



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

---

---

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

MODELOS DE ENERGÍA OSCURA  
TIPO QUINTAESENCIA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Maestro en Física**

PRESENTA:

**Lic. Ricardo Yair Martínez Ibarra**

DIRECTORES DEL TRABAJO:

**Dr. Luis Arturo Ureña López  
y Dr. Alberto Diez Tejedor**

León, Guanajuato

Junio 2021



---

# Índice general

Agradecimientos	X
	XII
	XIV
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Teoría de la relatividad general y sus aplicaciones en cosmología</b>	<b>5</b>
2.1. Relatividad General . . . . .	5
2.1.1. El principio de equivalencia . . . . .	5
2.1.2. El principio de Mach . . . . .	6
2.1.3. El principio de correspondencia . . . . .	7
2.1.4. Ecuaciones de campo de Einstein . . . . .	7
2.2. Cosmología . . . . .	8
2.2.1. Homogeneidad e Isotropía . . . . .	8
2.2.2. Corrimiento al rojo y ley de Hubble . . . . .	9
2.2.3. Ecuaciones de Friedmann . . . . .	11
2.2.4. Ecuación de estado . . . . .	13
2.2.5. Parámetro de densidad . . . . .	14
2.2.6. Modelando universos . . . . .	16
2.2.7. Fondo cósmico de microondas . . . . .	22
2.2.8. Distancia de luminosidad y módulo de distancia . . . . .	24

<b>3. Energía oscura como una forma modificada de la materia</b>	<b>26</b>
3.1. Quintaesencia . . . . .	27
3.2. El enfoque de los sistemas dinámicos . . . . .	28
3.3. Potencial exponencial . . . . .	30
3.4. Coordenadas polares . . . . .	33
3.4.1. Proceso inverso . . . . .	35
3.4.2. Ejemplo: Clase <b>Ib</b> . . . . .	36
<b>4. Resultados</b>	<b>40</b>
4.1. Modelo con potencial $V(\phi) \propto \phi^{-\alpha}$ . . . . .	40
4.2. Comparando el potencial $V(\phi) \propto \phi^{-\alpha}$ con el potencial de clase <b>Ia</b> . . . . .	41
4.3. Potencial exponencial en coordenadas polares . . . . .	53
<b>5. Conclusiones</b>	<b>59</b>
<b>A. Relatividad y cosmología</b>	<b>61</b>
A.1. Conservación del tensor de energía-momento . . . . .	61
A.2. Ecuaciones de Friedmann . . . . .	67
A.3. Modelando universos . . . . .	71
A.3.1. Materia + $\Lambda$ . . . . .	71
<b>B. Quintaesencia</b>	<b>73</b>
B.1. Potencial exponencial . . . . .	73
B.2. Coordenadas polares . . . . .	78
B.3. Proceso inverso . . . . .	80
<b>C. Resultados</b>	<b>85</b>
C.1. Diagramas triangulares . . . . .	85
<b>Bibliografía</b>	<b>96</b>

---

# Índice de figuras

2.1. En la gráfica se muestran que mientras más lejos estén las Cefeidas se alejan mas rápido de la tierra. Las estrellas Cefeidas, pulsan con períodos de entre 2 y 100 días y tienen una relación entre su brillo intrínseco y la frecuencia de pulsación, por lo que se utilizan como <i>candelas estándar</i> . Estas estrellas se pueden medir con precisión hasta unos 30 megaprsecs [1]. . . . .	10
2.2. Se presenta la grafica de $\omega$ , ecuación de estado (2.26), como función del corrimiento al rojo $z$ y así ver la evolución de las componentes de un Universo constituido por materia y constante cosmológica $\Lambda$ . La componente de la materia esta conformada por dos elementos, la materia barionica y la materia oscura fría, CDM son las siglas en ingles de <i>Cool Dark Matter</i> . Vemos que como en un principio domina el componte de la materia, línea azul y verde, cuando esta decae la componente de la constante cosmológica crece, línea morada. Para obtener esta grafica se usaron los datos obtenidos del código <b>CLASS</b> . . . . .	19
2.3. Evolución de las componentes de un universo de modelo $\Lambda$ CDM. Podemos ver que en tiempo tempranos las componentes de la radiación (fotones y neutrinos líneas naranja y amarilla respectivamente) son las que domina, cuando decaen las componentes de la materia (bariones y CDM, líneas verde y azul respectivamente) son las que dominan, pero a tiempos donde $z \rightarrow 0$ decaen y domina constante cosmología, línea morada. De la misma forma, se usan los datos del código <b>CLASS</b> para obtener esta graficar. . . . .	21

- 2.4. Temperaturas de anisotropías  $\ell(\ell + 1)C_\ell/2\pi$ . En el eje horizontal está representada el modo de oscilación  $\ell$ . En el eje vertical se representa la potencia en las fluctuaciones de temperatura. La línea solida roja se obtuvo con el código **CLASS** y los puntos experimentales de los datos de **COM PowerSpect CMB-TT-full** y **COM PowerSpect CMB-TT-binned**. . . . . 23
- 2.5. Grafica del módulo de distancia. La línea solida roja se obtuvo calculando el modulo de distancia, como se muestra en la ecuación 2.72. La distancia luminosa se obtiene del código **CLASS**. Los puntos experimentales se obtuvieron de **Union - Supernova Cosmology Project**. 25
- 3.1. Grafica de la evolución de la ecuación de estado contra  $1 + z$  para el potencial  $V(\phi) = A^2e^{2B\phi}$ , la solución numérica se obtuvo con el programa de computadora **CLASS**. . . . . 37
- 3.2. Gráfica de la ecuación de estado  $1 + \omega_\phi$  del campo de quintaesencia contra el corrimiento al rojo  $z$  para distintos valores de los parámetros dinámicos  $\alpha$ 's. Las dos imágenes de parte superior son reproducciones del artículo [2] y las dos de la parte inferior se obtuvieron variando los valores de  $\omega_{\phi 0}$  y  $\alpha_2$ 's con el código **class.QuintF-master**, son de autoría propia. . . . . 38
- 4.1. Las líneas azules representan la evolución de la ecuación de estado del campo escalar y las líneas en verde representan la evolución de la ecuación de estado del modelo XCDM. Aquí  $\omega_0$  del correspondiente modelo XCDM se ajusta con el valor inicial de  $\omega_{\phi 0}$  del modelo escalar  $\phi$ CDM. Además se muestra en la línea gris la evolución de la ecuación de estado del modelo  $\Lambda$ CDM [3]. . . . . 41
- 4.2. En esta figura se muestra la gráfica de la ecuación de estado donde el objetivo era replicar la Figura 4.1. En este caso se obtuvo para los tres valores del parámetro cosmológico  $\alpha_2$  que se muestran. Para obtener estos resultados se uso el código **classQuint-master**. . . . . 42

- 4.3. El mejor ajuste del espectro de potencias del CMB (siglas en ingles, de Cosmic Microwave Background). Las líneas solidas de colores se obtuvieron de los datos numéricos del programa **classQuint-master**, la línea roja corresponde a  $\alpha_2 = -2,5$ , la línea azul corresponde a  $\alpha_2 = -1,5$  y la línea verde corresponde a  $\alpha_2 = -1$ . Los puntos experimentales se obtuvieron de los datos proporcionados por **COM PowerSpect CMB-TT-full** y **COM PowerSpect CMB-TT-binned**. 44
- 4.4. Gráfica del Módulo de Distancia para el potencial de clase **Ia** para los tres valores de los parámetros  $\alpha_2$  (línea roja para  $\alpha_2 = -2,5$ , línea azul para  $\alpha_2 = -1,5$  y línea verde para  $\alpha_2 = -1$ ). Los puntos experimentales se obtenidos de los datos proporcionados por **Union - Supernova Cosmology Project**. . . . . 45
- 4.5. Diagrama triangular y las graficas gaussianas que corresponde para el parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -2,5$ . . . . . 46
- 4.6. Diagrama triangular y las graficas gaussianas que corresponde para el parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -1,5$ . . . . . 47
- 4.7. Diagrama triangular y las graficas gaussianas que corresponde para el parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -1$ . . . . . 48
- 4.8. Diagrama triangular de el empalme de los tres anteriores,  $\alpha_2 = -2,5$ ,  $\alpha_2 = -1,5$  y  $\alpha_2 = -1$ . . . . . 49
- 4.9. Este diagrama triangular se extrajo de [3] para comparar con nuestros resultados. Pudimos concluir que se requieren mas pasos para tener gráficas más definidas. Lo que nos lleva al siguiente diagrama. . . . . 50
- 4.10. Diagrama triangular para el parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -2,5$  con un millón de pasos. Podemos ver que las gráficas están más definidas. . . 51
- 4.11. En estas gráficas se dejo fijo el valor de  $\alpha_2$  y variamos las condiciones iniciales  $B$ . Se repitió el proceso tres veces para cada valor de  $\alpha_2$  que se tomaron en el caso anterior, *i.e.* para  $\alpha_2 = -2,5$ ,  $-1,5$  y  $-1$ . . . . . 52

4.12. Evolución de la ecuación de estado para el potencial exponencial variando los valores de las condiciones de frontera. La gráfica de abajo no se incluyó con la de arriba ya que al decaer tan rápido no se podía apreciar correctamente su comportamiento. En el código <b>CLASS</b> se le indica los parámetros cosmológicos. Usando los datos que este nos da obtenemos estas gráficas. . . . .	58
C.1. Diagrama triangular para el potencial de clase <b>Ia</b> y parámetro cosmológico $\alpha_2 = -2,5$ . . . . .	86
C.2. Graficas gaussianas para el potencial de clase <b>Ia</b> y parámetro cosmológico $\alpha_2 = -2,5$ . . . . .	87
C.3. Diagrama triangular para el potencial de clase <b>Ia</b> y parámetro cosmológico $\alpha_2 = -1,5$ . . . . .	88
C.4. Graficas gaussianas para el potencial de clase <b>Ia</b> y parámetro cosmológico $\alpha_2 = -1,5$ . . . . .	89
C.5. Diagrama triangular para el potencial de clase <b>Ia</b> y parámetro cosmológico $\alpha_2 = -1$ . . . . .	90
C.6. Graficas gaussianas para el potencial de clase <b>Ia</b> y parámetro cosmológico $\alpha_2 = -1$ . . . . .	91
C.7. Diagrama triangular del empalme de los tres diagramas anteriores para los parámetros cosmológicos $\alpha_2 = -2,5$ , $\alpha_2 = -1,5$ y $\alpha_2 = -1$ . . . . .	92
C.8. Graficas gaussianas del empalme de las tres anteriores para los parámetros cosmológicos $\alpha_2 = -2,5$ , $\alpha_2 = -1,5$ y $\alpha_2 = -1$ . . . . .	93
C.9. Diagrama triangular con un millón de pasos para el parámetro cosmológico $\alpha_2 = -2,5$ . . . . .	94
C.10. Graficas gaussianas con un millón de pasos para el parámetro cosmológico $\alpha_2 = -2,5$ . . . . .	95

---

# Índice de tablas

3.1. Lista de potenciales de quintaesencia que se pueden encontrar en la literatura y su correspondiente $y_2$ (ultima columna). $A$ y $B$ son constantes de integración $\kappa^2 = 8\pi G$ y $\lambda$ , $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son parámetros dinámicos [2]. . . . .	34
3.2. Una lista de potenciales de quintaesencia que se obtienen del proceso inverso con los parámetros dinámicos $\alpha_i$ dados, donde $A$ y $B$ son constantes de integración. Estos se pueden obtener desarrollando las ecuaciones (3.43), (3.44) y/o (3.46) a segundo orden ( <i>i.e.</i> para $\alpha_0$ , $\alpha_1$ y $\alpha_2$ ) [2]. . . . .	36
4.1. Puntos críticos en coordenadas polares del potencial exponencial $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}$ usando el cambio de variables (3.32), (3.37) y (3.38). . . . .	53



---

# Agradecimientos

Esta tesis está dedicada a todas las personas que, gracias a su apoyo incondicional, fue posible la realización de este trabajo.

Gracias a mis profesores, en especial a mis asesores los doctores Luis Arturo Ureña López y Alberto Diez Tejedor. Que me permitieron trabajar con ellos y me brindaron todo su apoyo, gracias a ellos pude crecer académicamente y por lo cual estoy un paso más cerca de mi desarrollo laboral.

A mis padres y mi hermana, José Ricardo Martínez Bravo, Amparo Ibarra Arce y Mariana Ameyali Martínez Ibarra. Gracias a ellos estoy en el camino correcto. Que siempre me han apoyado y alentado en seguir y cumplir mis sueños, siempre han creído en mi. No los defraudare nunca.

Quiero agradecer a mis muy queridos amigos Andrés, Sandra, Daniel, Fernanda, Ricardo, Jorge, Joel, Alberto, Eduardo, Gibran, Marco, Ulises y Genaro. Que más que amigos me han demostrado que son mis hermanos, ya que están cuando los necesito. A pesar de el camino que cada uno tome, siempre estamos para respaldarnos.

También gracias a mis amigos Max, Atalia, Rodrigo de la Cruz, Rodrigo Rivas, Wilfredo, Javier, Ever, Frank y Jonatan, que en esta etapa me mostraron compañerismo amistad y me apoyaron como los buenos amigos que son.

Por ultimo quiero agradecer a la Universidad de Guanajuato y a CONACYT por el apoyo del desarrollo de mi maestría en física.

**GRACIAS**



---

*Quiero dedicar en especial este trabajo  
a mi primo Raimundo Ramírez Ibarra,  
que era más un hermano mayor para mí.  
Te extrañare mucho por siempre,  
pero vivirás en mi corazón.*



---

*Alguna parte de nuestro ser nos dice que esta es nuestra cuna. Deseamos regresar y podemos, por que el cosmos esta en nosotros, somos polvo de estrellas, somos el medio para que el cosmos se conozca a sí mismo.*

*"Carl Sagan - Cosmos"*



---

# Capítulo 1

## Introducción

Los astrónomos notaron algo extraño en las galaxias. Pensaban que estas se encontraban en equilibrio debido a dos fuerzas: la **fuerza centrífuga**, que es una *fuerza ficticia*, que aparece cuando se describe un objeto en rotación, en el caso de las galaxias, las estrellas que giran alrededor del núcleo sienten una *fuerza* que las alejan. Y la **fuerza gravitacional** provocada por los miles de millones de soles de la galaxia que debían de compensar la fuerza de rotación. Pero las velocidades de las estrellas alrededor de las galaxias eran demasiado rápidas como para compensar la fuerza gravitacional. Los físicos llegaron a la conclusión de que *debe de existir algo en las galaxias que no vemos, pero que tiene una enorme gravedad y se encuentra en mayor cantidad en las galaxias*. Se le dio el nombre de **materia oscura**. Fue propuesta en 1933 por Fritz Zwicky, no se sabe de qué está compuesta, pero es un cuarto de la materia total del universo.

Cuando Einstein publicó su teoría de la relatividad general (RG) en 1915 escribió sus famosas ecuaciones de campo, que describen la forma en que el espacio-tiempo se curva por la presencia de una fuente gravitacional. Poco después, Einstein modificó las ecuaciones de campo introduciendo una constante  $\Lambda$  (la constante cosmológica) con el fin de describir un universo estacionario, a la cual más tarde llamó *su mayor error*, porque bajo la hipótesis en la que introdujo la constante cosmológica, obtenía un universo inestable. En la década de los 20's el astrónomo Edwin Hubble observó que las galaxias se alejan de nosotros, con lo que concluyó que el universo se expande. En 1998 los físicos descubrieron que el universo se expande a una velocidad cada

vez mayor. De esta forma se tiene un universo en expansión acelerada. Esto fue algo inesperado, porque se pensaba que para un universo en expansión en un momento llegaría a desacelerarse, por efectos atractivos gravitacionales mutuos entre galaxias distantes. Pero no es de esta forma, entonces se plateo una idea, que debe de introducirse una presión de tal forma que las galaxias continúen alejándose y cada vez más rápido, una presión negativa, a la que llamaron **Energía Oscura**, y sin importar de qué esté compuesta, representa más del 70 % de la materia del universo.

En este trabajo se presentan modelos de quintaesencia de energía oscura. Cuando decimos quintaesencia le asociamos una fuente de campo escalar a la energía oscura. Existen más modelos, como el de k-esencia, phantoms, energía oscura acoplada, entre otros. Este tipo de modelos, incluido el de quintaesencia, se obtienen de modificar el tensor de energía-momento en las ecuaciones de Einstein. A estos modelos, la literatura los llama **energía oscura como una forma modificada de materia**. También se tienen los modelos de gravedad modificada que se obtienen sumando términos del lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein.

En el primer capítulo se presenta un repaso de la teoría de la relatividad general, para introducir las ecuaciones de Einstein. Así mismo un repaso de cosmología para deducir las ecuaciones de Friedmann, que son muy importantes ya que con estas podemos modelar universos. En particular analizamos dos tipos de universos, un universo plano que contiene materia con constante cosmológica y otro, de la misma forma, plano que contiene materia, radiación y constante cosmológica, que se le conoce como el modelo cosmológico estándar o  $\Lambda$ CDM. Con las ecuaciones de Friedman se pueden construir más modelos de universos, pero se estudiaron principalmente estos dos modelos ya que, como se mencionó antes, la contribución de la constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein se le asocia como la energía oscura. En especial, el modelo  $\Lambda$ CDM es el que mejor ajusta a las observaciones, por lo que se toma como base a este para estudiar nuevos modelos como los modelos de campo escalar, que son con los que se trabajó en esta tesis.

En el segundo capítulo se presentan los modelos de quintaesencia, que se definen del tensor de energía-momento, estudiamos estos modelos como sistemas dinámicos, así podemos encontrar los puntos críticos del potencial escalar con el que se quiera trabajar. Se introduce un cambio de parámetros, que es el que trabajan [2], de esta

forma relacionan el potencial escalar con los parámetros. Entonces si se tiene el potencial se puede encontrar el parámetro  $y_2$ , y mediante un proceso inverso, al tener el parámetro  $y_2$  se puede conocer el potencial escalar, y expandiendo a segundo orden el parámetro  $y_2$  se obtienen los parámetros cosmológicos  $\alpha_i$ 's. Variando los valores de estos se construye una tabla de potenciales con los que se pueden trabajar.

En el tercer capítulo se presentan los resultados principales del trabajo: de la tabla de potenciales que se presentó en el capítulo dos se tomó el de clase **Ia** para compararlo con el potencial que presentan en [3], con ayuda del programa numérico de computadora **CLASS** se construyó la gráfica de la evolución de la ecuación de estado. Además, se construyó la gráfica del espectro de potencias del CMB que se comparó con datos experimentales obtenidos de **COM PowerSpect CMB-TT-full** y **COM PowerSpect CMB-TT-binned**. Así como el módulo de distancia, que de la misma forma, se comparó con datos experimentales obtenidos de **Union - Supernova Cosmology Project**.

Por último, se dan a conocer las conclusiones de nuestro trabajo, así como dos apéndices en donde se muestran desarrollos matemáticos más explícitos.

---

## Capítulo 2

# Teoría de la relatividad general y sus aplicaciones en cosmología

Einstein postulo la teoría de la relatividad general en base a un conjunto de principios para así poder escribir sus ecuaciones de campo. Estas nos describen la geometría del espacio-tiempo que deforma la fuente gravitacional. Haciendo uso de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, se resuelven las ecuaciones de Einstein para obtener las ecuaciones de Friedmann. Estas ecuaciones nos permiten modelar universos dependiendo de sus componentes. Se pueden obtener los modelos que uno quiera, pero el que más se ajusta con las observaciones es el de  $\Lambda$ CDM que consiste en un universo plano con radiación, materia y constante cosmológica.

### 2.1. Relatividad General

Para que Einstein formulara la teoría de la relatividad, tomo en cuenta el principio de equivalencia, el principio de Mach y el principio de correspondencia.

#### 2.1.1. El principio de equivalencia

El principio de equivalencia se puede expresar en dos versiones [4]. La primera se conoce como la **versión débil**, donde se define una partícula de prueba gravitacional que interactúe con el campo gravitacional, pero que no altere el campo.

*“En un campo gravitacional toda partícula de prueba gravitacional se mueve con la misma aceleración independientemente de su masa o de su composición.”*

En otras palabras, si se dejan caer dos objetos de distinta masa (por ejemplo, una canica y una bola de boliche) al mismo tiempo desde la misma distancia, los dos tocaran el suelo simultáneamente.

Y la **versión fuerte** dice

*“Ningún experimento local puede distinguir entre un sistema en caída libre dentro de un campo gravitacional de un sistema en movimiento uniforme en ausencia de un campo gravitacional.”*

Para explicar esto, imaginemos dos casos. En el primero se tiene a un observador dentro de una caja, de tal forma que la atracción gravitacional de la Tierra actúe sobre la caja. Para el segundo caso, se ubica la caja en el espacio vacío, lejos del campo gravitacional de la Tierra, del Sol o de cualquier otro planeta, y se acelera uniformemente. El observador no distinguirá en cual de los dos casos se encontrará.

### 2.1.2. El principio de Mach

El principio de Mach es fundamental para formular la relatividad general (**RG**), y se puede presentar como un conjunto de tres conjeturas [5]. La primera conjetura nos relaciona la masa con la geometría del espacio-tiempo.

*“La distribución de materia determina la geometría.”*

La segunda conjetura dice

*“Si no se tiene materia no se tiene geometría.”*

Este sería el caso para un universo vacío. La última conjetura habla de un universo donde contiene un único objeto.

*“Un cuerpo en un universo vacío no debería de poseer propiedades inerciales.”*

Ya que no interactúa con nada no tendría propiedades inerciales.

### 2.1.3. El principio de correspondencia

El principio de correspondencia nos dice que toda teoría tiene que ser consistente entre si. Tenemos que la **RG** corresponde con la relatividad especial (**RE**) en ausencia de campo gravitacional, por otro lado la **RG** corresponde con la teoría de gravitación de Newton en el limite de campo gravitacional débil y la **RE** corresponde con la teoría de gravitación de Newton para velocidades bajas.

### 2.1.4. Ecuaciones de campo de Einstein

Para escribir las ecuaciones de campo de Einstein tenemos que definir los siguientes elementos [6]. El tensor de Riemann se define de la forma

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} := \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} , \quad (2.1)$$

donde  $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$  son los símbolos de Christoffel que se definen como

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} := \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\beta,\mu} + g_{\lambda\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\lambda}) , \quad (2.2)$$

el tensor  $g^{\alpha\beta}$  es el tensor métrico, como ejemplos conocemos el de Minkowski, el de Friedmann-Robertson-Walker, el de Kerr, etc., los subíndices que van acompañados con comas en las ecuaciones (2.1) y (2.2) denotan derivada parcial con respecto a la coordenada correspondiente. Luego tenemos que el tensor de Ricci se define de la forma

$$R_{\alpha\beta} := R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha} , \quad (2.3)$$

además el escalar de Ricci se define como

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} , \quad (2.4)$$

el cual es la traza de la forma matricial del tensor de Ricci, también se le conoce como el *escalar de curvatura*.

Por ultimo tenemos que el tensor  $T^{\alpha\beta}$  es el tensor de energía-momento, el cual contiene información de lo que esta compuesto la fuente del campo. Así escribimos

las ecuaciones de campo de Einstein

$$G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = \kappa^2 T^{\alpha\beta}, \quad (2.5)$$

donde  $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$ ,  $G$  es la constante de gravitación universal y  $c$  es la velocidad de la luz. A  $\Lambda$  se le conoce como la *constante cosmológica*, más adelante veremos que esta constante se relaciona con la *energía oscura*.  $G^{\alpha\beta}$  es el tensor de Einstein, que tiene la forma

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R. \quad (2.6)$$

El lado izquierdo de la ecuación (2.5) nos describe la geometría del campo y el lado derecho nos da información de la fuente del campo, así vemos como es que la geometría esta relacionada con la fuente del campo, que es de lo que hablaba el principio de Mach.

## 2.2. Cosmología

El principio cosmológico es la base de la cosmología del **Big Bang**. El Big Bang es la mejor descripción que tenemos de nuestro universo. Originalmente, se vio obligado a competir con una idea rival, el universo de **Estado Estacionario**, que sostiene que el universo no evoluciona. Sin embargo, las observaciones apoyan la teoría del Big Bang con tanta fuerza que ya no se considera la teoría del Estado Estacionario [7].

### 2.2.1. Homogeneidad e Isotropía

El principio cosmológico establece que el universo a gran escala es *homogéneo* e *isótropo*. Cuando hablamos de homogeneidad nos referimos que no hay ubicación preferente. A escalas de los 10 Mpc vemos una densidad promedio uniforme además podemos ver la isotropía del universo, *i.e.* que no se tiene una dirección preferencial.

### 2.2.2. Corrimiento al rojo y ley de Hubble

Una tercera propiedad que hay que mencionar del universo es que se expande de forma uniforme. Se observan que las galaxias se alejan de nosotros a una velocidad que es proporcional a la distancia entre nosotros. Esta velocidad se puede medir por el corrimiento al rojo, que básicamente es aplicar efecto Doppler a las longitudes de onda de la luz. Las galaxias tienen un conjunto de líneas de absorción y emisión inidentificables en su espectro, que es una frecuencia característica bien conocida. Así, si las galaxias se acercan hacia nosotros las ondas de la luz se comprimen entre si aumentando la frecuencia, entonces el espectro resultante se verá modificando corrido al azul. En cambio, si se las galaxias se alejan el espectro resultante se verá corrido al rojo, esto es porque la frecuencia de la luz emitida disminuye. El corrimiento al rojo se define, en términos de las longitudes de onda, de la forma [4]

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}}, \quad (2.7)$$

donde  $\lambda_{\text{em}}$  y  $\lambda_{\text{obs}}$  son las longitudes de onda de la luz emitida en el punto de emisión (la galaxia) y en el punto observado (nosotros) respectivamente.

Esta técnica se usó por primera vez para medir la velocidad de una galaxia por Vesto Slipher alrededor de 1912, en el observatorio Lowell, midió el cambio en la longitud de onda de la luz de M31; resulta que esta galaxia es una de las pocas que exhibe un corrimiento al azul. En 1925, Slipher había medido los cambios en las líneas espectrales de aproximadamente 40 galaxias, descubriendo que casi todas estaban desplazadas al rojo; las excepciones fueron todas las galaxias cercanas dentro del grupo local.

En la década de 1920 el cosmólogo Edwin Hubble observo el corrimiento al rojo de aproximadamente 50 galaxias. Aunque medir el desplazamiento al rojo de una galaxia es relativamente fácil y se puede hacer con alta precisión, medir su distancia es difícil. Hubble conocía el  $z$  de las galaxias, pero había estimado distancias para solo 20 de ellas. Sin embargo, a partir de una gráfica de desplazamiento al rojo ( $z$ ) contra la distancia ( $d$ ), reproducida en la Figura 2.1, descubrió la relación lineal famosa, que ahora se conoce como la *ley de Hubble*;

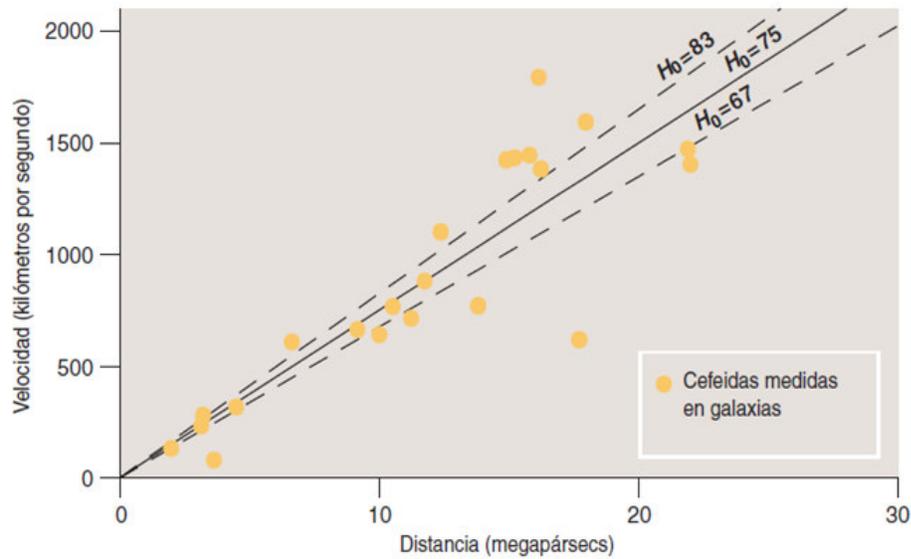


Figura 2.1: En la gráfica se muestran que mientras más lejos estén las Cefeidas se alejan más rápido de la tierra. Las estrellas Cefeidas, pulsan con períodos de entre 2 y 100 días y tienen una relación entre su brillo intrínseco y la frecuencia de pulsación, por lo que se utilizan como *candelas estándar*. Estas estrellas se pueden medir con precisión hasta unos 30 megaparsecs [1].

$$z = \frac{H_0}{c}d, \quad (2.8)$$

donde la constante de proporción  $H_0$  es la constante de Hubble. Existen distintas formas para calcular la constante de Hubble con distintos resultados. Por ejemplo; un cálculo directo se obtuvo observando las Cefeidas que se encuentran en la Gran Nube de Magallanes, así se obtuvo  $H_0 = 74,03 \pm 1,42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Por otro lado la colaboración *Planck* del 2018 obtuvo un cálculo indirecto de la constante de Hubble  $H_0 = 67,36 \pm 0,54 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

Hubble observó que las galaxias presentaban un corrimiento al rojo por efecto Doppler debido a su velocidad radial alejándose de la Tierra. Como todos los valores de  $z$  en el análisis de Hubble eran pequeños ( $z < 0,04$ ), pudo usar la relación clásica no relativista para el efecto Doppler,  $z = v/c$ , donde  $v$  es la velocidad radial de la fuente de luz (en este caso, una galaxia). Interpretando los corrimientos al rojo como

los efectos Doppler, la ley de Hubble toma la forma

$$v = H_0 d. \quad (2.9)$$

### 2.2.3. Ecuaciones de Friedmann

El segmento de línea que describe un espacio tiempo homogéneo e isotrópico es el de *Friedmann-Robertson-Walker* (**FRW**), que está dado como [6]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (2.10)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala,  $K$  es la constante de curvatura que puede tomar los valores de  $-1$ ,  $0$  y  $+1$ , si se quiere estudiar un universo abierto, cerrado o plano respectivamente. Lo que se quiere ahora es resolver las ecuaciones de Einstein para este elemento de línea. Tenemos que el tensor métrico de FRW es

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

De (2.2) obtenemos los símbolos de Christoffels no nulos son

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, & \Gamma^1_{01} &= \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \\ \Gamma^0_{33} &= r^2 a(t) \dot{a}(t) \sin^2 \theta, & \Gamma^1_{33} &= -r(1 - Kr^2) \sin^2 \theta, \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot \theta, \\ \Gamma^0_{22} &= r^2 a(t) \dot{a}(t), & \Gamma^1_{22} &= -r(1 - Kr), \\ \Gamma^0_{11} &= \frac{a(t)\dot{a}(t)}{1-Kr^2}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{Kr}{1-Kr}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Usando (2.1), (2.3) y (2.4) encontramos que los elementos no nulos del tensor de Ricci son

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad R_{11} = \frac{2K + 2\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)}{1 - Kr^2}, \quad (2.13)$$

$$R_{22} = r^2 [2K + 2\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)], \quad R_{33} = r^2 \sin^2 \theta [2K + 2\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)], \quad (2.14)$$

con esto tenemos que el escalar de curvatura es

$$R = 6 \left[ \frac{K + \dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right]. \quad (2.15)$$

Para este caso tomamos el tensor de energía-momento para fluido perfecto, el cual es de la forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

con  $U_\alpha$  la 4-velocidad del fluido ( $U_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau}$ ),  $\rho$  y  $P$  la densidad de energía y la presión, respectivamente, tomando al tiempo propio por un observador en reposo con respecto al fluido  $\tau = t$  tenemos que el vector de 4-velocidad es:

$$U = (U_0, U_1, U_2, U_3) = (1, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}). \quad (2.17)$$

Pero ya que en la métrica de FRW los parámetros  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  no dependen del tiempo, solo el factor de escala  $a$ , entonces  $\dot{r} = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ , así tenemos que el tensor de energía-momento, en forma matricial, es

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Pa^2(t)}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pa^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Pa^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Sustituyendo (2.13), (2.14), (2.15) y (2.18) en (2.5) tenemos cuatro ecuaciones, además, si definimos el parámetro de Hubble como

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.19)$$

para  $\mu = \nu = 0$  tenemos la ecuación

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{8}{3}\pi G\rho(t) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2(t)} = H^2(t), \quad (2.20)$$

y para  $\mu = \nu = 1, 2, 3$  tenemos tres ecuaciones de la forma

$$-\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{K}{a^2(t)} - \frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} + \Lambda = 8\pi GP. \quad (2.21)$$

Por otro lado, sumando (2.20) y (2.21) tenemos:

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4}{3}\pi G(\rho(t) + 3P) = \dot{H}(t) + H^2(t). \quad (2.22)$$

A (2.20), (2.21) y (2.22) se les conocen como las ecuaciones de **Friedmann**, donde solo (2.20) y (2.21) son ecuaciones independientes del sistema de tres ecuaciones.

Por otro lado, de la conservación del tensor de energía-momento ( $\nabla_\alpha T^{\beta\alpha} = 0$ ) para  $\alpha = \beta = 0$  se tiene una ecuación muy importante, la **ecuación de continuidad**

$$\dot{\rho}(t) + 3H(t) [\rho(t) + P] = 0, \quad (2.23)$$

podemos obtener (2.22) combinando (2.20) y (2.23). Así volvemos a tener un sistema de tres ecuaciones donde dos de ellas son independientes.

Las ecuaciones de Friedman son muy importantes en cosmología. Para el día de hoy la constante de Hubble es:

$$H_0 = H(t_0) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0} = 100h\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}, \quad (2.24)$$

con

$$h = 0,72 \pm 0,08 \quad [48]. \quad (2.25)$$

#### 2.2.4. Ecuación de estado

Tenemos el sistema de tres ecuaciones que nos dice como se expande nuestro universo (2.20), (2.22) y (2.23), las ecuaciones de Friedmann, como ya se dijo antes, es un sistema de tres ecuaciones donde dos ecuaciones son independientes [7]. Para resolver el sistema de ecuaciones nos hace falta una ecuación independiente, ya que tenemos tres incógnitas,  $a(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $P(t)$  y dos ecuaciones independientes. Lo que se necesita es una **ecuación de estado**. Una relación matemática entre la presión y la densidad de energía, una relación de la forma:

$$P = P(\rho),$$

Así nuestro sistema de ecuaciones estará completo. Ya que en cosmología generalmente se trata con gases diluidos, podemos escribir una ecuación de estado de la forma:

$$P = \omega\rho, \tag{2.26}$$

donde  $\omega$  es una constante adimensional.

### 2.2.5. Parámetro de densidad

El parámetro de densidad se usa para especificar la cantidad de densidad de energía que contiene el universo. Como se propuso anteriormente la densidad  $\rho_\Lambda$  se incluye en la sumatoria para tener una forma más simple de la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}. \tag{2.27}$$

Para un valor dado de  $H$ , hay un valor especial de la densidad que se requeriría para que la geometría del universo sea plana tenemos que  $K = 0$ . Este se conoce como la *densidad crítica*, que esta dada como

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{2.28}$$

vemos que la densidad crítica es función del tiempo ya que  $H$  también es función del tiempo. Para el día de hoy conocemos el valor de  $H(t_0) = H_0$  y  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{m}^2\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ , así tenemos:

$$\rho_c(t_0) = \rho_{c0} = 1,88h^2 \times 10^{-28} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}. \tag{2.29}$$

Hay que aclarar que la densidad crítica no es la densidad del universo, ya que no es necesariamente plano. Sin embargo, establece una escala natural para la densidad del universo. Por lo que, en lugar de dar la densidad directamente, a menudo es útil dar su valor en relación con la densidad crítica. A esta cantidad adimensional se le conoce como parámetro de densidad  $\Omega$  y se define como:

$$\Omega := \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (2.30)$$

Ya que la densidad de energía total es igual a la suma de cada una de las contribuciones, así tenemos que el parámetro de densidad total es igual a la suma de cada una de las contribuciones, *i.e.*

$$\Omega = \sum_i \Omega_i. \quad (2.31)$$

Entonces podemos escribir la ecuación de Friedmann (2.27) usando el parámetro de densidad despejando de (2.30)

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho_c \Omega - \frac{K}{a^2} \\ &= H^2 \Omega - \frac{K}{a^2}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

despejando  $\Omega - 1$  tenemos que

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (2.33)$$

Podemos ver un caso especial, en el que  $\Omega = 1$ , este es el caso en el que se tiene un universo plano,  $K = 0$ , y así  $\Omega = 1$  para cualquier tiempo. Esto es cierto independientemente de cuales sean los componentes del universo.

Nuestro universo contiene diversos tipos de componentes y esta notación se puede usar no solo para la densidad de energía total, si no también para cada una de las componentes individualmente;  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$ ,  $\Omega_\Lambda$ , etc. definimos el parámetro de densidad asociado a la curvatura como:

$$\Omega_K := -\frac{K}{a^2 H^2}. \quad (2.34)$$

Este puede ser positivo o negativo, entonces la ecuación de Friedmann (2.33) se puede escribir como:

$$\Omega + \Omega_K = 1. \quad (2.35)$$

### 2.2.6. Modelando universos

Nuestro universo contiene diferentes componentes con diferentes ecuaciones de estado. Se puede estudiar modelos que contengan solo curvatura, materia o radiación [4]. También se puede estudiar una combinación de las anteriores; curvatura y materia, curvatura y radiación, materia y radiación, materia y constante cosmológica, etc. Pero el modelo más importante es al que se le conoce como modelo  $\Lambda$ CDM (por sus siglas en inglés de  $\Lambda$  cold dark matter), que es el modelo que mejor ajusta con las observaciones, este es un modelo de universo plano con materia no relativista ( $\omega = 0$ ), radiación ( $\omega = 1/3$ ) y constante cosmológica ( $\omega = -1$ ). La densidad de energía total se puede escribir como la suma de todas las contribuciones, de la forma:

$$\rho = \sum_i \rho_i. \quad (2.36)$$

Y la presión total se puede escribir como la suma de todas las contribuciones y usando la ecuación de estado (2.26)

$$P = \sum_i P_i = \sum_i \omega_i \rho_i. \quad (2.37)$$

La ecuación de continuidad (2.23) se cumple para cada una de las componentes por separado. Así podemos resolver la ecuación de continuidad usando la ecuación (2.37)

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_i + P_i) = 0, \quad (2.38)$$

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega_i)\rho_i = 0, \quad (2.39)$$

así podemos resolver esta ecuación diferencial separable

$$\frac{d\rho_i}{\rho_i} = -3(1 + \omega_i)\frac{da}{a}, \quad (2.40)$$

ya que  $\omega_i$  es constante

$$\rho_i(a) = \rho_{i,0} a^{-3(1+\omega_i)}. \quad (2.41)$$

Se toma la normalización  $a_0 = 1$  al tiempo del día de hoy con densidad de energía al día de hoy  $\rho_i(a_0) = \rho_{i,0}$ .

### Universo de componentes múltiples

De la ecuación (2.33) al evaluar en  $t = t_0$  tenemos que

$$\Omega(t_0) - 1 = \Omega_0 - 1 = \frac{K}{H_0^2}, \quad (2.42)$$

$$\therefore K = H_0^2 (\Omega_0 - 1). \quad (2.43)$$

Sustituyendo en la ecuación de Friedmann (2.27), tenemos

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{H_0^2}{a^2(t)} (\Omega_0 - 1), \quad (2.44)$$

dividiendo entre  $H_0^2$

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho(t) + \frac{1 - \Omega_0}{a^2(t)}. \quad (2.45)$$

De (2.28) tenemos que

$$\rho_c(t_0) = \rho_{c0} = \frac{3H(t_0)}{8\pi G} = \frac{3H_0}{8\pi G}, \quad (2.46)$$

entonces

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho(t)}{\rho_{c0}} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2(t)}. \quad (2.47)$$

Como vimos en la sección anterior el universo contiene materia no relativista y radiación que tienen densidad de energía  $\rho_m(t) = \rho_{m0}/a^3(t)$  y  $\rho_r(t) = \rho_{r0}/a^4(t)$  respectivamente. Además de estas dos componentes consideramos la contribución de la constante cosmológica, como la densidad de energía de esta es constante tenemos que  $\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} = \text{constante}$ . De esta forma tenemos la ecuación de Friedmann

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{1}{a^4(t)} \frac{\rho_{r0}}{\rho_{c0}} + \frac{1}{a^3(t)} \frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}} + \frac{\rho_{\Lambda 0}}{\rho_{c0}} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2(t)}. \quad (2.48)$$

De (2.30) tenemos que

$$\Omega_{i0} = \frac{\rho_{i0}}{\rho_{c0}}. \quad (2.49)$$

Así  $\Omega_{r0} = \frac{\rho_{r0}}{\rho_{c0}}$ ,  $\Omega_{m0} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}}$  y  $\Omega_{\Lambda0} = \frac{\rho_{\Lambda0}}{\rho_{c0}}$ , luego

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r0}}{a^4(t)} + \frac{\Omega_{m0}}{a^3(t)} + \Omega_{\Lambda0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2(t)}. \quad (2.50)$$

De (2.50) podemos ver que al tiempo  $t = t_0$  ( $a_0 = 1$ ) tenemos una relación de  $\Omega_0$  con los parámetros de densidad de las otras contribuciones, de la forma

$$\Omega_0 = \Omega_{r0} + \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0}. \quad (2.51)$$

Si tomamos  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  la ecuación de Friedmann (2.50) toma la forma

$$H_0^{-1} \dot{a} = \left[ \frac{\Omega_{r0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda0} a^2 + (1 - \Omega_0) \right]^{1/2}, \quad (2.52)$$

así podemos encontrar el factor de escala en función del tiempo integrando (2.52)

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da}{[\Omega_{r0}/a^2 + \Omega_{m0}/a + \Omega_{\Lambda0} a^2 + (1 - \Omega_0)]^{1/2}}, \quad (2.53)$$

Esta integral no tiene solución analítica, pero para valores dados de  $\Omega_{r0}$ ,  $\Omega_{m0}$  y  $\Omega_{\Lambda0}$  se puede resolver numéricamente.

## Materia y $\Lambda$

Consideremos un universo plano ( $\Omega_0 = 1$ ), pero con materia no relativista y constante cosmológica, donde los parámetros de densidad son  $\Omega_{m0}$  y  $\Omega_{\Lambda0}$  respectivamente. De (2.51) tenemos

$$\Omega_{\Lambda0} = 1 - \Omega_{m0}. \quad (2.54)$$

Entonces, de la ecuación de Friedmann (2.50)

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + (1 - \Omega_{m0}). \quad (2.55)$$

Vemos que si  $\Omega_{m0} < 1$  entonces  $\Omega_{\Lambda0} > 0$  y si  $\Omega_{m0} > 1$  entonces  $\Omega_{\Lambda0} < 0$ . En

esta ocasión solo analicemos para  $\Omega_{\Lambda 0} < 0$ . Para una máxima expansión del universo  $H = 0$  tenemos que el factor de escala máximo es:

$$a_{\text{MAX}} = \left( \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1} \right)^{1/3}. \quad (2.56)$$

Resolvamos la integral (2.53), tomando en cuenta (2.54)

$$H_0 t = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m0} - 1}} \frac{1}{a_{\text{MAX}}^{3/2}} \int_0^a \frac{a^{1/2} da}{[1 - a^3/a_{\text{MAX}}^3]^{1/2}}. \quad (2.57)$$

Para resolverla hacemos una sustitución trigonométrica, tomando

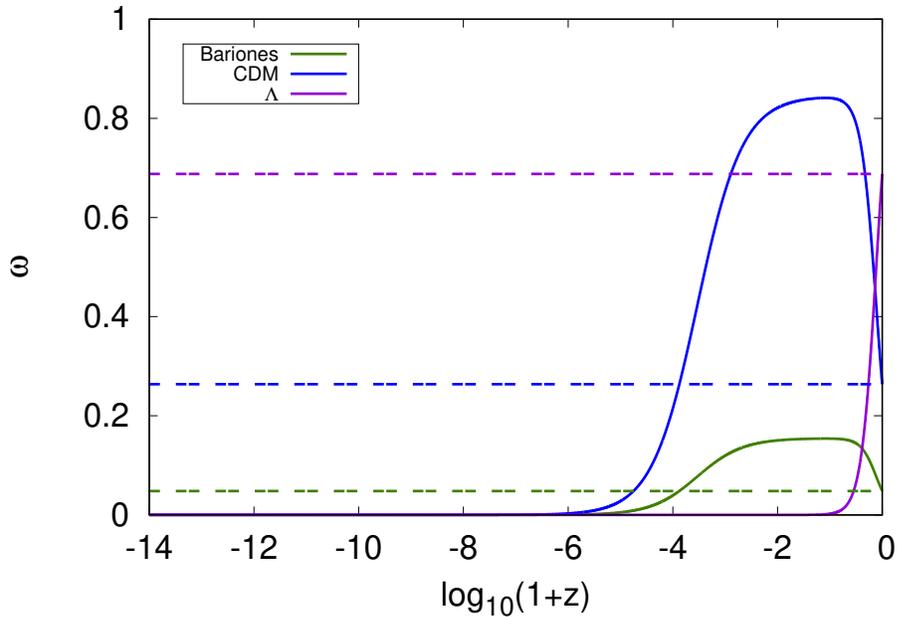


Figura 2.2: Se presenta la grafica de  $\omega$ , ecuación de estado (2.26), como función del corrimiento al rojo  $z$  y así ver la evolución de las componentes de un Universo constituido por materia y constante cosmológica  $\Lambda$ . La componente de la materia esta conformada por dos elementos, la materia barionica y la materia oscura fría, CDM son las siglas en ingles de *Cool Dark Matter*. Vemos que como en un principio domina el componte de la materia, línea azul y verde, cuando esta decae la componente de la constante cosmológica crece, línea morada. Para obtener esta grafica se usaron los datos obtenidos del código **CLASS**.

$$a(\theta) = a_{\text{MAX}} \sin^{2/3} \theta = \left[ \frac{\Omega_{m0} \sin^2 \theta}{\Omega_{m0} - 1} \right]^{1/3}, \quad (2.58)$$

el parámetro  $\theta$  va de 0 a  $2\pi$ , sustituyendo en (2.57)

$$H_0 t(\theta) = \frac{2}{3} \frac{\theta}{\sqrt{\Omega_{m0} - 1}}, \quad (2.59)$$

o podemos poner  $t$  en términos del factor de escala de la forma

$$H_0 t(a) = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{m0} - 1}} \sin^{-1} \left[ \left( \frac{a}{a_{\text{MAX}}} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.60)$$

Este universo colapsa ( $a = 0$ ,  $\theta = 2\pi$ ) en el tiempo

$$t_{\text{crunch}} = \frac{2\pi}{3H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m0} - 1}}. \quad (2.61)$$

En la Figura 2.2 se muestra una grafica de la evolución de materia y constante cosmológica para un universo de estas componentes. Se grafica  $\omega$  contra el  $\log_{10}(1+z)$  para ver la evolución dinámica de las componentes de este modelo. Se obtienen los datos de *omega* y el corrimiento al rojo de  $z$  al obtener la solución numérica de (2.57) usando el programa de computadora código **CLASS**.

## Modelo $\Lambda$ CDM

Como ya se dijo, este modelo es el que mejor ajusta a las observaciones. De la ecuación (2.53) se tiene que:

$$H_0 t = \int_0^a \left[ \Omega_{r0}/a^2 + \Omega_{m0}/a + \Omega_{\Lambda0} a^2 \right]^{-1/2} da. \quad (2.62)$$

La contribución de la radiación esta dada por las componentes de los fotones y los neutrinos. Para los fotones el parámetro de densidad de  $\Omega_{\gamma,0} = 5,4186 \times 10^{-5}$ . Y el parámetro de densidad de los neutrinos es  $\Omega_{\nu,0} = 3,4 \times 10^{-5}$ . Así tenemos el parámetro de densidad para radiación total  $\Omega_{r,0} = 9,16 \times 10^{-5}$ . La contribución de la materia no relativista se divide entre las componentes de materia bariónica y de materia oscura fría (**CDM** siglas en ingles de Cold Dark Matter). El parámetro de densidad de la materia bariónica es de  $\Omega_{b,0} = 0,048$  y de la CDM es de  $\Omega_{\text{CDM},0} = 0,26$ , que nos da un

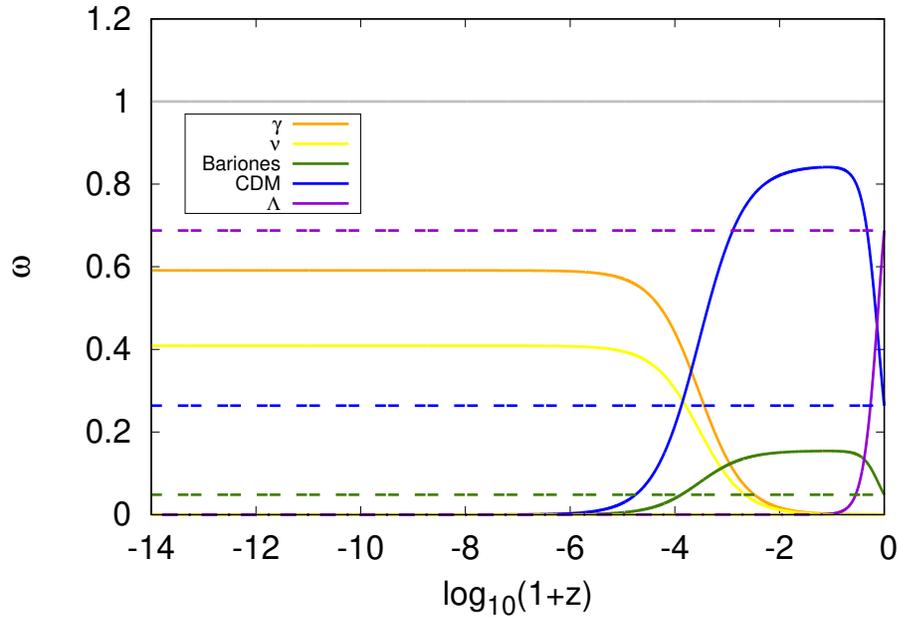


Figura 2.3: Evolución de las componentes de un universo de modelo  $\Lambda$ CDM. Podemos ver que en tiempo tempranos las componentes de la radiación (fotones y neutrinos líneas naranja y amarilla respectivamente) son las que domina, cuando decaen las componentes de la materia (bariones y CDM, líneas verde y azul respectivamente) son las que dominan, pero a tiempos donde  $z \rightarrow 0$  decaen y domina constante cosmológica, línea morada. De la misma forma, se usan los datos del código **CLASS** para obtener esta graficar.

parámetro de densidad para materia no relativista total de  $\Omega_{m,0} = 0,3119$ . Para tener un valor de la contribución dada por la constante cosmológica, se tiene que tomar en cuenta la normalización de Friedmann y esta es que todas las contribuciones del universo tiene que sumar igual a 1, entonces se tiene que  $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} \approx 0,68$ .

Se utilizo un programa de computadora para tener una solución numérica a (2.62). Así se pudo construir la Figura 2.3, donde vemos que para este modelo en tiempos tempranos domina radiación y cuando empieza decaer encontramos una época de materia dominante y por último, a tiempos actuales domina constante cosmológica.

### 2.2.7. Fondo cósmico de microondas

Las observaciones de las anisotropías de la temperatura en el fondo cósmico de microondas (en inglés Cosmic Microwave Background o **CMB**) proporcionan otra prueba de la existencia de la energía oscura. El cielo más antiguo que podemos ver es al que se le llama la última dispersión, que es cuando los electrones quedan atrapados por el hidrógeno para formar átomos, a esta época se le denomina *desacoplamiento* o *recombinación*. Los fotones estaban estrechamente acoplados a bariones y electrones antes de la época de desacoplamiento en  $z \simeq 1090$ , pero después de eso podían moverse libremente hacia nosotros. Penzias y Wilson fueron los primeros en detectar los fotones del CMB a una temperatura casi uniforme en todo el cielo. En las últimas tres décadas se han obtenido diversas mediciones de las anisotropías de la temperatura en el CMB, unas más precisas que otras, por satélites como **COBE** o mediante experimentos de alta precisión como **BOOMERanG**, **MAXIMA** y especialmente **WMAP** [7].

El CMB es una radiación que radia en todas direcciones a la Tierra, y sabemos que este actúa como un cuerpo negro con una temperatura

$$T_0 = 2,725 \pm 0,001\text{K}. \quad (2.63)$$

Por ser radiación de cuerpo negro, esta temperatura se relaciona con la densidad de energía de la forma

$$\rho_r c^2 = \alpha_B T^4, \quad (2.64)$$

a (2.64) es la ecuación de Stefan-Boltzmann y  $\alpha_B$  es una constante definida de la forma

$$\alpha_B \equiv \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} = 7,565 \times 10^{-16} \text{Jm}^{-3}\text{K}^{-4}. \quad (2.65)$$

Podemos encontrar que

$$\rho_r(t_0)c^2 = \alpha_B T_0 = 4,17 \times 10^{-14} \text{Jm}^{-3}. \quad (2.66)$$

Por el método de perturbación se obtiene la perturbación de la temperatura

definida como:

$$\Theta \equiv \frac{\delta T}{T}. \quad (2.67)$$

Luego expandimos las perturbaciones en términos de los armónicos esféricos de la forma

$$\Theta = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}, \quad (2.68)$$

donde  $Y_{\ell m}$  son los armónicos esféricos y los coeficientes  $a_{\ell m}$  son coeficientes independientes. De esta forma se tiene la varianza

$$C_{\ell} \equiv \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle. \quad (2.69)$$

Podemos expresar la varianza en términos de los múltiplos de la temperatura usando una transformada de Fourier

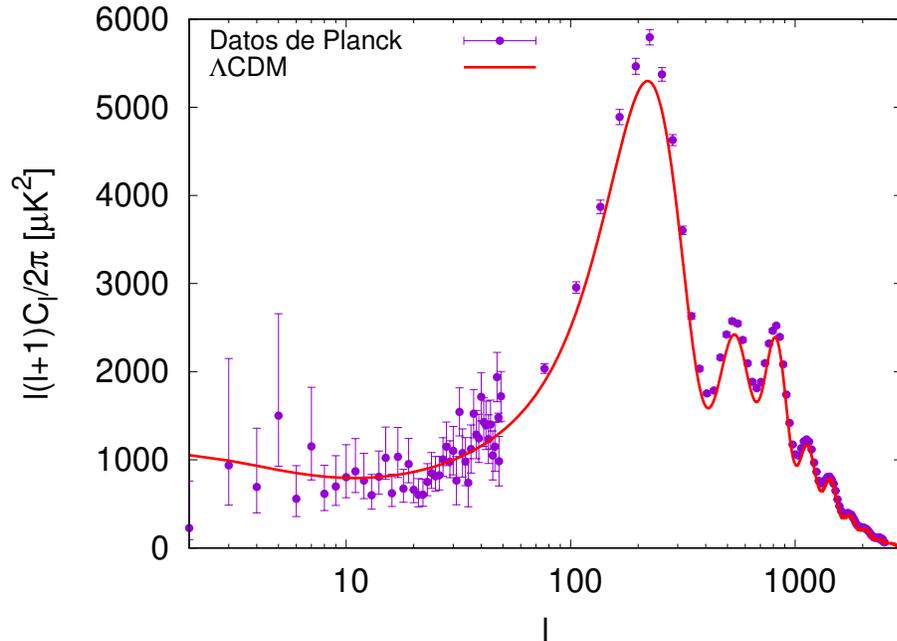


Figura 2.4: Temperaturas de anisotropías  $\ell(\ell + 1) C_{\ell}/2\pi$ . En el eje horizontal está representada el modo de oscilación  $\ell$ . En el eje vertical se representa la potencia en las fluctuaciones de temperatura. La línea sólida roja se obtuvo con el código **CLASS** y los puntos experimentales de los datos de **COM PowerSpect CMB-TT-full** y **COM PowerSpect CMB-TT-binned**.

$$C_\ell = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 |\Theta_\ell(k)|^2. \quad (2.70)$$

Se requieren simulaciones numéricas para derivar los espectros completos de las anisotropías de temperatura y polarización porque las ecuaciones de Einstein y Boltzmann para fotones y otros componentes de la materia están acopladas entre sí. A pesar de esta complejidad, Hu y Sugiyama obtuvieron muchas fórmulas de ajuste que son muy útiles para comprender la física de CMB y también derivaron soluciones analíticas bajo algunas aproximaciones.

En la Figura 2.4 se muestra un ejemplo de lo que se puede obtener al graficar las anisotropías de la temperatura  $\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$  contra el momento multipolar  $\ell$  usando un programa **CLASS**.

### 2.2.8. Distancia de luminosidad y módulo de distancia

Por otro lado, una forma de usar propiedades medidas para asignar una distancia es el método *candela estándar*. Una candela estándar es un objeto cuya luminosidad  $L$  es conocida. Por ejemplo, si alguna clase de objeto astronómico tuviera luminosidades que fueran las mismas en todo el espacio-tiempo, actuarían como excelentes candelas estándar, si se conociera su luminosidad única  $L$ . Si conoce, de una forma u otra, la luminosidad de un objeto puede usar su flujo medido  $f$  para definir una función llamada *distancia de luminosidad*:

$$d_L \equiv \left( \frac{L}{4\pi f} \right)^{1/2}. \quad (2.71)$$

Dado que los astrónomos frecuentemente citan flujos y luminosidades en términos de magnitudes aparentes y absolutas, les resulta conveniente citar distancias de luminosidad en términos del *módulo de distancia* a una fuente de luz. El módulo de distancia esta dada por la expresión:

$$\mu \equiv 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{1\text{Mpc}} \right) - 5. \quad (2.72)$$

El módulo de distancia de la Gran Nube de Magallanes a una distancia de luminosidad  $d_L = 0,050$  Mpc, es  $\mu = 18,5$ . El modulo de distancia del cumulo de Virgo,

a  $d_L = 15$  Mpc, es  $\mu = 30,9$  [4].

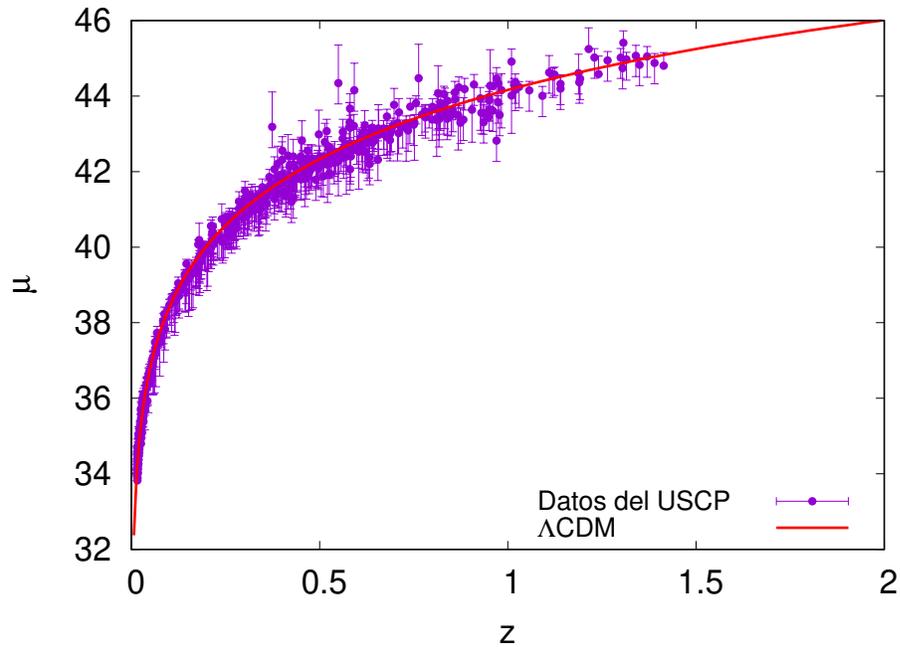


Figura 2.5: Grafica del módulo de distancia. La línea sólida roja se obtuvo calculando el módulo de distancia, como se muestra en la ecuación 2.72. La distancia luminosa se obtiene del código CLASS. Los puntos experimentales se obtuvieron de Union - Supernova Cosmology Project.

---

## Capítulo 3

# Energía oscura como una forma modificada de la materia

En 1917 Einstein introdujo la constante cosmológica para describir un universo estático, un universo que no se expande ni se contrae, que tiene una energía positiva y una presión negativa. Pero, lo que obtuvo fue un universo inestable. Sin embargo, en la década de 1920 Edwin Hubble observó que las galaxias parecen alejarse de nosotros así concluyó que el universo se está expandiendo. En 1998 se descubrió que el universo se expande de forma acelerada. Entonces el modelo previamente eliminado por Einstein describe bien un universo plano en expansión, a esta presión negativa le llamaron energía oscura. Este es el modelo  $\Lambda$ CDM, que se presentó en la sección 1.2.6. Pero si queremos resolver las ecuaciones de Friedmann para  $\Lambda = 0$ , necesitaremos encontrar modelos alternativos de energía oscura, básicamente se consideran dos modelos alternativos. El primero es el de los *modelos como una forma modificada de materia*, en el cual se modifica el lado derecho de las ecuaciones de Einstein. Se considera un tensor de momento-energía  $T^{\mu\nu}$  que contenga como fuente materia exótica. La segunda propuesta se basa en *modelos de gravedad modificada*, en el cual se modifica el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein [8].

Nosotros trabajaremos con modelos del primer caso, en específico con los modelos de *quintaesencia*. Cabe mencionar que además de los modelos de quintaesencia existen muchos más modelos, como los de k-esencia, phantoms, energía oscura acoplada, entre otros, como los que se presenta en la literatura [9–46]. Los modelos de

quintaesencia están caracterizados por un campo escalar  $\phi$  con un potencial  $V(\phi)$ .

### 3.1. Quintaesencia

Como ya se menciona previamente, usamos el término quintaesencia para denotar a los campos escalares  $\phi$  con potenciales  $V(\phi)$ , que interactúa con todas las componentes del universo a través de la gravedad. Estos modelos están descritos por la acción [8]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} R + \mathcal{L}_\phi \right] + S_M, \quad \mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi), \quad (3.1)$$

con  $\kappa = 8\pi G$ ,  $R$  el escalar de Ricci y la componente de la masa tiene por acción  $S_M$ .

Consideramos un universo plano descrito por la métrica de FRW. También consideramos fluido perfecto con densidad de energía  $\rho_M$ , presión  $P_M$  y la ecuación de estado  $\omega_M = P_M/\rho_M$ , que satisfacen las ecuaciones de Friedmann (2.21), (2.22) y (2.23). El tensor de momento-energía de quintaesencia es [47]

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right]. \quad (3.2)$$

Luego la densidad de energía  $\rho_\phi$  y la presión  $P_\phi$  del campo escalar son

$$\rho_\phi = -T_0^{0(\phi)} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P_\phi = \frac{1}{3} T_i^{i(\phi)} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (3.3)$$

así tenemos que la ecuación de estado es

$$\omega_\phi \equiv \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (3.4)$$

De las ecuaciones de Friedmann para universo plano tenemos que:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} [\rho_\phi + \rho_M] = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_M \right], \quad (3.5)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} [\rho_\phi + P_\phi + \rho_M + P_M] = -\frac{\kappa^2}{2} [\dot{\phi}^2 + \rho_M + P_M]. \quad (3.6)$$

Usamos el subíndice  $\phi$  para referirnos a la componente del campo escalar y  $M$  para la componente del fluido perfecto. Derivando la ecuación de continuidad del campo

escalar

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = 0, \quad (3.7)$$

o de (2.23) y las ecuaciones de Friedmann (3.5) y (3.6). También podemos obtener la ecuación de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (3.8)$$

## 3.2. El enfoque de los sistemas dinámicos

Se considera los siguientes cambios de variables para hacer un análisis dinámico del campo escalar

$$x \equiv \frac{\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad y \equiv \frac{\kappa V^{1/2}}{\sqrt{3}H}. \quad (3.9)$$

Esto nos permite escribir los parámetros de densidad

$$\Omega_\phi \equiv \frac{\kappa^2 \rho_\phi}{3H^2} = x^2 + y^2, \quad (3.10)$$

$$\Omega_M \equiv \frac{\kappa^2 \rho_M}{3H^2} = 1 - x^2 - y^2, \quad (3.11)$$

en donde este último satisface la restricción de Friedmann  $\Omega_M + \Omega_\phi = 1$ , y podemos escribir a la ecuación de estado (3.4) de la forma

$$\omega_\phi = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \quad (3.12)$$

De (3.6) podemos escribir

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -3x^2 - \frac{3}{2}(1 + \omega_M)(1 - x^2 - y^2). \quad (3.13)$$

De las ecuaciones de Friedmann (2.20) y (2.22) para  $k = 0$  y  $\Lambda = 0$  tenemos que

$$\omega_{\text{eff}} \equiv \frac{P_M}{\rho_M} = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.13) tenemos la siguiente expresión para  $\omega_{\text{eff}}$

$$\omega_{\text{eff}} = \omega_M + (1 - \omega_M)x^2 - (1 + \omega_M)y^2. \quad (3.15)$$

Si diferenciamos a  $x$  y  $y$  con respecto del número de los desdoblamientos exponenciales,  $N = \ln a$ , de la ecuación de Klein-Gordon (3.8) y de (3.13) obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dN} = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \frac{3}{2}x \left[ (1 - \omega_M)x^2 + (1 + \omega_M)(1 - y^2) \right], \quad (3.16)$$

$$\frac{dy}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3}{2}y \left[ (1 - \omega_M)x^2 + (1 + \omega_M)(1 - y^2) \right], \quad (3.17)$$

donde el parámetro  $\lambda$  se define como

$$\lambda := -\frac{dV}{d\phi} \frac{1}{\kappa V}. \quad (3.18)$$

Además, el parámetro  $\lambda$  es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6}\lambda^2 (\Gamma - 1) x, \quad (3.19)$$

donde  $\Gamma$  esta definido como

$$\Gamma := V \frac{\partial_\phi^2 V}{(\partial_\phi V)^2}. \quad (3.20)$$

Aquí  $\partial_\phi V$  y  $\partial_\phi^2 V$  son la primera y segunda derivadas de  $V$  con respecto de  $\phi$ . Una solución particular es para  $\lambda$  constante, entonces de (3.19) tenemos que  $\Gamma = 1$ , y resolviendo (3.20) para el potencial  $V(\phi)$  se tiene que

$$V(\phi) = V_0 e^{-\kappa\lambda\phi}. \quad (3.21)$$

La dinámica de este modelo se puede entender mejor estudiando los puntos críticos del sistema.

### 3.3. Potencial exponencial

Para entender mejor los sistemas dinámicos, estudiaremos el caso del potencial exponencial (3.21) [48]. Para encontrar los puntos críticos de (3.16) y (3.17) tomamos  $dx/dN = dy/dN = 0$ . Podemos clasificar estos puntos críticos de acuerdo a las propiedades de su estabilidad. Para este caso, cuando  $\lambda$  es constante, tenemos que los puntos críticos son

- (a)  $(x, y) = (0, 0)$ ,  $\Omega_\phi = 0$ ,  $\omega_{\text{eff}} = \omega_i$ ,  $\omega_\phi$  : indefinido.
- (b1)  $(x, y) = (+1, 0)$ ,  $\Omega_\phi = 1$ ,  $\omega_{\text{eff}} = 1$ ,  $\omega_\phi = 1$ .
- (b2)  $(x, y) = (-1, 0)$ ,  $\Omega_\phi = 1$ ,  $\omega_{\text{eff}} = 1$ ,  $\omega_\phi = 1$ .
- (c)  $(x, y) = (\lambda/\sqrt{6}, [1 - \lambda^2/6]^{1/2})$ ,  $\Omega_\phi = 1$ ,  $\omega_{\text{eff}} = -1 + \lambda^2/3$ ,  $\omega_\phi = -1 + \lambda^2/3$ .
- (d)  $(x, y) = (\sqrt{3/2}(1 + \omega_M)/\lambda, [3(1 - \omega_M^2)/2\lambda^2]^{1/2})$ ,  $\Omega_\phi = 3(1 + \omega_M)/\lambda^2$ ,  
 $\omega_{\text{eff}} = \omega_M$ ,  $\omega_\phi = \omega_M$ .

En (a) se tiene que  $\Omega_\phi = 0$ , esto es, en ausencia de quintaesencia. Por otro lado, (b1) y (b2) son casos de energía cinética de quintaesencia dominante. Para este caso  $\rho_\phi$  decrece de la forma  $\rho_\phi \propto a^{-6}$ . Al caso (c) se le conoce como el de campo escalar dominante para  $\lambda^2 < 6$ . El caso (d) es la solución escalar, para esta se debe de cumplir que  $\Omega_\phi < 1$  entonces  $\lambda^2 > 3(1 + \omega_M)$ .

Ahora para encontrar la estabilidad alrededor de los puntos críticos  $(x^{(c)}, y^{(c)})$ , consideramos perturbaciones lineales  $(\delta x, \delta y)$  de la forma

$$x = x^{(c)} + \delta x, \quad y = y^{(c)} + \delta y, \quad (3.22)$$

donde  $x^{(c)}$  y  $y^{(c)}$  son valores críticos constantes. Linealizando el sistema (3.16) y (3.17) a primer orden tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales en forma matricial

$$\frac{d}{dN} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

en donde  $\mathcal{M}$  es una matriz de  $2 \times 2$  cuyas componentes solo dependen de  $x^{(c)}$  y  $y^{(c)}$ , también conocida como la matriz Jacobiana. Ya que si tomamos las funciones

$$f_1(x, y) = \frac{dx}{dN}, \quad f_2(x, y) = \frac{dy}{dN}, \quad (3.24)$$

de tal forma que si evaluamos las funciones  $f_1$  y  $f_2$  en los puntos críticos se tiene que

$$f_1(x^{(c)}, y^{(c)}) = 0, \quad f_2(x^{(c)}, y^{(c)}) = 0,$$

entonces sustituyendo (3.22) en (3.24) se tienen lo siguiente

$$\frac{dx}{dN} = \frac{d\delta x}{dN} = f_1(x^{(c)} + \delta x, y^{(c)} + \delta y), \quad (3.25)$$

$$\frac{dy}{dN} = \frac{d\delta y}{dN} = f_2(x^{(c)} + \delta x, y^{(c)} + \delta y), \quad (3.26)$$

expandiendo a primer orden el lado derecho de (3.25) y (3.26)

$$\frac{d\delta x}{dN} = f_1(x^{(c)}, y^{(c)}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x^{(c)}, y^{(c)}} \delta x + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{x^{(c)}, y^{(c)}} \delta y, \quad (3.27)$$

$$\frac{d\delta y}{dN} = f_2(x^{(c)}, y^{(c)}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x^{(c)}, y^{(c)}} \delta x + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{x^{(c)}, y^{(c)}} \delta y, \quad (3.28)$$

presentando lo anterior en forma matricial

$$\frac{d}{dN} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x^{(c)}, y^{(c)}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{x^{(c)}, y^{(c)}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x^{(c)}, y^{(c)}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{x^{(c)}, y^{(c)}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Así los autovalores de la matriz Jacobiana se pueden calcular de la fórmula general

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right], \quad (3.30)$$

donde  $a_{ij}$  son las componentes de la matriz Jacobiana. Denotamos a la determinante de la Jacobiana como

$$\mathcal{D} \equiv (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \quad (3.31)$$

De esta forma podemos clasificar la estabilidad de los puntos críticos de la siguiente forma:

- (i) Nodo estable:  $\mathcal{D} > 0$  y  $\mu_1 < 0$ ,  $\mu_2 < 0$ .
- (ii) Nodo inestable:  $\mathcal{D} > 0$  y  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$ .
- (iii) Punto silla:  $\mathcal{D} > 0$  y  $\mu_1 < 0$ ,  $\mu_2 > 0$  (o  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 < 0$ ).
- (iv) Espiral estable:  $\mathcal{D} < 0$  y las partes reales de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son negativas.
- (v) Espiral inestable:  $\mathcal{D} < 0$  y las partes reales de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son positivas.

Para el caso que se está estudiando, potencial exponencial, tenemos los siguientes autovalores:

- (a):  $\mu_1 = -\frac{3}{2}(1 - \omega_M)$ ,  $\mu_2 = \frac{3}{2}(1 + \omega_M)$ .
- (b1):  $\mu_1 = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda$ ,  $\mu_2 = 3(1 - \omega_M)$ .
- (b2):  $\mu_1 = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda$ ,  $\mu_2 = 3(1 - \omega_M)$ .
- (c):  $\mu_1 = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 6)$ ,  $\mu_2 = \lambda^2 - 3(1 + \omega_M)$ .
- (d):  $\mu_{1,2} = -\frac{3(1-\omega_M)}{4} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8(1+\omega_M)[\lambda^2 - 3(1+\omega_M)]}{\lambda^2(1-\omega_M)}} \right]$ .

Tomando que  $0 \leq \omega_M < 1$ , entonces la estabilidad de los puntos se clasifica como

- (a): Punto silla.
- (b1): Nodo inestable para  $\lambda < \sqrt{6}$  y punto silla para  $\lambda > \sqrt{6}$ .
- (b2): Nodo inestable para  $\lambda > -\sqrt{6}$  y punto silla para  $\lambda < -\sqrt{6}$ .
- (c): Nodo estable para  $\lambda^2 < 3(1 + \omega_M)$  y punto silla para  $3(1 + \omega_M) < \lambda^2 < 6$ .
- (d): punto silla para  $\lambda^2 < 3(1 + \omega_M)$ , nodo estable para  $3(1 + \omega_M) < \lambda^2 < \frac{24(1+\omega_M)^2}{7+9\omega_M}$  y espiral estable para  $\lambda^2 > \frac{24(1+\omega_M)^2}{7+9\omega_M}$ .

Para la época de radiación ( $\omega_M = 1/3$ ) y de materia ( $\omega_M = 0$ ) dominantes se puede llevar a cabo ya sea para (a) o para (d), ya que están permitidos estos valores de  $\omega_M$ . Tenemos que  $\Omega_\phi < 1$  entonces  $\lambda^2 > 3(1 + \omega_M)$  por lo que la solución para el

caso **(d)**, que de la misma forma es un punto silla. Para este caso se tiene que  $\Omega_\phi \neq \text{CONSTANTE}$  en todo punto.

Para el caso **(c)** se tiene el punto estable cuando se cumple  $\omega_M < -1/3$  entonces  $\lambda^2 < 2$ . Por otro lado, si se cumple lo anterior la solución para **(d)** no se permite, ya que  $\Omega_\phi > 1$ .

### 3.4. Coordenadas polares

Se definen otras dos variables, además de  $x$  y  $y$ , de (3.9), como lo hacen en [2]

$$y_1 \equiv -2\sqrt{2}\frac{\partial_\phi V^{1/2}}{H}, \quad y_2 \equiv -4\sqrt{3}\frac{\partial_\phi^2 V^{1/2}}{\kappa H}. \quad (3.32)$$

Si derivamos  $x$ ,  $y$  y  $y_1$  con respecto del número de los desdoblamientos exponenciales  $N = \ln a$ , y utilizando las ecuaciones de Friedmann y Klein-Gordon, tenemos

$$x' = \frac{dx}{dN} = -\frac{3}{2}x(1 - \omega_T) + \frac{1}{2}yy_1, \quad (3.33)$$

$$y' = \frac{dy}{dN} = \frac{3}{2}y(1 + \omega_T) - \frac{1}{2}xy_1, \quad (3.34)$$

$$y_1' = \frac{dy_1}{dN} = \frac{3}{2}y_1(1 + \omega_T) + xy_2, \quad (3.35)$$

tomando en cuenta la constricción de Friedmann  $\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\phi = 1$  y considerando que la ecuación de estado total es

$$\omega_T = \frac{P_T}{\rho_T} = \frac{1}{3}\Omega_r + x^2 - y^2. \quad (3.36)$$

Se introduce un cambio de coordenadas polares para  $x$  y  $y$  de la forma

$$x = \Omega_\phi^{1/2} \sin(\theta/2), \quad (3.37)$$

$$y = \Omega_\phi^{1/2} \cos(\theta/2), \quad (3.38)$$

donde  $\theta$  representa un grado angular de libertad. Así, de (3.33), (3.34) y (3.35)

se tienen las ecuaciones diferenciales

$$\theta' = \frac{d\theta}{dN} = -3 \sin \theta + y_1, \quad (3.39)$$

$$\Omega'_\phi = \frac{d\Omega_\phi}{dN} = 3\Omega_\phi(\omega_T - \omega_\phi), \quad (3.40)$$

$$y'_1 = \frac{3}{2}y_1(1 + \omega_T) + \Omega_\phi^{1/2} \sin(\theta/2) y_2. \quad (3.41)$$

De (3.12), la ecuación de estado de quintaesencia se escribe como

$$\omega_\phi = -\cos \theta. \quad (3.42)$$

Dado el potencial se puede encontrar  $y_2$  de la siguiente forma. Empezamos cal-

### Relación entre el potencial $V(\phi)$ y parámetro $y_2$

Referencias	Potencial $V(\phi)$	$y_2$
[49]	$A^4 (1 + B\phi)^{2\lambda}$	$\frac{1-\lambda}{2\lambda} y_1^2/y$
[50]	$A^4 \exp(-\phi^2/\lambda^2)$	$\frac{12}{\kappa^2 \lambda^2} y - \frac{1}{2} y_1^2/y$
[51], [52]	$A^4 [1 + \cos(\phi/\lambda)]$	$\frac{3}{\kappa^2 \lambda^2} y$
[53]	$A^{4+\lambda} \phi^{-\lambda}$	$-\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) y_1^2/y$
[29]	$A^4 \exp(2\lambda\kappa^2\phi^2)$	$-24\lambda y - \frac{1}{2} y_1^2/y$
[54], [55]	$A^4 [1 - \exp(-\lambda\kappa\phi)]^2$	$-\sqrt{6}\lambda y_1$
[56]	$A^4 \cosh(\lambda\kappa\phi)$	$-6\lambda^2 y + \frac{1}{2} y_1^2/y$
[31]	$A^4 [\cosh(\lambda\kappa\phi)]^{-1}$	$6\lambda^2 y - \frac{3}{2} y_1^2/y$
[57]	$A^4 [\sinh(\lambda_1\kappa\phi)]^{-\lambda_2}$	$6\lambda_1^2 \lambda_2 y - (1/\lambda_2) (1 + \lambda_2/2) y_1^2/y$
[28]	$A^4 (e^{\lambda_1\kappa\phi} + e^{\lambda_2\kappa\phi})$	$6\lambda_1 \lambda_2 y + \sqrt{6} (\lambda_1 + \lambda_2) y_1 + \frac{1}{2} y_1^2/y$

Tabla 3.1: Lista de potenciales de quintaesencia que se pueden encontrar en la literatura y su correspondiente  $y_2$  (ultima columna). A y B son constantes de integración  $\kappa^2 = 8\pi G$  y  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son parámetros dinámicos [2].

culando la primera derivada de  $V^{1/2}$  con respecto de  $\phi$ . Posteriormente se calcula la segunda derivada, para expresar esta en términos de  $V^{1/2}$  y de la primera derivada, luego se sustituye en la definición de  $y_2$  dada en (3.32) para finalmente sustituir  $y$  y  $y_1$  como se definen en (3.9) y (3.32). En la Tabla 3.1 se presenta una lista de potenciales de quintaesencia que se encuentra en la literatura para calcular su respectivo  $y_2$ . De esta se puede asumir una forma general para  $y_2$ .

$$y_2 = y \sum_{i=0}^n \alpha_i \left( \frac{y_1}{y} \right)^i, \quad (3.43)$$

donde  $\alpha_i$  son coeficientes constantes.

### 3.4.1. Proceso inverso

Ya se vio el caso en que se tiene el potencial para encontrar la forma de  $y_2$ . Pero si lo que se busca es el potencial teniendo  $y_2$ , en este caso se puede obtener el potencial de la ecuación (3.43) sustituyendo  $y$ ,  $y_1$  y  $y_2$  en términos del potencial  $V(\phi)$  como se definieron en (3.9) y (3.32). De esta forma se obtiene la ecuación diferencial

$$\partial_{\kappa\phi}^2 V^{1/2} + \frac{V^{1/2}}{12} \sum_{i=0}^n \alpha_i \left( -2\sqrt{6} \frac{\partial_{\kappa\phi} V^{1/2}}{V^{1/2}} \right)^i = 0, \quad (3.44)$$

donde la derivada se calcula con respecto a  $\kappa\phi$ . Se usa la función auxiliar

$$\gamma = \frac{y_1}{y} = -2\sqrt{6} \frac{\partial_{\kappa\phi} V^{1/2}}{V^{1/2}}, \quad (3.45)$$

para así poder escribir la ecuación (3.44) de la forma

$$\partial_{\kappa\phi} \gamma = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[ \gamma^2 + 2 \sum_{i=0}^n \alpha_i \gamma^i \right]. \quad (3.46)$$

Se reprodujo la Tabla 3.2 usando éste proceso inverso que presentan en [2] para encontrar los potenciales de quintaesencia con los parámetros dinámicos  $\alpha_i$  dados. Estos son los potenciales que se obtienen desarrollando a segundo orden la ecuación (3.46).

**Tabla de potenciales**

Clase	Parámetros dinámicos	Potencial $V(\phi)$
<b>Ia</b>	$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq -\frac{1}{2}$	$(A + B\phi)^{\frac{2}{2\alpha_2+1}}$
<b>Ib</b>	$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\frac{1}{2}$	$A^2 e^{2B\phi}$
<b>IIa</b>	$\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq -\frac{1}{2}$	$A^2 \cos \left[ \sqrt{\alpha_0 \kappa^2 (1 + 2\alpha_2)} (\phi - B) / 2\sqrt{3} \right]^{\frac{2}{2\alpha_2+1}}$
<b>IIb</b>	$\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\frac{1}{2}$	$A^2 \exp(-\kappa^2 \alpha_0 \phi^2 / 12) \exp(2B\phi)$
<b>IIIa</b>	$\alpha_0 = 0, \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq -\frac{1}{2}$	$\left[ A \exp(\alpha_1 \kappa \phi / \sqrt{6} + B) \right]^{\frac{2}{2\alpha_2+1}}$
<b>IIIb</b>	$\alpha_0 = 0, \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = -\frac{1}{2}$	$A^2 \exp \left[ 2B \exp(\kappa \alpha_1 \phi / \sqrt{6}) \right]$
<b>IVa</b>	$\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq -\frac{1}{2}$	$A^2 \exp \left( \frac{\kappa \alpha_1 \phi}{\sqrt{6}(2\alpha_2+1)} \right) \cdot \left\{ \cos \left[ \left( -\frac{\kappa^2 \alpha_1^2}{24} + \frac{\kappa^2 \alpha_0}{12} (2\alpha_2 + 1) \right)^{\frac{1}{2}} (\phi - B) \right] \right\}^{\frac{2}{2\alpha_2+1}}$
<b>IV</b>	$\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = -\frac{1}{2}$	$A^2 \exp \left[ \frac{\kappa \alpha_0 \phi}{\sqrt{6} \alpha_1} + 2B \exp \left( \frac{\kappa \alpha_1 \phi}{\sqrt{6}} \right) \right]$

Tabla 3.2: Una lista de potenciales de quintaesencia que se obtienen del proceso inverso con los parámetros dinámicos  $\alpha_i$  dados, donde  $A$  y  $B$  son constantes de integración. Estos se pueden obtener desarrollando las ecuaciones (3.43), (3.44) y/o (3.46) a segundo orden (*i.e.* para  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ) [2].

### 3.4.2. Ejemplo: Clase Ib

Analicemos el caso en que  $\gamma$  es constante así tenemos que  $\partial_{\kappa\phi}\gamma = 0$ , siguiendo el proceso inverso encontramos el potencial

$$V(\phi) = A^2 e^{2B\phi}. \quad (3.47)$$

Si vemos la Tabla 3.2 tenemos que este potencial es el de clase **Ib** con  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  y  $\alpha_2 = -1/2$  y de (3.43) tenemos que

$$y_2 = -\frac{1}{2} \frac{y_1^2}{y}. \quad (3.48)$$

Para ver los pasos intermedios véase el **Apéndice B.3**. Encontramos un punto crítico en  $\phi_c$  derivando el potencial e igualando a cero se tiene que  $e^{2B\phi_c} = 0$ , para que esto se cumpla  $2B\phi_c$  tiende a menos infinito entonces  $\phi_c \rightarrow -\infty$ .

Luego, para obtener la masa del campo de quintaesencia se calcula la segunda derivada del potencial

$$m_\phi^2 = \partial_\phi^2 V(\phi) = 4A^2 B^2 e^{2B\phi}. \quad (3.49)$$

Así la masa  $m_\phi$  es función del campo escalar  $\phi$ . Luego, vemos que si  $\phi = 0$ , se tiene que  $V(0) = A^2 \neq 0$ . Ya que si  $A = 0$  el potencial  $V(\phi) = 0$  para todo  $\phi$ , y esto es cuando no se tiene potencial. Y si  $B = 0$  se tiene un potencial constante de la forma  $V(\phi) = A^2$  y  $y_1$  toma la forma

$$y_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{H} AB e^{B\phi} = -\frac{\sqrt{2}}{H} m_\phi. \quad (3.50)$$

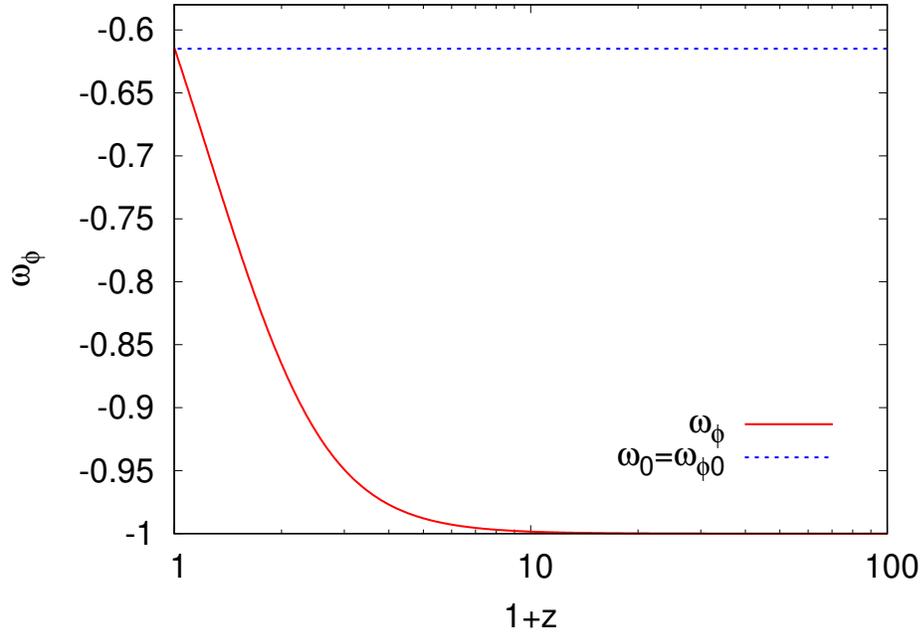


Figura 3.1: Gráfica de la evolución de la ecuación de estado contra  $1+z$  para el potencial  $V(\phi) = A^2 e^{2B\phi}$ , la solución numérica se obtuvo con el programa de computadora **CLASS**.

Así  $A$  y  $B$  pueden tomar cualquier valor distinto de 0 e  $\infty$ .

Uno de los parámetros cosmológicos mas importantes en el estudio de energía oscura es la ecuación de estado. Como ya hemos visto, la ecuación de esta se escribe como  $\omega_\phi = -\cos\theta$ , así obtenemos una expresión de la ecuación de estado que nos dice como es que evoluciona. En la Figura 3.1 se graficó  $\omega_\phi$  contra el corrimiento al rojo  $1+z$ . La solución numérica se calculó con el programa **CLASS** para obtener las graficas de la evolución de la ecuación de estado.

Uno de los objetivos del trabajo fue entender y usar de forma eficiente el programa **classQuint-master**. Para esto se reprodujo las graficas de la evolución de la ecuación de estado para el potencial de clase **Ia** de [2] para distintos valores  $\alpha_2$  como se muestra

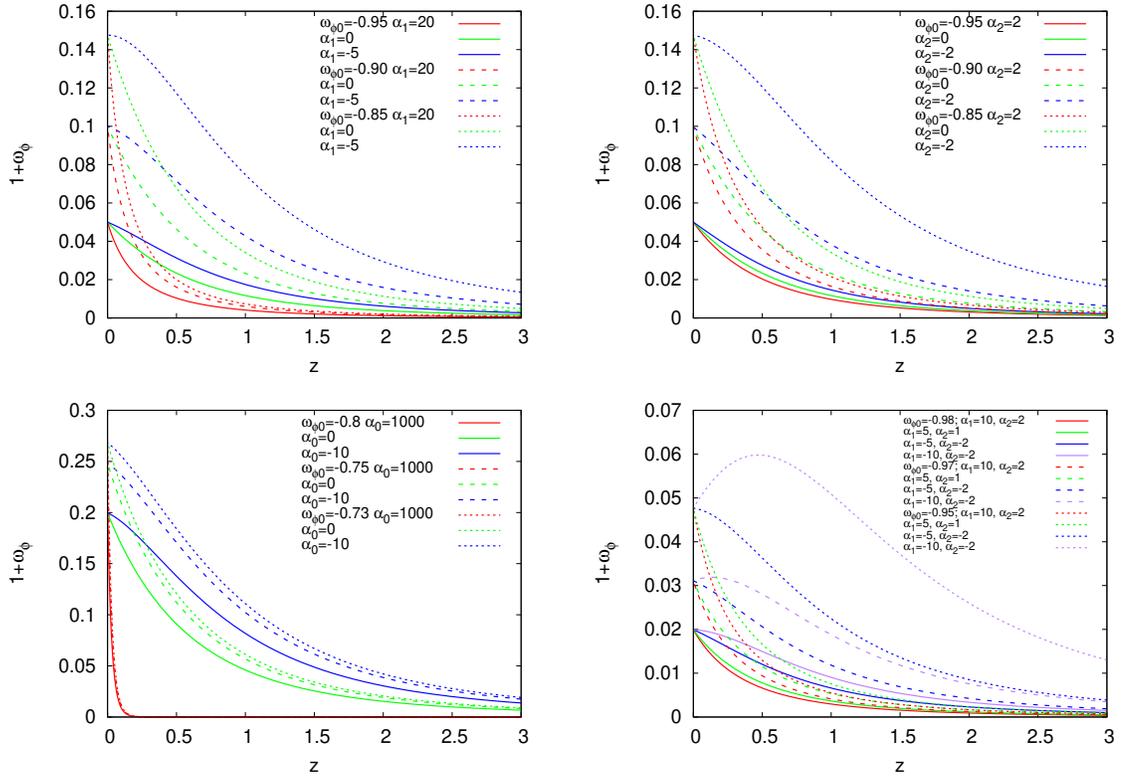


Figura 3.2: Gráfica de la ecuación de estado  $1 + \omega_\phi$  del campo de quintaesencia contra el corrimiento al rojo  $z$  para distintos valores de los parámetros dinámicos  $\alpha$ 's. Las dos imágenes de parte superior son reproducciones del artículo [2] y las dos de la parte inferior se obtuvieron variando los valores de  $\omega_{\phi 0}$  y  $\alpha_2$ 's con el código **class.QuintF-master**, son de autoría propia.

en la Figura 3.2 (dos graficas superiores). Además se variaron los valores de  $\alpha_0$  y  $\alpha_2$  para construir las graficas de la evolución de la ecuación de estado para el potencial de clase IIa (dos graficas inferiores) la primera se hizo para  $\alpha_2 = 0$  y distintos valores para  $\alpha_0$  y la segunda se hizo para distintos valores de  $\alpha_0$  y  $\alpha_2$ .

---

# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo se presentan los resultados del trabajo. Partiendo de los resultados que presentan en [3], vemos que potencial se aproxima de la Tabla 3.2 y con lo que se estudió en el Capítulo 2 obtenemos los resultados numéricos con ayuda de Class para poder comparar nuestros resultados con lo que obtuvieron en dicho artículo.

### 4.1. Modelo con potencial $V(\phi) \propto \phi^{-\alpha}$

El modelo  $\Lambda$ CDM espacialmente plano de un universo en expansión acelerada, la constante cosmológica  $\Lambda$  es equivalente a un fluido ideal de energía oscura con ecuación de estado  $\omega_0 = -1$ .

Sin embargo, cabe la posibilidad que el Modelo  $\Lambda$ CDM plano no sea tan compatible con mediciones cosmológicas diferentes o más grandes. El modelo más simple, aunque físicamente inconsistente, y ampliamente usado es el de XCDM (por sus siglas en inglés X-Cold Dark Matter) donde su ecuación de estado relaciona la presión y la densidad de energía del fluido de energía oscura como  $p_X = \omega_0 \rho_X$ . En [3] trabajaron con este modelo, además se consideró el modelo de quintaesencia donde asumen hipersuperficies espaciales planas con potencial

$$V(\phi) = \kappa' m_P^2 \phi^{-\alpha}, \quad (4.1)$$

donde  $\kappa'$  está determinada en términos de otros parámetros,  $m_P$  es la masa de Planck y  $\alpha$  es otro parámetro dinámico. Realizaron el mismo análisis de sistemas dinámico,

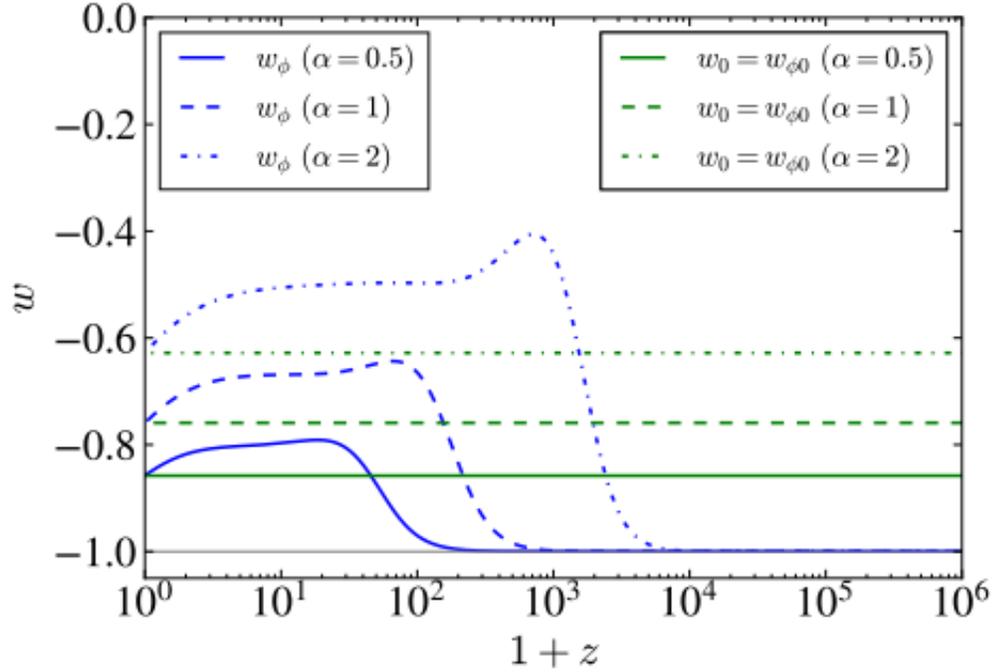


Figura 4.1: Las líneas azules representan la evolución de la ecuación de estado del campo escalar y las líneas en verde representan la evolución de la ecuación de estado del modelo XCDM. Aquí  $\omega_0$  del correspondiente modelo XCDM se ajusta con el valor inicial de  $\omega_{\phi_0}$  del modelo escalar  $\phi$ CDM. Además se muestra en la línea gris la evolución de la ecuación de estado del modelo  $\Lambda$ CDM [3].

que se estudio en el capitulo anterior, y usando los datos de el Planck 2015 CMB obtuvieron las gráficas de la evolución de la ecuación de estado para distintos valores de  $\alpha$  (Figura 4.1).

## 4.2. Comparando el potencial $V(\phi) \propto \phi^{-\alpha}$ con el potencial de clase Ia

Nuestro trabajo consistió en usar el método estudiado por [2] donde se cambio a coordenadas polares y con los potenciales que se obtuvieron de la Tabla 3.2 se comparó

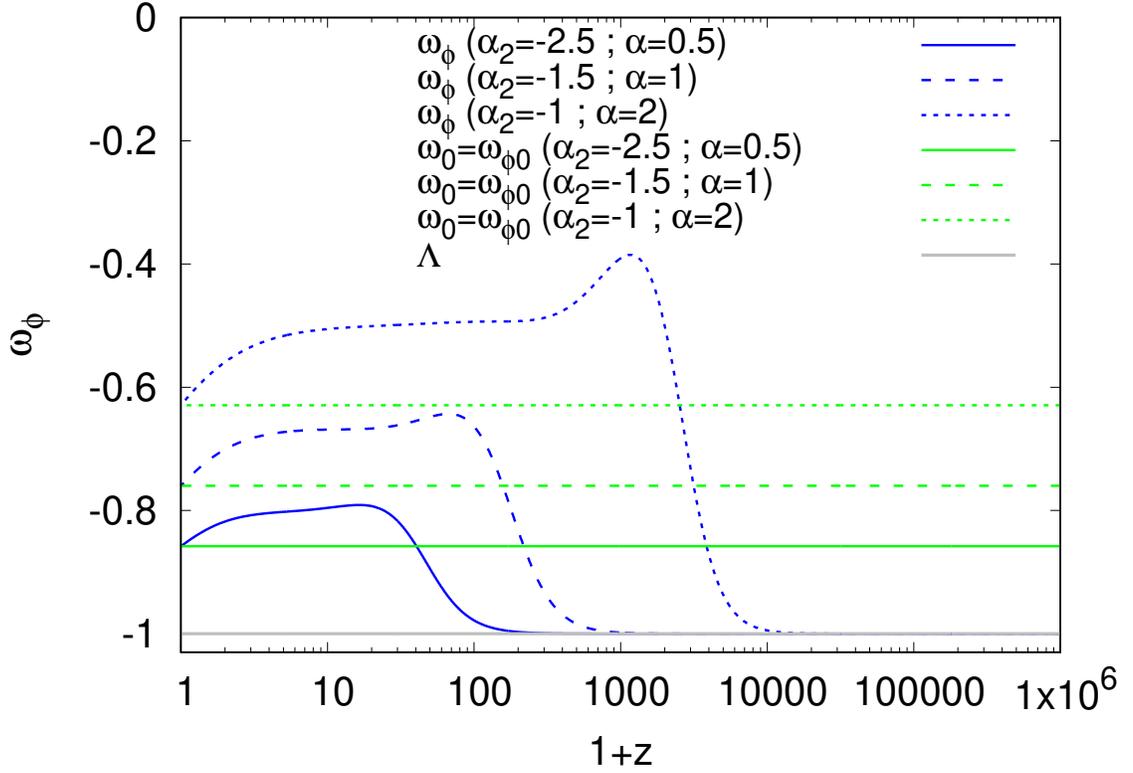


Figura 4.2: En esta figura se muestra la gráfica de la ecuación de estado donde el objetivo era replicar la Figura 4.1. En este caso se obtuvo para los tres valores del parámetro cosmológico  $\alpha_2$  que se muestran. Para obtener estos resultados se usó el código **classQuint-master**.

con el potencial (4.1). Así se obtuvo que para el potencia de clase **Ia**

$$V(\phi) = (A + B\phi)^{\frac{2}{2\alpha_2+1}}, \quad (4.2)$$

tenemos una relación entre  $\alpha$  y  $\alpha_2$  de la forma:

$$\alpha = \frac{2}{2\alpha_2 + 1}. \quad (4.3)$$

Así para cada valor que toma  $\alpha$ , como se muestran en la Figura 4.1, le corresponden un valor diferente a  $\alpha_2$  (para  $\alpha = 0,5$  se tiene a  $\alpha_2 = -5/2$ , para  $\alpha = 1$  se tiene a  $\alpha_2 = -3/2$ , para  $\alpha = 2$  se tiene a  $\alpha_2 = -1$ ). De esta forma se obtiene la gráfica:

Si comparamos las Figuras 4.1 y 4.2 podemos encontrar algunas similitudes en las curvas. No podemos aventurarnos a decir que son idénticas, debido a que en el artículo [3] los autores omiten el valor de  $\kappa'$  para cada caso. Por lo que en un principio, no se pudo especificar las condiciones iniciales para nuestro potencial de clase **Ia**. Del potenciales de clase **Ia**, tomamos la constante de integración  $A = 0$ , y para la otra constante de integración  $B$ , se tiene que:

$$B = \left(\kappa' m_P^2\right)^{\frac{2\alpha_2+1}{2}}. \quad (4.4)$$

Como ya se dijo, en la literatura no proporcionan suficiente información del parámetro  $\kappa'$ , solo que esta determinado en términos de otros parámetros. Analizando las condiciones iniciales de  $y$  y  $y_1$  como se dio el cambio de variables en (3.9) y (3.32) tenemos que para un caso inicial

$$y_i = \frac{\kappa V^{1/2}(\phi_i)}{\sqrt{3}H_i} \quad y \quad y_{1i} = -2\sqrt{2} \frac{\partial_\phi V^{1/2}(\phi_i)}{H_i}. \quad (4.5)$$

Sustituyendo el potencial **Ia** (4.2) y tomando la constante de integración  $A = 0$

$$y_i = \frac{\kappa}{\sqrt{3}H_i} (B\phi_i)^{\frac{1}{2\alpha_2+1}} \quad y \quad y_{1i} = -\frac{2\sqrt{2}}{H_i} \frac{B}{2\alpha_2+1} (B\phi_i)^{-\frac{2\alpha_2}{2\alpha_2+1}}. \quad (4.6)$$

Ahora se combinan ambas expresiones, para obtener la constante de integración  $B$

$$B = -\frac{y_{1i}H_i}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}H_i y_i}{\kappa}\right)^{2\alpha_2} (2\alpha_2 + 1). \quad (4.7)$$

De esta forma obtuvimos los valores de la constante de integración  $B$  para los tres casos

$$\text{Para } \alpha_2 = -2,5; \quad B = 5,2014 \times 10^{-164} \text{N}^{-2} \text{m}^{-4}, \quad (4.8)$$

$$\text{Para } \alpha_2 = -1,5; \quad B = 1,1096 \times 10^{-97} \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}, \quad (4.9)$$

$$\text{Para } \alpha_2 = -1; \quad B = 1,1824 \times 10^{-63} \text{N}^{-1/2} \text{m}^{-1}. \quad (4.10)$$

En la Fig. 4.3 mostramos las temperaturas de anisotropías de el CMB  $\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$  contra el momento multipolar  $\ell$  obtenidos por la solución numérica del programa

`classQuint-master` (líneas solidas de colores) junto con los datos de observación COM PowerSpect CMB-TT-full y COM PowerSpect CMB-TT-binned, puntos experimentales.

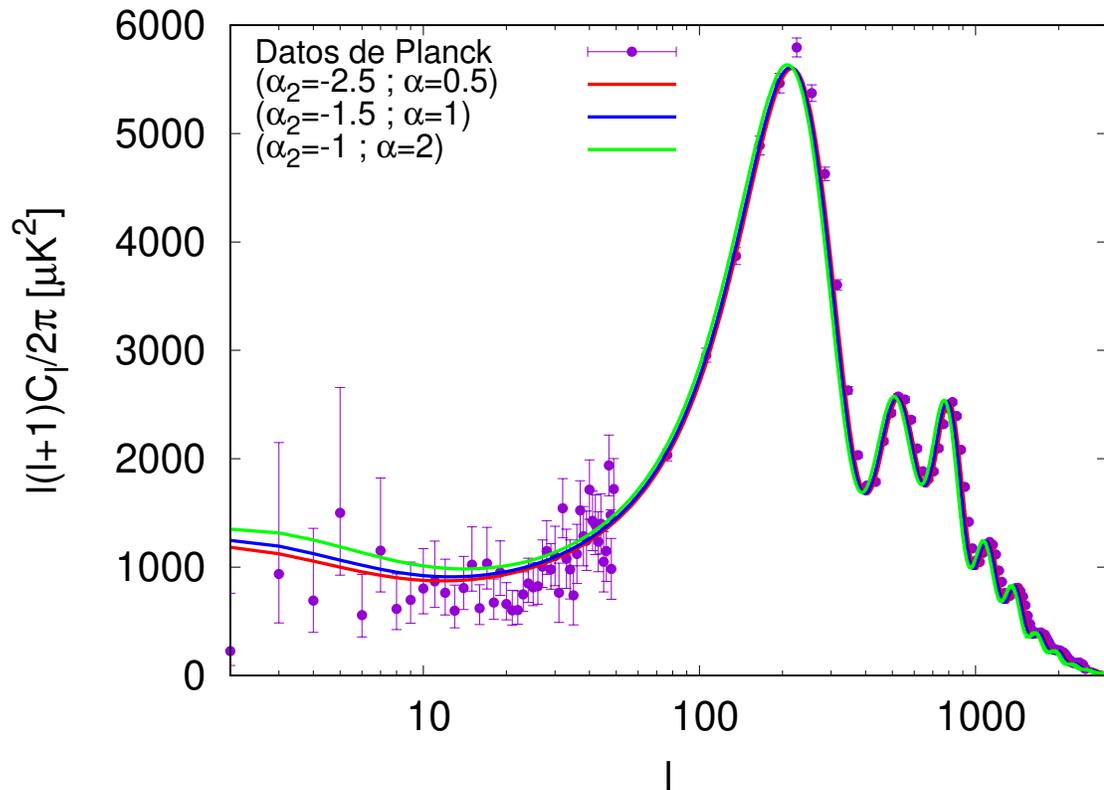


Figura 4.3: El mejor ajuste del espectro de potencias del CMB (siglas en ingles, de Cosmic Microwave Background). Las líneas solidas de colores se obtuvieron de los datos numéricos del programa `classQuint-master`, la línea roja corresponde a  $\alpha_2 = -2,5$ , la línea azul corresponde a  $\alpha_2 = -1,5$  y la línea verde corresponde a  $\alpha_2 = -1$ . Los puntos experimentales se obtuvieron de los datos proporcionados por COM PowerSpect CMB-TT-full y COM PowerSpect CMB-TT-binned.

En la Figura 4.4 se muestra la gráfica del módulo de distancia. Las líneas de color rojo, azul y verde corresponden al módulo de distancia para  $\alpha_2 = -2,5$ ,  $\alpha_2 = -1,5$  y  $\alpha_2 = -1$  respectivamente. Vemos que las líneas están dentro de los puntos de los datos obtenidos por **Union - Supernova Cosmology Project**.

También se utilizó el código `Monte Python`, que es un código de tipo **Monte-carlo** para la extracción de parámetros cosmológicos. Contiene códigos likelihood de

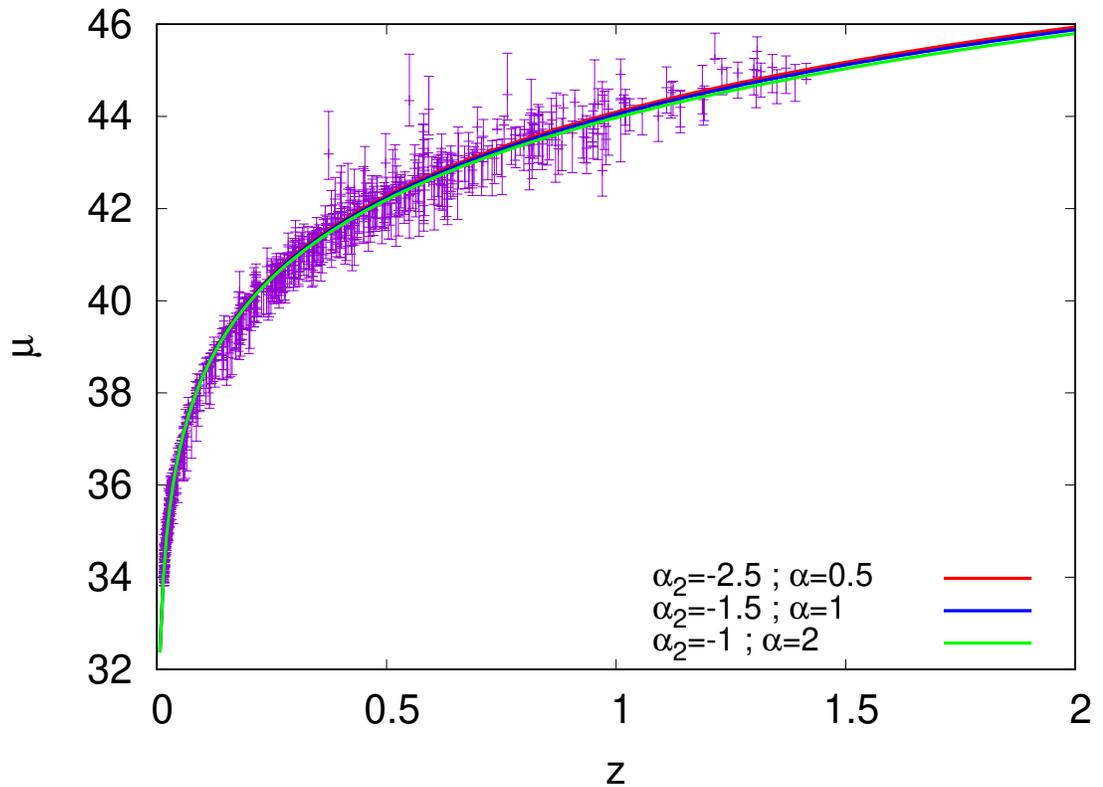


Figura 4.4: Gráfica del Módulo de Distancia para el potencial de clase **Ia** para los tres valores de los parámetros  $\alpha_2$  (línea roja para  $\alpha_2 = -2,5$ , línea azul para  $\alpha_2 = -1,5$  y línea verde para  $\alpha_2 = -1$ ). Los puntos experimentales se obtienen de los datos proporcionados por **Union - Supernova Cosmology Project**.

los experimentos más recientes e interfaces con el código CLASS para calcular los observables cosmológicos. El código está escrito en el lenguaje PYTHON, que es un lenguaje de alto nivel. También envuelve rutinas C eficientes para una manipulación numérica intensiva. La forma en la que funcionan estos códigos es la siguiente: el usuario tiene que decirle cuantos pasos tiene que calcular, entonces el código empieza a calcular la probabilidad en el espacio fase, *i.e.* agarra un punto y calcula la probabilidad de que se bueno o malo el calculo en ese punto, si es bueno se mueve un punto cercano para calcular la probabilidad, si es mala se regresa al punto anterior donde calculó que era buena la probabilidad. Eso lo hace dependiendo de los pasos que el usuario le indique.

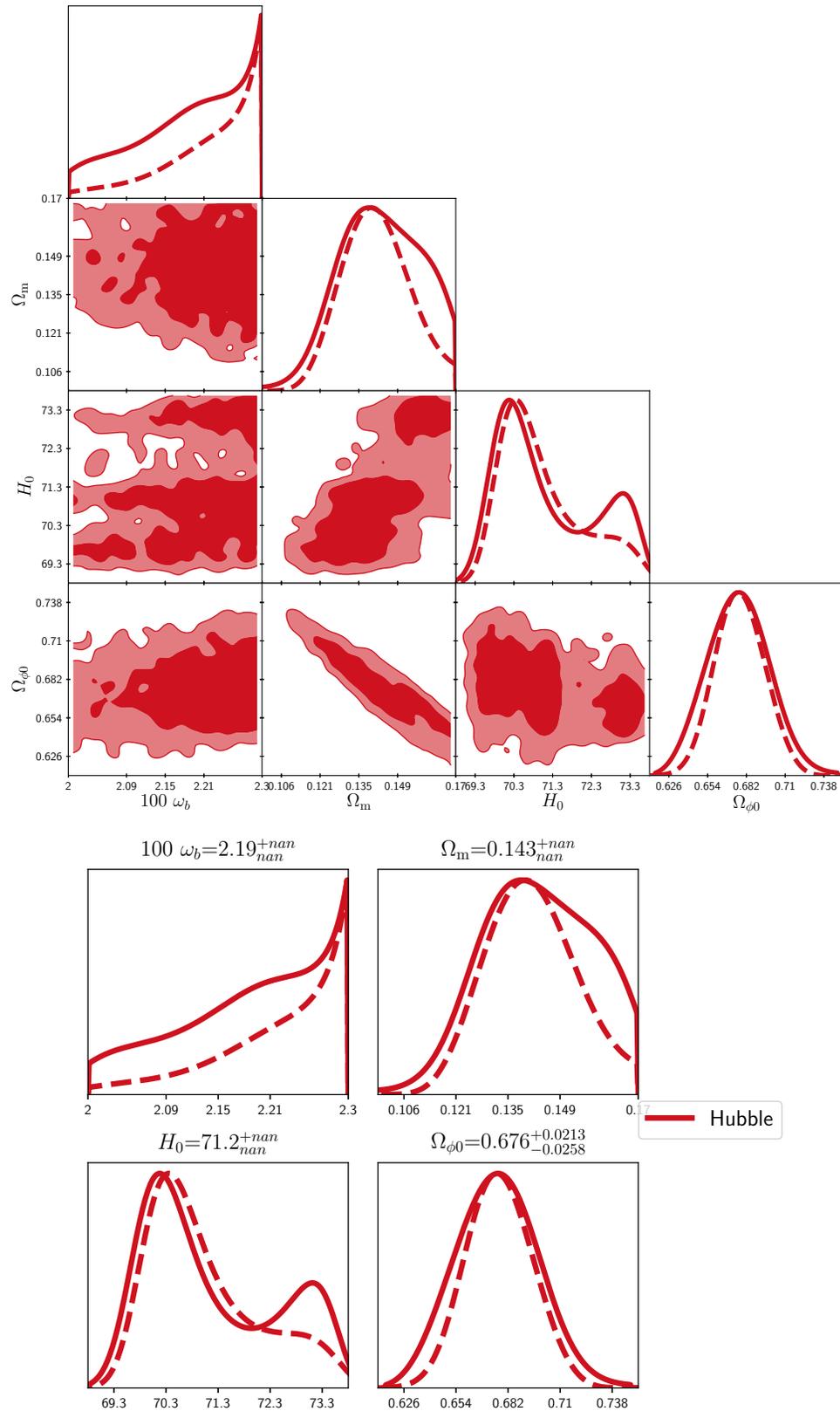


Figura 4.5: Diagrama triangular y las graficas gaussianas que corresponde para el parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -2,5$ .

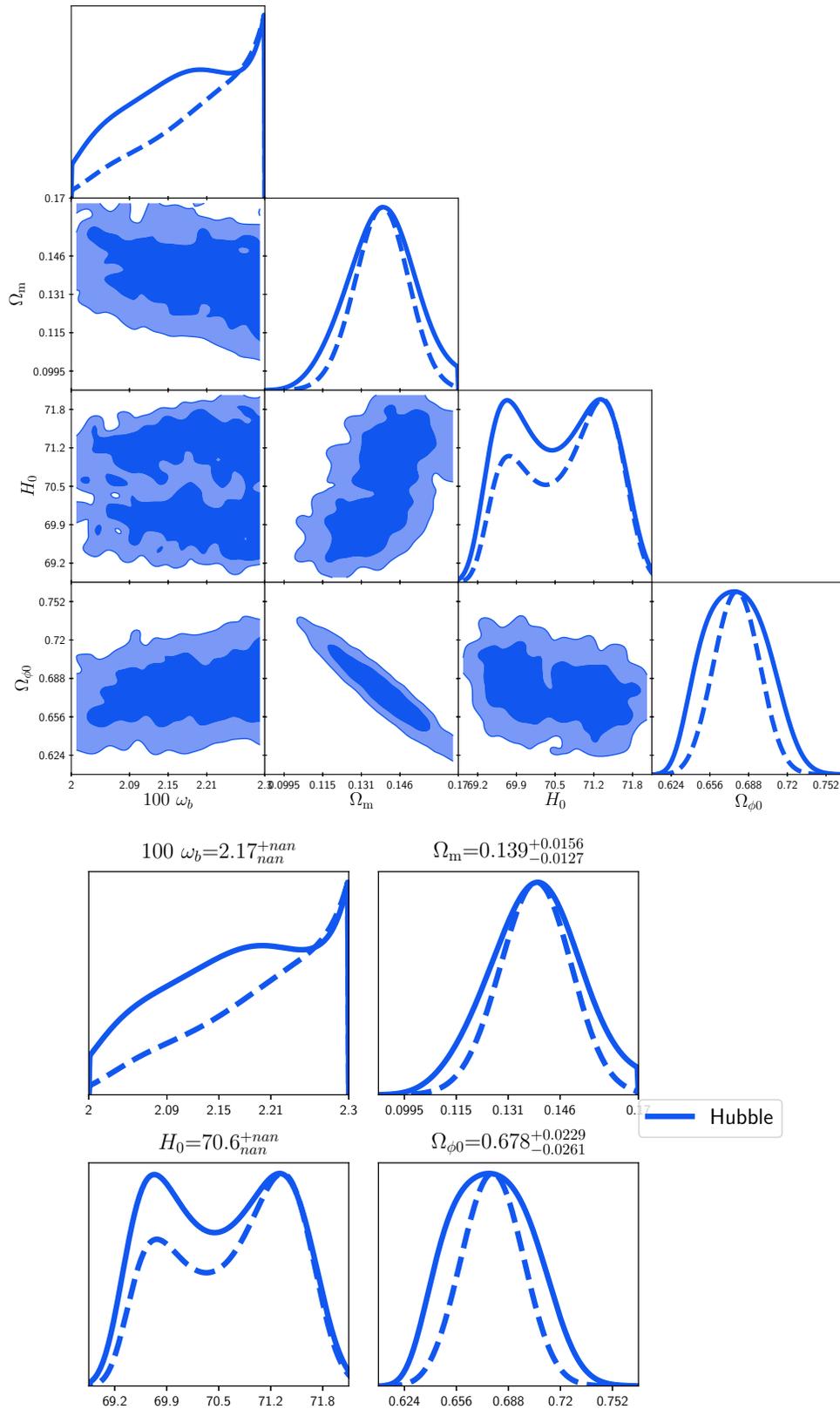


Figura 4.6: Diagrama triangular y las graficas gaussianas que corresponde para el parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -1,5$ .

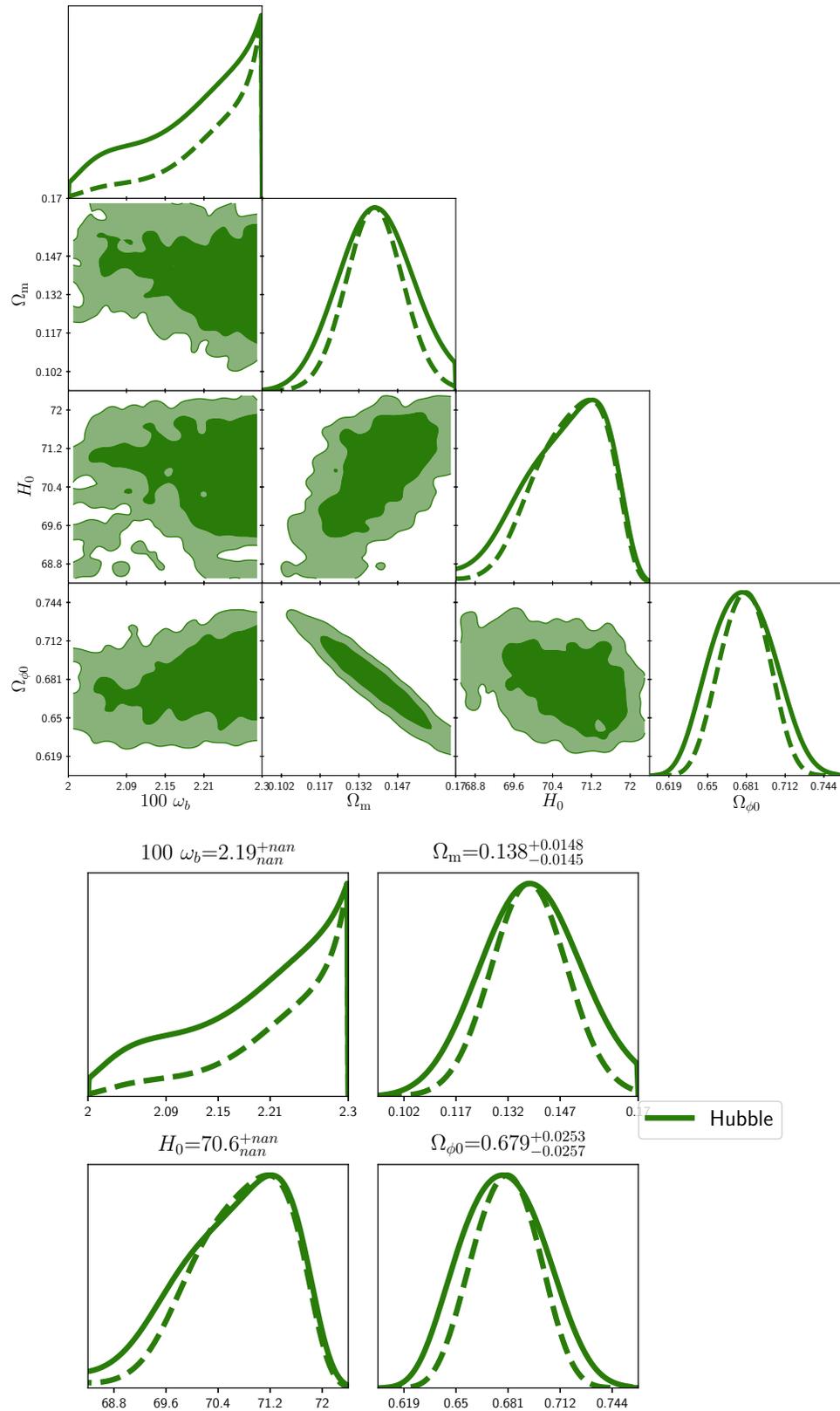


Figura 4.7: Diagrama triangular y las graficas gaussianas que corresponde para el parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -1$ .

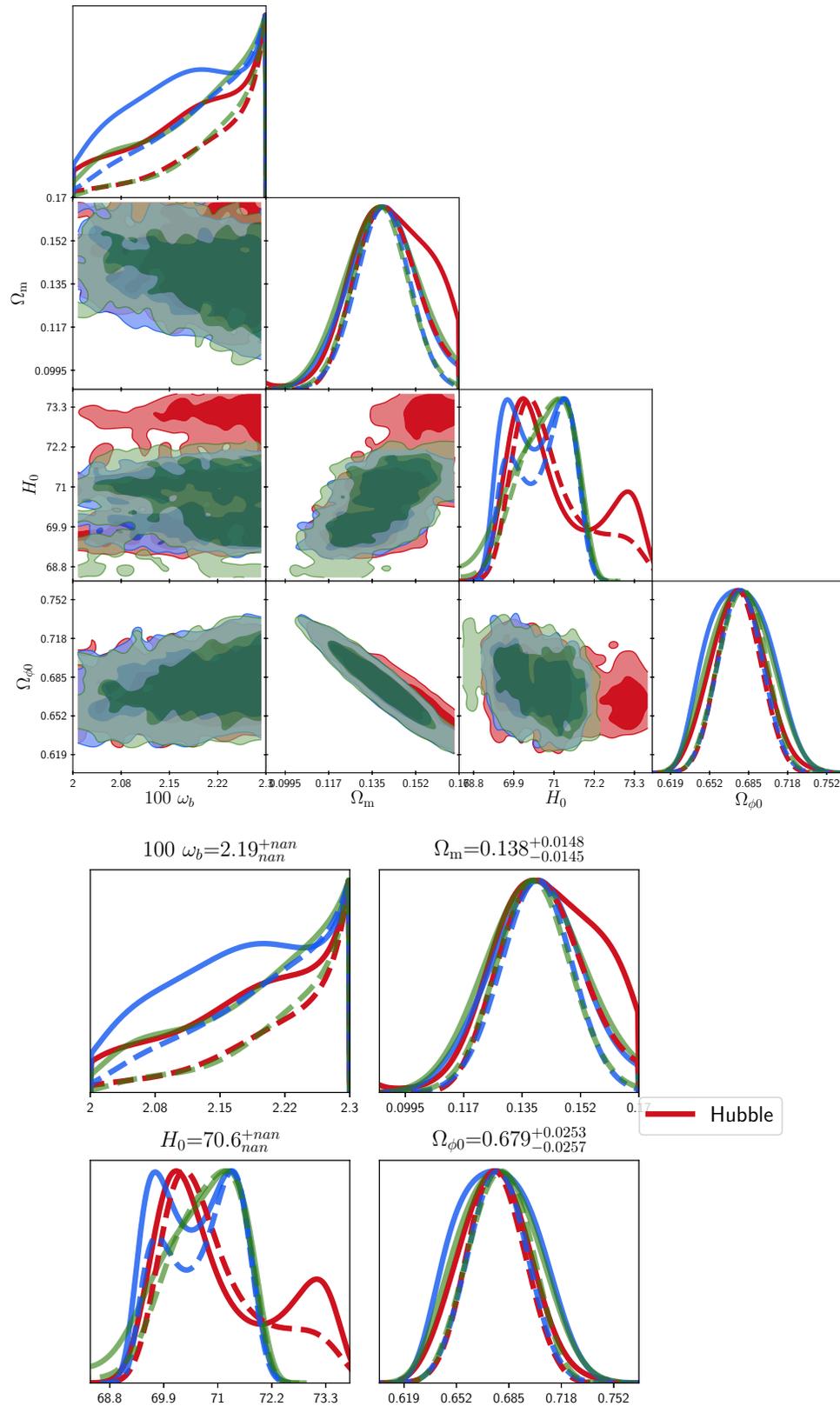


Figura 4.8: Diagrama triangular de el empalme de los tres anteriores,  $\alpha_2 = -2,5$ ,  $\alpha_2 = -1,5$  y  $\alpha_2 = -1$ .

En las Figuras 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 se muestra diagramas triangulares de las restricciones de los parámetros  $\Omega_m$ ,  $H_0$ ,  $\Omega_{\phi 0}$  y  $\omega_b$ , las de color rojo son para  $\alpha_2 = -2,5$ , las de color azul son para  $\alpha_2 = -1,5$  y las de verde son para  $\alpha_2 = -1$ . La estimación de probabilidad media se muestra como la línea punteada para cada caso, podemos observar una tendencia. Las dos líneas, solida y punteada, no empalman por que los pasos que se le indico al programa (cien mil pasos) fueron pocos, para tener una tendencia más clara se necesitan aproximadamente un millón de pasos.

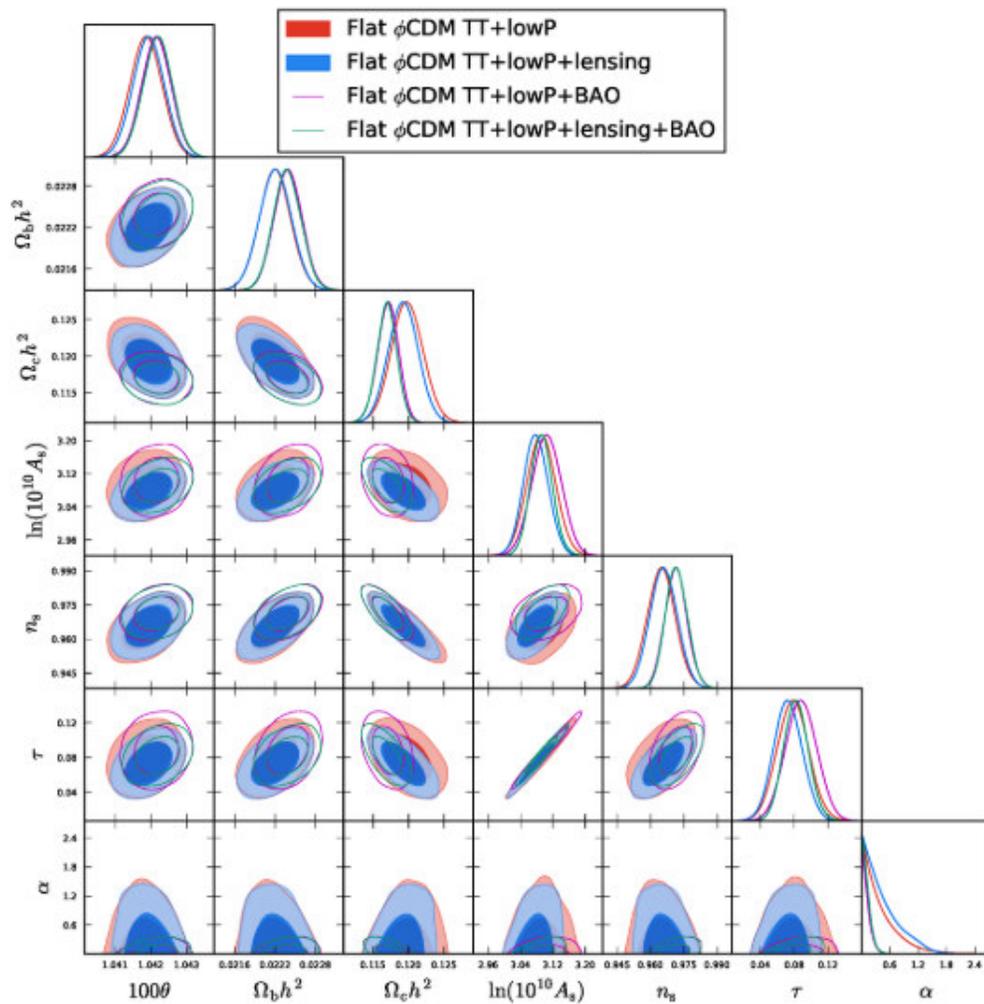


Figura 4.9: Este diagrama triangular se extrajo de [3] para comparar con nuestros resultados. Pudimos concluir que se requieren mas pasos para tener gráficas más definidas. Lo que nos lleva al siguiente diagrama.

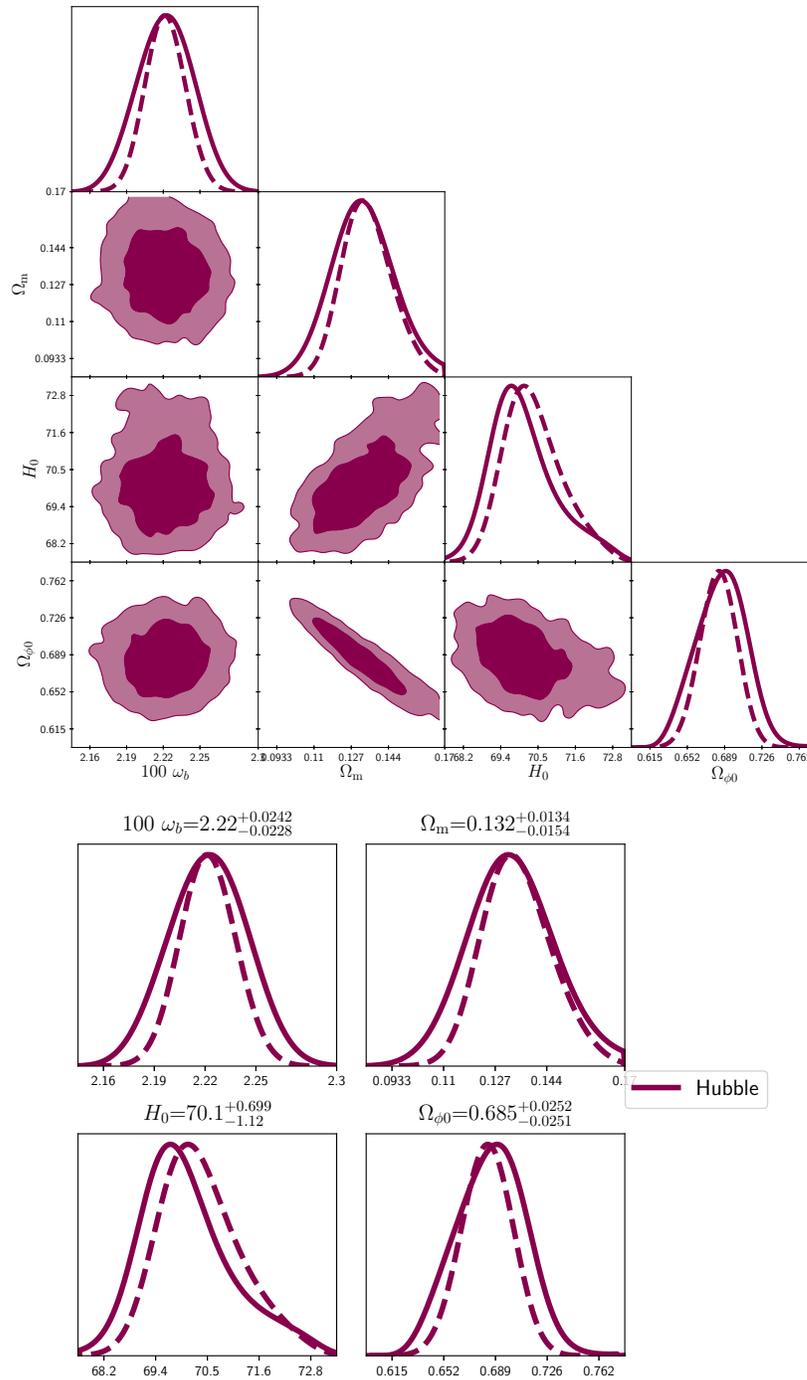


Figura 4.10: Diagrama triangular para el parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -2,5$  con un millón de pasos. Podemos ver que las gráficas están más definidas.

La figura 4.9 se extrajo de la literatura [3]. Si comparamos las Figuras 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9 vemos que podemos mejorar las imágenes con más pasos. Así se obtuvo el diagrama de la Figura 4.10, vemos una tendencia más clara de las gaussianas y de las distribuciones de probabilidad tenemos una imagen más definida.

Como se dijo anteriormente, tenemos una familia de soluciones para cada valor de  $\alpha_2$  dependiendo de las condiciones iniciales  $B$ . Por lo que, podemos dejar fijo  $\alpha_2$  y tomar distintos valores de  $B$ , de esta forma tenemos las siguientes gráficas de la evolución de la ecuación de estado para los tres valores de  $\alpha_2$ :

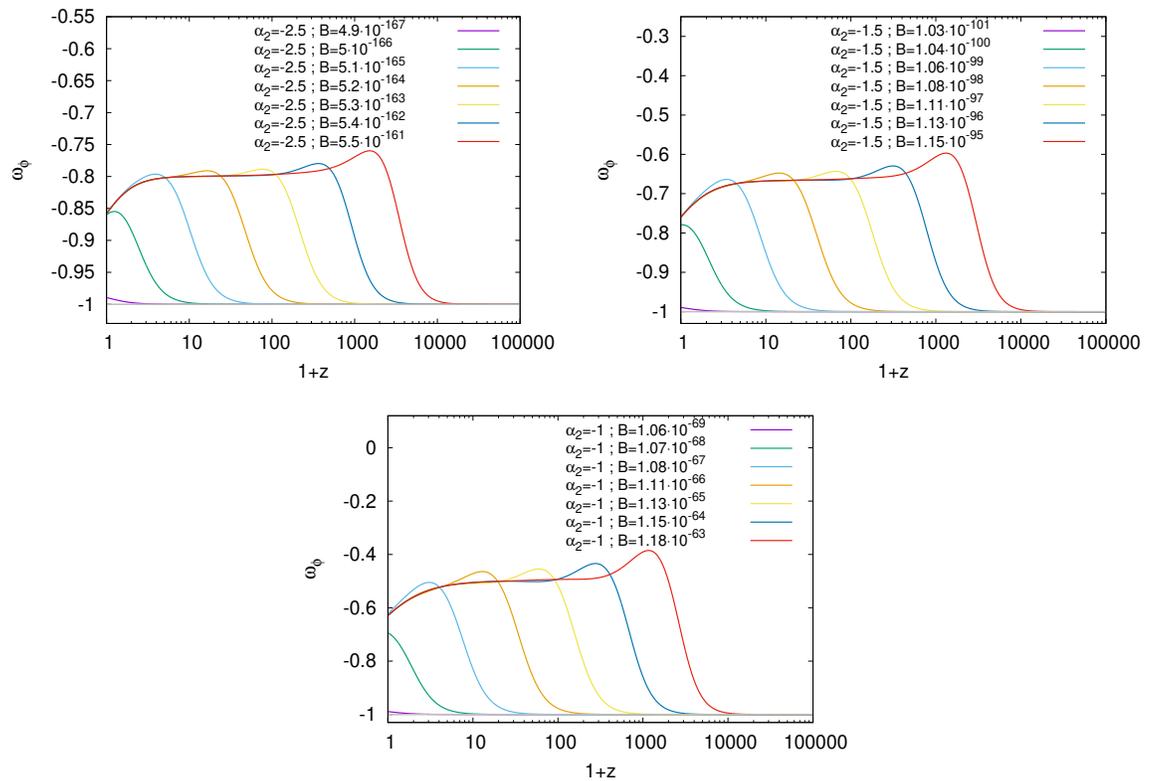


Figura 4.11: En estas gráficas se dejó fijo el valor de  $\alpha_2$  y variamos las condiciones iniciales  $B$ . Se repitió el proceso tres veces para cada valor de  $\alpha_2$  que se tomaron en el caso anterior, *i.e.* para  $\alpha_2 = -2,5, -1,5$  y  $-1$ .

En la Figura 4.11 vemos que la ecuación de estado evoluciona rápido si la condición inicial es pequeña, esta evoluciona en un tiempo más largo si la condición inicial crece. Esto ocurre de la misma forma para cualquiera de los tres valores de  $\alpha_2$ .

### 4.3. Potencial exponencial en coordenadas polares

Otro resultado de este trabajo, es que al analizar cualquier potencial con el cambio de coordenadas polares los resultados son invariantes y los cálculos que se realizan son significativamente más sencillos. Como ejemplo tomamos el potencial  $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}$  usando el cambio de coordenadas (3.37) y (3.38) entonces las ecuaciones diferenciales (3.16) y (3.17) toman la forma:

$$\Omega'_\phi = 3\Omega_\phi (1 - \Omega_\phi) (\gamma + \cos \theta - 1), \quad (4.11)$$

$$\theta' = \cos(\theta/2) \left[ -6 \sin(\theta/2) + \lambda\sqrt{6}\Omega_\phi^{1/2} \right], \quad (4.12)$$

para la ecuación de estado  $P_\gamma = (\gamma - 1)\rho_\gamma$ .

Entonces de (4.11) y (4.12) encontramos los puntos críticos haciendo  $\Omega'_\phi = \theta' = 0$ .

<b>Puntos críticos</b>				
	$\Omega_{\phi c}$	$\sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right)$	Condiciones
<b>I<sub>(a)</sub></b>	0	$\pm 1$	0	$\forall \lambda$ y $\gamma$
<b>I<sub>(b)</sub></b>	0	0	$\pm 1$	$\forall \lambda$ y $\gamma$
<b>II<sub>+</sub></b>	1	+1	0	$\forall \lambda$ y $\gamma$
<b>II<sub>-</sub></b>	1	-1	0	$\forall \lambda$ y $\gamma$
<b>III</b>	1	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\left[1 - \frac{\lambda^2}{6}\right]^{1/2}$	$\lambda^2 < 6$
<b>IV</b>	$\frac{3\gamma}{\lambda^2}$	$\sqrt{\frac{\gamma}{2}}$	$\left[1 - \frac{\gamma}{2}\right]^{1/2}$	$3\gamma < \lambda^2$

Tabla 4.1: Puntos críticos en coordenadas polares del potencial exponencial  $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}$  usando el cambio de variables (3.32), (3.37) y (3.38).

Estos puntos críticos son los mismos que se reportan en [48] y [8] donde toman el cambio de variable (3.9). Tomemos el cambio de variable:

$$\Omega_\phi = \Delta^2 \Rightarrow \Omega'_\phi = 2\Delta\Delta',$$

para tener de (4.12) y (4.11) las ecuaciones

$$\Delta' = \frac{3}{2}\Delta (1 - \Delta^2) [\gamma - 2 \sin^2(\theta/2)], \quad (4.13)$$

$$\theta' = \cos(\theta/2) [-6 \sin(\theta/2) + \lambda\sqrt{6}\Delta]. \quad (4.14)$$

Para calcular la matriz jacobiana tomamos

$$f_1(\Delta, \theta) = \frac{3}{2}\Delta (1 - \Delta^2) [\gamma - 2 \sin^2(\theta/2)], \quad (4.15)$$

$$f_2(\Delta, \theta) = \cos(\theta/2) [-6 \sin(\theta/2) + \lambda\sqrt{6}\Delta] \quad (4.16)$$

Entonces las componentes de la matriz son:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta} = a_{11} = \frac{3}{2} (1 - 3\Delta^2) [\gamma - 2 \sin^2(\theta/2)], \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = a_{12} = -3\Delta (1 - \Delta^2) \sin(\theta/2) \cos(\theta/2), \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \Delta} = a_{21} = \cos(\theta/2) \lambda\sqrt{6}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = a_{22} = -3 [\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)] - \lambda\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta \sin(\theta/2). \quad (4.20)$$

Así los eigenvalores se calculan con la fórmula general

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[ a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Entonces para el punto crítico  $\mathbf{I}_{(a)}$

$$a_{11} = \frac{3}{2} [\gamma - 2], \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 3. \quad (4.22)$$

Por lo que (4.21) es:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm |a_{11} - a_{22}|]. \quad (4.23)$$

Para  $a_{11} < a_{22}$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm (a_{22} - a_{11})], \quad (4.24)$$

$$\therefore \mu_1 = a_{22} = 3, \quad \mu_2 = a_{11} = -\frac{3}{2}(2 - \gamma). \quad (4.25)$$

Para el punto crítico  $\mathbf{I}_{(b)}$

$$a_{11} = \frac{3}{2}\gamma, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = \pm\sqrt{6}\lambda, \quad a_{22} = 3. \quad (4.26)$$

Entonces (4.21) es:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm |a_{11} - a_{22}|]. \quad (4.27)$$

Para  $a_{22} < a_{11}$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm (a_{11} - a_{22})], \quad (4.28)$$

$$\therefore \mu_1 = a_{11} = \frac{3}{2}\gamma, \quad \mu_2 = a_{22} = -3. \quad (4.29)$$

Para el punto crítico  $\mathbf{II}_{(+)}$

$$a_{11} = 3(2 - \gamma), \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{6} - \lambda). \quad (4.30)$$

Entonces (4.21) es:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm |a_{11} - a_{22}|]. \quad (4.31)$$

Para  $a_{22} < a_{11}$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm (a_{11} - a_{22})], \quad (4.32)$$

$$\therefore \mu_1 = a_{11} = 3(2 - \gamma), \quad \mu_2 = a_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{6} - \lambda). \quad (4.33)$$

Para el punto crítico  $\mathbf{II}_{(-)}$

$$a_{11} = 3(2 - \gamma), \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{6} + \lambda). \quad (4.34)$$

Entonces (4.21) es:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm |a_{11} - a_{22}|]. \quad (4.35)$$

Para  $a_{22} < a_{11}$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm (a_{11} - a_{22})], \quad (4.36)$$

$$\therefore \mu_1 = a_{11} = 3(2 - \gamma), \quad \mu_2 = a_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\sqrt{6} + \lambda). \quad (4.37)$$

Para el punto crítico **III**

$$a_{11} = \lambda^2 - 3\gamma, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = [\sqrt{6} - \lambda^2]^{1/2} \lambda, \quad a_{22} = \frac{\lambda^2 - 6}{2}. \quad (4.38)$$

Entonces (4.21) es:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm |a_{11} - a_{22}|]. \quad (4.39)$$

Para  $a_{22} < a_{11}$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm (a_{11} - a_{22})], \quad (4.40)$$

$$\therefore \mu_1 = a_{11} = \lambda^2 - 3\gamma, \quad \mu_2 = a_{22} = \frac{\lambda^2 - 6}{2}. \quad (4.41)$$

Para el punto crítico **IV**

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = -3\sqrt{3}\frac{\gamma}{\lambda} \left(1 - \frac{3\gamma}{\lambda^2}\right) \frac{(2 - \gamma)^{1/2}}{2},$$

$$a_{21} = (2 - \gamma)^{1/2} \sqrt{3}\lambda, \quad a_{22} = -\frac{3}{2}(2 - \gamma). \quad (4.42)$$

Entonces (4.21) es:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ a_{22} \pm \sqrt{a_{22}^2 + 4a_{12}a_{21}} \right]. \quad (4.43)$$

El término dentro de la raíz cuadrada es:

$$a_{22}^2 + 4a_{12}a_{21} = \left[ -\frac{3(2-\gamma)}{2} \right]^2 \left\{ 1 - \frac{8\gamma(\lambda^2 - 3\gamma)}{\lambda^2(2-\gamma)} \right\}. \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \therefore \mu_{1,2} &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{3(2-\gamma)}{2} \pm \left[ -\frac{3(2-\gamma)}{2} \right] \left[ 1 - \frac{8\gamma(\lambda^2 - 3\gamma)}{\lambda^2(2-\gamma)} \right]^{1/2} \right\} \\ &= -\frac{3(2-\gamma)}{4} \left\{ 1 \pm \left[ 1 - \frac{8\gamma(\lambda^2 - 3\gamma)}{\lambda^2(2-\gamma)} \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Estos son los mismos eigenvalores que obtienen [48] y [8] usando el cambio de variable (3.9).

Usemos el potencial de clase **Ib**,  $V(\phi) = A^2 e^{2B\phi}$ , de la Tabla 3.2. Vemos que obtenemos una familia de soluciones, se pueden obtener tantas soluciones como valores de la condiciones iniciales  $A$  y  $B$  se tengan. A continuación, se muestran las ecuaciones de estado para los valores de las condiciones iniciales de  $A$  y  $B$  dadas.

Si comparamos el potencial **Ib** con el potencial  $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\kappa\phi}$  entonces tenemos que:

$$V_0 = A^2, \quad (4.46)$$

$$\lambda = -\frac{2B}{\kappa}. \quad (4.47)$$

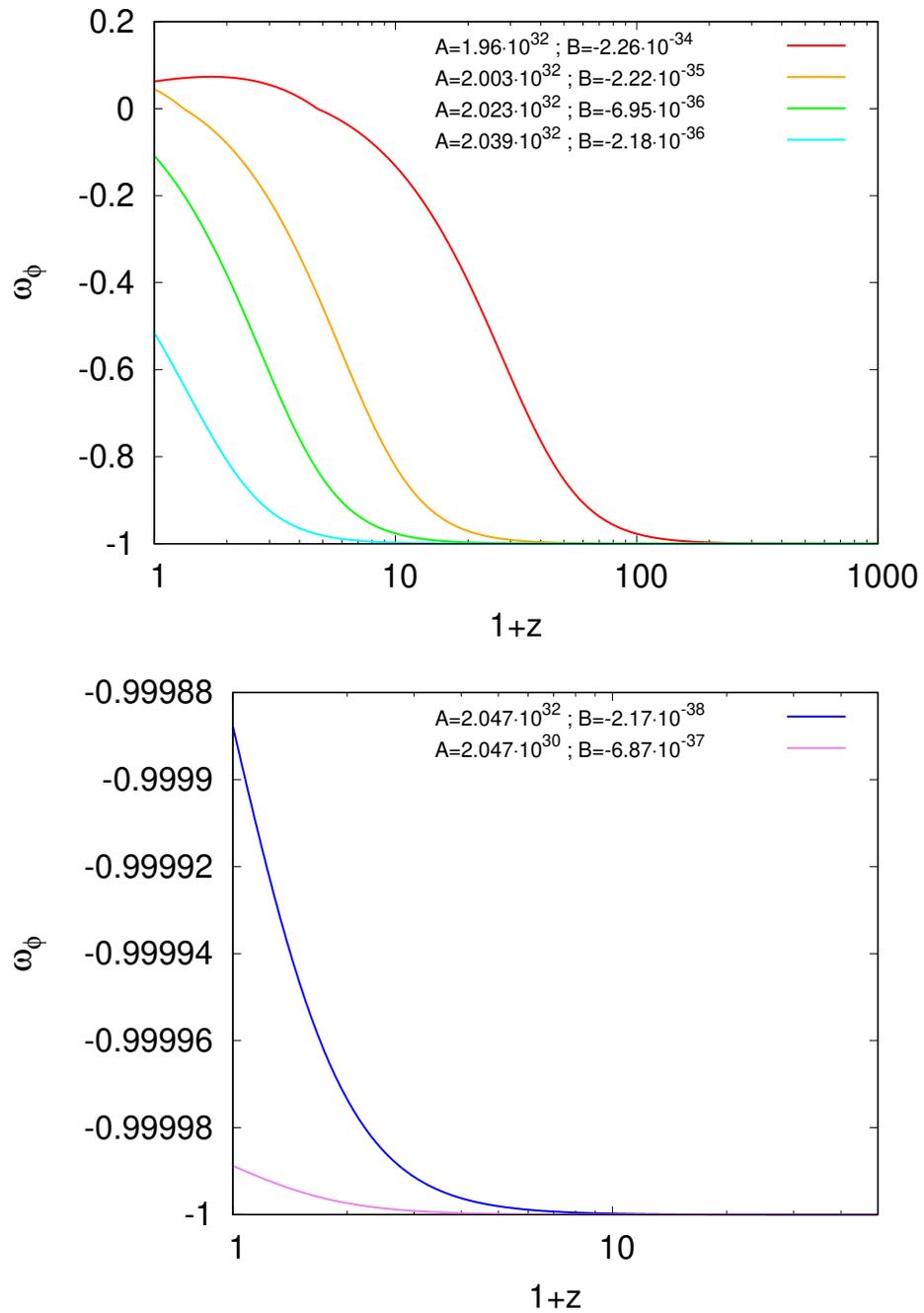


Figura 4.12: Evolución de la ecuación de estado para el potencial exponencial variando los valores de las condiciones de frontera. La gráfica de abajo no se incluyo con la de arriba ya que al decaer tan rápido no se podía apreciar correctamente su comportamiento. En el código **CLASS** se le indica los parámetros cosmológicos.

Usando los datos que este nos da obtenemos estas gráficas.

---

# Capítulo 5

## Conclusiones

Al aprender un nuevo enfoque (el enfoque cinemático) se puede trabajar con más detalle los modelos de campo de quintaesencia y analizar otros aspectos de estos, como los puntos críticos y sus modos normales, los cuales nos dan información muy importante y fundamental del campo. Ya que con esto podemos saber como se comporta el campo para ciertos puntos. Además, con el método estudiado en [2] nos facilita el estudio y el modelamiento de estos campos de quintaesencia.

Cuando definimos nuevas parametrizaciones para el campo de quintaesencia podemos construir una variedad de potenciales con los que se puede trabajar. Ya que este método nos permite construir potenciales resolviendo una ecuación diferencial, de esta forma se puede usar un programa de computadora para obtener soluciones numéricas de el potencial.

Debido a que solo tenemos una ecuación diferencial para obtener el potencial (dándole valores definidos a los parámetros cosmológicos a los que se les llamó  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , para una aproximación de segundo orden) se puede usar un programa **CLASS** en especial. Normalmente lo que se hace para obtener resultados numéricos es modificar el código definiéndole el potencial con el que se desea trabajar, y si queremos usar otro potencial se debe de repetir el procedimiento. Y si al compilar el programa se cometió un error al escribir el código, se tiene que buscar el problema para corregirlo y repetir el proceso. Pero con el nuevo método se puede usar un código diseñado que al resolver la ecuación diferencial, se obtiene el potencial deseado, obviamente dando los valores de los parámetros cosmológicos adecuados. Esto nos permitió obtener

muchos resultados en poco tiempo.

Como bien mostraron [2], este código funciona adecuadamente, pero no se había comparado con algún resultado que se encuentre en la literatura. Nuestro propósito fue replicar [3] usando este nuevo método. Lo primero que se hizo fue identificar el potencial y con esto identificar los valores de los nuevos parámetros. En el desarrollo nos encontramos con algunas dificultades, ya que no especifican cuales son los valores iniciales para cada valor de  $\alpha$ , de esta forma se tiene una familia de soluciones para cada caso. Para resolverlo se agrego un parámetro adicional que esta relacionado con las condiciones iniciales.

Por alguna razón, solo presentan una solución particular. Debido a que carecemos de información tuvimos que variar el valor del parámetro asociado a las condiciones iniciales,  $y_{1i}$  de tal forma que se aproximara a la solución reportada. Por esto se dijo que no podemos aventurarnos a decir que las Figuras 4.1 y 4.2 son idénticas, ya que no se pudo igualar con exactitud las condiciones iniciales. Sin embargo, es una muy buena aproximación, por lo que nuestros resultados son muy satisfactorios. Como vemos en las Figuras 4.11, cuando fijamos  $\alpha_2$  y variamos las condiciones iniciales la contribución de la energía oscura de quintaesencia decae para  $z$  muy grandes. De esta forma podemos ver que se tiene una familia de soluciones para cada valor de  $\alpha_2$ .

Otro resultado, que se debe mencionar, fue el uso del cambio de parametrización para el potencial exponencial, que trabajan en [48] y [8] ya que este desarrollo no se encuentra en la literatura. Además, que los cálculos que se desarrollan con este nuevo cambio de parámetros son significativamente cortos, el resultado es el mismo que si se usa el cambio de parametrización común, es lo que se esperaba para este tipo de potencial.

---

# Apéndice A

## Relatividad y cosmología

### A.1. Conservación del tensor de energía-momento

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (\text{A.1})$$

en forma matricial

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Y

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\kappa r^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Calculamos los símbolos de Christoffel de la fórmula

$$\Gamma^\alpha_{\varphi\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\varphi,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\varphi} - g_{\varphi\sigma,\lambda}). \quad (\text{A.4})$$

Por ejemplo, calculemos tres símbolos  $\Gamma^0_{00}$ ,  $\Gamma^0_{11}$  y  $\Gamma^1_{11}$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{0\lambda} (g_{\lambda 0,0} + g_{\lambda 0,0} - g_{00,\lambda}).$$

Como el tensor métrico es diagonal y simétrico, entonces  $\lambda$  tiene que ser cero

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{00} (g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0})$$

Se cancela uno de los dos primeros términos con el tercero

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0}.$$

Como  $g_{00} = -1$ , entonces  $g_{00,0} = 0$ , entonces

$$\Gamma^0_{00} = 0 \tag{A.5}$$

Luego para  $\Gamma^0_{11}$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}g^{0\lambda} (g_{\lambda 1,1} + g_{\lambda 1,1} - g_{11,\lambda}).$$

Como en el caso del símbolo anterior tenemos que  $\lambda = 0$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}g^{00} (g_{01,1} + g_{01,1} - g_{11,0}).$$

Ya que  $g_{01} = 0$

$$\Gamma^0_{11} = -\frac{1}{2}g^{00}g_{11,0} = -\frac{1}{2}(-1) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a^2(t)}{1 - \kappa r^2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - \kappa r^2} 2a(t)\dot{a}(t) \right].$$

Entonces

$$\Gamma^0_{11} = \frac{a(t)\dot{a}(t)}{1 - \kappa r^2}. \tag{A.6}$$

Y para  $\Gamma^1_{11}$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{1\lambda} (g_{\lambda 1,1} + g_{\lambda 1,1} - g_{11,\lambda}).$$

Tenemos que  $\lambda = 1$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}).$$

Se cancela uno de los dos primeros términos con el tercero

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}g_{11,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\kappa r^2}{a^2(t)}\right)\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a^2(t)}{1-\kappa r^2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\kappa r^2}{a^2(t)}\right)\left[-\frac{a^2(t)}{(1-\kappa r^2)^2}\right](-2\kappa r).$$

Entonces

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\kappa r}{1-\kappa r^2} \quad (\text{A.7})$$

Repetimos el proceso para encontrar los demás símbolos de Christoffel y tenemos que los símbolos no nulos son

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \\ \Gamma^0_{33} = r^2 a(t) \dot{a}(t) \sin^2 \theta, \quad \Gamma^1_{33} = -r(1-\kappa r^2) \sin^2 \theta, \\ \Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot \theta, \\ \Gamma^0_{22} = r^2 a(t) \dot{a}(t), \quad \Gamma^1_{22} = -r(1-\kappa r), \\ \Gamma^0_{11} = \frac{a(t) \dot{a}(t)}{1-\kappa r^2}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{\kappa r}{1-\kappa r^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Que son los mismos que se presentaron en 2.12.

Para el tensor de momento energía tenemos que para fluido perfecto es de la forma:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu},$$

donde  $U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$  es la cuatro velocidad.  $\tau$  es el tiempo propio en este caso  $\tau = t$ , así tenemos que:

$$\begin{aligned} U_0 &= 1, \\ U_1 &= \dot{r}, \\ U_2 &= \dot{\theta}, \\ U_3 &= \dot{\phi}. \end{aligned}$$

Pero ya que en la métrica de FRW los parámetros  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  no dependen del tiempo, solo el factor de escala  $a$ , entonces:

$$\begin{aligned} U_0 &= 1, \\ U_1 &= 0, \\ U_2 &= 0, \\ U_3 &= 0. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Entonces el tensor de energía-momentos es:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho, \\ T_{11} &= \frac{Pa^2}{1 - \kappa r^2}, \\ T_{22} &= Pa^2 r^2, \\ T_{33} &= Pa^2 r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Y en forma matricial

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Pa^2(t)}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pa^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Pa^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \tag{A.11}$$

Y

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P \frac{1-\kappa r^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \frac{1}{a^2(t)r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Tenemos que la derivada covariante es:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\lambda\beta} T^{\alpha\lambda} + \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\beta} T^{\beta\lambda}. \quad (\text{A.13})$$

Para  $\alpha = 0$ , y desarrollando los índices repetidos

$$\begin{aligned} T^{0\beta}{}_{;\beta} &= T^{0\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\lambda\beta} T^{0\lambda} + \Gamma^0{}_{\lambda\beta} T^{\beta\lambda} \\ &= T^{00}{}_{,0} + T^{0i}{}_{,i} + \Gamma^{\beta}{}_{0\beta} T^{00} + \Gamma^{\beta}{}_{i\beta} T^{0i} + \Gamma^0{}_{0\beta} T^{\beta 0} + \Gamma^0{}_{i\beta} T^{\beta i}. \end{aligned}$$

Pero ya que el tensor de energía-momento es simétrico y diagonal  $T^{0i} = 0$  y desarrollando los índices repetidos  $\beta$

$$\begin{aligned} T^{0\beta}{}_{;\beta} &= T^{00}{}_{,0} + \Gamma^0{}_{00} T^{00} + \Gamma^j{}_{0j} T^{00} + \Gamma^0{}_{00} T^{00} + \Gamma^0{}_{0j} T^{j0} + \Gamma^0{}_{i0} T^{0i} + \Gamma^0{}_{ij} T^{ji} \\ &= T^{00}{}_{,0} + \Gamma^0{}_{00} T^{00} + \Gamma^j{}_{0j} T^{00} + \Gamma^0{}_{00} T^{00} + \Gamma^0{}_{ij} T^{ji}. \end{aligned}$$

Vemos que  $\Gamma^0{}_{00}$  no esta en la lista (A.8) entonces es cero y de la simetría del tensor de energía-momento  $i = j$ . También podemos cambiar el índice  $j$  del tercer termino por  $i$  ya que es un índice mudo

$$T^{0\beta}{}_{;\beta} = T^{00}{}_{,0} + \Gamma^i{}_{0i} T^{00} + \Gamma^0{}_{ii} T^{ii}$$

Si tomamos un universo plano *i.e.*  $\kappa = 0$  entonces de la lista (A.8)

$$\Gamma^i{}_{0i} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma^0{}_{11} = a\dot{a}, \quad \Gamma^0{}_{22} = r^2 a\dot{a}, \quad \Gamma^3{}_{00} = r^2 a\dot{a} \sin^2 \theta.$$

Sustituyendo esto y los valores de las componentes del tensor energía-momento dados en (A.12)

$$\begin{aligned}
 T^{0\beta}{}_{;\beta} &= \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{P}{a^2}a\dot{a} + \frac{P}{a^2r^2}r^2a\dot{a} + \frac{P}{a^2r^2\sin^2\theta}r^2a\dot{a}\sin^2\theta \\
 &= \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}P.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  tenemos que:

$$T^{0\beta}{}_{;\beta} = \dot{\rho} + 3H(\rho + P).$$

Esta es la ecuación de continuidad por lo que es igual a cero y se tiene

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Luego, para  $\alpha = i$ , y desarrollando los índices repetidos

$$\begin{aligned}
 T^{i\beta}{}_{;\beta} &= T^{i\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^\beta{}_{\lambda\beta}T^{i\lambda} + \Gamma^i{}_{\lambda\beta}T^{\beta\lambda} \\
 &= T^{i0}{}_{,0} + T^{ij}{}_{,j} + \Gamma^\beta{}_{0\beta}T^{i0} + \Gamma^\beta{}_{l\beta}T^{il} + \Gamma^i{}_{0\beta}T^{\beta 0} + \Gamma^i{}_{l\beta}T^{\beta l}
 \end{aligned}$$

Ya que  $T^{i0} = 0$

$$\begin{aligned}
 T^{i\beta}{}_{;\beta} &= T^{ij}{}_{,j} + \Gamma^0{}_{i0}T^{il} + \Gamma^j{}_{lj}T^{il} + \Gamma^i{}_{00}T^{00} + \Gamma^i{}_{0j}T^{j0} + \Gamma^i{}_{l0}T^{0l} + \Gamma^i{}_{lj}T^{jl} \\
 &= T^{ii}{}_{,i} + \Gamma^0{}_{i0}T^{ii} + \Gamma^j{}_{ij}T^{ii} + \Gamma^i{}_{00}T^{00} + \Gamma^i{}_{jj}T^{jj}
 \end{aligned}$$

La derivada parcial del tensor de energía-momento es cero y  $\Gamma^0{}_{i0} = \Gamma^i{}_{00} = 0$

$$T^{i\beta}{}_{;\beta} = \Gamma^j{}_{ij}T^{ii} + \Gamma^i{}_{jj}T^{jj}$$

Para los símbolos no nulos de la lista (A.8)

$$T^{i\beta}{}_{;\beta} = \Gamma^1{}_{11}T^{11} + \Gamma^2{}_{12}T^{11} + \Gamma^3{}_{13}T^{11} + \Gamma^3{}_{23}T^{22} + \Gamma^1{}_{11}T^{11} + \Gamma^1{}_{22}T^{22} + \Gamma^1{}_{33}T^{33} + \Gamma^2{}_{33}T^{33}$$

Como es un universo plano  $\kappa = 0$ , entonces  $\Gamma^1{}_{11} = 0$ , sustituyendo los valores de los símbolos restantes y de las componentes del tensor de energía-momento

$$\begin{aligned}
 T^{i\beta}{}_{;\beta} &= \frac{2P}{r a^2} + \cot \theta \frac{P}{a^2 r^2} - r \frac{P}{a^2 r^2} - r \sin^2 \theta \frac{P}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} - \sin \theta \cos \theta \frac{P}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \\
 T^{i\beta}{}_{;\beta} &= \frac{2P}{r a^2} + \frac{P \cot \theta}{a^2 r^2} - \frac{2P}{a^2 r} - \frac{P \cos \theta}{a^2 r^2 \sin \theta} = 0
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

De (A.14) y (A.15) se tiene

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{A.16}$$

## A.2. Ecuaciones de Friedmann

De (2.1) y de (2.3) obtenemos la forma para el tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^\varphi_{\alpha\beta,\varphi} - \Gamma^\varphi_{\alpha\varphi,\beta} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \Gamma^\varphi_{\varphi\sigma} - \Gamma^\sigma_{\alpha\varphi} \Gamma^\varphi_{\beta\sigma}. \tag{A.17}$$

Con (A.17) podemos calcular los elementos del tensor de Ricci, por ejemplo  $R_{00}$  y  $R_{12}$ .

$$R_{00} = \Gamma^\varphi_{00,\varphi} - \Gamma^\varphi_{0\varphi,0} + \Gamma^\sigma_{00} \Gamma^\varphi_{\varphi\sigma} - \Gamma^\sigma_{0\varphi} \Gamma^\varphi_{0\sigma}.$$

De la lista (A.8) vemos que  $\Gamma^\varphi_{00} = \Gamma^\sigma_{00} = 0$ . Desarrollando los índices repetidos

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -\Gamma^\varphi_{0\varphi,0} - \Gamma^\sigma_{0\varphi} \Gamma^\varphi_{0\sigma} \\
 &= -\Gamma^0_{00,0} - \Gamma^1_{01,0} - \Gamma^2_{02,0} - \Gamma^3_{03,0} - \Gamma^\sigma_{00} \Gamma^0_{0\sigma} - \Gamma^\sigma_{01} \Gamma^1_{0\sigma} - \Gamma^\sigma_{02} \Gamma^2_{0\sigma} - \Gamma^\sigma_{03} \Gamma^3_{0\sigma} \\
 &= -\Gamma^1_{01,0} - \Gamma^2_{02,0} - \Gamma^3_{03,0} - \Gamma^0_{01} \Gamma^1_{00} - \Gamma^k_{01} \Gamma^1_{0k} - \Gamma^0_{02} \Gamma^2_{00} - \Gamma^k_{02} \Gamma^2_{0k} - \Gamma^0_{03} \Gamma^3_{00} - \Gamma^k_{03} \Gamma^3_{0k} \\
 &= -\Gamma^1_{01,0} - \Gamma^2_{02,0} - \Gamma^3_{03,0} - \Gamma^k_{01} \Gamma^1_{0k} - \Gamma^k_{02} \Gamma^2_{0k} - \Gamma^k_{03} \Gamma^3_{0k}.
 \end{aligned}$$

Para cuarto termino el único elemento no nulo es para  $k = 1$ , para el quinto termino el único elemento no nulo es para  $k = 2$  y para el sexto termino el único elemento es para  $k = 3$ . Sustituyendo los valores de los símbolos

$$R_{00} = -\Gamma^1_{01,0} - \Gamma^2_{02,0} - \Gamma^3_{03,0} - \Gamma^1_{01} \Gamma^1_{01} - \Gamma^2_{02} \Gamma^2_{02} - \Gamma^3_{03} \Gamma^3_{03}$$

$$R_{00} = -3 \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \right] - 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 3 \left[ \frac{\dot{a}^2 - \ddot{a}a}{a^2} \right] - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2}$$

$$\therefore R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{A.18})$$

Para  $R_{12}$

$$R_{12} = \Gamma^\varphi_{12,\varphi} - \Gamma^\varphi_{1\varphi,2} + \Gamma^\sigma_{12}\Gamma^\varphi_{\varphi\sigma} - \Gamma^\sigma_{1\varphi}\Gamma^\varphi_{2\sigma}.$$

Vemos que el único elemento no nulo de  $\Gamma^\alpha_{12}$  es para  $\alpha = 2$

$$R_{12} = \Gamma^2_{12,2} - \Gamma^0_{10,2} - \Gamma^k_{1k,2} + \Gamma^2_{12}\Gamma^0_{02} + \Gamma^2_{12}\Gamma^k_{k2} - \Gamma^\sigma_{10}\Gamma^0_{2\sigma} - \Gamma^\sigma_{1k}\Gamma^k_{2\sigma}.$$

Como  $x^2 = \theta$ ,  $\Gamma^2_{12} \neq \Gamma^2_{12}(\theta)$  y  $\Gamma^3_{13} \neq \Gamma^3_{13}(\theta)$  entonces  $\Gamma^2_{12,2} = \Gamma^3_{13,2} = 0$  además  $\Gamma^k_{k2} = \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{02} = 0$  para todo valor de  $k = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned} R_{12} &= -\Gamma^\sigma_{10}\Gamma^0_{2\sigma} - \Gamma^\sigma_{1k}\Gamma^k_{2\sigma} \\ &= -\Gamma^0_{10}\Gamma^0_{20} - \Gamma^l_{10}\Gamma^0_{2l} - \Gamma^0_{1k}\Gamma^k_{20} - \Gamma^l_{1k}\Gamma^k_{2l} \\ &= -\Gamma^l_{10}\Gamma^0_{2l} - \Gamma^0_{1k}\Gamma^k_{20} - \Gamma^l_{1k}\Gamma^k_{2l}. \end{aligned}$$

Vemos que  $\Gamma^l_{10} = \Gamma^0_{2l} = 0$  para todo valor de  $l = 1, 2, 3$ .

$$R_{12} = -\Gamma^0_{11}\Gamma^1_{20} - \Gamma^0_{12}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{20} - \Gamma^l_{11}\Gamma^1_{2l} - \Gamma^l_{12}\Gamma^2_{2l} - \Gamma^l_{13}\Gamma^3_{2l}$$

Vemos que los primeros tres términos son cero ya los símbolos  $\Gamma^1_{20} = \Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{13} = \Gamma^3_{20} = 0$  no se encuentran en la lista (A.8)

$$\begin{aligned} R_{12} &= -\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{23} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{22} \\ &\quad - \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{13}\Gamma^3_{21} - \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{22} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23} \end{aligned}$$

Como  $\Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{13} = 0$ , y de la simetría del tensor de Ricci

$$\therefore R_{12} = R_{21} = 0 \quad (\text{A.19})$$

Repitiendo el mismo proceso encontramos que los elementos del tensor de Ricci no nulos son

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad R_{11} = \frac{2\kappa+2\dot{a}^2(t)+a(t)\ddot{a}(t)}{1-\kappa r^2},$$

$$R_{22} = r^2 [2\kappa + 2\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)], \quad R_{33} = r^2 \sin^2 \theta [2\kappa + 2\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)].$$

Calculemos el escalar de Ricci de la forma

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

$$= (-1) \left( -\frac{3\ddot{a}}{a} \right) + \left( \frac{1 - \kappa r^2}{a^2} \right) \left( \frac{2\kappa + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1 - \kappa r^2} \right)$$

$$+ (a^2 r^2)^{-1} (2\kappa + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) r^2 + (a^2 r^2 \sin^2 \theta)^{-1} (2\kappa + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) r^2 \sin^2 \theta.$$

Simplificando

$$R = 6 \frac{\kappa + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2}. \quad (\text{A.20})$$

De las ecuaciones de Einstein (2.5) con  $k = 8\pi G$

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta},$$

para  $\alpha = \beta = 0$  tenemos

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R + \Lambda g_{00} = 8\pi G T_{00},$$

Sustituyendo los valores de  $R_{00}$  y  $g_{00}$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}(-1) \left[ 6 \frac{\kappa + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2} \right] + \Lambda(-1) = 8\pi G \rho,$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} + 3 \left[ \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right] - \Lambda = 8\pi G \rho,$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (\text{A.21})$$

Para  $\alpha = \beta = 1$

$$\begin{aligned} R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R + \Lambda g_{11} &= 8\pi GT_{11}, \\ \frac{2\kappa + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1 - \kappa r^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{1 - \kappa r^2}\right) \left[6\frac{\kappa + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2}\right] + \left(\frac{a^2}{1 - \kappa r^2}\right)\Lambda &= 8\pi G\left(\frac{Pa^2}{1 - \kappa r^2}\right), \\ 2\kappa + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a} - 3\kappa - 3\dot{a}^2 - 3a\ddot{a} + a^2\Lambda &= 8\pi GPa^2, \\ -\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\kappa}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} + \Lambda &= 8\pi GP. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Para  $\alpha = \beta = 2$

$$\begin{aligned} R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R + \Lambda g_{22} &= 8\pi GT_{22}, \\ r^2 [2\kappa + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}] - \frac{1}{2}a2r^2 \left(6\frac{\kappa + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2}\right) + \Lambda a^2 r^2 &= 8\pi GPa^2 r^2, \\ -\kappa - \dot{a}^2 - 2a\ddot{a} + \Lambda a^2 &= 8\pi GPa^2, \\ -\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\kappa}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} + \Lambda &= 8\pi GP. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Para  $\alpha = \beta = 3$

$$\begin{aligned} R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R + \Lambda g_{33} &= 8\pi GT_{33}, \\ r^2 \sin^2 \theta [2\kappa + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}] - \frac{1}{2}a^2 r^2 \sin^2 \theta \left[6\frac{\kappa + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2}\right] + \Lambda a^2 r^2 \sin^2 \theta &= 8\pi GPa^2 r^2 \sin^2 \theta, \\ -\kappa - \dot{a}^2 - 2a\ddot{a} + \Lambda a^2 &= 8\pi GPa^2, \\ -\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\kappa}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} + \Lambda &= 8\pi GP. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Si sumamos (A.21), (A.22), (A.23) y (A.24)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} + \frac{\kappa}{a^2} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 3\frac{\kappa}{a^2} - 6\frac{\ddot{a}}{a} + 3\Lambda = 8\pi G\left(\frac{\rho}{3}\right) + 8\pi G(3P),$$

$$-2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\kappa}{a^2} + \frac{8}{3}\Lambda - 6\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G\left(\frac{\rho}{3}\right) + 8\pi G(3P).$$

Sustituyendo (A.21) en el primer termino

$$\begin{aligned} -2\left(\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2}\right) - 2\frac{\kappa}{a^2} + \frac{8}{3}\Lambda - 6\frac{\ddot{a}}{a} &= 8\pi G\left(\frac{\rho}{3}\right) + 8\pi G(3P), \\ -8\pi G\frac{2\rho}{3} - \frac{2}{3}\Lambda + \frac{8}{3}\Lambda - 6\frac{\ddot{a}}{a} &= 8\pi G\left(\frac{\rho}{3}\right) + 8\pi G(3P), \\ 2\Lambda - 6\frac{\ddot{a}}{a} &= 8\pi G(\rho) + 8\pi G(3P), \\ 6\frac{\ddot{a}}{a} &= 2\Lambda - 8\pi G(\rho) + 8\pi G(3P), \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \end{aligned} \tag{A.25}$$

## A.3. Modelando universos

### A.3.1. Materia + $\Lambda$

Para resolver (2.57) tomamos el cambio de variable

$$a^3(\theta) = a_{M\Lambda}^3 \sin^2 \theta,$$

$$\therefore a(\theta) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1}\right)^{1/3} \sin^{2/3} \theta, \tag{A.26}$$

y

$$\theta = \sin^{-1} \left[ \left(\frac{a}{a_{M\Lambda}}\right)^{3/2} \right].$$

Luego

$$da = a_{M\Lambda} \frac{2}{3} \sin^{-1/3} \theta \cos \theta d\theta,$$

Ademas

$$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta.$$

Entonces

$$\begin{aligned} H_0 t(a) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m0} - 1}} \frac{1}{a_{M\Lambda}^{3/2}} \int_0^a \frac{a^{1/2} da}{[1 - a^3/a_{M\Lambda}^3]^{1/2}}, \\ H_0 t(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m0} - 1}} \frac{1}{a_{M\Lambda}^{3/2}} \int_0^\theta \frac{a_{M\Lambda}^{1/2} \sin^{1/3} \theta a_{M\Lambda} (2/3) \sin^{-1/3} \theta \cos \theta d\theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m0} - 1}} \int_0^\theta d\theta = \frac{2}{3} \frac{\theta}{\sqrt{\Omega_{m0} - 1}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m0} - 1}} \sin^{-1} \left[ \left( \frac{a}{a_{M\Lambda}} \right)^{3/2} \right], \\ \therefore t(a) &= \frac{2}{3H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m0} - 1}} \sin^{-1} \left[ \left( \frac{a}{a_{M\Lambda}} \right)^{3/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

---

# Apéndice B

## Quintaesencia

### B.1. Potencial exponencial

Tenemos las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dN} = -3x + \lambda\sqrt{\frac{3}{2}}y^2 + \frac{3}{2}x [2x^2 + \gamma(1 - x^2 - y^2)], \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{dy}{dN} = -\lambda\sqrt{\frac{3}{2}}xy + \frac{3}{2}y [2x^2 + \gamma(1 - x^2 - y^2)], \quad (\text{B.2})$$

donde la ecuación de estado es  $P_\gamma = (\gamma - 1)\rho_\gamma$  como lo trabajan en [48]. Para construir la matriz jacobiana definimos

$$f_1(x, y) = -3x + \lambda\sqrt{\frac{3}{2}}y^2 + \frac{3}{2}x [2x^2 + \gamma(1 - x^2 - y^2)], \quad (\text{B.3})$$

$$f_2(x, y) = -\lambda\sqrt{\frac{3}{2}}xy + \frac{3}{2}y [2x^2 + \gamma(1 - x^2 - y^2)]. \quad (\text{B.4})$$

Entonces las entradas de la matriz son:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = a_{11} = -3 + \frac{3}{2} [6x^2 + \gamma(1 - 3x^2 - y^2)], \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = a_{12} = y [\lambda\sqrt{6} - 3\gamma x], \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = a_{21} = y \left[ -\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} + 3x(2 - \gamma) \right], \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = a_{22} = -\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} x + \frac{3}{2} \left[ 2x^2 + \gamma(1 - x^2 - 3y^2) \right]. \quad (\text{B.8})$$

Tenemos que los puntos críticos son:

- (I)  $(x, y) = (0, 0)$ ,
- (II)  $(x, y) = (+1, 0)$ ,
- (III)  $(x, y) = (-1, 0)$ ,
- (IV)  $(x, y) = (\lambda/\sqrt{6}, [1 - \lambda^2/6]^{1/2})$ ,
- (V)  $(x, y) = (\sqrt{3/2}\gamma/\lambda, [3(2 - \gamma)\gamma/2\lambda^2]^{1/2})$ .

Para calcular los eigenvalores tenemos la formula general

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[ a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Así para el punto critico **I** tenemos que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 3 \left( \frac{\gamma}{2} - 1 \right), & a_{12} &= 0, \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= 3 \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

De (B.9) tenemos

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[ a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ a_{11} + a_{22} \pm |a_{11} - a_{22}| \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Si  $a_{11} < a_{22}$  por lo que

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm (a_{22} - a_{11})]. \quad (\text{B.12})$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} + (a_{22} - a_{11})] = a_{22}, \\ \therefore \mu_1 &= 3\frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Y

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} - (a_{22} - a_{11})] = a_{11}, \\ \therefore \mu_2 &= 3\left(\frac{\gamma}{2} - 1\right) = -\frac{3(2 - \gamma)}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Para el punto critico **II** tenemos que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 3(2 - \gamma), & a_{12} &= 0, \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= 3\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{6}}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Así tenemos (B.11) otra vez, para  $a_{11} > a_{22}$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm (a_{11} - a_{22})]. \quad (\text{B.16})$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} + (a_{11} - a_{22})] = a_{11}, \\ \therefore \mu_1 &= 3(2 - \gamma). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Y

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} - (a_{11} - a_{22})] = a_{22}, \\ \therefore \mu_2 &= 3\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{6}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{6} - \lambda). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Para el punto critico **III** tenemos que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 3(2 - \gamma), & a_{12} &= 0, \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= 3 \left( 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

De nuevo tenemos (B.11), para  $a_{11} > a_{22}$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} \pm (a_{11} - a_{22})]. \quad (\text{B.20})$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} + (a_{11} - a_{22})] = a_{11}, \\ \therefore \mu_1 &= 3(2 - \gamma). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Y

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} - (a_{11} - a_{22})] = a_{22}, \\ \therefore \mu_2 &= 3 \left( 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} (\sqrt{6} + \lambda). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Para el punto critico **IV** tenemos que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -3 + \frac{\lambda^2}{2} (3 - \gamma), & a_{12} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda (2 - \gamma) \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{6} \right]^{1/2}, \\ a_{21} &= \sqrt{\frac{3}{2}} (1 - \gamma) \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{6} \right]^{1/2}, & a_{22} &= \frac{\gamma}{2} (\lambda^2 - 6). \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Para calcular (B.9) vemos que:

$$a_{11} + a_{22} = 3 \left( \frac{\lambda^2}{2} - \gamma - 1 \right), \quad (\text{B.24})$$

$$a_{11} - a_{22} = -3 + \lambda^2 \left( \frac{3}{2} - \gamma \right) + \gamma, \quad (\text{B.25})$$

$$a_{12}a_{21} = \frac{3}{2}\lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{6}\right) (2 - \gamma) (1 - \gamma). \quad (\text{B.26})$$

Así

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = \left[3(1 - \gamma) + \frac{\lambda^2}{2}\right]^2. \quad (\text{B.27})$$

Entonces (B.9) es:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2}\lambda^2 - 3\gamma - 3 \pm \left[3(1 - \gamma) + \frac{\lambda^2}{2}\right] \right\}, \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2}\lambda^2 - 3\gamma - 3 + \left[3(1 - \gamma) + \frac{\lambda^2}{2}\right] \right\}, \\ &\therefore \mu_1 = \lambda^2 - 3\gamma. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Y

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2}\lambda^2 - 3\gamma - 3 - \left[3(1 - \gamma) + \frac{\lambda^2}{2}\right] \right\}, \\ &\therefore \mu_2 = \frac{\lambda^2 - 6}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Para el punto critico  $\mathbf{V}$  tenemos que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{3(2 - \gamma)}{2} \left[1 - 3\frac{\gamma^2}{\lambda^2}\right], & a_{12} &= 3\sqrt{(2 - \gamma)\gamma} \left(1 - \frac{3\gamma^2}{2\lambda^2}\right), \\ a_{21} &= \frac{3}{2}\sqrt{(2 - \gamma)\gamma} \left[3\frac{\gamma}{\lambda^2}(2 - \gamma) - 1\right], & a_{22} &= -\frac{9\gamma^2}{2\lambda^2}(2 - \gamma). \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Para calcular (B.9) vemos que:

$$a_{11} + a_{22} = -\frac{3(2 - \gamma)}{2}, \quad (\text{B.32})$$

$$a_{11} - a_{22} = -\frac{3}{2}(2 - \gamma) \left[1 - 6\frac{\gamma^2}{\lambda^2}\right], \quad (\text{B.33})$$

$$4a_{12}a_{21} = \left[ -\frac{3(2-\gamma)}{2} \right]^2 4\gamma \left( 2 - 3\frac{\gamma^2}{\lambda^2} \right) \left[ \frac{3\gamma(2-\gamma) - \lambda^2}{\lambda^2(2-\gamma)} \right]. \quad (\text{B.34})$$

Así

$$\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} = \left[ -\frac{3(2-\gamma)}{2} \right] \left\{ 1 - \frac{8\gamma(\lambda^2 - 3\gamma)}{\lambda^2(2-\gamma)} \right\}^{1/2}. \quad (\text{B.35})$$

Entonces (B.9) es:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{3(2-\gamma)}{2} \pm \left[ -\frac{3(2-\gamma)}{2} \right] \left[ 1 - \frac{8\gamma(\lambda^2 - 3\gamma)}{\lambda^2(2-\gamma)} \right]^{1/2} \right\}, \quad (\text{B.36})$$

$$\Rightarrow \mu_{1,2} = -\frac{3(2-\gamma)}{4} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\gamma(\lambda^2 - 3\gamma)}{\lambda^2(2-\gamma)}} \right\}. \quad (\text{B.37})$$

## B.2. Coordenadas polares

A continuación, presentaremos el procedimiento que se siguió para calcular  $y_2$  en la tabla 3.1 para tres potenciales.

Para el potencial  $V(\phi) = A^4(1 + B\phi)^{2\lambda}$  calculamos

$$\partial_\phi V^{1/2} = A^2 B \lambda (1 + B\phi)^\lambda (1 + B\phi)^{-1}, \quad (\text{B.38})$$

$$\partial_\phi^2 V^{1/2} = A^2 B^2 \lambda (\lambda - 1) (1 + B\phi)^\lambda (1 + B\phi)^{-2}. \quad (\text{B.39})$$

A (B.39) le multiplicamos y dividimos por  $\lambda A^2 (1 + B\phi)^\lambda$  y usando (B.38) tenemos que:

$$\begin{aligned} \partial_\phi^2 V^{1/2} &= \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) \frac{A^4 B^2 \lambda^2 (1 + B\phi)^{2\lambda} (1 + B\phi)^{-2}}{A^2 (1 + B\phi)^\lambda} \\ &= \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) \frac{(\partial_\phi V^{1/2})^2}{V^{1/2}} \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

De las definiciones (3.9) y (3.32) se tiene:

$$\begin{aligned}
 y_2 &= -4\sqrt{3} \frac{\partial_\phi^2 V^{1/2}}{\kappa H} = -\frac{4\sqrt{3}}{\kappa H} \left( \frac{\lambda-1}{\lambda} \right) \frac{(\partial_\phi V^{1/2})^2}{V^{1/2}} \\
 &= -\frac{4\sqrt{3}}{\kappa H} \left( \frac{\lambda-1}{\lambda} \right) \left( -H \frac{y_1}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\kappa}{\sqrt{3}Hy}, \\
 \therefore y_2 &= \left( \frac{1-\lambda}{2\lambda} \right) \frac{y_1^2}{y}.
 \end{aligned} \tag{B.41}$$

Es lo que se presenta en la Tabla 3.1 y en [2].

Para el potencial  $V(\phi) = A^4 \exp\left(-\frac{\phi^2}{\lambda^2}\right)$  calculamos

$$\partial_\phi V^{1/2} = -A^2 \frac{\phi}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\lambda^2}\right), \tag{B.42}$$

$$\partial_\phi^2 V^{1/2} = -\frac{A^2}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\lambda^2}\right) + \frac{A^2 \phi^2}{\lambda^4} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\lambda^2}\right). \tag{B.43}$$

A (B.43) le multiplicamos y dividimos por  $A^2 \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\lambda^2}\right)$  y usando (B.42) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \partial_\phi^2 V^{1/2} &= -\frac{A^2}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\lambda^2}\right) + \frac{1}{A^2 \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\lambda^2}\right)} \frac{A^4 \phi^2}{\lambda^4} \exp\left(-\frac{\phi^2}{\lambda^2}\right) \\
 &= -\frac{V^{1/2}}{\lambda^2} + \frac{(\partial_\phi V^{1/2})^2}{V^{1/2}}
 \end{aligned} \tag{B.44}$$

De las definiciones (3.9) (3.32) se tiene:

$$\begin{aligned}
 y_2 &= -4\sqrt{3} \frac{\partial_\phi^2 V^{1/2}}{\kappa H} = -\frac{4\sqrt{3}}{\kappa H} \left[ -\frac{V^{1/2}}{\lambda^2} + \frac{(\partial_\phi V^{1/2})^2}{V^{1/2}} \right] \\
 &= \frac{4\sqrt{3}}{\kappa H} \frac{\sqrt{3}Hy}{\lambda^2 \kappa} - \frac{4\sqrt{3}}{\kappa H} \left( -\frac{Hy_2}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\kappa}{\sqrt{3}Hy},
 \end{aligned}$$

$$\therefore y_2 = \frac{12}{\kappa^2 \lambda^2} y + \frac{1}{2} \frac{y_2}{y} \quad (\text{B.45})$$

Es lo que se presenta en la Tabla 3.1 y en [2].

Para el potencial  $V(\phi) = A^4 \left[ 1 + \cos\left(\frac{\phi}{\lambda}\right) \right]$  calculamos

$$\partial_\phi V^{1/2} = -\frac{A^2}{2\lambda} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\phi}{\lambda}\right) \right]^{-1/2} \sin\left(\frac{\phi}{\lambda}\right), \quad (\text{B.46})$$

$$\partial_\phi^2 V^{1/2} = -\frac{A^2}{4\lambda^2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\phi}{\lambda}\right) \right]^{1/2}. \quad (\text{B.47})$$

De las definiciones (3.9) (3.32) se tiene:

$$\begin{aligned} y_2 &= -4\sqrt{3} \frac{\partial_\phi^2 V^{1/2}}{\kappa H} = \frac{4\sqrt{3}}{\kappa H} \frac{A^2}{4\lambda^2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\phi}{\lambda}\right) \right]^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\lambda^2 \kappa H} V^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{\lambda^2 \kappa H} \frac{\sqrt{3} H}{\kappa} y, \\ \therefore y_2 &= \frac{3}{\kappa \lambda^2} y \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Es lo que se presenta en la Tabla 3.1 y en [2].

De la misma forma se pueden obtener todas las formas de  $y_2$  que se dan en la Tabla 3.1 para sus correspondientes potenciales.

### B.3. Proceso inverso

A continuación presentamos el proceso inverso de como se obtienen los potenciales de la Tabla 3.2 con los parámetros dados ( $\alpha_i$ 's). Si expandimos hasta segundo orden la ecuación (3.46) tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_{\kappa\phi} \gamma &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[ \gamma^2 + 2\alpha_0 + 2\alpha_1 \gamma + 2\alpha_2 \gamma^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[ 2\alpha_0 + 2\alpha_1 \gamma + (1 + 2\alpha_2) \gamma^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Para los parámetros  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  y  $\alpha_2 \neq -\frac{1}{2}$ , tenemos que:

$$\partial_{\kappa\phi}\gamma = \frac{1}{2\sqrt{6}}(1 + 2\alpha_2)\gamma^2. \quad (\text{B.50})$$

Integrando

$$-\frac{2\sqrt{6}}{1 + 2\alpha_2}\gamma^{-1} = \kappa\phi + A', \quad (\text{B.51})$$

Donde  $A'$  es una constante de integración. Usando la ecuación auxiliar (3.45) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A' + \kappa\phi} &= -\frac{1 + 2\alpha_2}{2\sqrt{6}}\gamma \\ &= -\frac{1 + 2\alpha_2}{2\sqrt{6}}(-2\sqrt{6})\frac{\partial_{\kappa\phi}V^{1/2}}{V^{1/2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

así solo queda integrar para  $V(\phi)$

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha_2)\ln V^{1/2} &= \ln(A' + \kappa\phi) + \ln B' \\ \left[\frac{1 + 2\alpha_2}{2}\right]\ln V(\phi) &= \ln[B'(A'\kappa\phi)] \\ &= \ln(B'A' + B'\kappa\phi) \\ &= \ln(A + B\phi), \end{aligned}$$

donde  $\ln B'$  es otra constante de integración y después se toma el cambio  $A = B'A'$  y  $B = B'\kappa$ . Entonces tomando la exponencial en ambos lados, se tiene:

$$\therefore V(\phi)(A + B\phi)^{\frac{2}{1+2\alpha_2}} \quad (\text{B.53})$$

Este es el potencial de clase **Ia** que se presenta en la Tabla 3.2 y en [2].

Para los parámetros  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  y  $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ , tenemos que:

$$\partial_{\kappa\phi}\gamma = 0, \quad (\text{B.54})$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \text{constante} = B' = -2\sqrt{6} \frac{\partial_{\kappa\phi} V^{1/2}}{V^{1/2}}, \quad (\text{B.55})$$

usando la ecuación auxiliar (3.45), luego:

$$\frac{\partial_{\kappa\phi} V^{1/2}}{V^{1/2}} = -\frac{B'}{2\sqrt{6}} = B'', \quad (\text{B.56})$$

Integrando para  $V(\phi)$

$$\begin{aligned} \ln V^{1/2} &= B''\kappa\phi + \ln A \\ \frac{1}{2} \ln V &= B\phi + \ln A, \end{aligned}$$

donde  $B = B''\kappa$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \ln \frac{V}{A^2} &= 2B\phi, \\ \therefore \quad V(\phi) &= A^2 e^{2B\phi}. \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Este es el potencial de clase **Ib** que se presenta en la Tabla 3.2 y en [2].

Para los parámetros  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 \neq -\frac{1}{2}$ , tenemos que:

$$\partial_{\kappa\phi} \gamma = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[ 2\alpha_1 \gamma + (1 + 2\alpha_2) \gamma^2 \right]. \quad (\text{B.58})$$

Integrando

$$\int \frac{d\gamma}{2\alpha_1 \gamma + (1 + 2\alpha_2) \gamma^2} = \frac{\kappa\phi}{2\sqrt{6}} + \ln A', \quad (\text{B.59})$$

donde  $A'$  es una constante de integración. Para resolver la integral de  $\gamma$  descomponemos por fracciones parciales, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha_1 \gamma + (1 + 2\alpha_2) \gamma^2} &= \frac{1}{\gamma [\alpha_1 + (1 + 2\alpha_2) \gamma]} \\ &= \frac{\Omega}{\gamma} + \frac{\Psi}{\alpha_1 + (1 + 2\alpha_2) \gamma} \end{aligned}$$

Resolviendo encontramos que:

$$\Omega = \frac{1}{2\alpha_1},$$

$$\Psi = -\frac{1+2\alpha_2}{2\alpha_1},$$

Así tenemos

$$\int \frac{d\gamma}{2\alpha_1\gamma + (1+2\alpha_2)\gamma^2} = \frac{1}{2\alpha_1} \int \frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{1+2\alpha_2}{2\alpha_1} \int \frac{d\gamma}{(1+2\alpha_2)[2\alpha_1/(1+2\alpha_2) + \gamma]}$$

$$= \frac{1}{2\alpha_1} \left[ \ln \gamma - \ln \left( \frac{2\alpha_1}{1+2\alpha_2} + \gamma \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\alpha_1} \ln \left[ \frac{\gamma}{\frac{2\alpha_1}{1+2\alpha_2} + \gamma} \right] = \frac{\alpha_1 \kappa \phi}{\sqrt{6}} + \ln A',$$

$$\therefore \frac{\gamma}{\frac{2\alpha_1}{1+2\alpha_2} + \gamma} = A' \exp \left( \frac{\alpha_1 \kappa \phi}{\sqrt{6}} \right).$$

Despejando  $\gamma$  y usando la ecuación auxiliar (3.45)

$$\gamma = -2\sqrt{6} \frac{\partial_{\kappa\phi} V^{1/2}}{V^{1/2}} = \left( \frac{2\alpha_1}{1+2\alpha_2} \right) \frac{A' \exp \left( \frac{\alpha_1 \kappa \phi}{\sqrt{6}} \right)}{1 - A' \exp \left( \frac{\alpha_1 \kappa \phi}{\sqrt{6}} \right)}.$$

Integrando para  $V(\phi)$

$$-\sqrt{6} \frac{1+2\alpha_2}{\alpha_1} \ln V^{1/2} = \int \frac{A' \exp \left( \frac{\alpha_1 \kappa \phi}{\sqrt{6}} \right)}{1 - A' \exp \left( \frac{\alpha_1 \kappa \phi}{\sqrt{6}} \right)} d(\kappa\phi) + \ln B,$$

donde  $B$  es otra constante de integración. Para resolver la última integral tomamos el cambio de variable  $U = 1 - A' \exp \left( \frac{\alpha_1 \kappa \phi}{\sqrt{6}} \right)$  entonces tenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{6}}{\alpha_1} (1 + 2\alpha_2) \ln V^{1/2} &= -\frac{\sqrt{6}}{\alpha_1} \int \frac{dU}{U} + \ln B \\
\ln V^{\frac{1+2\alpha_2}{2}} &= \ln \left[ 1 - A' \exp \left( \frac{\alpha_1 \kappa \phi}{\sqrt{6}} \right) \right] + \ln B \\
&= \ln \left[ B + A \exp \left( \frac{\alpha_1 \kappa \phi}{\sqrt{6}} \right) \right],
\end{aligned}$$

donde  $A = -BA'$ .

$$\therefore V(\phi) = \left[ A \exp \left( \frac{\alpha_1 \kappa \phi}{\sqrt{6}} \right) + B \right]^{\frac{2}{1+2\alpha_2}}. \quad (\text{B.60})$$

Este es el potencial de clase **IIIa** que se presenta en la Tabla 3.2 y en [2].

---

# Apéndice C

## Resultados

### C.1. Diagramas triangulares

A continuación presentamos los diagramas triangulares completos de las Figuras 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 y 4.10 se muestran los parámetros restantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $M$  y  $\Delta_M$ . Podemos ver que la estimación de probabilidad media, que se muestra como en línea punteada, tiene una tendencia la línea solida a la línea punteada. Sin embargo, las distribuciones de probabilidad no tienen una forma muy definida por lo que se procedió por realizar otras graficas con más pasos. En la Figura C.9 y C.10 se muestra el diagrama triangular con un millón de pasos par  $\alpha_2 = -2,5$ . podemos observar que las distribuciones de probabilidad tienen una forma más definidas y de la misma forma las graficas gaussianas incluso en algunos casos la degeneración que se muestran en las Figuras C.1, C.2, C.3, C.4, C.5, C.6, C.7 y C.8 desaparece.

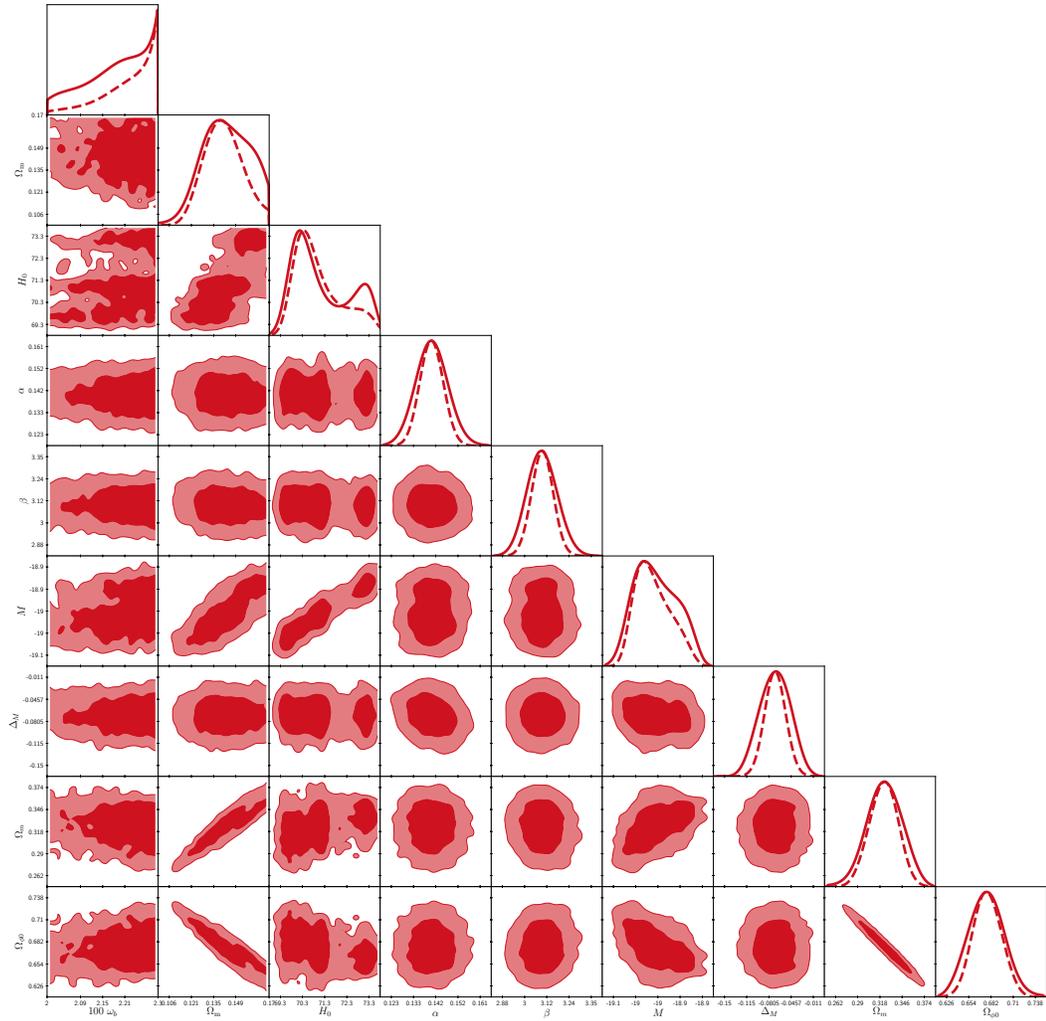


Figura C.1: Diagrama triangular para el potencial de clase **Ia** y parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -2,5$ .

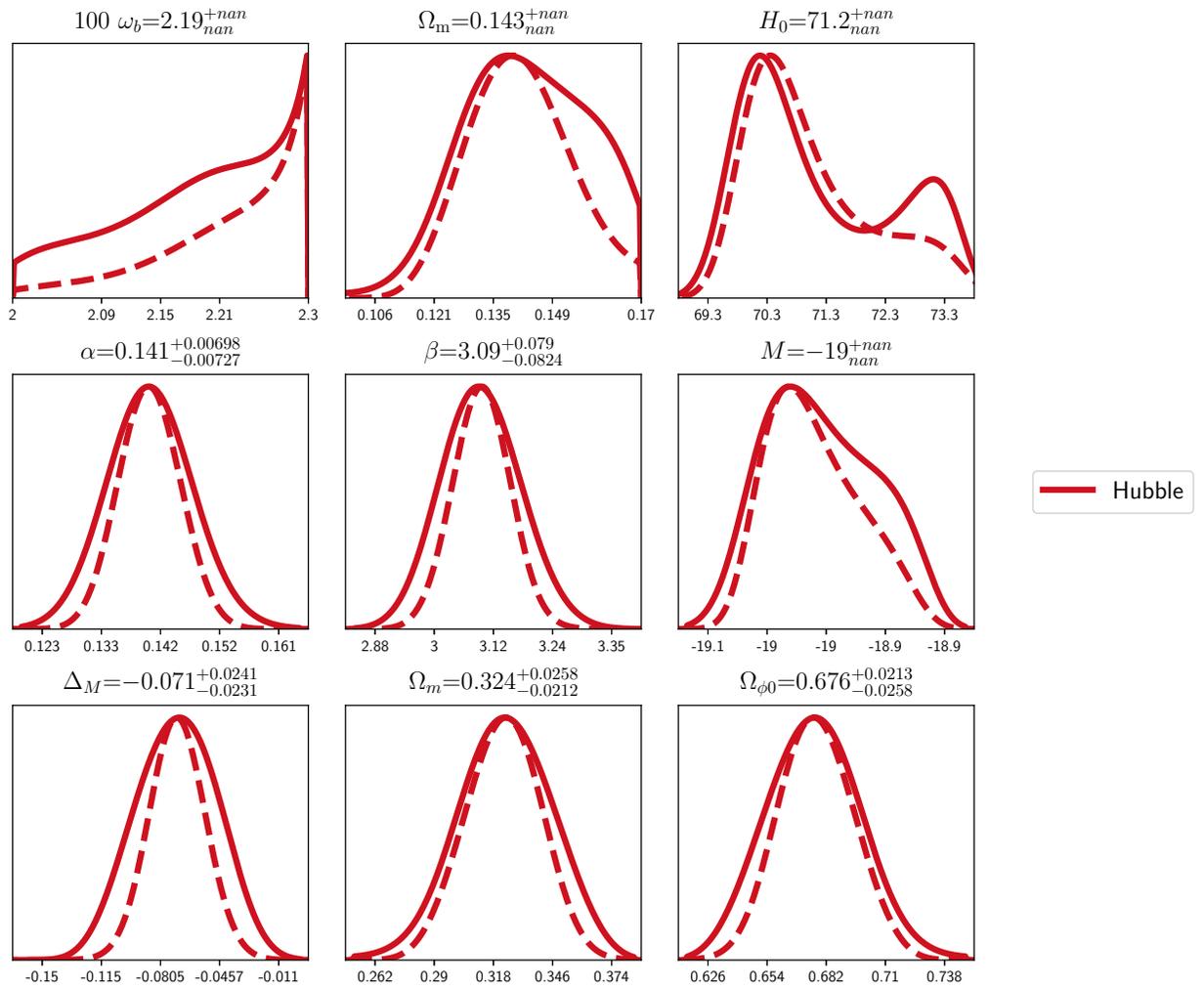


Figura C.2: Graficas gaussianas para el potencial de clase **Ia** y parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -2,5$ .

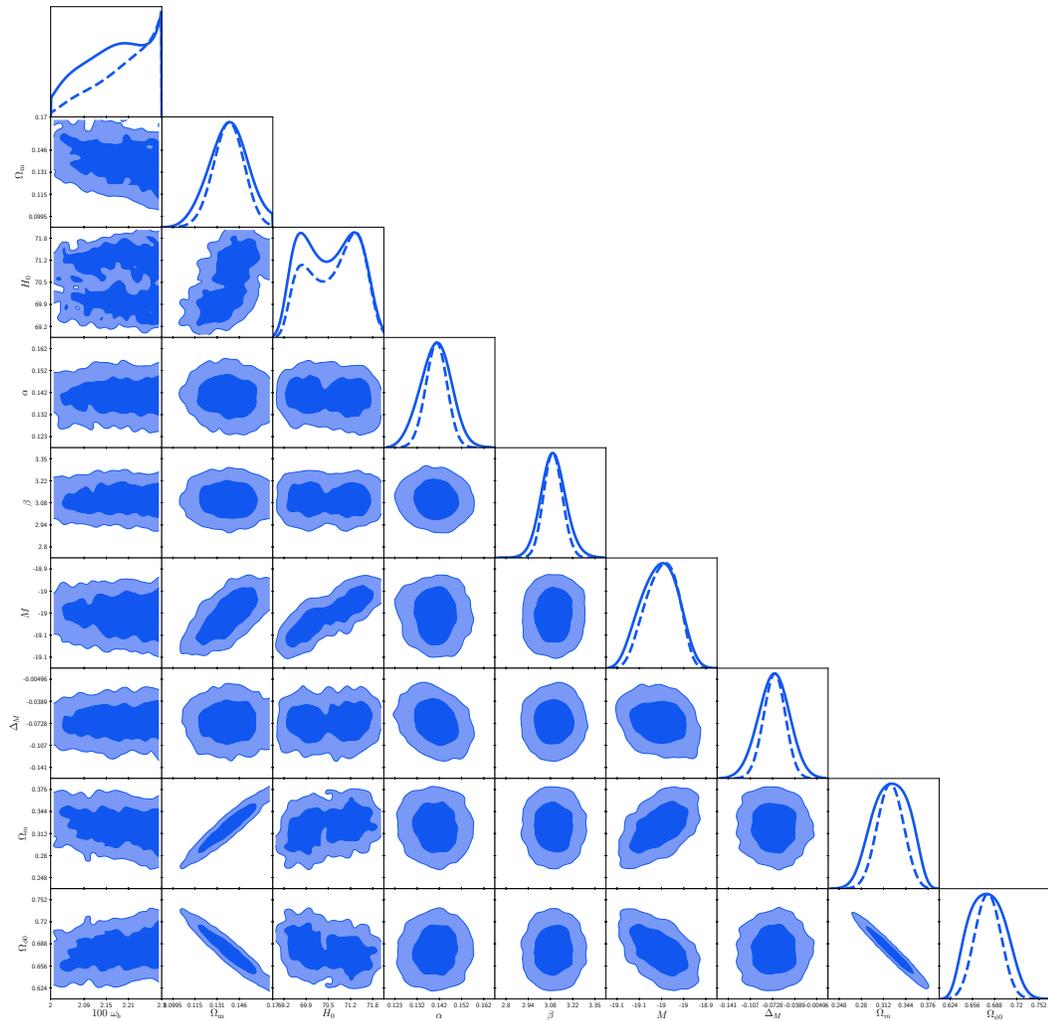


Figura C.3: Diagrama triangular para el potencial de clase **Ia** y parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -1,5$ .

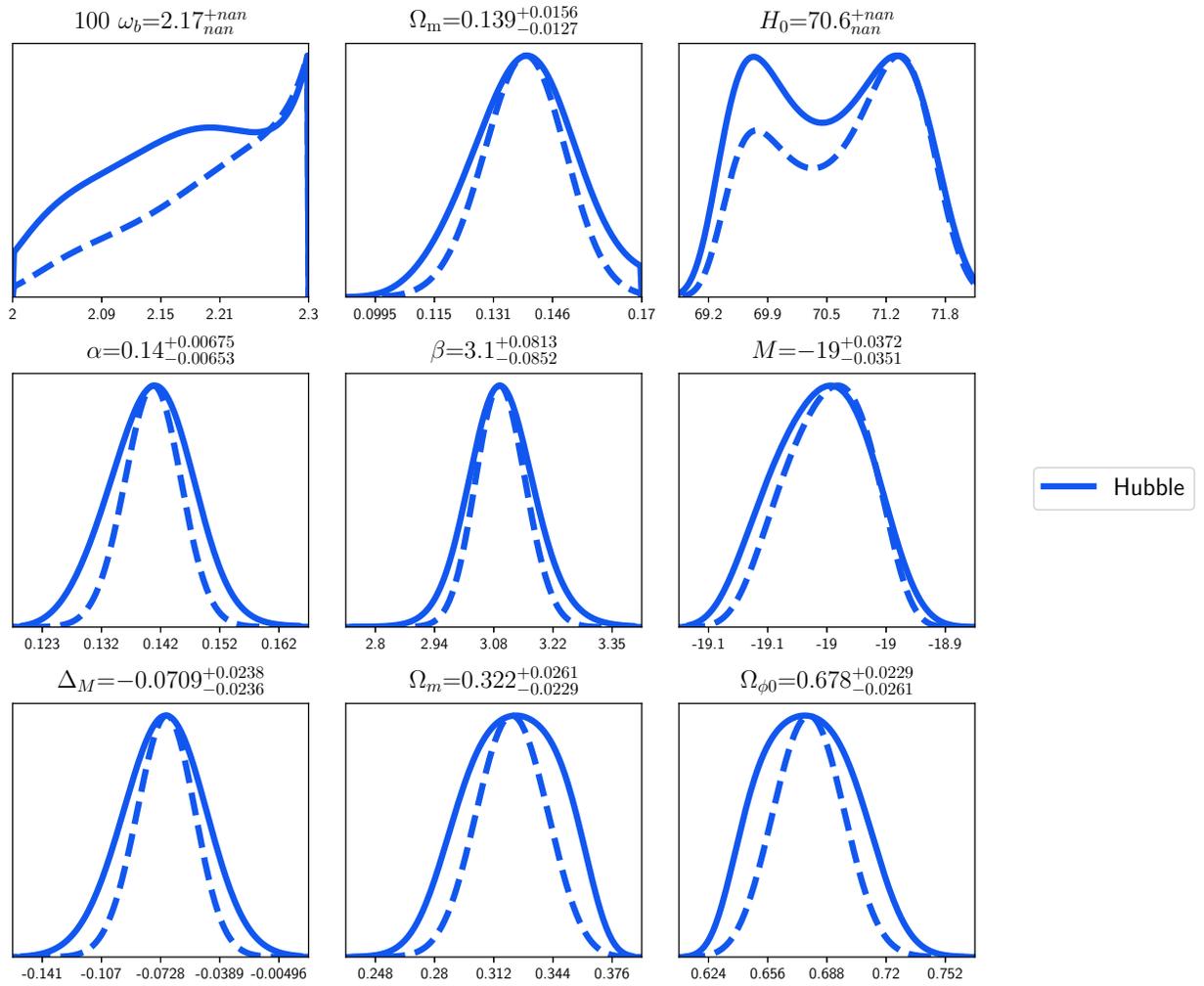


Figura C.4: Graficas gaussianas para el potencial de clase **Ia** y parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -1,5$ .

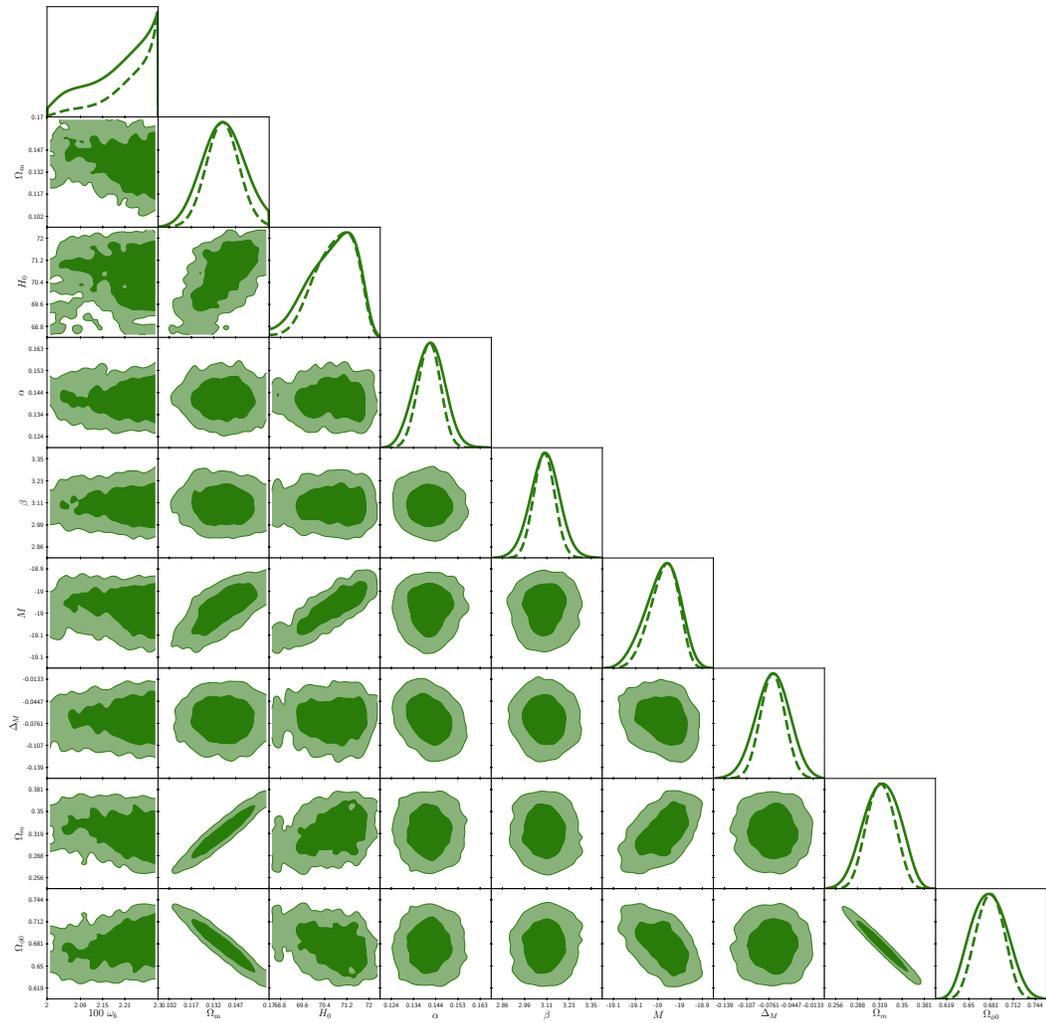


Figura C.5: Diagrama triangular para el potencial de clase **Ia** y parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -1$ .

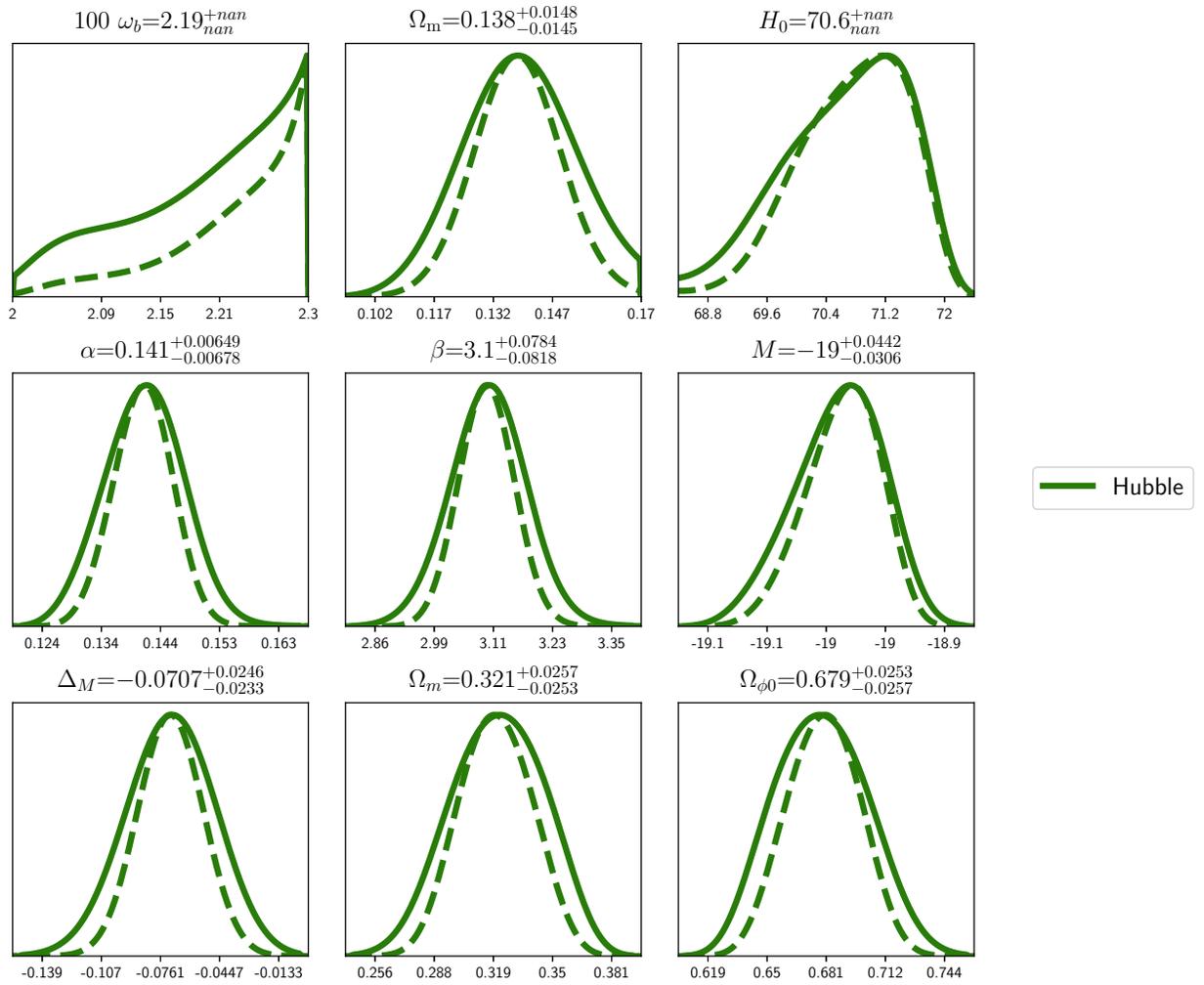


Figura C.6: Graficas gaussianas para el potencial de clase **Ia** y parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -1$ .

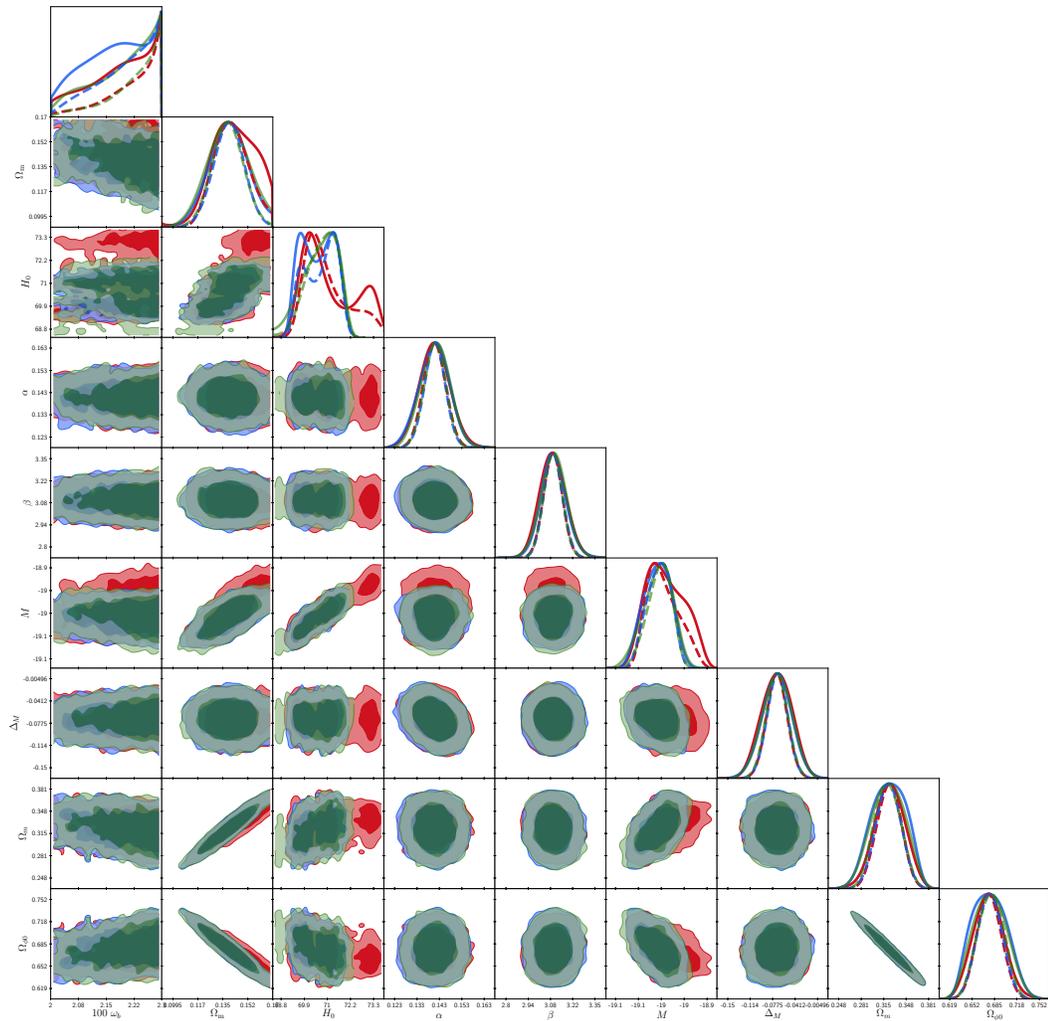


Figura C.7: Diagrama triangular del empalme de los tres diagramas anteriores para los parámetros cosmológicos  $\alpha_2 = -2,5$ ,  $\alpha_2 = -1,5$  y  $\alpha_2 = -1$ .

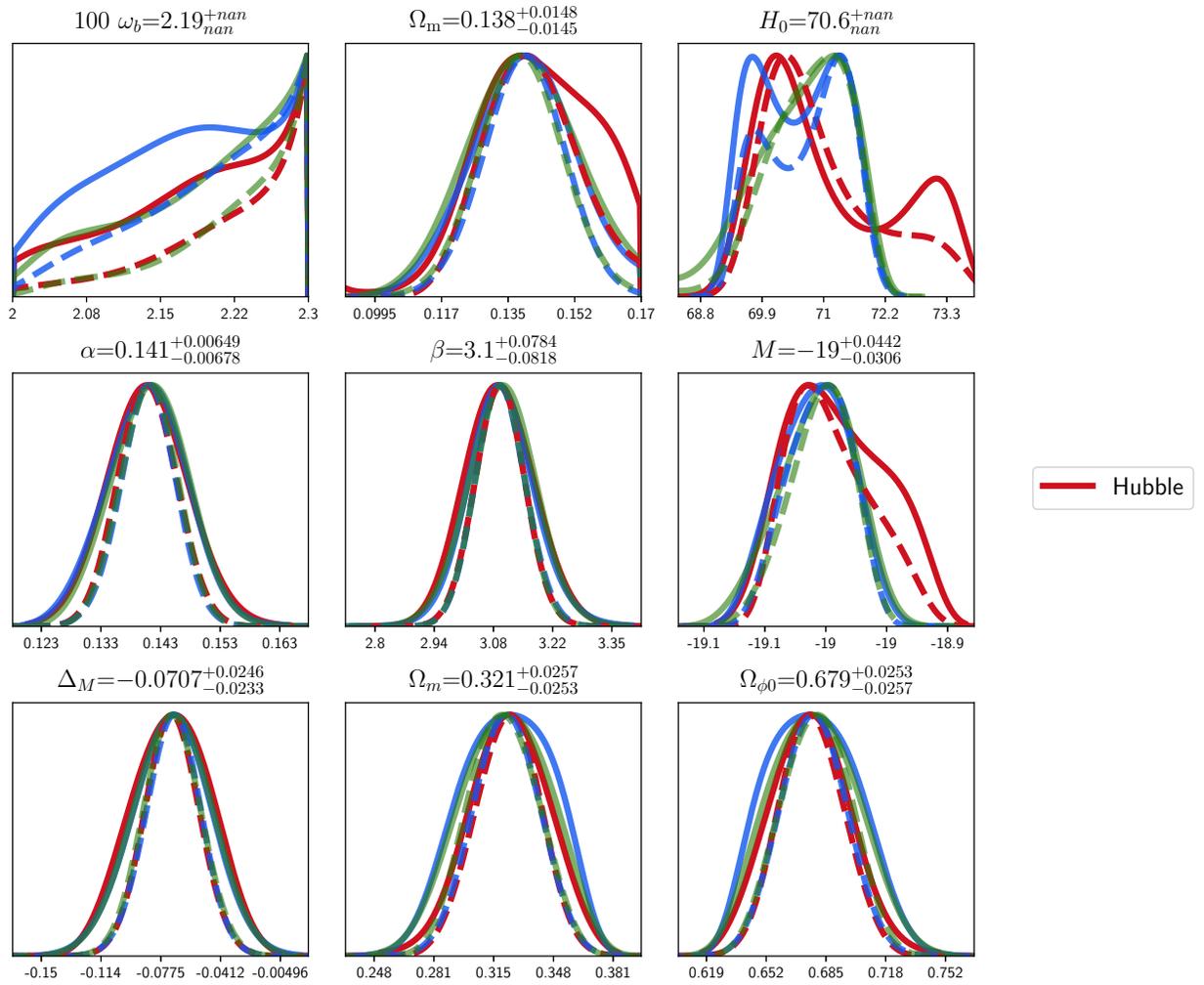


Figura C.8: Graficas gaussianas del empalme de las tres anteriores para los parámetros cosmológicos  $\alpha_2 = -2,5$ ,  $\alpha_2 = -1,5$  y  $\alpha_2 = -1$ .

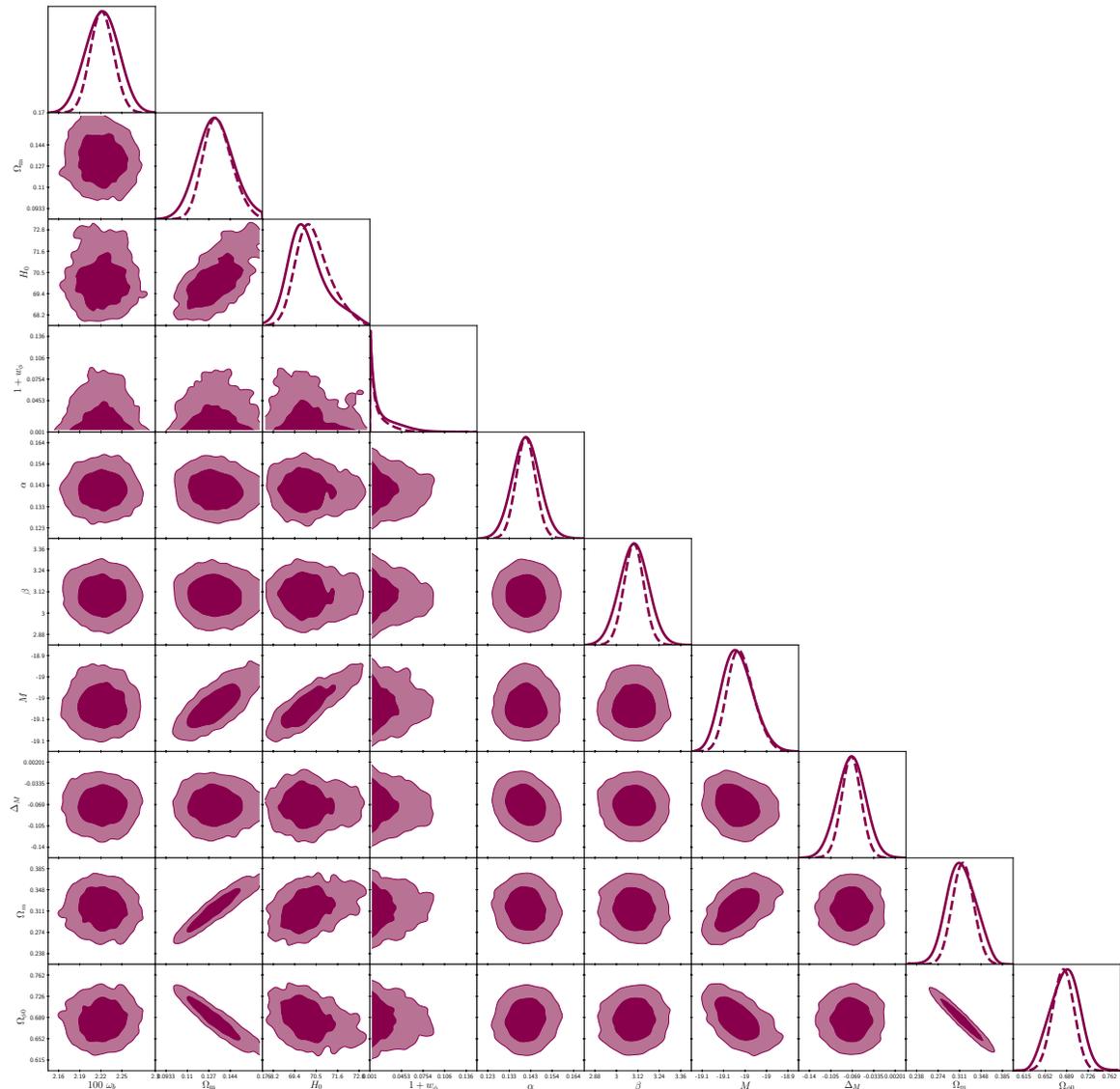


Figura C.9: Diagrama triangular con un millón de pasos para el parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -2,5$ .

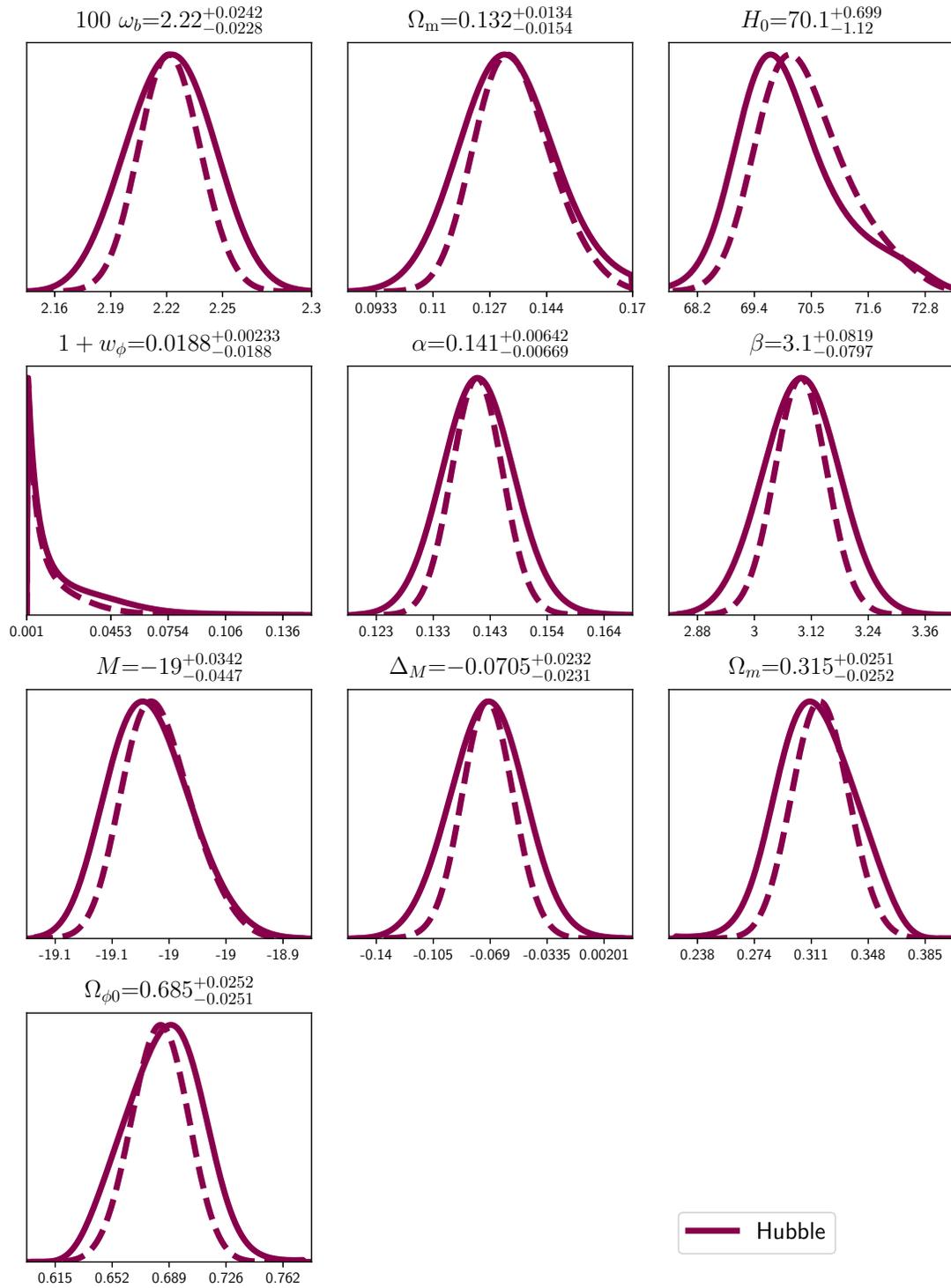


Figura C.10: Graficas gaussianas con un millón de pasos para el parámetro cosmológico  $\alpha_2 = -2,5$ .

---

# Bibliografía

- [1] Solo para Entendidos, “[www.soloentendidos.com](http://www.soloentendidos.com), consultada en marzo del 2019,” 22 de Diciembre de 2015.
- [2] A. X. G.-M. Nandan Roy and L. A. Ureña-López, “New general parametrization of quintessence fields and its observational constraints,” *Physical Review D*, vol. 98, 2018.
- [3] B. R. Junpei Ooba and N. Sugiyama, “Planck 2015 constraints on spatially-flat dynamical dark energy models,” pp. 1–9, 2018.
- [4] B. Ryden, *Introduction to cosmology*. Pearson New International Edition, 2013.
- [5] V. Mukhanov, *Physical Foundations of cosmology*. Cambridge U. P., 2005.
- [6] B. Schutz, *A first course in general relativity*. Cambridge U. P., 2009.
- [7] A. Liddle, *An introduction to modern cosmology*. John Wiley and Sons, Ltd., 2015.
- [8] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark energy, theory and observations*. Cambridge U. P., 2010.
- [9] “Supersymmetric qcd and its massless limit: An effective lagrangian analysis,” *Nuclear Physics B*, vol. 218, no. 2, pp. 493 – 513, 1983.
- [10] P. Brax and J. Martin, “Quintessence and supergravity,” *Physics Letters B*, vol. 468, no. 1, pp. 40 – 45, 1999.

- 
- [11] Y. Nomura, T. Watari, and T. Yanagida, “Quintessence axion potential induced by electroweak instanton effects,” *Physics Letters B*, vol. 484, no. 1, pp. 103 – 111, 2000.
- [12] J. E. Kim and H.-P. Nilles, “A quintessential axion,” *Physics Letters B*, vol. 553, no. 1, pp. 1 – 6, 2003.
- [13] E. Witten, “The cosmological constant from the viewpoint of string theory,” 2000.
- [14] V. Sahni, T. D. Saini, A. A. Starobinsky, and U. Alam, “Statefinder—a new geometrical diagnostic of dark energy,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, vol. 77, p. 201–206, Mar 2003.
- [15] P. Freacuta, M. Trigiante, and A. V. Proeyen, “Stable de sitter vacua from  $\mathcal{N} = 2$  supergravity,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 19, p. 4167–4193, Jul 2002.
- [16] M. Gasperini and G. Veneziano, “The pre-big bang scenario in string cosmology,” *Physics Reports*, vol. 373, p. 1–212, Jan 2003.
- [17] V. SAHNI and A. STAROBINSKY, “Reconstructing dark energy,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 15, p. 2105–2132, Dec 2006.
- [18] V. SAHNI and A. STAROBINSKY, “The case for a positive cosmological  $\lambda$ -term,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 09, p. 373–443, Aug 2000.
- [19] J. E. Lidsey, D. Wands, and E. Copeland, “Superstring cosmology,” *Physics Reports*, vol. 337, p. 343–492, Oct 2000.
- [20] P. J. Kernan and S. Sarkar, “No crisis for big bang nucleosynthesis,” *Phys. Rev. D*, vol. 54, pp. R3681–R3685, Sep 1996.
- [21] L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, “Towards the theory of reheating after inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 56, pp. 3258–3295, Sep 1997.

- 
- [22] A. R. Liddle, A. Mazumdar, and F. E. Schunck, “Assisted inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 58, p. 061301, Aug 1998.
- [23] P. J. E. Peebles and A. Vilenkin, “Quintessential inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 063505, Feb 1999.
- [24] G. Felder, L. Kofman, and A. Linde, “Instant preheating,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 123523, May 1999.
- [25] P. Binétruy, “Models of dynamical supersymmetry breaking and quintessence,” *Phys. Rev. D*, vol. 60, p. 063502, Aug 1999.
- [26] A. d. I. Macorra and G. Piccinelli, “Cosmological evolution of general scalar fields and quintessence,” *Phys. Rev. D*, vol. 61, p. 123503, May 2000.
- [27] A. A. Coley and R. J. v. d. Hoogen, “Dynamics of multi-scalar-field cosmological models and assisted inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 62, p. 023517, Jun 2000.
- [28] T. Barreiro, E. J. Copeland, and N. J. Nunes, “Quintessence arising from exponential potentials,” *Phys. Rev. D*, vol. 61, p. 127301, 2000.
- [29] P. Brax and J. Martin, “Robustness of quintessence,” *Phys. Rev. D*, vol. 61, p. 103502, 2000.
- [30] K. Choi, “String or m theory axion as a quintessence,” *Phys. Rev. D*, vol. 62, p. 043509, Jul 2000.
- [31] V. Sahni and L. Wang, “New cosmological model of quintessence and dark matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 62, p. 103517, 2000.
- [32] E. J. Copeland, N. J. Nunes, and F. Rosati, “Quintessence models in supergravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 62, p. 123503, Nov 2000.
- [33] S. C. C. Ng, N. J. Nunes, and F. Rosati, “Applications of scalar attractor solutions to cosmology,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, p. 083510, Sep 2001.
- [34] R. Bean, S. H. Hansen, and A. Melchiorri, “Early-universe constraints on dark energy,” *Phys. Rev. D*, vol. 64, p. 103508, Oct 2001.

- 
- [35] M. Gasperini, F. Piazza, and G. Veneziano, “Quintessence as a runaway dilaton,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 023508, Dec 2001.
- [36] R. Kallosh, A. Linde, S. Prokushkin, and M. Shmakova, “Gauged supergravities, de sitter space, and cosmology,” *Phys. Rev. D*, vol. 65, p. 105016, May 2002.
- [37] R. Kallosh, A. Linde, S. Prokushkin, and M. Shmakova, “Supergravity, dark energy, and the fate of the universe,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 123503, Dec 2002.
- [38] S. A. Kim, A. R. Liddle, and S. Tsujikawa, “Dynamics of assisted quintessence,” *Phys. Rev. D*, vol. 72, p. 043506, Aug 2005.
- [39] J. Ohashi and S. Tsujikawa, “Assisted dark energy,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 103513, Nov 2009.
- [40] R. D. Peccei and H. R. Quinn, “ $CP$  conservation in the presence of pseudoparticles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 38, pp. 1440–1443, Jun 1977.
- [41] J. A. Frieman, C. T. Hill, A. Stebbins, and I. Waga, “Cosmology with ultralight pseudo nambu-goldstone bosons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 2077–2080, Sep 1995.
- [42] C. J. Copi, D. N. Schramm, and M. S. Turner, “Assessing big-bang nucleosynthesis,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 3981–3984, Nov 1995.
- [43] I. Zlatev, L. Wang, and P. J. Steinhardt, “Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, pp. 896–899, Feb 1999.
- [44] T. Damour, F. Piazza, and G. Veneziano, “Runaway dilaton and equivalence principle violations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 081601, Aug 2002.
- [45] L. J. Hall, Y. Nomura, and S. J. Oliver, “Evolving dark energy with  $\omega \neq -1$ ,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 141302, Sep 2005.
- [46] B. A. Bassett, S. Tsujikawa, and D. Wands, “Inflation dynamics and reheating,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 78, pp. 537–589, May 2006.

- 
- [47] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*. Addison-Wesley, 1990.
- [48] A. R. L. Edmund J. Copeland and D. Wands, “Exponential potentials and cosmological scaling solutions,” *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, vol. 57, pp. 4686–4690, 1998.
- [49] N. Roy and N. Banerjee, “Quintessence scalar field: A dynamical systems study,” *The European Physical Journal Plus*, vol. 129, p. 162, 2014.
- [50] S. Dutta and R. J. Scherrer, “Hilltop quintessence,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 123525, 2008.
- [51] K. Freese and W. H. Kinney, “Natural inflation: consistency with cosmic microwave background observations of planck and BICEP2,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2015, pp. 044–044, 2015.
- [52] K. Freese, J. A. Frieman, and A. V. Olinto, “Natural inflation with pseudo nambu-goldstone bosons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 65, pp. 3233–3236, 1990.
- [53] P. Peebles and B. Ratra, “Cosmology with a time-variable cosmological ‘constant’,” vol. 325, pp. L17–L20, 1988.
- [54] A. Starobinsky, “A new type of isotropic cosmological models without singularity,” *Physics Letters B*, vol. 91, no. 1, pp. 99 – 102, 1980.
- [55] J. J. M. Carrasco, R. Kallosh, and A. Linde, “ $\alpha$ -attractors: Planck, lhc and dark energy,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2015, p. 147, 2015.
- [56] W. Fang, Y. Li, K. Zhang, and H.-Q. Lu, “Exact analysis of scaling and dominant attractors beyond the exponential potential,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 26, p. 155005, 2009.
- [57] L. A. Ureña López and T. Matos, “New cosmological tracker solution for quintessence,” *Phys. Rev. D*, vol. 62, p. 081302, 2000.





León, GTO, 15 de junio de 2021

**Dr. Delepine, David Yves Ghislain**

Director de la División de Ciencias e Ingenierías  
Universidad de Guanajuato campus León

Por este medio, le comunico que me fue entregada para revisión en calidad de sinodal, la tesis con título *Modelos de Energía Oscura tipo Quintaesencia*, del estudiante de Maestría en Física, **Ricardo Yair Martínez Ibarra**.

Cabe señalar que el Lic. **Martínez Ibarra** mostró secuencia lógica en su escrito y amplio dominio del tema, atendió además mis sugerencias, por lo que sugiero se le permita llevar a cabo su defensa para la obtención del grado de Maestro en Física.

Permítame enviar un cordial saludo y agradece su fina atención a la presente

ATENTAMENTE  
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

Una firma manuscrita en azul que parece decir "Teodoro Cordova Fraga".

Dr. Teodoro CORDOVA FRAGA  
Profesor Titular B  
Profesor con Perfil Deseable  
SNI nivel II





**Asunto:** Revisión de Tesis  
León, Guanajuato, Junio 2021

**Dr. David Y. G. Delepine**  
**Director**  
**División de Ciencias e Ingenierías, Campus León**  
**Universidad de Guanajuato**  
**PRESENTE**

Estimado Dr. Delepine:

Por medio de la presente le informo que he revisado la tesis "Modelos de Energía Oscura tipo Quintaesencia" escrita por el estudiante de la Maestría en Física de la DCI, Ricardo Yair Martínez Ibarra. En mi opinión la tesis esta lista para ser presentada y estoy de acuerdo que se proceda al examen recepcional, una vez que se cumplan los procedimientos administrativos correspondientes.

Sin más por el momento, le envío saludos cordiales.

ATENTAMENTE  
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

Una firma manuscrita en tinta que parece ser "Argelia Bernal Bautista".

DRA. ARGELIA BERNAL BAUTISTA





Centro De Investigación Y De Estudios Avanzados Del I.P.N.

Ciudad de México; 14 de junio de 2021

**Dr. David Ghislain Delepine**  
Director  
División de Ciencias e Ingenierías  
Universidad de Guanajuato  
Presente

Por medio de la presente me permito informar que he leído la tesis titulada "**Modelos de Energía Oscura tipo Quintaesencia**", que para obtener el grado de Maestro en Física ha sido elaborada por el **Lic. en Física y Matemáticas Ricardo Yair Martínez Ibarra**, con **NUA 723656**. En mi opinión, la tesis cumple con los requisitos de calidad correspondientes al grado académico al que se aspira. Por lo cual recomiendo se proceda a la defensa de la tesis.

Atentamente,

A handwritten signature in black ink that reads "Tonatiuh Matos". The signature is fluid and cursive, with a long horizontal stroke at the beginning.

Dr. Tonatiuh Matos  
Investigador  
Departamento de Física  
CINVESTAV





Universidad  
de Guanajuato

**Alberto Diez Tejedor**  
Profesor Asociado C  
Departamento de Física  
DCI-León

León, Guanajuato; a 11 de junio de 2021

Dr. David Yves Ghislain Delepine  
Director de la División de Ciencias e Ingenierías  
Campus León, Universidad de Guanajuato  
P R E S E N T E

Estimado Dr. Delepine,

Por este medio, me permito informarle que he leído y revisado la tesis titulada "**Modelos de energía oscura tipo quintaesencia,**" que realizó el estudiante **Ricardo Yair Martínez Ibarra** como requisito para obtener el grado de Maestro en Física.

Considero que el trabajo de tesis realizado por Ricardo Yair reúne los requisitos necesarios de calidad e interés académico para que sea defendido en un examen de grado, razón por la cual extiendo mi aval para que así se proceda.

Sin más que agregar, agradezco su atención y aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE  
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

Dr. Alberto Diez Tejedor  
Departamento de Física  
DCI, Campus León

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA, DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN**

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. (477) 788-5100, Fax: (477) 788-5100 ext. 8410, <http://www.fisica.ugto.mx>





Universidad  
de Guanajuato

CAMPUS LEÓN  
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Asunto:** Revisión de tesis de maestría  
León, Gto., Junio de 2021

**DR. DAVID Y. G. DELEPINE**  
**DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS**  
**PRESENTE**

Por este medio le comunico que he revisado la tesis **Modelos de energía oscura tipo quintaesencia**, escrita por el Lic. **Ricardo Yair Martínez Ibarra**, para efecto de presentarla para la obtención del grado de Maestro en Física.

El texto de la tesis se encuentra completo y se presentan resultados interesantes y bien explicados sobre modelos de energía oscura con campos escalares, conocidos como modelos de quintaesencia. En mi opinión, los principios teóricos se presentan clara y extensamente, y se llegan a resultados bien entendidos, tanto analítica como numéricamente. Igualmente, he podido ver que el texto fue modificado por el autor para reflejar las sugerencias y comentarios que le fueron expresados durante la revisión. En mi opinión la tesis cumple con los elementos necesarios para ser defendida ante el comité sinodal asignado en fecha próxima que sea acordada de manera conjunta.

Agradeciendo su amable atención, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**  
**“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”**

**DR. LUIS ARTURO UREÑA LÓPEZ**  
**PROFESOR TITULAR C**