UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

División de Ciencias e Ingenierías
Campus León

Tesis de Maestría en Física:

Formalismo de teoría efectiva aplicado al sector oscuro del universo

Trabajo de tesis presentado por

Lic. Edgar Iván Preciado Govea

para obtener el grado de Maestro en Física por la Universidad de Guanajuato

---

Asesorado por:
Dr. Alberto Diez Tejedor

Agradecimientos

Al Dr. Alberto Diez Tejedor por su instrucción paciente, su consejo y apoyo.

Al instituto CONACYT por el apoyo brindado para la conclusión del presente trabajo.

A mi familia, amigos y maestros.

Índice general

... and the unseen is proved by the seen,
Till that becomes unseen and receives proof in its turn.

W. Whitman

Capítulo 1

Introducción

El panorama de las observaciones cosmológicas actuales establece firmemente que el universo es homogéneo e isótropo a escalas mayores a 100 Mpc y que ha desarrollado inhomogeneidades (grandes estructuras) a escalas más pequeñas mientras se expande de acuerdo a la *ley de Hubble*. Además, que bajo la mira del modelo estándar de la cosmología, llamado ΛCDM (por sus siglas en inglés, Lambda Cold Dark Matter), el contenido total del universo se compone principalmente de materia oscura (DM) con un aproximado del 25% y presión $p_m \simeq 0$, y de energía oscura (DE) con un aproximado de 70% y presión $p_\Lambda \simeq -\rho_\Lambda$. El modelo ΛCDM del universo, ha enmarcado sorprendentemente estos hechos permitiendo describir con un alto grado de precisión el universo observado [3, 67].

Con la métrica FRW, la dinámica del universo homogéneo queda determinada por las *ecuaciones de Friedmann*, que abordaremos más adelante, mientras que para el universo inhomogéneo, descrito por la métrica FRW perturbada (una aproximación perturbativa alrededor del fondo FRW), queda determinada por las ecuaciones para perturbaciones cosmológicas, que también abordaremos. Sin embargo, a pesar del éxito del modelo ΛCDM, la puerta a distintas especulaciones respecto a la naturaleza de la gravedad o de los componentes oscuros del universo queda abierta para presentar alternativas, impulsados por la falta de pruebas experimentales no gravitacionales y problemas relacionados con la constante cosmológica Λ, como lo son la discrepancia entre el valor observado de Λ y su predicción desde la mecánica cuántica [42], o la discrepancia entre distintos conjuntos de datos sobre el valor de H_0 [1, 60, 61], entre otras problemáticas de carácter experimental y teórico. Bajo este ímpetu, una amplia variedad de modelos de DE y DM se han propuesto para dar cuenta de la aceleración cósmica y de la formación de las grandes estructuras, entre otros fenómenos, así como también han surgido un amplio espacio de parámetros dependientes de cada modelo.

Con el objeto de abarcar en una sola teoría a una gran variedad de modelos de DE/DM y la aún más variada cantidad de parámetros, se ha propuesto una Teoría de Campo Efectiva (EFT por sus siglas en inglés, Effective Field Theory) para perturbaciones cosmológicas que cumpla con este objetivo. Siguiendo el marco general de la EFT desarrollada para modelos inflacionarios de un solo campo escalar (véase [69, 19]), la idea de aplicarla a DE fue primero puesta en marcha en el contexto de Quintaescencia (véase [21]), después fue extendida a su forma más general, que abarca modelos como k-escencia, Horndeski, $f(R)$, Brans-Dicke, etc, (véase [33]).

En esencia, EFT aplicada a DE/DM consiste en construir la acción más general posible en *norma unitaria*[1], con el fin de escribir la variedad de modelos de DE/DM en términos de operadores geométricos y funciones del tiempo (un conjunto de *constantes de acoplamiento*), tal que la acción toma la forma

$$
\begin{aligned}
S = \int d^4x\sqrt{-g}\Bigg[& \frac{M_*^2}{2}f(t)R - \Lambda(t) - c(t)g^{00} + \frac{M_2^4(t)}{2}(\delta g^{00})^2 - \frac{\bar{m}_1^3(t)}{2}\delta K\delta g^{00} \\
& - \frac{\bar{M}_2^2(t)}{2}\delta K^2 - \frac{\bar{M}_3^2(t)}{2}\delta K^\mu_\nu \delta K^\nu_\mu + \frac{\mu_1^2(t)}{2}\mathcal{R}\delta g^{00} + \frac{\bar{m}_5(t)}{2}\mathcal{R}\delta K + \frac{\lambda_1(t)}{2}\mathcal{R}^2 \\
& + \frac{\lambda_2(t)}{2}\mathcal{R}^\mu_\nu\mathcal{R}^\nu_\mu + m_2^2(t)\frac{g^{\mu\nu}}{a^2}\partial_\mu g^{00}\partial_\nu g^{00}\dots\Bigg] + S_m,
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

donde $S_m(g_{\mu\nu})$ es el sector de la acción referente a los campos de materia, R es el escalar de Ricci, δg^{00} es la perturbación de g^{00}, δK_{ij}, $\delta\mathcal{R}_{ij}$, δK, $\delta\mathcal{R}$, son la perturbaciones de operadores geométricos ADM y sus contracciones, y M_*^2 es una constante. Además, dado que parte del propósito de nuestro estudio es presentar ecuaciones tanto del fondo FRW como de las perturbaciones cosmológicas, es necesario especificar *a priori* las funciones efectivas relacionadas al fondo FRW para describir posteriormente perturbaciones cosmológicas. Entenderemos que las ecuaciones dinámicas así obtenidas deben ser muy próximas a las ya conocidas del modelo ΛCDM en los casos límites.

En el presente estudio, desarrollaremos las ecuaciones modificadas de Friedmann en términos de las funciones efectivas y centraremos nuestra atención en el conjunto de operadores y funciones que engloban el modelo más general de campo escalar sin derivadas de orden superior en las ecuaciones de movimiento, el modelo Horndeski, para obtener las ecuaciones dinámicas para perturbaciones. Este conjunto de ecuaciones permite establecer enlaces con las observaciones y distinguir posibles desviaciones a la Relatividad General (GR), es decir Gravedad Modificada (MG), a través de parámetros efectivos c_s^2, $G_{\rm eff}$ y γ, relacionados con observables directos independientes del modelo. A su vez, es posible definir fluidos efectivos $\rho_{\rm eff}$ que jueguen el papel de DE o DM y que contribuyen al tensor de energía momento como

$$
G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\rm eff}, \tag{1.2}
$$

donde $T_{\mu\nu}^{\rm eff}$ representa los componentes efectivos, con lo que es posible parametrizar DE/DM como un fluido efectivo en términos de las funciones efectivas.

Como ya mencionamos, el formalismo EFT permite tratar un espectro de modelos de DE/DM basados en la adición de un grado de libertad escalar en la acción. Por ejemplo, es posible englobar teorías como *Gravedad Horava* que violan la simetría de Lorentz [44], entre otros modelos presentes en la literatura. Se espera que estas teorías sean enfrentadas con los resultados observacionales de experimentos como Dark Energy Spectroscopic Instrument

[1] La norma unitaria consiste en aquella elección de norma en la que la perturbación de campo escalar $\delta\phi$ se anula.

(DESI) [2], Weak Lensing (WL), Supernova Ia (SNIa), Baryon Acoustic Oscillations (BAO) [24], etc. Esto permitirá precisar el modelo ΛCDM o bien apuntar a uno de los modelos enmarcados en EFT (poniendo cotas sobre los parametros efectivos). Enseguida presentamos en el Cuadro (1.1) algunos de los mapeos esenciales en EFT.

Los capítulos se desarrollarán como sigue: en el *capítulo 2* se presentará el formalismo esencial de EFT y las herramientas geométricas que usaremos a los largo de los capítulos restantes; en este apartado presentamos la foliación ADM del espacio tiempo, los operadores geométricos que le representan y cómo elegir su papel en la expansión efectiva del lagrangiano, la definición de la norma unitaria y finalmente, la acción efectiva y el lenguaje EFT de las funciones efectivas; en el *capítulo 3* desarrollamos las ecuaciones dinámicas para el fondo FRW y obtenemos la ecuación dinámica para el grado de libertad escalar adicional; también calculamos explícitamente (siguiendo el truco de *Stückelberg*) las ecuaciones dinámicas para el campo escalar y las perturbaciones escalares de la métrica; en el *capítulo 4* presentamos algunas consideraciones sobre las ecuaciones dinámicas sobre el fondo FRW y el tratamiento de DM/DE como fluidos efectivos, y exponemos en síntesis el modelo de GDM de materia oscura y cómo se inscribe en el modelo EFT; finalmente presentamos conclusiones y perspectivas a futuro en el *capitulo 5*.

Modelo	$f(t)$	$\Lambda(t)$	$c(t)$	M_2^4	$\bar{m}_1^3$	$\bar{M}_2^2$	$\bar{M}_3^2$	μ_1^2	m_2^2
	R		δg^{00}	$(\delta g^{00})^2$	$\delta K \delta g^{00}$	δK^2	$\delta K^\mu_\nu \delta K^\nu_\mu$	$\delta g^{00}\mathcal{R}$	$\frac{g^{ij}}{a^2}\partial_i g^{00}\partial_j g^{00}$
ΛCDM	1	✓	0	-	-	-	-	-	-
Quintaescencia	1/✓	✓	✓	-	-	-	-	-	-
$f(R)$ [64]	✓	✓	0	-	-	-	-	-	-
k-escencia [6]	1/✓	✓	✓	✓	-	-	-	-	-
Horndeski [35]	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	-
Horova-Lifshitz [39, 44, 34]	1	✓	0	-	-	✓	-	-	✓

Cuadro 1.1: Una lista de operadores requeridos para describir diferentes modelos escalar-tensoriales. 1/✓ se refiere al hecho de que existe una versión mínimamente (1) y otra no-mínimamente acoplada (✓) a la métrica (tabla extraída de [15]).

Capítulo 2

Formalismo de Teoría de Campo Efectiva

En el presente capítulo desarrollamos el formalismo Arnowitt-Deser-Misner (ADM) en el que se escribe la EFT y exploramos las definiciones y operadores geométricos que le representan [70, 63, 55, 65, 4]. Presentamos la definición de la *norma unitaria* y las ventajas de trabajar en la misma, así como también discriminamos entre operadores que nos serán de utilidad al pensar en una expansión efectiva del lagrangiano para tratar la dinámica de perturbaciones lineales [58]. Exploramos cómo caracterizar el fondo FRW y las perturbaciones [68]. Desarrollamos como ejemplo de operación las ecuaciones para el fondo FRW en ausencia de campos de materia [36]. Y finalmente, obtenemos las relaciones entre notaciones existentes en la literatura a través de un diccionario de funciones efectivas del lenguaje EFT [68].

2.1 Introducción

A la vista de los recientes descubrimientos en el campo de la cosmología (e.g. la aceleración cósmica), grandes esfuerzos se dan en el área que apuntan a modelar estos fenómenos así como entender sus fundamentos teóricos. El Modelo Estándar de la Cosmología establece que el Universo ha sufrido una tasa de expansión acelerada dos veces: una durante los momentos primordiales y altas energías, y otra etapa de expansión que todavía está en marcha. A su vez, la evolución del universo ha dado lugar a la formación de grandes estructuras e inhomogeneidades. Afrontar el estudio de estas etapas interrogando la naturaleza misma de la gravedad parece un camino natural de especulación explorando las bases de la GR.

Lo anterior puede lograrse bajo el potente formalismo de la EFT con un Grado de Libertad (DoF) escalar extra, basado en la descripción de las perturbaciones cosmológicas a través de funciones dependientes del tiempo que parametrizan posibles desviaciones a GR o de una constante cosmológica Λ_0. Discrepancias en las observaciones al nivel del fondo FRW motivan esta exploración, a pesar de ser sorprendentemente descriptiva la GR detrás del modelo ΛCDM.

El formalismo de la EFT para Inflación/DE puede suscribirse dentro de la fenomenología de DM, de tal manera que permita describir un espectro de modelos de DM como campo escalar a la manera de posible Modificación a GR o como modelo que parametriza su tensor de energía momento de manera efectiva.

A partir de una acción general en términos de operadores geométricos, dejando inalterados los difeomorfismos espaciales mientras se rompen las traslaciones temporales, naturalmente obtenemos este conjunto de funciones dependientes del tiempo en términos de las cuales expresar nuestras ecuaciones dinámicas para DE/MG/DM. De esta manera, la forma de la acción general a explorar está dada por

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \phi) + \int d^4x \mathcal{L}_m, \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{L} = \sqrt{-g}L$ es el lagrangiano del sector gravitacional de la acción, ϕ el DoF adicional escalar y $\mathcal{L}_m$ es la densidad langrangiana del sector material. En términos de las simetrías requeridas y de los operadores geométricos que las cumplen, la acción (2.1) se denomina la *acción efectiva* (EFT action).

Fijando la libertad de norma a través de la *norma unitaria* que consiste, en esencia, en hacer la coordenada temporal proporcional al campo escalar, las fluctuaciones del campo escalar $\delta\phi$ desaparecen de la acción efectiva, facilitado los desarrollos matemáticos posteriores. Así, un gran cuerpo de modelos DE/MG/DE de campo escalar-tensorial se condensan en un formalismo independiente del modelo a través de una variedad de operadores geométricos y funciones dependientes del tiempo.

Profundizando en lo anterior, enunciemos brevemente uno de los más importantes teoremas dentro del esquema de GR: el llamado *teorema de Lovelock* (véase, [20]). Para enunciarlo consideremos que el tensor métrico en cuatro dimensiones $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ es el único campo involucrado en la acción, es decir, que podemos escribir

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(g_{\mu\nu}). \tag{2.2}$$

Consideremos además que esta acción contiene a lo más derivadas de segundo orden y que se satisface el criterio de localidad[1], tal que extremando con respecto a la métrica ($\delta S = 0$) obtenemos la expresión de Euler-Lagrange

$$E^{\mu\nu}[\mathcal{L}] = \frac{d}{dx^\rho}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} - \frac{d}{dx^\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,\rho\lambda}}\right)\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}, \tag{2.3}$$

y la ecuación de Euler-Lagrange $E^{\mu\nu}[\mathcal{L}] = 0$. Entonces el teorema establece que:

[1] Esto significa que no existen términos en el lagrangiano acoplando $\phi(\vec{x}, t)$ directamente a $\phi(\vec{y}, t)$ para $\vec{x} \neq \vec{y}$, para algún campo ϕ. De *Quantum Field Theory* notas de clase David Tong

Teorema de Lovelock: La única expresión de Euler-Lagrange que puede ser obtenida en un espacio 4-dimensional de una densidad escalar de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu})$ es

$$E^{\mu\nu} = \alpha\sqrt{-g}\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right] + \lambda\sqrt{-g}g^{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

donde α y λ son constantes, y $R_{\mu\nu}$ y R son el tensor y el escalar de Ricci, respectivamente.

En otras palabras el teorema señala que si se desea crear una teoría gravitatoria en una variedad Riemanniana a partir de un principio de mínima acción que únicamente involucre el tensor métrico y sus derivadas, entonces las únicas ecuaciones de campo posibles a lo más de segundo orden en derivadas son las ecuaciones de Einstein y/o una constante cosmológica, (véase para más detalle [20], sección 2.4 o [42] apéndice B). Esto direcciona los esfuerzos al momento de teorizar modificaciones a GR a partir de una acción que dependa del tensor métrico. Si construimos una teoría de la gravedad basada en la métrica que proporcione como resultado ecuaciones de campo distintas de las de Einstein, debemos romper como mínimo alguno de los siguientes puntos: 1) adicionar campos, además del tensor métrico, ya sean escalares, vectoriales o tensoriales, 2) considerar derivadas de orden superior en las ecuaciones de campo, 3) considerar un espacio con más de cuatro dimensiones, 4) abandonar la propiedad de localidad, 5) derivar las ecuaciones de campo por otros medios distintos a la variación de la acción. En el presente trabajo consideraremos solamente la primera de las posibles rupturas a GR, adicionando a la acción (2.1) un campo escalar ϕ que pudiera estar mínimamente o no-mínimamente acoplado a la métrica $g_{\mu\nu}$.

A diferencia de la aplicación de EFT a inflación, en la acción efectiva (2.1) consideraremos la presencia de un sector de materia S_m. Asumiremos la validez del Principio de Equivalencia Débil (WEP), tal que los campos de materia presentes ψ_m se encuentren universalmente acoplados a la métrica $g_{\mu\nu}$, tal que $S_m[g_{\mu\nu}, \psi_m]$, es decir que los campos de materia solo interactúan con la gravedad a través de $g_{\nu\mu}$. Con esto la acción quedará escrita en términos del *marco de Jordan*[2].

2.2 Formalismo ADM

Las ecuaciones de Einstein están escritas de tal forma que el espacio y el tiempo son tratados en iguales condiciones. Este trato de las coordenadas espaciales y temporales dificulta el estudio de la «evolución» del campo gravitacional en el «tiempo». Sin embargo si separamos los roles del espacio y el tiempo, de alguna manera nos será posible describir está evolución. Esta formulación de la GR es conocida como *formulación 3+1*. Para introducir los conceptos

[2] El *marco de Einstein* es así llamado porque las ecuaciones de Einstein para la métrica conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = f(\lambda)g_{\mu\nu}$, toman su forma convencional. Por otro lado el *marco de Jordan* es el marco original con métrica $g_{\mu\nu}$ ([18]).

fundamentales de este formalismo consideremos el espacio-tiempo globalmente hiperbólico con métrica asociada $g_{\mu\nu}$, precisando, un espacio-tiempo globalmente hiperbólico no posee curvas termporaloides[3] cerradas, en el resente formalismo 3+1 se asume que los espacio-tiempos con significado físico presentan estas características. Podemos foliar totalmente en cortes tridimensionales este espacio-tiempo de tal manera que cada rebanada tridimensional es de tipo espacio. Así, es posible asignar a cada foliación el valor de un parámetro t, que haga a la vez de *función universal del tiempo*. Si consideramos la región entre dos hipersuperficies, es decir Σ_t y Σ_{t+dt}, es útil hacer las siguientes distinciones para efectuar una foliación: 1) la métrica asociada a las hiperfuperficies espacialoides h_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ que permite la medida de la distancia propia en las hipersuperficies ($dl^2 = h_{ij}dx^i dx^j$), 2) el tiempo propio (o "lapso" de tiempo) medido por un *observador Euleriano*, es decir, el lapso de tiempo entre ambas hipersuperficies medido por un observador moviéndose a lo largo de la dirección normal a las hipersuperficies, dado como $d\tau = N(t, x^i)dt$, con $N(t, x^i)$ conocida como la *función lapso*, y 3) la velocidad relativa entre el observador Euleriano y las líneas de las coordenadas espaciales constantes para este mismo observador Euleriano, $x^i_{t+dt} = x^i_t - N^i(t, x^j)dt$, donde $N^i(t, x^j)$ es el *vector de cambio*.

Notemos que el lapso N y el vector de cambio N^i son funciones libremente especificables que llevan información acerca de nuestra elección de coordenadas, son nuestras *funciones de norma*. Considerando el teorema de pitágoras en el 4-espacio, podemos escribir

$$ds^2 = g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - (Ndt)^2. \tag{2.5}$$

En términos de estas funciones la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}(N, N^i, h_{i,j})$ toma la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^k N_k & N_i \\ N_j & h_{ij} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

Y su inversa:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/N^2 & N^i/N^2 \\ N^j/N^2 & h^{ij} - N^i N^j/N^2 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Retomando, necesitamos que ninguna de las rebanadas espaciales se intersecten (dado que a cada rebanada 3-dimensional Σ_t queremos asignar un único valor de t, en relación uno a uno), de tal manera que podemos pensar en la evolución del sistema como el cambio que se da en estás hipersuperficies mientras evoluciona el parámetro t y de esta forma cubrir por completo el espacio-tiempo. Entonces, dependiendo de la forma en que rebanemos el espacio-tiempo, es posible considerar la métrica tridimensional $h_{ij}(t)$ como una variable dinámica. Con estos elementos es posible pegar las hipersuperficies para dejar completamente determinada la foliación. Ahora, para reconstruir la acción efectiva en función de las variables h_{ij}, N^i y N, debemos reexpresar el escalar de curvatura R y el invariante de volumen $\sqrt{-g}dx^4$ en términos de estás variables. Se sigue de (2.6) que

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}, \tag{2.8}$$

[3]Curvas que siguen un vector tipo-tiempo que cumple con $\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu < 0$. Por otro lado un vector tipo-espacio cumple con $\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu < 0$. Un vector nulo satisface $\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 0$.

donde g y h son los determinantes de las métricas $g_{\mu\nu}$ y h_{ij} respectivamente. Podemos ver lo anterior si realizamos la descomposición

$$g = \begin{vmatrix} -N^2 + N^k N_k & N_i \\ N_j & h_{ij} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & N^i \\ \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -N^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_{ij} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ N_j & \mathbf{1} \end{vmatrix} = -N^2 h. \tag{2.9}$$

Para lograr el propósito de reexpresar el escalar de curvatura R, debemos estudiar la forma en que las hipersuperficies heredan la estructura del espacio-tiempo, así como la forma particular en que encajan al darse el corte de las rebanadas del 4-espacio. En este punto es de fundamental importancia definir la *curvatura extrinseca* K_{ij} y la *curvatura intrínseca* $R_{ii} = g^{ij} R_{ij} = \mathcal{R}$, que desarrollaremos en el siguiente apartado. Antes de estudiar estos objetos, debemos definir un vector que sea normal a las hipersupercicies, es decir, un *vector normal unitario* n_μ con $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Ahora, dado que la hipersupeficie Σ_t es definida como una superficie de nivel de t, la uno-forma $\nabla_\mu t$ es normal a Σ_t, (véase ([70], pág. 33). A su vez, $\nabla_\mu t$ es tipo-tiempo si Σ_t es espacialoide, entonces $\nabla_\mu t$ define la única dirección normal a Σ_t. Con lo anterior podemos definir el vector unitario dado por

$$n_\nu = - \left(-\nabla_\mu t \nabla^\mu t \right)^{-1/2} \nabla_\nu t, \tag{2.10}$$

donde $n_\mu n^\mu = -1$ si Σ_t es tipo espacio. Se sigue de la definición de la función lapso (vease ([70]), pág. 41) que

$$N = \left(-\nabla_\mu t \nabla^\mu t \right)^{-1/2}. \tag{2.11}$$

Con lo anterior podemos escribir el vector unitario en su forma covariante como

$$n_\mu = (-N, 0, 0, 0). \tag{2.12}$$

Usando (2.7) para subir y bajar índices $n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu$, obtenemos

$$n^\alpha = [(1/N), -(N^i/N)]. \tag{2.13}$$

Por último, agregaremos que en norma unitaria n_ν es ortogonal a las superficies de campo escalar constante con lo que se satisface que $n_\mu \propto \partial_\mu \phi$.

2.2.1 Curvatura intrínseca y extrínseca

Si la métrica inducida en Σ_t, es decir h_{ij}, es *métrica compatible* $\nabla_\mu h^{\mu\nu} = 0$ y la conexión es libre de torsión (vease, [18], Sección 3.2), entonces llamamos *curvatura intrínseca* de las hipersuperficies al tensor de Riemman $R^k{}_{lij}$ asociado con Σ_t y h_{ij}.

Por otro lado, la *curvatura extrínseca* está asociada con la manera en que estás hipersuperficies están inmersas en el espacio-tiempo cuatrodimensional, (véase [4], pág. 68). Está curvatura está asociada a los cambios que sufre el vector normal n_ν cuando es paralelamente transportado de un punto a otro sobre la hipersuperficie. Recordemos que la métrica inducida coincide con el operador de proyección sobre las hipersuperficies tal que

$$h^\alpha{}_\beta = P^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + n^\alpha n_\beta. \tag{2.14}$$

Con lo anterior podemos definir el tensor de curvatura extrínseca como una medida del cambio que sufre el vector normal al ser paralelamente transportado de un punto en la hipersuperficie a otro, tal que

$$K_{\mu\nu} \equiv -P^{\alpha}_{\mu}\nabla_{\alpha}n_{\nu} = -(\nabla_{\mu}n_{\nu} + n_{\mu}n^{\alpha}\nabla_{\alpha}n_{\nu}), \tag{2.15}$$

es decir, la componente $\mu\nu$ de la curvatura extrínseca es igual a la proyección en la dirección μ de la derivada covariante del vector normal en la dirección ν (salvo el signo). Dado que $K_{\mu\nu}$ es un tensor puramente espacial, significa que $n^{\mu}K_{\mu\nu} = n^{\nu}K_{\mu\nu} = 0$. También se puede mostrar que este tensor es simétrico $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$. Ahora, si definimos $a_{\nu} = n^{\lambda}n_{\nu;\lambda}$, que referiremos como *término de aceleración*, podemos reexpresar (2.15) como

$$K_{\mu\nu} = n_{\nu;\mu} + n_{\mu}a_{\nu}. \tag{2.16}$$

Trabajemos con la expresión de la aceleración a_{ν}, vector ortogonal a n_{ν} y tangente a Σ_t. Este puede ser expresado en términos del gradiente espacial de la función lapso (véase [70], pág. 62). Usando el hecho de que $n_{\mu} = -Nt_{;\mu} = (-N,0,0,0)$, $\nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}t = \nabla_{\alpha}\nabla_{\mu}t$, $h^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + n^{\mu}n_{\nu}$ (es decir, el proyector ortogonal sobre Σ_t), escribimos

$$\begin{aligned}
a_{\alpha} &= n^{\mu}\nabla_{\mu}n_{\alpha} = -n^{\mu}\nabla_{\mu}(N\nabla_{\alpha}t) = \frac{1}{N}n_{\alpha}n^{\mu}\nabla_{\mu}N + Nn^{\mu}\nabla_{\alpha}\left(\frac{-1}{N}n_{\mu}\right) \\
&= \frac{1}{N}n_{\alpha}n^{\mu}\nabla_{\mu}N - n^{\mu}\nabla_{\alpha}n_{\mu} + \frac{1}{N}\nabla_{\alpha}n^{\mu}n_{\mu} = \frac{1}{N}(\nabla_{\alpha} + n_{\alpha}n^{\mu}\nabla_{\mu}N) \\
&= \frac{1}{N}(\delta^{\mu}_{\alpha} + n_{\alpha}n^{\mu})\nabla_{\mu}N = \frac{1}{N}h^{\mu}_{\alpha}\nabla_{\mu}N = \nabla_{\alpha}\ln N,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

donde en la segunda línea hemos considerado $n^{\mu}n_{\mu} = -1$ y $n^{\mu}\nabla_{\alpha}n_{\mu} = 0$, además que la derivada covariante que aparece al final es respecto a h^{μ}_{ν}. Observamos que si N es solamente una función de t entonces la aceleración se anula. En esencia la 4-aceleración es el gradiente en (Σ_t, h^{α}_{μ}) del logaritmo de la función lapso. Como el gradiente espacial es siempre tangente a Σ_t entonces se sigue que $n^{\mu}a_{\nu} = 0$.

Podemos reescribir K_{ij}, para $i,j = 1,2,3$, considerando que $n_{\mu} = (-N,0,0,0)$ tal que (2.16) se escribe como

$$K_{ij} = n_{i;j} + n_i a_j = n_{i;j} = \partial_j n_i - \Gamma^{\mu}_{ij}n_{\mu} = \Gamma^{0}_{ij}N. \tag{2.18}$$

Trabajemos ahora los *símbolos de Christoffel* que para métricas compatibles que se escriben como

$$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\delta}}\right), \tag{2.19}$$

En particular para la métrica $g_{\mu\nu}$ dada en (2.6), tenemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0}_{ij} &= \frac{1}{2}g^{0\lambda}\left(\partial_j g_{\lambda i} + \partial_i g_{\lambda j} - \partial_{\lambda}g_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\left(\partial_j g_{0i} + \partial_i g_{0j} - \partial_0 g_{ij}\right) + \frac{1}{2}g^{0k}\left(\partial_j g_{ki} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{-1}{N^2}\left(\partial_i N_j + \partial_j N_i - \partial_0 h_{ij}\right) + \frac{1}{2}\frac{N^k}{N^2}\left(\partial_j h_{ki} + \partial_i h_{kj} - \partial_k h_{ij}\right)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

con lo que K_{ij} se escribe como

$$K_{ij} = \frac{1}{2}\frac{1}{N}\left(-\partial_i N_j - \partial_j N_i + \partial_0 h_{ij} + N^k \partial_j h_{ki} + N^K \partial_i h_{kj} - N^K \partial_k h_{ij}\right). \tag{2.21}$$

Si consideramos que

$$\Gamma^k_{ij} N_k = \frac{1}{2} N^k h_{\mu k} h^{\mu k} \left(\partial_j h_{ki} + \partial_i h_{kj} - \partial_k h_{ij}\right), \tag{2.22}$$

y usamos la derivada covariante 3-dimensional con respecto a h_{ij}, $\nabla_i N_j = \partial_i N^{(3)}_j - \Gamma^k_{ij} N_k$, (2.21) se expresa como

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(\partial_t h_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i). \tag{2.23}$$

Esta última ecuación expresa al tensor de curvatura extrínseca K_{ij} como una cantidad covariante que involucra una derivada temporal de la métrica tridimensional h_{ij}. La curvatura extrínseca K_{ij} está directamente relacionada con el cambio en el tiempo de la métrica espacial h_{ij}. Finalmente, el escalar de curvatura extrínseca resulta ser la derivada covariante del vector normal unitario

$$K = \nabla^\nu n_\nu. \tag{2.24}$$

2.2.2 Acción Relatividad General ADM

El escalar cuatrodimensional de Ricci que aparece en la acción de Einstein-Hilbert puede ser reexpresado en términos del escalar de curvatura intrínseco ${}^{(3)}R$, el tensor de curvatura extrínseco K_{ij} y su contracción K, el vector normal unitario n_ν y el vector de aceleración a_ν (puede verse esta demostración en [65]) como

$$R = {}^{(3)}R + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - K^2 + 2\nabla_\nu(n^\nu \nabla_\mu n^\mu - n^\mu \nabla_\mu n^\nu). \tag{2.25}$$

Con lo anterior, estamos ahora en posición de reescribir el principio variacional que da lugar a las ecuaciones de campo de Einstein. La acción del campo gravitacional sin constante cosmológica está dada por

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g}\frac{M_{pl}^2}{2} R, \tag{2.26}$$

que se puede reexpresar como

$$\begin{aligned} S_{EH}[h_{ij}, N, N^i] = \int d^4x \sqrt{h} N \frac{M_{pl}^2}{2} \Big[& {}^{(3)}R + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - K^2 \\ & + 2\nabla_\nu(n^\nu \nabla_\mu n^\mu - n^\mu \nabla_\mu n^\nu)\Big]. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Con lo anterior hemos reescrito la acción para GR en el formalismo ADM, sin considerar aún algún modelo con un componente escalar adicional. Podemos reexpresar lo anterior como

$$S_g = S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} L(N, K_{ij}, R_{ij}, K). \tag{2.28}$$

Notemos que la acción anterior es automáticamente invariante bajo difeomorfismos espaciales que corresponden a un cambio de coordenadas espaciales. En realidad es invariante ante difeomorfismos completos.

2.3 Norma unitaria

Como ya mencionamos, la norma unitaria corresponde a la elección de la base en la cual la perturbación del campo escalar $\delta\phi$ se anula. Este grado de libertad extra consiste de un campo escalar $\phi(t, \vec{x})$, tal que su descomposición perturbativa alrededor de un universo FRW es tal que

$$\phi(t, \vec{x}) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(t, \vec{x}), \tag{2.29}$$

donde $\vec{x}$ es el conjunto de las coordenadas espaciales, $\bar{\phi}(t)$ es el valor del campo escalar al nivel del fondo FRW y $\delta\phi(t, \vec{x})$ su perturbación. La norma unitaria consiste entonces en aquella elección de coordenadas en las que $\delta\phi = 0$ se anula, es decir, $\phi(t, \vec{x}) = \bar{\phi}(t)$. De lo anterior se sigue que la coordenada temporal se puede escribir en términos del campo escalar $t = t(\phi)$ (si consideramos que ϕ es una función monótona del tiempo). Si esto se efectúa ϕ define una «rebanada» de tiempo (ϕ =constante) y por tanto las hipersuperficies de tiempo constante coincidirán con las hipersuperficies del campo escalar constante. La supresión de las perturbaciones del campo escalar efectuada por la norma unitaria implicará que la acción no se escriba explícitamente en términos del campo, sino que éste último se dará implícitamente en los elementos de la métrica, es decir, la acción quedará solamente escrita en términos de la métrica y cantidades geométricas. Consideremos como ejemplo la expresión (2.10), que en la norma unitaria cumple con

$$n_\mu \equiv -\frac{\partial_\mu \phi}{\sqrt{-(\partial\phi)^2}} \to -\frac{\delta^0_\mu}{\sqrt{-g^{00}}}, \tag{2.30}$$

donde $(\partial\phi)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$, y que en formalismo ADM se reduce a la expresión (2.12). Con esto el gradiente del campo escalar es esencialmente de tipo tiempo. También, debido a que la invarianza bajo traslaciones temporales se rompe, los coeficientes que acompañan a los operadores en la acción podrán depender del tiempo. Como se escribe en [36], ya que la dinámica de ϕ ha sido «comida» por la métrica, el lagrangiano más genérico posible queda en términos de las perturbaciones de la métrica alrededor de las soluciones del fondo FRW, que son a su vez compatibles con la preservación de las simetrías de los difemorfismos 3-dimensionales.

Otra de las conveniencias al elegir trabajar el formalismo $3 + 1$ y la norma unitaria es que permite considerar un número arbitrario de derivadas espaciales. Lo anterior es especialmente útil al estudiar teorías que requieren un orden superior en derivadas espaciales (explorando sistemáticamente el espacio de derivadas espaciales de orden superior considerando invariantes geométricos sobre las hipersuperficies ϕ = constantes), por ejemplo, el modelo Horava [44].

La métrica del fondo homogéneo e isótropo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) está dada por $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2$, con término de curvatura espacial nula. Por otro lado, considerando solamente el sector escalar de la métrica perturbada FRW, dejando de lado las componentes vectorial y tensorial de la descomposición de la métrica (para más detalle sobre esta descomposición véase [53]),la métrica general perturbada estará dada por

$$ds^2 = -e^{2A}dt^2 + 2\partial_i\psi dx^i dt + a^2(t)(e^{2\zeta}\delta_{ij} + E_{ij})dx^i dx^j, \tag{2.31}$$

donde $a(t)$ es el factor de escala, A, ψ, ζ y E son los componentes escalares, y $E_{ij} = (\partial_i\partial_j - (1/3)\delta_{ij}\partial^2)E$. Bajo las transformaciones $t \to t+\delta t$ y $x^i \to x^i + \partial^i x$, las perturbaciones del campo escalar $\delta\phi$ y E transforman como

$$\delta\phi \to \delta\tilde{\phi} = \delta\phi - \dot{\phi}\delta t, \quad E \to E - \delta x, \tag{2.32}$$

con lo que la norma unitaria consiste en hacer $\delta\tilde{\phi} = 0$ (es decir, $\delta t = (\delta\phi/\dot{\phi}_0)$, fijando t) y $E = 0$ (véase para más detalle sobre transformaciones de norma (véase [10], pág. 84).

Para finalizar este apartado, es útil ejemplificar como en la norma unitaria la lagrangiana queda determinada por cantidades geométricas invariantes bajo difeomorfismos espaciales y funciones dependientes del tiempo. Para ello observemos el caso de un campo escalar canónico ϕ, cuyo término cinético en norma unitaria queda determinado como

$$-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 \equiv -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \ \to -c(t)g^{00}, \tag{2.33}$$

donde $c(t) = \dot{\phi}_0/2$. Como observaremos más adelante, la función $c(t)$ puede ser reexpresada en términos de cantidades que caracterizan el fondo homogéneo como la presión o la densidad de energía.

2.3.1 Operadores

La acción EFT será construida usando una aproximación perturbativa de tal manera que cada operador que aparece en el funcional puede ser expandido a un orden arbitrario en perturbaciones (e.g. $A(t,x^i) = \bar{A}(t) + \delta A(t,x^i)$, donde $\bar{A}$ es el valor del operador sobre el fondo homogéneo y δA es la perturbación a orden lineal). En el contexto cosmológico, permaneceremos a orden lineal en perturbaciones, lo que conducirá a que el lagrangiano esté escrito en términos, a lo más, de orden cuadrático en perturbaciones (e.g. truncaremos expresiones como $\sqrt{h}NK^2$ hasta $\mathcal{O}(2)$ en (2.27)). Un gran número de operadores y combinaciones pueden ser considerados bajo estos aspectos, si además consideramos un número arbitrario de derivadas espaciales actuando sobre las cantidades perturbadas. Sin embargo, sobre este último punto, notemos que derivadas espaciales de orden superior actuando sobre un operador, lo vuelve menos importante a grandes escalas. Con estas características, la acción EFT estará dominada por perturbaciones a lo más de segundo orden y derivadas espaciales a lo más de orden cuadrático. En el presente apartado, nos proponemos seleccionar aquellas combinaciones de operadores geométricos que aparecerán en la acción efectiva con el fin de codificar los modelos DE/MG/DM más relevantes, a grandes escalas o bajas energía.

Recordemos algunos de estos operadores y sus principales aspectos. Primero, ya que $n^\mu K_{\nu\mu} = 0$, la curvatura extrínseca es una cantidad caracterizada solamente sobre la hipersuperficie Σ_t, por lo que bien podríamos restringir los índices de K_{ij}, a los espaciales $i, j = 1, 2, 3$. Por otro lado la geometría de Σ_t puede ser caracterizada por el tensor de Ricci 3-dimensional $\mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv {}^{(3)}R_{\mu\nu}$ asociado con la métrica $h_{\mu\nu}$. La relación entre el escalar de Ricci 3-dimensional $\mathcal{R}$ y el escalar de Ricci 4-dimensional R, está dada por

$$R = \mathcal{R} + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - K^2 + 2(Kn^\mu - a^\mu)_{;\mu}, \tag{2.34}$$

donde $K \equiv K^\mu_\mu$ es la traza del tensor de curvatura extrínseca. En suma, contando estos operadores, la acción $S_g = \int d^4x\mathcal{L}$ para el sector de la gravedad en formalismo ADM dependerá de la función lapso N, los operadores geométricos $K_{\mu\nu}$ y $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ y sus contracciones. Estas contracciones son

$$K \equiv K^\mu{}_\mu, \tag{2.35a}$$
$$\mathcal{S} \equiv K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}, \tag{2.35b}$$
$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}^\mu{}_\mu, \tag{2.35c}$$
$$\mathcal{Z} \equiv \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}. \tag{2.35d}$$

La acción más general entonces toma la forma:

$$S_g = \int d^4x\sqrt{-g}L(N, K, S, \mathcal{R}, \mathcal{Z}; t) \tag{2.36}$$

Una forma aún más general del lagrangiano escrito en el formalismo ADM se expresa como

$$L = L(N, \mathcal{R}, \mathcal{S}, K, \mathcal{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, t), \tag{2.37}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 = \partial_i\mathcal{R}\partial^i\mathcal{R},\ \mathcal{Z}_2 = \partial_i\mathcal{R}_{jk}\partial^i\mathcal{R}^{jk},\ \alpha_1 = a^i a_i,\ \alpha_2 = a^i\partial^2 a_i, \\ \mathcal{U} = \mathcal{R}_{\mu\nu}K^{\mu\nu},\ \alpha_3 = \mathcal{R}\partial_i a^i,\ \alpha_4 = a_i\partial^2(\partial^2 a^i),\ \alpha_5 = \partial^2\mathcal{R}\partial_i a^i. \end{aligned} \tag{2.38}$$

El lagrangiano (2.37) permite describir teorías de la gravedad de hasta sexto orden en derivadas espaciales. Sin embargo, como hemos anotado anteriormente, limitaremos nuestro estudio al lagrangiano de la forma (2.36). En este último, no hemos considerado dependencia de $\mathcal{U} = \mathcal{R}_{\mu\nu}K^{\mu\nu}$ en la acción (2.36) dado que, como se muestra en el Apéndice A de [36], lleva a términos semejantes ya expresados en el lagrangiano con coeficientes ligeramente diferentes, $\lambda(t)^{(3)}R_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = (\lambda(t)/2))^{(3)}RK + (\dot{\lambda}(t)/2N)^{(3)}R +$ teminos de frontera. Tampoco hemos considerado escalares que son la combinación de tres o más tensores (ej. $K^\lambda{}_\mu K^\mu{}_\nu K^\nu{}_\lambda$) porque éstos pueden ser reexpresados en términos de combinaciones de (2.35) y correcciones que son como mínimo de orden cubico en perturbaciones. Tampoco incluimos dependencia de la cantidad escalar $\mathcal{N} = N^i N_i$ usando el vector de cambio en (2.5) ya que este término no aparece inclusive en la más general de las teorías escalar-tensoriales con ecuaciones de movimiento de segundo orden. Por igual, términos como $h^{\mu\nu}\partial_\mu g^{00}\partial_\nu g^{00}$, no serán considerados, aunque son de relevancia, por ejemplo, para modelos de DE con violación de simetría de Lorentz. Finalmente, no hemos considerado tampoco combinaciones del tensor de Riemann tales como $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{R}^{\mu\nu\rho\sigma}$, porque en tres dimensiones el tensor de Riemann puede ser reexpresado en términos del tensor y el escalar de Ricci. Recordemos que en la acción (2.36), la dependencia temporal está explícitamente incluida debido a que en la norma unitaria ésta se encuentra directamente relacionada al campo escalar como $\phi = \phi(t)$. El campo ϕ entra en las ecuaciones de movimiento a través de las derivadas parciales $L_N = \partial_N L$ y $L_{NN} = \partial^2 L/\partial N^2$ (véase como ejemplo el modelo para k-esencia en la sección 3.5). Lo anterior es claro si consideramos que en norma unitaria $X = g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = -N^{-2}\dot{\phi}^2$, entonces, la dependencia de ϕ y X puede ser interpretada como la dependencia de N y t apareciendo en la acción (2.36) (véase, [44]).

2.4 Caracterización del fondo Friedmann-Robertson-Walker

El fondo homogéneo e isótropo en donde las perturbaciones cosmológicas evolucionan, queda caracterizado por la métrica FRW con curvatura nula $k_0 = 0$ cuyo elemento de línea está determinado por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{2.39}$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y t es el *tiempo cósmico* en coordenadas comóviles. En términos de la métrica FRW tenemos que $h_{ij} = \bar{h}_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$ y $\nabla_j N^i = \nabla_i N^j = 0$, de tal modo que (2.23) se puede escribir como

$$\bar{K}_{ij} = \frac{a\dot{a}}{N}\delta_{ij} = H\bar{h}_{ij}, \tag{2.40}$$

donde $H = \dot{a}/(\bar{N}a)$ y $\bar{N}$ es el valor de la función lapso al nivel del fondo FRW. Contrayendo $\bar{K}_{ij}$ se sigue que

$$\bar{K} = H\bar{h}_{ij}\bar{h}^{ij} = 3H, \tag{2.41}$$

y de (2.35b) se sigue también que

$$\bar{S} = \bar{K}^{ij}\bar{K}_{ij} = H^2\bar{h}_{ij}\bar{h}^{ij} = 3H^2. \tag{2.42}$$

De forma análoga resulta

$$\bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = 0, \tag{2.43a}$$
$$\bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{Z}} = 0. \tag{2.43b}$$

Recordemos que para calcular (2.43a) hemos considerado el tensor de Ricci 3-dimensional asociado a la métrica $\bar{h}_{ij} = a^2(t)\delta ij$. Las perturbaciones de estos operadores geométricos (es decir, e.g. $\delta K_{ij} = \bar{K}_{ij} + \delta K_{ij}$) alrededor del fondo FRW se escriben como

$$\delta K^\mu{}_\nu = K^\mu{}_\nu - Hh^\mu{}_\nu, \tag{2.44a}$$
$$\delta K = K - 3H, \tag{2.44b}$$
$$\delta\mathcal{S} = \mathcal{S} - 3H^2 = 2H\delta K + \delta K^\mu{}_\nu \delta K^\nu{}_\mu. \tag{2.44c}$$

En la última relación hemos usado el hecho de que $\delta\mathcal{S} = (\bar{K}_{\mu\nu} + \delta K_{\mu\nu})(\bar{K}^{\mu\nu} + \delta K^{\mu\nu}) - 3H^2$. Observemos además que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{Z}$ se anulan sobre el fondo, por tanto estos serán considerados solo como perturbaciones tal que

$$\delta\mathcal{R} = \delta_1\mathcal{R} + \delta_2\mathcal{R}, \tag{2.45}$$

donde $\delta_1\mathcal{R}$ y $\delta_2\mathcal{R}$ son perturbaciones de primer y segundo orden de $\mathcal{R}$. El término $\delta\mathcal{Z} = \delta\mathcal{R}^\mu{}_\nu\delta\mathcal{R}^\mu{}_\nu$ es ya únicamente de segundo orden.

Igualmente, tras un cálculo directo, al nivel del fondo FRW escribimos (2.8) como

$$\sqrt{-g} = \bar{N}a^3(t). \tag{2.46}$$

2.5 Acción efectiva

Si expandemos en serie de Taylor el lagrangiano dado en (2.36) hasta segundo orden resulta

$$\begin{aligned} L = \;& \bar{L} + L_N\delta N + L_K\delta K + L_{\mathcal{S}}\delta\mathcal{S} + L_{\mathcal{R}}\delta\mathcal{R} + L_{\mathcal{Z}}\delta\mathcal{Z} + \\ & \tfrac{1}{2}\left(\delta N\tfrac{\partial}{\partial N} + \delta K\tfrac{\partial}{\partial K} + \delta\mathcal{S}\tfrac{\partial}{\partial\mathcal{S}} + \delta\mathcal{R}\tfrac{\partial}{\partial\mathcal{R}} + \delta\mathcal{Z}\tfrac{\partial}{\partial\mathcal{Z}}\right)^2 L, \end{aligned} \tag{2.47}$$

donde los subíndices en la lagrangiana L indican derivadas parciales respecto a la cantidad señalada (e.g. $L_N = \partial_N L$). Usando las expresiones (2.44), (2.45) y $\delta\mathcal{Z} = \delta\mathcal{R}^\mu{}_\nu\delta\mathcal{R}^\nu{}_\mu$ podemos reescribir términos como $L_K\delta K + L_{\mathcal{S}}\delta\mathcal{S}$, tal que

$$\begin{aligned} L_K\delta K + L_{\mathcal{S}}\delta\mathcal{S} &= L_K(K - 3H) + L_{\mathcal{S}}(2H\delta K + \delta K^\mu{}_\nu\delta K^\nu{}_\mu) \\ &= L_K K - 3HL_K + 2HL_{\mathcal{S}}K - 6H^2L_{\mathcal{S}} + L_{\mathcal{S}}\delta K^\mu{}_\nu\delta K^\nu{}_\mu. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Ahora si definimos la cantidad

$$\mathcal{F} \equiv L_K + 2HL_{\mathcal{S}}, \tag{2.49}$$

podemos reescribir (2.48) como

$$L_K\delta K + L_{\mathcal{S}}\delta\mathcal{S} = \mathcal{F}K - 3H\mathcal{F} + L_{\mathcal{S}}\delta K^\mu{}_\nu\delta K^\nu{}_\mu. \tag{2.50}$$

Usando la relación $K = \nabla_\mu n^\mu$, ecuación (2.24), el primer término en la relación anterior resulta en

$$\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{F}K = \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu n^\mu\mathcal{F}. \tag{2.51}$$

Integrando por partes ($\int_v f(\nabla\cdot\mathbf{A})dV = -\int_v \mathbf{A}\cdot(\nabla f)dV + \oint_s f\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$), despreciando los términos de frontera y usado (2.13) valuado en el fondo FRW (es decir, cuando $N_i = 0$), podemos escribir

$$\int d^4x\sqrt{-g}n^\mu\nabla_\mu\mathcal{F} = -\int d^4x\sqrt{-g}\frac{\dot{\mathcal{F}}}{N}. \tag{2.52}$$

Si además perturbamos la función lapso N hasta orden lineal, podemos escribir $N = \bar{N} + \delta N$, con lo que, si expandimos hasta segundo orden el término

$N^{-1} = (\bar{N} + \delta N)^{-1}$ que aparece en (2.52), podemos escribir finalmente (2.48) como

$$L_K \delta K + L_{\mathcal{S}} \delta \mathcal{S} = -\dot{\mathcal{F}} - 3H\mathcal{F} + \dot{\mathcal{F}}\delta N + L_{\mathcal{S}} \delta K^{\mu}{}_{\nu} \delta K^{\nu}{}_{\mu} - \dot{\mathcal{F}} \delta N^2, \qquad (2.53)$$

en donde hemos considerado que $\bar{N} = 1$. Con lo anterior podemos identificar el orden cero y el primer orden en perturbaciones en nuestra expansión del lagrangiano (2.36), tal que

$$L_0 = \bar{L} - \dot{\mathcal{F}} - 3H\mathcal{F}, \qquad (2.54)$$

$$L_1 = (\dot{\mathcal{F}} + L_N)\delta N + L_{\mathcal{R}} \delta_1 \mathcal{R}, \qquad (2.55)$$

donde en (2.55) hemos usado la expresión (2.45). Ahora, si consideramos las siguientes definiciones

$$\mathcal{A} \equiv 4H^2 L_{\mathcal{S}\mathcal{S}} + 4HL_{\mathcal{S}K} + L_{KK}, \qquad (2.56a)$$

$$\mathcal{B} \equiv 2HL_{\mathcal{S}N} + L_{KN}, \qquad (2.56b)$$

$$\mathcal{C} \equiv 2HL_{\mathcal{S}\mathcal{R}} + L_{K\mathcal{R}}, \qquad (2.56c)$$

y usamos las relaciones (2.44), (2.45) y $\delta\mathcal{Z} = \delta\mathcal{R}^{\mu}_{\nu}\delta\mathcal{R}^{\mu}_{\nu}$, podemos escribir la parte cuadrática[4] del lagrangiano como

$$\begin{aligned} L_2 = {} & \frac{\mathcal{A}}{2}\delta K^2 + L_{\mathcal{S}}\delta K^{\mu}{}_{\nu}\delta K^{\nu}{}_{\mu} + \left(\frac{1}{2}L_{NN} - \dot{\mathcal{F}}\right)\delta N^2 + \frac{1}{2}L_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\delta_1\mathcal{R}^2 + \mathcal{B}\delta K \delta N \\ & + \mathcal{C}\delta K \delta_1 \mathcal{R} + L_{N\mathcal{R}}\delta N \delta_1 \mathcal{R} + L_{\mathcal{Z}}\delta\mathcal{Z} + L_{\mathcal{R}}\delta_2\mathcal{R}. \end{aligned} \qquad (2.57)$$

Para escribir las densidades lagrangianas respectivas a cada uno de los anteriores lagrangianos, es decir $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, debemos expandir $\sqrt{-g}$ perturbativamente, tal que

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h} = (\bar{N} + \delta N)(\sqrt{\bar{h}} + \delta\sqrt{h}) \approx \bar{N}a^3 + a^3\delta N + \bar{N}\delta\sqrt{h}, \qquad (2.58)$$

donde $\delta\sqrt{-g} = \delta\sqrt{h} + a^3\delta N$ (haciendo $\bar{N} = 1$). Con lo que las respectivas densidades lagrangianas hasta segundo orden en perturbaciones se escriben como

$$\mathcal{L}_0 = a^3\left(\bar{L} - \dot{\mathcal{F}} - 3H\mathcal{F}\right), \qquad (2.59)$$

$$\mathcal{L}_1 = a^3\left(\bar{L} + L_N - 3H\mathcal{F}\right)\delta N + \left(\bar{L} - \dot{\mathcal{F}} - 3H\mathcal{F}\right)\delta\sqrt{h} + a^3 L_R \delta_1 \mathcal{R}, \qquad (2.60)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \;=\; & \delta\sqrt{h}\Big[(\dot{\mathcal{F}} + L_N)\delta N + L_R\delta_1\mathcal{R}\Big] \\ & + a^3\Big[(L_N + (1/2)L_{NN})\delta N^2 + L_{\mathcal{R}}\delta_2\mathcal{R} + \frac{1}{2}\mathcal{A}\delta K^2 \\ & + \mathcal{B}\delta K\delta N + \mathcal{C}\delta K\delta_1\mathcal{R} + (L_{N\mathcal{R}} + L_{\mathcal{R}})\delta N\delta_1\mathcal{R} \\ & + \frac{1}{2}L_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\delta_1\mathcal{R}^2 + L_{\mathcal{S}}\delta K^{\mu}{}_{\nu}\delta K^{\nu}{}_{\mu} + L_{\mathcal{Z}}\delta\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}\delta\mathcal{R}^{\nu}_{\mu}\Big]. \end{aligned} \qquad (2.61)$$

[4]Por parte *cuadrática del lagrangiano* hacemos referencia el grupo de términos que forman parte del lagrangiano total cuyo orden de potencia es cuadrático en perturbaciones, e.g., δN^2.

2.6 Caracterización del universo inhomogeneo

Recordando la métrica perturbada (2.31) y la métrica ADM (2.5), podemos establecer directamente las relaciones $g_{00} = -N^2 + N^i N_i = -e^{2A}$, $g_{0i} = N_i = \partial_i \psi$ y $g_{ij} = h_{ij} = +a^2(t)(e^{2\zeta}\delta_{ij} + E_{ij})$. En norma unitaria donde $E = 0$ y $\delta\phi = 0$, podemos escribir las relaciones siguientes:

$$N^i = \delta^{ij}\partial_j \psi, \tag{2.62a}$$

$$h_{ij} = a^2(t)e^{2\zeta}\delta_{ij}, \tag{2.62b}$$

$$\delta\sqrt{h} = 3a^3\zeta. \tag{2.62c}$$

Calculemos ahora, dadas las relaciones anteriores, la perturbación del tensor de curvatura δR_{ij}, donde $R_{ij} = \bar{R}_{ij} + \delta R_{ij}$. Sabemos que el tensor de curvatura está dado en términos de los símbolos de Christoffel como

$$^{(3)}R_{ij} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_j \Gamma^k_{ki} + \Gamma^k_{kr}\Gamma^r_{ij} - \Gamma^k_{jr}\Gamma^r_{ki}. \tag{2.63}$$

En términos de (2.62b) los símbolos de Christoffel se escriben como

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}h^{k\lambda}\left(\partial_j h_{\lambda i} + \partial_i h_{\lambda j} - \partial_k h_{ij}\right) = a^2\frac{1}{2}h^{k\lambda}(2\partial_j\zeta\delta_{\lambda i} + 2\partial_i\zeta\delta_{\lambda j} - 2\partial_\lambda\zeta\delta_{ij}) \tag{2.64}$$

Usando $h^{ij} = a^{-2}e^{-2\zeta}\delta^{ij}$, que hemos derivado de (2.68), la expresión anterior se escribe a nivel perturbativo como

$$\Gamma^k_{ij} = (\partial_j\zeta\delta^k_i + \partial_i\zeta\delta^k_j - \partial^k\zeta\delta_{ij}) \tag{2.65}$$

y

$$\Gamma^k_{ki} = (\partial_i\zeta\delta^k_k + \partial_k\zeta\delta^k_i - \partial^k\zeta\delta_{ki}) = 3\partial_i\zeta, \tag{2.66}$$

con lo que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{R}_{ij} &= \partial_i\partial_j\zeta + \partial_j\partial_i\zeta - \partial_k\partial^k\zeta\delta_{ij} - 3\partial_j\partial_i\zeta + \partial_i\zeta\partial_j\zeta - \delta_{ij}(\partial\zeta)^2 \\ &= -(\delta_{ij}\partial^2\zeta + \partial_i\partial_j\zeta) + \partial_i\zeta\partial_j\zeta - \delta_{ij}(\partial\zeta)^2.\end{aligned} \tag{2.67}$$

donde $\partial^2\zeta = \partial_i\partial^i = \sum_{i=1}^3 \partial^2/\partial(x^i)^2$. A partir de (2.67) podemos calcular

$$\delta_1\mathcal{R} = h^{ij}\delta\mathcal{R}_{ij} = -a^{-2}e^{-2\zeta}\delta^{ij}(\delta_{ij}\partial^2\zeta + \partial_i\partial_j\zeta) = -a^{-2}4\partial^2\zeta. \tag{2.68}$$

Un procedimiento análogo pero a segundo orden en perturbaciones nos permite escribir

$$\delta_2\mathcal{R} = -2a^{-2}[(\partial\zeta)^2 - 4\zeta\partial^2\zeta]. \tag{2.69}$$

Por otro lado, a partir de

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(\partial_t h_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i), \tag{2.70}$$

donde $\nabla_i N_j = \partial_i N_j - \Gamma^k_{ij}N_k$ es la derivada covariante con respecto a h_{ij}, tenemos que

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(\partial_t(a^2e^{2\zeta}\delta_{ji}) - \partial_i N_j - \partial_j N_i + \Gamma^k_{ij}N_k + \Gamma^k_{ji}N_k\right).$$

Usando en esta última, la expansión $N^{-1} = 1 - \delta N$, podemos expresar finalmente

$$\delta K^i_j = h^{ki}\delta K_{jk} = (\dot{\zeta} - H\delta N)\delta^i_j - \frac{1}{2a^2}\delta^{ik}(\partial_k N_j + \partial_j N_k), \tag{2.71}$$

donde hemos despreciado los términos cuadráticos en perturbaciones (e.g. $\Gamma^k_{ij}N_k$). Recordemos que $g_{0i} = N_i = \partial_i\phi$, con lo que la contracción de los índices en (2.71) da como resultado

$$\delta K = \delta^j_i \delta K^i_j = 3\left(\dot{\zeta} - H\delta N\right) - \frac{1}{a^2}\partial^2\phi. \tag{2.72}$$

2.7 Ecuaciones dinámicas del fondo FRW

Para el fondo FRW hemos asumido la métrica FRW escrita en la forma ADM como

$$ds^2 = -N^2dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{2.73}$$

con la cual hemos podido caracterizar cantidades escalares como $\bar{K}$, $\bar{\mathcal{R}}$, $\bar{\mathcal{S}}$, etc. En estos términos hemos escrito la forma de las densidades lagrangianas a orden cero, orden lineal y orden cuadrático en las perturbaciones dadas por (2.59), (2.60) y (2.61) respectivamente. Ahora, si variamos la acción (2.36) expandida a orden lineal en perturbaciones con respecto a la función lapso N y el factor de escala $a(t)$, podemos expresar

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= \int dtdx^3\mathcal{L}_1 \\ &= \int dtdx^3\left[a^3(\bar{L} + L_N - 3H\mathcal{F})\delta N + 3a^2(\bar{L} - \dot{\mathcal{F}} - 3H\mathcal{F})\delta a\right], \end{aligned} \tag{2.74}$$

donde hemos considerado que $\delta\sqrt{h} = \partial_a(a^3)\delta a(t) = 3a^2\delta a$, y hemos eliminado el término $a^3 L_{\mathcal{R}}\delta_1\mathcal{R}$ por tratarse de una derivada total. De (2.74) se siguen directamente las ecuaciones dinámicas

$$\bar{L} + L_N - 3H\mathcal{F} = 0, \tag{2.75a}$$
$$\bar{L} - \dot{\mathcal{F}} - 3H\mathcal{F} = 0. \tag{2.75b}$$

Notamos de inmediato que (2.59) es idéntico a cero. Restando las relaciones anteriores, podemos escribir

$$L_N + \dot{\mathcal{F}} = 0. \tag{2.76}$$

Dos de estás tres ecuaciones describen la dinámica cosmológica sobre el fondo FRW.

2.8 Lenguaje EFT

Introduciremos ahora el lenguaje EFT propuesto en [36, 37] para simplificar las expresiones lagrangianas dadas en (2.54), (2.55) y (2.57). En este lenguaje la acción expandida hasta orden cuadrático en las perturbaciones puede ser escrita en los siguientes términos

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_*^2}{2}fR-\Lambda-cg^{00}+\frac{M_2^4}{2}(\delta g^{00})^2-\frac{\bar{m}_1^3}{2}\delta K\delta g^{00}-\frac{\bar{M}_2^2}{2}\delta K^2\right.$$
$$\left.-\frac{\bar{M}_3^2}{2}\delta K^\mu{}_\nu\delta K^\nu{}_\mu+\frac{\mu_1^2}{2}\mathcal{R}\delta g^{00}+\frac{\bar{m}_5}{2}\mathcal{R}\delta K+\frac{\lambda_1}{2}\mathcal{R}^2+\frac{\lambda_2}{2}\mathcal{R}^\mu{}_\nu\mathcal{R}^\nu{}_\mu\right] \quad (2.77)$$

donde $g^{00}=-(1/N^2)$, M_* es una constante, y los coeficientes $f,\Lambda,c,M_2^4,...$ son funciones que dependen del tiempo, llamadas *funciones efectivas*. Notemos que R es el 4-dimensional escalar de Ricci que puede ser escrito en términos de cantidades 3-dimensionales como recordamos de (2.34). Examinemos en primer lugar cómo se escriben las ecuaciones (2.54) y (2.55) en este lenguaje. Únicamente los tres primeros términos en (2.77) contribuyen a $\bar{L}$, L_N y $\mathcal{F}$, y de esta forma a las ecuaciones dinámicas del fondo FRW. Usando (2.34) reexpresamos el primer término en (2.77) como

$$\frac{M_*^2}{2}fR=\frac{M_*^2}{2}(f\mathcal{R}+f\mathcal{S}-fK^2+2f(Kn^\mu-a^\mu);_\mu), \quad (2.78)$$

(recordemos que $\mathcal{R}={}^{(3)}R$ y $\mathcal{S}\equiv K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}$). Integrando el último término por partes como hicimos en (2.51)-(2.52) resulta

$$\begin{aligned}2\int d^4x\sqrt{-g}K(n^\mu_{;\mu}-a^\mu_{;\mu}) &= -2\int d^4x\sqrt{-g}Kn^\mu\nabla_\mu f+2\int d^4x\sqrt{-g}Ka^\mu\nabla_\mu f\\ &= -2\int d^4x\sqrt{-g}K\frac{\dot{f}}{N}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

(recordemos que $n^0=1/N$ y $a^0=0$) con lo que podemos escribir

$$\frac{M_*^2}{2}fR-\Lambda-cg^{00}=\frac{M_*^2}{2}\left(f\mathcal{R}+f\mathcal{S}-fK^2-2\dot{f}\frac{K}{N}\right)-\Lambda+\frac{c}{N^2}. \quad (2.80)$$

Finalmente usando $N=1+\delta N$, $\mathcal{R}=\delta_1\mathcal{R}+\delta_2\mathcal{R}$, $K=3H^2+\delta K$, $\mathcal{S}=3H^2+2H\delta K+\delta K^\mu{}_\nu\delta K^\nu{}_\mu$, expandiendo $1/N$, $1/N^2$ hasta orden lineal en δN e integrando por partes los términos con $K=\nabla^\mu n_\mu$ (como ejemplo $\int d^4x\sqrt{-g}\alpha(t)\delta K=\int d^4x\sqrt{-g}\alpha(t)(K-3H)=\int d^4x\sqrt{-g}(-\dot{\alpha}-3H\alpha+\dot{\alpha}\delta N)$) podemos comparar con (2.54) y (2.55) hasta orden lineal y escribir

$$\bar{L}-\dot{\mathcal{F}}-3H\mathcal{F} = M_*^2(3fH^2+2f\dot{H}+2\dot{f}H+\ddot{f})+c-\Lambda, \quad (2.81)$$
$$\dot{\mathcal{F}}+L_N = M_*^2(\dot{f}H-2f\dot{H}-\ddot{f})-2c, \quad (2.82)$$
$$L_{\mathcal{R}}\delta_1\mathcal{R} = \frac{M_*}{2}f\delta_1\mathcal{R}. \quad (2.83)$$

donde hemos resuelto el término con K^2 como

$$\begin{aligned}-\int d^4x\sqrt{-g}(2\dot{f}K)(1-\delta N) &= \int d^4x\sqrt{-g}(-2\dot{f}K+2\dot{f}(3H+\delta K)\delta N)\\ &= \int d^4x\sqrt{-g}(2\ddot{f}-2\ddot{f}\delta N+6\dot{f}H\delta N).\end{aligned}$$

Con las relaciones anteriores y usando las ecuaciones para el fondo FRW (2.75), podemos expresar c y Λ como

$$\begin{aligned} c+\Lambda &= 3M_*^2\big(fH^2+\dot{f}H\big), && (2.84)\\ \Lambda-c &= M_*^2\big(2f\dot{H}+3fH^2+2\dot{f}H+\ddot{f}\big). && (2.85)\end{aligned}$$

Recordemos que estas expresiones las hemos calculado en ausencia de materia. En el siguiente capítulo se considerarán estás ecuaciones en presencia de materia. Por otro lado, si queremos estudiar las perturbaciones, debemos expandir (2.77) hasta segundo orden de forma análoga a lo anteriormente realizado. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} L &= M_*^2(\ddot{f}+2H\dot{f}+2\dot{H}f+3H^2f)-\Lambda+c\\ &+[M_*^2(-\ddot{f}+H\dot{f}-2\dot{H}f)-2c]\delta N+\frac{M_*^2}{2}f\delta_1\mathcal{R}\\ &+[M_*^2(\ddot{f}-H\dot{f}+2\dot{H}f)+3c+2M_2^4]\delta N^2-\left(\frac{M_*^2}{2}f+\frac{\bar{M}_2^2}{2}\right)\delta K^2\\ &+(M_*^2\dot{f}-\bar{m}_1^3)\delta K\delta N+\frac{\bar{m}_5}{2}\delta K\delta_1\mathcal{R}+\mu_1^2\delta N\delta_1\mathcal{R}+\frac{M_*^2}{2}f\delta_2\mathcal{R}\\ &+\left(\frac{M_*^2}{2}f-\frac{\bar{M}_3^2}{2}\right)\delta K^\mu{}_\nu\delta K^\nu{}_\mu+\frac{\lambda_1}{2}\delta_1\mathcal{R}^2+\frac{\lambda_2}{2}\delta\mathcal{R}^\mu{}_\nu\delta\mathcal{R}^\nu{}_\mu, \end{aligned} \tag{2.86}$$

donde hemos considerado la expansión

$$g^{00}=\frac{-1}{N^2}=-1+2\delta N-3(\delta N)^3+...\approx-1+\delta g^{00}, \tag{2.87}$$

en la que $\delta g^{00}=2\delta N$ de tal forma que $(\delta g^{00})^2=4(\delta N)^2$, y a su vez hemos usado el hecho de que $\mathcal{Z}=\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}\delta\mathcal{R}^{\mu\nu}$. Ahora, comparando los términos cuadráticos de (2.86) con aquellos en la expresión (2.57) se sigue que

$$\begin{aligned} &2H^2L_{\mathcal{SS}}+2HL_{\mathcal{S}K}+\frac{1}{2}L_{KK}=-\left(\frac{M_*^2}{2}f+\frac{\bar{M}_2^2}{2}\right),\\ &L_{\mathcal{S}}=\left(\frac{M_*^2}{2}f-\frac{\bar{M}_3^2}{2}\right),\\ &\left(\frac{1}{2}L_{NN}-\dot{\mathcal{F}}\right)=[M_*^2(\ddot{f}-H\dot{f}+2\dot{H}f)+3c+2M_2^4],\ \frac{1}{2}L_{\mathcal{RR}}=\frac{\lambda_1}{2},\\ &2HL_{\mathcal{S}N}+L_{KN}=(M_*^2\dot{f}-\bar{m}_1^3),\\ &2HL_{\mathcal{SR}}+L_{K\mathcal{R}}=\frac{\bar{m}_5}{2},\ L_{\mathcal{Z}}=\frac{\lambda_2}{2},\ L_{\mathcal{R}}=\frac{M_*^2}{2}f,\ L_{N\mathcal{R}}=\mu_1^2. \end{aligned}$$

Finalmente es sencillo encontrar, después de combinar algunas de las relaciones anteriores, que las *funciones EFT* se escriben como

$$\begin{aligned} &M_2^4=\frac{1}{4}(2L_N+L_{NN}-2c),\\ &\bar{m}_1^3=2\dot{L}_{\mathcal{R}}-L_{KN}-2HL_{\mathcal{S}\mathcal{N}},\\ &\bar{M}_2^2=-2L_{\mathcal{R}}-L_{KK}-4HL_{\mathcal{S}K}-4H^2L_{\mathcal{SS}},\\ &\bar{M}_3^2=2L_{\mathcal{R}}-2L_{\mathcal{S}},\ \mu_1^2=L_{N\mathcal{R}},\\ &\bar{m}_5=2L_{K\mathcal{R}}+4HL_{\mathcal{SR}},\ \lambda_1=L_{\mathcal{RR}},\ \lambda_2=2L_{\mathcal{Z}},\ f=\frac{2L_{\mathcal{R}}}{M_*^2}. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Para encontrar M_2^4 hemos usado la relación (2.82). Las expresiones en (2.88) son una especie de diccionario que relaciona las funciones efectivas de la acción en (2.77) y aquellas que aparecen en el lagrangiano (2.47).

Capítulo 3

Teoría efectiva de campo aplicada a energía oscura

En el presente capítulo aplicamos el formalismo EFT expuesto en el Capitulo 2 a DE/MG. Obtenemos las ecuaciones del fondo FRW en presencia de materia y una ecuación de estado para un componente efectivo de DE ($\rho_{EF} = \omega_{EF} p_{EF}$) [68, 37]. Escribimos también una ecuación dinámica para caracterizar la evolución del DoF escalar adicional y la velocidad del sonido que caracteriza su propagación [36, 68, 58, 15]. Estudiamos brevemente modos tensoriales, correlacionamos su velocidad de propagación con los modos escalares y observamos las condiciones para la estabilidad de la teoría. Describimos brevemente la base α, base fenomenológica en términos de las funciones efectivas [33, 12]. Obtenemos a su vez las ecuaciones dinámicas para el campo escalar ϕ (con ayuda del truco de *Stückelberg*) y las perturbaciones escalares de la métrica Φ, Ψ, β y α [58, 36]. Finalmente, con estás ecuaciones a disposición podemos establecer la conexión entre las funciones fenomenológicas $G_{\text{eff}}(k,t)$, $\gamma(k,t)$ y $\Sigma(k,t)$, denominadas *constante de Newton efectiva*, *parámetro de deslizamiento gravitacional* y *parámetro de deflección de la luz*, respectivamente, y las funciones efectivas [68, 36, 58, 37, 15].

3.1 Ecuaciones para el fondo FRW en presencia de materia

Estudiemos ahora las ecuaciones dinámicas del fondo FRW en presencia de materia (CDM, bariones, fotones, etc). Derivemos estas ecuaciones a partir de la variación de la acción

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}L + \int d^4x \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi_i), \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{L}_m$ es la densidad lagrangiana asociada a los campos de materia ψ_i. Recordemos que el DoF extra (el campo escalar ϕ) puede jugar el papel de responsable de la expansión acelerada en la época final de la evolución del universo o de ser el responsable de los efectos de la materia oscura para la formación de estructuras, dependiendo de en que contexto nos situemos. Asumiremos también que la materia no está acoplada al campo escalar ϕ y que está mínimamente acoplada a la métrica $g_{\mu\nu}$. El tensor de energía momento a nivel del fondo FRW está caracterizado por

$$T^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\lambda}T_{\lambda\nu} = (\rho_m + p_m)u^{\mu}u_{\nu} - p_m\delta^{\mu}_{\nu}, \tag{3.2}$$

donde ρ_m y p_m son la densidad de energía y la presión propias, además, para un observador cómovil, su velocidad característica está dada por $u^0 = 1$ y $u^i = 0$. A su vez (3.2) satisface la ecuación de continuidad, $\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0$.

La variación de la parte de la acción correspondiente al sector de materia con respecto a la función lapso N y el factor de escala $a(t)$ se escribe como

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \int d^4xa^3\left(\rho_m\delta N - 3p_m\frac{\delta a}{a}\right), \tag{3.3}$$

donde hemos considerado $\delta g_{00} = 2\delta N$ y $\delta g_{ij} = 2a^{-1}\delta a\delta_{ij}$. De la expresión anterior y en conjunto con las ecuaciones (2.75) que corresponden a la variación de $\mathcal{L}_g$ en (3.1), se siguen directamente la primera y segunda ecuación de Friedmann:

$$\bar{L} + L_N - 3H\mathcal{F} = \rho_m \tag{3.4a}$$
$$\bar{L} - \dot{\mathcal{F}} - 3H\mathcal{F} = -p_m. \tag{3.4b}$$

Restando a (3.4a) la relación (3.4b) obtenemos también $\dot{\mathcal{F}} + L_N = \rho_m + p_m$. Si trabajamos en el lenguaje EFT, recordando las relaciones (2.81), (2.82) y (2.83), tenemos que

$$M_*^2(\ddot{f} + 2H\dot{f} + 2\dot{H}f + 3H^2f) - \Lambda + c = \bar{L} - \dot{\mathcal{F}} - 3H\mathcal{F} = -p_m, \tag{3.5a}$$
$$M_*^2(-\ddot{f} + H\dot{f} - 2\dot{H}f) - 2c = \dot{\mathcal{F}} + L_N = \rho_m + p_m. \tag{3.5b}$$

Sumando (3.5b) a (3.5a) y multiplicando por -1 obtenemos,

$$\Lambda + c = 3M_*^2(fH^2 + \dot{f}H) - \rho_m. \tag{3.6}$$

De forma análoga es sencillo obtener

$$\Lambda - c = M_*^2(2f\dot{H} + 3fH^2 + 2\dot{f}H + \ddot{f}) + p_m. \tag{3.7}$$

Derivando (3.6), usando la ecuación de continuidad para el fondo FRW

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0, \tag{3.8}$$

y la relación (3.7), podemos escribir

$$\dot{\Lambda} + \dot{c} + 6Hc = 3M_*^2\dot{f}(2H^2 + \dot{H}). \tag{3.9}$$

Observemos que las ecuaciones dinámicas para el fondo homogéneo (*las ecuaciones de Friedmann modificadas*) quedan determinadas por las funciones efectivas $f(t)$, $\Lambda(t)$ y $c(t)$, además del parámetro de Hubble $H(t)$ y de las densidades de energía y presión ρ_m y p_m. Si quisiéramos recuperar las ecuaciones de

Friedmann para GR, basta considerar los parámetros $c = \Lambda = 0$ y $f = 1$, tal que de (3.6) y (3.7), resulta

$$H^2 = \frac{\rho_m}{3M_*^2}, \tag{3.10a}$$
$$-3M_*^2(2\dot{H} + 3H^2) = +3p_m, \tag{3.10b}$$
$$\rightarrow \dot{H} + H^2 = \frac{(\rho_m + 3p_m)}{2(-3M_*^2)}, \tag{3.10c}$$

donde si comparamos con la forma canonica de las ecuaciones de Friedmann tenemos que $M_*^2 = (8\pi G)^{-1}$. Observemos que si en la constante M_*^2 hubiésemos absorbido un valor libre de la función $f(t)$, tal que $M_*^2 = M_*^2 f(t)$, podríamos situarnos en un marco donde $G = G(t)$, es decir, donde G es considerada como una función del tiempo o, por decirlo de otra manera, como un parámetro de gravitación efectivo; ahora, si en (3.6) y (3.7) despejamos ρ_m y $-p_m$, y a su vez sumamos los términos $3M_{pl}H^2$ y $M_{pl}^2(2\dot{H} + 3H^2)$ podemos definir las cantidades

$$\rho_{EF} = c + \Lambda + 3H^2(M_{pl}^2 - M_*^2 f) - 3M_*^2 \dot{f} H, \tag{3.11a}$$
$$p_{EF} = c - \Lambda - (2\dot{H} + 3H^2)(M_{pl}^2 - M_*^2 f) + M_*^2(2H\dot{f} + \ddot{f}), \tag{3.11b}$$

donde M_{pl}^2 puede actuar por ejemplo como $M_{pl}^2 = M_*^2 f(t)$. Las relaciones (3.11), por la transitividad del parámetro efectivo M_{pl}^2, serán consideradas como cantidades efectivas de densidad de energía y presión para DE (o DM, según sea el caso). Tras una breve manipulación, es posible escribir

$$3M_{pl}^2 H^2 = \rho_{EF} + \rho_m \tag{3.12a}$$
$$M_{pl}^2(2\dot{H} + 3H^2) = -p_{EF} - p_m. \tag{3.12b}$$

Derivando (3.12a), considerando $M_{pl}^2 = M_*^2 =$ constante, y usando la relación de continuidad para el fondo FRW (3.8), encontramos que se cumple una ecuación análoga a la ecuación de continuidad para los componentes efectivos dada por

$$\dot{\rho}_{EF} - 3H(\rho_{EF} + p_{EF}) = 0. \tag{3.13}$$

La relación anterior nos indica que el componente oscuro satisface la ecuación de continuidad en su forma estándar, ya sea que estemos situados en un contexto donde ϕ juega un papal como DM o DE. Podemos definir también una ecuación de estado para DE ($p_{EF} = \omega_{EF}\rho_{EF}$) tal que

$$\omega_{EF} = \frac{\rho_{EF} - \rho_{EF} + p_{EF}}{\rho_{EF}} = -1 + \frac{2c - 2\dot{H}(M_{pl}^2 - M_*^2 f) - M_*^2(H\dot{f} - \ddot{f})}{c + \Lambda + 3H^2(M_{pl}^2 - M_*^2 f) - 3M_*^2 \dot{f} H}. \tag{3.14}$$

donde hemos usado la suma de las expresiones (3.11). Como ejemplo inmediato consideremos GR más una constante cosmológica $\Lambda(0) = \Lambda_0$, tal caso corresponde a la elección de las funciones $c(t) = 0$, $M_{pl} = M_*$ y $f(t) = 1$, con lo que, a partir de (3.14), recuperamos la ecuación de estado $\omega_{DE} = -1$, característica del modelo ΛCDM.

3.2 Ecuaciones dinámicas para perturbaciones

Obtengamos ahora las ecuaciones dinámicas para las perturbaciones a partir de la densidad lagrangina en (2.61) usando las expresiones (2.62c), (2.67)-(2.69), (2.72) y desarrollando hasta orden cuadrático. Con estos términos la densidad lagrangiana a orden cuadrático en perturbaciones se escribe como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = a^3 \Bigg\{ & \frac{1}{2}(2L_N + L_{NN} + 9\mathcal{A}H^2 - 6\mathcal{B}H + 6L_{\mathcal{S}}H^2)\delta N^2 \\ & + \left[(\mathcal{B} - 3\mathcal{A}H - 2L_{\mathcal{S}}H)\left(3\dot{\zeta} - \frac{\partial^2\psi}{a^2}\right) + 4(3H\mathcal{C} - L_{N\mathcal{R}} - L_{\mathcal{R}})\frac{\partial^2\zeta}{a^2}\right]\delta N \\ & - (3\mathcal{A} + 2L_{\mathcal{S}})\dot{\zeta}\frac{\partial^2\psi}{a^2} - 12\mathcal{C}\dot{\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{a^2} + \left(\frac{9}{2}\mathcal{A} + 3L_{\mathcal{S}}\right)\dot{\zeta}^2 + 2L_{\mathcal{R}}\frac{(\partial\zeta)^2}{a^2} \\ & + \frac{1}{2}(\mathcal{A} + 2L_{\mathcal{S}})\frac{(\partial^2\psi)^2}{a^4} + 4\mathcal{C}\frac{(\partial^2\psi)(\partial^2\zeta)}{a^4} + 2(4L_{\mathcal{R}\mathcal{R}} + 3L_{\mathcal{Z}})\frac{(\partial^2\zeta)^2}{a^2}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde hemos usado la relación $L_N + \dot{\mathcal{F}} = 0$, que obtenemos usando (2.75), para eliminar el primer término en (2.61). Ahora, variando la acción $S = \int d^4x\mathcal{L}_2$ con respecto a δN y $\partial^2\psi$, y definiendo $\mathcal{W} \equiv \mathcal{B} - 3\mathcal{A}H - 2L_{\mathcal{S}}H$ se siguen directamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} & \left[2L_N + L_{NN} - 6H\mathcal{W} - 9H^2\mathcal{A} - 6H^2L_{\mathcal{S}}\right]\delta N \\ & -\mathcal{W}\frac{\partial^2\psi}{a^2} + 3\mathcal{W}\dot{\zeta} + 4(3H\mathcal{C} - L_{N\mathcal{R}} - L_{\mathcal{R}})\frac{\partial^2\zeta}{a^2} = 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\mathcal{W}\delta N + (3\mathcal{A} + 2L_{\mathcal{S}})\dot{\zeta} - (\mathcal{A} + 2L_{\mathcal{S}})\frac{\partial^2\psi}{a^2} - 4\mathcal{C}\frac{\partial^2\zeta}{a^2} = 0, \tag{3.17}$$

que corresponden a las constricciones *hamiltonianas* y de *momento*, respectivamente. Con el objeto de obtener ecuaciones dinámicas que a lo más contengan derivadas de segundo orden (puesto que a orden lineal en perturbaciones derivadas superiores no contribuyen significativamente), es necesario considerar que los tres últimos términos en (3.15) se anulan, para lo cual se debe cumplir que

$$\mathcal{A} + 2L_{\mathcal{S}} = 4H^2L_{\mathcal{S}\mathcal{S}} + 4HL_{\mathcal{S}K} + L_{KK} + 2L_{\mathcal{S}} = 0, \tag{3.18a}$$

$$\mathcal{C} = 2HL_{\mathcal{S}\mathcal{R}} + L_{K\mathcal{R}} = 0, \tag{3.18b}$$

$$4L_{\mathcal{R}\mathcal{R}} + 3L_{\mathcal{Z}} = 0, \tag{3.18c}$$

y por tanto, derivadas espaciales de grado superior están ausentes de las ecuaciones dinámicas. Usando las expresiones $\mathcal{A} = -\bar{M}_*^2 f - \bar{M}_2^2$, $\mathcal{C} = \bar{m}_5/2$, $L_{\mathcal{Z}} = \lambda_2/2$ y $L_{\mathcal{R}\mathcal{R}} = \lambda_1$, podemos escribir las condiciones (3.18) en términos de las funciones EFT como

$$\bar{m}_5 = 0, \quad \bar{M}_2^2 + \bar{M}_3^2 = 0, \quad 4\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2 = 0. \tag{3.19}$$

Con lo que el lagrangiano EFT más general el cual no genera derivadas de orden superior en las ecuaciones lineales para las perturbaciones, es

$$\begin{aligned} L =& \frac{M_*^2}{2} f(t) R - \Lambda(t) - c(t) g^{00} + \frac{M_2^4(t)}{2} (\delta g^{00})^2 - \frac{m_3^3(t)}{2} \delta K \delta g^{00} \\ & - m_4^2(t)(\delta K^2 - \delta K_\nu^\mu \delta K_\nu^\mu) + \frac{\tilde{m}_4^2(t)}{2} \delta \mathcal{R} \delta g^{00}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde $m_3^3 \equiv \bar{m}_1^3$, $m_4^2 \equiv \frac{1}{4}(\bar{M}_2^2 - \bar{M}_3^2)$ y $\tilde{m}_4^2 \equiv \mu_1^2$. Ahora, dadas las condiciones (3.19), se sigue de la ecuación (3.17), que

$$\delta N = \frac{-(3\mathcal{A} + 2L_\mathcal{S})\dot{\zeta}}{\mathcal{W}} = \frac{4L_\mathcal{S}\dot{\zeta}}{\mathcal{B} + 4HL_2} = \mathcal{D}\dot{\zeta} \tag{3.21}$$

donde

$$\mathcal{D} \equiv \frac{4L_\mathcal{S}}{\mathcal{B} + 4HL_\mathcal{S}}. \tag{3.22}$$

A su vez, usando la expresión anterior en (3.16), reescribimos

$$\frac{\partial^2 \psi}{a^2} = 3\dot{\zeta} + [2L_N + L_{NN} - 6H\mathcal{B} - 12H^2 L_\mathcal{S}]\mathcal{D}\dot{\zeta} - \frac{\mathcal{M}}{L_\mathcal{S}} \frac{\partial^2 \zeta}{a^2}. \tag{3.23}$$

Si usamos estás expresiones en la densidad lagrangiana (3.15) obtenemos una expresión de la forma

$$\mathcal{L}_2 = c_1(t)\dot{\zeta}^2 + c_2(t)\dot{\zeta}\partial^2\zeta + c_3(t)(\partial\zeta)^2, \tag{3.24}$$

donde las funciones dependientes del tiempo $c(t)_{1,2,3}$ están dadas por

$$c_1(t) = \frac{1}{2} a^3 (L_{NN} + 2L_N - 6H\mathcal{B} - 12H^2 L_\mathcal{S})\mathcal{D}^2, \tag{3.25}$$

$$c_2(t) = -4\mathcal{M}a, \tag{3.26}$$

$$c_3(t) = 2L_\mathcal{R} a^3. \tag{3.27}$$

Observemos que integrando por partes, el segundo término en (3.24) se puede escribir como[1]

$$\int d^4x \sqrt{-g} c_2(t) \dot{\zeta} \partial^2 \zeta = \int d^4 \sqrt{-g} \dot{c}_2(t) (\partial\zeta)^2/2. \tag{3.28}$$

Lo que nos lleva finalmente a una expresión de la forma

$$\mathcal{L}_2 = \frac{a^3}{2} \left[\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}} \dot{\zeta}^2 + \mathcal{L}_{\partial_i\zeta\partial_i\zeta} \frac{(\partial_i \zeta)^2}{a^2} \right], \tag{3.29}$$

donde

$$\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}} = a^3 (L_{NN} + 2L_N - 6H\mathcal{B} - 12H^2 L_\mathcal{S})\mathcal{D}^2, \tag{3.30}$$

$$\mathcal{L}_{\partial_i\zeta\partial_i\zeta} = 4 \left[L_\mathcal{R} - \frac{1}{a} \frac{d}{dt}(a\mathcal{M}) \right]. \tag{3.31}$$

[1] Para obtener esta expresión hemos considerado que $c_2\dot{\zeta}\partial^2\zeta = \partial^\mu[c_2\dot{\zeta}\partial_\mu\zeta] - c_2(\partial^\mu\dot{\zeta})\partial_{\mu\zeta} - (\partial^\mu c_2)\dot{\zeta}\partial_\mu\zeta$, donde eliminando el término de derivada total y haciendo $\partial^\mu c_2 = 0$, resulta $c_2\dot{\zeta}\partial^2\zeta = -c_2(\partial^\mu\dot{\zeta})\partial_{\mu\zeta}$. Por otro lado $(d/dt)[c_2] = \dot{c_2}[\partial\zeta]^2 + 2c_2\partial\dot{\zeta}\partial_\mu\zeta$. Con lo que finalmente conseguimos la expresión (3.28).

Variando la acción (3.29) con respecto a la perturbación de curvatura ζ tal que, a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange $(\partial\mathcal{L}_2/\partial\zeta) - \partial_\mu(\partial\mathcal{L}_2/\partial(\partial_\mu\zeta)) = 0$, podemos escribir

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial(\dot{\zeta})}\right) - \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial(\partial_i\zeta)}\right) = 0, \tag{3.32}$$

con lo que finalmente obtenemos la ecuación dinámica para ζ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a^3}{2}\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}}\dot{\zeta}^2\right) + \frac{a^3}{2}\mathcal{L}_{\partial_i\zeta\partial_i\zeta}\partial^2\zeta = 0. \tag{3.33}$$

Esta es la ecuación de movimiento de segundo orden con un solo grado de libertad. Reforcemos el hecho de que, satisfechas las condiciones (3.18), la teoría gravitacional que surja de la acción (2.36), no involucrará derivadas de orden superior en la ecuaciones dinámicas para perturbaciones lineales. Notemos también, como se observa en [36], que para conseguir estabilidad clásica y cuántica (es decir, evitar la presencia de *fantasmas* que explicaremos más adelante) se requiere que el término de energía cinética en el lagrangiano sea positivo, es decir, que $\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}} > 0$. Por otro lado, la velocidad del sonido de las fluctuaciones esta caracterizada mediante el cociente

$$c_s^2 = -\frac{\mathcal{L}_{\partial_i\zeta\partial_i\zeta}}{\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}}} = \frac{(\dot{\mathcal{M}} + H\mathcal{M} - L_R)(\mathcal{B} + 6HL_{\mathcal{S}})^2}{L_{\mathcal{S}}[3\mathcal{B}^2 + 4L_{\mathcal{S}}(2L_N + L_{NN})]}. \tag{3.34}$$

Por otra parte observemos que podemos reescribir (3.21) en términos de lenguaje EFT como

$$\delta N = \frac{\dot{\zeta}}{H(1+\alpha_B)}, \text{ donde } \alpha_B = \frac{\mathcal{B}}{4HL_{\mathcal{S}}} = \frac{M_*^2\dot{f} - m_3^3}{2HM_*^2 f}, \tag{3.35}$$

Lo que expresa el hecho de que α_B juega el papel de desviación de la expresión estándar dado por GR $\delta N = \dot{\zeta}/H$. Cuando $\alpha_B \neq 0$, parte del término cinético de las fluctuaciones viene del término $\delta K\delta N$ en la acción (2.61), es decir, de la mezcla cinética entre los grados de libertad escalares y gravitacionales. Como ya anotamos anteriormente, este fenómeno es conocido como *kinetic brading.*

3.2.1 Modos tensoriales

Analicemos brevemente el comportamiento de las perturbaciones tensoriales. La métrica 3-dimensional, incluyendo modos tensoriales, puede ser expresada como

$$h_{ij} = a^2 e^{2\zeta}\hat{h}_{ij}, \quad \hat{h}_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_{ij} + \frac{1}{2}\gamma_{il}\gamma_{jl}, \quad \det\hat{h} = 1, \tag{3.36}$$

donde γ_{ij} es un tensor sin traza y sin divergencia tal que $\gamma_{ii} = \partial_i\gamma_{ij} = 0$. Ahora, dado que los modos tensoriales se desacoplan de los modos escalares a orden lineal, podemos sustituir (3.36) en la acción con la densidad lagrangiana (2.61) y hacer nulas las perturbaciones escalares. Usando el hecho de que

$$\delta_2{}^{(3)}R = \frac{1}{a^2}\left(\gamma^{ij}\partial^2\gamma_{ij} + \frac{3}{4}\partial_k\gamma_{ij}\partial^k\gamma^{ik} - \frac{1}{2}\partial_k\gamma_{ij}\partial^j\gamma^{ik}\right), \tag{3.37}$$

y de que, dada la relación (2.23),

$$\delta K_{ij} = \frac{1}{2\bar{N}}\dot{\gamma}_{ij} \to \delta K_{ij}^2 = \frac{1}{4}\dot{\gamma_{ij}}^2, \quad \delta K = 0, \tag{3.38}$$

donde hemos hecho $\bar{N} = 1$, podemos escribir la acción a segundo orden para perturbaciones tensoriales tal que

$$S_2 = \int d^4 x a^3 [L_{\mathcal{S}} \delta K_{ij} \delta K^{ij} + L_{\mathcal{R}} \delta_2 \mathcal{R}] = \int d^4 x \frac{a^3}{4}\left[L_{\mathcal{S}} \dot{\gamma_{ij}}^2 - \frac{L_{\mathcal{R}}}{a^2}(\partial_k \gamma_{ij})^2\right], \tag{3.39}$$

después de haber integrado por partes un par de veces. Observemos el hecho de que podemos recuperar lo que se obtiene en GR cuando $L_{\mathcal{S}} = L_{\mathcal{R}} = M_*^2/2$, lo que sugiere definir la masa efectiva de Planck M como $M^2 \equiv 2L_{\mathcal{S}}$. Podemos entonces reescribir la expresión anterior como

$$S_2 = \int d^4 x a^3 \frac{M^2}{8}\left[\dot{\gamma}_{ij}^2 - \frac{c_t^2}{a^2}(\partial_k \gamma_{ij})^2\right], \tag{3.40}$$

donde velocidad del sonido de los modos tensoriales se define como

$$c_t^2 \equiv \frac{L_{\mathcal{R}}}{L_{\mathcal{S}}}. \tag{3.41}$$

3.2.2 Base α

Una parametrización adicional con un carácter más fenomenológico, se da en la parametrización denominada α. En términos de esta base de funciones las propiedades físicas del sistema pueden ser descritas con mayor precisión. En términos de está parametrización, la acción efectiva a orden cuadrático se escribe como

$$\begin{aligned} S = \int dx^3 dt a^3 \frac{M^2}{2}\big[&\delta K^\mu{}_\nu \delta K^\nu{}_\mu - \delta K^2 + (1+\alpha_T)(\delta_2 \mathcal{R} + \delta_1 \mathcal{R} \delta(\sqrt{h}/a^3)) \\ &+ \alpha_K H^2 \delta N^2 + 4H\alpha_B \delta N \delta K + (1+\alpha_H)\delta_1 \mathcal{R} \delta N\big], \end{aligned} \tag{3.42}$$

donde $M^2 = M_*^2 f + 2m_4^2$. A partir de esta acción, cualquier modificación de interés a GR queda determinada por cinco funciones dependientes del tiempo, a saber, las funciones α_B, α_H, α_K, α_T y α_M. Sin embargo se requiere la adición de más funciones para describir modificaciones con derivadas espaciales de ordenes superiores. Por otro lado, estas funciones presentan la cualidad de describir más claramente efectos físicos, siendo la acción (3.42) una aproximación más fenomenológica. En términos de las *funciones efectivas* en (2.77), la base α se escribe como

$$\begin{aligned} &\alpha_B = \frac{M_*^2 \dot{f} - m_3^3}{2HM^2}, \ \alpha_T = -\frac{2m_4^2}{M^2} \equiv c_t^2 - 1, \ \alpha_K = \frac{2c + 4M_2^4}{H^2 M^2}, \\ &\alpha_H = \frac{2\mu_1^2 - \bar{m}_4^2}{M^2}, \ \ \alpha_M = \frac{M_*^2 \dot{f} + 2(m_2^4)^{\cdot}}{M^2 H} = \frac{1}{H}\frac{d \ln M^2}{dt}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

donde M^2 es la *masa de Planck efectiva* y c_t es la velocidad de propagación de los modos tensoriales (o bien de las ondas gravitacionales). Si, por ejemplo, quisiéramos pasar a la lagrangiana (3.20) a partir a la lagrangiana en

(3.42), debemos recordar que $\sqrt{-g} = a^3 + a^3\delta N + \delta\sqrt{h}$, y usar la relación $R = K_{ij}K^{ij} - K^2 + \mathcal{R}$ (donde hemos eliminado el término de derivada total en (2.34)) para recuperar el término $M_*^2 f(t)R$. Observemos que $\alpha_M(t)$ caracteriza la evolución de la masa efectiva de Planck. Esta masa efectiva conduce a modificar el crecimiento de estructuras e introduce esfuerzo anisotrópico al sistema. Por otro lado, α_B, conocida como *braiding function*, describe la mezcla entre la métrica y el campo escalar ϕ (DE/DM/MG), toma lugar de importancia en los términos cinéticos y la velocidad de propagación del los modos escalares. A su vez, α_k, llamada *kineticity*, es un término puramente cinético, afecta la velocidad de propagación del campo escalar ϕ; grandes valores de esta función suprimen la velocidad del sonido de perturbaciones escalares. También, α_T, llamada *tensor speed excess*, describe las desviaciones a la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales del valor de la velocidad de la luz (GR). Finalmente, α_H, caracteriza las desviaciones respecto a las teorías Horndeski, contribuye a la velocidad de propagación del campo escalar y acopla el campo gravitacional a la velocidad de la materia. Para más detalle, véase [33, 37].

3.3 Condiciones de estabilidad

Retomemos unas notas sobre las posibles inestabilidades del sistema. Tales inestabilidades pueden darse como *fantasmas*, *gradientes* e *inestabilidades taquiónicas.* Estás inestabilidades están relacionadas con la evolución del grado de libertad extra ϕ, o bien, si existen campos de materia involucrados, estos pueden conducir también a condiciones de inestabilidad. Las inestabilidades presentadas como *fantasmas*, corresponden a tener modos con energía cinética negativa. En el caso de que la energía cinética fuera negativa la energía del vacío sería inestable para la producción espontánea de partículas. Cuando solamente tratamos con un campo escalar (en nuestro caso de estudio ϕ) este inconveniente es regulado demandando un término positivo para la energía cinética.

Las inestabilidades de *gradiente* o inestabilidades *Laplacianas* ocurren cuando los grados de libertad se propagan con velocidades de sonido negativas, es decir, cuando $c_s^2 < 0$ y $c_t^2 < 0$. Estás señalan la presencia de crecimientos exponenciales. Para evitar estas inestabilidades, se debe demandar que estas velocidades cumplan con $c_s^2 > 0$ y $c_t^2 > 0$. Por último, las inestabilidades *taquionicas* o inestabilidades de *Jeans*, aparecen cuando los grados de libertad tienes masas cuadradas negativas, que en particular, surgen cuando las perturbaciones no son computadas alrededor del verdadero vacío de la teoría. Centrándonos en los resultados precedentes, observamos que la estabilidad en EFT equivale a demandar, para los modos tensoriales, que se cumpla con

$$M^2 > 0 \to L_{\mathcal{S}} > 0, \tag{3.44}$$

lo cual asegura la ausencia de fantasmas y

$$c_t^2 > 0 \to L_{\mathcal{R}} > 0 \to 1 + \alpha_T > 0, \tag{3.45}$$

que evita inestabilidades de gradientes. Para los modos escalares, la ausencia de fantasmas e inestabilidades Laplacianas está asegurada mediante las condiciones $c_s^2 > 0$ y $\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}} > 0$, respectivamente. En otros términos, se debe de cumplir con

$$c_s^2 = -\frac{\mathcal{L}_{\partial_i\zeta\partial_i\zeta}}{\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}}} = \frac{(\dot{\mathcal{M}} + H\mathcal{M} - L_R)(\mathcal{B} + 6HL_{\mathcal{S}})^2}{L_{\mathcal{S}}[3\mathcal{B}^2 + 4L_{\mathcal{S}}(2L_N + L_{NN})]} > 0 \tag{3.46}$$

y

$$\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}} = a^3(L_{NN} + 2L_N - 6H\mathcal{B} - 12H^2L_{\mathcal{S}})\mathcal{D}^2 > 0. \tag{3.47}$$

Finalmente, notemos que las condiciones para la ausencia de fantasmas e inestabilidad de gradientes no dependen de la elección de norma.

3.4 Evolución de las perturbaciones cosmológicas

Nos interesa ahora encontrar la forma de las ecuaciones dinámicas para las perturbaciones escalares de la métrica $g_{\mu\nu}$ y del campo ϕ que aparecen implícitamente en la acción (2.77). Recordemos que esta última ha sido formulada en norma unitaria, útil desde un punto de vista teórico para identificar los operadores principales que influyen en la formación de las grandes estructuras, pero no es conveniente para estudiar separadamente la evolución del campo escalar y de las perturbaciones de la métrica. Aunado a esto, recordemos que en presencia de materia, ésta última se encuentra acoplada mínimamente a la métrica $g_{\mu\nu}$, tal que $S = \int d^4x\mathcal{L}_g + S_m[g_{\mu\nu}]$. Recordemos también que el campo escalar extra permanece oculto en los elementos de la métrica a través de N, t. Para lograr nuestro objetivo, primero debemos restaurar la covariancia general de la acción y escribirla en un sistema genérico de coordenadas. Con este fin, debemos desarrollar el cambio de coordenada

$$t \to \tilde{t} = t + \pi(t, \vec{x}), \quad x^i \to \tilde{x}^i = x^i, \tag{3.48}$$

donde π describe las fluctuaciones del grado de libertad escalar, es decir, ϕ. Este mecanismo de restauración es denominado el truco *Stückelberg*, con lo que la invariancia temporal es restaurada. En estás nuevas coordenadas, estamos en libertad de elegir una norma diferente a la norma unitaria y trabajar con otra métrica FRW linealmente perturbada distinta a (2.31), para ello trabajemos con la métrica

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2\partial_i\alpha dtdx^i + a^2(t)[(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2\chi_{ij}]dx^idx^j, \tag{3.49}$$

donde χ_{ij} es un tensor sin traza y está dado en términos de la perturbación escalar β, como $\chi_{ij} = (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\partial^2)\beta$, y Φ, Ψ y α son funciones escalares. Usando este procedimiento, las funciones que dependen explícitamente del tiempo en (3.20) se pueden reexpresar como

$$f(t) \to f(t + \pi(x^\mu)), \tag{3.50}$$

que tras expandir en serie de Taylor en π se escriben como

$$\begin{aligned} f(t + \pi) &\to f^{(0)} + \dot{f}\pi + \frac{1}{2}\ddot{f}\pi^2 + ... \\ c(t + \pi) &\to c(t) + \dot{c}(t) + \dot{c}(t)\pi + \frac{1}{2}\ddot{c}(t)\pi^2 + ..., \end{aligned} \tag{3.51}$$

etc. Estas funciones serán expandidas alrededor de los valores del fondo FRW. Para los términos que ya se encuentran a segundo orden en la acción, no realizaremos su expansión. El escalar de Ricci R que ya es invariante bajo difeomorfismos, no presentará contribuciones de π. Por otro lado, siguiendo las reglas de transformación de tensores, el término g^{00} transforma como

$$g^{00} \to \frac{\partial(t+\pi)}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial(t+\pi)}{\partial x^{\nu}}g^{\mu\nu} = g^{00} - 2\dot{\pi} + 2\dot{\pi}\delta g^{00} + 2\partial_i\pi g^{0i} - \dot{\pi}^2 + a^{-2}\delta^{ij}\partial_i\pi\partial_j\pi,$$

donde hemos usado $g^{00} = -1 + \delta g^{00}$, $\bar{g}^{ij} = a^{-2}\delta^{ij}$, y además hemos permanecido a orden cuadrático en perturbaciones. Ahora recordemos la definición del vector normal unitario en (2.10), tal que

$$n_{\mu} = \frac{\partial_{\mu}t}{\sqrt{-g^{\mu\nu}\partial_{\mu}t\partial_{\nu}t}}. \tag{3.52}$$

Cuando efectuamos la transformación (3.48) en la expresión anterior, realizando la transformación vectorial, tenemos que

$$n_{\nu} = \frac{\partial\tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial_{\mu}(\tilde{t}+\pi)}{\sqrt{-g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}(\tilde{t}+\pi)\partial_{\beta}(\tilde{t}+\pi)}} = \frac{\partial\tilde{t}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial_{\mu}\tilde{x}+\partial_{\mu}\pi}{\sqrt{-g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\tilde{t}\partial_{\beta}\tilde{t}-2\dot{\pi}}}. \tag{3.53}$$

Expandiendo el denominador en $\dot{\pi}$ y usando (3.52) obtenemos

$$n_{\mu} = \frac{\partial\tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}[\tilde{n}_{\mu}(1-\dot{\pi}) + \partial_{\mu}\pi]. \tag{3.54}$$

Para facilidad, escribamos las transformaciones en conjunto (para más detalle, véase [15])

$$g^{00} \to g^{00} - 2\dot{\pi} + 2\dot{\pi}\delta g^{00} + 2\partial_i\pi g^{0i} - \dot{\pi}^2 + a^{-2}\delta^{ij}\partial_i\pi\partial_j\pi, \tag{3.55a}$$
$$\delta K_{ij} \to \delta K_{ij} - \dot{H}\pi h_{ij} - \partial_i\partial_j\pi, \tag{3.55b}$$
$$\delta K \to \delta K - 3\dot{H}\pi - a^{-2}\partial^2\pi, \tag{3.55c}$$
$$\mathcal{R}_{ij} \to \mathcal{R}_{ij} + H(\partial_i\partial_j\pi + \delta_{ij}\partial^2\pi), \tag{3.55d}$$
$$\mathcal{R} \to \mathcal{R} + \frac{4}{a^2}H\partial^2\pi. \tag{3.55e}$$

Con estas relaciones, podemos reescribir la lagrangiana (2.77) hasta orden cuadrático, de tal manera que las fluctuaciones del campo escalar se encuentren presentes, esto se da como

$$
\begin{aligned}
S = \int \sqrt{-g}\Bigg[& \frac{M_*^2}{2} f(t+\pi)R - \Lambda(t+\pi) \\
& - c(t+\pi)\left(-1 + \delta g^{00} - 2\dot{\pi} + 2\dot{\pi}\delta g^{00} + 2\partial_i \pi g^{0i} - \dot{\pi}^2 + \frac{1}{a^2}\partial^i \pi \partial_i \pi\right) \\
& + \frac{M_4^2(t)}{2}(\delta g^{00} - 2\dot{\pi})^2 \\
& - \frac{\bar{m}_1^3(t)}{2}(\delta g^{00} - 2\dot{\pi})\left(\delta K_\mu^\mu + 3\dot{H}\pi + \frac{\partial_i \partial^i \pi}{a^2}\right) \\
& - \frac{\bar{M}_2^2(t)}{2}\left(\delta K_\mu^\mu + 3\dot{H}\pi + \frac{\partial_i \partial^i \pi}{a^2}\right)^2 \\
& - \frac{\bar{M}_3^2(t)}{2}\Bigg[\left(\delta K_j^i + \dot{H}\pi\delta_j^i + \frac{\partial_i \partial^j \pi}{a^2}\right)\left(\delta K_i^j + \dot{H}\pi\delta_i^j + \frac{\partial_j \partial^i \pi}{a^2}\right) \\
& + (\delta K_0^0)^2 + 2\left(\delta K_0^i - \frac{H}{a^2}\partial^i \pi\right)(\delta K_i^0 + H\partial_i \pi)\Bigg] \\
& + \frac{\mu_1^2(t)}{2}(\delta g^{00} - 2\dot{\pi})\left(\delta \mathcal{R} + 4H\frac{\partial_i \partial^i \pi}{a^2}\right) \\
& + \frac{\bar{m}_5}{2}\mathcal{R}\delta K + \frac{\lambda_1}{2}\mathcal{R}^2 + \frac{\lambda_1}{2}\mathcal{R}_\nu^\nu \mathcal{R}_\nu^\nu \Bigg] + S_m.
\end{aligned} \tag{3.56}
$$

En términos de la métrica perturbada (3.49) los elementos del tensor métrico son:

$$
\begin{aligned}
& g_{00} = -e^{2\Phi},\ g_{0i} = \partial_i \alpha,\ g_{ij} = a^2(t)[(1-2\Psi)\delta_{ij} + 2\chi_{ij}] \\
& g^{00} = -e^{-2\Phi},\ g^{0i} = \partial^i \alpha,\ g^{ij} = a^{-2}(t)[(1+2\Psi)\delta^{ij} - 2\chi^{ij}].
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

Si expresamos $g_{\mu\nu}$ como $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$, donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ es la métrica del fondo homogéneo y $\gamma_{\mu\nu}$ es la perturbación, entonces podemos escribir en general

$$
\sqrt{-g} = \sqrt{-\bar{g}}\left(1 + \frac{1}{2}\gamma_\mu^\mu - \frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{8}(\gamma_\mu^\mu)^2\right) + \mathcal{O}(h^3), \tag{3.58}
$$

donde g, $\bar{g}$ son los determinantes de $g_{\mu\nu}$ y $\bar{g}_{\mu\nu}$, respectivamente. Calculemos, con ayuda de (3.58), la expresión para $\sqrt{det(g_{ij} = h_{ij})}$. Sea $h_{ij} = \bar{h}_{ij} + \delta h_{ij} = a^2(t)\delta_{ij} - 2a^2(t)\Psi\delta_{ij} + 2a^2(t)\chi_{ij}$, donde $\bar{h}_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$ y $\delta h_{ij} = -2a^2(t)\Psi\delta_{ij} + 2a^2(t)\chi_{ij}$, entonces

$$
\sqrt{h} = a^3\left(1 + \frac{1}{2}\delta h_k^k - \frac{1}{4}\delta h^{ij}\delta h_{ij} + \frac{1}{8}h_k^k h_r^r + \mathcal{O}(h^3)\right). \tag{3.59}
$$

donde

$$
\delta h_k^k = h^{ij}\delta h_{ij} = -6\Psi + 2\chi_k^k - 12\Psi^2 + 8\Psi\chi_k^k - 4\chi^{ij}\chi_{ij}, \tag{3.60}
$$

$$
\delta h^{ij}\delta h_{ij} = -12\Psi^2 - 4\chi^{ij}\chi_{ij} + 8\Psi\chi_k^k, \tag{3.61}
$$

$$
(\delta h_j^i)^2 = 36\Psi^2 - 24\Psi\chi_k^k + 4\chi_i^i\chi_i^j, \tag{3.62}
$$

con lo que podemos escribir

$$\sqrt{h} = a^3 \left(1 - 3\Psi + \chi^k_k + \frac{3}{2}\Psi^2 - \chi^{ij}\chi_{ij} - \Psi\chi^k_k + \frac{1}{2}\chi^i_j\chi^i_j\right). \tag{3.63}$$

Ahora, recordemos que en el formalismo ADM podemos escribir, $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$, tal que

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} &= (1+\delta N)(\sqrt{\bar{h}} + \delta\sqrt{h}) \\ &= a^3\left(1 + \Phi - \frac{1}{2}\Phi^2\right)\left(1 - 3\Psi + \chi^k_k + \frac{3}{2}\Psi^2 - \chi^{ij}\chi_{ij} - \Psi\chi^k_k + \frac{1}{2}\chi^i_j\chi^i_j\right) \\ &= a^3\left(1 - 3\Psi + \chi^k_k + \frac{3}{2}\Psi^2 - \chi^{ij}\chi_{ij} - \Psi\chi^k_k + \frac{1}{2}\chi^i_j\chi^i_j + \Phi - 3\Psi\Phi + \Phi\chi^k_k \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\Phi^2\right),\end{aligned} \tag{3.64}$$

donde si usamos (2.87), identificamos que $\delta N = \Phi - (1/2)\Phi^2$. Por otro lado, con la métrica (3.57), podemos también calcular la variedad de cantidades geométricas que nos interesan n_μ, $K_{\mu\nu}$, ${}^{(3)}R_{ij}$, etc. Los símbolos de Christoffel asociados a esta métrica, hasta orden lineal, están dados por

$$\Gamma^0_{00} = \dot{\Phi}, \tag{3.65a}$$
$$\Gamma^0_{0j} = \partial_j\Phi + a\dot{a}\partial_j\alpha, \tag{3.65b}$$
$$\Gamma^i_{00} = a^{-2}e^{2\Psi+2\Phi}\partial^i\Phi + a^{-2}\partial^i\dot{\alpha} = a^{-2}\partial^i\dot{\alpha} + a^{-2}\partial^i\Phi, \tag{3.65c}$$
$$\Gamma^i_{0j} = H\delta^i_j - \dot{\Psi}\delta^i_j + \dot{\chi}^i_j, \tag{3.65d}$$
$$\begin{aligned}\Gamma^0_{ij} &= a^2\delta ije^{-2\Psi-2\phi}(H-\dot{\Psi}) + a^2\dot{\chi}_{ij} + 2a\dot{a}\chi_{ij} - \partial_i\partial_j\alpha \\ &= a\dot{a}\delta_{ij} - 2a\dot{a}\delta_{ij}\Psi + 2a\dot{a}\chi_{ij} + a^2\dot{\chi}_{ij} - a^2\dot{\Psi}\delta_{ij} - \partial_i\partial_j\alpha - 2\Phi a\dot{a}\delta_{ij},\end{aligned} \tag{3.65e}$$
$$\Gamma^i_{jk} = -a\dot{a}\delta_{jk}\partial^i\alpha - \partial_k\Psi\delta^i_j - \partial_j\Psi\delta^i_k + \partial^i\Psi\delta_{jk} + \partial_k\chi^i_j + \partial_j\chi^i_k - \partial^i\chi_{jk}. \tag{3.65f}$$

Con lo que podemos calcular el escalar de Ricci a orden cuadrático en perturbaciones, eligiendo la norma newtoniana ($\alpha = \beta = 0$), tal que

$$\begin{aligned}R =&6e^{-2\Phi}(2H^2 + \dot{H} - H\dot{\Phi} - 4H\dot{\Psi} + \dot{\Phi}\dot{\Psi} + 2\dot{\Psi}^2 - \ddot{\Psi}) \\ &- 2a^{-2}e^{2\Psi}[\partial^2\Phi - 2\partial^2\Psi + (\partial_i\Phi)^2 - \partial_i\Phi\partial^i\Psi + (\partial_i\Psi)^2].\end{aligned} \tag{3.66}$$

A partir de (2.30) y (3.57), podemos calcular una expresión para el vector normal a las hipersuperficies Σ_t, tal que

$$n_\mu = -\frac{\delta_{0\mu}}{\sqrt{-g^{00}}} = -\delta_{\mu 0}e^{\Phi}. \tag{3.67}$$

Con estas cantidades podemos encontrar la expresión para el tensor de curvatura extrínseca en norma newtoniana a orden lineal en perturbaciones, siguiendo el hecho de que

$$\begin{aligned}K_{ij} &= h^k_i\nabla_k n_j = h^k_i(-\delta_{j0}e^{\Phi}\partial_k\Phi + \Gamma^0_{kj}e^{\Phi}) \\ &= a^2\delta_{ij}e^{-2\Psi-\Phi}(H-\dot{\Psi}) + a^2\dot{\chi}_{ij} + 2a\dot{a}\chi_{ij} - \partial_i\partial_j\alpha, \\ &= e^{-\Phi}(H-\dot{\Psi})h_{ij} + a^2\dot{\chi}_{ij} + 2a\dot{a}\chi_{ij} - \partial_i\partial_j\alpha \\ &= a^2\delta_{ij}(H - \dot{\Psi} - H\Phi - 2H\Psi).\end{aligned} \tag{3.68}$$

donde, $h_i^k = \delta_i^k$, y hemos calculado la derivada covariante de n_j con respecto a la métrica h_{ij}. Con (3.68), el escalar de curvatura extrínseca a orden lineal se sigue directamente como

$$K = h^{ij}K_{ij} = 3H - 3(\dot{\Psi} + H\Phi). \tag{3.69}$$

de lo cual concluimos que $\delta K = -3(\dot{\Psi} + H\Phi)$.

A su vez el tensor de Ricci 3-dimensional se expresa como

$$^{(3)}R_{ij} = \partial_i\partial_j\Psi + \delta_{ij}\partial^2\Psi + \partial_k\partial_i\chi_j^k + \partial_k\partial_j\chi_i^k - \partial^2\chi_{ij}. \tag{3.70}$$

De lo anterior se deriva, usando (3.57), y permaneciendo a orden lineal en perturbaciones, que

$$^{(3)}Ra^2 = -4\partial^2\left(-\Psi - \frac{1}{3}\partial^2\beta\right). \tag{3.71}$$

Con estas cantidades geométricas colocadas en (3.56) y expandiendo hasta orden cuadrático en perturbaciones, la acción se escribirá en términos de las fluctuaciones escalares Φ, Ψ, β, α y π. Podemos variar esta acción así reescrita con respecto al campo escalar π y posteriormente fijar la norma Newtoniana ($\alpha = \beta = 0$) en las ecuaciones derivadas para así obtener la ecuación dinámica de orden lineal para π. De forma análoga podemos obtener las ecuaciones correspondientes a las ecuaciones lineales de Einstein variando con respecto a los elementos escalares de la métrica.

Ahora, con el objeto de no incluir términos que contengan derivadas de orden superior en las ecuaciones, debemos trabajar con el lagrangiano (3.20). Las actuales observaciones cosmológicas restringen el valor de la mayoría de los parámetros en la teoría efectiva; por ejemplo si asumimos que las ondas gravitacionales se propagan a la velocidad de la luz, como siguieren las observaciones [8, 22, 29], entonces debemos imponer que $m_4^2 = 0$, que equivale a $\alpha_T = 0$. De la misma manera, al restringirnos al modelo Horndeski tenemos que $\alpha_H = 0$, con lo que $\tilde{m}_2^4 = m_2^4$. Recordemos que $m_3^3 = \bar{m}_1^3$, $m_4^2 \equiv \frac{1}{4}(\bar{M}_2^2 - \bar{M}_3^2)$ y $\tilde{m}_4^2 \equiv \mu_1^2$, que reduce la acción (3.56) a la expresión:

$$\begin{aligned}
S = &\int d^4x\sqrt{-g}\Bigg[\frac{M_*^2}{2}f(t)R - \Lambda(t) - c(t)g^{00} \\
&+ \frac{M_2^4}{2}(\delta g^{00})^2 - \frac{m_3^3}{2}(t)\delta K\delta g^{00}\Bigg] + S_m[g_{\mu\nu}] \\
= &\int \sqrt{-g}\Bigg[\frac{M_*^2}{2}f(t+\pi)R - \Lambda(t+\pi) \\
&- c(t+\pi)\left(-1 + \delta g^{00} - 2\dot{\pi} + 2\dot{\pi}\delta g^{00} + 2\partial_i\pi g^{0i} - \dot{\pi}^2 + \frac{1}{a^2}\partial^i\pi\partial_i\pi\right) \\
&+ \frac{M_2^4(t)}{2}(\delta g^{00} - 2\dot{\pi})^2 \\
&- \frac{m_3^3(t)}{2}(\delta g^{00} - 2\dot{\pi})\left(\delta K_\mu^\mu + 3\dot{H}\pi + \frac{\partial_i\partial^i\pi}{a^2}\right)\Bigg] + S_m[g_{\mu\nu}].
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Esta última es la misma acción con la que se trabaja en [38] (ec. 66) para obtener la ecuaciones lineales para perturbaciones en la norma Newtoniana.

Por otro lado, la parte de la acción correspondiente al sector de materia que describe las diversas especies cosmológicas (DM, bariones, fotones, etc.) se encuentra en el término S_m. La descomposición del tensor de energía momento[2] podemos escribirla como

$$T^0_0 = -(\bar{\rho}_m + \delta\rho_m), \tag{3.73a}$$
$$T^0_j = (\bar{\rho}_m + \bar{p}_m)(\partial_j v + \partial_j \alpha) = -a^2 T^i_0, \tag{3.73b}$$
$$T^i_j = \delta^i_j \bar{p}_m + \delta^i_j \delta p_m + \Pi^i_j, \tag{3.73c}$$

donde $\Pi^i_j = (\partial^i\partial_j - (1/3)\delta^i_j\partial^2)\Pi$, Π es el componente escalar del esfuerzo anisotrópico y en general se satisface con $\Pi^i_i = 0$, $v^\mu\Pi_{\mu\nu} = 0$ y $\Pi^0_0 = \Pi^0_i = 0$.

Desarrollemos primero las ecuaciones dinámicas para el campo escalar π. Para llevar cierto orden en el desarrollo de los cálculos, analicemos separadamente los operadores en la expresión (3.72). Expandamos hasta segundo orden en π el primer término usando (3.66), (3.51), y (3.64) en la norma newtoniana, tal que, hasta segundo orden en perturbaciones obtenemos

$$\sqrt{-g}\frac{M_*^2}{2}f(t)R = a^3\frac{M_*^2}{2}\dot{f}\pi\Big[-6H\dot{\Phi}$$
$$-24H\dot{\Phi} - 6\ddot{\Phi} - 2a^{-2}\partial^2\Phi + 2(2)a^{-2}\partial^2\Psi + 6(-2\Phi)(2H^2+\dot{H})\Big]$$
$$+\frac{M_*^2}{2}\frac{\ddot{f}}{2}\pi^2 a^3 6(2H^2+\dot{H}) + (M_*^2/2)[6\dot{f}\pi a^3(2H^2+\dot{H})(-3\Psi+\Phi)] = \mathcal{L}^{(1)}.$$

Ahora variemos con respecto a π usando la expresión

$$\frac{\partial\mathcal{L}^{(1)}}{\partial\pi} - \frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}^{(1)}}{\partial(\partial_\mu\pi)} = \delta S^{(\pi)}_{fR}. \tag{3.74}$$

Tras un cálculo directo, obtenemos

$$a^3M_*^2\dot{f}[-3H\dot{\Phi} - 12H\dot{\Psi} - 3\ddot{\Psi} - a^{-2}\partial^2\Phi + 2a^{-2}\partial^2\Psi - 6\Phi(2H^2+\dot{H})$$
$$+3\Phi(2H^2+\dot{H})] + M_*^2\ddot{f}\pi a^3 3(2H^2+\dot{H}) = \delta S^{(\pi)}_{fR}. \tag{3.75}$$

Realizamos un procedimiento idéntico para los términos $\Lambda(t)\sqrt{-g}$, $M_2^4(\delta g^{00} - 2\dot{\pi})^2\sqrt{-g}$ y $-c(t)g^{00}\sqrt{-g}$ (considerado M_2^4, m_3^3 = constante), de los cuales, después de variar con respecto a π, obtenemos

$$a^3[3\Psi\dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}\Phi - \ddot{\Lambda}\pi] = \delta S^{(\pi)}_{\Lambda},$$
$$a^3[3\dot{c}\Psi + 18Hc\Psi + 6c\dot{\Psi} + 6Hc\Phi + \dot{c}\Phi + 2c\dot{\Phi} - 6Hc\dot{\pi} - 2\dot{c}\dot{\pi} - 2c\ddot{\pi}$$
$$-6H\dot{c}\pi - \ddot{c}\pi - 2a^{-2}c\partial^2\pi] = \delta S^{(\pi)}_{c},$$
$$4a^3M_2^4\big[(\dot{\Phi} - \ddot{\pi}) + 3H(\Phi - \dot{\pi})\big] = \delta S^{(\pi)}_{M_2^4}.$$

También, para variar el término $-(m_3^3/2)\delta K\delta g^{00}$ usamos la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\pi} - \frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\pi)} + \frac{d}{dx^\mu}\frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\mu\pi)}\right) = 0, \tag{3.76}$$

[2]Tensor simétrico de rango $(0,2)$ que nos dice todo lo que necesitamos saber acerca de los aspectos de la energía del sistema: densidad de energía, presión, esfuerzo, etc. (véase [18], sección 1.9)

con lo que obtenemos

$$m_3^3 a^3[6\dot{H}\Phi + 3\ddot{\Psi} + 3H\dot{\Phi} + 3\ddot{H}\pi + 2H\frac{\partial^2\pi}{a^2}]$$
$$+ 3m_3^3 a^3 H[3H\Phi + 3\dot{\Psi} + 3\dot{H}\pi - \frac{\partial^2\pi}{a^2}] - \frac{\partial^2\Phi}{a^2}m_3^3 a^3 = \delta S^{(\pi)}_{m_3^3}.$$

Por último, usando la expresión (3.9) para remover algunos términos con $\ddot{\Lambda}$ y $\dot{\Lambda}$, y sumando las ecuaciones anteriores, construimos la ecuación dinámica para el campo escalar π, como

$$E_\Phi\Phi + E_{\dot{\Phi}}\dot{\Phi} + E_\Psi\Psi + E_{\dot{\Psi}}\dot{\Psi} + E_{\ddot{\Psi}}\ddot{\Psi} + E_\pi\pi + E_{\dot{\pi}}\dot{\pi} + E_{\ddot{\pi}}\ddot{\pi}$$
$$+\frac{k^2}{a^2}(E^{(2)}_\Phi\Phi + E^{(2)}_\Psi\Psi + E^{(2)}_\pi\pi) = 0, \tag{3.77}$$

donde

$$\begin{aligned}
E_\Phi &= 12c + 2\dot{c} + 3m_3^3(3H^2 + 2\dot{H}) - 6M_*^2\dot{f}(2\dot{H} + H^2) + 12HM_2^4,\\
E_{\dot{\Phi}} &= 2c + 4M_2^4 + 3H(m_3^3 - M_*^2\dot{f}),\\
E_\Psi &= 3[6cH + \dot{c} + \dot{\Lambda} - 3M_*^2\dot{f}(2H^2 + \dot{H})],\\
E_{\dot{\Psi}} &= 3[2c + 3Hm_3^3 - 4HM_*^2\dot{f}],\\
E_{\ddot{\Psi}} &= 3(m_3^3 - M_*^2\dot{f}),\\
E_\pi &= -[6\dot{H}c + 3M_*^2(\ddot{H} + 4H\dot{H})\dot{f} - 9H\dot{H}m_3^3 - 3m_3^3\ddot{H}],\\
E_{\dot{\pi}} &= -2[3H(c + 2M_2^4) + \dot{c}],\\
E_{\ddot{\pi}} &= -2(c + 2M_2^4),\\
E^{(2)}_\Phi &= -[m_3^3 - M_*^2\dot{f}],\\
E^{(2)}_\Psi &= -2M_*^2\dot{f},\\
E^{(2)}_\pi &= -[2c + Hm_3^3].
\end{aligned}$$

Una vez establecida la ecuación dinámica para el campo π, podemos obtener bajo el mismo principio las ecuaciones dinámicas de Einstein, variando respecto a los elementos escalares de la métrica Ψ, Φ, α y β. Sin embargo, para facilitar los cálculos, variemos la acción (3.72) de la siguiente forma: variemos separadamente los primeros tres términos (como enseguida referiremos), y los restantes términos $(M_2^4)/2)(\delta g^{00})^2$ y $(m_3^3/2)\delta K\delta g^{00}$ en forma idéntica a como hicimos para obtener la ecuación para el campo π. Desarrollemos primero la parte de la acción que referiremos como

$$S_{fR} = \int d^4x\sqrt{-g}f(t)R. \tag{3.78}$$

Para variar esta acción, hagámoslo de forma análoga al variar la acción ordinaria de Einstein-Hilbert, considerando perturbaciones de la métrica, tal que, $g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$. Después de variar con respecto a la métrica (véase para más detalle [18], pág. 182), obtenemos

$$\delta S_{fR} = \int d^4x\sqrt{-g}f(t)\Bigg[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma\nabla^\sigma(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})$$
$$-\nabla_\mu\nabla_\nu(\delta g^{\mu\nu}).\Bigg] \tag{3.79}$$

Ahora, integrando por partes los últimos dos términos, dos veces, y descartando los términos de frontera, obtenemos,

$$\delta S_{fR} = \int d^4x\sqrt{-g}[f(t)G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box f(t) - \nabla_\mu\nabla_\nu f(t)]\delta g^{\mu\nu}, \tag{3.80}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, y $\Box$ es el operador dalambertiano dado por

$$\Box f = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu f = (1/\sqrt{-g})\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu f)). \tag{3.81}$$

donde ∇_μ, representa la derivada covariante con respecto a la métrica (3.57). Ahora, la variación con respecto a los términos $c(t)g^{00} = c(t)\delta^0_\mu\delta^0_\nu g^{\mu\nu}$ y Λ, se da como

$$\begin{aligned} S_{c,\Lambda} &= \int d^4x\left[\sqrt{-g}(-c\delta^0_\mu\delta^0_\nu\delta g^{\mu\nu}) + \delta\sqrt{-g}(-c(t)\delta^0_\mu\delta^0_\nu g^{\mu\nu} - \Lambda)\right] \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left[(-c\delta^0_\mu\delta^0_\nu) + \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\right)\left(- c(t)\delta^0_\mu\delta^0_\nu g^{\mu\nu} - \Lambda\right)\right], \end{aligned}$$

donde hemos usado $\delta\sqrt{-g} = -(1/2)\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$. Sumando los resultados anteriores, tenemos que los primeros tres términos en (3.72) contribuyen a las ecuaciones de Einstein como

$$(fG_{\mu\nu} - \nabla_\mu\partial_\nu f + g_{\mu\nu}\Box f)M_*^2 + (cg^{00} + \Lambda)g_{\mu\nu} - 2c\delta^0_\mu\delta^0_\nu = T_{\mu\nu}. \tag{3.82}$$

Observemos que el operador M_2^4 afecta únicamente a la componente (00) aportando los términos $4M_2^4(\Phi - \dot\pi)$, mientras que el operador m_3^3 contribuye a la acción (3.72) con la densidad lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m_3^3} =& m_3^3 a^3\big[3\Phi\dot\Psi + 3\Phi^2 H - 3\dot H\pi\Phi - \Phi a^{-2}\partial^2\pi - 3\dot\Psi\dot\pi - 3H\dot\pi\Phi + 3\dot H\dot\pi\pi \\ &+ a^{-2}\dot\pi\partial^2\pi - \partial^2\alpha(\dot\pi - \Phi)\big]. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Finalmente, necesitamos escribir las componentes del tensor de Einstein en norma newtoniana a orden lineal, tal que

$$G_{00} = 3H^2 - 6H\dot\Psi + 2a^{-2}\partial^2\Psi, \tag{3.84a}$$

$$\begin{aligned} G_{ij} =& -a^2[3H^2 + 2\dot H]\delta_{ij} + \partial^2(\Phi - \Psi)\delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\Psi - \Phi) \\ &+ a^2[2H(\dot\Phi + 3\dot\Psi) + 2\ddot\Psi + 2(\Phi + \Psi)(3H^2 + 2\dot H)]\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{3.84b}$$

$$G_{0i} = 2\partial_i(\dot\Psi + H\Phi), \tag{3.84c}$$

y escribir en la misma norma la expresión para el dalambertiano (3.81), tal que

$$\Box f = -\ddot f - 3H\dot f + a^{-2}\partial^2 f + 3\dot f\dot\Psi + 6H\dot f\Phi + \dot\Phi\dot f + 2\Phi\ddot f, \tag{3.85}$$

donde hemos desarrollado $\Box f = g^{\mu\nu}[\partial_\mu(\partial_\nu f) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(\partial_\alpha f)]$, usando los símbolos de Christoffel en (3.65). Con la suma de lo anterior, contamos con las herramientas suficientes para desarrollar las ecuaciones lineales de Einsten. Comencemos por la componente (00), tal que

$$(fG_{00} - \nabla_0\partial_0 f + g_{00}\Box f)M_*^2 + (cg^{00} + \Lambda)g_{00} - 2c = T_{00}. \tag{3.86}$$

Considerando las expresiones (3.51), (3.55a), (3.57), (3.84a) y (3.85), reescribimos lo anterior como

$$\begin{aligned}
&M_*^2\Big[(f+\dot f\pi)[3H^2-6H\dot\Psi+2a^{-2}\partial^2\Psi]-\ddot f+\dot\Phi\dot f\\
&+(-1-2\Phi)[-\ddot f-3H(\dot f+\ddot f\pi+\dot f\dot\pi)+a^{-2}\dot f\partial^2\pi+3\dot f\dot\Psi+3H\dot f\Phi+\dot\Phi\dot f+2\Phi\ddot f]\Big]\\
&+[(c+\dot c\pi)(-1+2\Phi-2\dot\pi)+\Lambda+\dot\Lambda\pi](-1-2\Phi)-2c-2\dot c\pi=\bar T_{00}+\delta T_{00}.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Reorganizando la expresión anterior, integrando por partes tal que $\dot c\pi=-\dot\pi c$, escribimos la ecuación (00) como

$$\begin{aligned}
&\Big\{[3fH^2+3H\dot f]M_*^2-c-\Lambda\Big\}\\
&+M_*^2\Big[2f(a^{-2}\partial^2\Psi-3H\dot\Psi)+3\dot f(-\dot\Psi+H^2\pi+H\dot\pi-(a^{-2}\partial^2\pi/3))+3H\ddot f\pi\Big]\\
&-2c\dot\pi-\pi(\dot c+\dot\Lambda)-2\Lambda\Phi+4M_2^4(\Phi-\dot\pi)\\
&+m_3^3\Big[3(\dot\Psi+H\Phi)-3\dot H\pi-a^{-2}\partial^2\pi+3H(\Phi-\dot\pi)\Big]=\{\rho_m\}+\delta T_{00},
\end{aligned} \tag{3.88}$$

donde hemos ya agregado los términos resultantes de variar (3.83) con respecto a Φ y las contribuciones del operador M_2^4. Los términos entre $\{\}$, hacen referencia a los valores del fondo FRW que se anulan según la ecuación (3.6). Resolvamos ahora la componente de traza ($i=j$), tal que

$$(fG_{ii}-\nabla_i\partial_i f+g_{ii}\Box f)M_*^2+(cg^{00}+\Lambda)g_{ii}+\delta S^{\Psi}_{m_3^3}=T_{ii}, \tag{3.89}$$

donde, $\delta S^{\Psi}_{m_3^3}$ representa la variación de la acción $\int d^4x\mathcal{L}_{m_3^3}$ con respecto a Ψ. Reescribamos la ecuación (3.89) usando las expresiones (3.84b), (3.85), (3.57) y (3.55a), de tal forma que

$$\begin{aligned}
&M_*^2\Big[\Big(f+\dot f\pi\Big)\Big(-(3a^2)[3H^2+2\dot H]+3\partial^2(\Phi-\Psi)+\partial^2(\Psi-\Phi)\\
&+(3a^2)[2H(\dot\Phi+3\dot\Psi)+2\ddot\Psi+2(\Phi+\Psi)(3H^2+2\dot H)]\Big)-\partial^2 f+\Gamma^0_{ii}\dot f\\
&+3a^2\Big((-\ddot f-3H\dot f+3\dot f\dot\Psi+6H\dot f\Phi+\dot\Phi\dot f+2\Phi\ddot f)(1-2\Psi)+a^{-2}\dot f\partial^2\pi\Big)\Big]\\
&+(3a^2)(-c+\Lambda+2\Psi(c-\Lambda)+\pi(\dot\Lambda-\dot c)+2c(\Phi-\dot\pi))\\
&-(3a^3)m_3^3\Big[\dot\Phi-\ddot\pi+3H(\Phi-\dot\pi)\Big]=\bar T_{ii}+\delta T_{ii}
\end{aligned} \tag{3.90}$$

donde $\Gamma^i_{00}\dot f=3a^2(H-\dot\Psi-2H\Psi-2H\Phi)\dot f$. Reescribamos la expresión anterior como

$$\Big\{M_*^2(-f(3H^2+2\dot{H})-\ddot{f}-2H\dot{f})-c+\Lambda\Big\}$$
$$+M_*^2\Big[2f[\ddot{\Psi}+H\dot{\Phi}+3H\dot{\Psi}+(3H^2+2\dot{H})(\Phi+\Psi)+\partial^2(\Phi-\Psi)/(3a^2)]$$
$$+\dot{f}[\dot{\phi}+2\dot{\Psi}+4H(\Psi+\Phi)-(3H^2+2\dot{H})\pi+2\partial^2\pi/(3a^2)]-2H(\dot{f}\pi)^{\cdot}-(\dot{f}\pi)^{\cdot\cdot}$$
$$+2\ddot{f}(\Phi+\Psi)\Big]+2c(\Phi-\dot{\pi})-2\Psi(\Lambda-c)+(\dot{\Lambda}-\dot{c})\pi-m_3^3[\dot{\Phi}-\ddot{\pi}+3H(\Phi-\dot{\pi})]$$
$$=\{p_m\}+(\delta T_{ii}/3a^2), \tag{3.91}$$

donde $\delta T_{ii}=(\delta p_m+2\Psi p_m)3a^2$, y donde una vez más las expresiones entre $\{\}$ hacen referencia a la ecuación del fondo FRW (3.7). Para la componente sin traza ($i\neq j$), procedemos de forma idéntica, usando (3.82) y (3.84b), tal que

$$M_*^2(fG_{ij}-\nabla_i\partial_j(f+\dot{f}\pi))=M_*^2(\partial_i\partial_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}\partial^2)[f(\Psi-\Phi)-\dot{f}\pi]=\delta T_{ij}, \tag{3.92}$$

donde sólo hay términos a nivel perturbativo y $\delta T_{ij}=\Pi_{ij}$. Procedemos de la misma forma para la componente $(0i)$ de las ecuaciones de Einstein, tal que, usando (3.84c) y variando (3.83) con respecto a α, obtenemos

$$\begin{aligned}M_*^2(fG_{0i}-\nabla_0\partial_i f)+\delta S^{\alpha}_{m_3^3}=&M_*^2\big[2f\partial_i(\dot{\Psi}+H\Phi)-\ddot{f}\partial_i\pi-\dot{f}\partial_i\dot{\pi}+\dot{f}\partial_i\Phi\\&+\dot{f}H\partial_i\pi\big]+m_3^3\partial^2(\Phi-\dot{\pi})=\delta T_{0i},\end{aligned} \tag{3.93}$$

donde hemos calculado $\nabla_0(\partial_i f)=\partial_0(\partial_i f)-\Gamma^{\mu}_{0i}(\partial_\mu f)$ usando (3.65), y una vez más sólo hay términos a nivel perturbativo, además $\delta T_{0i}=-(\rho_m+p_m)\partial_i v$. Finalmente, podemos usar las expresiones del fondo FRW para reexpresar las ecuaciones (00) y ($i=j$). Estas expresiones del fondo FRW son

$$3fH^2M_*^2=\rho_m+\rho_{EF}, \tag{3.94a}$$
$$2fM_*^2\dot{H}=-(\rho_m+\rho_{EF}+p_m+p_{EF}), \tag{3.94b}$$
$$2c=M_*^2(-\ddot{f}+H\dot{f})+(\rho_{EF}+p_{EF}), \tag{3.94c}$$
$$2\Lambda=(\ddot{f}+5H\dot{f})M_*^2+(\rho_{EF}-p_{EF}), \tag{3.94d}$$
$$\dot{\Lambda}+\dot{c}+6Hc=3M_*^2\dot{f}(2H^2+\dot{H}), \tag{3.94e}$$
$$\dot{\Lambda}-\dot{c}=M_*^2[\dddot{f}+2\dot{H}\dot{f}+2H\ddot{f}]-\dot{p}_{EF}, \tag{3.94f}$$

que hemos derivado de (3.11) y (3.12), con $M_{pl}^2=M_*^2f$. Con estas expresiones podemos hacer las siguientes sustituciones en la ecuación (3.88),

$$-2\Lambda\Phi\rightarrow-[(\ddot{f}+5H\dot{f})M_*^2+(\rho_m-p_{EF})]\Phi,$$
$$-2\rho_m\Phi\rightarrow-2[3fM_*H^2-\rho_{EF}]\Phi,$$

y escribir finalmente

$$M_*^2\Big[2f(a^{-2}\partial^2\Psi-3H\dot{\Psi}-3H^2\Phi)-\dot{f}(3(\dot{\Psi}+H\Phi)+3\dot{H}\pi+2H(\Phi-\dot{\pi})$$
$$-(a^{-2}\partial^2\pi))-\ddot{f}(\Phi-\dot{\pi})\Big]+(\rho_{EF}+p_{EF})(\Phi-\dot{\pi}+3H\pi)+4M_2^4(\Phi-\dot{\pi})$$
$$+m_3^3\Big[3(\dot{\Psi}+H\Phi)-3\dot{H}\pi-a^{-2}\partial^2\pi+3H(\Phi-\dot{\pi})\Big]=\delta\rho_m, \tag{3.95}$$

donde hemos usado el hecho de que $\delta T_{00} = \delta\rho_m + 2\rho_m\Phi$ y hemos integrado por partes dos veces. De manera análoga trabajamos la ecuación $(i = j)$, haciendo las siguientes sustituciones

$$\begin{aligned} -2\Psi(\Lambda - c) &\to \Psi[-2\ddot{f} - 4H\dot{f} + 2p_{EF}], \\ (3H^2 + 2\dot{H})\Psi M_*^2 &\to -(p_m + p_{EF})\Psi M_*^2 f, \end{aligned}$$

en (3.91), y usando (3.94), finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} &M_*^2\Big[2f[\ddot{\Psi} + H\dot{\Phi} + 3H\dot{\Psi} + (3H^2 + 2\dot{H})\Phi + \partial^2(\Phi - \Psi)/(3a^2) \\ &+ \dot{f}\big[2(\Psi \dot{+} H\Phi) + (\dot{\Phi} - \ddot{\pi}) + 3H(\Phi - \dot{\pi}) - 3H^2\pi + 2\partial^2\pi/(3a^2)\big] + \ddot{f}(\Phi - \dot{\pi})\Big] \\ &- \dot{p}_D + (\rho_D + p_D)(\Phi - \dot{\pi}) - m_3^3(\dot{\Phi} - \ddot{\pi} + 3H(\Phi - \dot{\pi})) = \delta p_m, \end{aligned} \tag{3.96}$$

donde hemos usado el hecho de que $\delta T_{ii} = \delta p_m + 2\Psi p_m$.

Por último, hagamos un par de anotaciones sobre los operadores $(\delta g^{00})^2$ y $\delta K\delta g^{00}$. El operador δg^{00} generalmente surge al escribir alguna teoría covariante en el formalismo EFT, por ejemplo, modelos que involucran términos del tipo $f(X)$ donde $X \propto g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi$, tales como *k-esencia*. De igual manera el término δK aparece a menudo al escribir teorías covariantes en el formalismo EFT, por ejemplo, surge de términos como el llamado *kinetic braiding* de la forma $G(\phi, (\nabla\phi)^2)\Box\phi$. En la siguiente sección desarrollaremos brevemente estos ejemplos y cómo estos modelos específicos de energía oscura entran en el formalismo EFT que hemos desarrollado hasta ahora.

3.5 Mapeo con modelos de energía oscura

Escribamos como ejemplo un par de modelos de energía obscura, inscritos en el lenguaje EFT. Consideremos el modelo de campo escalar dado por el lagrangiano

$$L = \frac{M_{pl}^2}{2}R + P(\phi, X), \tag{3.97}$$

donde P es una función arbitraria con respecto a ϕ y X. Este modelo es denominado *k-escencia*. Usando la relación (2.34), despreciado el término de divergencia total, se sigue que

$$L = \frac{M_{pl}^2}{2}(\mathcal{R} + \mathcal{S} - K^2) + P(\phi, X), \tag{3.98}$$

donde, recordemos, $X = -N^{-2}\dot{\phi}^2$. Al nivel del fondo FRW, tenemos que $L = (M_{pl}^2/2)(\bar{\mathcal{R}}+\bar{\mathcal{S}}-\bar{K}^2)+P(\phi, X) = 3M_{pl}^2H^2+\bar{P}$, $L_N = \partial_X P(\phi, X)(\partial_N(-N^{-2}\dot{\phi}^2)) = 2\dot{\phi}^2P_X$ y $\mathcal{F} = L_k + 2HL_{\mathcal{S}} = -2M_{pl}^2H$, donde hemos usado las expresiones para el fondo FRW (2.41), (2.42) y (2.43). Con estás últimas expresiones, las ecuaciones para el fondo homogéneo (2.75) se leen como

$$3M_{pl}^2H^2 = -2P_X\dot{\phi}^2 - P, \tag{3.99}$$

$$M_{pl}^2\dot{H} = \dot{\phi}^2P_X. \tag{3.100}$$

Tomando la derivada temporal de (3.99) y usando (3.100), obtenemos la ecuación dinámica para el campo

$$\frac{d}{dt}\left(a^3 P_x \dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}a^3 \dot{P} = 0. \tag{3.101}$$

Podemos reescribir la expresión anterior, usando el hecho de que $\dot{P} = P_\phi$, y escribir $\frac{d}{dt}\left(a^3 P_X \dot{\phi}\right) + \frac{1}{2}a^3 P_\phi = 0$. Cuando $P = -X/2 - V(\phi)$, obtenemos la ecuación dinámica

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \tag{3.102}$$

Este último caso representa el modelo estándar de quintaescencia. Para $f(t) = 1$, este modelo esta contenido en los primeros tres términos de la acción (3.20). En norma unitaria su lagrangiano puede ser reescrito como

$$-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \to -\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2(t) g^{00} - V(t), \tag{3.103}$$

el cual es reproducido en (3.20) notando que $2c(t) = \dot{\phi}^2$ y 2Λ=2V(t). Exploremos ahora brevemente otro modelo, denominado gravedad $f(R)$. Consideremos la acción para gravedad $f(R)$ tal que

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g}\frac{M_{pl}^2}{2}[R + f(R)], \tag{3.104}$$

donde $f(R)$ es una función general del escalar de Ricci 4-dimensional R, (vease [64]). Expandimos esta acción alrededor del valor de R al nivel del fondo FRW, $\bar{R}$, de tal manera que

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g}\frac{M_{pl}^2}{2}[(1 + f_R(\bar{R}))R + f(\bar{R}) - \bar{R}f_R(\bar{R})], \tag{3.105}$$

donde $f_R = \partial_R f$. Usando una vez más la relación de Gauss-Codazzi (2.34), escribimos

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g}\frac{M_{pl}^2}{2}\Bigg[(1 + f_R(\bar{R}))[\mathcal{R} + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - K^2 + 2(Kn^\mu - a^\mu)_{;\mu}] \\ + f(\bar{R}) - \bar{R}f_R(\bar{R})\Bigg],$$

que tras integrar por partes como hicimos en la expresión (2.79), obtenemos

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g}\frac{M_{pl}^2}{2}\left[(1 + f_R(\bar{R}))[\mathcal{R} + \mathcal{S} - K^2] + \frac{2}{N}\dot{f}_R K + f(\bar{R}) - \bar{R}f_R(\bar{R})\right].$$

Por último, comparando con (3.20), podemos hacer el siguiente mapeo con el formalismo EFT:

$$f(t) = 1 + f_R(\bar{R}), \quad \Lambda(t) = \frac{M_{pl}^2}{2}f(\bar{R}) - \bar{R}f_R(\bar{R}), \tag{3.106}$$

donde el resto de coeficientes $c, M_2^4, ... = 0$. Finalmente, consideremos el modelo escalar-tensorial de energía oscura con ecuaciones de movimiento de segundo orden, denominado modelo *Horndeski* [35]. Este modelo es descrito por la acción $S = \int d^4x\sqrt{-g}L$, con el lagrangiano

$$L = \sum_{i=2}^{5} L_i, \tag{3.107}$$

donde

$$\begin{aligned}
L_2 &= G_2(\phi, X), &(3.108a)\\
L_3 &= G_3(\phi, X)\Box\phi, &(3.108b)\\
L_4 &= G_4(\phi, X)R - 2G_4(\phi, X)[(\Box\phi)^2 - \phi^{;\mu\nu}\phi_{;\mu\nu}], &(3.108c)\\
L_5 &= G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\phi^{;\mu\nu}\\
&\quad + \frac{1}{3}G_{5X}(\phi, X)[(\Box\phi)^3 - 3(\Box\phi)\phi_{;\mu\nu}\phi^{;\mu\nu} + 2\phi_{;\mu\nu}\phi^{;\mu\sigma}\phi^{;\nu}{}_{\sigma}]. &(3.108d)
\end{aligned}$$

En las expresiones anteriores, $G_i(i = 2, 3, 4, 5)$ son funciones en términos del campo escalar ϕ y su energía cinetica $X = g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ con derivadas parciales $G_{iX} = \partial G_i/\partial X$ y $G_{i\phi} = \partial G_i/\partial\phi$, R es el escalar de Ricci cuatrodimensional y $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein. El lagrangiano (3.107) cubre una variedad de modelos gravitacionales. Observemos, por ejemplo, que el modelo de k-esencia es caracterizado mediante las funciones $G_2 = P(\phi, X)$, $G_3 = 0$, $G_4 = M_{pl}^2/2$ y $G_5 = 0$. Notemos de inmediato que el modelo canónico de quintaescencia queda enmarcado eligiendo a su vez $G_2 = -X/2 - V(\phi)$. Notemos también, que el modelo de gravedad $f(R)$ que ya hemos descrito anteriormente queda enmarcado con las funciones $G_2 = -(M_{pl}^2/2)(Rf_R - f)$, $G_3 = 0$, $G_4 = \frac{1}{2}M_{pl}^2 f_R$ y $G_5 = 0$. Finalmente, como ejemplo, expresemos $\Box\phi$ y L_2 en términos de las variables ADM. Recordemos que en norma unitaria, el vector normal unitario ortogonal a las hipersuperficies ϕ es dado por

$$n_\mu = -\gamma\phi_{;\mu}\ , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{-X}}. \tag{3.109}$$

tomando la derivada covariante de (3.109) y usando (2.16), tenemos que

$$\phi_{;\mu\nu} = -\frac{1}{\gamma}(K_{\mu\nu} - n_\mu a_\nu) + \frac{\gamma^2}{2}X_{;\mu}\phi_{;\nu}. \tag{3.110}$$

De tal forma que, tomando la traza de la expresión anterior, escribimos

$$\Box\phi = -\frac{1}{\gamma}K + \frac{\phi^{;\sigma}X_{;\sigma}}{2X}. \tag{3.111}$$

Por otra parte, L_2 depende de N a través de la energía cinética del campo como $X(N) = -\dot{\phi}^2/N^2$, es decir, $G_2(\phi, X(N))$, con lo que podemos escribir la relación

$$L_{2N} = 2\dot{\phi}^2 G_{2X}, \tag{3.112}$$

que hemos valuado al nivel de fondo FRW. Un diccionario bastante completo entre las funciones EFT y las *funciones Horndeski* está dado en Sección 6 de [68].

3.6 Modificaciones a la gravedad

Con el fin de establecer una conexión entre el modelo y el universo observable, exploremos funciones fenomenológicas que establecen posibles pruebas a gravedad modificada o energía oscura. Estas pruebas pueden estar relacionadas al fondo FRW a través del *parámetro de Hubble* $H(t)$ o a la ecuación de estado ω_{DE}, o estar relacionadas a las propiedades de aglomeración del universo a través de los potenciales gravitacionales, la densidad de energía o el espectro de potencias de las fluctuaciones. Considerando la evolución del universo inhomogeneo, trataremos tres funciones que actúan como parámetros relacionando teoría y observación, es decir, las funciones fenomenológicas $G_{\text{eff}}(k,t)$, $\gamma(k,t)$ y $\Sigma(k,t)$, denominadas *constante de Newton efectiva*, *parámetro de deslizamiento gravitacional* y *parámetro de deflección de la luz*, respectivamente. $G_{\text{eff}}(k,t)$ caracteriza modificaciones respecto a las propiedades de agrupamiento de la materia, y se define en el espacio de fourier a través de la ecuación de Poisson. $\Sigma(k,t)$, describe modificaciones a la gravedad respecto a como viaja la luz sobre distancias cosmológicas, y se define a través del potencial de Weyl como

$$(\Psi+\Phi) = -8\pi\Sigma(k,t)\rho_m\Delta_m\frac{a^2}{k^2}. \tag{3.113}$$

Con el objetivo de conseguir estás funciones deduzcamos la ecuaciones de Poisson, usando las ecuaciones de Einstein. Escribamos las componentes (00) y $(0i)$ en la forma siguiente

$$2M_*^2 f\left(\frac{k^2}{a^2}\Psi + 3H\dot{\Psi} + 3H^2\Phi\right) = -\delta\rho_m + T_0^{0(Q)}, \tag{3.114}$$

$$2M_*^2 fk[H\Phi + \dot{\Psi}] = (p_m+\rho_m)v + T_i^{0(Q)}. \tag{3.115}$$

donde hemos sintetizado en $T_0^{0(Q)}$ y $T_i^{0(Q)}$ los términos restantes que aparecen en (3.93) y (3.95), respectivamente. Sustituyendo la segunda de estas ecuaciones en la primera, obtenemos la *ecuación de Poisson* en la forma

$$2M_*^2 f\frac{k^2}{a^2}\Psi = -\delta\rho_m + T_0^{0(Q)} - \frac{3H}{k}\left[(p_m+\rho_m)v + T_i^{0(Q)}\right] \tag{3.116}$$

$$= -\rho_m\Delta + T_0^{0(Q)} - \frac{3H}{k}T_i^{0(Q)}, \tag{3.117}$$

donde hemos definido la cantidad

$$\bar{\rho}_m\Delta = \delta\rho_m + \frac{3H}{k}(p_m+\rho_m)v. \tag{3.118}$$

Estudiemos ahora las ecuaciones de movimiento bajo la *aproximación cuasiestática* que consiste esencialmente en considerar que las derivadas temporales de las perturbaciones son pequeñas comparadas con con las derivadas espaciales, y que se cumple con la condición $k/aH \gg 1$, es decir, consideramos solamente modos que están dentro del horizonte. En adición, asumiremos que el contenido de materia no presenta esfuerzo anisotrópico, es decir, $\Pi = 0$. Con estas aproximaciones, la ecuación de Poisson que escribimos anteriormente toma la forma

$$2M_*^2 f\Psi - (M_*^2\dot{f} + m_3^3)\pi = -\frac{a^2}{k^2}\rho_m\Delta, \tag{3.119}$$

la componente $(i \neq j)$ de las ecuaciones de Einstein, la ecuación (3.92), se escribe como

$$f(\Psi - \Phi) - \dot{f}\pi = 0. \tag{3.120}$$

y la ecuación de movimiento para π se vuelve

$$\frac{a^2}{k^2} C_\pi \pi + (C_\Phi^{(2)} \Phi + C_\Psi^{(2)} \Psi + C_\pi^{(2)} \pi) = 0, \tag{3.121}$$

que explícitamente se ve como

$$\begin{aligned} &- 2M_*^2 \dot{f} \Psi - (m_3^3 - M_*^2 \dot{f})\Phi - [2c + Hm_3^3]\pi \\ &+ [-6c\dot{H} + 3m_3^3(3H\dot{H} + \ddot{H}) - 3M_*^2(\ddot{H} + 4H\dot{H})f] \frac{a^2}{k^2} \pi = 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden ser combinadas en una ecuación matricial de la forma

$$\begin{pmatrix} A_\Psi & 0 & A_\pi \\ B_\Psi & B_\Phi & B_\pi \\ C_\Psi & C_\Phi & C_\pi + \frac{a^2}{k^2} C_{\pi 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{k^2} \rho_m \Delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.122}$$

donde A_x son los coeficientes en la ecuación de Poisson, B_x son los coeficientes en la ecuación de estrés anisotrópico $(i \neq j)$ y C_x son los coeficientes de la ecuación de movimiento de π. Denotando esta matriz como $\mathcal{M}$, podemos invertir el resultado anterior para obtener

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \pi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [\mathcal{M}^{-1}]_{11} \\ [\mathcal{M}^{-1}]_{12} \\ [\mathcal{M}^{-1}]_{13} \end{pmatrix} \frac{a^2}{k^2} \rho_m \Delta. \tag{3.123}$$

Con este resultado podemos finalmente calcular la constante Newtoniana efectiva y el parámetro de deslizamiento gravitacional, definidos como

$$\Phi = -4\pi G_{\text{eff}}(k,t) \frac{a^2}{k^2} \rho_m \Delta, \tag{3.124}$$

$$\Psi = \gamma(k,t)\Phi. \tag{3.125}$$

Dada la matriz $\mathcal{M}$, estas funciones efectivas están dadas por

$$\begin{aligned} G_{\text{eff}}(k,t) &= \frac{1}{4\pi} [\mathcal{M}^{-1}]_{12} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{B_\pi C_\Psi - B_\Psi C_\pi - B_\Psi C_{\pi 2} \frac{a^2}{k^2}}{A_\Psi (B_\Phi C_\pi + B_\Phi C_{\pi 2} \frac{a^2}{k^2} - B_\pi C_\Phi) + A_\pi (B_\Psi C_\Phi - B_\Phi C_\Psi)} \end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\gamma(k,t) = \frac{\Psi}{\Phi} = \frac{[\mathcal{M}^{-1}]_{11}}{[\mathcal{M}^{-1}]_{12}} = \frac{B_\Phi C_\pi - B_\pi C_\Phi + B_\Phi C_{\pi 2} \frac{a^2}{k^2}}{B_\pi C_\Psi - B_\Psi C_\pi - B_\Psi C_{\pi 2} \frac{a^2}{k^2}} \tag{3.127}$$

Considerando solamente el caso cuando $f = f(t)$, y el resto de las funciones efectivas son nulas, $c = \Lambda = M_2^4 =, m_3^3 = 0$, y definiendo $\hat{M}^2 = (3/2)M_*^2 \dot{f}(\ddot{H} +$

$4H\dot{H}) = M_* 2\dot{f}R^{(0)}/4$, después de breve álgebra, la expresión (3.126) toma la forma

$$G_{\text{eff}}(k,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2M_*^2 f}\left(1 + \frac{M_*^2\dot{f}^2}{4\hat{M}^2 f\frac{a^2}{k^2} + 3\dot{f}^2 M_*^2}\right). \tag{3.128}$$

Recuperamos relatividad general cuando $f = 1$, en cuyo caso, $G_{\text{eff}} = 1/(4\pi 2M_*^2) = G_N$. El parámetro de deslizamiento gravitacional toma la forma

$$\gamma(k,t) = 1 - \frac{\dot{f}M_*^2}{2(M_*^2\dot{f} + \hat{M}^2 f\frac{a^2}{k^2})}. \tag{3.129}$$

Para GR tenemos que $\gamma = 1$. Finalmente, el parámetro de defección de la luz $\Sigma(k,t)$ se relaciona a G_{eff} y γ, mediante la ecuación

$$\Sigma(k,t) = \frac{G_{\text{eff}}(k,t)}{2}(1 + \gamma(k,t)). \tag{3.130}$$

Para GR se cumple $\Sigma(k,t) = 1$. Observemos que asumir alguna de las funciones efectivas (por ejemplo $c(t)$) diferente de cero, vuelve más complejas las expresiones anteriores. Notemos también que los numeradores y denominadores de los parámetros efectivos son polinomios de a^2/k^2. Por último, es destacable mencionar que hay parámetros que no modifican las expresiones anteriores, por ejemplo, $\Lambda(t)$ y $M_2^4(t)$ (en el límite cuasiestático).

Capítulo 4

Teoría Efectiva de un componente cosmológico de Energía Oscura y Materia Oscura

En el presente capitulo exploramos varios aspectos de la dinámica del fondo FRW (e.g algunas transformaciones simétricas). Además, a nivel perturbativo trabajamos con las definiciones de fluidos efectivos de DM y DE enmarcados el formalismo EFT (basándonos principalmente en [37]). Presentamos una ecuación de fluido efectiva con término de fuente, exploramos los modelos de ΛCDM y Materia Oscura Generalizada (GDM) y cómo pueden inscribirse dentro del formalismo EFT. Centramos nuestra atención en caracterizar GDM y obtener sus ecuaciones dinámicas, para después reescribirlas en términos de las funciones efectivas y comparar las distintas parametrizaciones.

4.1 Consideraciones sobre el fondo FRW

Como ya mencionamos en la sección (2.8), los únicos términos en la acción efectiva (2.77) que contribuyen a la dinámica del fondo FRW son los primeros tres términos ($(M_*^2/2)fR$, cg^{00} y Λ). Observemos que, mientras las funciones $c(t)$ y $\Lambda(t)$ tienes unidades de energía a la cuarta potencia, la función $f(t)$ es adimensional. Por lo tanto, con el fin de trabajar con funciones adimensionales podemos definir las cantidades $\bar{c}(t) = M_*^4 c(t)$ y $\bar{\lambda}(t) = M_*^4\Lambda(t)$, con lo que la acción efectiva se expresa como

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{M_*^2}{2}\left[f(t)R - 2M_*^2c(t) - 2M_*^2\Lambda(t)\right]. \tag{4.1}$$

En términos de estas definiciones (tras una sustitución inmediata en las relaciones (3.5)) las ecuaciones dinámicas del fondo FRW se escriben como

$$M_*^2(\ddot{f} + 2H\dot{f} + 2\dot{H}f + 3H^2 f) - \bar{\Lambda} + \bar{c} = -p_m, \tag{4.2a}$$

$$M_*^2(-\ddot{f} + H\dot{f} - 2\dot{H}f) - 2\bar{c} = \rho_m + p_m. \tag{4.2b}$$

Tras reordenar, las ecuaciones anteriores se pueden expresar como

$$3M_*^2 f H^2 - M_*^4(c + \Lambda - 3M_*^{-2} H\dot{f}) = \rho_m \tag{4.3a}$$

$$-2M_*^2 f\dot{H} - M_*^4\big[2c + M_*^{-2}(\ddot{f} - H\dot{f})\big] = \rho_m + p_m. \tag{4.3b}$$

Observemos que con la finalidad de que al menos uno de los términos a la derecha de las ecuaciones (4.3) sean de magnitud comparable a los valores actuales al nivel del fondo FRW y así contribuir a las observaciones, debe satisfacer alguna de las siguientes relaciones

$$3M_*^2 f H^2 \sim -M_*^4 c \longrightarrow \frac{c_0}{f_0} \sim \left(\frac{H_0}{M_*^2}\right)^2, \tag{4.4}$$

$$\frac{\dot{f}_0}{M{*}f_0} \sim \frac{H_0}{M_*}, \quad \frac{\Lambda_0}{f_0} \sim \left(\frac{H_0}{M_*}\right)^2. \tag{4.5}$$

Como ya hemos notado, son tres las funciones que determinan la evolución del fondo FRW, a decir, $f(t)$, $c(t)$ y $\Lambda(t)$, y son solo dos las ecuaciones independientes que determinan su dinámica, (4.3). Esto permite la libertad de elegir un número infinito de posibles elecciones para alguna de las tres funciones que a su vez sea compatible con la evolución del fondo FRW. Contemplando esto, consideremos la transformación simétrica de $f(t)$ dada por

$$\tilde{f} = f + g, \tag{4.6}$$

donde $g = g(t)$ es una función arbitraria del tiempo. A su vez, observemos que la transformación de simetría de $c(t)$ que deja invariante la relación (4.3b), dado (4.6), debe ser de la forma[1]

$$\tilde{c} = c - \frac{1}{2M_*^2}\left[\ddot{g} - Hg + 2\dot{H}g\right]. \tag{4.7}$$

Análogamente para la relación que resulta de multiplicar (4.3a) y sumarle (4.3b), la transformación de simetría que le deja invariante, dado que se cumple (4.6), está dada por

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda + \frac{1}{2M_*^2}\left[\ddot{g} + 5H\dot{g} + 2\dot{H}g\right]. \tag{4.8}$$

Analicemos ahora el caso en que $\tilde{f} = 1$ es decir, cuando $g = 1 - f$. Con esta transformación, podemos caracterizar la evolución del fondo FRW mediante las funciones

$$\tilde{c} = c + \frac{1}{2M_*}\left[-\ddot{f} + Hf + 2\dot{H}(1-f)\right], \tag{4.9a}$$

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda + \frac{1}{2M_*}\left[-\ddot{f} - 5H\dot{f} + 2(\dot{H} + 3H^2)(1-f)\right]. \tag{4.9b}$$

[1]Denotando $[f]$ el conjunto de los términos que que contienen la función f, la ecuación (4.3b) se escribe como $-c-[f] = \rho_m+p_m$. Con la transformación (4.6) resulta $-c-[\tilde{f}]+[g] = \rho_m + p_m$. De donde se sigue que $\tilde{c} = c - [g]$ para que la ecuación permanezca simétrica.

Observemos que cuando $f = 1$ tenemos que $\tilde{c} = c$ y $\tilde{\Lambda} = \Lambda$. Sustituyendo las expresiones para Λ y c en las ecuaciones (4.3) se sigue de inmediato que

$$-2M_*^4\tilde{c} - 2M_*^2\dot{H} = \rho_m + p_m, \tag{4.10a}$$

$$3M_*^2H^2 - M_*^4(\tilde{c} + \tilde{\Lambda}) = \rho_m. \tag{4.10b}$$

Derivando (4.10b) y multiplicando (4.10a) por $-3H$ obtenemos

$$6M_*^4\tilde{c}H + 6M_*^2\dot{H}H = -3H(\rho_m + p_m), \tag{4.11a}$$

$$6M_*^2H\dot{H} - M_*^4(\dot{\tilde{c}} + \dot{\tilde{\Lambda}}) = \dot{\rho}_m. \tag{4.11b}$$

Finalmente, usando la ecuación de continuidad (3.8) y reexpresando la derivada temporal en términos del *número de e-folds* $N = \ln a$, tal que $d/dt = H(d/(d\ln a))$, podemos escribir

$$\tilde{c}' + \tilde{\Lambda}' + 6c(\ln a) = 0 \longrightarrow \tilde{\Lambda}' = -\tilde{c}' - 6c(\ln a). \tag{4.12}$$

donde las tildes indican derivadas con respecto a $\ln a$. Integrando la expresión anterior nos permite expresar $\tilde{\Lambda}(t)$ como

$$\begin{aligned}\left[\tilde{\Lambda}(\ln a')\right]_{\ln a_0}^{\ln a} &= [\tilde{c}(\ln a')]_{\ln a_0}^{\ln a} - 6\int d(\ln a)\tilde{c}(\ln a') \\ &= \tilde{c}_0 - \tilde{c}(\ln a) - 6\int_{\ln a_0}^{\ln a} d(\ln a')\tilde{c},\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde a_0 es el factor de escala valuado en el tiempo presente t_0. Notemos que la función $\tilde{\Lambda}(N)$ ha quedado en términos de $\tilde{c}$, dejando solamente una función independiente para caracterizar la evolución del fondo FRW. Usando esta forma de $\tilde{\Lambda}$ en la ecuación (4.10b) se sigue directamente que

$$3M_*^2H^2(\ln a) - M_*^4\left[\tilde{\Lambda}_0 + \tilde{c}_0 - 6\int_{\ln a_0}^{\ln a} d(\ln a')\tilde{c}\right] = \rho_m. \tag{4.14}$$

Si en la expresión anterior, hacemos $a = a_0$ observemos que $\tilde{\Lambda}_0 + \tilde{c}_0 = M_*^{-2}(3H_0^2 - \rho_{m0}M_*^{-2})$, donde las cantidades con subíndice cero indican que están valuadas en el tiempo presente t_0 con lo que $a(t_0) = a_0$. Considerando lo anterior podemos escribir la ecuación (4.13) como

$$\tilde{\Lambda} = M_*^{-2}(3H_0^2 - \rho_{m0}M_*^{-2}) - \tilde{c}(\ln a) - 6\int_{\ln a_0}^{\ln a} d(\ln a')\tilde{c}. \tag{4.15}$$

También, de la ecuación (4.10b) podemos expresar el parámetro de Hubble como

$$H^2(\ln a) = \frac{\rho_m}{3M_*^2} + (H_0^2 - \frac{\rho_{m0}}{3M_*^2}) - 2M_*^2\int_{\ln a_0}^{\ln a} d(\ln a')\tilde{c}. \tag{4.16}$$

De lo anterior podemos destacar que el parámetro de Hubble (parámetro que caracteriza la evolución del fondo FRW) depende de los valores de la densidad de materia actual y de la función $\tilde{c}$. De otro modo, la función $\tilde{c}$ puede ser expresada en términos del parámetro de Hubble y la densidad de energía como

$$\tilde{c} = \frac{1}{2M_*^2}\frac{d}{d(\ln a)}\left[\frac{\rho_m}{3M_*^2} - H^2\right]. \tag{4.17}$$

Cuando $\tilde{c} = 0$ tenemos de (4.13) que $\tilde{\Lambda} = \Lambda_0$, es decir, el caso de una constante cosmológica, además, podemos reescribir (4.16) como

$$H^2(\ln a) = \frac{\rho_m}{3M_*^2} + \left(H_0^2 - \frac{\rho_{m0}}{3M_*^2}\right), \tag{4.18}$$

donde si comparamos con las ecuaciones para el fondo FRW en GR con una constante cosmológica ($H^2 = 8\pi G/3)\rho_m + (\Lambda/3)$) podemos relacionar

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_0 = 3\left(H_0^2 - \frac{\rho_{m0}}{3M_*^2}\right). \tag{4.19}$$

4.2 Energía Oscura como un componente fluido

Como observamos en la sección (3.1), dadas las definiciones (3.11), podemos considerar que el grado de libertad extra generado a través de la adición del campo escalar π se comporta como fluido efectivo que cumple con la ecuación de continuidad (3.13). Si este componente fluido cumple con una ecuación de estado de la forma $\rho_{DE} = \omega(a)p_{DE}$, con $\omega_{DE}(a)$ dada por (3.14), podemos reescribir las relaciones (3.11) para $f(a) = 1$ (el modelo que recupera GR) tal que

$$c = \frac{1}{2}[\rho_{DE} + \omega(a)\rho_{DE}], \quad \Lambda = \frac{1}{2}[\rho_{DE} - \omega(a)\rho_{DE}], \tag{4.20}$$

donde hemos considerado $M_{pl}^2 = M_*^2$. Como ya mencionamos anteriormente, para el caso en que $\tilde{f} = f = 1$ las funciones c y Λ cumplen con $\tilde{c} = c$ y $\tilde{\Lambda} = \Lambda$. Si consideramos en la relación anterior una ecuación de estado de la forma $P_{DE} = -\rho_{DE}$ donde $\omega = -1$, es claro que recobramos el modelo de GR más constante cosmológica Λ donde

$$c = 0, \quad \Lambda = \rho_{DE}. \tag{4.21}$$

Si valuamos ρ_{DE} en el tiempo presente tal que $\rho_{DE} = 3M_{pl}^2 H_0^2 + \rho_{m0}$, retomamos el resultado (4.19). Consideremos ahora que $M_{pl}^2 = M_*^2 f(t)$, en (3.12), podemos escribir la ecuación de fluido con un término fuente como

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + p_{DE}) = 3M_*^2 H^2 \dot{f}. \tag{4.22}$$

También podemos escribir

$$c = \frac{1}{2}(-\ddot{f} + H\dot{f})M_*^2 + \frac{1}{2}(\rho_{EF} + p_{EF}), \tag{4.23a}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\ddot{f} + 5H\dot{f})M_*^2 + \frac{1}{2}(\rho_{EF} - p_{EF}). \tag{4.23b}$$

Como se explica en [37] sección 4.2, dado que el campo escalar π permite pensar en un fluido efectivo con densidad de energía ρ_{EF} y presión p_{EF}, entonces podemos reexpresar las ecuaciones de movimiento como

$$\frac{k^2}{a^2}\Psi + 3H(\dot{\Psi} + H\Phi) = -\frac{1}{2M_*^2 f}\sum_I \delta\rho_I, \quad (4.24a)$$

$$\dot{\Psi} + H\Phi = -\frac{1}{2M_*^2 f}\sum_I q_I, \quad (4.24b)$$

$$\Psi - \Phi = \frac{1}{M_*^2 f}\sum_I \Pi_I, \quad (4.24c)$$

$$\ddot{\Psi} + H\dot{\Phi} + 3H\dot{\Psi} + (3H^2 + 2\dot{H})\Phi + \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}(\Phi - \Psi) = \frac{1}{2M_*^2 f}\sum_I \delta p_I, \quad (4.24d)$$

donde la suma es sobre todos los contenidos de materia y energía oscura. Estás ecuaciones permiten definir implícitamente las cantidades perturbadas $\delta\rho_{EF}$, δp_{EF}, q_{EF} y Π_{EF} como la perturbación de densidad, presión, momento y esfuerzo anisotrópico para el fluido efectivo de energía oscura, respectivamente.

4.3 ΛCDM

Estudiemos ahora como entra el modelo ΛCDM en el formalismo EFT. El modelo ΛCDM queda caracterizado por la acción (2.77) en la cual elegimos las funciones $f = 1$, $\Lambda = \Lambda_0$, con el resto de las funciones efectivas igualadas a cero. Con esta elección de funciones, se sigue de inmediato que las ecuaciones para el fondo homogéneo recuperan la forma canónica de las ecuaciones de Friedmann

$$\dot{H} + H^2 = \frac{-1}{2(3M_*^2)}[\rho_m + 3p_m + \Lambda], \quad (4.25a)$$

$$H^2 = \frac{1}{3M_*^2}[\rho_m + \Lambda]. \rightarrow 1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda, \quad (4.25b)$$

donde $\Omega_\Lambda = (\Lambda/3M_*^2H^2)$ y $\Omega_m = (m/3M_*^2H^2)$. Observemos que la ecuación de campo escalar π se anula según (3.77). Respecto a las ecuaciones dinámicas para perturbaciones escalares, conseguimos las siguientes expresiones

$$\frac{k^2}{a^2}\Psi + 3H(\dot{\Psi} + H\Phi) = -\frac{1}{2M_*^2}\delta\rho_m, \quad (4.26a)$$

$$\dot{\Psi} + H\Phi = -\frac{1}{2M_*^2}q_m, \quad (4.26b)$$

$$\Psi - \Phi = \frac{1}{M_*^2}\Pi_m = 0, \quad (4.26c)$$

$$\ddot{\Psi} + H\dot{\Phi} + 3H\dot{\Psi} + (3H^2 + 2\dot{H})\Phi + \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}(\Phi - \Psi) = \frac{1}{2M_*^2}\delta p_m, \quad (4.26d)$$

que son las expresiones familiares para perturbaciones escalares de ΛCDM. A su vez, la ecuación de estado para componente de constante cosmológica, de acuerdo a la ecuación (3.14), está dada por $\omega_{DE} = -1$.

4.4 Materia Obscura Generalizada

Como ya hicimos anteriormente para DE y Materia Oscura Fría (CDM), ahora nos proponemos usar el formalismo de EFT para un componente de Materia Oscura Generalizada (GDM). En el presente apartado explicaremos brevemente la extensión del modelo de CDM (que caracteriza DM como un fluido perfecto sin presión ($p = 0$, $w = 0$) ni viscosidad ($\Pi = 0$)) a un modelo más general que es llevada a cabo mediante la parametrización de un fluido imperfecto con presión y viscosidad. A su vez debe cumplir con un conjunto cerrado de ecuaciones en términos de estos parámetros tal que puede incluir CDM como caso particular. Los nuevos parámetros de esta generalización estarán dados por el parámetro w de la ecuación de estado, la velocidad del sonido c_s^2 y el parámetro de viscosidad $c_{\rm vis}^2$. Dado lo anterior, nos proponemos inscribir GDM dentro del formalismo EFT como hemos hecho ya para CDM enmarcada en ΛCDM y presentar las ecuaciones dinámicas para las perturbaciones de este modelo de DM. Brevemente construiremos las ecuaciones de continuidad y de Euler en términos de estos nuevos parámetros (ω, c_s^2 y $c_{\rm vis}^2$). Como caso particular la generalización GDM debe incluir CDM modelada como un fluido perfecto no-interactuante, con presión cero, donde la condición $p_{\rm CDM} = 0$ para CDM implica que es un componente no-relativista. Nos guiamos principalmente en los desarrollos llevados acabo por [40, 47, 48] para la caracterización de la GDM.

4.4.1 Sumario de GDM

Como se ha hecho mención, los indicios de DM son meramente gravitacionales: la dinámica de la rotación en galaxias y su agrupamiento, el estudio de lentes gravitacionales y las recientes observaciones en la formación de estructuras. Además, que la baja densidad de energía de materia producida durante la nucleosíntesis y las observaciones de abundancia en elementos luminosos, indican que la materia obscura no puede ser bariónica. Entonces, debido a la libertad que existe en el espacio de parámetros y debido a la ausencia de detecciones directas, es imperativo lograr una adecuada parametrización que pueda ser soportada por las observaciones de naturaleza gravitacional como la formación de estructuras a gran escala o mediante el estudio de las anisotropías en el Fondo Cósmico de Microondas (CMB). Ejemplo de esta libertad en los parámetros está dada por la Materia Obscura Caliente, que puede ser modelada como un fluido imperfecto con presión y viscosidad. En general, este es un marco en que el formalismo de EFT puede ejercer como piedra angular.

El modelo GDM es entonces una aproximación fenomenológica para delimitar las propiedades de DM en un régimen lineal. Este modelo, como ya mencionamos arriba, está conformado por tres parámetros independientes: el parámetro de la ecuación de estado de la GDM, $w(a) \equiv (\bar{p}_{\rm gdm}/\bar{\rho}_{\rm gdm})$ y los parámetros $c_s^2(k,a)$, $c_{\rm vis}^2(k,a)$, que pueden depender de la escala k y del factor de escala a.

La influencia gravitacional de un componente general de materia obscura es manifiesta por su tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ conformado por: la densidad de energía $\rho_{\rm gdm}$, la presión o esfuerzo isotrópico $p_{\rm gdm}$, la densidad momento

$(\rho_{\rm gdm}+p_{\rm gdm})v^i_{\rm gdm}$ y el esfuerzo anisotrópico $\Pi^{ij}_{\rm gdm}$. En suma, el tensor de energía momento queda determinado por la forma (3.73). Como escribimos anteriormente, en general $\Pi^i_i = 0$, $u^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$ y $\Pi^0_0 = \Pi^0_i = 0$, con la misma condición de normalización $u^\mu u_\nu = 1$. La isotropía del fondo implica que el esfuerzo anisotrópico y la densidad momento solamente pueden estar presentes como una perturbación. Consideramos además una ecuación de estado para GDM de la forma $p(\rho)_g = w(a)\rho_g$, donde a diferencia de la CDM, el coeficiente $w(a)$ ahora puede depender del factor de escala o del tiempo explícitamente. El propósito de la parametrización en GDM es que ésta sea una extensión de la CDM, por tanto, consideraremos que $w, c_s^2, c_{\rm vis}^2 \ll 1$. Enseguida presentaremos el conjunto de ecuaciones que nos permitan determinar p_g y Π_g en términos de la densidad ρ_g, la cuadrivelocidad v^μ, y la métrica $g_{\mu\nu}$. El conjunto de estas ecuaciones cerradas determinará las propiedades físicas del fluido GDM. Finalmente, estas ecuaciones serán inscritas en el formalismo EFT.

La ecuación de estado para GDM, dados los valores homogeneos de la $\bar{p}$ y $\bar{\rho}$, habrá entonces de quedar completamente especificada por el parámetro $w(a)$ y la ecuación de estado $p_g = w(a)\rho_g$. Con esto, la velocidad del sonido adiabática se expresa como

$$c_a^2 \equiv \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} = w - \frac{w'}{3H(1+w)}. \tag{4.27}$$

donde hemos hecho uso de la ecuación de continuidad (3.8). Cuando w es independiente del tiempo, $c_a^2 = w$, como es el caso de CDM.

4.4.2 Ecuaciones de Fluido para GDM

Dada la libertad en los parámetros w_g, Π_g y δp_g, en principio las ecuaciones de fluido y de Euler para materia obscura (véase [10], ec. 4.4.173 y ec. 4.4.174) son susceptibles a presentar una forma más general. Usando la norma Newtoniana conforme ($\alpha = \beta = 0$) en la métrica (3.49), podemos obtener las ecuaciones de continuidad y de Euler en términos de los parámetros libres.

Escribimos la ecuación de continuidad ahora para GDM, como

$$\delta_g' + \left(1 + \frac{\bar{p}_g}{\bar{\rho}_g}\right)(\nabla\cdot\mathbf{v} - 3\Phi') + 3H\left(\frac{\delta p_g}{\delta\rho_g} - \frac{\bar{p}_g}{\bar{\rho}_g}\right)\delta_g = 0, \tag{4.28}$$

donde el subíndice g hace referencia a GDM. Tomando en cuenta la ecuación de estado $p_g = w(a)\rho_g$ y la definición

$$p_g\Gamma_g = p_g\left[\frac{(\frac{\partial p}{\partial S})_{\rho={\rm cte}}}{p_g}\right]\delta S = \delta p_g - c_a^2\delta\rho_g, \tag{4.29}$$

podemos escribir (4.28) como

$$\delta_g' + \left(1 + \frac{w_g\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}_g}\right)(-ikv - 3\Phi') + 3H\left(\frac{\bar{p}_g\Gamma_g + c_a^2\delta\rho_g}{\delta\rho_g} - \frac{w_g\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}_g}\right)\delta_g = 0. \tag{4.30}$$

Después de algún álgebra, y usando (4.27), resulta

$$\left(\frac{\delta_g}{1+w_g}\right)' = -(ikv + 3\Phi') - 3H\frac{w_g\Gamma_g}{(1+w_g)}. \tag{4.31}$$

Si $w = 0$ y $\Gamma = 0$, recuperamos el resultado $\delta'_{dm} + \nabla v = -3\Phi'$ (donde las primas hacen referencia a derivadas con respecto al tiempo conforme), para perturbaciones adiabáticas de CDM.

El procedimiento para obtener la ecuación de Euler para GDM, es en su mayoría análogo al llevado acabo en CDM, con excepción de las diferencias que agregan los términos T^i_j, ya que ahora $\Pi^i_j \neq 0$. Si permanecemos a orden lineal en perturbaciones escalares, el único término no nulo que agrega un nuevo elemento a la ecuación de Euler ($\nabla_\mu T^\mu_i = \partial_\mu T^\mu_i + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_i - \Gamma^\lambda_{\mu i} T^\mu_\lambda = 0$) en

$$\partial_0 T^0_i + \partial_j T^j_i + \Gamma^\mu_{\mu 0} T^0_i + \Gamma^\mu_{\mu j} T^j_i - \Gamma^0_{0i} T^0_0 - \Gamma^0_{ji} T^j_0 - \Gamma^j_{0i} T^0_j - \Gamma^j_{ki} T^k_j = 0. \tag{4.32}$$

es

$$\partial_j T^i_j \longrightarrow \partial_j \Pi^j_i. \tag{4.33}$$

Considerando solamente perturbaciones escalares, la descomposición de Π^j_i nos permite escribir $\Pi^j_i = \delta^{j\mu} \partial_{\langle\mu} \partial_{i\rangle} \Pi_g$. Con esto (4.33) se vuelve

$$\partial_j \Pi^j_i = \partial_j (\partial^j \partial_i - \frac{1}{3} \delta^j_i \partial^2) \Pi_g = \frac{2}{3} k^2 \Pi_g. \tag{4.34}$$

Donde redefinimos $\Pi_g \equiv k \Pi_g$. Sumando (4.34) a la expresión

$$\mathbf{v}' + H\mathbf{v} - 3H \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} \mathbf{v} = -\frac{\nabla \delta p}{(\bar{\rho} + \bar{p})} - \nabla \Psi, \tag{4.35}$$

referida a GDM, podemos escribir finalmente

$$\mathbf{v}' + H\mathbf{v} - 3H \frac{\bar{p}'_g}{\bar{\rho}'_g} \mathbf{v} = -\frac{\nabla \delta p_g}{(\bar{\rho}_g + \bar{p}_g)} - \nabla \Psi - \frac{2}{3} \frac{k^2 \Pi_g}{(\bar{\rho}_g + \bar{p}_g)}. \tag{4.36}$$

En términos de la ecuación de estado $w(a) = \bar{p}_g / \bar{\rho}_g$ y de la velocidad del sonido adiabatica c_a^2, (4.36) resulta

$$v' = -H(1 - 3c_a^2) v + \frac{\delta p_g}{\delta \rho_g} \frac{1}{1 + w_g} - \frac{2}{3} \frac{k^2 \Pi_g}{(\bar{\rho}_g + \bar{p}_g)} + ik\Psi, \tag{4.37}$$

donde hemos redefinido $\delta p_g = \partial_i \delta p_g = k \delta p_g$ y $v = ikv$. Usando (4.29) podemos reescribir (4.37) como

$$v' = -H(1 - 3c_a^2) v + \frac{c_a^2 k \delta_g}{1 + w_g} + \frac{w_g k \Gamma_g}{1 + w_g} - \frac{2}{3} \frac{k^2 \Pi_g}{(\bar{\rho}_g + \bar{p}_g)} + ik\Psi. \tag{4.38}$$

Si en (4.38) consideramos $\Pi_g = 0$, $w_g = 0$, $c_s^2 = 0$ y nos restringimos a perturbaciones adiabáticas, es decir $\Gamma_g = 0$, recuperamos el resultado $v' + Hv = -\nabla \Phi$ para CDM.

4.4.3 Ecuaciones de Einstein para GDM

Las ecuaciones de Einsten para perturbaciones escalares a orden lineal se resuelven desarrollando ambos lados de las ecuaciones de Einsten:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{4.39}$$

El lado derecho queda determinado por (3.73), en términos de las funciones libres Π_g, $w(a)$ y δp_g. El lado izquierdo esta dado por:

$$G_{00} = 3H^2 - 6H\dot{\Psi} + 2a^{-2}\partial^2\Psi, \tag{4.40a}$$

$$G_{ij} = -a^2[3H^2 + 2\dot{H}]\delta_{ij} + \partial^2(\Phi - \Psi)\delta_{ij} + \partial_i\partial_j(\Psi - \Phi) + a^2[2H(\dot{\Phi} + 3\dot{\Psi}) + 2\ddot{\Psi} + 2(\Phi + \Psi)(3H^2 + 2\dot{H})]\delta_{ij}, \tag{4.40b}$$

$$G_{0i} = 2\partial_i(\dot{\Psi} + H\Phi), \tag{4.40c}$$

Si en (4.39) consideramos solamente los elementos en que $i \neq j$, obtenemos, de (4.40) y (3.73c):

$$(\Psi - \Phi) = 8\pi G\Pi_g. \tag{4.41}$$

A diferencia de CDM tenemos ahora que en general $\Phi \neq \Psi$. En este caso, el conjunto de las ecuaciones de Einsten será menos redundante. Para la componente 00, escribimos

$$\begin{aligned} G_{00} &= 8\pi G g_{0\mu} T^{\mu}_{0} && (4.42) \\ 3H^2 + 2a^{-2}\partial^2\Psi - 6H\dot{\Psi} &= 8\pi G g_{00} T^{0}_{0} && (4.43) \\ &= 8\pi G\bar{\rho}_g[1 + \delta_g + 2\Phi]. \end{aligned}$$

De lo anterior resulta la ecuación del fondo homogéneo $H^2 = (8\pi G/3)\bar{\rho}_g$ y la primera de las ecuaciones de Einsten para GDM

$$a^{-2}\partial^2\Psi - 3H(\dot{\Psi} + H\Phi) = 4\pi G\bar{\rho}\delta_g. \tag{4.44}$$

Para la componente $(0i)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} G_{0i} &= 8\pi G g_{0\mu} T^{\mu}_{i} && (4.45) \\ 2\partial_i(\dot{\Psi} + H\Phi) &= -8\pi G(\bar{\rho}_g + \bar{p}_g)\partial_i v. \end{aligned}$$

Integrando ambos lados de la expresión anterior $\int dx_i$, resulta

$$\dot{\Psi} + H\Phi = -4\pi G\bar{\rho}_g(1 + w_g)v. \tag{4.46}$$

Si sustituimos (4.46) en (4.44) obtenemos la *ecuación de Poisson* para GDM

$$a^{-2}\partial^2\Psi = 4\pi G\bar{\rho}_g[\delta_g - 3H(1 + w_g)v] = 4\pi G\bar{\rho}_g\Delta_g. \tag{4.47}$$

Finalmente, si consideramos la traza de la ecuación ij, es decir, si desarrollamos $G^i_i = g^{i\mu}G_{\mu i} = 8\pi G T^i_i$, con (4.40b) y (3.73c), obtenemos

$$\ddot{\Psi} + H\dot{\Phi} + 3H\dot{\Psi} + (3H^2 + 2\dot{H})\Phi + \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}(\Phi - \Psi) = -4\pi G\delta p_g. \tag{4.48}$$

donde hemos hecho uso de la relación $\Pi^i_i = 0$. El conjunto de las ecuaciones de Einstein y las ecuaciones de fluido, forman un conjunto consistente. Si hacemos $w = 0$, $\Psi = \Phi$ y nos restringimos a perturbaciones adiabáticas en cada una de las ecuaciones anteriores entonces recuperamos las expresiones obtenidas para la CDM.

4.4.4 Ecuaciones para δp_g y Π_g

Para cerrar el conjunto de ecuaciones que describen a la GDM, debemos especificar las relaciones entre δp_g, Π_g y las otras variables de fluido y elementos escalares de la métrica perturbada. En general, denominaremos a éstas como la *ecuación de estado para las perturbaciones* (que relaciona δp_g y $\delta\rho_g$), y la *ecuación cerrada* para Π_g. La primera de estas ecuaciones puede ser directamente derivada de la expresión (4.29), si hacemos, por ejemplo

$$\begin{aligned} w(a)\Gamma_g &= \frac{\delta p_g}{\delta \rho_g} - c_a^2\delta_g \\ &= (c_s^2 - c_a^2)\delta_g, \end{aligned} \tag{4.49}$$

donde hemos hecho uso de la ecuación de estado para el fondo homogéneo $\bar{p}_g = w(a)\bar{\rho}_g$, y hemos definido la *velocidad del sonido para perturbaciones* $c_s^2 = (\frac{\delta p_g}{\delta \rho_g})$.

Si se cumple que $c_s^2 = c_a^2$ entonces de (4.49) tenemos que $\delta p_g = c_a^2\delta\rho_g$ (tratándose de perturbaciones adiabáticas, donde $\Gamma_g = 0$), y en particular si w es independiente del tiempo entonces $\delta p_g = w\delta\rho_g$; Por otro lado, recuperamos el caso CDM cuando $w = 0$, y cuando $w = 1/3$ recuperamos el modelo para WIMPs. Si retomamos (4.29) en (4.49), y consideramos un marco en reposo usando la variable ($\bar{\rho}\hat{\Delta} = \delta\rho + \bar{\rho}'v$) obtenemos

$$\delta p_g = c_a^2\delta_g + (c_s^2 - c_a^2)\hat{\Delta}_g. \tag{4.50}$$

Para la ecuación cerrada de Π_g retomaremos el resultado propuesto por [47], donde

$$\Pi_g' = -3H\Pi_g + \frac{4}{1+w}c_{\text{vis}}^2 v_g \to \Pi_g = \frac{4}{5H(1+w)}c_{\text{vis}}^2 v_g. \tag{4.51}$$

Los modos escalares del esfuerzo anisótropico cumplirán con la relación (4.51) que ha quedado en términos de la función libre $c_{\text{vis}}^2(a,k)$, relacionado a la viscosidad. Lo mismo ocurre para (4.50) que aparece en términos de la función libre $c_s^2(a,k)$; ambos parámetros pueden depender de la posición y del factor de escala. De esta forma el modelo GDM queda parametrizado mediante las funciones libres $w(a)$, c_s^2 y c_{vis}^2.

Como señala W. Hu, «esta parametrización captura muchas de las características esenciales de la GDM en cuanto que estás corresponden a medios de alterar sus propiedades de acumulamiento», [40]. Como ejemplos, en el caso límite en que $(w_g,\, c_s^2,\, c_{\text{vis}}^2) \to (0,0,0)$ recuperamos el modelo CDM, y cuando $(w_g,\, c_s^2,\, c_{\text{vis}}^2) \to (1/3, 1/3, 1/3)$, recuperamos el modelo de materia obscura caliente (HDM). Veamos ahora como enmarcar el modelo GDM en el formalismo EFT.

4.5 GDM en el marco de Teoría Efectiva

Bajo la misma motivación que nos llevo a aplicar el formalismo EFT a DE, nos proponemos ahora aplicar el formalismo EFT a GDM y conseguir un mapeo entre el modelo GDM comentado en las secciones precedentes y las funciones efectivas en forma totalmente análoga a lo desarrollado para DE. Con esto en mente, ahora el campo escalar adicional π que anteriormente jugaba el papel de DE, ya sea como una posible modificación a la gravedad o como un componente efectivo del tensor de energía momento, jugará el papel de GDM. En principio el desarrollo será idéntico al efectuado en los apartados precedentes, con la excepción de que el tensor de energía momento será nulo. Con lo anterior esperamos obtener expresiones totalmente análogas a las obtenidas para DE, es decir, conseguiremos las expresiones para un componente fluido como lo son las ecuaciones (4.22) y (4.24) y una ecuación de estado como la ecuación (3.14), de forma directa. Dicho lo anterior, exploremos las ecuaciones del fondo FRW bajo el supuesto de que π hace el papel de GDM en el vacío, es decir T^{μ}_{ν} es nulo. De acuerdo a EFT, tenemos que ρ_{EF} y p_{EF} para GDM están dadas por

$$\rho^{(gdm)}_{EF} = 3M_*^2 f(t)H^2 \tag{4.52a}$$

$$p^{(gdm)}_{EF} = -M_*^2 f(t)(2\dot{H} + 3H^2). \tag{4.52b}$$

Observemos que a diferencia de ρ_{CDM} y ρ_{GDM} (3.10), la expresión para ρ_{EF} depende no solamente del parámetro de Hubble $H(t)$, sino también del la función efectiva $f(t)$. Lo mismo aplica a la p_{EF}, que ahora depende también de $f(t)$. A su vez, la ecuación de fluido adquiere un término de fuente definido por la función efectiva $f(t)$, como se expresa en (4.22). También la ecuación de estado (3.14) dependerá del tiempo a través de las función $c(t)$, $\Lambda(t)$ y $f(t)$ a diferencia de $p_g = w(a)\rho_g$, que solo depende del factor de escala.

Respecto a las ecuaciones dinámicas para perturbaciones, analicemos por separado cada ecuación. La componente (00) toma la forma como

$$\begin{aligned}\frac{k^2}{a^2}\Psi - 3H(\dot{\Psi} + H\Phi) = \frac{1}{2M_*^2 f}\Bigg\{ M_*^2\Bigg[-\dot{f}(3(\dot{\Psi} + H\Phi) + 3\dot{H}\pi + 2H(\Phi - \dot{\pi}) \\ -(a^{-2}\partial^2\pi)) - \ddot{f}(\Phi - \dot{\pi})\Bigg] + (\rho_{EF} + p_{EF})(\Phi - \dot{\pi} + 3H\pi) + 4M_2^4(\Phi - \dot{\pi}) \\ +m_3^3\Bigg[3(\dot{\Psi} + H\Phi) - 3\dot{H}\pi - a^{-2}\partial^2\pi + 3H(\Phi - \dot{\pi})\Bigg]\Bigg\} = \frac{\delta\rho^{(gdm)}_{EF}}{2M_*^2}\end{aligned} \tag{4.53}$$

Observamos en la ecuación anterior que lo que juega el papel de perturbación de materia oscura $\delta\rho^{gdm}_{EF}$ depende ahora del conjunto de funciones efectivas $c(t), \Lambda(t), m_3^3(t), M_2^2(t), f(t)$, claro contraste con la expresión (4.44), que además de depender de la forma de los potenciales, depende solamente del parámetro $H(t)$.

Por otro lado, la componente $(0i)$ y $(i \neq j)$, se escriben como

$$\begin{aligned}\partial_i(\dot{\Psi} + H\Phi) &= -\frac{1}{2M_*^2 f}\Big\{ M_*^2[-\ddot{f}\partial_i\pi - \dot{f}\partial_i\dot{\pi} + \dot{f}\partial_i\Phi + \dot{f}H\partial_i\pi] + m_3^3\partial^2(\Phi - \dot{\pi})\Big\} \\ &= \frac{1}{2M_*^2 f} q^{(gdm)}_{EF}.\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\Psi - \Phi = \frac{\dot{f}}{M_*^2 f}\pi = \frac{\Pi^{(gdm)}_{EF}}{M_*^2}. \tag{4.55}$$

Finalmente reescribamos la componente con traza ($i = i$) como

$$\begin{aligned}
&\ddot{\Psi} + H\dot{\Phi} + 3H\dot{\Psi} + (3H^2 + 2\dot{H})\Phi + \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}(\Phi - \Psi) = \\
&\frac{-1}{2M_*^2}\Big\{M_*^2\Big[\dot{f}\big[2(\Psi \dot{+} H\Phi) + (\dot{\Phi} - \ddot{\pi}) + 3H(\Phi - \dot{\pi}) - 3H^2\pi + 2\partial^2\pi/(3a^2)\big] \\
&+ \ddot{f}(\Phi - \dot{\pi})\Big] - \dot{p}_D + (\rho_D + p_D)(\Phi - \dot{\pi}) - m_3^3(\dot{\Phi} - \ddot{\pi} + 3H(\Phi - \dot{\pi})\Big\} = \frac{\delta p_{EF}^{(gdm)}}{2M_*^2}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Observemos que las parametrizaciónes de las variables de materia oscura efectiva $\delta p_{EF}^{(gdm)}$, $\Pi_{EF}^{(gdm)}$, $q_{EF}^{(gdm)}$ y $\rho_{EF}^{(gdm)}$ quedan en términos de las funciones efectivas y de los potenciales gravitacionales Φ y Ψ y el campo escalar π. Podemos resolver estos últimos y sus derivadas $\ddot{\Psi}$, $\dot{\Psi}$, $\dot{\Phi}$, $\dot{\pi}$ usando (3.92), (3.93), (3.95), (3.96), (3.77) y (4.53)-(4.56). Lo anterior, nos permitirá expresar $\delta p_{EF}^{(gdm)}$ y $\Pi_{EF}^{(gdm)}$ en términos de las funciones efectivas y las variables de materia oscura efectiva en la forma

$$\delta p_{EF}^{(gdm)} = A(\delta\rho_{EF}^{(gdm)} - 3Hq_{EF}^{(gdm)}) + Bq_{EF}^{(gdm)} \tag{4.57}$$

$$\Pi_{EF}^{(gdm)} = \frac{a^2}{2k^2}\left[C(\delta\rho_{EF}^{(gdm)} - 3Hq_{EF}^{(gdm)}) + Dq_{EF}^{(gdm)}\right] \tag{4.58}$$

donde

$$A, B, C, D = A, B, C, D(H, \rho_{EF}^{(gdm)}, p_{EF}^{(gdm)}, q_{EF}^{(gdm)}, m_3^3, M_2^4, c, \Lambda, f) \tag{4.59}$$

Estas ecuaciones requieren un laborioso cálculo y son presentadas por primera vez en [37] Apéndice C aplicado a DE en presencia de materia. En el Cuadro 4.1 comparamos la parametrización en el modelo GDM y la parametrización obtenida al aplicar EFT a DM.

Modelo	Ecuación de estado		
	$\Pi_{g,EF}$	$\delta p_{g,EF}$	$p_{g,EF}$
GDM	$H, c_{\text{vis}}^2, \omega, v_g, \rho_g, p_g$	$H, \rho_g, p_g, c_s^2, \omega, v_g$	ω, ρ_g
EFT	$H, \rho_{EF}^{(gdm)}, p_{EF}^{(gdm)}, q_{EF}^{(gdm)}, m_3^3, M_2^4, c, \Lambda, f$		f, c, Λ, ρ_{EF}

Cuadro 4.1: Cuadro comparativo de las parametrizaciones para las ecuaciones de estado en el formalismo EFT y el modelo GDM.

Observemos que, a partir de (3.14), para recuperar la ecuación de estado del fondo FRW del modelo de CDM, es decir $\omega = 0$, se debe cumplir la con $f = 1$, $c = \Lambda$. Por otro lado, recuperamos WIMP's cuando $f = 1$, $c = 0$, $\Lambda =$ constante. Notemos también que la ecuación (4.55) establece que un escalar de esfuerzo anisotrópico no nulo requiere que $f = f(t)$, es decir, que el modelo de GDM queda enmarcado en el formalismo EFT solo si f es una función del tiempo. Lo anterior puede verse claramente a partir de las ecuaciones (4.52) donde un componente de materia oscura efectiva solo es posible cuando $f(t)$, es decir, cuando f es dependiente del tiempo.

Por otro parte, como se hizo en [37] Sección 4.2 ec. (122)-(123), es posible verificar que dadas las ecuaciones (4.53)-(4.56) la ecuación dinámica de π

es equivalente a la ecuación de conservación de un fluido de materia oscura generalizado

$$\delta\dot{\rho}_{EF}^{(gdm)} + 3H(\delta\rho_{EF}^{(gdm)} + \delta p_{EF}^{(gdm)}) - 3(\rho_{EF}^{(gdm)} + p_{EF}^{(gdm)})\dot{\Psi} - \frac{k^2}{a^2}q_{EF}^{(gdm)} = 0. \quad (4.60)$$

La ecuación de Euler dada por

$$\dot{q}_{EF}^{(gdm)} + 3Hq_{EF}^{(gdm)} + (\rho_{EF}^{(gdm)} + p_{EF}^{(gdm)})\Phi + \delta p_{EF}^{(gdm)} - \frac{2}{3}\frac{k^2}{a^2}\Pi_{EF}^{(gdm)} = 0. \quad (4.61)$$

Estas ecuaciones generalizan aquellas para GDM (4.31) y (4.38).

Finalmente, si deseamos observar GDM/EFT como una posible modificación a GR, debemos considerar un tensor de energía momento no nulo en la acción efectiva (bariones y radiación). Idénticamente a lo establecido en las sección (3.6) la forma de parametrizar modificaciones a la gravedad es a través de las funciones fenomenológicas $G_{\text{eff}}(k,t)$, $\gamma(k,t)$ y $\Sigma(k,t)$. Esto establece una relación fenomenológica entre GDM y DM atraves de las funciones efectivas.

Capítulo 5

Conclusiones

Para concluir el presente trabajo de tesis, resumamos brevemente los resultados hasta aquí presentados. En primer lugar, hemos logrado exponer el formalismo de la Teoría Efectiva de Campo (EFT) a cosmología (un estudio fenomenológico de Energía Oscura (DE), Materia Oscura (DM) o inflación). Este formalismo enmarca la teoría gravitacional más general en un espacio cuatrodimensional con un grado de libertad escalar permitiendo unificar en un solo marco una amplia variedad de teorías gravitacionales basadas en la métrica $g_{\mu\nu}$ y un campo escalar. De esta forma, más que en la adición de múltiples campos escalares, el estudio se basa en la expansión perturbativa del lagrangiano, permitiendo truncar la expansión a un orden de aproximación deseado. Este marco unificado permite proporcionar constricciones independientes del modelo sobre las propiedades de Energía Oscura (DE), Materia Oscura (DM) o la fase de expansión acelerada del universo temprano conocida como Inflación.

Partiendo de la acción general (2.36) expresada en términos de la funcion lapso N y de las cantidades geométricas tridimensionales ADM (K, $\mathcal{R}$, etc.), definidas sobre hipersuperficies constantes del campo escalar, hemos expandido esta acción hasta orden cuadrático en perturbaciones cosmológicas alrededor del fondo Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Además hemos asumido que el principio de equivalencia débil se satisface, es decir, que existe en tensor métrico universalmente acoplado a la materia (en el caso en que ésta se encuentra presente). La elección de trabajar en *norma unitaria* nos permitió absorber la dinámica de la perturbación del campo escalar adicional $\delta\phi$ en el sector gravitacional y permitió que las perturbaciones de los operadores geométricos se acompañaran de una función efectiva (2.77).

Lo anterior nos permitió escribir las ecuaciones dinámicas para el fondo FRW (2.75) y obtener una ecuación de estado para el fluido adicional ρ_{DE} en términos de las funciones efectivas (3.14). Expandiendo la densidad lagrangiana hasta segundo orden en perturbaciones (3.17) nos permitió establecer las condiciones (3.18) con las cuales es posible escribir el lagrangiano (3.20) más general de un solo campo escalar que lleva a ecuaciones dinámicas lineales que a lo más contienen derivadas espaciales de segundo orden, denominado modelo Horndeski [35]. Con estás condiciones obtuvimos la densidad lagrangiana de segundo orden que depende de un solo grado escalar caracterizado por la perturbación de curvatura ζ (3.29).

Establecimos las condiciones de estabilidad que aseguraban la ausencia de *fantasmas* e *inestabilidades laplacianas*, tanto para los modos escalares (3.33), como para los tensoriales (3.40), dadas por $Q_s = \mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}} > 0, c_s^2 > 0, Q_t = M^2 > 0, c_t^2 > 0$. También formulamos las conexiones entre algunos de los modelos de DE en la literatura ($f(R)$, k-esencia, etc.) y el formalismo EFT.

A través del mecanismo de *Stückelberg* (3.48) fue posible restaurar el campo escalar π explícitamente en el lagrangiano efectivo y restaurar la invarianza total. Trabajando con el lagrangiano del modelo Horndeski (donde $m_4^2 = \tilde{m}_2^2$) nos propusimos obtener las ecuaciones lineales para perturbaciones. De esta forma obtuvimos una ecuación dinámica para el campo π dependiendo de cinco funciones efectivas, es decir, de $f(t)$, $c(t)$, $\Lambda(t)$, M_2^4 y m_3^3. A su vez, variando respecto a los elementos escalares de la métrica perturbada (3.49), obtuvimos las ecuaciones dinámicas de Einstein en presencia de materia (caracterizada por un fluido imperfecto (3.73)) en términos del campo escalar π, las funciones efectivas y las perturbaciones gravitacionales Φ, Ψ usando la norma Newtoniana. La cosmología del fondo FRW queda descrita por las tres funciones dependientes del tiempo $f(t)$, $c(t)$ y $\Lambda(t)$, con las cuales diferentes modelos pueden ser distinguidos a través de la ecuación de estado para DE. Al igual, abordamos algunas consideraciones sobre transformaciones simétricas en el fondo FRW y establecimos (usando las ecuaciones modificadas de Friedmann (4.23)) que éste queda determinado por solamente una de las funciones efectivas. Por otro lado, cada nuevo operador de al menos orden cuadrático afecta únicamente la dinámica cosmológica de las perturbaciones, sin afectar la dinámica del fondo FRW.

Una vez que obtuvimos las ecuaciones dinámicas lineales para perturbaciones, nos fue posible (usando la aproximación cuasiestática a escalas dentro de el horizonte) escribir los parámetros gravitacionales $G_{\text{eff}}(k,t)$, $\gamma(k,t)$ y $\Sigma(k,t)$ que ligan la teoría con las observaciones en función de los parámetros efectivos. Con estos parámetros será posible discriminar entre diferentes modelos de Energía Oscura (DE), Materia Oscura (DM) o Gravedad Modificada (MG) dadas las observaciones de las grandes estructuras, lentes gravitacionales y la Radiación Cosmica de Fondo (CMB) .

Por otra parte, considerando DE como un fluido efectivo al nivel del fondo FRW y a nivel de las perturbaciones, establecimos las respectivas ecuaciones dinámicas bajo esta perspectiva, es decir (4.22) y (4.24). Finalmente, recordando lo expresado en [68], que «un segundo campo escalar puede potencialmente ser el responsable de la DM», explotamos esta proposición y con el enfoque de tratar el grado de libertad extra como un fluido efectivo logramos una parametrización de DM que contiene como una subclase el modelo de Materia Oscura Generalizada (GDM). Así, escribimos la parametrización de las variables de materia oscura efectiva $\delta p_{EF}^{(gdm)}$, $\Pi_{EF}^{(gdm)}$, $q_{EF}^{(gdm)}$ y $\rho_{EF}^{(gdm)}$ que quedan en términos de las funciones efectivas, de los potenciales gravitacionales Φ y Ψ, y el campo escalar π. Escribimos las diferentes ecuaciones de estado (4.57-4.58) y las ecuaciones de Einstein en términos de estos fluidos efectivos (4.53-4.56). Realizamos un cuadro comparativo que muestra los parámetros de cada uno de los modelos respectivos, DM como fluido efectivo ($\rho_{EF}^{(gdm)}$) y GDM (ρ_g). Como anotación final, establecimos la conexión entre funciones fenomenológicas $G_{\text{eff}}(k,t)$, $\gamma(k,t)$ y $\Sigma(k,t)$ para DM y DE.

Perspectivas a futuro para el presente trabajo pueden incluir extender el análisis efectuado en los capítulos precedentes considerando 1) la adición de múltiples campos escalares, vectoriales y tensoriales o 2) violación de invariancia de Lorentz o la ruptura de postulados fundamentales para GR. De forma complementaria al análisis presentado en el *capítulo 3* pueden ser añadidas expresiones de la ecuación de evolución para el contraste de densidad δ_m de los componentes de materia (para así explorar la forma de crecimiento de las perturbaciones en materia durante épocas determinadas), como también obtener *la relación de dispersión* para los grados de libertad que se propagan, con el objeto de obtener a su vez una expresión para c_s^2. Respecto al *capítulo 4* la extensión más clara es obtener una forma explicita para las ecuaciones de fluido efectivo (4.57)-(4.61) imponiendo cotas a los parámetros y realizando aproximaciones adecuadas. Finalmente, la extensión más notoria e inmediata es considerar la adición de un segundo campo escalar en la acción EFT para DE que puede ser potencialmente responsable de los efectos atribuidos a DM; como expresa Tsujikawa [68], «será de interés al proporcionar un marco unificado para entender los orígenes de inflación, DE y DM».

Bibliografía

[1] R. Adam and et al. Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results. 34:39, 2015.

[2] Amir Aghamousa and et al. The DESI Experiment Part I: Science,Targeting, and Survey Design.

[3] N. Aghanim and et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 63, 2020.

[4] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity.* Oxford science publications, Oxford, 2008.

[5] Nima Arkani-Hamed, Hsin-Chia Cheng, Markus A Luty, and Shinji Mukohyama. Ghost Condensation and a Consistent Infrared Modification of Gravity. 2003.

[6] C. Armendáriz-Picón, T. Damour, and V. Mukhanov. k-Inflation.

[7] Cristian Armendariz-Picon and Alberto Diez-Tejedor. Aether Unleashed. apr 2009.

[8] Tessa Baker, Emilio Bellini, Pedro G. Ferreira, Macarena Lagos, Johannes Noller, and Ignacy Sawicki. Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A. oct 2017.

[9] Tessa Baker, Pedro G. Ferreira, Constantinos Skordis, and Joe Zuntz. Towards a fully consistent parametrization of modified gravity. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 84(12), dec 2011.

[10] Daniel Baumann. *Cosmology. Notas sobre Cosmología.*

[11] Daniel Baumann. Lecture Notes. Effective Field Theory in Cosmology.

[12] Emilio Bellini and Ignacy Sawicki. Maximal freedom at minimum cost: linear large-scale structure in general modifications of gravity. 2014.

[13] Jolyon Bloomfield. A Simplified Approach to General Scalar-Tensor Theories. apr 2013.

[14] Jolyon K. Bloomfield and Eanna E. Flanagan. A Class of Effective Field Theory Models of Cosmic Acceleration. dec 2011.

[15] Jolyon K. Bloomfield, Éanna É. Flanagan, Minjoon Park, and Scott Watson. Dark energy or modified gravity? an effective field theory approach. 11 2012.

[16] Lotfi Boubekeur, Paolo Creminelli, Jorge Norena, and Filippo Vernizzi. Action approach to cosmological perturbations: the 2nd order metric in matter dominance. jun 2008.

[17] C. P. Burgess. Introduction to Effective Field Theory. 2007.

[18] Sean M. Carroll. *Spacetime and geometry an introducction to General Relativity.*

[19] Clifford Cheung, Paolo Creminelli, A. Liam Fitzpatrick, Jared Kaplan, and Leonardo Senatore. The effective field theory of inflation. 9 2007.

[20] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, and Constantinos Skordis. Modified gravity and cosmology. 6 2011.

[21] Paolo Creminelli, Guido D'Amico, Jorge Noreña, and Filippo Vernizzi. The Effective Theory of Quintessence: the w<-1 Side Unveiled. nov 2008.

[22] Paolo Creminelli and Filippo Vernizzi. Dark Energy after GW170817 and GRB170817A. oct 2017.

[23] Corichi A. Núñez D. Introducción al formalismo ADM.

[24] K. S. Dawson and et al. THE BARYON OSCILLATION SPECTROSCOPIC SURVEY OF SDSS-III. 20:55.

[25] Antonio De Felice, Tsutomu Kobayashi, and Shinji Tsujikawa. Effective gravitational couplings for cosmological perturbations in the most general scalar-tensor theories with second-order field equations. aug 2011.

[26] Cédric Deffayet, Xian Gao, Daniele A. Steer, and George Zahariade. From k-essence to generalised Galileons. mar 2011.

[27] Alberto Diez-Tejedor. Notes: The effective theory of a cosmological matter component.

[28] Alberto Diez-Tejedor, Francisco Flores, and Gustavo Niz. Horndeski dark matter and beyond. *Physical Review D*, 97(12), jun 2018.

[29] Jose María Ezquiaga and Miguel Zumalacárregui. Dark Energy after GW170817: dead ends and the road ahead. oct 2017.

[30] Jose María Ezquiaga and Miguel Zumalacárregui. Dark Energy in light of Multi-Messenger Gravitational-Wave astronomy. jul 2018.

[31] Matteo Fasiello. Effective Field Theory for Inflation. jun 2011.

[32] Noemi Frusciante, Georgios Papadomanolakis, and Alessandra Silvestri. An extended action for the effective field theory of dark energy: A stability analysis and a complete guide to the mapping at the basis of EFTCAMB. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(7), jul 2016.

[33] Noemi Frusciante and Louis Perenon. Effective field theory of dark energy: a review. 7 2019.

[34] Noemi Frusciante, Marco Raveri, Daniele Vernieri, Bin Hu, and Alessandra Silvestri. Horava Gravity in the Effective Field Theory formalism: from cosmology to observational constraints. aug 2015.

[35] G. W. HORNDESKI. Second-Order Scalar-Tensor Field Equations in a Four-Dimensional Space. 1974.

[36] Jerome Gleyzes, David Langlois, Federico Piazza, and Filippo Vernizzi. Essential building blocks of dark energy. 4 2013.

[37] Jérôme Gleyzes, David Langlois, and Filippo Vernizzi. A unifying description of dark energy. 11 2014.

[38] Giulia Gubitosi, Federico Piazza, and Filippo Vernizzi. The effective field theory of dark energy. 9 2012.

[39] Petr Horava. Membranes at Quantum Criticality. dec 2008.

[40] Wayne Hu. Structure Formation with Generalized Dark Matter. 1998.

[41] Jerome Gleyzes. *L'énergie noire et la formation des grandes structures de l'Univers*. PhD thesis.

[42] Austin Joyce, Bhuvnesh Jain, Justin Khoury, and Mark Trodden. Beyond the Cosmological Standard Model. jun 2014.

[43] David B Kaplan. Five lectures on effective field theory. Technical report, 2005.

[44] Ryotaro Kase and Shinji Tsujikawa. Effective field theory approach to modified gravity including horndeski theory and hovrava-lifshitz gravity. 9 2014.

[45] Tsutomu Kobayashi, Masahide Yamaguchi, and Jun'ichi Yokoyama. Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations. may 2011.

[46] Kodoma and M. Sasaki. *Cosmological Perturbation Theory.*

[47] Michael Kopp, Constantinos Skordis, and Daniel B. Thomas. An extensive investigation of the Generalised Dark Matter model. (Cdm):1–37, 2016.

[48] Michael Kopp, Constantinos Skordis, and Daniel B. Thomas. The Dark Matter equation of state through cosmic history. pages 1–6, 2018.

[49] Kazuya Koyama. Cosmological tests of modified gravity, mar 2016.

[50] Macarena Lagos, Tessa Baker, Pedro G. Ferreira, and Johannes Noller. A general theory of linear cosmological perturbations: scalar-tensor and vector-tensor theories. apr 2016.

[51] Malcolm S. Longair. *Galaxy formation.* Springer, 2008.

[52] Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger. Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges. 1995.

[53] Karim A. Malik and David Wands. Cosmological perturbations. sep 2008.

[54] Jerome Martin. Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask). may 2012.

[55] T. Miramontes and D. Sudarsky. El formalismo 3+1 en relatividad general y la descomposición tensorial completa. Technical report, 2018.

[56] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* 1973.

[57] Minjoon Park, Scott Watson, and Kathryn M. Zurek. A Unified Approach to Cosmic Acceleration. mar 2010.

[58] Federico Piazza and Filippo Vernizzi. Effective Field Theory of Cosmological Perturbations. jul 2013.

[59] Tomislav Prokopec. Lecture notes on Cosmology.

[60] Adam G Riess, Lucas Macri, Stefano Casertano, Hubert Lampeitl, Henry C Ferguson, Alexei V Filippenko, Saurabh W Jha, Weidong Li, Ryan Chornock, and Cynthia Woods. A 3% Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3 1. 2011.

[61] Adam G Riess, Lucas M Macri, Samantha L Hoffmann, Dan Scolnic, Stefano Casertano, Alexei V Filippenko, Brad E Tucker, Mark J Reid, David O Jones, Jeffrey M Silverman, Ryan Chornock, Peter Challis, Wenlong Yuan, Peter J Brown, Ryan J Foley, and Cynthia Woods. A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant 1. 2016.

[62] Alessandra Silvestri, Levon Pogosian, and Roman V. Buniy. A practical approach to cosmological perturbations in modified gravity. feb 2013.

[63] Wilhelm Söderkvist Vermelin. 3+1 Approach to Cosmological Perturbations. 2016.

[64] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. f(R) Theories Of Gravity. may 2008.

[65] Villegas Silva F. Vargas Auccalla T. Formulación ADM de la Relatividad General.

[66] Yaser Tavakoli. Lecture II: Hamiltonian formulation of general relativity (Courses in canonical gravity) 1 Space-time foliation. Technical report, 2014.

[67] M. A. Troxel and et al. Dark Energy Survey Year 1 Results: Cosmological Constraints from Cosmic Shear. Technical report, 2018.

[68] Shinji Tsujikawa. The effective field theory of inflation/dark energy and the horndeski theory. 4 2014.

[69] Steven Weinberg. Effective field theory for inflation. 4 2008.

[70] Ëric Gourgoulhon. *3+1 Formalism in General Relativity*.

Alberto Diez Tejedor
Profesor Asociado C
Departamento de Física
DCI-León

León, Guanajuato; a 4 de junio de 2021

Dr. David Yves Ghislain Delepine
Director de la División de Ciencias e Ingenierías
Campus León, Universidad de Guanajuato
P R E S E N T E

Estimado Dr. Delepine,

Por este medio, me permito informarle que he leído y revisado la tesis titulada **"Formalismo de teoría efectiva aplicado al sector oscuro del universo,"** que realizó el estudiante **Edgar Iván Preciado Govea** como requisito para obtener el grado de Maestro en Física.

Considero que el trabajo de tesis realizado por Edgar reúne los requisitos necesarios de calidad e interés académico para que sea defendido en un examen de grado, razón por la cual extiendo mi aval para que así se proceda.

Sin más que agregar, agradezco su atención y aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”

Dr. Alberto Diez Tejedor
Departamento de Física
DCI, Campus León

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN
Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. (477) 788-5100, Fax: (477) 788-5100 ext. 8410, http://www.fisica.ugto.mx

Asunto: Carta aval de Sinodal

León, Gto., 2 de junio, 2021

Dr. David Yves Ghislain Depeline
Director de la División de Ciencias e Ingenierías

Presente

Por medio de la presente hago constar que he revisado la tesis titulada: "**Formalismo de teoría efectiva aplicado alsector oscuro del universo**" que presente el C. **Edgar Iván Preciado Govea** para obtener el grado de Maestro en Física.
Le comunico que he discutido cuidadosamente dicha tesis con el sustentante, a quien le he hecho llegar mis comentarios y correcciones. Le expreso además que en lo general me parece un buen trabajo por lo que avalo su presentación.

Sin otro particular, quedo de Uds. Para cualquier asunto relacionado con este documento.

Atentamente

Dr. Miguel Ángel Vallejo Hernández
Profesor Investigador

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FISICA,
DIVISION DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN
Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre, C.P. 37150 León, Gto., México. Tel. (477) 788-5100, Fax: (477) 788-5100 ext. 8410, http://www.fisica.ugto.mx

Universidad de Guanajuato

Gustavo Niz Quevedo
Departamento de Física
División de Ciencias e Ingenierías

León, Gto., 3 de Junio de 2021.

Dr. David Yves Ghislain Delepine
Director de la División de Ciencias e Ingenierías
Universidad de Guanajuato

Estimado Dr. David Yves Ghislain Delepine

Por medio de la presente le informo que he recibido, leído y revisado la tesis de Maestría en Física titulada "Formalismo de teoría efectiva aplicado al sector oscuro del universo" del alumno Edgar Iván Preciado Govea, bajo la supervisión del Dr. Albeto Diez Tejedor.

Después de la atención a ciertas correcciones menores, creo que el trabajo cumple con los estándares requeridos para la obtención del grado, y apoyo la defensa del mismo en la fecha convenida.

Me pongo a su disposición para cualquier duda sobre la revisión de dicho trabajo de tesis.

Atentamente,

Gustavo Niz

DEPARTAMENTO DE FISICA, DIVISION DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN
Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. (477) 788-5100, Fax: (477) 788-5100 ext. 8410, http://www.fisica.ugto.mx

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

León, Guanajuato, a 5 de junio de 2021

Dr. DAVID YVES GHISLAIN DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
P R E S E N T E

Estimado Doctor David Delepine,

Por este medio le informo que he leído y revisado la tesis de maestría en física del estudiante **Lic. Edgar Iván Preciado Govea** titulada **"Formalismo de teoría efectiva aplicado al sector oscuro del universo"**. El trabajo tiene como asesor al Dr.Alberto Diez Tejedor (Universidad de Guanajuato).

Le he hecho al estudiante recomendaciones para el documento de tesis, hemos discutido y he observado que domina el tema. Además considero que el trabajo realizado por él es de relevancia, y que obtuvo resultados originales. Me complace informarle que estoy de acuerdo con que se realice la presentación del trabajo de tesis, puesto que el mismo cuenta con los requisitos para la obtención del grado de Maestría en Física.

Reciba mis cordiales saludos,

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

Dra. Nana Geraldine Cabo Bizet

Departamento de Física
Campus León, Universidad de Guanajuato
Loma del Bosque 103, Colonia Lomas del Pedregal
C.P. 37150, León, Guanajuato,
México