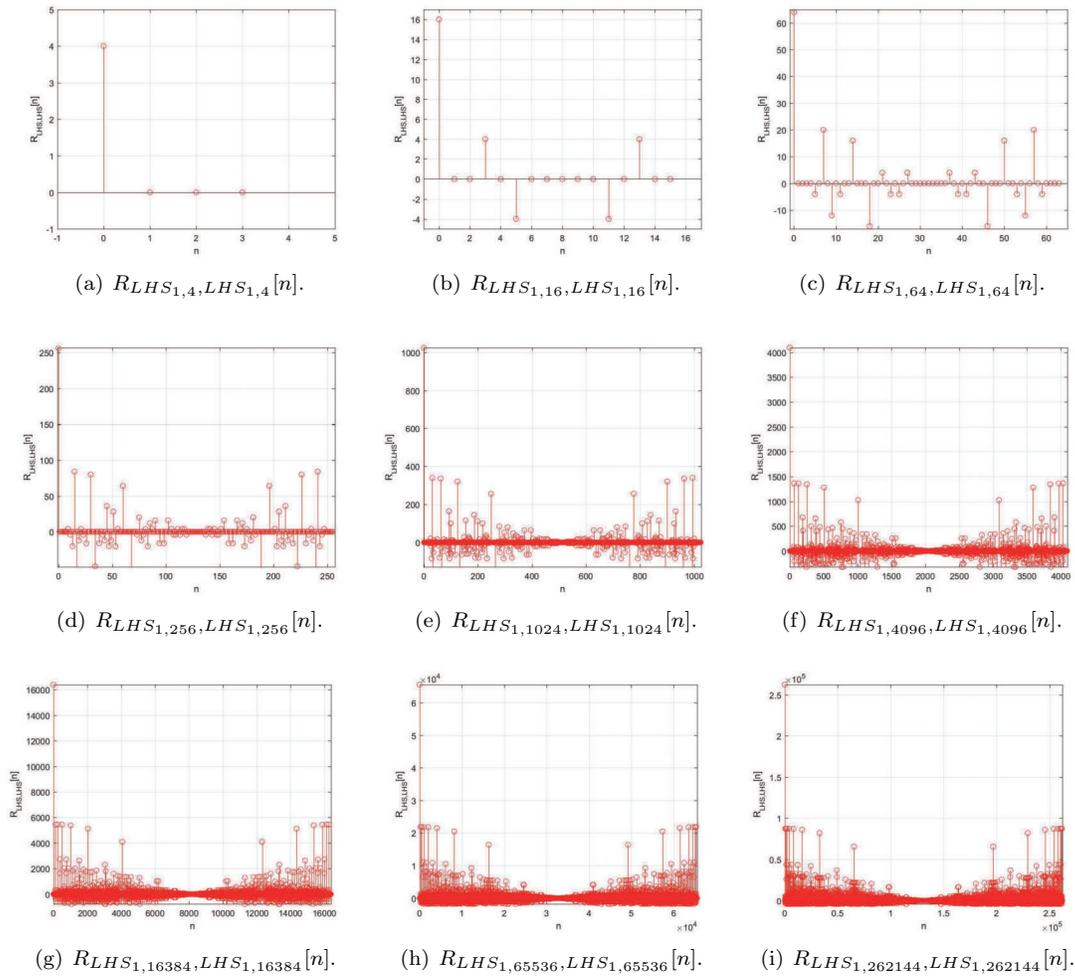


Figura 3.2: Autocorrelación de las Secuencias Largas de Hadamard.

### 3.1.2. Secuencias Largas de Walsh

Las matrices Walsh 1.8.1 mantiene las propiedades de las matrices de Hadamard, por lo que de igual manera se garantiza la presencia de un máximo y un mínimo periódico en la función de autocorrelación, además se presenta un ordenamiento creciente en función a la frecuencia.

Con base a lo anterior, se propone una secuencia que se obtiene de la concatenación secuenciada de las filas (o columnas) de las matrices de Walsh para generar un vector fila (o vector columna), es decir, considerando la matriz de Walsh  $W_{2,2}$ .

$$W_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{row}_1$$

$$\phantom{W_{2,2} = } \phantom{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} \Rightarrow \text{row}_2$$

$$W_{2,2} \Rightarrow [row_1, row_2] = LWS_{1,4}$$

lo que nos lleva a.

$$W_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow [1 \quad 1 \quad 1 \quad -1] = LWS_{1,4}$$

Tendremos una modificación de una matriz cuadrada  $W_{2^k, 2^k}$  a un vector de longitud  $LWS_{1, 2^{2k}}$ .

Con base a lo anterior, se propone una *secuencia larga de Hadamard* como una señal de potencia descrita por la ecuación 3.3. Como una señal digital se representa en la ecuación 3.4

$$LWS_{1, 2^{2k}} = \{row_1, row_2, row_3, \dots, row_{2^k}\} \quad (3.3)$$

$$LWS_{1, 2^{2k}}[n] = [row_1, row_2, row_3, \dots, row_{2^k}] \quad (3.4)$$

La autocorrelación de las Secuencias Largas de Walsh se muestran en la figura 3.3.

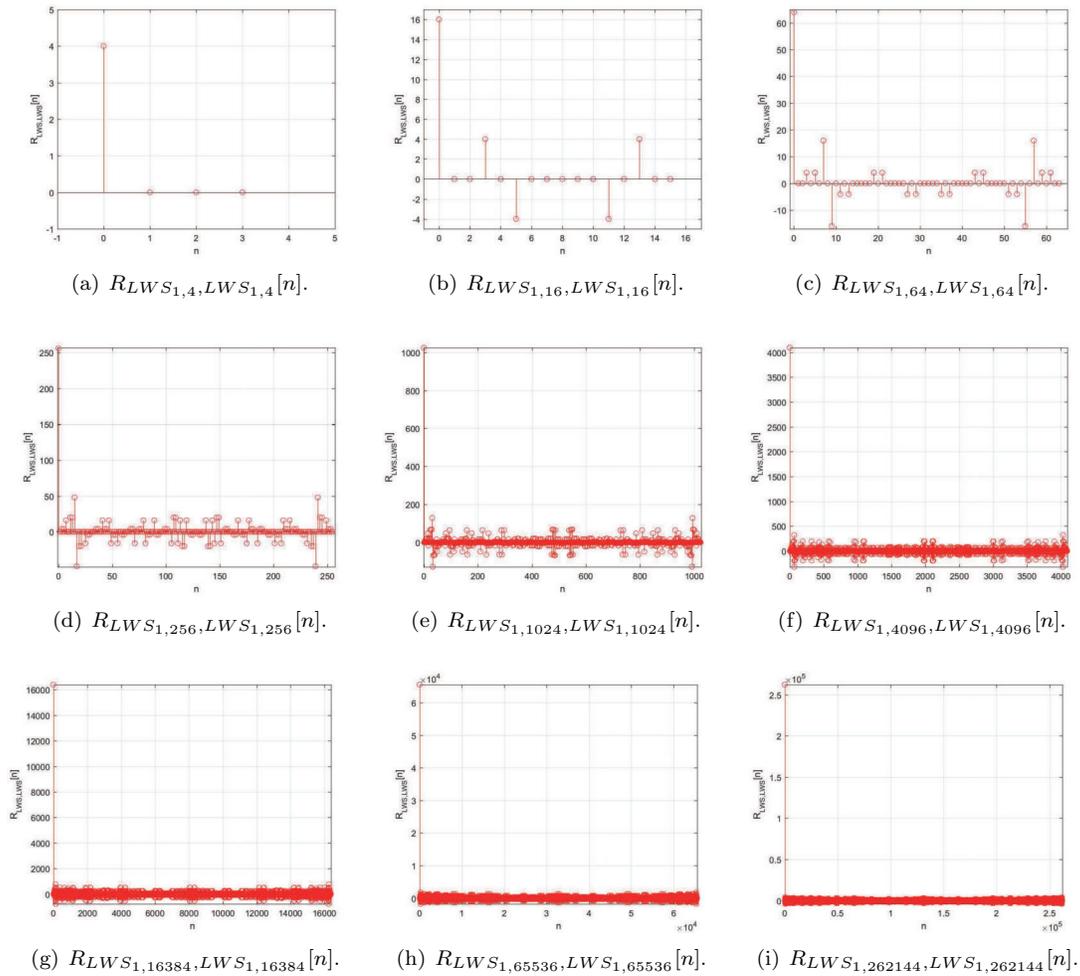


Figura 3.3: Autocorrelación de las Secuencias Largas de Walsh.

### 3.2. Autocorrelación de señales digitales en forma angular

La codificación de las señales digitales en forma angular se realiza mediante la función delta de Dirac definida en la ecuación 3.5.

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } \textit{otw}. \end{cases} \quad (3.5)$$

La codificación se realiza mediante la división de un segmento de recta de longitud  $2\pi$  en  $N$  segmentos de longitud menor y proporcional a  $N$ , como se muestra en la figura 3.4. Si la señal digital contiene un mayor número de elementos, se incrementa el número de segmentos de menor longitud,

pero a su vez, se reduce la longitud de estos. La longitud de cada segmento está definida en la ecuación 3.14.

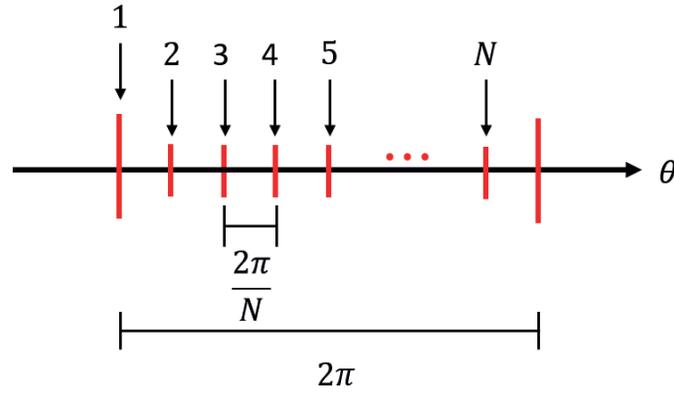


Figura 3.4: Codificación de la señal digital en forma angular.

$$\frac{2\pi}{N} \quad (3.6)$$

La autocorrelación en forma angular garantiza un valor máximo y periódico, con periodo  $2\pi$ . La ecuación 1.8 se modifican para dar paso a la ecuación 3.7.

$$R_{f,f}(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\phi + \theta)g(\phi) d\phi \quad (3.7)$$

Si se normaliza tenemos la ecuación 3.8

$$R_{f,f}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\phi + \theta)g(\phi) d\phi \quad (3.8)$$

La ecuación 3.8 puede ser vista como un promedio angular y podemos definirlo como en la ecuación 3.9.

$$\langle R_{f,f}(\theta) \rangle = R_{f,f}(\theta) \quad (3.9)$$

### 3.2.1. Secuencias Largas de Hadamard

$$LHS(\theta) = \sum_{m=0}^{N-1} LHS[m]\delta\left(\theta - \frac{2\pi}{N}m\right) \quad (3.10)$$

donde  $N$  es la longitud de la secuencia.

Ya que se distribuye la señal digital angularmente, su autocorrelación solo existirá en los puntos donde se encuentre un valor de la señal digital, por lo que podemos definirla como en la ecuación 3.11

$$R_{LHS,LHS}(\theta) = \langle R_{LHS,LHS}(\frac{2\pi}{N}n) \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} LHS[m+n]LHS[m] \quad (3.11)$$

La autocorrelación angular normalizada se muestra en la figura 3.5.

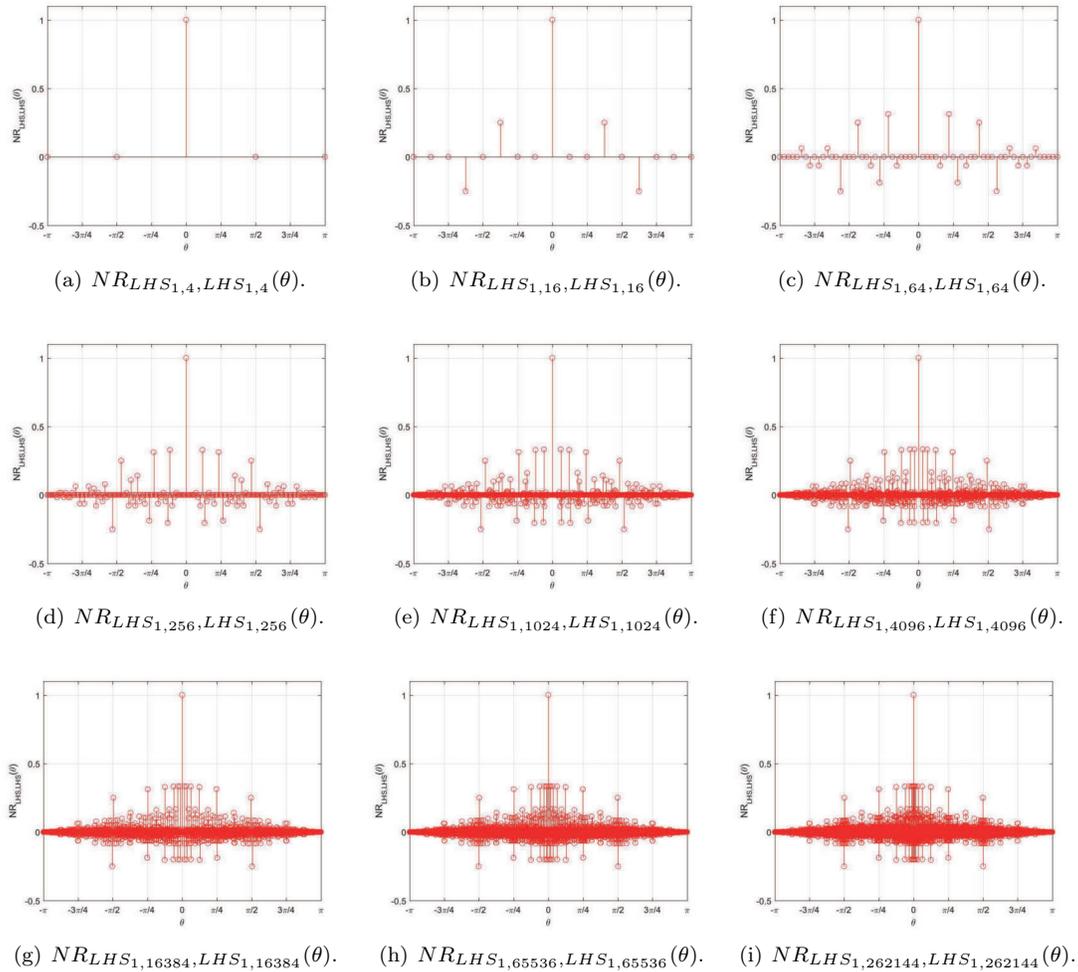


Figura 3.5: Autocorrelación angular de las Secuencias Largas de Hadamard.

### 3.2.2. Secuencias Largas de Walsh

$$LWS(\theta) = \sum_{m=0}^{N-1} LWS[m] \delta\left(\theta - \frac{2\pi}{N}m\right) \quad (3.12)$$

donde  $N$  es la longitud de la secuencia.

Ya que se distribuye la señal digital angularmente, su autocorrelación solo existirá en los puntos donde se encuentre un valor de la señal digital, por lo que podemos definirla como en la ecuación 3.13

$$R_{LWS,LWS}(\theta) = \langle R_{LWS,LWS}\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} LWS[m+n]LWS[m] \quad (3.13)$$

La autocorrelación angular normalizada se muestra en la figura 3.6.

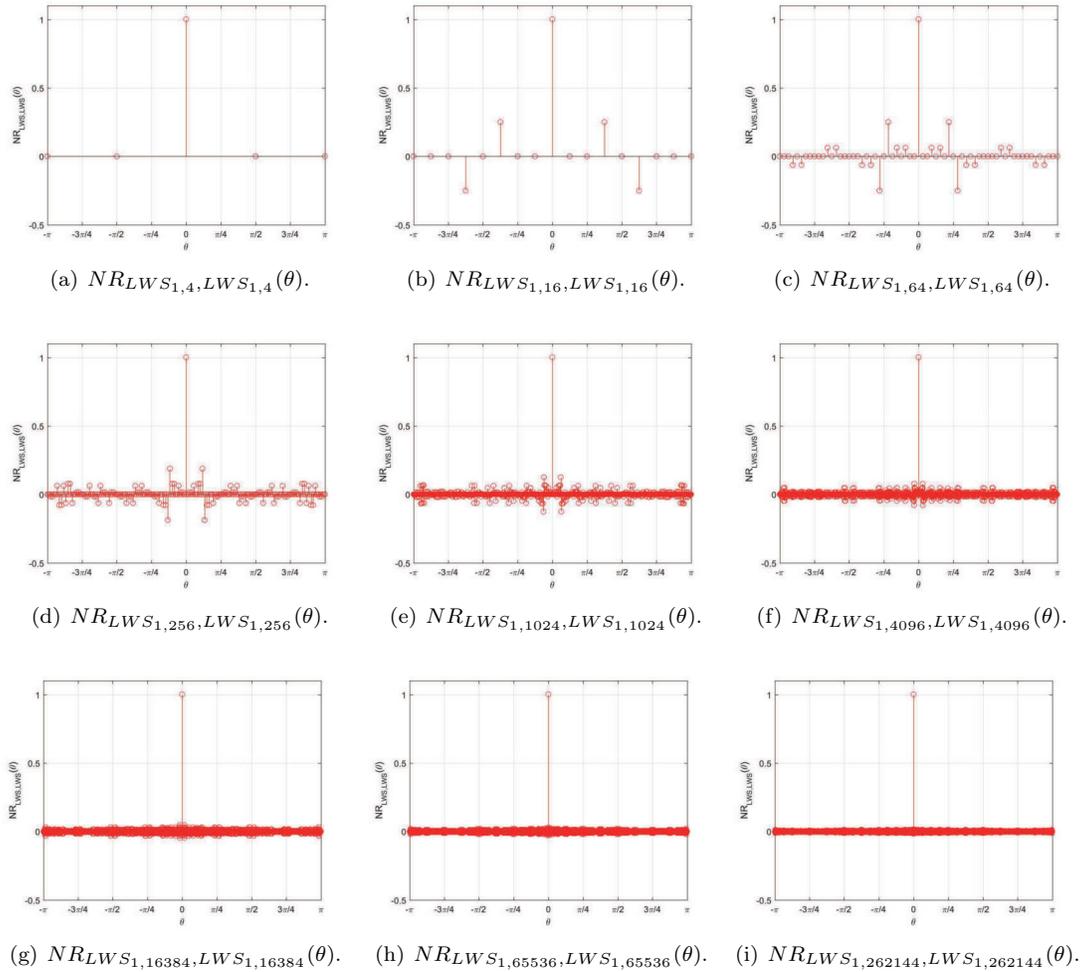


Figura 3.6: Autocorrelación angular de las Secuencias Largas de Walsh.

### 3.3. Codificación de máscaras binarias

Las máscaras binarias se generan mediante la distribución de una secuencia en particular en dos dimensiones, dependiendo la aplicación es el tipo de máscara que se genera.

#### 3.3.1. Máscaras binarias de Hadamard

Las máscaras binarias de Hadamard consisten en una distribución de las matrices de Hadamard de múltiples formas. Se utilizan para incrementar el poder de captación de luz en los espectro-metros ópticos [23], [24], para incrementar la profundidad de campo y la resolución en imágenes [25].

La codificación que se muestra es el par ordenado  $(\mu, \nu)$ , que son el par ordenado de  $(x, y)$  en el dominio de la frecuencia espacial; además que al ser un diseño en el espacio frecuencial, la variable  $\Omega$  es la longitud de la máscara, la cual para un sistema óptico lineal representa la apertura de la pupila.

Tabla 3.2: Codificación de las máscaras binarias de Hadamard.

| Codificación        | Referencia |
|---------------------|------------|
| Rectangular         | [23], [24] |
| Circular            | [25]       |
| Circular cuadrática | [25]       |

### Codificación rectangular

Considerando la matriz de Hadamard  $H_{2,2}$ , la codificación rectangular se muestra en la figura 3.7.

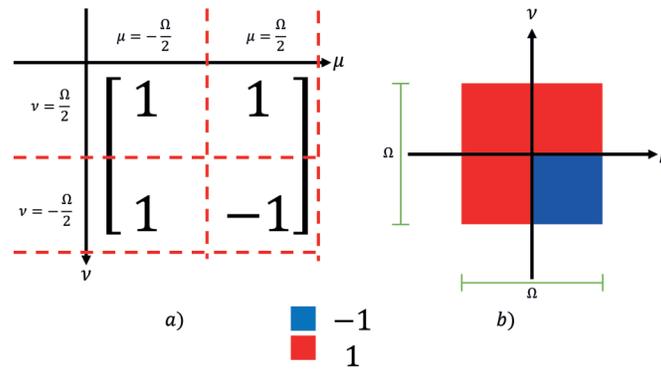


Figura 3.7: Máscara con codificación rectangular de Hadamard. a) Matriz de Hadamard  $H_{2,2}$  en un plano mediante coordenadas cartesianas y b) su codificación rectangular para generar la máscara  $H_{2,2}(\mu, \nu)$ .

Para las matrices de Hadamard con valor  $k = 1$  hasta  $k = 8$ , las máscaras de codificación rectangular de Hadamard se muestran en la figura 3.8.

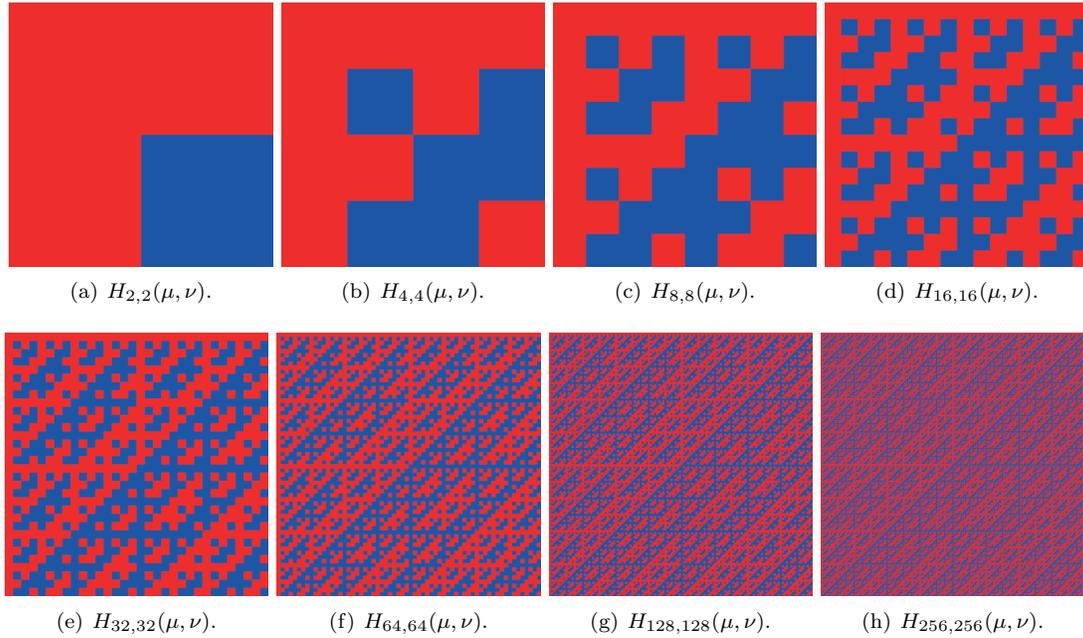


Figura 3.8: Máscaras de codificación rectangular de Hadamard  $H_{2^k, 2^k}(\mu, \nu)$ .

### Codificación circular

Para la codificación circular se realiza un cambio a coordenadas polares  $(\rho, \varphi)$ , para una representación radial y angular. Para realizar dicho cambio de coordenadas del par ordenado  $(\mu, \nu)$  a  $(\rho, \varphi)$  se hace uso de las ecuaciones 3.14 y 3.15

$$\rho = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \quad (3.14)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\nu}{\mu} \quad (3.15)$$

Considerando la matriz de Hadamard  $H_{2,2}$ , la codificación circular se muestra en la figura 3.9.

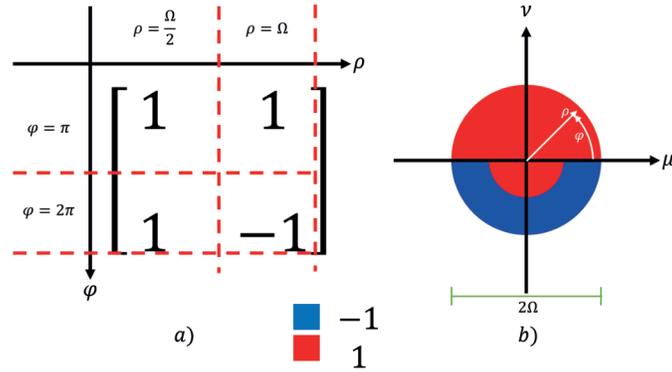


Figura 3.9: Máscara con codificación circular de Hadamard. a) Matriz de Hadamard  $H_{2,2}$  en un plano mediante coordenadas polares y b) su codificación circular para generar la máscara  $H_{2,2}(\mu, \nu)$ .

Para las matrices de Hadamard con valor  $k = 1$  hasta  $k = 8$ , las máscaras de codificación circular de Hadamard se muestran en la figura 3.10.

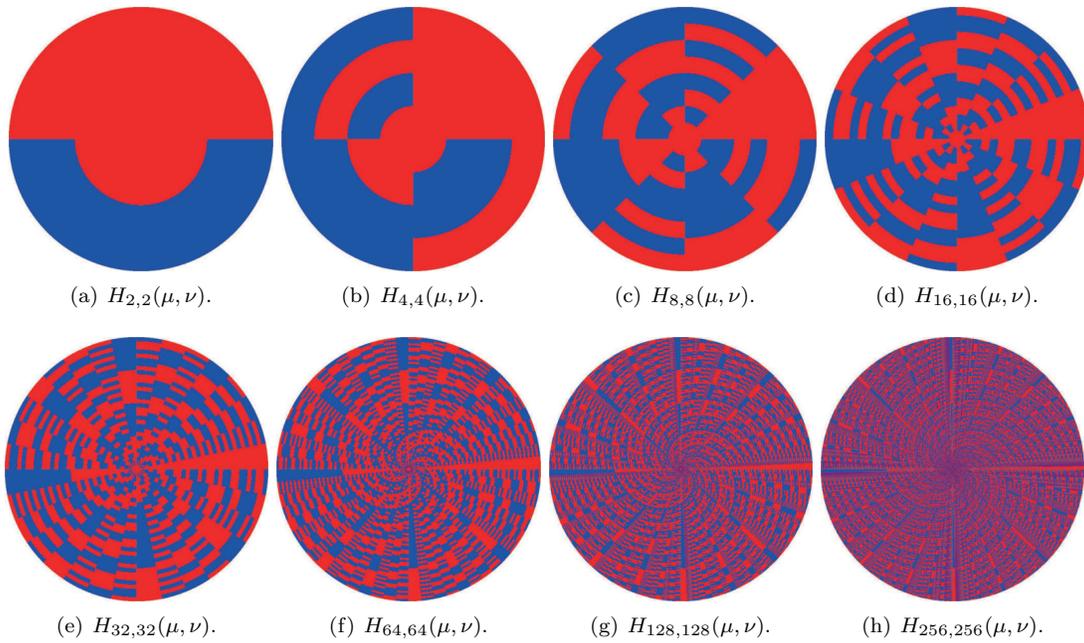


Figura 3.10: Máscaras de codificación circular de Hadamard  $H_{2^k, 2^k}(\mu, \nu)$ .

### Codificación circular cuadrática

Considerando la matriz de Hadamard  $H_{2,2}$ , la codificación circular cuadrática se muestra en la figura 3.11.

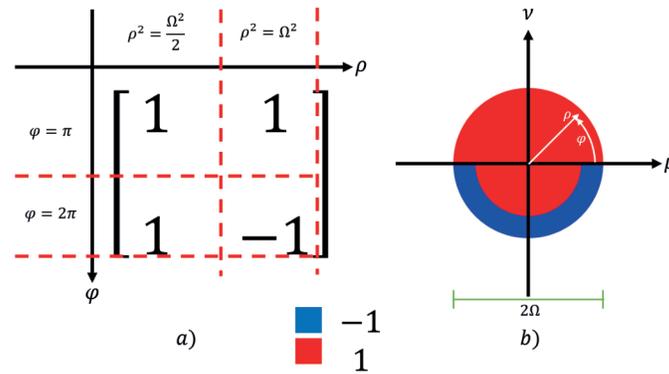


Figura 3.11: Máscara con codificación circular cuadrática de Hadamard. a) Matriz de Hadamard  $H_{2,2}$  en un plano mediante coordenadas polares y b) su codificación circular cuadrática para generar la máscara  $H_{2,2}(\mu, \nu)$ .

Para las matrices de Hadamard con valor  $k = 1$  hasta  $k = 8$ , las máscaras de codificación circular cuadrática de Hadamard se muestran en la figura 3.12.

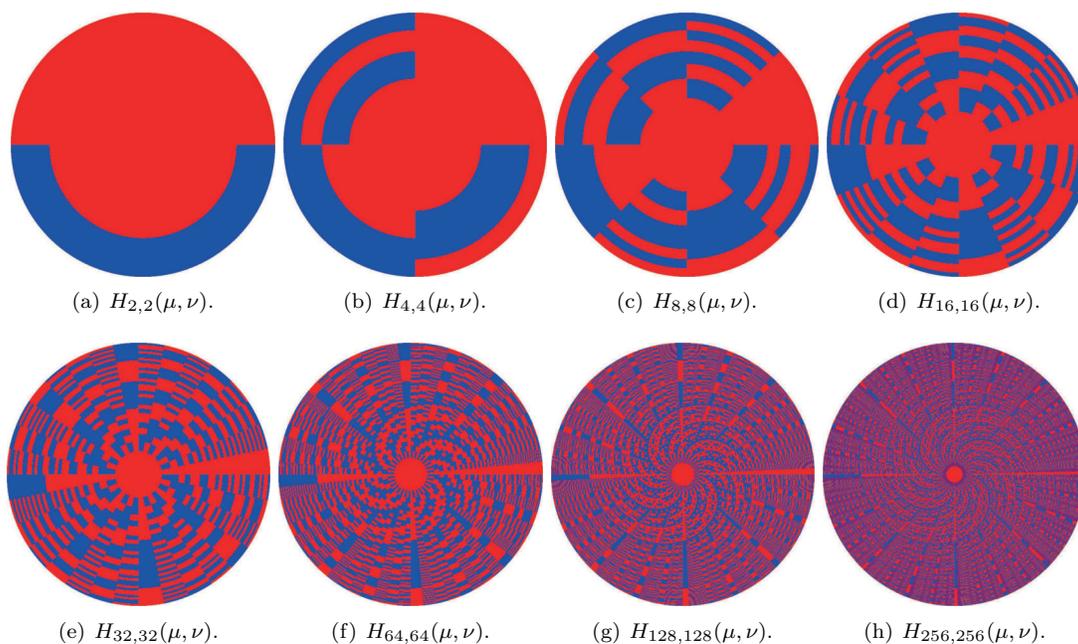


Figura 3.12: Máscaras de codificación circular cuadrática de Hadamard  $H_{2^k, 2^k}(\mu, \nu)$ .

### 3.3.2. Máscaras binarias de Barker

Las máscaras binarias de Barker consisten en una distribución de las secuencias de Barker de múltiples formas. Utilizadas principalmente en radares y en [4] para realizar alineaciones angulares.

La codificación que se muestra es el par ordenado  $(\mu, \nu)$ , que son el par ordenado de  $(x, y)$  en el dominio de la frecuencia espacial, además que al ser un diseño en el espacio frecuencial, la variable  $\Omega$  es la longitud de la máscara, la cual para un sistema óptico lineal representa la apertura de la pupila.

Tabla 3.3: Codificación de las máscaras binarias de Barker.

| Codificación   | Referencia |
|----------------|------------|
| Impulso        | [4]        |
| Impulso anular | [4]        |

#### Codificación impulso

Haciendo uso de la función delta de Dirac descrita en la ecuación 3.5, la codificación impulso considerando la secuencia de Barker de longitud 5 se muestra en la figura 3.13.

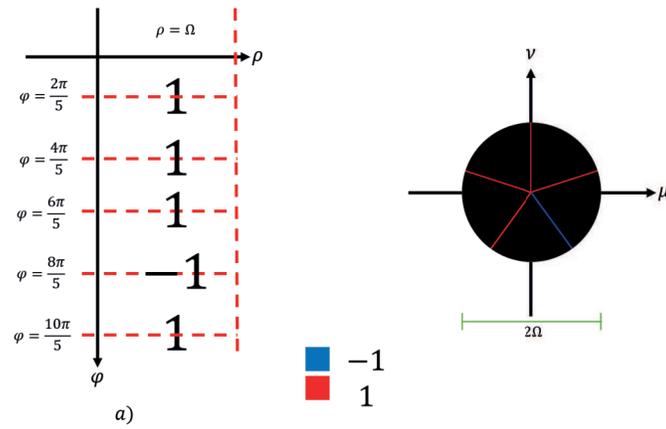


Figura 3.13: Máscara con codificación impulso Barker. a) Secuencia Barker  $N = 5$  en un plano mediante coordenadas polares y b) su codificación impulso para generar la máscara  $B_2(\mu, \nu)$ .

Para las secuencias Barker de longitud  $L = 2, 3, 4, 5, 7, 11$  y  $13$ , las máscaras de codificación impulso de Barker se muestran en la figura 3.14.

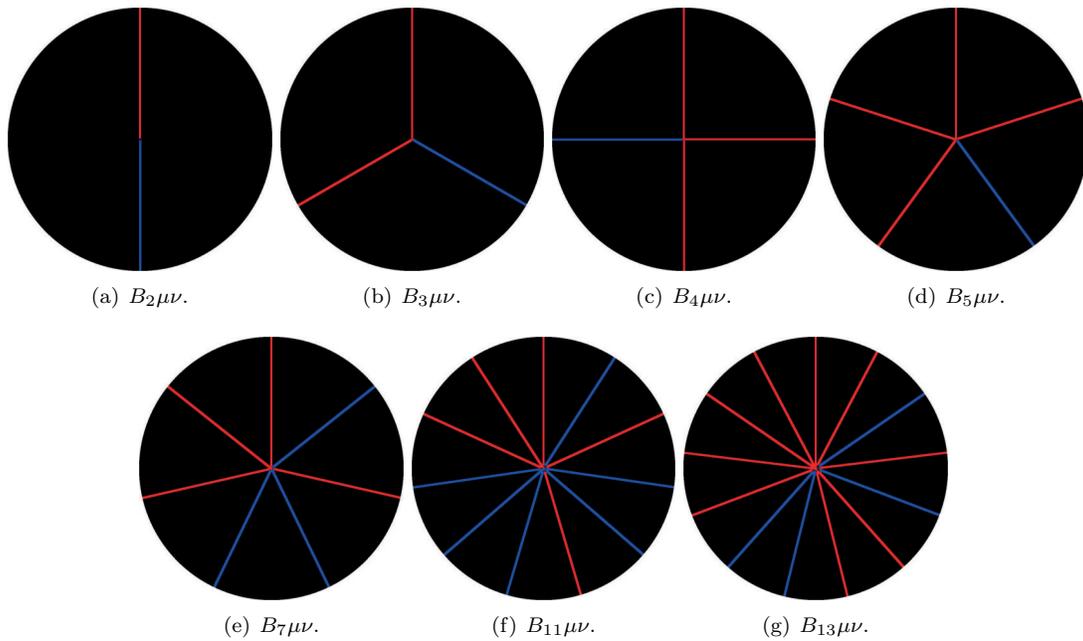


Figura 3.14: Máscaras de codificación impulso de Barker  $B_L(\mu, \nu)$ .

### Codificación impulso anular

Haciendo uso de la función delta de Dirac descrita en la ecuación 3.5, la codificación impulso anular considerando la secuencia de Barker de longitud 5 se muestra en la figura 3.15.

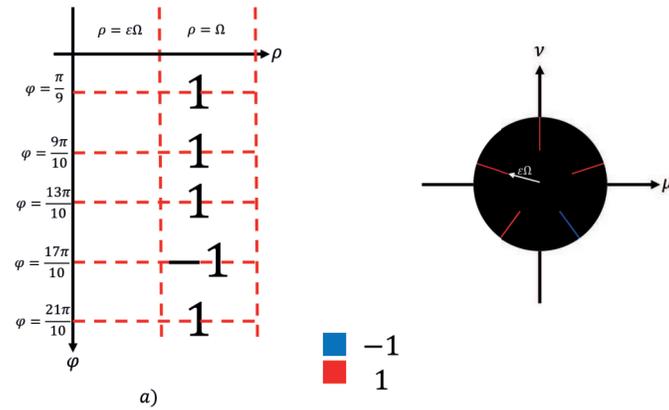


Figura 3.15: Máscara con codificación impulso anular Barker. a) Secuencia Barker  $N = 5$  en un plano mediante coordenadas polares y b) su codificación impulso anular para generar la máscara  $B_2(\mu, \nu)$ .

Para las secuencias Barker de longitud  $L = 2, 3, 4, 5, 7, 11$  y  $13$ , las máscaras de codificación impulso anular de Barker se muestran en la figura 3.16.

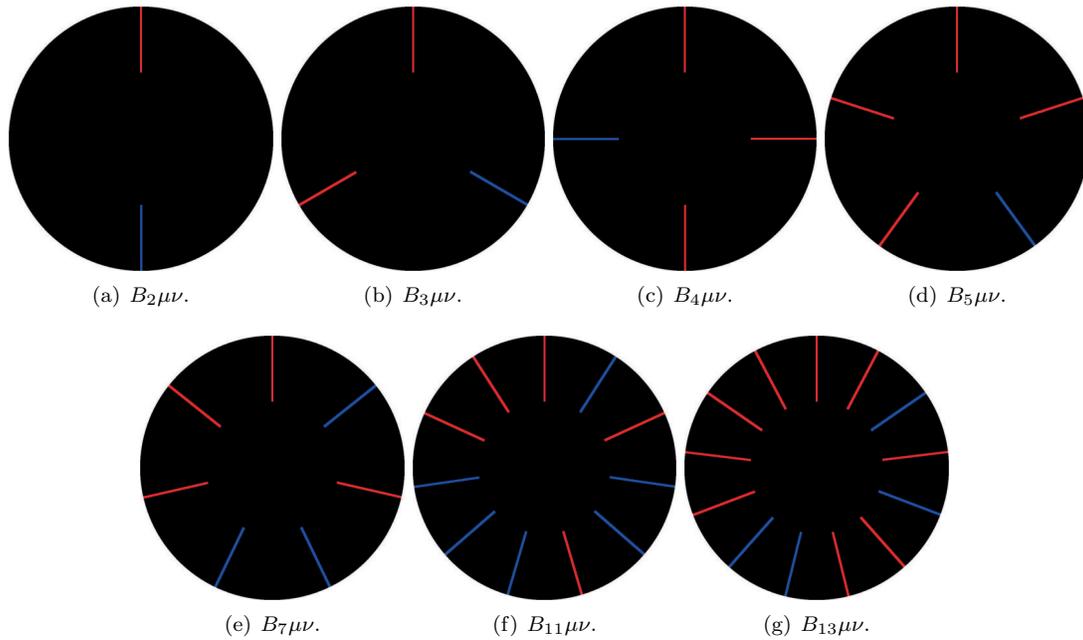


Figura 3.16: Máscaras de codificación impulso anular de Barker  $B_L(\mu, \nu)$  con un valor de  $\epsilon = \frac{1}{2}$ .

### 3.3.3. Máscaras binarias de las secuencias largas de Hadamard

#### Codificación impulso

Las máscaras binarias con codificación impulso de las secuencias largas de Hadamard se muestran en la figura 3.17.

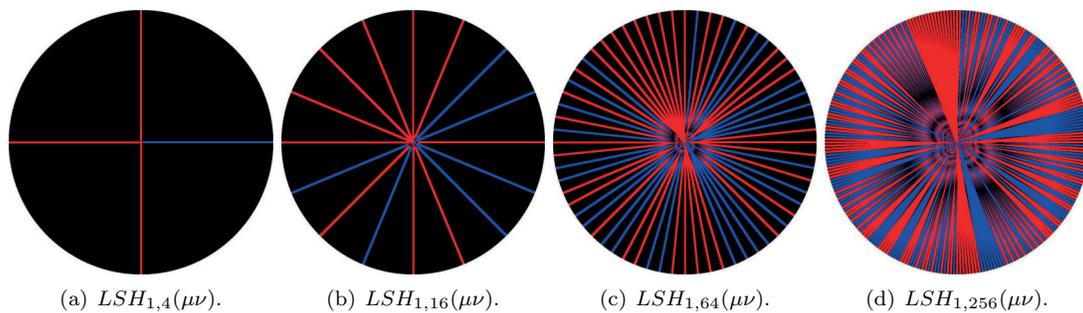


Figura 3.17: Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Hadamard  $LSH_{1,2^{2k}}(\mu, \nu)$ .

**Codificación impulso anular**

Las máscaras binarias con codificación impulso anular de las secuencias largas de Hadamard se muestran en la figuras 3.18 a 3.21.

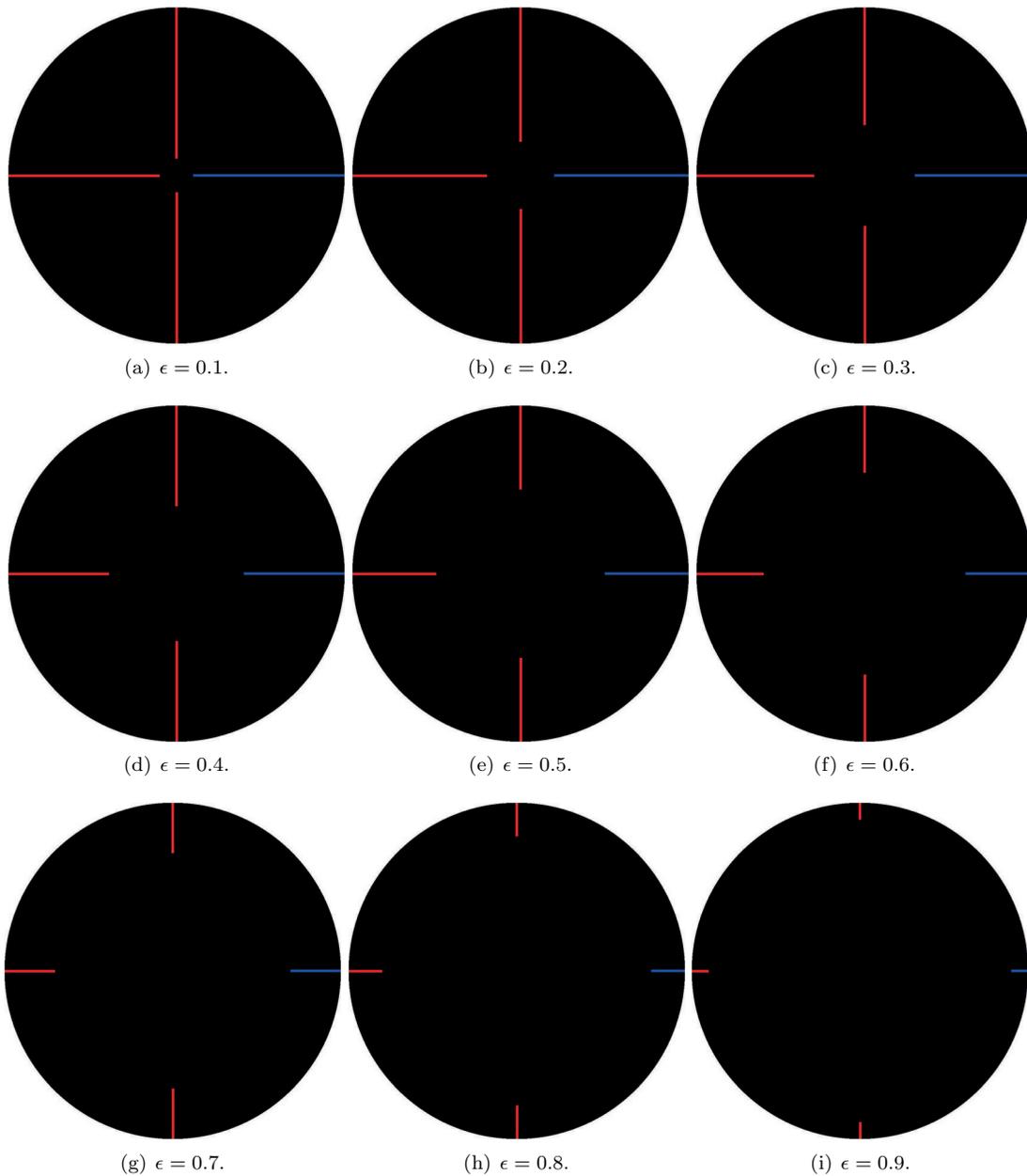


Figura 3.18: Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Hadamard  $LSH_{1,4}(\mu, \nu)$ .

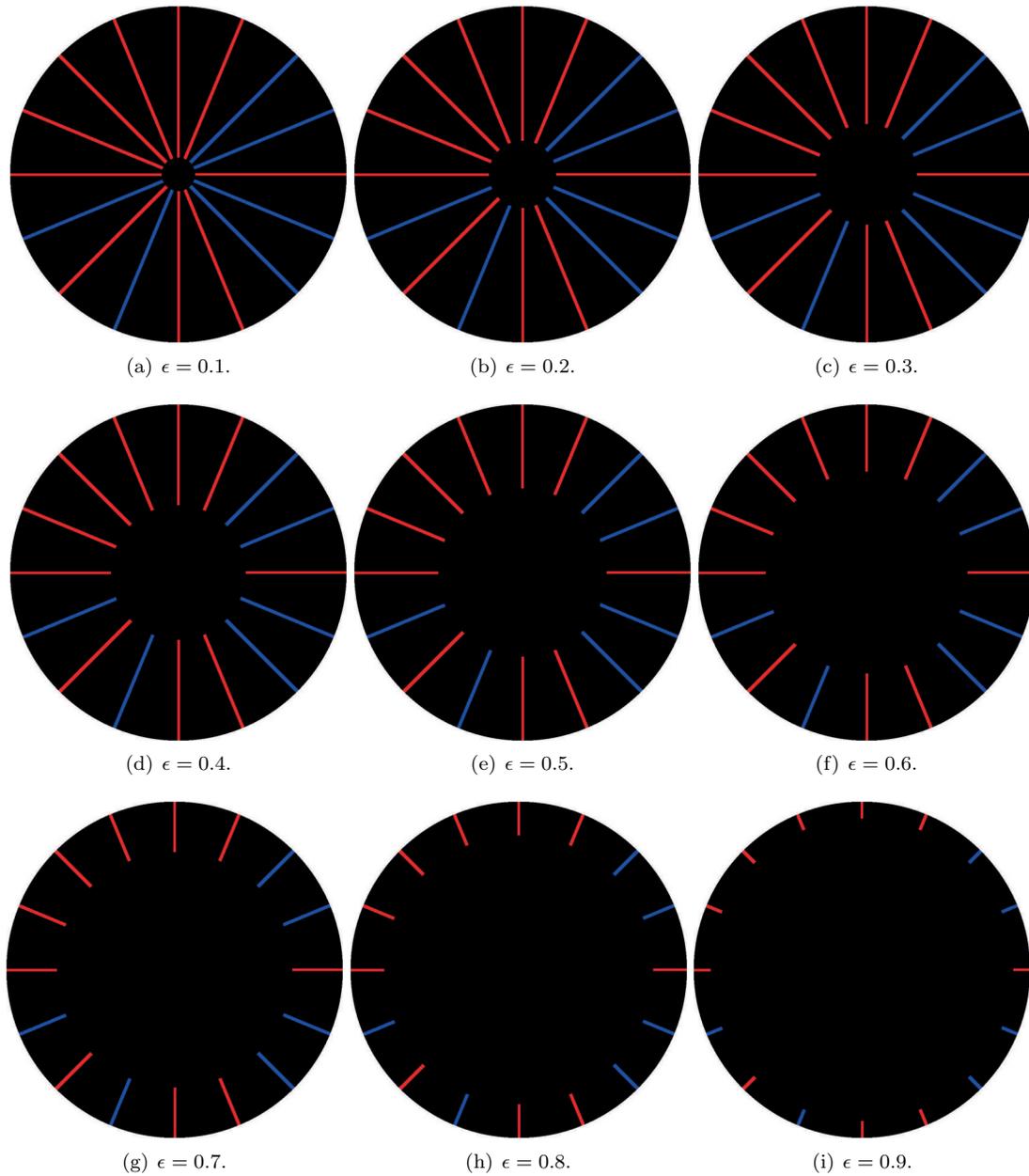


Figura 3.19: Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Hadamard  $LSH_{1,16}(\mu, \nu)$ .

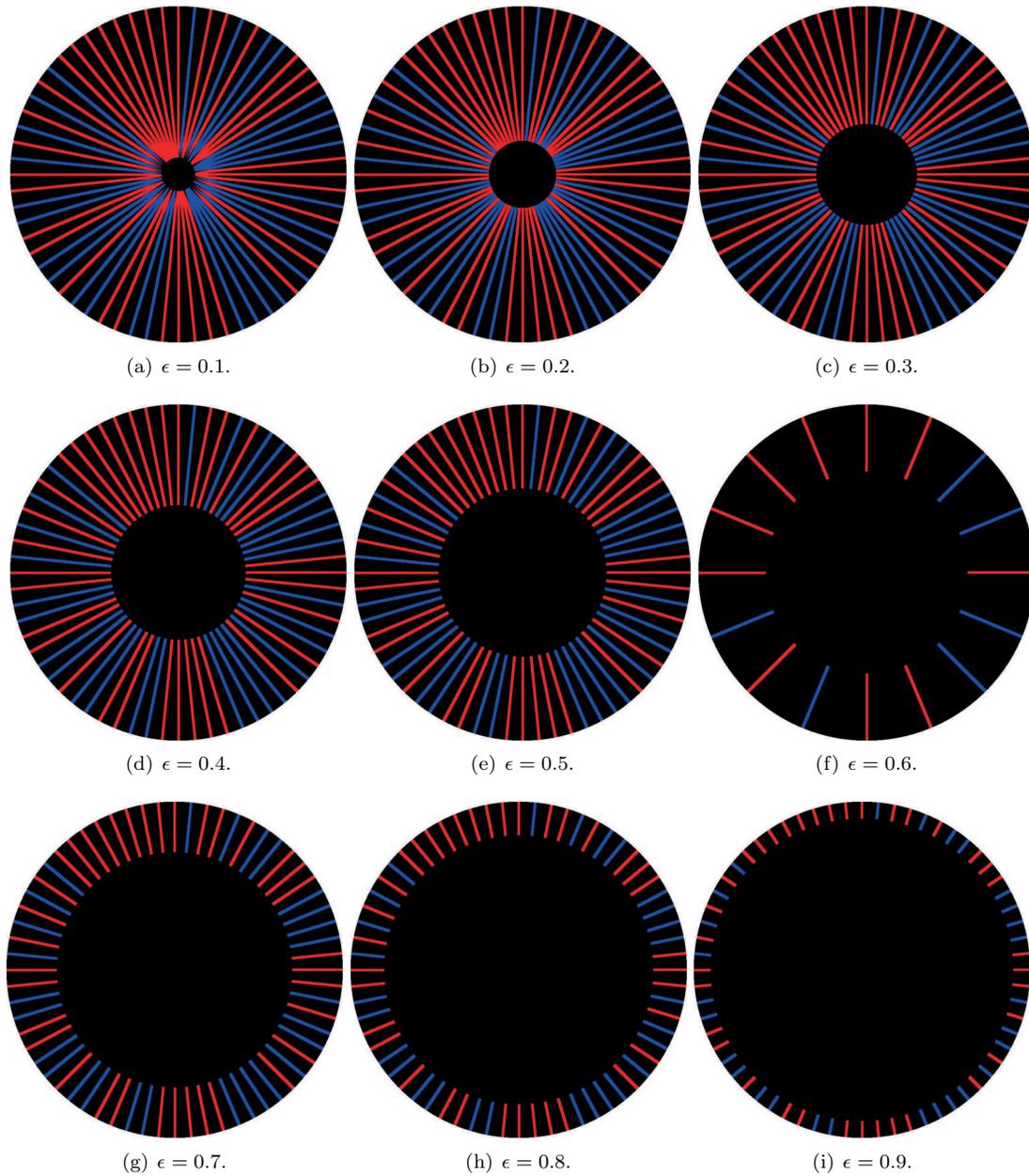


Figura 3.20: Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Hadamard  $LSH_{1,64}(\mu, \nu)$ .

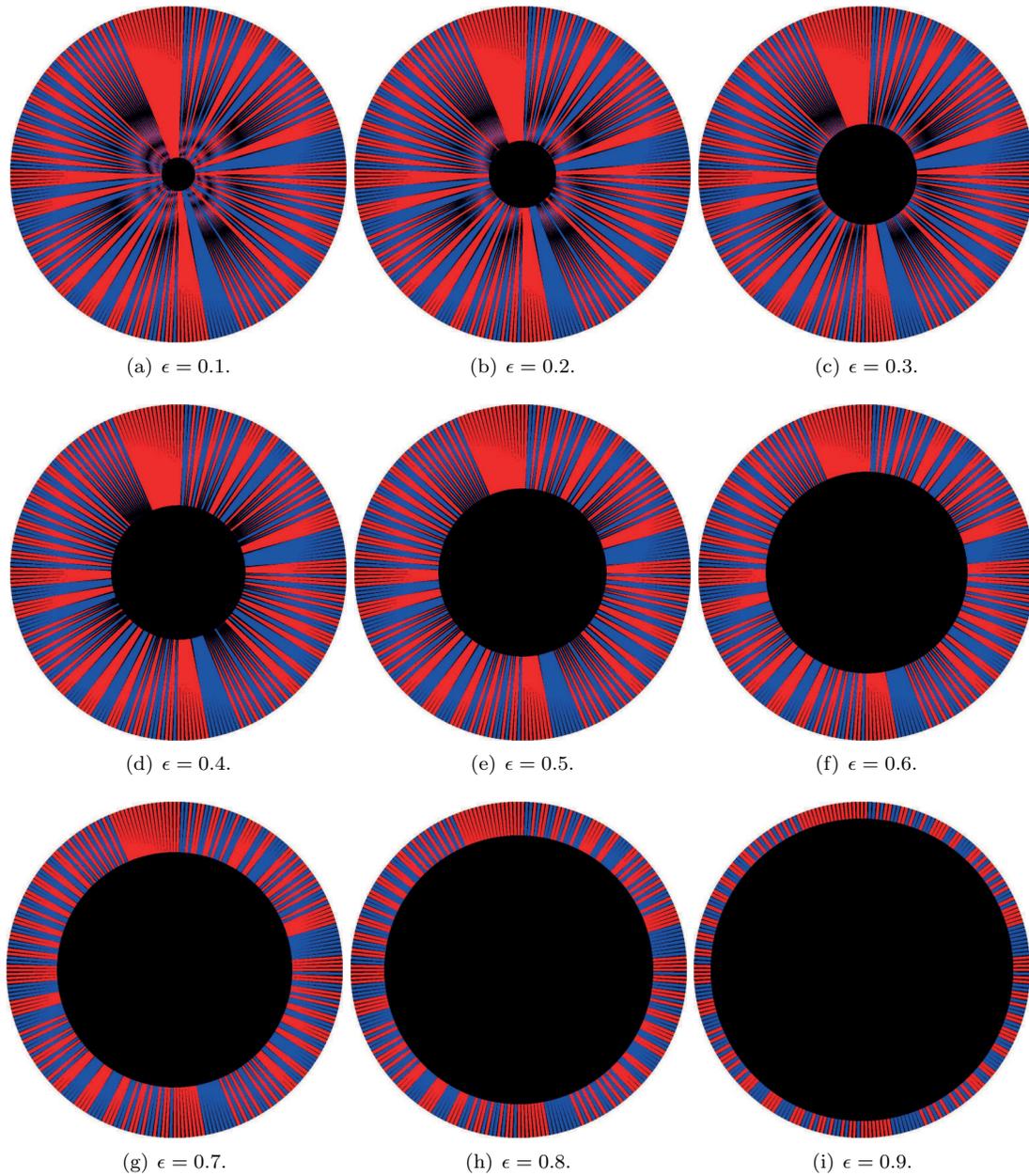


Figura 3.21: Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Hadamard  $LSH_{1,256}(\mu, \nu)$ .

Como se aprecia en las figuras 3.18 a 3.21, a una mayor separación del centro de la máscara se tiene una distribución más práctica de la secuencia (debido al incremento del perímetro).

### 3.3.4. Máscaras binarias de las secuencias largas de Walsh

#### Codificación impulso

Las máscaras binarias con codificación impulso de las secuencias largas de Walsh se muestran en la figura 3.22.

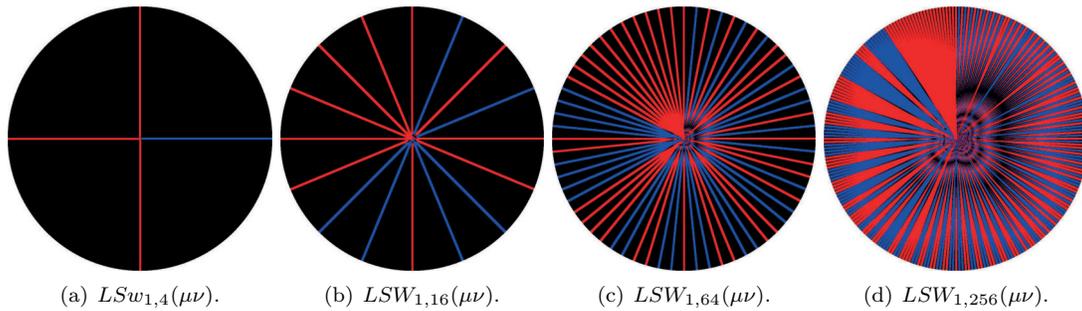


Figura 3.22: Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Walsh  $LSW_{1,2^k}(\mu, \nu)$ .

#### Codificación impulso anular

Las máscaras binarias con codificación impulso anular de las secuencias largas de Walsh se muestran en la figuras 3.23 a 3.26.

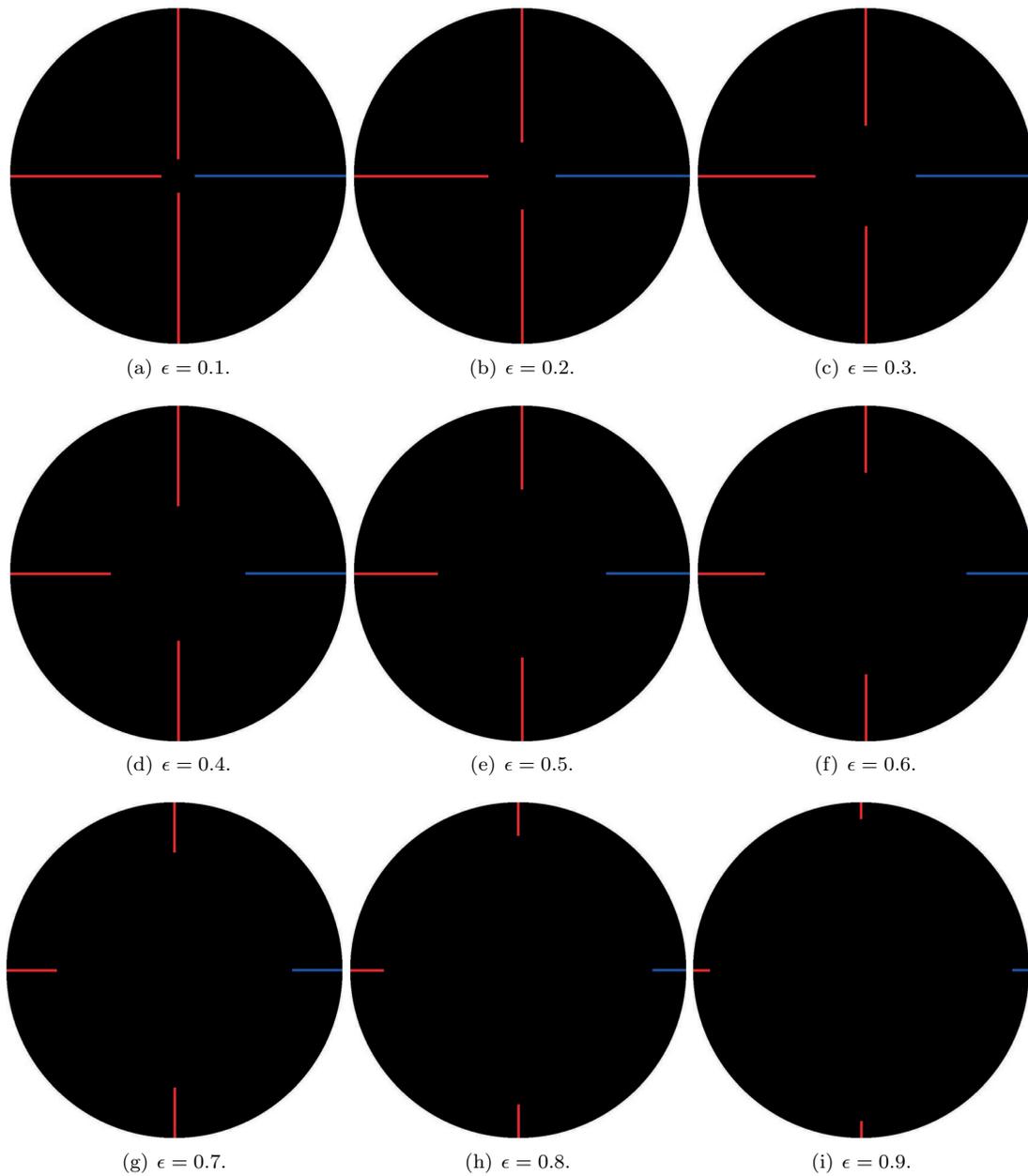


Figura 3.23: Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Walsh  $LSW_{1,4}(\mu, \nu)$ .

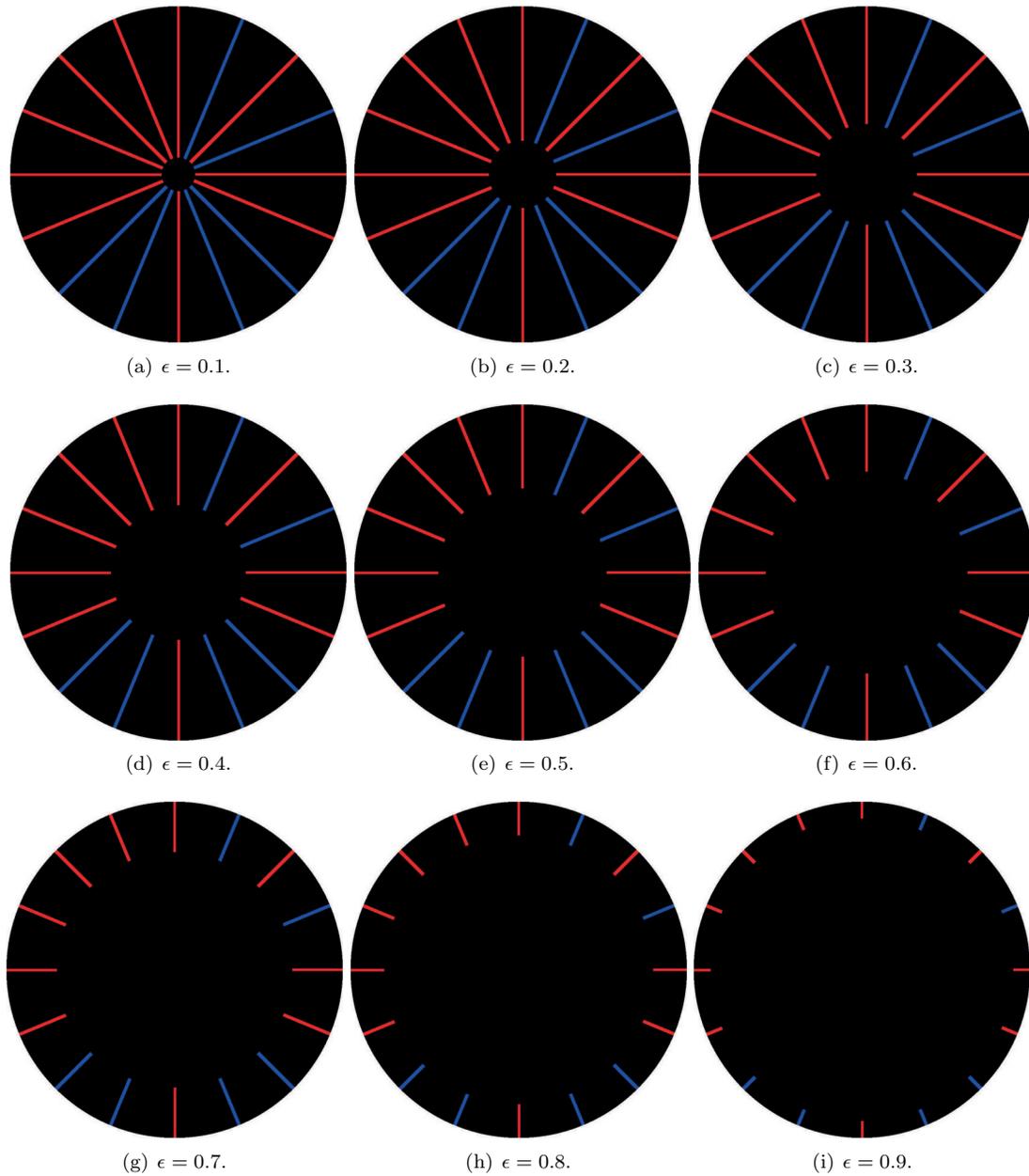


Figura 3.24: Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Walsh  $LSH_{1,16}(\mu, \nu)$ .

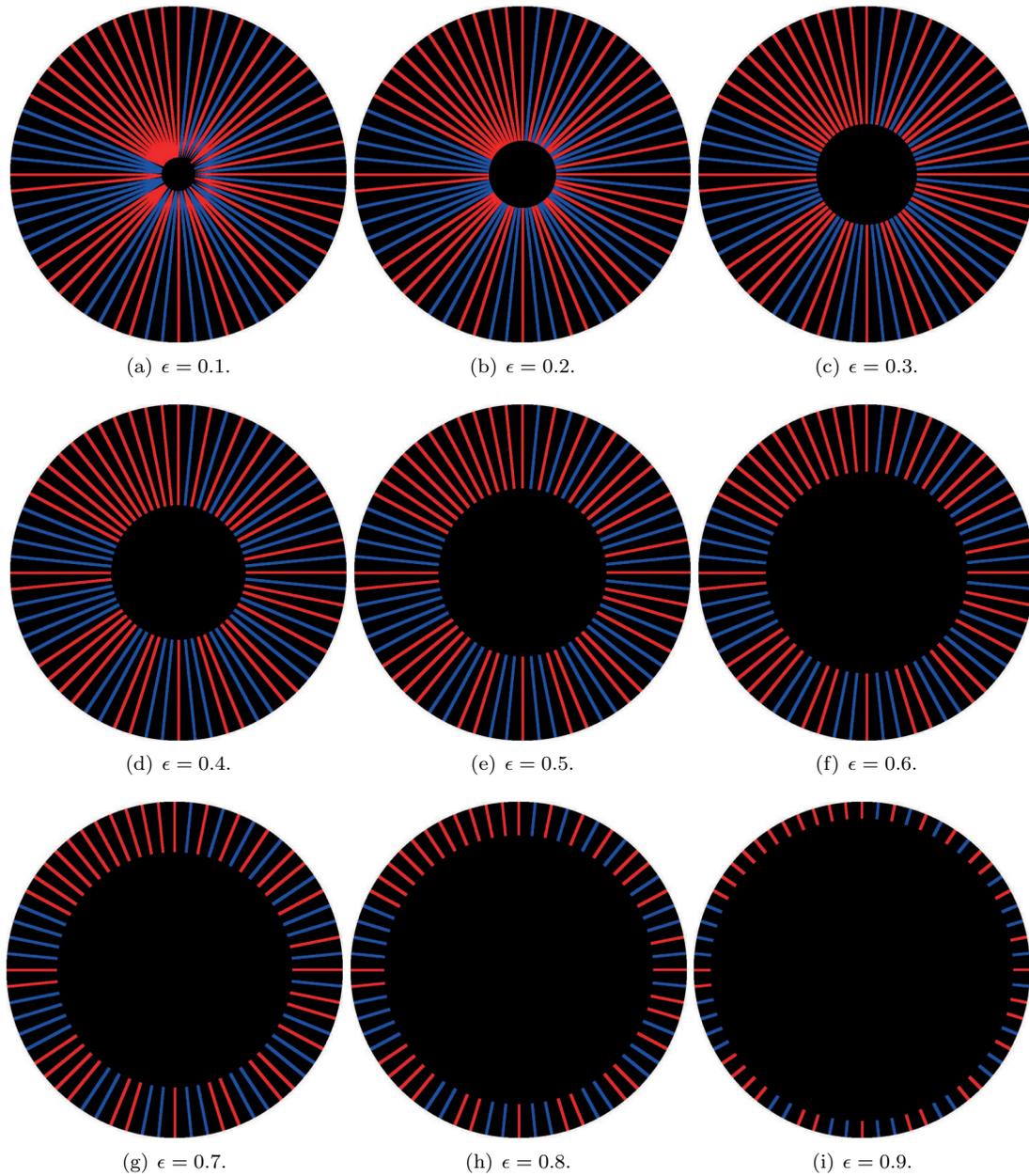


Figura 3.25: Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Walsh  $LSW_{1,64}(\mu, \nu)$ .

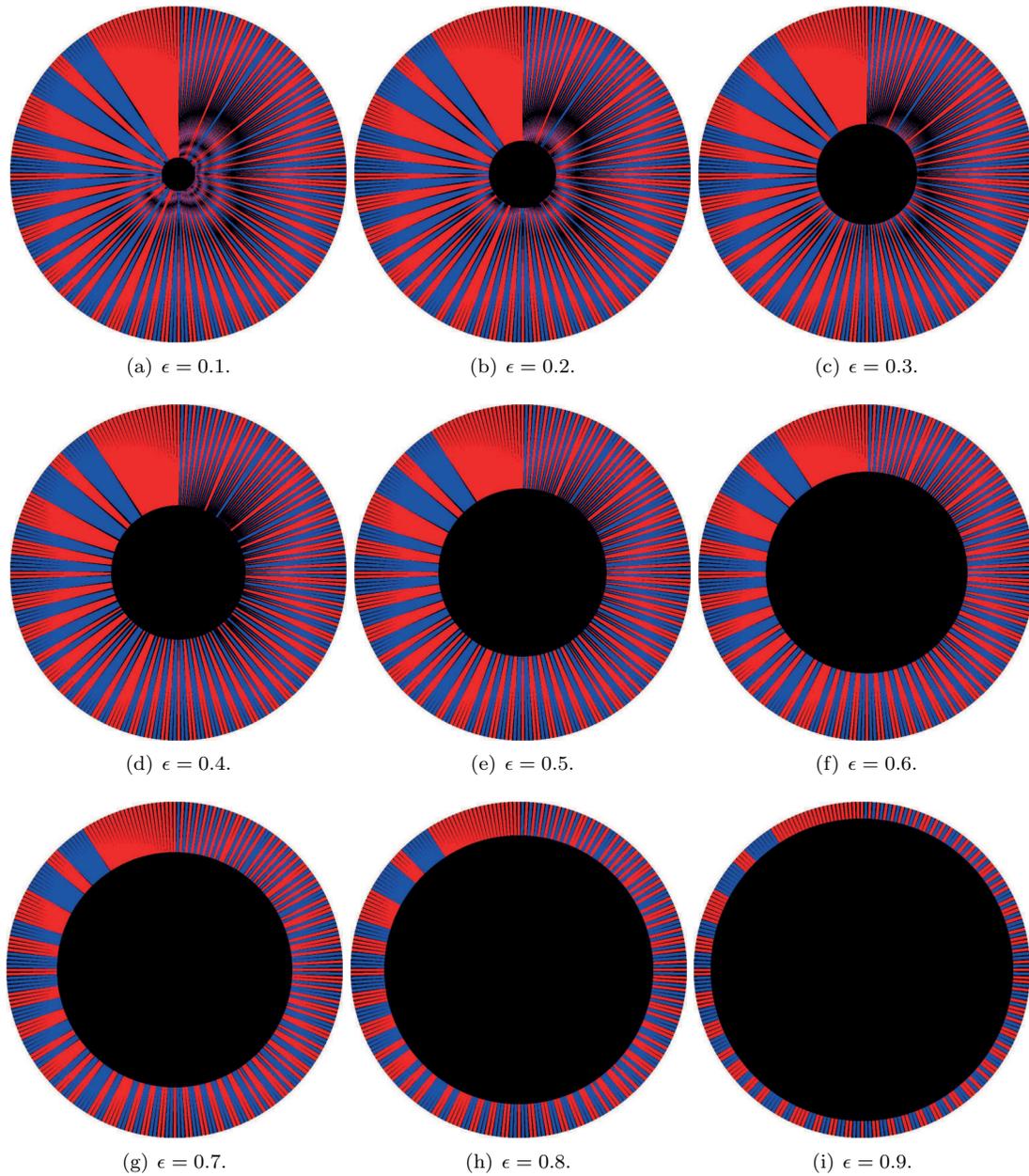


Figura 3.26: Máscaras de codificación impulso de las secuencias largas de Walsh  $LSW_{1,256}(\mu, \nu)$ .

Como se aprecia en las figuras 3.23 a 3.26, a una mayor separación del centro de la máscara se tiene una distribución más práctica de la secuencia (debido al incremento del perímetro).

### 3.4. Procesador óptico 4f

El procesador óptico 4f es comúnmente utilizado para la implementación de la operación de correlación, para la formación de imágenes, es decir, implementando la Función de Transferencia Óptica (OTF) y para evaluar las máscaras de alineación angular [4]. Particularmente las secuencias que contengan 1 y  $-1$  se traducen en cambios en magnitud de la máscara en el plano de Fraunhofer, siendo para un valor de  $-1$  un cambio en la fase de  $\pi$ .

La figura 3.27 muestra un procesador óptico 4f. Tenemos una fuente de luz coherente (por ejemplo un láser), a una distancia focal ( $f$ ) una lente convexa, en la siguiente distancia focal ( $2f$ ) se mostrará la transformada de Fourier de la fuente (al cual se le denomina plano de Fraunhofer en el par ordenado  $\mu, \nu$ ), en la siguiente distancia focal ( $3f$ ) tendremos nuevamente una lente convexa y finalmente en la siguiente distancia focal ( $4f$ ) se mostrará la transformada inversa de Fourier del plano de Fraunhofer.

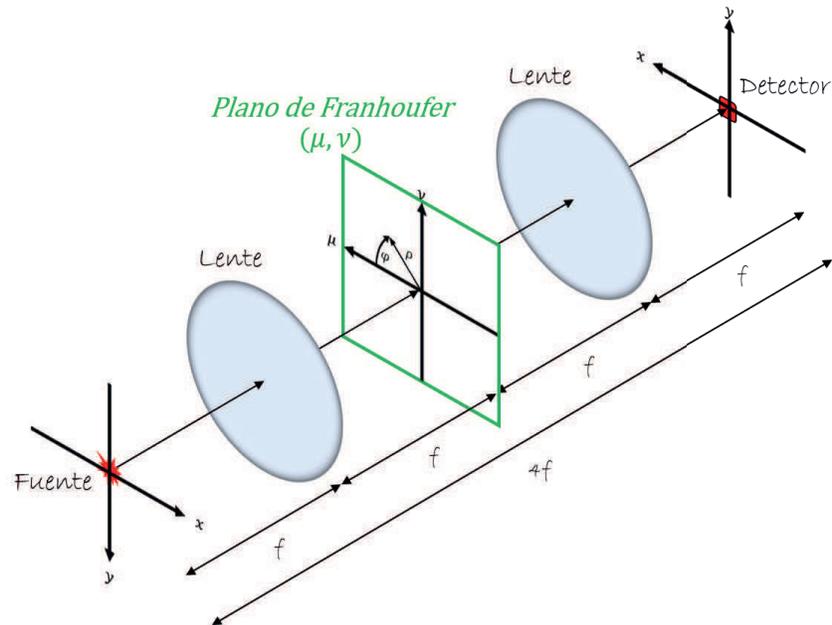


Figura 3.27: Procesador óptico 4f.

Con base a lo anterior, es posible implementar la convolución y correlación de cualquier par de señales mediante su multiplicación en el plano de Fraunhofer (teorema de convolución).

Para el presente trabajo, se colocarán las máscaras lo más cercano posible en el plano de Fraunhofer (para evitar la difracción de Fresnel), donde una permanecerá fija y la otra será la que estará rotando como se muestra en la figura 3.28. Partimos de una fuente puntual y obtenemos al final la misma fuente puntual, pero con una menor intensidad.

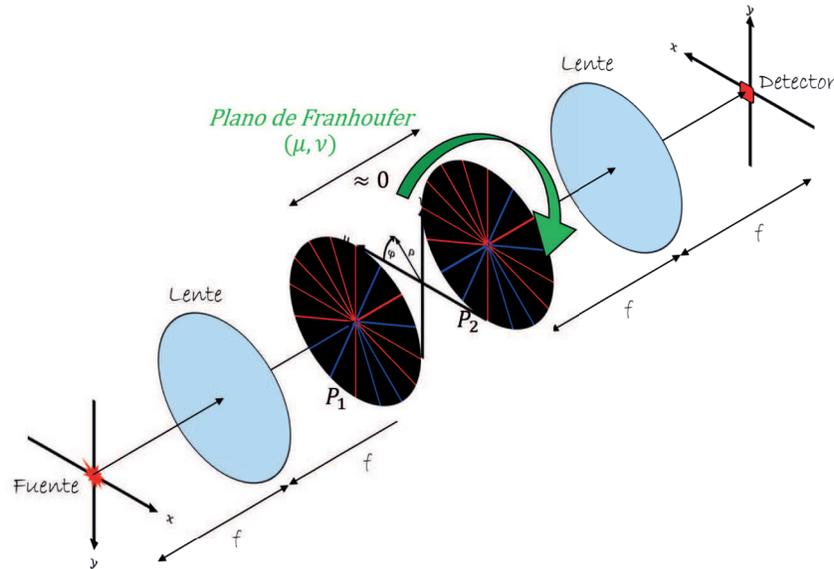


Figura 3.28: Procesador óptico 4f con las dos máscaras.

### 3.4.1. Sistema óptico

Con base a lo descrito en [4]. Considerando ambas máscaras como una pupila  $P_1$  y  $P_2$  con una transmitancia definida por la secuencia en particular, la multiplicación en el espacio frecuencial está definida en la ecuación 3.16, denominada transmitancia de amplitud compleja.

$$P(\rho, \phi; \alpha) = P_1(\rho, \phi + \frac{\alpha}{2})P_2(\rho, \phi - \frac{\alpha}{2}) \quad (3.16)$$

Ya que nos encontramos en el plano de Fraunhofer, la transformada inversa en coordenadas polares del producto de ambas pupilas está definido en la ecuación 3.17, que será lo que llegará al detector.

$$p(r, \theta; \alpha) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} P(\rho, \phi; \alpha) e^{i2\pi r \rho \cos(\theta - \phi)} d\rho d\phi \quad (3.17)$$

Como se propone con un detector que solo reciba un punto sobre el eje, nos interesa en el valor de  $r = 0$ , como se muestra en la ecuación 3.18.

$$p(r = 0, \theta; \alpha) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} P(\rho, \phi; \alpha) d\rho d\phi \quad (3.18)$$

La ecuación 3.18 nos proporciona lo que el detector recibe, colocado a una distancia focal y sobre el eje. Ya que la codificación se realizará angularmente (pues radialmente solo se limita por el valor de  $\Omega$ ), se propone que el promedio angular está definido como lo muestra la ecuación 3.19, que es la autocorrelación angular.

$$\langle P(\rho; \alpha) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_1(\rho, \phi + \frac{\alpha}{2})P_2(\rho, \phi - \frac{\alpha}{2}) d\phi \quad (3.19)$$

donde  $\alpha = \frac{2\pi}{N}n$ .

Ya que al ser una codificación impulso, solo se tendrá un valor en los puntos  $\alpha = \frac{2\pi}{N}n$ , en cualquier otro punto se tendrá un valor de cero transmitancia.

Considerando la función *circ*, descrita en la ecuación 3.20 y en la ecuación 3.21 para una región anular

$$\text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \leq \Omega = 0 \\ 0 & \text{si } \text{otw.} \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\text{circ}\left(\frac{\rho}{\epsilon\Omega}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon\rho \leq \Omega = 0 \\ 0 & \text{si } \text{otw.} \end{cases} \quad (3.21)$$

### 3.4.2. Secuencias Largas de Hadamard

La pupila  $PH_1(\rho, \phi)$  se define en la ecuación 3.22

$$PH_1(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{N-1} LHS[m] \delta\left(\theta - \frac{2\pi}{N}m\right) \text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) \quad (3.22)$$

Ya que la pupila  $PH_1(\rho, \phi)$  y la pupila  $PH_2(\rho, \phi)$  se generan de la misma forma, la autocorrelación angular definida mediante el promedio angular, está descrito por la ecuación 3.24.

$$\langle PH(\rho; \frac{2\pi}{N}n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} LHS[m+n] LHS[m] \text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) \quad (3.23)$$

Y para una región anular, está descrita en la ecuación 3.25, la cual es consistente con la ecuación 3.13

$$\langle PH_\epsilon(\rho; \frac{2\pi}{N}n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} LHS[m+n] LHS[m] (\text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) - \text{circ}\left(\frac{\rho}{\epsilon\Omega}\right)) \quad (3.24)$$

### 3.4.3. Secuencias Largas de Walsh

La pupila  $PW_1(\rho, \phi)$  se define en la ecuación 3.25

$$PW_1(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{N-1} LWS[m] \delta\left(\theta - \frac{2\pi}{N}m\right) \text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) \quad (3.25)$$

Ya que la pupila  $PW_1(\rho, \phi)$  y la pupila  $PW_2(\rho, \phi)$  se generan de la misma forma, la autocorrelación angular definida mediante el promedio angular, está descrito por la ecuación 3.26.

$$\langle PW(\rho; \frac{2\pi}{N}n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} LWS[m+n] LWS[m] \text{circ}\left(\frac{\rho}{\Omega}\right) \quad (3.26)$$

Y para una región anular, está descrita en la ecuación 3.27, la cual es consistente con la ecuación 3.13

$$\langle PW_\epsilon(\rho; \frac{2\pi}{N}n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} LWS[m+n]LWS[m](\text{circ}(\frac{\rho}{\Omega}) - \text{circ}(\frac{\rho}{\epsilon\Omega})) \quad (3.27)$$

### 3.5. Relación Señal a Ruido (SNR) para las secuencias

Al ser un sistema óptico, es importante definir un valor de SNR que supere el valor del ruido blanco, esto para garantizar que el valor obtenido pertenece al comportamiento del sensor, y no presenta un efecto considerable debido al ruido presente.

Para el ruido blanco, se tiene que superar el 10% en proporción, es decir, que la SNR considerando una señal de potencia descrita mediante la ecuación 1.25, con  $P_s = 10000$  y  $P_r = 100$ , se describe en la ecuación 3.28.

$$SNR = 10\log_{10} \frac{P_s}{P_r} = 10\log_{10} \frac{10000}{100} = 10\log_{10} 100 = 20\text{db}$$

$$SNR \geq 20\text{db} \quad (3.28)$$

La SNR del máximo con respecto del segundo máximo, debe de igualar o superar los 20db, esto para garantizar que cualquier otro valor será mayor a los 20db, como se muestra en la figura 3.29. Las tablas 3.4 a 3.6 muestran las SNR de las secuencias previamente señaladas.

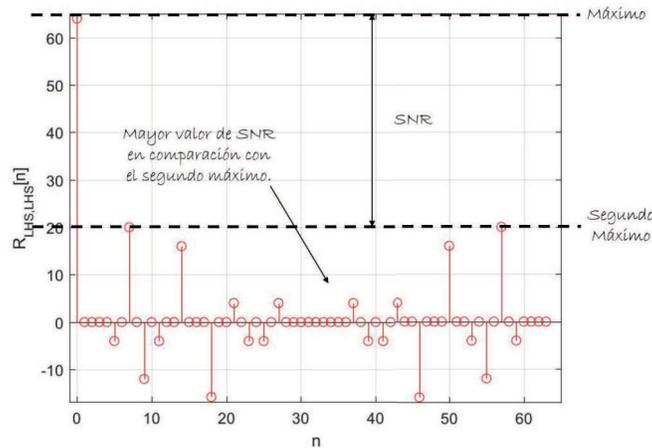


Figura 3.29: SNR del máximo con respecto del segundo máximo.

Tabla 3.4: SNR de las secuencias de Barker.

| <b>L</b>   | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> | <b>7</b> | <b>11</b> | <b>13</b> |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| <b>SNR</b> | 0        | 9.54     | $\infty$ | 13.97    | 16.90    | 20.82     | 22.27     |

Tabla 3.5: SNR de las Secuencias Largas de Hadamard.

| <b>N</b>   | <b>4</b> | <b>16</b> | <b>64</b> | <b>256</b> | <b>1024</b> | <b>4096</b> | <b>16384</b> | <b>65536</b> | <b>262144</b> |
|------------|----------|-----------|-----------|------------|-------------|-------------|--------------|--------------|---------------|
| <b>SNR</b> | $\infty$ | 12.04     | 10.10     | 9.67       | 9.57        | 9.55        | 9.54         | 9.54         | 9.54          |

Tabla 3.6: SNR de las Secuencias Largas de Walsh.

| <b>N</b>   | <b>4</b> | <b>16</b> | <b>64</b> | <b>256</b> | <b>1024</b> | <b>4096</b> | <b>16384</b> | <b>65536</b> | <b>262144</b> |
|------------|----------|-----------|-----------|------------|-------------|-------------|--------------|--------------|---------------|
| <b>SNR</b> | $\infty$ | 12.04     | 12.14     | 14.53      | 16.06       | 22.14       | 26.58        | 31.26        | 36.12         |

La gráfica de la  $SNR$  en función del valor de  $k$  (proveniente de las secuencias LHS y LWS mostradas en las ecuaciones 3.2 y 3.4) para  $R_{LHS,LHS}$  y  $R_{LWS,LWS}$  se muestra en la figura 3.30, en dicha gráfica se suprimió el valor de  $k = 1$  debido a que el segundo máximo es cero, lo que nos da como resultado un valor infinito.

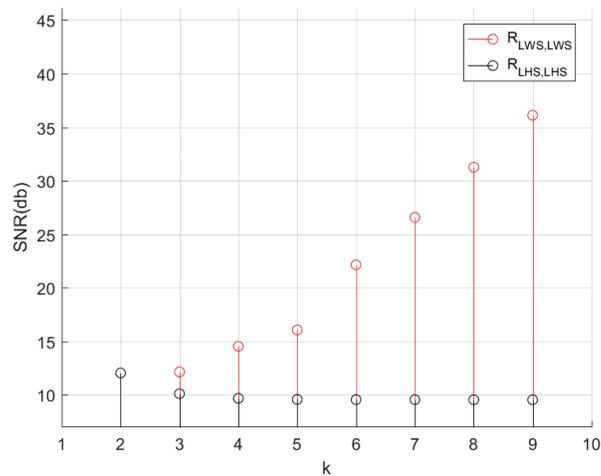


Figura 3.30: Gráfica comparativa de la SNR para  $R_{LHS,LHS}$  y  $R_{LWS,LWS}$  en función al número de elementos debidos a un valor  $k$ .

# Capítulo 4

## Conclusiones generales

### 4.0.1. Conclusiones generales

#### Acerca de los sensores

Un sensor nos proporciona la medición de alguna magnitud. Es posible tener distintos tipos de sensores para una misma magnitud, teniendo como principal diferencia el tipo de propiedad que se verá afectada o perturbada.

Un sistema que sea autónomo en su totalidad, requerirá el uso de sensores que posean las características apropiadas para alguna aplicación en particular. Hablando particularmente para un sensor de posición angular, se desea tener principalmente una alta resolución y una alta velocidad de respuesta.

Un sensor de posición angular puede ser utilizado para el control de cualquier máquina de posicionamiento cartesiano, basándose en desplazamientos angulares.

#### Acerca de los correladores

Un correlador es cualquier dispositivo que emplee la operación matemática de correlación, solo difiere del área en cuestión para determinar su forma de implementación. Una de las principales ventajas que presenta un correlador, es el hecho de poder establecer la función base de comparación, lo cual incrementa considerablemente las áreas de aplicación.

Los correladores ópticos tienen la gran ventaja de ser sumamente rápidos, debido a que trabajan esencialmente con luz, quedando limitados por el diseño mecánico y/o electrónico hecho para su funcionalidad.

Los encoders (sumamente utilizados en motores) son correladores que proporcionan una posición y en ocasiones el sentido de las rotaciones, teniendo como desventaja su complejidad en el diseño.

---

### Acerca de las secuencias de Barker

Una de las principales características de las secuencias Barker, es el valor de la función de autocorrelación en  $m = 0$ , dicho valor es el máximo y corresponde a su longitud  $L$ . Esto debido a que al contener valores 1 y  $-1$ , el resultado sin desplazamiento ( $m = 0$ ) de la multiplicación, contendrá únicamente valores con 1, mientras que para cualquier desplazamiento ( $m \neq 0$ ), dicha multiplicación contendrá valores con 1 y  $-1$ . Lo que nos lleva a que la suma de la multiplicación en  $m = 0$ , será mayor a la obtenida en  $m \neq 0$ .

Una limitante de las secuencias Barker es su longitud, la cual contiene un valor máximo  $L = 13$ . Como se utiliza para el diseño de máscaras angulares, su resolución es  $\frac{2\pi}{13}$ , lo cual es una resolución baja.

Es posible incrementar dicha longitud mediante el producto de Kronecker, y como contiene valores de longitud  $L = 2, 3, 4, 5, 7, 11$  y  $13$ , es posible obtener cualquier longitud mayor a dos, como se mencionó en [4]. Esto en espera de obtener resultados favorables para la SNR de sus autocorrelaciones.

### Acerca de las secuencias de Hadamard y Walsh-Hadamard

Las secuencias largas de Hadamard (LHS) y las secuencias largas de Walsh (LWS), muestran una autocorrelación pronunciada en el centro y periódica en sus extremos, como era de esperarse debido a la forma de construcción de la secuencia. Cada periodo  $2k$  aseguramos la presencia de un cero (debido a las propiedades de las matrices de Hadamard), lo cual podría servirnos en un segundo plano para la determinación de la posición. En forma angular, presentan una autocorrelación simétrica y de igual manera periódica.

Particularmente las LWS sobresalen de las LHS, debido a que el máximo se incrementa considerablemente respecto de cualquier otro valor con el incremento de sus elementos, mientras que las LHS mantiene un valor de segundo máximo incrementando únicamente valores intermedios en menor magnitud, como se mostró en las figuras 3.2 a 3.6.

Las secuencias LHS y LWS propuestas, muestran resultados favorables para el diseño de sensores de correlación angular, ya que su resolución es  $\frac{2\pi}{22k}$ .

Las máscaras de las LHS y LWS, mostradas en las figuras 3.17 a 3.26 en codificación impulso anular, podrían ser las más prometedoras para el diseño de sensores de correlación angular. Esto debido a que la resolución se mantiene, y adicionalmente con la región anular se eliminan los problemas concéntricos en el diseño.

A diferencia de las secuencias Barker, se incrementa la resolución considerablemente (en función al número de elementos presentes) y adicionalmente presenta un comportamiento periódico.

### Acerca de las la SNR de las secuencias

Como se puede observar en las tablas 3.4; la SNR que supera el 10% para las secuencias de Barker son solo las de longitud  $L = 11$  y  $L = 13$ , el resto no supera o iguala los 20db deseados. El valor infinito es debido a que los valores diferentes al máximo son cero.

Como se puede observar en las tablas 3.5; la SNR que supera el 10% para las LHS no se conoce aún con un máximo de elementos de 262144, esto debido a que nuestro segundo máximo se incrementa con el incremento del número de elementos, lo que mantendrá la relación y hará que la SNR se mantenga en un valor.

Como se puede observar en las tablas 3.6; la SNR que supera el 10% para las LWS es a partir de los 4096 elementos, y de ahí en adelante al ser proporcional al número de elementos seguirá incrementando.

La SNR de las LHS y LWS es proporcional a  $2^{2k}$ , como se muestra en la figura 3.30, y por el número de elementos es mayor a las que presentan las secuencias de Barker.

Al presentar una mayor SNR, particularmente las LWS, tendrán mejores resultados para un sensor de correlación angular con el sistema propuesta; sin embargo, si dicho sistema se altera (manteniendo las máscaras), es probable que las LHS nos lleven a un mejor resultado.

#### 4.0.2. Trabajo a futuro

Las secuencias propuestas presentan resultados satisfactorios, sin embargo aún queda más trabajo por hacer.

La resolución queda descrita por una potencia  $2^{2k}$ , lo cual para aplicaciones digitales es conveniente. Para otras áreas queda por explorar con otros tipos de matrices (o secuencias), que proporcionen características similares a las analizadas en esta tesis; así como también, hacer uso del producto de kronecker, para obtener una resolución proporcional a las longitudes de las matrices (o secuencias).

El procesador óptico 4f sobre el cual se realiza el diseño, es para realizar una verificación del comportamiento; sin embargo, puede limitar su aplicación, por lo que quedan por explorar distintos sistemas ópticos con base en las máscaras propuestas.

Realizar una verificación experimental del sensor propuesto.

#### 4.0.3. Productos obtenidos

##### Publicaciones en revistas indizadas al JCR

1. Ojeda-Castaneda, J., Gómez-Sarabia, C. M., Torres-Cisneros, M., Ledesma-Carrillo, L. M., Guzmán-Cabrera, R., & Guzmán-Cano, C. (2017). Tunable sinusoidal Phase Gratings and sinusoidal Phase Zone Plates. *Photonics Letters of Poland*, 9(2), 57-59. 2017 Impact Factor: 0.25.

2. Ledesma-Carrillo, L., Gómez-Sarabia, C. M., Torres-Cisneros, M., Guzmán-Cabrera, R., Guzmán-Cano, C., & Ojeda-Castañeda, J. (2017). Hadamard circular masks: high focal depth with high throughput. *Optics express*, 25(15), 17004-17020. 2017 Impact Factor: 3.356
3. Gómez-Sarabia, C. M., Ledesma-Carrillo, L. M., Guzmán-Cano, C., Torres-Cisneros, M., Guzmán-Cabrera, R., & Ojeda-Castañeda, J. (2017). Pseudo-random masks for angular alignment. *Applied optics*, 56(28), 7869-7876. 2017 Impact Factor: 1.791

**Patente solicitada**

1. Ojeda-Castañeda, J., Gómez-Sarabia, C. M., Torres-Cisneros, M., Guzmán-Cano, C., Ledesma-Carrillo, L. M., Aguilera-Gomez, E., & Plascencia-Mora, H. (2018). Dispositivo correlador de polarización óptica para alineación angular. Folio:MX/E/2018/06524

# Bibliografía

- [1] C. Collins, “Simple digital correlator,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 29, no. 6, pp. 487–490, 1958.
- [2] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Señales y sistemas segunda edición*. Prentice-Hall, 1998.
- [3] J. G. Proakis, D. G. Manolakis, V. nica (trad.) Santalla del Rj o, and J. Luis, *Tratamiento digital de señales*. Pearson Educación, 2007.
- [4] C. M. Gómez-Sarabia, L. M. Ledesma-Carrillo, C. Guzmán-Cano, M. Torres-Cisneros, R. Guzmán-Cabrera, and J. Ojeda-Castañeda, “Pseudo-random masks for angular alignment,” *Applied optics*, vol. 56, no. 28, pp. 7869–7876, 2017.
- [5] R. H. Barker, “Group synchronizing of binary digital systems,” *Communication theory*, pp. 273–287, 1953.
- [6] J. Hadamard, “Resolution d’une question relative aux determinants,” *Bull. des sciences math.*, vol. 2, pp. 240–246, 1893.
- [7] A. Hedayat, W. D. Wallis, *et al.*, “Hadamard matrices and their applications,” *The Annals of Statistics*, vol. 6, no. 6, pp. 1184–1238, 1978.
- [8] J. J. Sylvester, “Lx. thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous signsuccessions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to newton’s rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 34, no. 232, pp. 461–475, 1867.
- [9] J. L. Walsh, “A closed set of normal orthogonal functions,” *American Journal of Mathematics*, vol. 45, no. 1, pp. 5–24, 1923.
- [10] G. Brasseur, “A robust capacitive angular position sensor,” in *Instrumentation and Measurement Technology Conference, 1996. IMTC-96. Conference Proceedings. Quality Measurements: The Indispensable Bridge between Theory and Reality.*, IEEE, vol. 2, pp. 1081–1086, IEEE, 1996.
- [11] F. Burger, P.-A. Besse, and R. Popovic, “New fully integrated 3-d silicon hall sensor for precise angular-position measurements,” *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 67, no. 1-3, pp. 72–76, 1998.

- [12] A. Cavallo, G. De Maria, C. Natale, and S. Pirozzi, "Optoelectronic joint angular sensor for robotic fingers," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 152, no. 2, pp. 203–210, 2009.
- [13] G. Palli and S. Pirozzi, "Optical sensor for angular position measurements embedded in robotic finger joints," *Advanced Robotics*, vol. 27, no. 15, pp. 1209–1220, 2013.
- [14] Z. Tang, R. Zhang, and F. Shi, "Effects of angular misalignments on fiber-optic alignment automation," *Optics Communications*, vol. 196, no. 1-6, pp. 173–180, 2001.
- [15] J. Ojeda-Castañeda and A. Saucedo, "Random gratings as correlator sensors," *Optics Letters*, vol. 22, no. 5, pp. 257–258, 1997.
- [16] N. Haig, "A simple technique for accurate optical alignment," *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, vol. 6, no. 6, p. 516, 1973.
- [17] R. Roduit, P.-A. Besse, and J.-P. Micallef, "Flexible angular sensor [and biomechanical application]," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 47, no. 4, pp. 1020–1022, 1998.
- [18] W. Y. Wong, M. S. Wong, and K. H. Lo, "Clinical applications of sensors for human posture and movement analysis: a review," *Prosthetics and orthotics international*, vol. 31, no. 1, pp. 62–75, 2007.
- [19] J.-w. Lee, L.-y. Hong, J.-h. Jun, K.-h. Lee, K.-s. Kim, D.-j. Kim, and K.-h. Kim, "A simple optical angular sensors to measure the human joint angle," in *SICE-ICASE, 2006. International Joint Conference*, pp. 1125–1126, IEEE, 2006.
- [20] T. L. Petersen and G. A. Engh, "Radiographic assessment of knee alignment after total knee arthroplasty," *The Journal of arthroplasty*, vol. 3, no. 1, pp. 67–72, 1988.
- [21] H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 47, no. 2, pp. 617–644, 1928.
- [22] H. E. Singleton, "A digital electronic correlator," *Proceedings of the IRE*, vol. 38, no. 12, pp. 1422–1428, 1950.
- [23] N. Sloane, T. Fine, P. Phillips, and M. Harwit, "Codes for multiplex spectrometry," *Applied optics*, vol. 8, no. 10, pp. 2103–2106, 1969.
- [24] M. Harwit, *Hadamard transform optics*. Elsevier, 2012.
- [25] L. Ledesma-Carrillo, C. Gómez-Sarabia, M. Torres-Cisneros, R. Guzmán-Cabrera, C. Guzmán-Cano, and J. Ojeda-Castañeda, "Hadamard circular masks: high focal depth with high throughput," *Optics express*, vol. 25, no. 15, pp. 17004–17020, 2017.