

UNIVERSIDAD DE  
GUANAJUATO



DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS  
Campus León

**Teorías alternativas a la gravitación y objetos astrofísicos  
compactos**

Autor: M.F. Armando A. Roque Estrada

Tesis presentada en opción al grado científico de

**Doctor en Física**

Asesores:

Dr. Alberto Diez Tejedor

Dr. Juan Barranco Monarca

Julio del 2021

## Agradecimientos

“Cuando bebas agua,  
recuerda la fuente”

Proverbio chino

Mis más sinceros agradecimientos a mis tutores Alberto Diez y Juan Barranco por haberme exigido siempre el máximo en durante el desarrollo de los diferentes proyectos de investigación. Sobre todo les agradezco por su gran paciencia y apoyo durante todo mi posgrado, además de sus contribuciones y consejos en la confección de este manuscrito. De ellos aprendí grandes lecciones que me ayudaron a crecer como físico y como persona, aprendí entre otras cosas que las grandes metas solo se logran con sacrificio y entrega, que todo científico debe ser modesto y aprender a escuchar. Gracias por haberme ayudado a crecer, sus consejos y ayuda fueron muy importantes durante toda esta etapa.

Un agradecimiento especial para los doctores Gustavo Niz, Javier Chagoya, Alma Xóchitl González y Luis Ureña, su ayuda y consejos durante todo mi doctorado, fueron fundamentales en el desarrollo de varios de los proyectos aquí presentados.

También me gustaría agradecer a CONACYT por haberme dado la oportunidad y el privilegio de estudiar en la *División de Ciencias e Ingenierías*. Gracias a todo el personal de la División por el apoyo durante todo mi posgrado.

Por último y no menos importante, mi mayor agradecimiento a mis padres Luisa y Andrés (gracias por todo el sacrificio realizado), mis hermanas Eliza y Elismary, mi amiga Norma, a todos gracias por el apoyo. A toda mi familia (que por lo numerosa no nombro) va dedicada esta tesis. Sin ustedes; mi familia, hubiera sido imposible alcanzar esta meta, todos ustedes; son artífices de todos mis logros.

A todos aquellos que contribuyeron de una forma u otra a que esta tesis fuera posible,  
¡¡¡ Gracias !!!, este trabajo es también fruto de ustedes.

# ÍNDICE

<b>Declaración</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>Prólogo</b>	<b>VII</b>
<b>Notación</b>	<b>VII</b>
<b>1 ¿Relatividad General o sus Modificaciones?</b>	<b>1</b>
1.1 ¿Por qué ir más allá de la RG? ¿Por qué modificarla? . . . . .	3
1.2 ¿Cómo modificar o extender a la RG? . . . . .	6
1.3 Objetos compactos como laboratorios . . . . .	9
<b>2 Gravedad modificada o propiedades de la materia oscura fermiónica</b>	<b>11</b>
2.1 Gravedad tipo $f(R)$ . . . . .	13
2.1.1 Ecuaciones del campo . . . . .	13
2.1.2 Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff modificadas . . . . .	16
2.2 Ecuación de Estado . . . . .	17
2.2.1 Tensor de energía-momento . . . . .	18
2.2.2 Gas de fermiones oscuros . . . . .	24
2.3 Estrellas oscuras frías . . . . .	30
2.3.1 EOF en Relatividad General . . . . .	31
2.3.2 EOF en gravedad $R + \alpha R^2$ . . . . .	37
2.4 Semejanzas y diferencias entre las EOF en RG, y gravedad R-cuadrada . .	44
2.4.1 Compacidad . . . . .	45
2.4.2 Confusión . . . . .	47
2.5 Conclusiones Parciales . . . . .	51
<b>3 Posibles implicaciones de un grado de libertad escalar extra proveniente del sector gravitatorio</b>	<b>53</b>
3.1 El modelo gravedad (beyond) Horndeski . . . . .	53
3.2 Solitones en espacio plano . . . . .	58
3.2.1 Ecuaciones de movimiento . . . . .	59
3.2.1.1 Comportamiento cerca del origen origen: $r = 0$ . . . . .	63
3.2.1.2 Comportamiento asintótico en el infinito: $r \rightarrow \infty$ . . . . .	66

---

3.2.2	Perfiles Numéricos . . . . .	70
3.2.2.1	Modelo $G_4 \sim X$ con $F_4 \neq 0$ . . . . .	72
3.2.2.2	Comportamiento asintótico numérico . . . . .	76
3.2.2.3	Modelo $G_4 \sim X^2$ . . . . .	79
3.2.3	Estabilidad . . . . .	86
3.2.3.1	Teorema Noether . . . . .	86
3.2.3.2	Estabilidad de solitones en $G_4 \sim X^2$ . . . . .	88
3.2.4	Conclusiones Parciales . . . . .	94
3.3	Gravedad y solitones no topológicos . . . . .	96
3.3.1	Solitones no topológicos gravitacionales . . . . .	97
3.3.1.1	Ecuaciones de estructura . . . . .	100
3.3.1.2	Condiciones de frontera . . . . .	104
3.3.1.3	Perfiles numéricos . . . . .	109
3.3.1.4	Conexión con espacio plano . . . . .	115
3.3.2	Fenomenología . . . . .	120
3.3.2.1	Compacidad . . . . .	122
3.3.2.2	Radiación gravitatoria . . . . .	125
3.3.2.3	Lentes gravitacionales . . . . .	128
3.3.2.4	Disco delgado de acreción . . . . .	133
3.3.3	Conclusiones Parciales . . . . .	137
	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>141</b>
	<b>FUENTES CONSULTADAS</b>	<b>145</b>

# Declaración

Los resultados novedosos presentados en este trabajo (Capítulo 2 y 3) están basados en publicaciones y proyectos activos realizados en colaboración con otros investigadores durante mi Doctorado en la *División de Ciencias e Ingenierías* de la Universidad de Guanajuato. Estos aparecen citados en la parte inferior de la presente declaración. El contenido mostrado en el Capítulo 1 se sustenta en interpretaciones personales del autor y revisiones bibliográficas realizadas. Como principal fuente de consulta se destacan [1–4]. Durante todo el trabajo las referencias fueron citadas acorde a *UT Physics bibliographic style*.

Armando Andrés Roque Estrada

## Publicaciones

- CONFUSING DARK MATTER PARTICLE PROPERTIES WITH MODIFICATIONS TO GENERAL RELATIVITY, Armando A. Roque and J. Barranco, Journal reference: Phys. Rev. D 102, 104010 (2020), DOI: 10.1103/PhysRevD.102.104010.
- STRONG GRAVITATIONAL LENSING BY DHOST BLACK HOLES, Javier Chagoya, Ortiz, C., Benito Rodríguez and Armando A. Roque, Journal reference: Class. Quant. Grav. 38, 075026, DOI: 10.1088/1361-6382/abdd0d.

## Proyectos en desarrollo

- HORNDESKI STARS IN THEORIES WITH WEAKLY BROKEN GALILEON SYMMETRY, Juan Barranco, Javier Chagoya, Alberto Diez-Tejedor, Gustavo Niz and Armando A. Roque.
- MG-SOLITONS: DERIVATIVE COUPLING SUPPORTING COMPACT OBJECT, Juan Barranco, Javier Chagoya, Alberto Diez-Tejedor, Gustavo Niz and Armando A. Roque.

# RESUMEN

El presente trabajo estudia objetos autogravitantes compactos tanto en la Relatividad General como en modificaciones a la misma. Primero se abordan diferentes criterios que justifican ir más allá de la Relatividad General, argumentándose la importancia de los objetos compactos autogravitantes como una de las principales herramientas para poder discernir entre las múltiples teorías de la gravitación. De entre esta variedad de teorías hemos estudiado la existencia de objetos compactos estáticos y esféricamente simétricos en dos teorías populares: la llamada teoría de gravedad  $f(R)$  y la teoría beyond Horndeski. En el caso de las teorías  $f(R)$ , construimos objetos compactos constituidos de materia oscura fermiónica con auto-interacción en el límite degenerado, a las cuales llamamos Estrellas Oscuras Frías. Encontramos que en este caso es imposible usando sólo las propiedades gravitatorias de las Estrellas Oscuras Frías discriminar entre el modelo gravitatorio de fondo y características de los fermiones oscuros. En el contexto de los modelos beyond Horndeski estudiados se demostró la existencia teórica de solitones en un espacio tiempo plano, los cuales luego de ser acoplados a la gravedad adquieren características distintivas en los objetos auto-gravitantes compactos construidos. Se estudian algunas posibles observables astrofísicas que diferenciarían a estas configuraciones de las predicciones para esas mismas observables en el marco de la Relatividad General. En ambas teorías estudiadas se demuestra que es posible recuperar bajo ciertos límites los resultados predichos por la Relatividad General.

# Prólogo

Durante las últimas décadas varias de las predicciones arrojadas por el modelo gravitatorio propuesto por Albert Einstein: la Relatividad General [5], han sido confirmadas. Ya no son solo los llamados *test clásicos* [6–8] los que la favorecen; observaciones fuera del Sistema Solar [9], e incluso de nuestra Galaxia [10], parecen apoyar a este modelo como la teoría que mejor describe la interacción gravitatoria [11].<sup>1</sup> Sin embargo, para tener un modelo concordante con toda la evolución del Universo (y ciertos comportamientos gravitatorios), esta no es suficiente, al menos no considerando solo a la materia observada. En busca de encontrar esa teoría física concordante se han propuesto varias ideas; algunas proponen extender el Modelo Estándar de Partículas añadiéndole un *sector oscuro* [17–19], otras plantean extender la Relatividad General incluyendo nuevos grados de libertad (*gravitatorios*) [20,21] o incluso dimensiones extras [22,23]. De manera general todas estas extensiones tendrán que ser acorde a los resultados observacionales, o en otras palabras, la Relatividad General se ha de recuperar a las diferentes escalas donde las observaciones la validan, p. ej. en nuestro sistema solar donde los *test clásicos* la corroboran. En un posterior capítulo se abordará con más detalles las diferentes posibilidades mediante las cuales se podría extender a la Relatividad General.

Debido a la gran diversidad de modelos teóricos propuestos, en muchas ocasiones resulta necesario combinar distintos observables astrofísicos para poder discernir o al menos acotar, los distintos parámetros libres que suelen presentarse en cada modelo. En ese sentido, los objetos compactos son excelentes laboratorios; en especial ahora que es posible detectar su emisión en ondas gravitacionales. En este trabajo abarcaremos tanto extensiones al Modelo Estándar de Partícula, como a la Relatividad General, en ocasiones en conjunto y por separado, en todos los casos el análisis realizado se centra en el contexto de los objetos compactos. Cada capítulo presenta un estudio sobre las características principales de estos objetos, con el objetivo de señalar particularidades que permitan motivar futuros análisis observacionales. La estructura seguida en la realización del presente trabajo es la siguiente:

En el Capítulo 1 se exponen diferentes criterios que justifican (a criterio del autor) ir más allá de la Relatividad General, argumentándose la importancia de los objetos compactos como una de las principales herramientas para poder discernir entre las múltiples teorías de la gravitación. El contenido y conclusiones mostradas se sustenta en revisiones bibliográficas realizadas, e interpretaciones personales del autor.

---

<sup>1</sup>Para una revisión detallada (y actualizaciones) de los llamados *test clásicos*, y otros modernos se puede consultar [12–16]

En el Capítulo 2 se estudian objetos compactos teóricos formados por partículas fermiónicas oscuras frías cuyo modelo fue propuesto por [24] (y es deducido en el Capítulo). Para el análisis de estos objetos se consideraron dos modelos gravitatorios: la Relatividad General y la gravedad  $f(R) = R + \alpha R^2$ . Los resultados obtenidos señalan la existencia de diferentes degeneraciones entre los parámetros libres del modelo (gravedad y materia), las cuales limitarían el potencial observacional de estas estrellas. Aunque el análisis es aplicado a un modelo particular, los resultados demuestran que los modelos  $f(R)$  son propensos a presentar la confusión observacional descrita en el Capítulo, siendo imposible al menos, usando solo propiedades gravitatorias de las estrellas oscuras frías: i) identificar el modelo gravitatorio de fondo, ii) discernir entre propiedades de la materia oscura o modelo gravitatorio. Al finalizar el Capítulo se exponen las conclusiones del mismo.

En el Capítulo 3 se explora la posible influencia del grado escalar extra, existente en una familia de modelos *viables* en la gravedad beyond Horndeski, en la formación de ciertos objetos compactos. Una primera parte explora estos objetos (solitones no topológicos) *viviendo* en un espacio tiempo plano. Como resultado se demuestra que tales objetos teóricos son sustentados por las no linealidades de las ecuaciones del campo. En estas secciones se analizan los diferentes comportamientos y posibilidades para la existencia y estabilidad de las soluciones encontradas. Una segunda parte generaliza el resultado anterior en presencia de la gravedad; investigándose la existencia y comportamientos, así como las propiedades que pudiesen presentar estos solitones gravitacionales. En las últimas dos secciones del Capítulo se estudia el límite de desacoplamiento (conexión con las soluciones en espacio plano) para una de las familias de los modelos estudiados, y de manera cualitativa se presentan posibles trazas observacionales de los objetos compactos encontrados. Al finalizar cada sección principal se exponen las conclusiones parciales de las mismas.

En la parte final del texto se presentan las conclusiones finales. Se culmina el trabajo presentando las referencias consultadas, mientras que las ecuaciones complementarias pueden ser consultadas en los notebooks publicados en [25].

# Notación y acrónimos

Se adoptó la signatura  $(-, +, +, +)$  para la métrica, y la definición para los tensores de Riemann, Ricci y Einstein usada en Sean M. Carroll [26] y presentada en el Capítulo 1, así como la del escalar de Ricci. Los índices griegos (p. ej.  $\mu, \nu \dots$ ) toman los valores 0, 1, 2 y 3, donde el valor cero representa la coordenada temporal mientras que los tres restantes las espaciales. En los casos donde no se usen índices griegos implicará que solo se está trabajando con coordenadas espaciales. Durante todo el trabajo, a menos que se indique lo contrario, se usarán unidades *naturales* en donde  $c = \hbar = 1$ . Por conveniencia en ocasiones fue usada la masa de Planck:  $m_p = 1/\sqrt{G}$ , y la masa reducida de Planck:  $M_{\text{Pl}} = 1/\sqrt{8\pi G}$ , en cada uno de los casos es debidamente señalado en el texto.

Durante todo el texto se usan los siguiente acrónimos:

Nombre	Acrónimos
Relatividad General	RG
Materia Oscura	MO
Energía Oscura	EO
Constante Cosmológica	CC
Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	FLRW
Tolman-Oppenheimer-Volkoff	TOV
Tolman-Oppenheimer-Volkoff modificadas	TOVm
Ecuación de Estado	EdE
Estrellas Oscuras Frías	EOF.
Estrellas de bosones	EBs
Estrellas beyond Horndeski	EbH
Objetos Exóticos Compactos	OECs
Modelo Estándar de Partículas	MEP
Einstein-Klein-Gordon	EKG
Klein-Gordon	KG

# 1 ¿Relatividad General o sus Modificaciones?

“La religión es la cultura de la fe;  
la ciencia es la cultura de la duda.”

Richard Feynman

A continuación se expondrán diferentes criterios que justifican (a criterio del autor) ir más allá de la Relatividad General (RG)<sup>2</sup> [5], señalándose posibles opciones que permitirían extender la misma. También son presentados diferentes argumentos que señalan la importancia de los objetos compactos como una de las principales herramientas para poder discernir entre las múltiples teorías de la gravitación que son presentadas como posibles alternativas (p. ej. ver Fig. 1.2).

La RG es una teoría que desde sus inicios rompió con los paradigmas establecidos al geometrizar el espacio y el tiempo, fusionándolos en un único ente, el *espacio-tiempo*. Desde su creación esta fue confrontada teórica y observacionalmente, un ejemplo de ello son los llamados test clásicos: precesión del perihelio de Mercurio [6], deflexión de un rayo de luz al pasar cerca del Sol [7], corrimiento al rojo gravitacional de la luz (*redshift*) [8], los cuales la colocaron (con el tiempo) como el *modelo estándar* de la gravedad.

---

<sup>2</sup>Para una introducción pueden consultarse las referencias [26–29].

A diferencia de la gravedad newtoniana, donde la interacción gravitatoria es instantánea y dada por la ley de la gravitación universal de Newton, para la RG esta interacción es descrita a través de la relación dinámica entre la métrica  $g_{\mu\nu}$ , la cual caracteriza la geometría del *espacio-tiempo*, y la materia que lo distorsiona; esto mediante la curvatura que sufre la primera, producto de la segunda, y que se codificada en el tensor de Riemann

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}. \quad (1.1)$$

Donde se escoge a la conexión  $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$  libre de torsión ( $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}$ ), y de tal forma que preserve a la métrica ( $\nabla_{\sigma}g_{\mu\nu} = 0$ ). En el caso de la RG (y algunas extensiones) esta conexión es calculada mediante los símbolos de Christoffel.

Para proporcionar una descripción dinámica del modelo propuesto por Einstein, una de las posibilidades es partir de una acción que contenga implícita o explícitamente a la métrica, el tensor de Riemann, conexión, etc. y aplicar el principio variacional usual. Resulta que la teoría más simple (en el sentido de que es un solo término, no aparecen productos tensoriales, ni derivadas de la métrica de orden superior a dos) que se puede construir con todos estos ingredientes es la acción de Einstein–Hilbert

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi G} R + L_{\text{m}} \right), \quad (1.2a)$$

donde  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$  es el determinante de la métrica,  $R$  es el escalar de Ricci ( $R \equiv g^{\mu\nu} R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$ ) y  $L_{\text{m}}$  representa el lagrangiano asociado a los campos de materia. Variando la acción (1.2a) con respecto a la métrica se llega a las ecuaciones del campo o de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.2b)$$

donde  $T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_{\text{m}})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2\delta L_{\text{m}}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}L_{\text{m}}$ , es el tensor de energía momento que re-

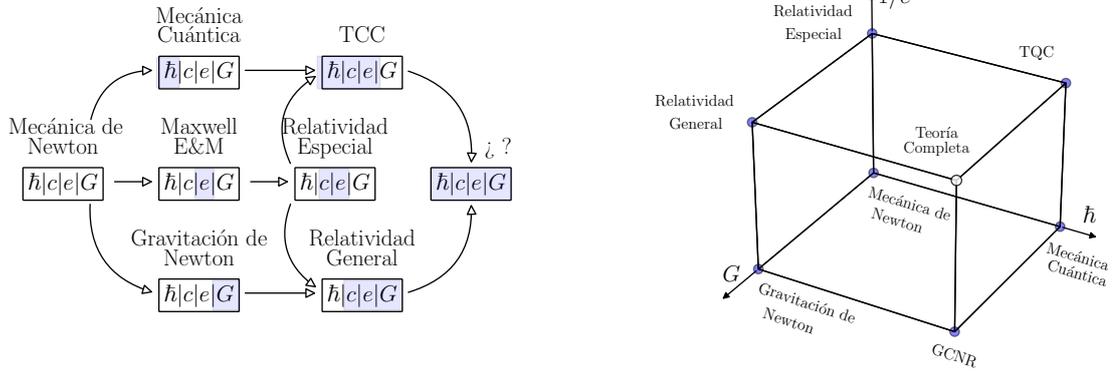


Figura 1.1: Se muestra pictóricamente como se *conectan* las diferentes leyes de la Física. Izquierda: el diagrama ilustra la relación entre las respectivas constantes ( $\hbar, c, e, G$ ) y diferentes teorías físicas. Notar que los recuadros azules indican que la constante está implícita en la teoría. Derecha: el conocido monolítico dimensional de la Física, el mismo señala papel que juegan las tres constantes universales  $\hbar, c, G$  en los modelos *fundamentales*. Los acrónimos TCC y GCNR representan la Teoría Cuántica de Campos y Gravedad Cuántica No Relativista respectivamente. Notar que es un monolítico ilustrativos y no tiene sentido pensar en desplazamiento por los ejes. Ambos gráficos son adaptaciones de los presentados en [30, 31].

presenta las fuentes de materia consideradas, y que cumple la ecuación de conservación  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ . El término  $G_{\mu\nu}$  es el llamado tensor de Einstein. Es válido señalar que en ocasiones y por motivos que se argumentarán más adelante, se suele añadir un término extra  $\sqrt{-g}\Lambda/(8\pi G)$  al integrando de la acción (1.2a), lo que conlleva a la aparición de un término  $g_{\mu\nu}\Lambda$  en la parte izquierda de las ecuaciones del campo (1.2b).

### 1.1 ¿Por qué ir más allá de la RG? ¿Por qué modificarla?

La RG es sin duda alguna la teoría de gravitación más exitosa con la que contamos; desafortunadamente, la misma es considerada como una teoría incompleta. La razón para tal criterio se fundamenta en la imposibilidad de ser completamente cuantizada (asumiendo

do la metodología canónica)<sup>3</sup>. Aunque bien es cierto que se pudiera argumentar que los efectos cuánticos no son importantes a las escalas típicas donde la gravedad juega un papel predominante: longitudes (energías) mayores (menores) que la de Planck. Existen situaciones extremas donde ambos regímenes, el cuántico y el clásico, pueden llegar a ser igual de importantes, p. ej. dentro del horizonte de eventos de agujeros negros o a tiempos cercanos de la llamada singularidad del Big Bang, y para los cuales la RG predice la existencias de singularidades espacio-temporales. La aparición de este comportamiento implicaría que la teoría no es capaz de describir satisfactoriamente esas regiones, siendo posiblemente necesaria una extensión cuántica de la misma.

Por otro lado, aunque la RG más el Modelo Estándar de Partículas (MEP) han superado los test clásicos, y muchos otros más modernos (p. ej. [37–41]), existen otras observaciones que no han podido ser descritas totalmente en este marco. Por ejemplo, observaciones a escalas cosmológicas han mostrado que el Universo se expande aceleradamente [42, 43], algo que no es posible obtener usando solo estos dos ingredientes (más un espacio tiempo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)), siendo necesario añadir un nuevo ingrediente al cual se le llamó Energía Oscura (EO) [44]. Una de las maneras de *resolver* estas discrepancias y continuar dentro del marco de la RG, fue añadiendo un término extra  $\Lambda$  denominado Constante Cosmológica (CC) en la acción de Einstein–Hilbert (1.2a). La CC puede interpretarse como una componente de materia con una densidad de energía constante que llena el espacio en forma homogénea, y que produce una presión *negativa* que tiende a acelerar la expansión del Universo, tal como las observaciones lo reflejan.<sup>4</sup> Una problemática similar surge del análisis de otros observables como lo son: las curvas de rota-

---

<sup>3</sup>La RG no es una teoría completa a altas energías, aunque no es objetivo del presente trabajo profundizar en gravedad cuántica el lector puede revisar p. ej. los trabajos pioneros sobre la cuantización de la RG de DeWitt [32, 33] y las revisiones [34–36] para más detalles.

<sup>4</sup>Existen otras formas dentro de la RG (pero extendiendo el MEP) con la cual se puede abordar la EO, un ejemplo serían el añadir un campo escalar extra acoplado mínimamente a la gravedad, p. ej. los modelos *Quintessence*, *K-essence*. Para una revisión de las diferentes posibilidades se puede consultar [45].

ción de galaxias [46–48], dispersiones de velocidad en galaxias [49,50], lentes gravitacionales [51,52], formación de estructuras [53], observación de la relación magnitud-corrimiento al rojo para supernovas tipo Ia a altos *redshifts* [54], medidas de las anisotropías en la temperatura y polarización del fondo cósmico de microondas (CMB) [55,56], fluctuaciones en la densidad bariónica de materia (BAO) [57], entre otros. En todos estos casos se ha notado la imposibilidad de reproducir estas observaciones sin considerar una componente extra de materia denominada Materia Oscura (MO)<sup>5</sup>. La introducción de este sector *oscuro* en el marco de RG+MEP (más la métrica FLRW) dio lugar al modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM, el cual predice que el Universo tiene aproximadamente un 27% de MO y un 68% de EO en forma de constante cosmológica [56,62]. Siendo este modelo capaz de reproducir la mayoría de los datos observacionales anteriormente comentados.

Lo anterior pareciera indicar que no se precisa recurrir a una modificación de la RG, siendo solo necesario añadir este *sector oscuro* (considerar una extensión al MEP) para poder, a través del modelo efectivo  $\Lambda$ CDM, reproducir nuestro Universo. Sin embargo esta extensión también presenta ciertos problemas. Por ejemplo desde un punto de vista teórico la constante  $\Lambda$  trae consigo el llamado problema de la Constante Cosmológica [63,64], de acuerdo al cual la densidad de energía de vacío sugerida por la Teoría Cuántica de Campos, es mucho mayor que la densidad de energía observada para la EO. Mientras que en el caso de la MO aún se desconoce su naturaleza<sup>6</sup> o incluso varios modelos propuestos no son capaces de explicar de manera satisfactoria, ciertas relaciones fenomenológicas, p.

<sup>5</sup>Es necesario señalar que llamaremos MO a los nuevos campos introducidos (grados de libertad) que estén acoplados mínimamente a la gravedad (ver [58–61] para una revisión de candidatos y estado del arte), y gravedad modificada a los que estén acoplados no-mínimamente, es decir los que modifiquen el modo en que se comporta la gravedad.

<sup>6</sup>Existen múltiples experimentos que intentan descifrar la naturaleza de la MO usando diferentes enfoques para la detección directa de posibles candidatos. Ejemplos de estos son los experimentos LUX [65,66], PandaX-II [67,68], PICO [69–71], DAMA/LIBRA [72–74], SuperCDMS [75,76], CRESST-III [77–79]. Aunque algunas de estas colaboraciones han reportado ciertas anomalías, las mismas no han podido ser confirmadas por otras colaboraciones (en la referencia [80] expone algunas consideraciones al respecto), estableciéndose solo ciertas cotas a los diferentes candidatos a MO. [81–83] El lector puede consultar las revisiones [80,84–86] para conocer el estado del arte.

ej. la relación de Tully Fisher [87,88], la de Faber-Jackson [49] o la regla de Renzo [89]. Una alternativa que solventa estos problemas del *sector oscuro* (pero presenta otros) son los modelos de gravedad modificada. Por otro lado, ni siquiera el modelo  $\Lambda$ CDM está exento de discrepancias observacionales, en años recientes ha aparecido una tensión entre la tasa de expansión actual de nuestro universo  $H_0$ , deducida a partir del mejor ajuste para el modelo  $\Lambda$ CDM usando los datos de Planck [62], y la medición obtenida por la colaboración SH0ES [90,91]. Adicionalmente existe una tensión *leve* con otras mediciones de  $H_0$  basadas en retrasos en el tiempo de rotación de cuásares. [92] (ver [93] para una revisión actual del tema). Quedando así aún, para  $\Lambda$ CDM y el *sector oscuro* varias interrogantes abiertas.

Otro enfoque que pudiera *justificar* el ir más allá de la RG esta centrado en la importancia de construir modelos alternativos a teorías establecidas, capaces de reproducir los resultados experimentales, pero que predigan comportamientos diferentes que pudiesen servir como nuevos test al modelo establecido. En este sentido, ir más allá de la RG, en particular construir modelos con comportamientos fenomenológicos diferentes más allá del Sistema Solar, en los regímenes ultravioleta, o infrarrojo, permitiría distinguir la RG (o  $\Lambda$ CDM) de cualquier otra teoría de gravedad, y ayudarnos a construir la *teoría completa*<sup>7</sup>, o al menos, ayudar a comprender con mayor profundidad la propia RG y a la gravedad.

## 1.2 ¿Cómo modificar o extender a la RG?

Aunque *sencilla* en su formulación Ec. (1.2), la RG no puede ser extendida arbitrariamente, cualquier modificación a esta se verá restringida por las observaciones y deberá ser consistente matemáticamente (p. ej., no presente inestabilidades o modos fantasmas). Dentro de esta consistencia matemática el teorema de Lovelock restringe fuertemente cualquier posible extensión. Este plantea que la única posibilidad para obtener una expre-

<sup>7</sup>La Figura 1.1 ilustra de manera esquemática a que nos referimos con *teoría completa*.

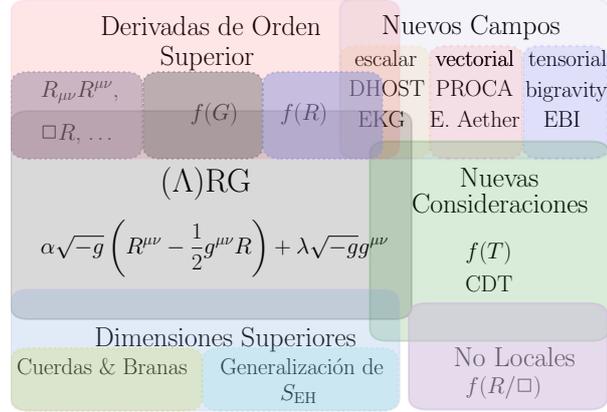


Figura 1.2: Se muestran posibles extensiones a la RG provenientes de relajar al menos una de las asunciones del teorema de Lovelock. El recuadro gris representa el modelo más general que cumple dicho teorema (1.3) (RG y  $\Lambda$ CDM). Este se conecta con las cinco posibles formas de sortearlo (recuadros principales). Notar que algunos modelos gravitatorios cumplen con más de una (regiones sobrepuestas) y que todos se conectan a  $(\Lambda)$ RG (región gris). Es válido aclarar que los sub-recuadros (dentro de algunos principales) solo indican posibles *clasificaciones*, pero todos se conectan con la RG, lo cual es indicado mediante la superposición del respectivo recuadro principal con la región gris.

sión tipo Euler-Lagrange construida a partir de una densidad escalar  $L = L(g_{\mu\nu})$ , en un *espacio-tiempo* cuatro dimensional, local, donde exista una simetría en los índices de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y que contenga solo derivadas de segundo orden (para así evitar inestabilidades de Ostrogradsky [94, 95]<sup>8</sup>) es [97, 98]

$$E^{\mu\nu} = \alpha\sqrt{-g} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) + \lambda\sqrt{-g}g^{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

donde  $\alpha, \lambda$  son constantes y  $R, R^{\mu\nu}$  son el escalar y tensor de Ricci, respectivamente.

A simple vista comparando las ecuaciones (1.3) y (1.2b) (puede incluir el término de CC), se concluye que si se desea construir una teoría gravitacional  $4D$ , partiendo de un principio

<sup>8</sup>La inestabilidad de Ostrogradsky aparece en teorías no degeneradas que tiene una variable dinámica y que poseen derivadas de orden superior a dos. En estos casos los modelos presentan un grado de libertad extra el cual es inestable. Para los casos en que la teoría es degenerada el teorema puede ser adaptado, aunque de manera general requiere un análisis Hamiltoniano. Ver [96] para una revisión al respecto.

variacional que incluya a la métrica y sus derivadas, entonces la forma más general para no presentar inestabilidades de Ostrogradsky son las ecuaciones de Einstein (1.2b).<sup>9</sup> Por tanto, para poder construir una nueva teoría gravitatoria es necesario evadir este Teorema, para ello se ha de relajar al menos una de las asunciones realizadas por Lovelock, mediante:

- i- Considerar una teoría con nuevos campos, más allá (o en lugar) del tensor métrico.
- ii- Considerar una teoría con más de cuatro dimensiones *espacio-temporales*.
- iii- Considerar una teoría con derivadas de la métrica de orden mayor a dos en las ecuaciones del campo (posible inconveniente la inestabilidad de Ostrogradsky).
- iv- Renunciar a consideraciones tomadas al aplicar el principio de mínima acción.
- v- Considerar una teoría no local.

La Figura 1.2 muestra esquemáticamente algunos modelos propuestos en la literatura que se construyen a partir de al menos una de las opciones enumeradas anteriormente.

En este trabajo nos centraremos en dos teorías alternativas a la RG: la gravedad  $f(R)$  y beyond Horndeski. Ambas entrarían en los casos i) e iii) puesto que sus ecuaciones del campo pueden ser de orden superior a dos y propagar un grado de libertad escalar adicional a los dos de la RG. Una propiedad interesante que presenta la gravedad  $f(R)$ , y de manera general las teorías con derivadas superiores, es que bajo ciertas suposiciones y mediante una transformación conforme es posible reescribirlas como una subclase de modelos de la gravedad beyond Horndeski. En este trabajo no se recurrirá a este tipo de transformaciones y se tratarán como dos modelos *distintos* abordados en el marco de Jordan.<sup>10</sup>

<sup>9</sup>Notar que el teorema implica que la forma de las ecuaciones debe ser (1.3) o en efecto (1.2b), pero eso no implica que la acción deba ser solo la de EH (1.2a).

<sup>10</sup>Existen múltiples marcos conformes (transformaciones que cambian las escalas, pero no los ángulos), pero en el contexto de las teorías escalares-tensoriales vale destacar dos: el marco de Jordan, el cual es aquel donde el tensor de energía-momento se conserva de forma covariante y en el que las partículas de prueba siguen las geodésicas de la métrica. El marco de Einstein donde las ecuaciones de campo del modelo toman la forma estructural de (1.2b) (de ahí el nombre), pero con un contenido de materia

## 1.3 Objetos compactos como laboratorios

La mayoría de los objetos compactos se forman como resultado del equilibrio entre dos fuerzas, la gravitatoria y una efectiva proveniente de la materia que constituye el objeto. Propiedades como masa, radio y compacidad están directamente relacionadas con el modelo gravitatorio de fondo. Por tal motivo, es lógico pensar que una caracterización adecuada de estos objetos pudiera traer luz en la búsqueda del *modelo final*, o al menos proponer nuevos experimentos que nos permita validar o desechar predicciones de los disintos modelos.

Luego de la primera detección de ondas gravitacionales [99], la colaboración LIGO-Virgo ha reportado alrededor de 50 nuevas detecciones [41,100–102] que han arrojado resultados abrumadores e interesantes, como por ejemplo GW170817 [103] y GW190521 [104]. Esta nueva forma de *mirar* al cosmos ha demostrado su enorme potencial observacional y de cotejo (con teorías más allá de la RG), no siendo extraño los constantes intentos por mejorar la tecnológica usada y el tratamiento estadístico, e incluso la aparición de nuevas colaboraciones y proyectos, p. ej. KAGRA [105,106], IndIGO (para el 2023) [107], TianQin (en el espacio) [108]. Por todo lo anterior, es lógico pensar que en un futuro cercano será posible alcanzar resoluciones experimentales, capaces de detectar la firma en las ondas gravitacionales de una mayor variedad de objetos compactos, incluido aquellos que están constituidos por materia no estándar [109]. En tal sentido es importante explorar las características distintivas que permitirían distinguir, o al menos acotar mediante estos candidatos observacionales, las distintas teorías de gravitación.

Por otro lado, también existen propuestas teóricas que intentan explicar mediante objetos compactos sumamente extendidos, y cuyos constituyentes son nuevos campos, el comportamiento *atípico* en las curvas de rotación y dispersión de velocidades en las galaxias.

---

*inusual*, aparece un acoplamiento entre la materia y el campo y por tanto esta no sigue las geodésicas de la nueva métrica (con la excepción de campos de radiación).

Aunque en el presente trabajo no se estudia la fenomenología a estas escalas, varias de las conclusiones realizadas nos permiten con cautela, inferir la existencia o no de diferencias notables a estas escalas con respecto a la RG.

Por último, como se muestra en las secciones 3.3.2.3 y 3.3.2.4, las configuraciones obtenidas pueden imitar (al menos con la resolución experimental actual) algunos comportamientos de agujeros negros tipo Schwarzschild. Esta característica permitiría que una generalización (para soluciones numéricas de los términos métricos) del test propuesto en [110], sobre el uso de la sombra de candidatos observacionales a agujeros negros, pudieran ser relevantes o complementario a la hora de identificar la teoría de gravedad de fondo.

## 2 Gravedad modificada o propiedades de la materia oscura fermiónica

“La Física es el sistema operativo del universo.”

Hugo Scolnik

Como se argumentó en el Capítulo anterior, las modificaciones a la RG suelen proponerse como una posible explicación a fenómenos observacionales que esta, en conjunto con el MEP no puede describir. Usualmente se introducen buscando reproducir el papel de la MO o EO. Sin embargo, es lógico pensar que incluso con la existencia de MO, existan posibles modificaciones a RG. Estas parecieran ser obligatorias, especialmente si se busca por ejemplo, la renormalización de las interacciones gravitatorias a altas energías. En este Capítulo hemos considerado un escenario en el que están presentes tanto la MO (una extensión al MEP), como modificaciones a la RG.

Como es conocido, la MO no interactúa (o lo hace muy débilmente) con el MEP, haciendo imposible (o muy difícil) su detección mediante observaciones electromagnéticas o cualquiera otra prueba del MEP. Esto conlleva a que sus posibles propiedades deban ser estudiadas a través de su huella gravitatoria, siendo, los objetos compactos un excelente *laboratorio* para ello. En esta búsqueda de nueva evidencia gravitatoria, una posible traza pudiera provenir de los objetos teóricos denominados estrellas oscuras (objetos compactos

constituidos por partículas de MO).<sup>11</sup>

El estudio de estos objetos y su huella gravitatoria puede dar pistas en la búsqueda de la teoría gravitatoria correcta. Sin embargo, una posibilidad incómoda sería la existencia de una degeneración o confusión en la determinación de las propiedades de la MO (a través de su huella gravitatoria en estas estrellas) y el asumir una teoría de gravedad diferente a la RG. Lo anterior impediría determinar si los efectos gravitatorios atribuidos a la MO en la RG son debidos a esta, o simplemente son consecuencias de otro modelo de gravitatorio de fondo. En este escenario, el presente Capítulo intenta clarificar dicha situación. Para ello, se construyen estructuras auto-gravitantes constituidas por esta MO fermiónica en ambas teorías de la gravedad, y se estudian sus propiedades. Para diferenciarlas de cualquier otro tipo de estrellas oscuras, en lo adelante las llamaremos Estrellas Oscuras Frías (EOF). En este punto es válido comentar que los objetos estudiados son auto-gravitantes, esféricamente simétricos y están constituidos por MO fermiónica en el límite degenerado, la cual no interactúa con el MEP, siendo por tanto frías.<sup>12</sup>

Para una mejor comprensión de las ideas expuestas durante el Capítulo, en las primeras dos secciones 2.1 y 2.2 se exponen los aspectos teóricos relacionados con el modelo y la metodología utilizada. Posteriormente en la sección 2.3 son mostrados los resultados obtenidos del estudio de las EOF en la RG ( $f(R) = R$ ) y en gravedad R-cuadrada ( $f(R) = R + \alpha R^2$ ). En la sección 2.4 se abordan las semejanzas y diferencias de estos objetos en ambos modelos gravitatorios, validándose la existencia de la degeneración anteriormente comentada, y exponiéndose algunos ejemplos de las mismas. Finalmente, en

---

<sup>11</sup>Del estudio de la evolución de nuestro Universo, es conocido que las sobre densidades de MO pueden formar pequeños grupos o cúmulos, los cuales pueden evolucionar para formar objetos compactos, es decir, objetos auto-gravitantes hechos de esta materia. A diferencia de sus equivalentes no oscuros, que alcanzan el equilibrio hidrodinámico por el mecanismo fusión, las estrellas oscuras lo hacen de la energía liberada por la aniquilación de la MO. [111–113].

<sup>12</sup>Se denominan frías debido a que no se acoplan los fotones oscuros al MEP, no pudiéndose emitir fotones. Por otro lado, también es asumido que su temperatura está por debajo de la temperatura de Fermi, lo que implica velocidades mucho menores a la de la luz pequeñas.

la sección 2.5 son presentadas algunas conclusiones parciales de nuestro estudio. Aunque los resultados expuestos son para un modelo particular, las conclusiones de estos pueden ser generalizadas a otros modelos  $f(R)$  con uno o más parámetros libres.

## 2.1 Gravedad tipo $f(R)$

Como se pudo apreciar de la Figura 1.2, existen múltiples formas, y un gran número de modelos que son considerados extensiones de la RG. Varias son las opciones, en la búsqueda de una nueva teoría de gravedad, siendo la extensión más simple las llamadas teorías  $f(R)$ . Estas mantienen los axiomas de la RG, pero proponen una dependencia funcional del escalar de Ricci, es decir se extiende (1.2a) a

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi G} f(R) + L_m \right). \quad (2.1)$$

La principal motivación de estas teorías es obtener, mediante cambios en la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein, comportamientos gravitatorios que reproduzcan la evidencia observacional actual.

### 2.1.1 Ecuaciones del campo

Realizando la variación de la acción (2.1) con respecto a la métrica  $g^{\mu\nu}$  es posible obtener las respectivas ecuaciones del campo (ver [114, 115] para una deducción formal).

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + g_{\mu\nu} \square f_R - \nabla_\nu \nabla_\mu f_R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde se usaron las definiciones:  $\nabla_\mu \nabla^\mu \equiv \square$  y  $df(R)/dR \equiv f_R$ . Es válido aclarar que dichas ecuaciones son deducidas bajo el formalismo métrico estándar. En el mismo se

supone una dependencia funcional respecto a la métrica en la acción (2.1). A diferencia de la RG, en la gravedad  $f(R)$  se llega de manera general a otro modelo si se usase el formalismo de Palatini, donde métrica y conexión son definidas como independientes.<sup>13</sup>

Este sistema (2.2) representa las ecuaciones generalizadas del campo en el formalismo métrico (EGC). A diferencia del sistema (1.2b), (el cual se recupera tomando  $f(R) = R$ ) estas ya no son de segundo orden, sino de cuarto orden en la métrica (contribución de segundas derivadas en  $R$  de los operadores  $\square$  y  $\nabla_\mu \nabla_\nu$ ).

Contrayendo la ecuación (2.2) con  $g^{\mu\nu}$ , obtenemos la traza de las EGC

$$f_R R + 3\square f_R - 2f(R) = 8\pi GT, \quad (2.3)$$

donde se usó:  $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 4$ , y  $T \equiv T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ , como la traza del tensor de energía-momento de la materia.

Analizando la ecuación (2.3) se puede apreciar que solo en casos particulares existe una relación lineal entre  $R$  y  $T$  como ocurre para la RG. Mientras que, para casos más generales, el término  $\square f_R$  no se hace cero. Esto se puede interpretar como la existencia de un grado escalar libre propagándose  $\Phi \equiv f_R$  y la ecuación (2.3) determinaría la dinámica de ese campo escalar. [118]

Otras de las ventajas que brindan estas teorías es su posibilidad de brindar una expansión acelerada relativamente fácil. Por ejemplo, para una solución de vacío,  $T_{\mu\nu} = 0$ , con  $R = \text{cte.}$ , tendremos que  $\square f(R) = 0$  y de la ecuación (2.3), es posible formular la relación  $R = 2f(R)/f_R$ . Sustituyendo esta relación en la ecuación (2.2) (para el vacío), se obtiene para  $R = 0$ ,  $R_{\mu\nu} = 0$  (Minkowski) y para los demás casos  $R = R_1 = \text{cte}$ , tendremos que  $R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}R_1/4$ . La expresión anterior se puede reescribir como,  $g_{\mu\nu} \Lambda_{\text{eff}}$  donde  $\Lambda_{\text{eff}} = g_{\mu\nu}R_1/4$ , lo que representaría un espacio-tiempo de Sitter (constante cosmológica positiva)

<sup>13</sup>Para un estudio formal, véase [114, 116–118] y las referencias allí citadas.

o anti-de Sitter (constante cosmológica negativa) en dependencia del signo de  $R_1$ .

En ocasiones es conveniente reescribir la ecuación tensorial (2.2) como

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{f_R} (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{eff}}), \quad (2.4)$$

donde el término  $T_{\mu\nu}^{\text{eff}}$  viene dado por

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \frac{1}{8\pi G} \left( \frac{f(R) - Rf_R}{2} g_{\mu\nu} + \nabla_\nu \nabla_\mu f_R - g_{\mu\nu} \square f_R \right). \quad (2.5)$$

Se ha de señalar que la definición de  $T_{\mu\nu}^{\text{eff}}$  no satisface ninguna condición de energía. Esta definición en la práctica ha demostrado ser útil, al interpretarlo como un *fluido de curvatura* [116]. Por otro lado, de la comparación con Ec. (2.4), es posible definir una de las características distintivas de los modelos alternativos, la existencia de una constante de Newton efectiva,  $G_{\text{eff}}$ ,

$$G_{\text{eff}} = \frac{G}{f_R}, \quad (2.6)$$

a partir de la cual, es posible inferir ciertos comportamientos gravitatorios.

Es válido aclarar que normalmente la función  $f(R)$  ha de cumplir con ciertos criterios: ser monótonamente creciente y convexa,  $f_R, f_{RR} > 0$  [119, 120]. La primera condición  $f_R > 0$  garantiza una constante gravitatoria efectiva (2.6) positiva. La segunda, se introduce para evitar inestabilidades gravitatorias. Sin embargo, no está claro si esas condiciones son realmente necesarias en el contexto de los objetos compactos, ambas son impuestas desde el punto de vista dinámico para describir la evolución del Universo, y no en todo el espacio de soluciones. En [121] se hace un pequeño análisis de ésta y otras condiciones que se imponen.

En la siguiente sección deduciremos las ecuaciones que nos describen la estructura de objetos estáticos esféricamente simétricos en el marco de la gravedad tipo  $f(R)$ .

### 2.1.2 Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff modificadas

Para el estudio de los objetos compactos, al igual que en la RG, es necesario obtener la relación entre el radio y la masa del objeto. Para el caso de las  $f(R)$  esta viene dada por las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff modificadas (TOVm). Para ello se parte de las ecuaciones del campo (2.2) considerando como ansatz del elemento de línea y una métrica estática, esféricamente simétrica dada por

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + g^2(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2.7)$$

Usando las componentes (0,0), (1,1) y la traza (2.3), se llega a las expresiones TOVm<sup>14</sup>

$$\frac{N'}{N} = \frac{1}{2kr(2f_R + rR'f_{RR})} \left\{ r^2 T^{11} + kg^2 [r^2 f + (2 - r^2 R) f_R] - 2k(f_R + 2rR'f_{RR}) \right\}, \quad (2.8a)$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{1}{2kN^2r(2f_R + rR'f_{RR})} \left\{ g^2 r^2 T^{00} + kN^2 [g^2 (-r^2 f + [-2 + r^2 R] f_R) + 2(f' + r[(2R' + rR'') f_{RR} + rR'^2 f_{RRR}])] \right\}, \quad (2.8b)$$

$$R'' = \left( -\frac{2}{r} - \frac{N'}{N} + \frac{g'}{g} \right) R' + \frac{g^2 (T + 4kf - 2kRf_R)}{6kf_{RR}} - \frac{R'^2 f_{RRR}}{f_{RR}}, \quad (2.8c)$$

donde  $f = f(R)$ , y los sub-índices  $R$  indican el número de derivadas con respecto al escalar de Ricci ( $R$ ). Por comodidad se omitieron las dependencias radiales de todas las funciones, y cuyas derivadas con respecto a  $r$  son indicadas por el símbolo  $'$ . Los términos  $T^{00}$  y  $T^{11}$  son las componentes  $0 - 0$  y  $1 - 1$  (respectivamente) de un tensor de energía-momento correspondiente a un fluido perfecto.

Notar que a diferencia de las ecuaciones de TOV para la RG [122], las teorías  $f(R)$  incluyen una ecuación diferencial extra de segundo orden (2.8c). Esta es consecuencia del

<sup>14</sup>Su obtención puede encontrarse en los notebook publicados en [25]

nuevo grado de libertad comentado anteriormente, y dicha ecuación nos da su dinámica.

De manera similar a la RG, es necesaria una última ecuación que nos relacione las componentes del tensor de energía momento. Su obtención es mediante la ecuación de conservación

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.8d)$$

Finalmente el sistema de ecuaciones (2.8a)-(2.8d) representarían las TOVm y restringen la estructura de un objeto esféricamente simétrico que está en equilibrio hidrostático.

## 2.2 Ecuación de Estado

Las principales características de los objetos compactos en el marco de las  $f(R)$ , pueden ser deducidas mediante la resolución del sistema (2.8). Sin embargo, tal proceso conllevaría primeramente conocer la relación entre la densidad de energía  $T^{00}$ , y la presión  $T^{11}$ , de la materia del objeto, es decir, su Ecuación de Estado (EdE). De este modo, el problema principal es entonces la construcción apropiada de la EdE; que, de manera general, ha de describir las propiedades microscópicas de la materia por la que está constituida la estrella.

En esta sección se obtendrá la EdE para un gas de fermiones oscuros fuertemente degenerado y auto-interactuante. Dicha EdE fue previamente propuesta en [24]. El procedimiento seguido a continuación es equivalente al descrito para materia ordinaria en una primera parte por [123] y en una segunda en [124, 125].

### 2.2.1 Tensor de energía-momento

Varias de las propiedades mecánicas de un sistema (p. ej. energía interna, presión) pueden ser descritas como el promedio de ciertas funciones dependientes de las coordenadas y momentos de las partículas que las constituyen. Para obtener las componentes del tensor de energía momento en un marco co-móvil<sup>15</sup>, consideremos la materia como un *fluido ideal oscuro*

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p_m) u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu} p_m, \quad (2.9)$$

donde  $\rho$  es la densidad total de masa del fluido,  $p_m$  es su presión.<sup>16</sup>

Usando las herramientas dadas por la teoría cinética de los gases es posible encontrar las expresiones para la presión y la densidad de energía (componentes del tensor de energía-momento). Para ello, asumamos que el fluido está constituido por un número muy grande de partículas cuya masa en reposo viene dada por  $m$ , las cuales tienen sus respectivos momentos  $\vec{p}$  y son descritos microscópicamente a un tiempo  $t$  por una función de distribución por unidad de volumen y unidad de momento  $F(\vec{r}, \vec{p}, t)$ <sup>17</sup>. Usando esta función es posible determinar el número de partículas  $d\mathcal{N}$  con un momento entre,  $\vec{p}$ ,  $\vec{p} + d\vec{p}$ , y que están contenidas en un elemento de volumen  $dV = d^3r$ , localizado en un punto del espacio de fase  $\vec{r}$

$$d\mathcal{N} = F(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3r d^3p. \quad (2.10)$$

De manera directa se puede definir la densidad de partícula  $n$  en un punto  $\vec{r}$  como la integral sobre todos los posibles momentos contenidos dentro del elemento de volumen

<sup>15</sup>Se define la cuatri-velocidad como:  $u_\nu = [\hat{e}_0, 0, 0, 0]$

<sup>16</sup>Recordar que se están usando unidades naturales donde  $\hbar = c = 1$ .

<sup>17</sup>Se puede probar que  $F(\vec{r}, \vec{p}, t)$  es un invariante de Lorentz, ver sección 4.3 de [123]

$d^3r$ , es decir

$$n(\vec{r}, t) = \int F(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p, \quad (2.11)$$

$$\rightarrow \mathcal{N} = \int n(\vec{r}, t) d^3r. \quad (2.12)$$

Haciendo uso de la relación anterior, se puede definir la función de probabilidad  $f(\vec{r}, \vec{p}, t) \equiv F(\vec{r}, \vec{p}, t)/n(\vec{r}, t)$ , lo que lleva a

$$1 = \frac{1}{n} \int F(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p \quad (2.13a)$$

$$= \int f(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p, \quad (2.13b)$$

donde  $f$  es la probabilidad de encontrar una partícula en el elemento de volumen  $d^3r$  con un momento entre  $\vec{p}$  y  $\vec{p} + d\vec{p}$ .

Debido a que estamos trabajando con *cantidades*, es conveniente definir el promedio  $\langle Q \rangle$  de cualquier cantidad  $Q$

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{n} \int Q F d^3p \quad (2.14a)$$

$$= \int Q f d^3p, \quad (2.14b)$$

donde por simplicidad se omitió poner las dependencias.

Con las definiciones anteriores, ya estamos listos para comenzar la deducción de las componentes del tensor de energía momento, con respecto a un marco de referencia co-móvil con el fluido.

La componente  $T^{00}$  representa la densidad de energía total del fluido, la cual no es más

que la suma de las energías de todas las partículas por unidad de volumen del espacio de fase. Esto lo podemos ver como el producto del número de partículas ( $d\mathcal{N}$ ) con momento entre  $\vec{p}$  y  $\vec{p} + d\vec{p}$  por su energía:  $dE = E(\vec{p})d\mathcal{N}$ , dividido por el diferencial de volumen. Lo que lleva a,<sup>18</sup>

$$T^{00} = -\rho u^0 u^0 = \left( \int E F(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p \right) u^0 u^0, \quad (2.16)$$

donde  $E = \sqrt{p^2 + m_0^2}$ .

Por otro lado, las componentes  $T^{ij}$  en el marco co-movil representan las componentes de la presión del fluido. Haciendo un estudio de las unidades, tendremos que,

[presión] = fuerza por unidad de área,

[fuerza] = momento por unidad de tiempo,

entonces, podemos decir que la presión es el impulso (momento) por unidad de tiempo por unidad de área, es decir, es el *flujo de momento*. Siendo entonces necesario obtener la expresión para el tensor de densidad de flujo de momento (por unidad de área)  $\Pi^{ij}$ . Para luego identificar las componentes correspondiente a  $T^{ij}$ , y llegar así a obtener la expresión para la presión del fluido.

Nuestro punto de partida es la ecuación de los momentos de Boltzmann, la misma brinda las ecuaciones dinámicas de cantidades que se conservan durante las colisiones, como es el caso del momento (se considera que las colisiones entre partículas son elásticas). Calculando el diferencial total de  $F(\vec{r}, \vec{p}, t)$ , y usando el convenio de suma de Einstein se

<sup>18</sup>Otra manera de verlo es usando la ecuación (2.14b), tendremos que

$$-\rho = \frac{\langle E \rangle}{V_{\min}} = \frac{1}{V_{\min}} \int E f d^3p \quad (2.15)$$

donde  $V_{\min}$  representa el elemento mínimo de volumen considerado en el espacio de fase.

obtiene la ecuación de transporte de Boltzmann

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_{\text{col.}} = \frac{\partial F}{\partial t} + u^i \frac{\partial F}{\partial r^i} + f^i \frac{\partial F}{\partial p^i}, \quad (2.17)$$

donde  $f^i$  corresponde a la  $i$ -ésima componente de la fuerza externa que actúa sobre las partículas del fluido y  $u^i$  representa la  $i$ -ésima componente de la velocidad de la partícula.

Multiplicando la ecuación (2.17) por cualquier cantidad física  $Q(\vec{r}, \vec{p}, t)$  e integrando sobre los momentos, tendremos

$$\int Q \left(\frac{dF}{dt}\right)_{\text{col.}} d^3p = \int Q \left(\frac{\partial F}{\partial t} + u^i \frac{\partial F}{\partial r^i} + f^i \frac{\partial F}{\partial p^i}\right) d^3p. \quad (2.18)$$

Se puede probar que si  $Q$  se conserva durante las colisiones,  $Q(\vec{r}, \vec{p}) + Q(\vec{r}, \vec{p}_1) = Q(\vec{r}, \vec{p}') + Q(\vec{r}, \vec{p}'_1)$ , entonces el miembro izquierdo de la ecuación (2.18) es igual a cero (ver sección 3.2 de [123]). Por otro lado podemos reescribir los términos del miembro derecho como

$$\begin{aligned} \int Q \frac{\partial F}{\partial t} d^3p &= \frac{\partial}{\partial t} \int Q F d^3p - \int \frac{\partial Q}{\partial t} F d^3p, \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (n \langle Q \rangle) - n \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.19a)$$

$$\begin{aligned} \int Q u^i \frac{\partial F}{\partial r^i} d^3p &= \frac{\partial}{\partial r^i} \int Q u^i F d^3p - \int u^i \frac{\partial Q}{\partial r^i} F d^3p, \\ &= \frac{\partial}{\partial r^i} (n \langle Q u^i \rangle) - n \left\langle u^i \frac{\partial Q}{\partial r^i} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.19b)$$

$$\begin{aligned} \int Q f^i \frac{\partial F}{\partial p^i} d^3p &= \int \frac{\partial}{\partial p^i} (Q f^i F) d^3p - \int \frac{\partial}{\partial p^i} (Q f^i) F d^3p, \\ &= \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_m dp_n (Q f^i F) \Big|_{-\infty}^{\infty} - n \left\langle \frac{\partial (Q f^i)}{\partial p^i} \right\rangle, \\ &= -n \left\langle \frac{\partial (Q f^i)}{\partial p^i} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.19c)$$

donde se hizo uso de que cuando  $p^i \rightarrow \pm\infty$ ,  $F \rightarrow 0$  lo que implica que el término  $(Q f^i F)$  es

cero para cualquier cantidad  $Q$ . Sustituyendo los términos obtenidos en la ecuación (2.18), se obtiene el teorema de conservación para la cantidad  $Q$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle Q \rangle) + \frac{\partial}{\partial r^i} (n \langle Q u^i \rangle) - n \left[ \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} \right\rangle + \left\langle u^i \frac{\partial Q}{\partial r^i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial (Q f^i)}{\partial p^i} \right\rangle \right] = 0. \quad (2.20)$$

Como en nuestro caso la magnitud física  $Q$  es función solo del momento  $\vec{p}$ , y no explícitamente de la posición  $\vec{r}$  o el tiempo  $t$  y asumiendo que la fuerza  $f^i$  solo depende de la posición  $\vec{r}$ , tendremos

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle Q \rangle) + \frac{\partial}{\partial r^i} (n \langle Q u^i \rangle) - n f^i \left\langle \frac{\partial Q}{\partial p^i} \right\rangle = 0. \quad (2.21)$$

La ecuación de momentos de Boltzmann, se obtiene definiendo  $Q = p^i = m u^i$  (la componente  $i$ -ésima del momento de la partícula)<sup>19</sup> y sustituyéndola en Ec. (2.21), quedando

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle p^j \rangle) + m \frac{\partial}{\partial r^i} (n \langle u^j u^i \rangle) - n f^i \delta_i^j = 0, \quad (2.22)$$

donde el término  $n m \langle u^j u^i \rangle$  es el producto de  $n u^i$  (flujo de partículas que atraviesa una unidad de área orientada perpendicularmente al  $i$ -ésimo eje de coordenada), por la  $j$ -ésima componente de su momento  $m u^j$ , promediado sobre todas las partículas. Es decir, es la cantidad que deseamos calcular, el tensor de densidad de flujo de momento  $\Pi^{ji}$ .

Reescribiendo  $n m \langle u^i u^j \rangle$  como

$$\begin{aligned} \Pi^{ij} &= n m \langle u^i u^j \rangle, \\ &= n m \langle (v^i + U^i) (v^j + U^j) \rangle, \\ &= n m (v^i v^j + v^i \langle U^j \rangle + v^j \langle U^i \rangle + \langle U^i U^j \rangle), \\ &= n m v^i v^j + n m \langle U^i U^j \rangle, \end{aligned} \quad (2.23)$$

<sup>19</sup>Esta elección de  $Q$  se le conoce como el segundo momento o momento de segundo orden de  $F$ .

donde se descompuso  $u^i$ , la componente  $i$ -ésima de la velocidad de la partícula, usando la relación:  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{U}$ , donde  $\vec{U}$  es la velocidad aleatoria de la partícula relativa a la velocidad media del flujo, y cumple que,  $\langle \vec{U} \rangle \equiv 0$ . La velocidad  $\vec{v}$ , es la del fluido (velocidad macroscópica), lo cual no es más que la velocidad promedio de las partículas del fluido  $\langle \vec{u} \rangle$ . El segundo término del miembro derecho se identifica como  $T^{ij}$

$$\begin{aligned} T^{ij} &\equiv n m \langle U^i U^j \rangle, \\ &= \int U^i p^j F(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3 p, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde se usó la definición Ec. (2.14b).

Para recuperar la ecuación correspondiente a un fluido ideal (2.9), es necesario asumir que la función de distribución  $F(\vec{r}, \vec{p}, t)$  es isotrópica en el marco co-móvil. Lo que implica que el tensor de energía momento es diagonal,  $T^{ij} = g^{ij} p_m$ , donde  $g^{ij}$  son las componentes espaciales de la métrica (isotrópica) y  $p_m$  es

$$p_m = \frac{1}{3} \int \vec{U} \cdot \vec{p} F(\vec{r}, p, t) d^3 p, \quad (2.25)$$

con la velocidad  $\vec{U} = \vec{p}/E$ . El factor  $1/3$  es producto de considerar isotropía para  $F(\vec{r}, \vec{p}, t)$ .

Finalmente se tiene que

$$T^{ij} = g^{ij} p_m = \frac{g^{ij}}{3} \int \vec{U} \cdot \vec{p} F(\vec{r}, p, t) d^3 p. \quad (2.26)$$

Las ecuaciones (2.16) y (2.26) nos brindarían las relaciones buscadas.

### 2.2.2 Gas de fermiones oscuros

La determinación de las propiedades de las partículas de materia oscura es uno de los grandes problemas de la física moderna. En ese sentido son muchos los trabajos que abordan dicha temática, tanto desde el punto de vista teórico como experimental [59, 61, 126]. Propiedades como la masa, o el espín son desconocidas, proponiéndose varios modelos y candidatos. En el caso de los modelos fermiónicos, estos pueden en su mayoría clasificarse en dos tipos:

- i. modelos fermiónicos pesados: partículas masivas débilmente interactuantes, WIMPs, p.ej. gravitino, neutralinos ligeros, axino [60, 127, 128],
- ii. modelos fermiónicos ultraligeros: p.ej. neutrinos estériles [129–132].

Varias son las ventajas teóricas que presentan algunos de estos candidatos fermiónicos. Por ejemplo, ajustan a la densidad de MO observada [133], están acorde con las predicciones de estructuras a pequeñas escalas [134, 135], entre otras.

Teniendo presente estas ventajas, cabe preguntarse, ¿será posible deducir a través de los objetos compactos, alguna de las propiedades de la MO fermiónica? Para responder esta interrogante, lo primero que se debe hacer es definir la EdE correspondiente a esta materia. A la formulación de la misma, se puede llegar mediante los mismos principios aplicados para un gas de fermiones del MEP. En este trabajo exploraremos un modelo simple, en el cual los fermiones oscuros se encuentran en el límite degenerado e interaccionan entre sí. Usando los resultados de la sección anterior y dado que la función de distribución de las partículas, se puede relacionar con su función de distribución de probabilidades mediante (ver [136] para una deducción formal)

$$F(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{g}{(2\pi)^3} f(\vec{r}, \vec{p}, t), \quad (2.27)$$

donde  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  representa la probabilidad de que una celda (un orbital de energía  $E$ ) en el espacio de fase esté ocupada. El término  $g$  corresponde al peso estadístico, lo cual no es mas que el número de estados que una partícula podría tener con un valor del momento  $p$  dado, p. ej. para partículas masivas  $g = 2s + 1$ , donde  $s$  es el espín. El término  $(2\pi)^3$  representa el volumen de una celda en el espacio de fase.<sup>20</sup>

Debido a que son fermiones, se asume que la función de distribución de probabilidades  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  viene dada por la estadística de Fermi-Dirac

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{1 + e^{[E(p) - \mu(r)]/k_B T(r)}}, \quad (2.28)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann, la energía de las partículas  $E(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$  y el potencial químico efectivo está dado por:  $|\mu| = m\sqrt{\Phi(r) + 1}$ , donde  $\Phi(r)$  representa el potencial gravitatorio.<sup>21</sup>

De esta distribución puede apreciarse un límite particular: para el caso  $T(r) \rightarrow 0$ , con  $\mu(r) > 0$  y finito, el valor de la distribución  $f(\vec{r}, \vec{p})$  tiende a uno para energías menores a  $\mu(r)$  y a cero para energías mayores. Este comportamiento nos permite aproximar a la función de distribución (2.28) en el caso extremo  $T \rightarrow 0$  como una función escalón (o de Heaviside)<sup>22</sup>

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E(p) \leq E_F(r), \\ 0 & \text{si } E(p) > E_F(r). \end{cases} \quad (2.29)$$

<sup>20</sup>Se pudiera suponer que cualquier volumen contendría un número infinito de estados, lo cual no es correcto, pues debido al principio de incertidumbre no es posible conocer simultáneamente con una exactitud menor a  $2\pi\hbar$  la posición y el momento de una partícula. Tendremos entonces que el volumen mínimo,  $v_{\min}$ , debe ser aproximadamente del orden de  $(2\pi\hbar)^3$  que en las unidades usadas es  $(2\pi)^3$ . Esto implica que todos los puntos del espacio comprendidos dentro del  $v_{\min}$  corresponden al mismo estado cuántico de la partícula (mismo microestado).

<sup>21</sup>Es necesario señalar que nada garantiza que los fermiones oscuros obedezcan una ley de Boltzmann con la misma constante  $k_B$ , en nuestro caso se asume que si es así. Sino fuera el caso entonces su efecto se vería reflejado en la respectiva energía de Fermi  $E_F(r)$ . Por otro lado el potencial gravitatorio  $\Phi(r)$  contendría posibles modificaciones a la RG.

<sup>22</sup>En ocasiones se expresa en función de los momentos,  $p \leq p_F(r)$  y  $p > p_F(r)$  respectivamente.

donde  $E_F(r)$  es la energía de Fermi

$$E_F(r) \equiv \mu(r) = m\sqrt{\Phi(r) + 1} = \sqrt{p_F(r)^2 + m^2}, \quad (2.30)$$

con  $p_F = m\sqrt{\Phi(r)}$  el momento de Fermi.

El aproximar la función de distribución de probabilidad como una función tipo Heaviside, implica físicamente que todos los estados de energía menor a la de Fermi están ocupados y todos los estados de energía mayor, están vacíos. En estos casos se dice que el gas está fuertemente degenerado (los efectos cuánticos son importantes).

Usando la ecuación (2.16) y suponiendo que el gas ideal de fermiones está fuertemente degenerado. Es decir se define la función de probabilidad como Ec. (2.29) tendremos que la densidad de energía sería

$$\begin{aligned} -\rho &= \int E F(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p, \\ &= \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \sqrt{p^2 + m^2} p^2 dp, \\ &= \frac{m^4}{\pi^2} \int_0^{x_F} \sqrt{x^2 + 1} x^2 dx, \\ &= \frac{m^4}{\pi^2} \left[ \frac{x_F}{4} (x_F^2 + 1)^{3/2} - \frac{x_F}{8} (x_F^2 + 1)^{1/2} - \frac{1}{8} \ln \left( x_F + \sqrt{x_F^2 + 1} \right) \right], \\ &= \frac{m^4}{\pi^2} \left[ \frac{x_F}{4} (x_F^2 + 1)^{1/2} \left( (x_F^2 + 1) - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{8} \ln \left( x_F + \sqrt{x_F^2 + 1} \right) \right], \\ &= m^4 \bar{\rho}(x_F), \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde

$$\bar{\rho}(x_F) = \frac{1}{8\pi^2} \left[ (2x_F^3 + x_F)(1 + x_F^2)^{1/2} - \ln \left( x_F + \sqrt{x_F^2 + 1} \right) \right]. \quad (2.32)$$

Notar que se usó la expresión para la energía  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ . Posterior a ello se pasó a coordenadas esféricas en el espacio de fase y se integró respecto a los ángulos. El valor

de  $g$  se tomó como dos debido a que podemos tener dos posibles estados del espín para un mismo punto del espacio de fase y se introdujo el cambio de variables  $x = p/mc$ . Este parámetro codifica si la partícula se puede considerar relativista o no. Para el cálculo de la integral se usó un *Handbook* de integrales [137, pag 67], el resultado obtenido está acorde al reflejado en [125]<sup>23</sup>.

De manera similar usando la Ec. (2.25), se obtiene la presión

$$\begin{aligned}
p_m &= \frac{1}{3} \int \vec{U} \cdot \vec{p} F(\vec{r}, p, t) d^3p, \\
&= \frac{1}{3} \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m^2}} p^2 dp, \\
&= \frac{m^4}{3\pi^2} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{\sqrt{1 + x^2}} dx, \\
&= \frac{m^4}{3\pi^2} \frac{1}{4} \left[ x_F^3 (x_F^2 + 1)^{1/2} - \frac{3}{2} x_F (x_F^2 + 1)^{1/2} + \frac{3}{2} \ln \left( x_F + \sqrt{x_F^2 + 1} \right) \right], \\
&= m^4 \bar{p}_m(x_F),
\end{aligned} \tag{2.33}$$

donde

$$\bar{p}_m = \frac{1}{24\pi^2} \left[ (2x_F^3 - 3x_F) (1 + x_F^2)^{1/2} + 3 \ln \left( x_F + \sqrt{x_F^2 + 1} \right) \right]. \tag{2.34}$$

Las ecuaciones (2.31) y (2.33) nos describen las propiedades de un gas ideal de fermiones que no interactúan entre sí. Sin embargo, una EdE más realista implicaría posibles auto-interacciones entre las partículas oscuras, el considerarlas pudiera resolver algunos de los problemas presentados por el modelo  $\Lambda$ -CDM a las escalas galácticas [138].

Una manera simple de hacerlo, es considerando dos sistemas de fermiones auto-interactuantes

---

<sup>23</sup>En ocasiones se expresa la función  $\ln$  en términos de la función  $\sinh^{-1}$ , haciendo uso de la siguiente propiedad,

$$\sinh^{-1} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

y cuyo lagrangiano de interacción (interacción de Yukawa) viene dado por

$$\mathcal{L}^{\text{int}} = -g\bar{\chi}\chi\psi, \quad (2.35)$$

donde las partículas fermiónicas oscuras  $\chi$  tienen una masa  $m$ . La partícula mediadora de la interacción es representada por  $\psi$ , cuya masa es  $m_\psi$ .<sup>24</sup> El parámetro  $g$  es la constante de acoplamiento.

De manera efectiva y como primera aproximación, se puede introducir esta interacción en el sistema (2.31)-(2.33), como un término proporcional al producto de las densidades de partículas  $n^2$ . En busca de introducir las unidades adecuadas se introduce una constante  $m_I = m_\psi/g$  que representaría la escala de energía a la cual ocurre la interacción. En la próxima sección se abordará más sobre este parámetro. Se tendrá entonces que,  $\rho_{\text{int}} \sim n^2/m_I^2$ , es decir

$$\begin{aligned} \rho_{\text{int}} &= \frac{1}{m_I^2} \left( \int F(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p \right)^2, \\ &= \frac{1}{m_I^2} \left( \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} p^2 dp \right)^2, \\ &= m^4 \frac{1}{9\pi^4} y^2 x_F^6, \\ &= m^4 \bar{\rho}_{\text{int}}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

con

$$\bar{\rho}_{\text{int}} = \frac{1}{9\pi^4} y^2 x_F^6. \quad (2.37)$$

Para el desarrollo anterior se hizo uso de la definición de la densidad de partículas Ec. (2.11) y se siguió el mismo proceder aplicado anteriormente. Se introdujo la nueva variable  $y = m/m_I = g m/m_\psi$ , como la constante adimensional efectiva, la cual parametriza

---

<sup>24</sup>La Ec. (2.35) representa un acoplamiento simple tipo Yukawa, donde el campo escalar  $\psi$  es el boson oscuro mediador de la interacción.

la intensidad de la interacción entre los fermiones oscuros, en términos del acoplamiento  $g$ , la masa del mediador  $m_\psi$ , y la masa del fermión oscuro  $m$ .

La correspondiente contribución de la interacción a la presión se puede calcular de manera directa derivando la energía con respecto al volumen, tomando el número de partículas  $\mathcal{N}$  como constante y  $T = 0$

$$\begin{aligned} p_{int} &= - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right) \Big|_{\mathcal{N}, T=0}, \\ &= n^2 \frac{(\partial \rho_{int}/n)}{\partial n}, \\ &= \frac{n^2}{m_I^2} = m^4 \bar{p}_{int}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

con

$$\bar{p}_{int} = \frac{1}{9\pi^4} y^2 x_F^6. \quad (2.39)$$

Para el cálculo anterior se tuvo presente la expresión para el número de partículas  $\mathcal{N}$ , Ec. (2.12) de donde se obtiene de manera directa que  $n = \mathcal{N}/V$ , lo que conduce a,  $\partial V = -\partial n V^2/\mathcal{N} = -\partial n V/n$ , que en conjunto con,  $E = \rho_{int} V = \rho_{int} \mathcal{N}/n$ , nos permite llegar a la expresión de  $p_{int}$  obtenida anteriormente.

Considerando los resultados anteriores, ecuaciones (2.32), (2.34), (2.36) y (2.38) podemos modelar un fluido de MO fermiónica auto-interactuante en el límite degenerado como [24]

$$-\rho = m^4 [\bar{\rho} + \bar{\rho}_{int}], \quad (2.40)$$

$$p_m = m^4 [\bar{p}_m + \bar{p}_{int}], \quad (2.41)$$

de donde tendremos finalmente de (2.26) y (2.16) que

$$T^{00} = -\rho u^0 u^0 = m^4 [\bar{\rho} + \bar{\rho}_{int}] u^0 u^0, \quad (2.42)$$

$$T^{ij} = g^{ij} p_m = m^4 [\bar{p}_m + \bar{p}_{int}] g^{ij}, \quad (2.43)$$

notar que este modelo de MO solo tiene dos parámetros libres  $y$  y  $m$ .

Un límite superior para el parámetro  $y$  puede deducirse a partir de la sección eficaz (cross-section) del lagrangiano (2.35),

$$\sigma = \frac{g^4}{8\pi m_H^4} m^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{y^4}{m^2}. \quad (2.44)$$

y la restricción observacional más fuerte sobre  $\sigma$ , proveniente de la falta de desaceleración de la MO en las colisiones de cúmulos:  $\sigma/m < 0.47 \text{ g/cm}^2$  [139]. Usando este resultado tendremos

$$y < 15.24 \left( \frac{m}{\text{GeV}} \right)^{3/4}. \quad (2.45)$$

La Ec. (2.45) nos demarca el límite superior en función de la masa del fermión oscuro, p. ej. para una  $m = 1 \text{ TeV}$ , la constante adimensional efectiva que parametriza la intensidad de la interacción,  $y$  puede ser tan grande como  $\sim 1500$ .

## 2.3 Estrellas oscuras frías

En secciones anteriores se dedujeron las ecuaciones de TOVm correspondientes a la gravedad  $f(R)$ , así como la ecuación de estado para un gas de fermiones oscuros fuertemente degenerado, calculándose a partir de esta, las componentes  $T^{00}$  y  $T^{rr}$  del tensor de energía y momento. Con estos resultados ya se cuentan con todos los elementos para el estudio de las llamadas EOF.

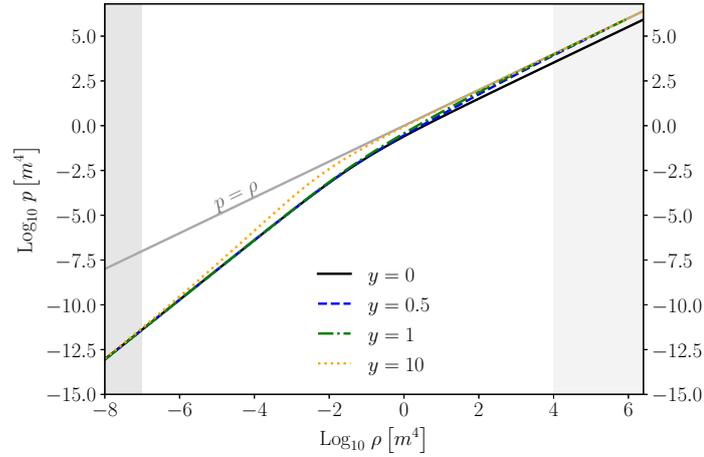


Figura 2.1: Representación de la resolución paramétrica del sistema (2.41)-(2.40). El rango usado fue,  $0 < x_F < 20$ , para distintos valores del parámetro que codifica la intensidad de la auto-interacción  $y$ . Notar que, para valores de  $\rho$  grandes y  $y \neq 0$ , las diferentes curvas convergen a la ecuación de estado  $p = \rho$  (sombreado gris claro). En sentido contrario, para valores de  $\rho$  pequeños las mismas se aproximan a la del gas ideal no auto-interactuante,  $y = 0$  (sombreado gris oscuro).

Como primer paso, se construirán y estudiarán los objetos auto-gravitantes que se pueden formar, primeramente en la RG ( $f(R) = R$ ), y luego en el modelo de gravedad R-cuadrada ( $f(R) = R + \alpha R^2$ ). Para posteriormente estudiar las degeneraciones que pueden ocurrir y que nos impedirían, a partir de estos objetos, deducir propiedades de la MO fermiónica.

### 2.3.1 EOF en Relatividad General

Procedamos a construir las EOF en el contexto de la RG, para ello solo es necesario resolver el sistema de ecuaciones (2.8a)-(2.8d) tomando  $f(R) = R$ . El hacerlo reduce el

sistema a las ecuaciones de TOV usuales [122]

$$g' = \frac{g^3 (8\pi\bar{r}^2\bar{\rho} - 1) + g}{2\bar{r}}, \quad (2.46a)$$

$$2N' = \frac{N (g^2 (8\pi\bar{r}^2\bar{p} + 1) - 1)}{\bar{r}}, \quad (2.46b)$$

$$\bar{p}' = -\frac{N'(\bar{\rho} + \bar{p})}{N}. \quad (2.46c)$$

Notar que como era de esperar, no está presente la ecuación para  $R'$ . Adicionalmente fueron introducidos por conveniencia los siguientes cambios de variables

$$p_m \equiv p = \bar{p} m^4, \quad \rho = \bar{\rho} m^4, \quad r = \bar{r} \frac{m_p}{m^2}, \quad (2.47)$$

donde las barras indican que son cantidades sin dimensiones y la constante  $m_p$  es la masa de Planck, definida como  $m_p = G^{-1/2}$ .

La relación  $\rho(p)$  es la interpolación de los resultados de evaluar  $0 < x_F < 20$ , en las ecuaciones de la densidad (2.40), y la presión (2.41), para un valor de  $y$  fijo. (ver Fig. 2.1).

Analizando la Figura 2.1 se pueden llegar a las siguientes observaciones respecto a la región de parámetros escogidos para la EdE:

- A medida que el valor de  $\rho$  se incrementa las diferentes curvas (valores distintos de  $y$ ) convergen a la ecuación de estado  $p = \rho$  (sombreado gris claro), notar que mientras más grande es el valor de  $y$  más *rápida* es ésta convergencia. Por otro lado la rama  $y = 0$  (sin auto-interacción) está desconectada de este comportamiento.
- A medida que el valor de  $\rho$  decrece, las distintas curvas se aproximan a la del gas ideal no auto-interactuante,  $y = 0$  (sombreado gris oscuro). Observándose una relación inversamente lineal con el valor de  $y$ , es decir, cuanto mayor sea el valor de  $y$ , se debe tomar valores de  $\rho$  más pequeños para alcanzar el *límite* de no interacción.

Antes de proseguir con la construcción de estos objetos y a modo de contextualizar los valores definidos para el parámetro  $y = m/m_I$ , el cual caracteriza la intensidad de la interacción entre los fermiones oscuros, donde  $m_I$  señala la escala de energía a la cual ocurren las interacciones. Se puede apreciar que  $y$  puede variar en dependencia del objeto que se desee estudiar, p. ej. para los neutrinos (neutralinos) con una interacción débil y una masa alrededor de 1 eV (1 KeV) tendrán que  $y \approx 10^{-11}$  ( $y \approx 1/3$ ). Por otro lado para una estrella de neutrones típica con una masa del neutrón de  $\approx 1$  GeV y que interacciona fuertemente  $m_I \approx 100$  MeV se llega a que  $y \approx 10$ . Para este trabajo se definió el rango de valores:  $0 \leq y \leq 10$  el cual es consistente con el límite superior de  $m \approx 1$  GeV, expresado por la ecuación (2.45).

Finalmente para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (2.46a)-(2.46c) es necesario definir las condiciones de frontera en el origen, en el caso de las EOF dentro del marco de la RG estas son:  $A(r=0) = B(r=0) = 1$ ,  $p(r=0) = p_0$ . Con  $p_0$  el parámetro libre que indicará la presión central del objeto que se desea construir. Para nuestro análisis se consideraron valores entre  $10^{-10} m^4$  y  $10 m^4$ .

Con todo lo anterior ya es posible construir EOF en el marco de la RG. La Figura 2.2 muestra dos configuraciones típicas, en el recuadro izquierdo aparecen los correspondientes perfiles de densidad de energía en función del radio para una densidad central  $\rho_0 = 2.1 \times 10^{-6} m^4$  y dos valores diferentes de la intensidad de la auto-interacción:  $y = 1$  (línea discontinua) y  $y = 3$  (línea continua). Mientras que en el recuadro derecho se muestran sus respectivos perfiles de masa  $M(r)$ , los cuales fueron calculados mediante la definición de la masa ADM<sup>25</sup>

$$M = \frac{\bar{r}}{2} \left( 1 - \frac{1}{g^2} \right) \frac{m_p^3}{m^2}. \quad (2.48)$$

<sup>25</sup>Es posible definir la masa a partir de otras definiciones, por ejemplo [140]

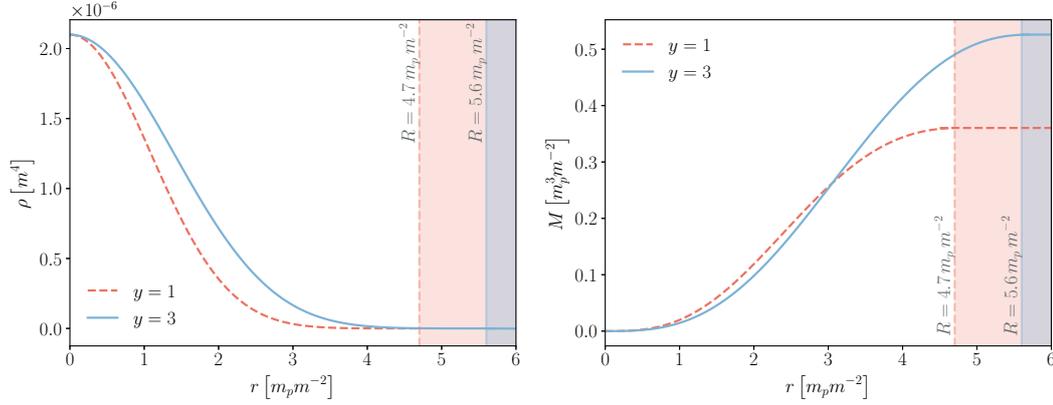


Figura 2.2: Perfiles para la densidad de energía y masa en función de la coordenada radial  $r$  para EOF. Como ejemplo se eligió  $\rho_0 = 2.1 \times 10^{-6} m^4$ , y dos valores para el parámetro que mide la intensidad de auto-interacción:  $y = 1$  (línea discontinua) y  $y = 3$  (línea continua). Las líneas verticales indican los respectivos radios  $R$  de los objetos,  $r > R$  (regiones sombreadas) pueden ser descritas mediante sus métricas de Schwarzschild equivalentes. Como se aprecia considerar auto-interacción produce una estructura auto-gravitante más masiva y con un perfil de densidad más alargado.

En la Figura 2.2 se señala con líneas verticales los respectivos radios  $R$  de las EOF presentadas. Estos son definidos de manera similar a sus análogos no oscuras, es decir, representan el radio donde  $p(R) = 0$ , y a partir del cual se aplica la relación  $p(r > R) = 0$ . Como era esperado, la masa permanece constante para  $r > R$  y la introducción de la auto-interacción produce una estructura auto-gravitante más masiva, cuyo perfil de densidad es más aplanado.

De manera general es posible construir toda la familia de EOF para nuestro espacio de parámetros  $(p_0, y) \rightarrow (R, M, y)$ . Recuérdese que cada valor de  $y$  implica una ecuación de estado diferente. Estas configuraciones se muestran en la Figura 2.3 y como se aprecia, varios de los resultados anteriormente inferidos de la Figura 2.1, son obtenidos. Es decir, configuraciones con densidades centrales bajas y valores *pequeños* de  $y$ , son equivalentes a las obtenidas ignorando los términos de interacción. En otras palabras, estos objetos se pueden describir a través de un gas ideal de Fermi. Para valores de  $y$  más altos, los

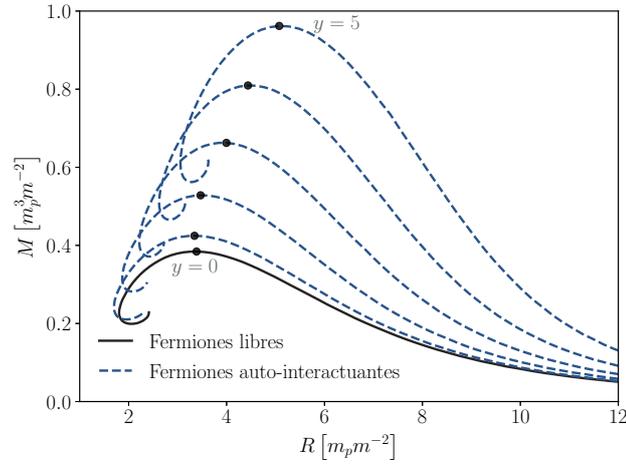


Figura 2.3: La línea continua negra corresponde a  $M$  vs  $R$  para  $y = 0$  (sin auto-interacción), mientras que las punteadas azules indican las diferentes familias de EOF construidas con constante de acoplamiento en un rango entre  $y = 1$  y  $y = 5$ , en el marco de la RG. Los puntos negros señalan la configuración que delimita la estabilidad.

términos de interacción se vuelven cada vez más importantes y el *punto de transición* de la curva relativista a no relativista se mueve a densidades más bajas. Un comportamiento similar ocurre con la configuración que delimita la frontera entre las diferentes regiones de estabilidad (puntos negros)<sup>26</sup>, para valores de  $y > 0$  esta frontera se mueve hacia la derecha (densidades centrales más bajas). Por otro lado, la masa de las EOF creció al considerar interacciones más fuertes, valores más grandes para  $y$ . Lo anterior era esperado puesto que este incremento conlleva a un *fortalecimiento* en la presión de degeneración, necesiándose por tanto más masa para contrarrestarla, y llegar así al equilibrio hidrostático.

A este punto, y para una mejor comprensión de los resultados presentados es conveniente

<sup>26</sup>En el caso de las EOF, se definió la frontera de estabilidad similar a sus hermanas no oscuras, es decir a partir de la configuración con máxima masa gravitatoria.

presentar las relaciones que nos permiten recuperar las unidades físicas típicas

$$M_{phys} = 1.638 \times 10^{12} \bar{M} \left( \frac{m}{\text{KeV}} \right)^{-2} M_{\odot}, \quad (2.49)$$

$$R_{phys} = 0.078 \bar{R} \left( \frac{m}{\text{KeV}} \right)^{-2} \text{pc}, \quad (2.50)$$

$$\rho_{phys} = 2.3 \times 10^{-4} \bar{\rho} \left( \frac{m}{\text{KeV}} \right)^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (2.51)$$

Analizando las figuras 2.2-2.3 y teniendo presente las transformaciones anteriores, se puede apreciar que este tipo de objetos pueden *mimetizar* diferentes tipos de objetos astrofísicos. Por ejemplo si  $m = 1 \text{ KeV}$  tendremos que  $M_{phys} \sim 10^{12} M_{\odot}$  y  $R_{phys} \sim 0.1 \text{ pc}$ . Esto abre la posibilidad de mimetizar un agujero negro supermasivo.<sup>27</sup> Por otro lado, si  $m \sim 1 \text{ TeV}$ , entonces  $M_{phys} \sim 10^{-6} M_{\odot}$  y  $R_{phys} \sim 1 \text{ cm}$ . Pudiendo mimetizar objetos tipo axion-stars [145–147].

Finalmente se terminará esta sección enumerando algunas propiedades generales de las EOF en la GR:

1. Para una EdE definida ( $y$  fija), la masa total de las EOF aumenta a medida que lo hace  $\rho_0$ . Existiendo un valor crítico  $\rho_*$ , para el cual esta alcanza su máxima masa,  $M_{max}$ . Para  $\rho_0 > \rho_*$  la masa total  $M$  es menor que  $M_{max}$  y se supone con *cautela* que las configuraciones son inestables.
2. La introducción de auto-interacción entre los fermiones oscuros ( $y > 0$ ), hace que las EOF resultantes aumenten el valor de sus masas respecto al caso sin auto-interacción, e incluso, con respecto a configuraciones con EdE correspondientes a valores menores del parámetro  $y$ .
3. El radio de los objetos  $R$  disminuye a medida que aumenta  $\rho_0$ .

<sup>27</sup>Es válido aclarar que a diferencia de los agujeros negros, las EOF no tienen horizonte de eventos, siendo muy similares a las EBs [141–143] o Gravastars [144].

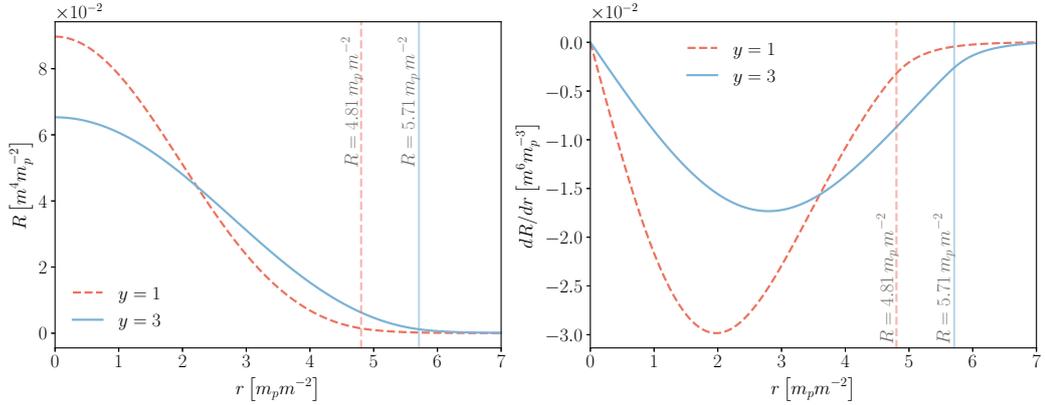


Figura 2.4: Se muestran los perfiles para el escalar de Ricci (panel izquierdo) y su derivada (panel derecho) como función de la variable radial  $r$  para dos configuraciones con una misma densidad central  $\rho_0 = 2.1 \times 10^{-6} m^4$  y  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$ , pero con las elecciones:  $y = 1$  (línea discontinua) y  $y = 3$  (línea continua). Se aprecia el valor escogido para  $R_0$  garantiza que se cumplan las condiciones:  $R(r_\star) \leq R_0/10^4$  y  $|R'(r_\star)| \leq R_0/10^4$ . A modo informativo se señalan con líneas verticales los respectivos radios  $R$  a partir del cual  $p(r > R) = 0$ , como se aprecia siempre son menores que los correspondientes  $r_\star$ .

A continuación, extenderemos nuestro análisis a un modelo más general de gravedad, en busca de encontrar cómo esta generalización afecta en las propiedades de las EOF.

### 2.3.2 EOF en gravedad $R + \alpha R^2$

Procedamos a construir las EOF en el marco de la gravedad R-cuadrada

$$f(R) = R + \alpha R^2, \quad (\alpha > 0), \quad (2.52)$$

donde  $\alpha$  es una constante con unidades de inverso del escalar de Ricci.

Como se puede observar la Ec. (2.52), equivale a considerar el siguiente orden de una posible expansión en series de  $R$ . Sin embargo, a pesar de su relativa sencillez, es capaz de brindar comportamientos muy interesantes, p. ej. el modelo de Starobinsky [148] puede reproducir de manera acertada el mecanismo de inflación. Una segunda versión de

este, denominado Starobinsky 2007 [121], es ampliamente investigado actualmente en el contexto cosmológico.

Para construir las EOF en el marco de la gravedad R-cuadrada, y similar al caso anterior, se parte de las ecuaciones de TOVm (2.8a)-(2.8c). Siendo solo necesario sustituir la función  $f(R) = R + \alpha R^2$  en las mismas, llegándose a

$$g' = \frac{g(2 + g^2(-2 + \bar{\alpha}\bar{R}(-4 + \bar{r}^2\bar{R}) + 16\pi\bar{r}^2\bar{\rho}) + 4\bar{\alpha}(\bar{R} + \bar{r}(2\bar{R}' + \bar{r}\bar{R}''))}{4\bar{r}(1 + 2\bar{\alpha}\bar{R} + \bar{r}\bar{\alpha}\bar{R}')} , \quad (2.53a)$$

$$N' = \frac{N(-2 - 4\bar{\alpha}\bar{R} + B^2(2 + 16\pi\bar{r}^2\bar{p} + \bar{\alpha}\bar{R}(4 - \bar{r}^2\bar{R})) - 8\bar{r}\bar{\alpha}\bar{R}')}{4\bar{r}(1 + 2\bar{\alpha}\bar{R} + \bar{r}\bar{\alpha}\bar{R}')} , \quad (2.53b)$$

$$\bar{R}'' = \frac{1}{6\bar{r}\bar{\alpha}(1 + 2\bar{\alpha}\bar{R})} \left[ 6\bar{\alpha}\bar{R}'(-1 - 2\bar{\alpha}\bar{R} + 2\bar{r}\bar{\alpha}\bar{R}') + g^2(\bar{r}(1 + 2\bar{\alpha}\bar{R})(24\pi\bar{p} + \bar{R} - 8\pi\bar{\rho}) + \bar{\alpha}(-6 + \bar{R}(\bar{r}^2 - 12\bar{\alpha} + 3\bar{r}^2\bar{\alpha}\bar{R}) + 16\pi\bar{r}^2\bar{\rho})\bar{R}') \right] , \quad (2.53c)$$

$$\bar{p}' = -\frac{N'(\bar{\rho} + \bar{p})}{N} , \quad (2.53d)$$

donde se usaron los cambios de variables (2.47), en conjunto con

$$\alpha = \bar{\alpha} m_p^2 / m^4 , \quad R = \bar{R} m^4 / m_p^2 , \quad (2.54)$$

con  $\bar{R}$  y  $\bar{\alpha}$  variables adimensionales. Vale destacar que a diferencia de la RG, para este modelo si aparece la ecuación adicional que describe el comportamiento del escalar de Ricci, siendo esto, una consecuencia del grado escalar adicional de libertad con el que cuenta la teoría.

Antes de proseguir con la construcción de estos objetos pongamos en contexto la posible signatura y valores que puede tomar el parámetro libre  $\alpha$ . El mismo ha sido restringido por observaciones a diferentes escalas:

- En el contexto cosmológico el considerar  $\alpha < 0$ , implica la aparición de inestabilidades en los modos (fantasmas) [149]. Mientras que en el contexto de la estrella de

neutrones valores negativos de  $\alpha$ , conllevan a que el perfil del escalar de Ricci tenga un comportamiento oscilante fuera de la estrella, no siendo posible recuperar la métrica de Schwarzschild para  $r \gg R$  [150]. Este tipo de comportamiento también se presentó en las EOF, por estas razones solo son presentados los resultados de la rama  $\alpha > 0$ .

- En el régimen de gravedad fuerte,  $|\alpha|$  está restringido a ser  $\lesssim 10^{10} \text{ cm}^2$  [151].
- En el límite de campo débil, diferentes experimentos nos dan diferentes límites, siendo el Eöt-Wash el límite más estricto,  $|\alpha| \lesssim 10^{-6} \text{ cm}^2$ . El experimento Gravity Probe B restringe  $|\alpha|$  a valores  $|\alpha| \lesssim 5 \times 10^{15} \text{ cm}^2$ , mientras que las medidas de la precesión del púlsar *B PSR J0737-3039* imponen  $|\alpha| \lesssim 2.3 \times 10^{19} \text{ cm}^2$  [152].

Aunque los diferentes límites discrepan entre sí, todos siguen siendo significativos. Lo anterior es debido a que este tipo de teoría presenta un efecto tipo *Chameleon* (ver [153]) y, por lo tanto, los efectos de  $\alpha$  podrían *apreciarse* a diferentes escalas de estudio. En unidades físicas es posible expresar a  $\alpha$  en función de  $\bar{\alpha}$  como

$$\alpha = 5.79 \times 10^{-5} \bar{\alpha} \left( \frac{m}{1 \text{ TeV}} \right)^{-2} \text{ cm}^2, \quad (2.55)$$

de donde se deduce que para masas del fermión oscuro del orden,  $m \sim 1 \text{ TeV}$ , y valores de  $\bar{\alpha} \sim 10^{-1}$ , se estaría en concordancia con el límite más fuerte  $|\alpha| \lesssim 10^{-6} \text{ cm}^2$ . En este capítulo se considerarán valores de  $\bar{\alpha} \leq 0.05$ .

El siguiente paso para el análisis numérico es definir las condiciones de fronteras compatibles con configuraciones regulares en el origen. Anteriormente en el contexto de la RG, habíamos impuesto condiciones para los componentes métricos  $A$ ,  $B$ , y  $p$  en  $r = 0$ . Dichas condiciones se mantiene, pero debido al nuevo grado de libertad, es necesario establecer condiciones de frontera sobre el escalar de Ricci y su derivada. Luego de realizar

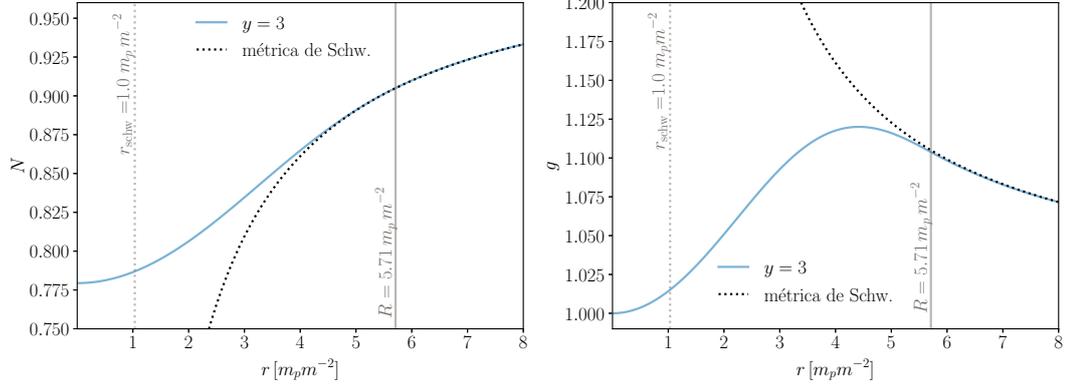


Figura 2.5: Se muestran las componentes del tensor métrico,  $N(r)$  (panel izquierdo) y  $g(r)$  (panel derecho) como funciones de la coordenada radial  $r$ , para una configuración con:  $\rho_0 = 2.1 \times 10^{-6} m^4$ ,  $y = 3$  y  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$ . Por construcción las EOF recuperan asintóticamente las componentes de Schwarzschild (líneas punteadas negras):  $N_{\text{schw}}(r) = (1 - r_{\text{schw}}/r)^{1/2}$  y  $g_{\text{schw}}(r) = N_{\text{schw}}^{-1}(r)$ , donde  $r_{\text{schw}} = 2M/m_{\text{pl}}^2$  (línea vertical punteada), con  $M = 0.52m_{\text{pl}}^3 m^{-2}$ . Adicionalmente se indica el radio  $R$  a partir del cual  $p(r > R) = 0$ , como se aprecia es menor que  $r_\star = 8$ .

una expansión en series del sistema (2.53) alrededor del origen, y resolviéndolas orden a orden, se encontraron las siguientes condiciones de contorno para el escalar de Ricci y su derivada

$$R(r=0) = R_0, \quad R'(r=0) = 0, \quad (2.56)$$

donde la *prima* indica derivada con respecto a  $r$  y  $R_0$  es una constante arbitraria.

Aunque el estudio alrededor del origen permite cierta libertad en la elección de  $R_0$ , el imponer que las EOF sean objetos localizados y asintóticamente planos remueve la misma. El valor escogido para  $R_0$  debe garantizar que el perfil del escalar de Ricci decaiga como  $r^{-2}$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , o lo que es igual, que el escalar de Ricci tienda asintóticamente a cero cuando  $r \rightarrow \infty$ . Para encontrar el valor adecuado de  $R_0$ , se implementó un algoritmo de *shooting* [154], para el cual se elige un valor particular del radio tal que,  $R(r_\star) \sim 0$ , cumpliéndose las condiciones:  $R(r_\star) \leq R_0/10^4$  y  $|R'(r_\star)| \leq R_0/10^4$ , ver p. ej. Figura 2.4.

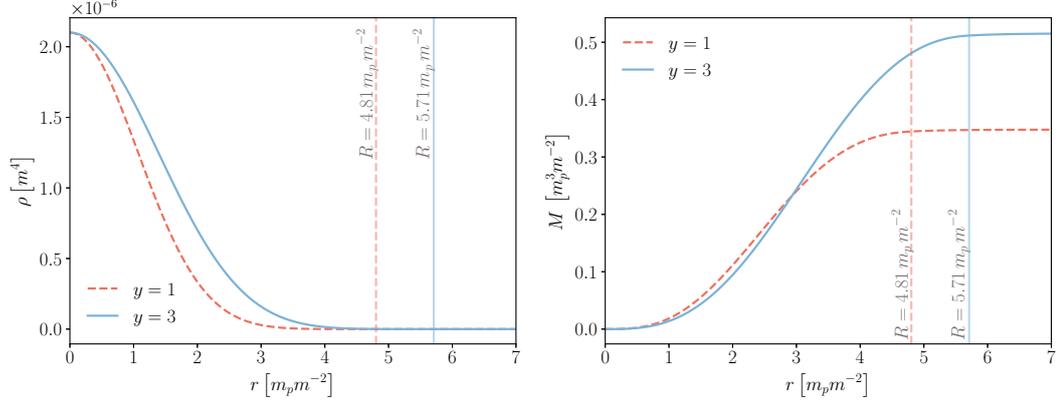


Figura 2.6: Perfiles para la densidad de energía y masa en función de la coordenada radial  $r$ . Como ejemplo se eligieron las mismas configuraciones de la Figura 2.6 en un modelo con  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$ . Las líneas verticales indican los respectivos radios a partir de los cuales  $p(r > R_i) = 0$ , como se aprecia estos son menores que sus respectivos  $r_*$ . Similar a la RG considerar auto-interacción produce una estructura auto-gravitante más masiva y con un perfil de densidad más alargado.

Una consecuencia directa del decaimiento asintótico del escalar de Ricci, se ve reflejada en la masa de estas EOF. En estos modelos, al igual que hicimos para la RG, la masa se calcula mediante la ecuación (2.48), pero a diferencia de esta última, no se cumple la relación  $p(R) = 0 \rightarrow M = \text{cte}$ . En gravedad R-cuadrada se puede observar de la ecuación (2.53d) que para  $p = 0$ , va a existir una dependencia del escalar de Ricci, esto va a implicar que el radio al que debemos evaluar la masa (y a partir del cual permanece constante) es  $r = r_*$ . Lo anterior es debido a que a partir de ese radio se cumple que,  $R(r > r_*) \sim 0$ , y por tanto la métrica del espacio-tiempo se aproxima a la de Schwarzschild (ver Figura 2.5). Otra observación importante es que la densidad de masa tiende a cero más rápido que el escalar de Ricci, lo que implica que la masa pueda aumentar incluso si la estrella tiene una contribución insignificante de fermiones. Lo mismo se aplica a la derivada del escalar de Ricci. Por lo tanto, los fermiones oscuros estarán contenidos en un radio  $R$  menor que  $r_*$  (ver Figs. 2.5, 2.4, 2.6).

Con una metodología similar a la aplicada para la RG, y teniendo presente los detalles

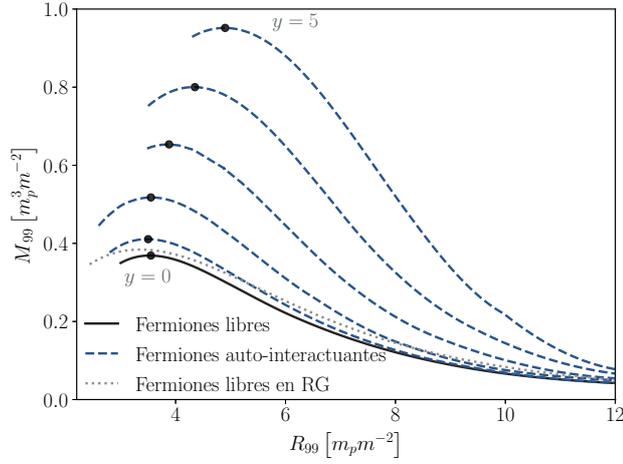


Figura 2.7: Se muestra la relación  $M_{99}$  vs  $R_{99}$  para la familia de configuraciones con  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$ . Esta figura es equivalente a la Fig. 2.3. La línea negra continua corresponde al caso sin auto-interacción  $y = 0$ , mientras que las punteadas azules corresponden a EdE con parámetro de auto-interacción entre  $y = 1$  y  $y = 5$ . La línea gris representa la familia de EOF en RG con  $y = 0$ , esta fue introducida a modo de comparación.

anteriormente comentados, se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones (2.53a)-(2.53c). Perfiles típicos de la densidad,  $\rho(r)$ , y de la masa,  $M(r)$ , para EOF en gravedad R-cuadrada son mostrados en la Figura 2.6. En este caso se tomó un modelo con  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$  y fueron escogidas las misma densidad central y valores de  $y$  presentados en Figura 2.2. Como se aprecia no existen muchas diferencias *visuales* entre las configuraciones construidas en el marco de la RG y las obtenidas en la gravedad R-cuadrada con  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$ , la razón de tal resultado es debido a que no fueron construidas en la región dentro del espacio de parámetros donde las diferencias son más notables, p. ej. densidades más altas, valores de los parámetros  $\alpha$  o  $y$  mayores. En la próxima sección se abordará en más detalle las relaciones entre estos parámetros y como afectarán en las propiedades de los objetos.

Análogo a la RG es posible construir toda la familia de EOF para nuestro espacio de parámetros  $(p_0, y, \alpha) \rightarrow (R_{99}, M_{99}, y, \alpha)$ . A modo ilustrativo la Figura 2.7 muestra parte de esta familia de soluciones para  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$ , en el espacio de parámetros  $M_{99}$  vs

$R_{99}$ , con diferentes valores de  $y$ . Es importante recordar que existe una contribución a la masa proveniente del escalar de curvatura aún cuando  $p = 0$  (ver Figs. 2.5, 2.4, 2.6) y que formalmente, el escalar de Ricci sería nulo en el infinito,  $R(r \rightarrow \infty) = 0$  (análogo a las EBs). Por tal motivo se definieron las cantidades  $M_{99} = 0.99M$  (99 % de la masa) y  $R_{99}$ , representando este último, el radio al cual el 99 % de la masa es alcanzada. En ocasiones, y como se aplica en el próximo capítulo, se usa el 95 %.

Finalmente, como se ha podido apreciar de los resultados presentados, en la gravedad R-cuadrada, las EOF tienen similar comportamiento al obtenido en la RG. Pero el haber introducido el parámetro libre,  $\alpha$ , indujo una modificación en la estructura global de la configuración. En particular, en la gravedad R-cuadrada, las masa máxima  $M_{max}$  obtenida para una familia de soluciones (p. ej. puntos negros Fig. 2.7), es más pequeñas que la respectiva calculadas en la RG para el mismo valor del parámetro de auto-interacción  $y$  (comparar Figs. 2.3 y-2.7). Lo anterior también se cumple si comparamos configuraciones particulares construidas con una misma densidad central y parámetro de auto-interacción  $y$ .

Para entender este comportamiento, tomemos el límite newtoniano de la gravedad R-cuadrada. En este caso, el potencial gravitacional newtoniano para la gravedad R-cuadrada es [155]

$$V(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{GM}{3r}e^{-\beta r}, \quad (2.57)$$

donde  $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3\alpha}$ . Notar que la fuerza gravitatoria aumenta si  $\beta > 0$  y, en consecuencia, se necesitaría una cantidad menor de masa para compensar la presión producida por los fermiones oscuros. Esta reducción en la masa de la configuración se puede observar en la Figura 2.7. Nótese que la línea negra sólida que corresponde  $y = 0$  en la gravedad R-cuadrada, siempre está por debajo del equivalente en RG (la línea gris), de manera similar ocurre si comparamos comparar los resultados de las Figs. 2.3 y-2.7 para otros

valores de  $y$ . Lo anterior significa que todas las EOF en la gravedad R-cuadrada poseen una masa menor que sus equivalente en la RG.

## 2.4 Semejanzas y diferencias entre las EOF en RG, y gravedad R-cuadrada

Las EOF son objetos constituidos por partículas fermiónica oscuras auto-interactuantes que similar a otros candidatos oscuros, no interaccionan con las partículas del modelo estándar. Sin embargo, en principio, se pudieran detectar mediante pruebas que estudien su marca gravitatoria, p. ej. el efecto que las EOF pudiesen inducir gravitacionalmente a otras estrellas (semejante a [156,157]), o a través de la radiación gravitatoria provenientes de colisiones donde estén involucrados estos objetos. En este último caso, es conocido que las ondas gravitatorias provenientes de objetos sin horizonte (como es el caso de las EOF), tienen un comportamiento fácilmente distinguible en comparación con las señales de objetos compactos que si lo poseen [158]. Esto pareciera abrir la posibilidad de determinar la verdadera naturaleza de estos objetos compactos (en caso de detectarse alguna señal con estas características).

Sin embargo, según lo comentado al finalizar la sección anterior, las EOF parecen presentar similares características tanto en la RG, como en la gravedad R-cuadrada. Lo anterior apoyaría la hipótesis de la existencia de una degeneración entre las propiedades de la MO fermiónica (codificadas en el parámetro  $y$ ), y el modelo gravitatorio de fondo. Imposibilitando así determinar las propiedades de estas mediante su evidencia gravitatoria. Como se verá en esta sección dicha degeneración nos pondría cierto sesgo en el contexto de los objetos compactos entre:

- RG + MO fermiónica auto-interactuante y gravedad R-cuadrada + MO fermiónica.

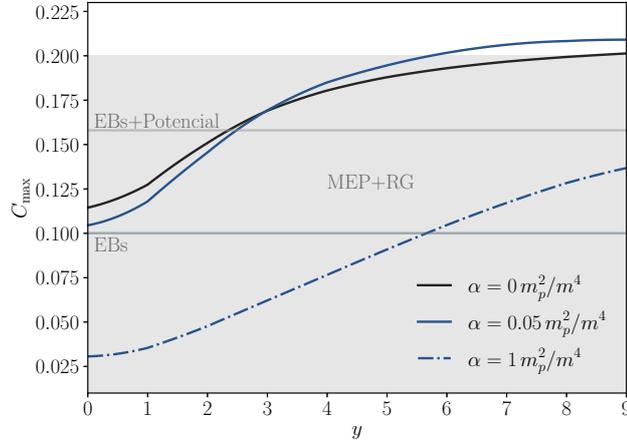


Figura 2.8: Máxima compacidad correspondiente a las EOF estables en función del parámetro de auto-interacción,  $y$ . Se muestran tres modelos diferentes: RG (línea negra) y dos pertenecientes a la gravedad R-cuadrada (líneas azules). A modo de comparación se muestra la compacidades teóricas máximas (líneas horizontales) para una EBs sin auto-interacción,  $C \approx 0.1$  [143] y con auto-interacción,  $C = 0.158$  [159]. La región sombreada de gris indica las compacidades correspondientes a objetos observados en el marco del MEP, p. ej.  $C \sim 0.1 - 0.2$  para estrellas de neutrones.

- RG + MO fermiónica y gravedad R-cuadrada + MO fermiónica auto-interactuante.
- RG + MO fermiónica auto-interactuante y gravedad R-cuadrada + MO fermiónica auto-interactuante.

### 2.4.1 Compacidad

Un objeto que se encuentre relativamente alejado de una EOF, *sentirá* siempre el mismo potencial gravitatorio proveniente de esta estrella, sin importarle el modelo de fondo. Esto será cierto, siempre y cuando la relación  $M/R$  sea la misma en ambos modelos. La cantidad  $M/R$  define la compacidad del objeto y la denotaremos como  $C$

$$C \equiv \frac{GM}{R}, \quad (2.58)$$

donde  $G$  es la constante de Newton,  $M$  y  $R$  son las respectivas masas y radios de los objetos. Es importante señalar que para el caso de gravedad R-cuadrada, la masa y el radio vendrán dados por  $M_{99}$  y  $R_{99}$  respectivamente. Por otro lado nótese que el parámetro es  $C$  adimensional.

De manera general vamos a tener que la compacidad de las EOF se va a ver afectada por las auto-interacciones. Como fue mostrado anteriormente, considerar valores grandes para  $y$  conlleva objetos más masivos, sin embargo, aunque sus radios también aumentan, este no lo hace tan significativamente como la masa. Por lo tanto, tendremos que la compacidad de la estrella aumentará a medida que aumenta  $y$ . Estos cambios implicarán variaciones en varias propiedades, como por ejemplo, la posible radiación gravitatoria emitida por una estrella asimétrica, o un binario de EOF, y por supuesto, un cambio en la relación masa-radio induciría cambios en el potencial gravitacional que las estrellas producen.

Teniendo esto presente, estudiamos el cambio en la compacidad máxima<sup>28</sup> de las EOF en función del valor del parámetro de auto-interacción  $y$ . La Figura 2.8 ilustra los resultados obtenidos. Como se puede apreciar para  $y \gtrsim 5$  y  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$  se obtienen configuraciones teóricas más compactas que las estrellas detectadas dentro del marco del MEP (región gris), p. ej. la compacidad del Sol es  $\sim 10^{-5}$ , para las estrellas de neutrones  $C \sim 0.1 - 0.2$  [160], aunque teóricamente se ha podido llegar a valores superiores [161]. Por otro lado, varias de las configuraciones construidas cruzan los límites teóricos:  $C \approx 0.1$ , EBs sin auto-interacción [143], y  $C = 0.158$ , EBs con auto-interacción [159], aunque ninguna alcanza el límite  $C \approx 0.35$  correspondiente a una EBs con un potencial exótico [162]. Tampoco se llega a cruzar las fronteras delimitadas por el límite de Buchdahl,  $C = 4/9$  [163] y el de un agujero negro de Schwarzschild,  $C = 1/2$ . Por otro lado se aprecia que un aumento en el valor de  $\alpha$ , implica una disminución en la compacidad máxima. Lo

---

<sup>28</sup>Entiéndase como compacidad máxima aquella que corresponde a la configuración estable cuya relación masa/radio sea máxima.

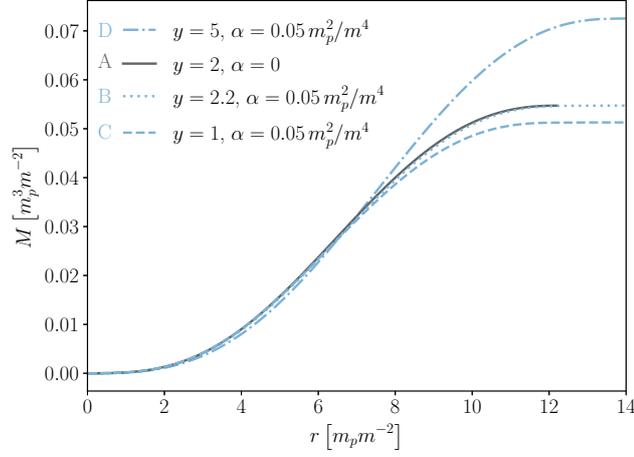


Figura 2.9: La figura muestra la posible degeneración que puede existir entre los parámetros libres y el modelo gravitatorio de fondo. Los perfiles A, B, C corresponden a objetos con una misma densidad central,  $\rho_0 = 4.1 \times 10^{-5} m^4$ , mientras que D fue construido con  $\rho_0 = 3.4 \times 10^{-5} m^4$ . Como se aprecia, la configuración A (obtenida en RG), es equivalente al perfil B (obtenido en R-cuadrada). Tendremos entonces que, con la respectiva elección de los parámetros  $(\alpha, y)$  se podría reproducir cualquier perfil obtenido en la RG y viceversa. Algo similar ocurre cuando consideramos otra densidad, p. ej. D, una elección mayor para  $y$ , permitiría reproducir tanto A, como B.

anterior esta relacionado al hecho de que la masa máxima disminuye, mientras que  $R_{99}$  no cambia significativamente.

Un resultado interesante que se aprecia de la Figura 2.8, es que existen puntos (configuraciones) donde la curva correspondiente a la compacidad de las EOF en RG, se cruza con la correspondiente a la de gravedad R-cuadrada, p. ej para  $y \sim 2.8$ . Lo anterior sería un ejemplo de la confusión que puede existir entre las propiedades de la MO codificadas en  $y$  y modificaciones a la RG, algo que se discutirá con mayor profundidad a continuación.

## 2.4.2 Confusión

Los resultados anteriores mostraron una relación lineal entre los parámetros libres,  $y, \alpha$ , y la masa de la EOF resultante. En esta sección mostraremos que mediante una elección

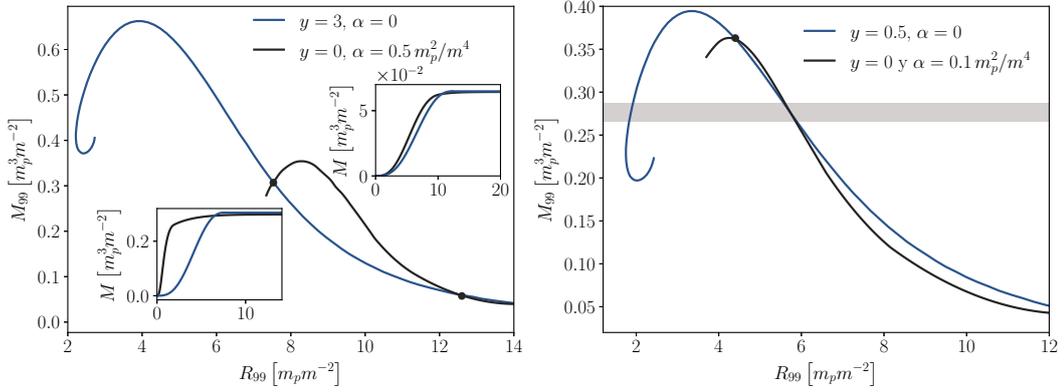


Figura 2.10: Las figuras muestran posibles confusiones que pueden existir entre la relación entre masa y radio en RG y  $f(R)$ . Izquierda: la línea azul corresponde a una familia de configuraciones en la RG con  $y = 3$ , mientras que la negra representa otra familia, pero en la gravedad R-cuadrada con  $y = 0$ . Los puntos negros señalan configuraciones con una misma masa y radio, lo que conllevaría a una posible evidencia gravitatoria equivalente. Derecha: se ilustra la misma idea, pero con otros valores para  $y$  y  $\alpha$ . Para este caso, dadas las incertidumbres astrofísicas típicas, sería difícil distinguir pequeñas variaciones en la compacidad de las EOF de ambos modelos representadas por la región sombreada. Por lo tanto, en este caso, se puede confundir un número infinito de configuraciones.

adecuada de las cantidades,  $m$ ,  $y$ ,  $\alpha$  y  $p_0$ , es posible obtener configuraciones equivalentes (con distintos valores de estos parámetros) en ambos modelos gravitatorios. Lo cual abre la posibilidad a interpretaciones confusas de posibles evidencias de estos objetos.

Para ilustrar este punto, hemos construido tres configuraciones diferentes que se muestran en la Figura 2.9,

- Configuración A: la línea sólida corresponde a  $\rho_0 = 4.1 \times 10^{-5} m^4$ ,  $y = 2$  y  $\alpha = 0$  (RG con auto-interacción),
- Configuración B: la línea de puntos corresponde a  $\rho_0 = 4.1 \times 10^{-5} m^4$ ,  $y = 2.2$  y  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$  (gravedad R-cuadrada con auto-interacción),
- Configuración C: la línea de puntos corresponde a  $\rho_0 = 4.1 \times 10^{-5} m^4$ ,  $y = 1$  y  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$  (gravedad R-cuadrada con auto-interacción),

- Configuración D: la línea discontinua corresponde a  $\rho_0 = 3.4 \times 10^{-5} m^4$ ,  $y = 5$  y  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$  (gravedad R-cuadrada con auto-interacción).

Notemos que la configuración A tiene la misma densidad central que la B, y la C, diferenciándose en sus respectivos valores para el parámetro de auto-interacción  $y$ . Sin embargo, como se puede ver en la Figura 2.9, para los casos A y B, las masas y radios obtenidos son casi indistinguibles. Por lo tanto, cualquier partícula de prueba seguiría la misma trayectoria en ambas configuraciones, siendo imposible distinguir observacionalmente si dicha trayectoria se debe a la característica (el valor) de la auto-interacción en la RG, o a una modificación de esta.

Estudiamos ahora la configuración de menor densidad central, la D. De la Figura 2.9 se puede apreciar que la misma corresponde a la máxima masa, aún cuando es el objeto de menor densidad central. Dicho resultado es debido a que consideramos un valor mayor de la auto-interacción  $y$ , lo que se tradujo en un aumento de la masa total y en este caso, llegando a ser mayor que la línea sólida que representa a la RG. Por lo tanto, se puede asegurar que existirá un valor de  $y \in [1, 5]$  donde una EOF en la gravedad R-cuadrada con  $\rho_0 = 3.4 \times 10^{-5} m^4$ , y  $\alpha = 0.05 m_p^2/m^4$ , será equivalente a la obtenida en la RG con  $y = 2$  y  $\rho_0 = 4.1 \times 10^{-5} m^4$ . Así, al igual que en el caso anterior (iguales densidades centrales), cualquier señal gravitatoria para estos dos objetos, será casi idéntica para diferentes valores de la constante de acoplamiento.

Expongamos otras posibilidades de confusión que se pueden presentar. Para ello se construye la familia de configuraciones con  $y = 3$  en RG y su equivalente para  $y = 0$  en gravedad R-cuadrada con  $\alpha = 0.5 m_p^2/m^4$ . Los resultados se muestran en el panel izquierdo de la Figura 2.10. Como se aprecia, en el gráfico  $M_{99}$  vs  $R_{99}$  hay 2 puntos que se interceptan, es decir existen dos configuraciones (por punto) con las las misma compacidad. Lo anterior implicará que cualquier objeto alejado de estas EOF sentirá el mismo

potencial gravitatorio, siendo imposible detectar diferencias dinámicas. Por lo tanto, si una estrella luminosa está orbitando alguna de estas EOF y su dinámica es el único observable que tenemos, no podríamos restringir de manera certera las propiedades de las partículas de MO<sup>29</sup>. Es decir, pudiera darse el caso donde no existiera auto-interacción alguna, y el efecto detectado se deba a una teoría gravitatoria de fondo diferente a la RG, p. ej. las configuraciones se interceptan en la Figura 2.10.

En el ejemplo anterior se abordaron dos posibles configuraciones que imponían un sesgo en la determinación de las propiedades de la MO. Pero esta confusión puede acrecentarse si tenemos presente las incertidumbres astrofísicas típicas con las que se realizan las mediciones. Es decir, pequeñas variaciones en las compacidades o en la relación  $M_{99}$  vs  $R_{99}$  serían difíciles de identificar. Ilustremos esta posibilidad construyendo todas las configuraciones posibles con  $y = 0.5$  en la RG y todas las configuraciones para  $y = 0$  en gravedad R-cuadrada con  $\alpha = 0.1 m_p^2/m^4$ . Los resultados son mostrados en el panel derecho de la Figura 2.10. Como se puede apreciar hay una región en la que se solapan ambas curvas (región sombreada), lo que implicaría, teniendo presente la incertidumbre observacional, que se puedan confundir un número infinito de configuraciones. Dicho resultado acrecentaría más aún la situación presentada en el ejemplo anterior, Figura 2.10 (panel izquierdo).

Los ejemplos anteriores nos demuestran posibles confusiones que pudieran presentarse en el estudio de potenciales observaciones de EOF. Siendo una de las principales consecuencias la imposibilidad de poder definir, al menos usando solo estos objetos compactos, las propiedades de la MO fermiónica. La dependencia de las cantidades masa y radio con respecto al modelo gravitatorio y al parámetro de auto-interacción nos impone una fuerte limitación, apareciendo las degeneraciones anteriormente presentadas, las cuales impiden definir correctamente el modelo de gravedad de fondo, así como las propiedades del gas

---

<sup>29</sup>Recuerde que en este caso esa será la masa de la partícula de MO y la fuerza de la auto-interacción.

de fermiones oscuro.

## 2.5 Conclusiones Parciales

En este capítulo se propuso un modelo gravitatorio en el que podían estar presentes tanto la MO, como modificaciones a la GR. En particular, fue definida la MO como un fermión auto-interactuante en el límite degenerado [24], y a la gravedad R-cuadrada, como la posible modificación. En este escenario, se construyeron y estudiaron estructuras auto-gravitantes constituidas por fermiones oscuros en el límite degenerado, a las cuales se les llamó EOF.

En una primera parte se dedujeron las ecuaciones de estructura (2.8a)-(2.8c), para a un objeto estático, esféricamente simétrico, y cuya ecuación de estado para la MO, Ecs. (2.40)-(2.41) [24] fue deducida asumiendo fermiones oscuros en el límite degenerado, donde la auto-interacción es descrita mediante un término proporcional a la densidad de partículas al cuadrado.

Posterior a esto se estudió el modelo de MO propuesto, en el marco de la RG, llegándose a obtener EOF más compactas que las EBs con, y sin auto-interacción (modelo EKG). Demostrándose que estos objetos en dependencia de la masa del fermión, pueden llegar a ser tan masivos, y compactos como para ser considerados imitadores de agujeros negros.

La introducción de un modelo gravitatorio tipo,  $f(R) = R + \alpha R^2$ , implicó la aparición de ciertas particularidades en las EOF. Por ejemplo, la existencia de una relación entre la masa de estas estrellas y el efecto del término cuadrático  $\alpha R^2$ : un incremento en el valor de  $\alpha$ , conlleva a configuraciones con menor masa. Esta reducción en la masa implicará EOF menos compactas en la gravedad R-cuadrada en comparación con su contraparte en RG.

---

En una última parte del Capítulo se argumentaron posibles degeneraciones que se podrían presentar en futuras detecciones de estos objetos teóricos. Como fue señalado, observaciones que se centren en propiedades tales como masa, radio o compacidad pueden verse sesgadas por la posibilidad de construir EOF similares tanto en la RG, como en la gravedad R-cuadrada. Tal situación imposibilitaría la determinación de las propiedades de esta MO (codificadas en el parámetro  $y$  y  $m$ ) mediante observaciones astrofísicas. Es válido señalar que aunque estas posibles confusiones fueron demostradas para un modelo alternativo particular. Es muy probable que la misma se mantenga para cualquier otro modelo  $f(R)$  arbitrario que tenga uno o más parámetros libres.

# 3 Posibles implicaciones de un grado de libertad escalar extra proveniente del sector gravitatorio

“No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.”

Nikolái Lobachevski

## 3.1 El modelo gravedad (beyond) Horndeski

Como se comentó en el Capítulo 1, la RG+MEP no es una teoría *completa*. La misma no describe correctamente el régimen ultravioleta (asumiendo la cuantización canónica) y necesita de componentes de materia *exótica* para reproducir algunos resultados a escalas galácticas y cosmológicas. Varias han sido las propuestas que intentan solventar parte de las deficiencias comentadas (ver Fig. 1.2), un ejemplo de estas teorías es la gravedad  $f(R)$  estudiada en el Capítulo anterior. En particular este tipo de modelos entran en la familia de teorías que promueven un grado de libertad escalar extra (recordar que la RG cuenta con dos grados de libertad tensoriales provenientes del gravitón). Como puede inferirse

para este caso, el grado escalar proviene de haber modificado la relación geométrica a nivel de la acción, aunque de manera general existen varias formas de introducirlo, en todos los casos se ha de evitar inestabilidades taquiónicas e inestabilidades tipo Ostrograski [94,95], o en caso de tenerse derivadas con orden superior a dos, se debe garantizar que no se propague un grado de libertad escalar adicional (fantasma).<sup>30</sup>

En este sentido, la gravedad de Horndeski [164–166] corresponde al modelo más general que introduce un campo escalar en la acción, y donde las ecuaciones del campo son a lo sumo de segundo orden (evita inestabilidades tipo Ostrograski).<sup>31</sup> La acción para esta teoría viene dada por<sup>32</sup>

$$S = S_{\text{grav}} + S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i[g_{\mu\nu}, \phi] + \mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \Psi] \right), \quad (3.1)$$

donde  $S_{\text{grav}}$  caracteriza al sector gravitacional y esta constituido por la suma de los términos

$$\mathcal{L}_2 \equiv G_2[\phi, X], \quad (3.2a)$$

$$\mathcal{L}_3 \equiv G_3[\phi, X] \square \phi, \quad (3.2b)$$

$$\mathcal{L}_4 \equiv G_4[\phi, X] R - 2G_{4X}(\phi, X) (\square \phi^2 - \phi^{\mu\nu} \phi_{\mu\nu}), \quad (3.2c)$$

$$\mathcal{L}_5 \equiv G_5[\phi, X] G_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu} + \frac{1}{3} G_{5X}(\phi, X) (\square \phi^3 - 3 \square \phi \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\nu} + 2 \phi_{\mu\nu} \phi^{\mu\sigma} \phi^\nu{}_\sigma). \quad (3.2d)$$

Notar que fueron utilizadas las siguientes definiciones:  $\phi_\mu \equiv \nabla_\mu \phi$ ,  $\phi_{\mu\nu} \equiv \nabla_\nu \nabla_\mu \phi$ ,  $\square \phi \equiv \phi_\mu{}^\mu$  como el operador de d'Alembert y  $X \equiv g^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu$  representa el término cinético. Por

<sup>30</sup>Es necesario acotar que todas las inestabilidades tipo Ostrograski conllevan a la existencias de fantasmas, pero no todos los grados de libertad escalares fantasmas son consecuencia de inestabilidades tipo Ostrograski.

<sup>31</sup>Es válido señalar que esto es asumiendo que la teoría es covariante, cumple invariancia local de Lorentz y está formulada en cuatro dimensiones espacio-temporales.

<sup>32</sup>En el presente Capítulo se sigue trabajando con una signatura de la métrica  $(-, +, +, +)$  y en unidades donde  $\hbar = c = 1$ . El único cambio que por conveniencia se adopta es:  $M_{\text{Pl}} = 1/\sqrt{8\pi G} = 2.431 \times 10^{18} \text{ GeV}$ .

otro lado se usó una notación diferencial de sub-índices en las funciones  $G_i$  y  $F_i$  (p. ej.  $G_{iX}$  denota derivada parcial con respecto al término canónico  $X$ ). Como es usual, los términos  $R$  y  $G_{\mu\nu}$  representan el escalar de Ricci y el tensor de Einstein respectivamente. El término de materia  $\mathcal{L}_m$  puede incluir todos los campos del MEP, e incluso otros componentes que contribuyen al sector oscuro del Universo. Para garantizar el principio de equivalencia débil, se asume que estos campos están mínimamente acoplados a la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$  (marco de Jordan).

Una extensión que abandona la restricción de ecuaciones de segundo orden, pero que sigue propagando solo tres grados de libertad (dos tensoriales y uno escalar) son los llamados modelos Degenerate Higher Order Scalar Tensor (DHOST) [167, 168]. Los mismos contienen un subconjunto conocido como Gleyzes-Langlois-Piazza-Vernizzi (GLPV) [169, 170] (también llamado beyond Horndeski [171]). Este subconjunto extiende a derivadas superiores en la métrica la gravedad de Horndeski, la forma en que se logra es con la adición de los términos

$$\mathcal{L}_4^{\text{ext}} \equiv F_4[\phi, X] \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \phi_\mu \phi_{\mu'} \phi_{\nu\nu'} \phi_{\rho\rho'} , \quad (3.3a)$$

$$\mathcal{L}_5^{\text{ext}} \equiv F_5[\phi, X] \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \phi_\mu \phi_{\mu'} \phi_{\nu\nu'} \phi_{\rho\rho'} \phi_{\sigma\sigma'} , \quad (3.3b)$$

a las respectivas densidades lagrangianas  $\mathcal{L}_4$  y  $\mathcal{L}_5$  en (3.2c) y (3.2d). El término  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  representa el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita. En los casos donde las funciones  $F_i \neq 0$ , aparecerán derivadas de orden superior en la acción, las cuales conllevarán a operadores diferenciales de orden superior a dos en las ecuaciones de movimiento. Lo anterior no implicará inestabilidades de Ostrogradski como fue probado en [167–170].

El modelo GLPV engloba una serie de teorías que son, en general, no renormalizables, y que deben entenderse como teorías efectivas de campo a baja energía (TEC) [172–179]. Sin embargo, una propiedad interesante que presenta este modelo, es la posibilidad de re-

recuperar mediante elecciones particulares de las funciones  $G_i$  y  $F_i$ , muchos de los modelos más estudiados en el ámbito gravitacional, por ejemplo: un acoplamiento no mínimo de la forma  $f(\phi)R$  puede ser obtenido tomando la función  $G_4 = f(\phi)$ , en cuyo límite  $G_4 = \text{cte.} = \frac{1}{2}M_{\text{Pl}}^2$ , se recupera la RG. En caso de quererse incluir un término tipo constante cosmológica  $\Lambda$ , se tendría que añadir  $G_2 = -M_{\text{Pl}}^2\Lambda$ . Las diferentes elecciones de  $G_3$  han sido investigadas en el contexto de Kinetic Gravity Braiding [180] y  $G$ -inflation [181], mientras que elecciones de  $G_2$  pueden conducir a modelos tipo  $k$ -inflation [182],  $k$ -essence [183,184]. Una elección interesante de este término es:  $G_2 = -\frac{1}{2}X - V(\phi)$ , con  $V(\phi) = m^2|\phi|^2$ , la cual representa la gravedad de EKG. Por último, las teorías  $f(R)$  estudiadas en el capítulo anterior pueden ser representadas como una subclase de la gravedad de beyond Horndeski, mediante sus modelos equivalentes escalares-tensoriales (ver p. ej. [116,118]).

Todo lo comentado anteriormente señala varias de las razones por la cual el modelo GLPV puede resultar interesante en un estudio. Otro motivos que se puede argumentar es que la introducción de las funciones  $F_i$  permiten recuperar de manera *elegante* que la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales ( $c_{\text{GW}}$ ) sea igual a la velocidad de la luz en el vacío ( $c$ )<sup>33</sup>, algo que dejaba de ser cierto al considerar acoplamientos no mínimos en los términos  $L_4$ , y  $L_5$  entre la gravedad y el campo escalar dentro del modelo Horndeski [187,188]. En el marco de beyond Horndeski, estos se pueden eliminar por completo seleccionando [189,190]

$$G_{5,X} = 0, \quad F_5 = 0, \quad 2G_{4,X} - XF_4 + G_{5,\phi} = 0. \quad (3.4)$$

En adelante cuando se cumpla la restricción (3.4) diremos que son modelos *viabes* beyond Horndeski. Lo anterior puesto que cuando no se cumple (3.4) los modelos requerirán un ajuste *fino* para estar de acuerdo con la restricción impuesta por las observaciones

<sup>33</sup>Las detecciones *simultaneas* de la onda gravitatoria GW170817 [103] y su contraparte electromagnética GRB170817A [185, 186] fijaron el límite de propagación de una onda gravitacional en el vacío a:  $-3 \times 10^{-15} \leq c_{\text{GW}}/c - 1 \leq 7 \times 10^{-16}$  o lo que es lo mismo  $c_{\text{GW}} = c$ . Vale señalar que en el contexto de los objetos compactos esta constrictión no es trascendental.

GW170817 [103] y GRB170817A [185, 186], o se verán obligados a cumplir ciertas condiciones particulares [191, 192], no siendo garantizada su viabilidad de forma genérica.

Como es bien conocido el *balance* entre los términos lineales y no lineales en las ecuaciones permite la existencia de estados ligados estables no dispersivos. A dichas soluciones se les suele llamar solitones, y cumplen que una vez que se producen, sobreviven permanentemente. Como se puede apreciar de las ecuaciones (3.2) (con o sin (3.3a)) estas serán *altamente* no lineales pudiendo existir estos solitones. De manera general, este tipo de soluciones está fuertemente restringidas para dimensiones mayores a 1 ( $D > 1$ ) por el teorema de G.H. Derrick [193]. La demostración del mismo se deriva del hecho de que, en más de una dimensión espacial, y considerando las configuraciones como estáticas,  $\phi(t, \vec{x}) = \phi(\vec{x})$ , no existe ningún punto de energía estable ( $\delta E = 0, \delta^2 E \geq 0$ ) para variaciones uniformes del campo tipo,  $\phi_\lambda(\vec{x}) = \phi(\lambda\vec{x})$ . Sin embargo, como fue propuesto por el propio Derrick, considerar una dependencia temporal no dispersiva en la solución, o un campo (una elección particular) con espín no nulo permitiría sortear dicho teorema.

En el contexto que nos atañe, los solitones pueden ser clasificados en dos tipos: *solitones topológicos*(ST) [194] y *solitones no topológicos*(SNT) [195].<sup>34</sup> En este trabajo nos centraremos en

- *Solitones no topológicos*: la condición de frontera en el infinito para un solitón no topológico es la misma que para el estado de vacío. La condición necesaria para la existencia de solitones no topológicos es que debe haber una ley de conservación aditiva. [195]

En este Capítulo se demostrará que los términos cinéticos no canónicos en la acción (3.1) permitirán y serán la fuente de objetos solitónicos. En una primera parte se investigará las condiciones para su existencia y estabilidad en el régimen donde la métrica puede ser con-

---

<sup>34</sup>En [196] se hace un estudio de ambos tipos de solitones en teorías de campos escalares.

siderada como plana, para posteriormente extender el estudio a un espacio-tiempo curvo, considerando un acoplamiento no-mínimo con el campo. En este último caso se explorará la conexión existente entre los solitones construidos teniendo presente a la gravedad, y los obtenidos en el régimen plano. También se analizará la estabilidad y se presentarán ciertos análisis fenomenológicos que pudieran permitir diferenciar estos objetos de otros objetos compactos.

## 3.2 Términos cinéticos no canónicos, ¿fuentes de solitones en espacio plano?

Como se comentó, la aparición de soluciones solitónicas viene propiciada por la no linealidad en las ecuaciones del movimiento del campo. Usualmente, en las teorías escalares estas son introducidas para un espacio-tiempo plano a través del potencial del campo escalar (como se puede apreciar en [195, 196]). Sin embargo, sería lógico preguntarse, ¿es posible introducir la no linealidad en las ecuaciones de otra forma? Por ejemplo, considerando un potencial lineal y términos cinéticos no lineales como los que aparecen en los modelos viables beyond Horndeski.

Intentemos responder dicha pregunta en la presente sección para el caso donde no existe un acoplamiento entre el campo  $\phi$  y el espacio-tiempo. En la próxima sección 3.3, se estudiará la existencia de estos objetos en presencia de la gravedad. En ambos casos se intentará acotar mediante el estudio de estas soluciones los parámetros libres de esta familia de modelos.

### 3.2.1 Ecuaciones de movimiento

Partiendo de la acción (3.1) con  $\mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \Psi] = 0$  y tomando las elecciones particulares de  $\mathcal{L}_i$

$$\mathcal{L}_2 = -m^2\phi\bar{\phi} - X, \quad (3.5a)$$

$$\mathcal{L}_4 = -2G_{4X}(\square\phi\square\bar{\phi} - \phi^{\mu\nu}\bar{\phi}_{\mu\nu}). \quad (3.5b)$$

y su respectiva extensión (3.3a),<sup>35</sup> donde el considerar  $L_3 = 0$ , está dado por la obligación de contar con una ley aditiva de conservación. Dicha ley debido al ansatz<sup>36</sup>

$$\phi \rightarrow e^{-i\theta}\phi, \quad (3.6)$$

que usaremos, conlleva a la necesidad de un número par de campos por cada monomio, lo que implicaría un  $G_3 \sim \phi$  (o potencias impares de este). Puesto que solo nos interesan como fuente de estos objetos términos cinéticos no canónicos, y por simplicidad se fija  $L_3 = 0$ . La elección de  $L_5 = 0$  está dada por los criterios cosmológicos de viabilidad que conllevan a  $G_5 = 0$ . Por otro lado, notar que debido a que se asume un espacio plano, el escalar de curvatura  $R$  no aparece en (3.5b). También se usó la definición  $X \equiv g^{\mu\nu}\phi_\mu\bar{\phi}_\nu$ , en donde  $\bar{\phi}$  es el complejo conjugado de  $\phi$ .

La función  $G_4$  es escogida de tal forma que solo tenga una dependencia explícita de  $X$  y

<sup>35</sup>El considerar un campo escalar complejo no introduce ambigüedad alguna en las posibles elecciones de los campos  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\phi_\mu\phi_{\mu'}\phi_{\nu\nu'}\phi_{\rho\rho'}$  en Ec.(3.3a). Se probó que cualquiera combinación real del término es equivalente.

<sup>36</sup>Es ansatz garantizar que las ecuaciones tengan una simetría interna tipo  $U(1)$ , es decir son invariante ante transformaciones de fase, lo que nos garantiza la existencia de una ley aditiva de conservación.

cuya potencia siempre sea un entero positivo

$$G_4[X] = \frac{c_0 \Lambda_2^8}{\Lambda_3^6} + \frac{c_1 X \Lambda_2^4}{\Lambda_3^6} + \frac{c_2 X^2}{\Lambda_3^6} + \frac{c_3 X^3}{\Lambda_3^6 \Lambda_2^4} + \dots, \quad (3.7a)$$

$$F_4[X] = \frac{d_1 \Lambda_2^4}{\Lambda_3^6 X} + \frac{2d_2}{\Lambda_3^6} + \frac{3d_3 X}{\Lambda_3^6 \Lambda_2^4} + \dots, \quad (3.7b)$$

donde los puntos suspensivos indican las potencias superiores. La expansión de  $F_4$  es obtenida a partir de la restricción (3.4), fijando la relación entre los coeficientes  $d_i$  y  $c_i$  a:  $d_i = 2c_i$ . Debido a que estos son adimensionales, se tendrá que:  $\Lambda_2$  y  $\Lambda_3$  tienen unidades de energía,  $\Lambda_2 = \Lambda_3 = [M]$ . La relación entre ambas viene dada por [197]

$$\Lambda_2 \equiv (M_{\text{Pl}} \Lambda_3^3)^{1/4}, \quad (3.8)$$

con  $\Lambda_3$  indicándonos la escala donde la contribución procedente de la auto-interacción entre las derivadas, se vuelve importante (ver [197–199]). Notar que las expresiones (3.7) están escritas de forma que  $G_4 = [M^2]$  y  $F_4 = [M^{-6}]$ .

Tomando  $\mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \Psi] = 0$  en la acción (3.1) y  $\mathcal{L}_i[g_{\mu\nu}, \phi]$  dado por Ecs. (3.5), y Ec. (3.3a) con una dependencia explícita en las funciones  $G_4$  y  $F_4$  solo de  $X$ , llegamos luego de realizar la variación con respecto al campo a

$$\text{KG} + 2a G_{4XX}(X) + 2b G_{4XXX}(X) + 2c F_4(X) + d F_{4X}(X) + e F_{4XX}(X) = 0, \quad (3.9)$$

donde  $\text{KG} \equiv \bar{\phi}_\mu{}^\mu - m^2 \bar{\phi}$ , será el operador de Klein-Gordon (KG), y los coeficientes  $a, b, c, d, e$  pueden encontrarse en los notebooks publicados en [25]. Ha de comentarse que aún cuando en el término  $d$  aparezcan derivadas terceras del campo, la elección de nuestro ansatz (3.11) hace que dichos términos se eliminen mutuamente, quedando siempre una ecuación diferencial de segundo orden en el campo.

De la ecuación (3.9) se aprecia que el orden cero ( $G_4 \sim \text{cte.}$ ) y uno ( $G_4 \sim X$ ) en (3.7a), con  $F_4 = 0$ , reduce el análisis al modelo de KG, no existiendo por lo tanto soluciones solitónicas. Para el caso  $G_4 \sim X$  con  $F_4 \neq 0$  y dado como el primer término de (3.7b), se demostrará más adelante que si es posible este tipo de soluciones.

Por comodidad para el análisis reescribiremos la función  $G_4$  como

$$G_4 = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \eta_i X^i, \quad (3.10)$$

donde  $\eta_i = -2c_i \Lambda_2^{8-4i} / \Lambda_3^6$  es una constante de acoplamiento efectiva con dimensión  $\eta_i = [M^{2-4i}]$  en donde  $i$  el orden que se considere. En este trabajo solo nos centraremos en los ordenes uno y dos ( $n = 2$ ), aunque el procedimiento presentado es genérico y puede aplicarse a cualquier otra elección de potencias de  $X$  y su respectiva función  $F_4$  viable, Ec. (3.7b).

Procedamos entonces a investigar la existencia de una solución para el campo escalar caracterizada por un perfil radial que tiende asintóticamente a cero y posee una dependencia temporal armónica. Lo anterior se logra a través del ansatz

$$\phi(t, r) = \sigma(r) e^{i\omega t}, \quad (3.11)$$

donde  $\sigma(r)$  será real y dependerá solo de la coordenada radial. La constante real  $\omega$  representa la frecuencia angular de la fase del campo en el plano complejo.

Sustituyendo los respectivos casos particulares de Ec. (3.10) y sus derivadas en (3.9) y teniendo presente la métrica esférica (2.7) con  $N^2 = g^2 = 1$ , se llega a

**Modelo I:**  $G_4 \sim X$ ,  $F_4 \neq 0$  y dado por el primer término de (3.7b)

$$r (\sigma'^2 - \omega^2 \sigma^2)^2 [r (\omega^2 - m^2) \sigma + r \sigma'' + 2\sigma'] + 2\eta_1 \sigma' [\sigma'' (\sigma' + 2r\omega^2 \sigma) (3\omega^2 \sigma^2 - \sigma'^2) + \omega^4 \sigma^2 \sigma' (3\sigma - 2r\sigma') - \omega^2 \sigma'^3 (2r\sigma' + 5\sigma)] = 0, \quad (3.12a)$$

donde se asumió que la función  $\sigma$  es al menos del tipo  $C^2$  (dos veces continuamente diferenciables) y  $|\sigma'| \neq \omega\sigma$  para todo valor finito de la variable radial  $r$ . Dichas asunciones son necesarias puesto que el considerar la correspondiente función  $F_4$  introduce potencias inversas de  $X$ , o lo que es equivalente, potencias inversas del término,  $\sigma'^2 - \omega^2 \sigma^2$ .

**Modelo II:**  $G_4 \sim X^2$ ,  $F_4 = 0$ ,

$$\sigma'' r^2 + 2\sigma' r + (\omega^2 - m^2) \sigma r^2 - \eta_2 [12\sigma'' \sigma'^2 + 8\omega^4 \sigma^2 r (r\sigma'' + 2\sigma') + 8\omega^2 \sigma'^2 r (2r\sigma'' + 3\sigma') + 4\omega^2 \sigma' \sigma (5(\sigma' + 2r\sigma'') + 2r^2 \omega^2 \sigma')] = 0. \quad (3.12b)$$

Si al lagrangiano (3.5b) le añadimos el respectivo término  $F_4$  (segundo término de (3.7b)), se tendrá que la ecuación de movimiento es modificada al

**Modelo III:**  $G_4 \sim X^2$ ,  $F_4 \neq 0$ ,

$$\sigma'' r^2 + 2\sigma' r + (\omega^2 - m^2) \sigma r^2 - \eta_2 [36\sigma'' \sigma'^2 + 8\omega^4 \sigma^2 r (\sigma'' r + 2\sigma') + 8\omega^2 \sigma'^2 (2r^2 \sigma'' + 5r\sigma') + 4\omega^2 \sigma' \sigma (11(\sigma' + 2r\sigma'') + 2r^2 \omega^2 \sigma')] = 0. \quad (3.12c)$$

Como se puede apreciar ambas ecuaciones (3.12b) y (3.12c) difieren solo en coeficientes numéricos, por lo que esperamos que centrar nuestro estudio en el primero de ambos modelos no nos hace perder generalidad en el caso  $G_2 \sim X^2$ .

Por último, notar que en todas las Ecs. (3.12), existe una invariancia bajo paridad ( $\sigma \rightarrow -\sigma$ ) y como se esperaba haciendo  $\eta_i = 0$  se recupera la ecuación de KG. Es decir, los

términos que acompañan a  $\eta_i$  son los *culpables* de la aparición de las no linealidades y de las soluciones tipo solitón.

El procedimiento de construcción para las soluciones que se presenta a continuación es similar para todos los casos, aunque en ocasiones se comentarán particularidades que los diferencian. Es válido aclarar que aunque pueden haber particularidades, las conclusiones presentadas son, en su mayoría, genéricas para todos los modelos que estudiamos.

### 3.2.1.1 Comportamiento cerca del origen origen: $r = 0$

Antes de comenzar la resolución numérica de las ecuaciones (3.12) es necesario realizar un análisis del comportamiento de la función y sus derivadas en los regímenes  $r \rightarrow 0$ , y  $r \rightarrow \infty$ , este análisis nos permitirá definir si existen los comportamientos asintóticos deseados. En esta sección nos enfocaremos en  $r \rightarrow 0$ .

Expandiendo en serie de Taylor alrededor de  $r = 0$  las funciones

$$\sigma(r) = \sigma_0 + \sigma'_0 r + \frac{\sigma''_0}{2} r^2 + \dots, \quad (3.13a)$$

$$\sigma'(r) = \sigma'_0 + \sigma''_0 r + \frac{\sigma_0^{(3)}}{2} r^2 + \dots, \quad (3.13b)$$

$$\sigma''(r) = \sigma''_0 + \sigma_0^{(3)} r + \frac{\sigma_0^{(4)}}{2} r^2 + \dots, \quad (3.13c)$$

con  $\sigma(r = 0) \equiv \sigma_0$ ,  $\sigma'(r = 0) \equiv \sigma'_0$ , etc., y sustituyéndolas en las respectivas ecuaciones, se encuentra que luego de agruparlas en potencias de  $r$  estas presentan la siguiente estructura,

$$\begin{aligned} & \eta_i \sigma_0'^2 A_0(\sigma_0, \sigma'_0, \sigma''_0) + \sigma'_0 A_1(\sigma_0, \sigma'_0, \sigma''_0, \sigma_0''') r + A_2(\sigma_0, \dots, \sigma_0^{(4)}) r^2 \\ & + \dots + A_n(\sigma_0, \dots, \sigma_0^{(n+2)}) r^n = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde los  $A_n$  son funciones y el sub-índice  $n$  indica el orden en la expansión. Ha de

comentarse que para el caso,  $G_4 \sim X^2$  la función  $A_0$  no tiene dependencia de  $\sigma'_0$  (señalado en azul).

Como es usual, el siguiente paso consiste en resolver orden a orden en busca de obtener la expresión para las funciones en el origen. Los dos primeros términos de la expansión (3.14) apuntan a que puede existir una degeneración en el valor de la derivada del campo en el origen,  $\sigma'_0$ . Es decir, dos familias de soluciones,  $\sigma'_0 = 0$  y  $\sigma'_0 \neq 0$ . La rama  $\sigma'_0 \neq 0$  pudiera ser descartada bajo el requerimiento de que el perfil del campo debe ser *suave* en el origen [200]. Dicho requerimiento es usual cuando se considera espacio curvo, puesto que puede aparecer una singularidad (en la métrica) si  $\sigma' \neq 0$ , tal como ocurre en las estrellas de bosones típicas. Sin embargo, si nos mantenemos dentro del modelo de espacio-tiempo plano, es decir, no asumimos que estos objetos ( $\sigma'_0 \neq 0$ ) pueden acoplarse en algún límite con la gravedad, no hay razones sólidas para exigir  $\sigma'_0 = 0$ . Por lo tanto, en la presente sección se construirán ambas ramas de soluciones, pero el mayor análisis se enfocará en la rama que puede conectarse en algún límite con la gravedad, es decir  $\sigma'_0 = 0$ .

Comencemos con la rama  $\sigma'_0 = 0$ : Directamente de (3.14) se aprecia que los dos primeros términos son cero; los restantes, por el contrario van a presentar un comportamiento peculiar. Dicha peculiaridad proviene del hecho de haber tomado  $\sigma'_0 = 0$ , lo que implica que las funciones  $A_n$  pierdan la dependencia con respecto a las derivadas  $\sigma_0^{(p>n)}$ , donde  $p$  indica el orden de la derivada. Por ejemplo, la función  $A_2$  ya no dependerá de  $\sigma_0^{(3)}$  y  $\sigma_0^{(4)}$ , y solo lo hará de  $\sigma_0''$ , lo que nos permitirá resolverla para  $\sigma_0''$ . Por otro lado,  $A_3$ , solo dependerá de  $\sigma_0''$  y  $\sigma_0^{(3)}$ , pero como ya encontramos  $\sigma_0''$ , podremos a través de  $A_3$  calcular  $\sigma_0^{(3)}$ . De manera general cada  $A_n$  nos permitirá obtener  $\sigma_0^{(n)}$ , quedando como único parámetro libre  $\sigma_0$ , el cual representa la amplitud central del solitón.

Aunque es cierto que podemos calcular cada uno de los términos de la serie, el tener ecuaciones no lineales puede llevarnos a que estos estén degenerados. Tal situación ocurre

al calcular  $\sigma_0''$  a partir de  $A_2$  para cada uno de los modelos,

$$6\eta_1\sigma_0''^3 + 18\eta_1\sigma_0\omega^2\sigma_0''^2 + 3\sigma_0^2\omega^2\sigma_0'' + \sigma_0^3\omega^2(\omega^2 - m^2) = 0, \quad \text{Mod. I,} \quad (3.15a)$$

$$12\eta_2\sigma_0''^3 + 60\eta_2\sigma_0\omega^2\sigma_0''^2 - 3\sigma_0''(1 - 8\eta_2\sigma_0^2\omega^4) - \sigma_0(\omega^2 - m^2) = 0, \quad \text{Mod. II,} \quad (3.15b)$$

$$36\eta_2\sigma_0''^3 + 132\eta_2\sigma_0\omega^2\sigma_0''^2 - 3\sigma_0''(1 - 8\eta_2\sigma_0^2\omega^4) - \sigma_0(\omega^2 - m^2) = 0, \quad \text{Mod. III.} \quad (3.15c)$$

Como se aprecia, para cada caso,  $\sigma_0''$  podría ser alguna de las soluciones reales de la respectiva ecuación cúbica. En la sección 3.2.2 se estudia a profundidad las tres familias de soluciones, los resultados son resumidos en las Figuras 3.3, 3.8 y 3.9.

Analicemos ahora la rama  $\sigma_0' \neq 0$ . Como se aprecia, el primer término de (3.14) nos permite obtener  $\sigma_0''$  en función de  $\sigma_0$  y  $\sigma_0'$  para luego, a partir de  $A_1$ , obtener  $\sigma_0^{(3)}$ , y así consecutivamente. De manera general, tendremos que cada función  $A_n$  nos permitirá encontrar la expresión para  $\sigma_0^{(n+2)}$  en función de los parámetros libres  $\sigma_0, \sigma_0'$ . A diferencia de la rama  $\sigma_0' = 0$ , en esta, al menos hasta orden seis no se encontraron degeneraciones a la hora de calcular las respectivas  $\sigma_0^{(n+2)}$ .

Por último (y a modo de demostración), comentemos sobre el límite  $\eta_i \rightarrow 0$ , donde en cada caso se recupera KG. Como fue señalado con anterioridad en espacio plano no existen soluciones localizadas para un campo de KG. Esto se puede ver directamente tomando  $\eta_i = 0$  en cualquiera de las ecuaciones de movimiento (3.12), quedando

$$\sigma'' + \frac{2\sigma'}{r} + (\omega^2 - m^2)\sigma = 0, \quad (3.16)$$

cuya solución analítica es

$$\sigma = \frac{e^{r\sqrt{m^2-w^2}}}{r} \left( \frac{c_1}{e^{2r\sqrt{m^2-w^2}}} + \frac{c_2}{2\sqrt{m^2-w^2}} \right), \quad (3.17)$$

de donde directamente se aprecia que valores de las constantes de integración  $c_1, c_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$  con  $w/m < 1$ , la solución para  $r \rightarrow \infty$  diverge hacia  $\pm \infty$ , en dependencia del signo de  $c_2$ . Lo cual es el caso de campos tipo KG, donde luego de hacer el análisis en el origen, se llega a que  $\sigma'_0 = 0$ , implicando que  $c_1 = -\sigma_0/(2\sqrt{m^2 - \omega^2})$  y  $c_2 = -2\sqrt{m^2 - \omega^2}\sigma_0$ .

Esta falta de existencia de soluciones cuando  $\eta_i \rightarrow 0$  también se puede apreciar en el análisis realizado alrededor de  $r = 0$ . Para el caso  $\sigma'_0 = 0$  se puede probar que las raíces de las respectivas ecuaciones para  $\sigma''_0$  (Ec. (3.15)), divergen como  $1/\sqrt{\eta_i}$ . Mientras que para  $\sigma'_0 \neq 0$  dicha divergencia ocurre para  $\sigma_0^{(3)}$  y va como  $1/\eta_i$ . Lo anterior va a implicar que  $\sigma \notin C^n$  y por ende no existe dicha solución en ese límite.

### 3.2.1.2 Comportamiento asintótico en el infinito: $r \rightarrow \infty$

Habiéndose validado la existencia de un comportamiento adecuado<sup>37</sup> en la región alrededor de  $r = 0$ , nos queda ahora estudiar el comportamiento asintótico de las ecuaciones en busca de verificar que sean localizadas, es decir  $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma = 0$ .<sup>38</sup> Para ello no solo tomaremos el límite cuando  $r \rightarrow \infty$ , sino también haremos una expansión de campo débil. Lo anterior viene fundamentado del hecho de que para radios *grandes* los valores del campo deben ser pequeños. Incluso, puede ocurrir que sin ser el radio muy *grande* el valor del campo ya sea muy pequeño en comparación a su amplitud central  $\sigma_0$ . La metodología aplicada consiste en la realización de una expansión de campo débil,  $\sigma(r) = \epsilon\sigma_1(r)$ , con el parámetro adimensional  $\epsilon \ll 1$ , a los respectivos modelos (3.12), y la aplicación del límite cuando  $r \rightarrow \infty$  a la respectivas ecuaciones de primer orden en  $\epsilon$ .

Para el caso  $G_4 \sim X$  con  $F_4 \neq 0$ , Ec. (3.12a), se tiene que todos los términos tienen el mismo *peso* en el límite de campo débil, es decir, todos son del mismo orden en  $\epsilon$ .

<sup>37</sup>Notar que un comportamiento adecuado alrededor del origen no garantiza que este se pueda extender hasta el infinito, p. ej. lo probado para  $\eta_i = 0$

<sup>38</sup>Es válido señalar que para tener un solitón no solo es necesario que el campo vaya a cero en el infinito, sino que lo haga lo suficientemente rápido, es decir:  $\sigma \rightarrow 0$  en  $r \rightarrow \infty$  más rápido que  $1/r^2$ .

Aplicando el límite  $r \rightarrow \infty$  al resultado tendremos que la ecuación de movimiento se reduce a

$$(\sigma_1'^2 - \omega^2 \sigma_1^2)^2 [\sigma_1'' + (\omega^2 - m^2) \sigma_1] = 0. \quad (3.18)$$

Recordando la constricción  $|\sigma'| \neq \omega \sigma$  sobre el modelo, tendremos que la única solución es

$$\sigma_1 = e^{-r\sqrt{m^2 - \omega^2}} c_1 + e^{r\sqrt{m^2 - \omega^2}} c_2. \quad (3.19)$$

Evidentemente las constricciones  $c_2 = 0$  y  $|\omega| < m$  nos garantizarían el comportamiento deseado, lo que implicará que

$$c_1 = \sigma_* e^{r_* \sqrt{m^2 - \omega^2}}, \quad (3.20)$$

donde  $\sigma_* = \sigma(r_*)$  y  $r_*$  es el valor del radio donde se cumple la igualdad

$$\sigma = -\frac{\sigma'}{\sqrt{m^2 - \omega^2}}. \quad (3.21)$$

En otras palabras, si la relación (3.21) se cumple para algún valor del radio, podemos asegurar que la solución tendrá el comportamiento asintótico deseado y va a venir descrito por (3.19) con  $c_2 = 0$ , y  $|\omega| < m$ . La figura 3.6 muestra un ejemplo de ello. Otro comportamiento interesante ocurre cuando  $m = \omega$ , en este caso, el campo se vuelve constante (no necesariamente nulo). Un último comportamiento ocurre cuando  $|\omega| < m$ , para este caso si consideramos  $c_1 = c_2$  tendremos

$$\sigma_1 = 2c_1 \cos \left( r \sqrt{|m^2 - \omega^2|} \right). \quad (3.22)$$

Lo que implica una solución infinitamente oscilante con una amplitud constante igual a  $2c_1$ , que viene dada por

$$2c_1 = \sigma_* \sec \left( r_* \sqrt{|m^2 - \omega^2|} \right), \quad (3.23)$$

con  $r_*$  la raíz de la igualdad

$$\sigma = -\frac{\sigma' \cot\left(r\sqrt{|m^2 - \omega^2|}\right)}{\sqrt{|m^2 - \omega^2|}}. \quad (3.24)$$

La Figura 3.4 muestra un ejemplo de este comportamiento.

Analicemos ahora el caso  $G_4 \sim X^2$ , Ec. (3.12b), (3.12c). A diferencia del anterior al aplicar el límite de campo débil si habrá contribuciones de diferentes órdenes en  $\epsilon$ . Tomando la ecuación correspondiente al primer orden se llega a

$$\sigma_1'' + \frac{2\sigma_1'}{r} + (\omega^2 - m^2)\sigma_1 = 0. \quad (3.25)$$

Esta ecuación coincide con la obtenida para el modelo de KG (3.17) y cuya solución es

$$\sigma_1 = \frac{e^{r\sqrt{m^2 - \omega^2}}}{r} \left( \frac{c_1}{e^{2r\sqrt{m^2 - \omega^2}}} + \frac{c_2}{2\sqrt{m^2 - \omega^2}} \right). \quad (3.26)$$

A diferencia de KG nada nos impide ahora tener  $c_2 = 0$  con  $|\omega| < m$ , lo que implicaría un decaimiento proporcional a  $1/r$  primeramente, para luego hacerlo exponencialmente, teniendo así el comportamiento deseado. La restricción  $c_2 = 0$  implicará que

$$c_1 = \sigma_* r_* e^{r_* \sqrt{m^2 - \omega^2}}, \quad (3.27)$$

siendo el valor  $r_*$  el radio al cual se cumple la siguiente igualdad

$$\sigma = -\frac{\sigma' r}{1 + r\sqrt{m^2 - \omega^2}}. \quad (3.28)$$

De manera similar al caso anterior, podemos afirmar que la solución que logre cumplir (3.28) tendrá el comportamiento asintótico deseado y vendrá descrito por (3.26) con

$c_2 = 0$  y  $|\omega| < m$ . Un ejemplo de este tipo de soluciones puede verse en la Figura 3.6.

Otra posibilidad (no explorada en este trabajo) sería  $|\omega| > m$  con  $c_2 = -2ic_1\sqrt{m^2 - \omega^2}$ .

Para este caso  $\sigma_1$  sería una función oscilante real, suprimida por el inverso del radio

$$\sigma_1 = \frac{2c_1 \cos\left(r\sqrt{|m^2 - \omega^2|}\right)}{r}. \quad (3.29)$$

La aparición del factor  $1/r$  pareciera indicar que la oscilación se amortiguaría hasta hacerse nula. Algo que no es del todo cierto, la misma se amortiguará, pero a partir de cierto radio dejará de hacerlo y oscilará con la misma amplitud infinitamente. Lo anterior se puede obtener si completamos nuestra metodología, es decir, si aplicamos el límite  $r \rightarrow \infty$  a la Ec. (3.26). Al hacerlo se obtendría la solución del caso anterior (3.19), cuyo comportamiento oscilante ya fue discutido y viene dado por (3.22). Un ejemplo de este comportamiento es mostrado en la Figura 3.4.

Una última posibilidad es  $\omega = m$ , para este caso parecería que el escalar decaería como  $1/r$  hasta hacerse nulo. Pero, nuevamente, completando el análisis con el límite  $r \rightarrow \infty$  y recordando el resultado para  $\omega = m$  del modelo anterior. Podemos concluir que el comportamiento asintótico para esta familia decaería como  $1/r$  hasta determinado valor del radio, a partir del cual permanecerá constante (ver Figura 3.5).

Antes de proceder a construir las soluciones numéricas que validan nuestro análisis es necesario enfatizar los siguientes aspectos:

- i. Para esta familia de soluciones podremos definir para los casos favorables dos comportamientos asintóticos convergentes. El primero Ec. (3.26), nos describe la solución a partir de valores del campo suficientemente pequeños, la cual para radios grandes convergería al segundo comportamiento Ec. (3.19).
- ii. Soluciones que sean capaces de satisfacer la igualdad Ec. (3.21) o Ec. (3.28) para

cierto radio  $r_*$  van a tener el comportamiento asintótico deseado.

- iii. El considerar  $\omega \rightarrow m$  va a implicar que las soluciones decaerán hasta un cierto radio  $r_*$  como  $1/r$  para luego permanecer constantes. Mientras más cercano sea el valor de  $\omega$  a  $m$  más pequeño será  $r_*$ .
- iv. Soluciones con  $|\omega| > m$  a partir de un cierto radio comenzarán a oscilar infinitamente.
- v. Por último, notemos que en ninguno de los casos el término  $\eta_i$  estuvo presente en la ecuación. El introducir la función  $G_4$  y/o  $F_4$  no aportó términos relevantes en el límite de campo débil o radios grandes. De manera general, como se aprecia de (3.9) y teniendo presente (3.28), el considerar potencias mayores a dos para la función  $G_4$  no cambiará el comportamiento asintótico comentado. Lo anterior es debido a que los nuevos términos serán de orden mayor en  $\epsilon$  a los casos expuestos. Por tanto podemos suponer que estos nuevos casos presentarán el comportamiento asintótico ya comentado.

Procedamos ahora a construir numéricamente estas soluciones o lo que es igual, conectemos ambos comportamientos asintóticos descritos.

### 3.2.2 Perfiles Numéricos

Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento de las ecuaciones que describen la dinámica del campo a diferentes regímenes. En esta sección obtendremos numéricamente los perfiles completos, probando así la existencia de solitones no topológicos en estos modelos. Adicionalmente, se confirmarán los diferentes comportamientos encontrados analíticamente en las secciones anteriores 3.2.1.1 y 3.2.1.2.

Por facilidades numéricas e interpretación de los resultados es usual introducir cambios

de variables que nos permitan trabajar con variables adimensionales.<sup>39</sup> En este sentido es necesario discriminar entre los modelos  $G_4 \sim X$  y los  $G_4 \sim X^i$  con  $i \geq 2$  y  $i \in \mathbb{N}$ . En el primero de ellos, p. ej. Modelo I (Ec. (3.12a)), debido a que el número de campos  $\sigma$  correspondientes a los términos que multiplican a  $\eta_1$  es igual a los correspondientes que no le multiplican, no es posible absorber la dependencia  $\eta_1$ . En compensación, de esta ecuación se puede apreciar que el perfil  $\sigma$  será invariante ante las unidades  $\chi$  que se elijan, y mediante los cambios de variables

$$r = \bar{r}/m, \quad \omega = \bar{\omega}m, \quad \eta_1 = \bar{\eta}_1/m^2, \quad \sigma = \bar{\sigma}\bar{\psi}\chi, \quad (3.30)$$

es posible a través de  $\bar{\psi}$ , dado una configuración, obtener las restantes. Tales cambios de variable también permiten remover la dependencia de  $m$  en Ec. (3.12a). Notar que las barras indican cantidades adimensionales. La relación entre  $\bar{\eta}_1$ ,  $c_1$ ,  $\Lambda_2$  y  $\Lambda_3$ , vendría dada por

$$\eta_1 = \frac{\bar{\eta}_1}{m^2} = -\frac{2c_1\Lambda_2^4}{\Lambda_3^6} = -\frac{2c_1M_{\text{Pl}}}{\Lambda_3^3}. \quad (3.31)$$

Por otro lado, los modelos  $G_4 \sim X^i$  con  $i \geq 2$  presentarán un comportamiento peculiar, los términos que multiplican a las respectivas  $\eta_i$  siempre tendrán un número de campos igual a  $2i - 1$  (se puede ver de Ec. (3.9)), mientras que los que no lo hacen, su número es 1 (dados por KG). Lo anterior nos permite absorber la dependencia de  $\eta_i$  y  $m$  con

$$r = \bar{r}/m, \quad \omega = \bar{\omega}m, \quad \sigma = \frac{\bar{\sigma}}{m^2|\eta_i|^{1/(2(i-1))}}. \quad (3.32)$$

La relación entre  $\bar{\eta}_i$ ,  $c_i$ ,  $\Lambda_2$  y  $\Lambda_3$ , vendría dada por  $\eta_i = -2c_i\Lambda_2^{8-4i}/\Lambda_3^6$  con  $\Lambda_2$  dada por Ec. (3.8).

Con lo anterior ya estamos listos para resolver numéricamente cada uno de los casos. Para

<sup>39</sup>Recordar que se está trabajando en unidades donde  $c = \hbar = 1$ .

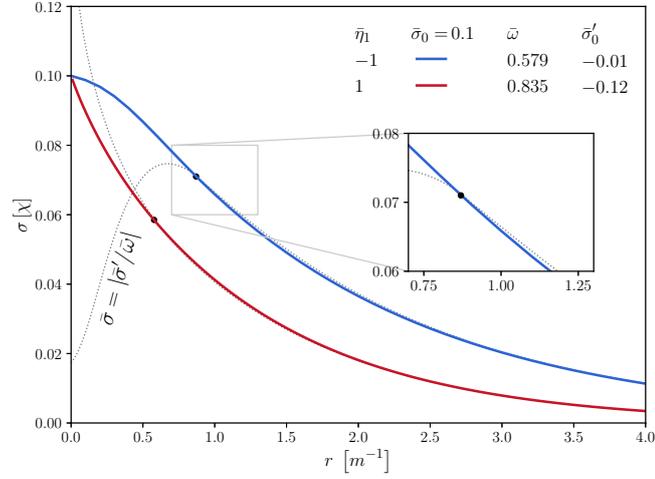


Figura 3.1: Se muestran dos perfiles de amplitud  $\bar{\sigma}_0 = 0.1$  correspondientes a la rama  $\sigma'_0 \neq 0$ , con  $\bar{\eta}_1 = -1$ ,  $\bar{\sigma}'_0 = -0.01$  (línea azul) y  $\bar{\eta}_1 = 1$ ,  $\bar{\sigma}'_0 = -0.12$  (línea roja) respectivamente. Los puntos negros indican el intercepto entre las respectivas constricciones  $|\sigma'| = \omega\sigma$  (líneas grises punteadas) y los perfiles. Como se aprecia ninguna de las configuraciones satisface la relación  $|\sigma'| \neq \omega\sigma$ , pudiendo aparecer por tanto divergencias tipo  $1/X$ .

ello usamos un método de Runge- Kutta de orden 4 y los resultados del análisis alrededor del origen  $r = 0$  (sección 3.2.1.1), como condiciones iniciales para buscar soluciones numéricas que deriven en los resultados asintóticos encontrados.

### 3.2.2.1 Modelo $G_4 \sim X$ con $F_4 \neq 0$

Comencemos estudiando primeramente el caso  $G_4 \sim X$  con  $F_4 \neq 0$ . Como fue comentado, para estos modelos existen dos ramas de soluciones,  $(\eta_1, \sigma_0, \sigma'_0 \neq 0)$  y  $(\eta_1, \sigma_0, \sigma'_0 = 0)$ . También, a partir de las relaciones (3.30), será posible obtener todo un conjunto de soluciones  $\tilde{\sigma}_i$  generadas de un único perfil  $\bar{\sigma}^{(\bar{\omega})}$ . Dicho conjunto puede ser construido mediante:  $\tilde{\sigma}_i = \bar{\sigma}^{(\bar{\omega})}\bar{\psi}_i$ , con la asignación de  $i$  valores a  $\bar{\psi}_i$ . Una característica que se tendrá es que cada nueva solución  $\tilde{\sigma}_i$  poseerá la misma frecuencia  $\bar{\omega}$  correspondiente a la del perfil  $\bar{\sigma}^{(\bar{\omega})}$ .

La Figura 3.1 muestra dos soluciones típicas para la rama  $(\eta_1, \sigma_0, \sigma'_0 \neq 0)$ . Dichas configuraciones presentan el comportamiento asintótico correspondiente a  $\omega/m \equiv \bar{\omega} < 1$ . De

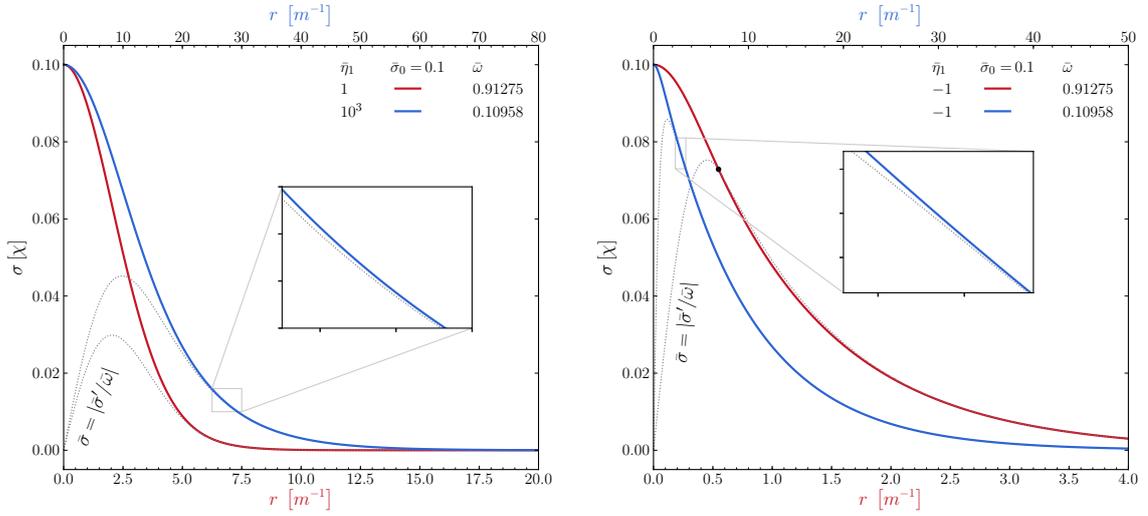


Figura 3.2: Perfiles correspondientes a la rama  $\sigma'_0 = 0$  con la misma amplitud central que en la Fig. 3.1. Izquierda: se consideran diferentes valores de  $\bar{\eta}_1 > 0$ . Como se puede apreciar ambas configuraciones cumplen la relación  $|\sigma'| \neq \omega\sigma$ , cuya igualdad es representada por líneas punteadas grises. Derecha: representa soluciones con  $\bar{\eta}_1 = -1$ , nótese que para  $\bar{\eta}_1 < 0$  en ocasiones la relación  $|\sigma'| \neq \omega\sigma$  no se cumple (punto negro).

manera ilustrativa se tomaron los casos ( $\bar{\sigma}_0 = 0.1, \bar{\sigma}'_0 = -0.01, \bar{\eta}_1 = -1$ ) y ( $\bar{\sigma}_0 = 0.1, \bar{\sigma}'_0 = -0.12, \bar{\eta}_1 = 1$ ). Como se aprecia, mientras más negativo es el valor de  $\bar{\sigma}'_0$  menos suave es la función en las cercanías del origen. Por otro lado, soluciones con  $\bar{\sigma}'_0 > 0$  no se encontraron. Los puntos negros en la Figura señalan el valor del radio al cual  $|\sigma'| = \omega\sigma$  (líneas grises punteadas), lo que pudiera implicar la aparición de una divergencia dada por el término  $1/X$ . Como se puede visualizar de la Figura 3.2, el considerar  $\sigma'_0 \rightarrow 0$  pudiera *aliviar* el problema, lo cual hace inferir la necesidad de que  $\sigma'_0 = 0$ . En lo adelante se considerará a la familia de soluciones con  $\bar{\sigma}'_0 \neq 0$  como no físicas.

Estudemos ahora la rama ( $\eta_1, \sigma_0, \sigma'_0 = 0$ ). La Figura 3.2 nos muestra cuatro perfiles típicos: dos con  $\eta_1 > 0$  (izquierda) y dos con  $\eta_1 < 0$  (derecha). Del recuadro derecho se puede apreciar que para este modelo no solo existe la comentada degeneración sobre el parámetro  $\omega$ , sino también aparece una nueva relacionada con  $\sigma_0$ , es decir, podemos tener dos solitones con la misma amplitud  $\sigma_0$ , pero con frecuencias diferentes. Como se

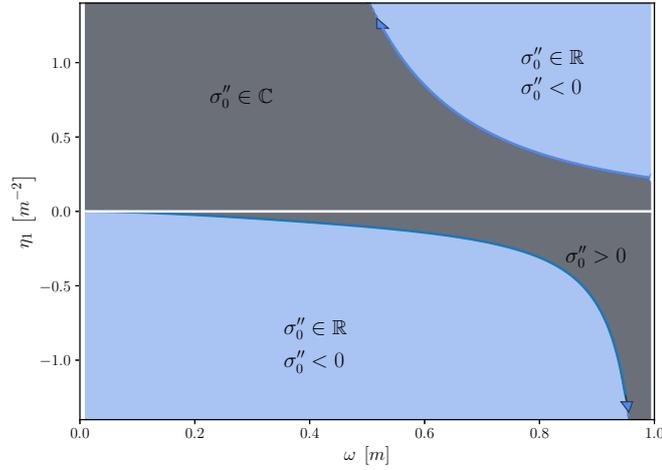


Figura 3.3: Se muestran las regiones donde se encuentran o no raíces negativas reales para la Ec. (3.15a). Las que lo cumplen (viabiles) son señaladas en azul y las que no (no viabiles) en gris. Las líneas blancas delimitan los puntos correspondientes a  $\omega = 0$ ,  $\omega = 1$  y  $\eta_1 = 0$  donde no se presentan soluciones solitónicas no topológicas. Las regiones con  $\eta_1 > 0$  fueron obtenidas mediante la relación Ec. (3.33), mientras que las correspondientes a  $\eta_1 < 0$  numéricamente.

puede observar, el hecho de tener las mismas amplitudes centrales no implicará que los objetos sean iguales. En otras palabras, la no linealidad de las ecuaciones introducen una degeneración en las amplitudes centrales y/o frecuencias, pudiéndose tener en principio, para una misma frecuencia  $\omega$  infinitas soluciones, o viceversa, para una amplitud central  $\sigma_0$  infinitas frecuencias. A continuación veamos que lo anterior es cierto siempre y cuando se cumplan ciertas restricciones (ver Fig. 3.3).

Retomemos de la Figura 3.2, nuevamente el recuadro derecho,  $\eta_1 < 0$ , como se aprecia la combinación:  $\bar{\eta}_1 = -1, \bar{\sigma}_0 = 0.1, \bar{\omega} = 0.91275$  no satisface la relación  $|\sigma'| \neq \omega\sigma$ . Mientras que la configuración:  $\bar{\eta}_1 = -1, \bar{\sigma}_0 = 0.1, \bar{\omega} = 0.10958$  nunca corta la línea que delimita la igualdad, permaneciendo siempre esta colindante al perfil. Tendremos entonces que aún con  $\sigma'_0 = 0$  pueden existir configuraciones para  $\bar{\eta}_1 < 0$  que presenten un divergencia  $1/X$ . En oposición, el considerar  $\bar{\eta}_1 > 0$  evita la aparición de dicha divergencia para los casos considerados en este trabajo. La Figura 3.1 (izquierda) muestra como para valores de  $\bar{\eta}_1$

positivos, el perfil nunca cruza la línea punteada gris que denota la igualdad en la relación. Por otro lado, para obtener el comportamiento asintótico deseado en esta rama ( $\sigma'_0 = 0$ ), es necesario que la solución cumpla con que  $\sigma''_0 < 0$ . Recordemos que del estudio alrededor de  $r = 0$ , se encontró que las raíces de la ecuación (3.15a) nos dan el valor de  $\sigma''_0$ . Analizando las tres raíces resultantes de resolver (3.15a), e imponiendo ciertos criterios:  $\eta_1 < 0$ ,  $\sigma''_i < 0$ ,  $0 < \omega < 1$ , es posible llegar a una relación analítica entre  $\bar{\eta}_1$  y  $\bar{\omega}$ ,

$$\bar{\eta}_1 \leq \frac{8\bar{\omega}^4 - 4\bar{\omega}^2 + \sqrt{1 + 8\bar{\omega}^2} - 1}{48\bar{\omega}^4(\bar{\omega}^2 - 1)}, \quad \text{para } \bar{\eta}_1 < 0. \quad (3.33)$$

Por otro lado, el considerar  $\eta_1 > 0$  no permite obtener relación analítica alguna. Por tanto, para este caso, se ha de escoger combinaciones  $(\bar{\omega}, \bar{\eta}_1)$  tales que permitan al menos una raíz real negativa. De las múltiples resoluciones numéricas realizadas fueron inferidas las siguientes relaciones:

- i. considerar valores pequeños para  $\bar{\omega}$  implicará la elección de un valor grande para  $\bar{\eta}_1$ ,
- ii. considerar valores cercanos a 1 para  $\bar{\omega}$  implicará que  $\bar{\eta}_1$  pueda ser del orden de uno,
- iii. estas relaciones no son inversamente proporcionales. Es decir, el considerar un  $\bar{\omega}$  cercano a la unidad no implica que  $\bar{\eta}_1$  no pueda ser grande.

Un resumen gráfico de las regiones viables para esta rama ( $\sigma'_0 = 0$ ), se representa en la Figura 3.3. Las regiones sombreadas de azul delimitan el espacio de parámetros para el cual  $\sigma''_0 \in \mathbb{R}$  y  $\sigma''_0 < 0$ . Por el contrario, la región gris representa donde no se satisface al menos una de estas relaciones. Notar que los puntos correspondientes a  $\omega = 0$ ,  $\omega = 1$  y  $\eta_1 = 0$  no presentan soluciones. Los resultados muestran que en principio se podrían construir infinitas soluciones para  $\bar{\eta}_1 < 0$ , las mismas deben estar en la respectiva región sombreada de azul (dada por Ec. (3.33)) y a la misma vez deben cumplir con la relación

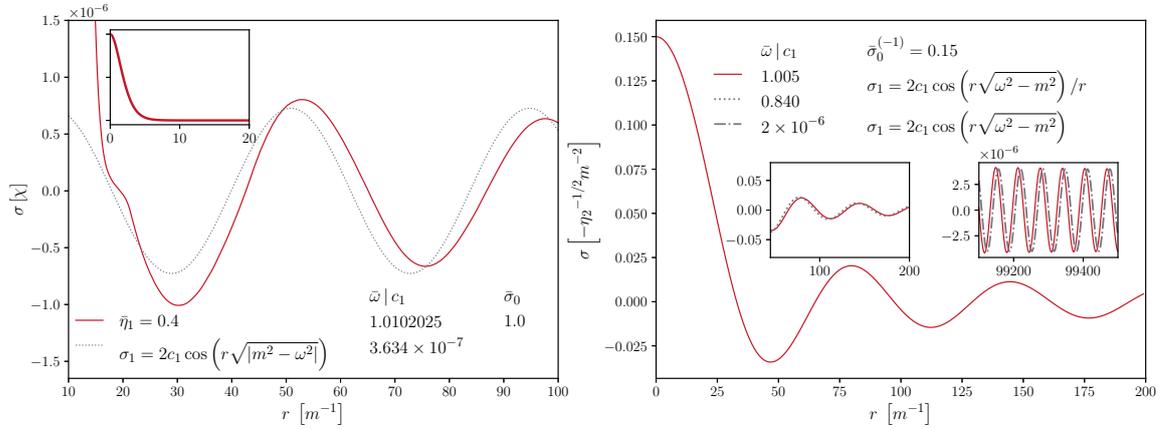


Figura 3.4: Comportamientos asintóticos correspondiente a  $\bar{\omega} > 1$ , para la rama  $\sigma'_0 = 0$ . Izquierda: modelo  $G_4 \sim X$  con  $F_4 \neq 0$  y  $\bar{\eta}_1 > 0$ . Como es visualizado el comportamiento asintótico puede ser descrito satisfactoriamente por Ec. (3.22). Derecha: modelo  $G_4 \sim X^2$  con  $F_4 \neq 0$  y  $\eta_2 < 0$  ( $\bar{\sigma}^{(-1)}$ ). Como se predijo, el campo oscila amortiguadamente, Ec. (3.29), para luego hacerlo con una amplitud constante, Ec. (3.22). En cada caso las respectivas constantes  $c_1$  fueron computadas usando las relaciones (3.23) y (3.27).

$|\sigma'| \neq \omega\sigma$ . Mientras que las soluciones con  $\bar{\eta}_1 > 0$  presentan el comportamiento descrito arriba. La correspondiente región azul fue obtenida de forma numérica, destacándose que para  $\omega \approx 1$  el valor de  $\bar{\eta}_1$  es finito, contrario a la rama  $\bar{\eta}_1 < 0$ .

### 3.2.2.2 Comportamiento asintótico numérico

En esta sección validaremos mediante las soluciones numéricas obtenidas, los diferentes tipos de comportamientos asintóticos descritos en la sección anterior.

La Figura 3.4 nos corrobora lo predicho en el caso  $\bar{\omega} > 1$  tanto en los Modelos I (izquierda), como para el Modelo II (derecha), ambos corresponden a la rama  $\sigma'_0 = 0$ . Como se esperaba, para  $G_4 \sim X$  con  $F_4 \neq 0$ , el perfil oscila con una amplitud *semi*-constante a partir de cierto radio, en este ejemplo,  $\bar{r} \approx 20$ . Notar que el comportamiento asintótico puede ser descrito a primera aproximación por su respectivo resultado analítico para

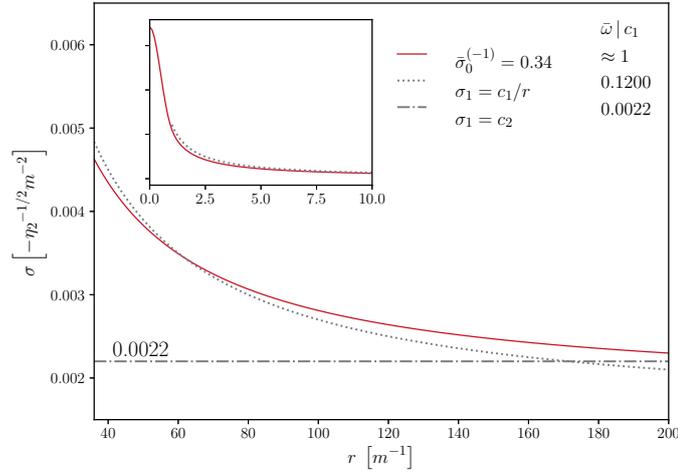


Figura 3.5: Se muestra el comportamiento asintótico para una amplitud  $\bar{\sigma}_0^{(-1)} = 0.34$  en el modelo  $G_4 \sim X^2$  con  $F_4 \neq 0$ , y  $\bar{\omega} \approx 1$ . Como se esperaba primeramente el perfil decae como  $1/r$  (línea gris punteada), para luego tender asintóticamente a una constante (línea discontinua negra).

campos pequeños y radios grandes, Ec. (3.22). Por otro lado, para  $G_4 \sim X^2$  con  $F_4 \neq 0$ ,<sup>40</sup> se puede observar en la Figura 3.4 (derecha) que, como se predijo, el campo oscilaría amortiguadamente hasta un cierto radio, luego del cual la amplitud de la oscilación permanecería constante. Siendo posible entonces describir una primera región, aproximación campos pequeños, por el respectivo resultado analítico, Ec. (3.29), mientras que la segunda, campos pequeños y radios grandes, por Ec. (3.22). Las respectivas constantes  $c_1$  fueron calculadas usando las relaciones (3.23) y (3.27) respectivamente en cada caso.

Otro de los comportamientos asintóticos abordados en la sección anterior corresponde a  $\omega \approx 1$ . En este caso, se tendría que el perfil a partir de cierto radio, permanecería constante, pudiendo ser esta diferente de cero. La Figura 3.5 muestra una solución correspondiente al Modelo III, a diferencia del I, en este caso se puede definir dos regiones: una primera (campos pequeños), que se comportaría  $\sim 1/r$  y una segunda (radios grandes) que sería constante. Para el ejemplo mostrado estos comportamientos son señalados por líneas punteadas y discontinuas respectivamente. Como se puede apreciar como era esperado la

<sup>40</sup>El considerar  $F_4 = 0$  o  $G_4 \sim X^n$  con  $n > 2$  y  $n \in \mathbb{N}$ , no cambiaría la interpretación asintótica.

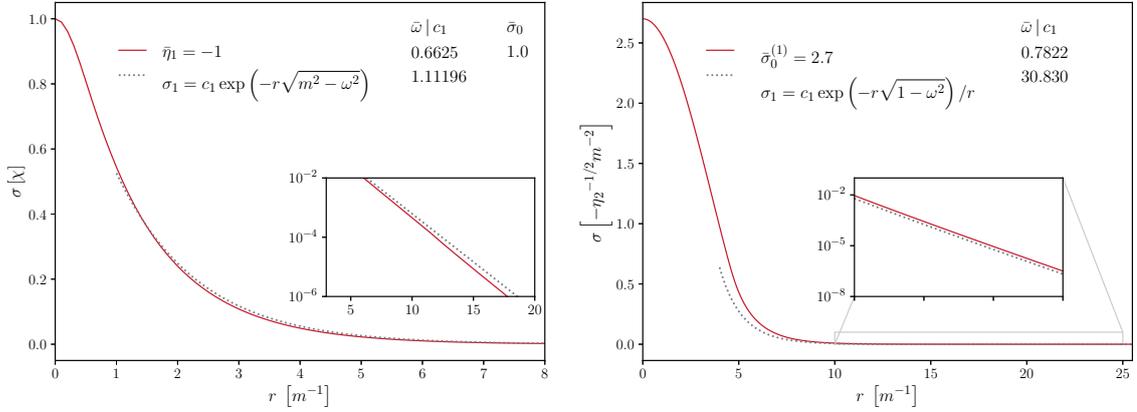


Figura 3.6: Comportamiento asintótico para  $\bar{\omega} < 1$  correspondiente a la rama  $\sigma'_0 = 0$  con  $F_4 \neq 0$ . Las respectivas figuras insertadas tienen el eje  $y$  en escala logarítmica, validando así el decaimiento exponencial. Izquierda: modelo  $G_4 \sim X$ . Derecha:  $G_4 \sim X^2$ . En ambos casos sus comportamientos asintóticos (líneas punteadas grises) pueden ser descritos por Ec. (3.19) y Ec. (3.26) respectivamente.

solución tiende asintóticamente a una constante, en este caso  $\sigma \approx 0.0022 [-\eta_2^{-1/2}m^{-2}]$ .

Por último, la Figura 3.6 nos muestra el caso  $\bar{\omega} < 1$  correspondiente a la rama  $\sigma'_0 = 0$  para ambos modelos. Se puede apreciar tanto en  $G_4 \sim X$ , como  $G_4 \sim X^2$ , que el comportamiento puede ser descrito por sus respectivas primeras aproximaciones analíticas Ec. (3.19) y Ec. (3.26) respectivamente. Como se esperaba, el campo es exponencialmente decreciente; esto se puede ver de las respectivas imágenes insertadas. Notar que la escala en el eje de las ordenadas ( $y$ ) es logarítmica, y que se observen líneas rectas validan el decaimiento exponencial.

Ha de comentarse que aunque los ejemplos mostrados corresponden a casos particulares, se puede probar que el comportamiento es válido independientemente del modelo, de la rama elegida para  $\sigma'_0$ , de la signatura para  $\eta_i$ , o de los parámetros libres  $\omega$  y  $\sigma_0$ . En lo adelante nos centraremos en  $\bar{\omega} < 1$ , ya que soluciones con este tipo de comportamiento corresponden a solitones no topológicos.

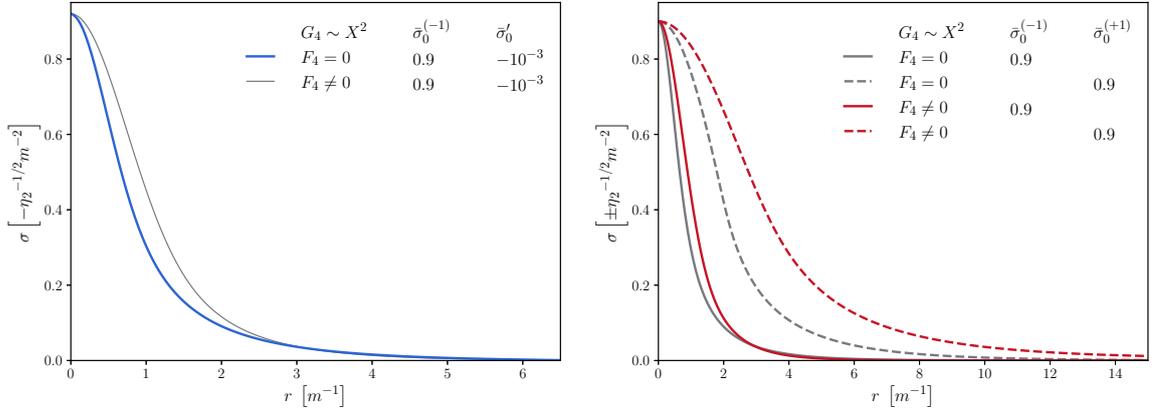


Figura 3.7: Se muestran soluciones tipo solitones no topológico correspondientes a los modelos  $G_4 \sim X^2$ , con  $\bar{\sigma}_0^{(\pm)} = 0.9$ . Izquierda: las configuraciones corresponden a la rama  $\sigma'_0 \neq 0$  con  $\bar{\sigma}'_0 = 10^{-3}$ . Derecha: se muestran configuraciones con  $\sigma'_0 = 0$  tanto para  $\eta_2 > 0$  (líneas discontinuas), como  $\eta_2 < 0$  (líneas sólidas). En ambos casos se aprecia que considerar  $F_4 \neq 0$  implica un ensanchamiento de los perfiles.

### 3.2.2.3 Modelo $G_4 \sim X^2$

Procedamos ahora a caracterizar al Modelo II y III. Como se podrá apreciar, varios de los comportamientos presentados son similares a los reportados en [195] donde consideran un modelo con un término cinético canónico y un potencial con términos de auto-interacción. De forma general los resultados presentados pueden ser generalizados **con precaución** a potencias mayores de  $X$ .

La Figura 3.7 muestra varias soluciones para estos modelos: dos correspondientes a la rama  $\sigma'_0 \neq 0$  (izquierda) y cuatro a  $\sigma'_0 = 0$  (derecha). De manera similar a lo ocurrido para  $G_4 \sim X$  con  $F_4 \neq 0$ , es posible construir soluciones donde la derivada en el origen no sea nula. Sin embargo, a diferencia de la primera, esta rama es igual de viable que la otra ( $\sigma'_0 = 0$ ), ya que no aparecerán divergencias tipo  $1/X$ . Sin embargo, numéricamente solo se pudieron construir configuraciones que cumplieran con:  $-0.1 < \sigma'_0 < 0$ .

Debido a que en próximas secciones se introducirá un acoplamiento no-mínimo con la gravedad, el nuestro mayor enfoque será en la rama  $\sigma'_0 = 0$ . Perfiles típicos para estos

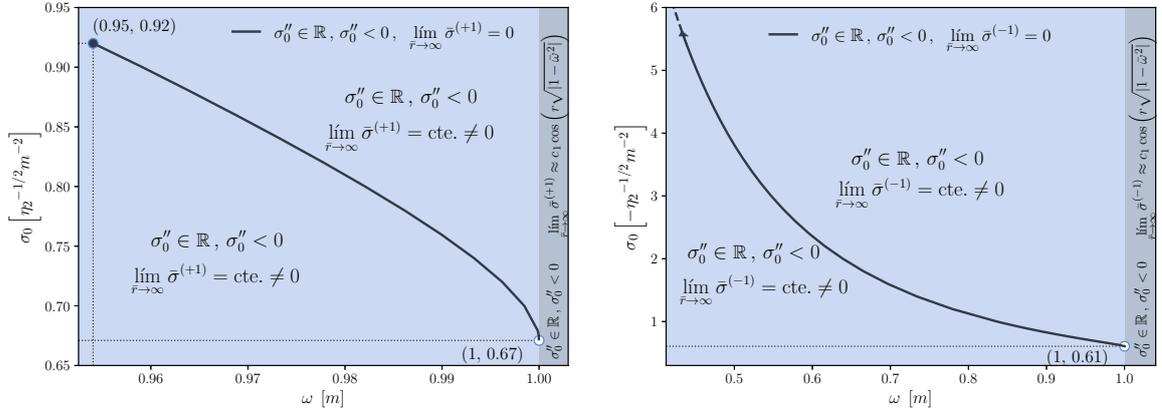


Figura 3.8: Se muestra la relación  $\sigma_0$  vs  $\omega$  para la rama  $\bar{\sigma}'_0 = 0$  con  $F_4 = 0$ . La región azul demarca soluciones que asintóticamente tienden a una constante diferente de cero. La región gris, por el contrario señala las configuraciones que oscilarán infinitamente. Mientras que la línea negra corresponderá a los solitones no topológicos. Izquierda: muestra los resultados para  $\eta_2 > 0$  ( $\bar{\sigma}^{(+1)}$ ) como se aprecia existe un límite superior/inferior en la amplitud central/frecuencia. Derecha: representa la relación para  $\eta_2 < 0$ , no apareciendo un límite superior finito,  $\lim_{\bar{\sigma}_0^{(-1)} \rightarrow \infty} \omega \approx 0$ . En ambos casos el límite inferior para  $\sigma_0$  viene dado por la configuración asintóticamente plana con  $\bar{\omega} \approx 1$ .

modelos son mostrados en la Figura 3.7 (derecha). Las líneas discontinuas corresponden a modelos con  $\eta_2 > 0$ , es decir perfiles  $\sigma^{(+1)}$ , mientras que las sólidas a  $\eta_2 < 0$ , soluciones  $\sigma^{(-1)}$ . Notar que a partir de los perfiles  $\bar{\sigma}^{(\pm 1)}$  y gracias a la simetría de las ecuaciones, es posible obtener toda la familia de soluciones  $\hat{\sigma}(\eta_i)$  correspondientes a las respectivas  $\pm \eta_2$ . Para ello se usa la relación

$$\hat{\sigma}(\eta_i) = \frac{\bar{\sigma}^{(\pm 1)}}{(\pm \eta_i)^{1/(2(i-1))}}, \quad (3.34)$$

donde  $\bar{\sigma}^{(\pm 1)}$  es el perfil correspondiente a  $\eta_i = \pm 1$ . El término  $\eta_i$  sería negativo cuando el perfil considerado corresponda a  $\eta = -1$ , de tal forma que quede positivo el mismo. Para este caso se tendría  $\bar{\sigma}(\eta) = \bar{\sigma}^{(\pm 1)}/\sqrt{\pm \eta_2}$ . En lo adelante se usarán indistintamente  $\bar{\sigma}^{(\pm 1)}$  para indicar la signatura de  $\eta_i$ .

Por otro lado, de la Figura 3.7 (derecha), se aprecia que el considerar  $\eta_2 > 0$  implicará una solución o perfil más ancho que su equivalente en  $\eta_2 < 0$ . Este comportamiento viene

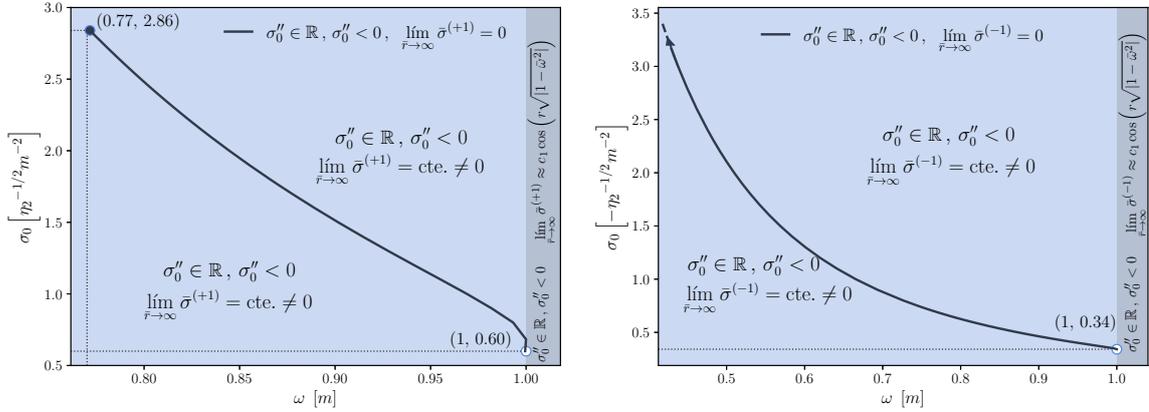


Figura 3.9: Se muestra la relación  $\sigma_0$  vs  $\omega$  para la rama  $\bar{\sigma}'_0 = 0$  con  $F_4 \neq 0$ . La región azul demarca soluciones que asintóticamente tienden a una constante diferente de cero. La región gris, por el contrario señala las configuraciones que oscilarán infinitamente. Mientras que la línea negra corresponderá a los solitones no topológicos. Izquierda: muestra los resultados para  $\eta > 0$  ( $\bar{\sigma}^{(+1)}$ ) como se aprecia existe un límite superior/inferior en la amplitud central/frecuencia. Derecha: representa la relación para  $\eta < 0$ , no apareciendo un límite superior finito,  $\lim_{\bar{\sigma}_0^{(-1)} \rightarrow \infty} \omega \approx 0$ . En ambos casos el límite inferior para  $\sigma_0$  viene dado por la configuración asintóticamente plana con  $\bar{\omega} \approx 1$ .

dado por una característica que presentan las derivadas de  $\sigma^{(+1)}$ . Las mismas, al exigirse un comportamiento asintóticamente nulo en las soluciones, se ven limitadas a un cierto conjunto de valores, lo que lleva a una relación inversa entre la amplitud del campo y el valor de la segunda derivada en el origen. En otras palabras, el aumentar la amplitud  $\bar{\sigma}_0^{(+1)}$ , implicará una disminución del valor de su respectiva  $\bar{\sigma}_0''$  y un aumento no tan considerable en el radio. Sin embargo, el ensanchamiento del perfil  $\bar{\sigma}^{(+1)}$  está limitado por la existencia para un valor crítico máximo  $\bar{\sigma}_0^{(+1)}$ , a partir del cual las soluciones asintóticamente nulas no existen (ver las Figuras 3.8 y 3.9 (izquierdas)). Por último, notar que la inclusión de los términos  $F_4$  en ambos casos, implicará un incremento en el ancho de sus respectivos perfiles  $\bar{\sigma}^{(+1)}$ . Como se explicará en la próxima sección esto estará directamente ligado al número de partículas escalares.

De manera similar al modelo  $G_4 \sim X$ , es posible restringir el espacio de parámetros para

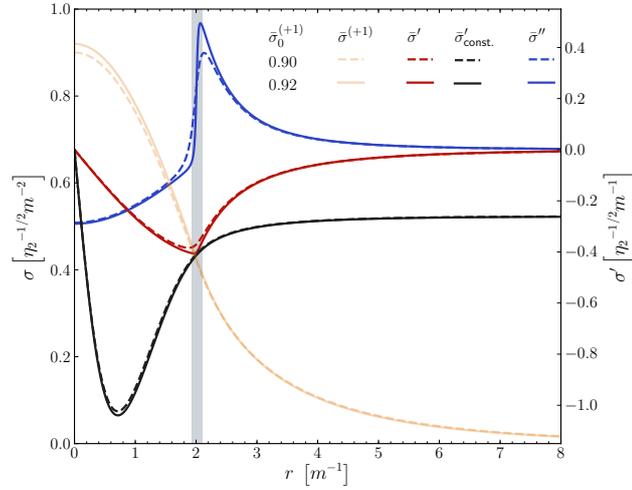


Figura 3.10: Se muestra la relación entre las derivadas: primera (color rojo), segunda (color azul) y los respectivos perfiles (color naranja). Fueron escogido las dos últimas amplitudes encontradas  $\bar{\sigma}_0^{(+1)} = 0.9$  y  $\bar{\sigma}_0^{(+1)} = 0.92$  correspondientes al modelo  $G_4 \sim X^2$  con  $F_4 = 0$ . Como se aprecia considerar  $\bar{\sigma}_0^{(+1)} > 0.92$  implicará que la curva correspondiente a la primera derivada se corte con la respectiva relación Ec. 3.36 (líneas de color negro). Lo que implicará que la segunda derivada se indetermina.

estos modelos. Las Figuras 3.8 y 3.9 nos muestran los resultados numéricos obtenidos para  $F_4 = 0$  y  $F_4 \neq 0$  respectivamente. En ambos casos se obtuvo que siempre será posible encontrar al menos una raíz real para las Ec. (3.15b) y Ec (3.15c) respectivamente. Sin embargo, el obtener raíces reales no implicará que todas las soluciones tengan un comportamiento asintóticamente nulo. Las Figuras muestran tres regiones que delimitan los tres comportamientos asintóticos encontrados. Una región azul donde se encontrarán soluciones que asintóticamente decaerán a una constante diferente de cero,  $\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \bar{\sigma}^{(\pm 1)} = \text{cte.} \neq 0$ . Una región gris delimitada por  $\bar{\omega} = 1$  donde se encontrarán soluciones que oscilarán con una amplitud constante a radios grandes,  $\sigma_1 = 2c_1 \cos\left(r\sqrt{|m^2 - \omega^2|}\right)$ . Para esta región tendremos dos posibilidades: la primera, que dicha oscilación ocurra alrededor de una constante diferente de cero. La segunda, que ocurra alrededor de cero (ver p. ej. Fig. 3.4). Este último caso correspondería a *extender* la última región, la cual es señalada por las respectivas líneas negras. Esta corresponde a las soluciones asintóticamente nulas,

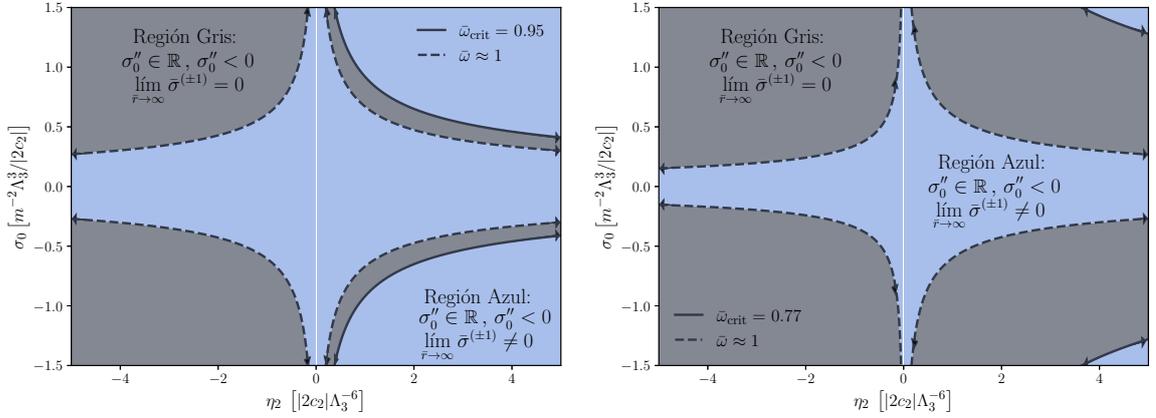


Figura 3.11: Se muestra la relación entre  $\sigma_0^{(\pm 1)}$  vs  $\eta_2$  con  $G_4 \sim X^2$ ,  $F_4 = 0$  (izquierda) y  $F_4 \neq 0$  (derecha) ambos en la rama  $\bar{\sigma}'_0 = 0$ . La relaciones son obtenidas mediante la Ec. (3.34) y los resultados presentados en las Figuras 3.8 y 3.9. Las regiones azules representan el conjunto de soluciones no viables, mientras que las grises las viables (solitones no topológicos). Las líneas discontinuas demarcan la configuración límite con  $\bar{\omega} \approx 1$  y las sólidas los respectivos límites superiores de  $\sigma_0^{(+1)}$  para cada caso. La línea blanca delimita  $\eta_2 = 0$  para la cual no existen soluciones viables.

o simplemente a solitones no topológicos. Para estas soluciones el límite superior en la frecuencia viene dado por  $\bar{\omega} \approx 1$ , el cual tendrá en dependencia del modelo y signatura de  $\eta_2$  un límite inferior diferente en la amplitud central  $\bar{\sigma}_0^{(\pm)}$ , (ver Figuras 3.8 y 3.9). Analicemos ahora el límite inferior para la frecuencia (superior para la amplitud). Como se puede ver de las Figuras 3.8 y 3.9 (derecha), considerar  $\eta_2 < 0$  ( $\bar{\sigma}^{(-1)}$ ) con  $F_4 = 0$  y  $F_4 \neq 0$ , implica que no existe un límite finito para  $\bar{\sigma}_0^{(-1)}$ . La línea negra que señala las configuraciones deseadas, se acercará asintóticamente como  $\lim_{\bar{\sigma}_0^{(-1)} \rightarrow \infty} \omega \approx 0$ . Apareciendo en ese límite, perfiles con amplitudes y radios muy grandes. Por el contrario, considerar  $\eta_2 > 0$  ( $\bar{\sigma}^{(+1)}$ ), Figuras 3.8 y 3.9 (izquierda), implicará la existencia de un límite finito en la amplitud central  $\bar{\sigma}_0^{(\pm)}$ . El mismo fue encontrado numéricamente y varia en dependencia del modelo estudiado, siendo mucho mayor para  $F_4 \neq 0$ .

Aunque los límites presentados en las Figuras 3.8 y 3.9 fueron obtenidos numéricamente, la aparición o no de los mismos puede ser entendido al analizar las respectivas ecuaciones

dinámicas (3.12b) y (3.12c). A continuación mostraremos el procedimiento para  $F_4 = 0$ , Ec. (3.12b), la cual puede ser escrita como

$$\sigma'' = \frac{\left(2\sigma' + (\omega^2 - m^2)r\right)r - 4\omega^2\eta_2\sigma' \left(4r\omega^2\sigma^2 + (5 + 2r^2\omega^2)\sigma\sigma' + 6r\sigma'^2\right)}{-r^2 + \eta_2 \left(8r^2\omega^4\sigma^2 + 40r\omega^2\sigma\sigma' + 4(3 + 4r^2\omega^2)\sigma'^2\right)}, \quad (3.35)$$

donde aún no se han introducido las variables adimensionales. Veamos el caso donde la segunda derivada pudiera no existir. Para ello, igualemos a cero el denominador y resolvamos para la primera derivada, llegándose a

$$\sigma'_{\text{const.}} = \frac{-10r_*\omega^2\sigma\eta_2 \pm r_*\sqrt{\eta_2 \left(3 + 4r_*^2\omega^2 - 4\eta_2\sigma^2\omega^4(8r_*^2\omega^2 - 19)\right)}}{2\eta_2 \left(3 + 4r_*^2\omega^2\right)}. \quad (3.36)$$

Como se puede apreciar, el denominador con  $\eta_2 \neq 0$  no se anulará para ninguna combinación de  $r$  y  $\omega$ . Lo cual abre la posibilidad de la existencia un valor de  $r_*$  donde  $\sigma'(r_*) = \sigma'_{\text{const.}}$ . Analicemos ahora el radicando de la expresión Ec. (3.36). Notemos que considerar  $\eta_2 < 0$  va a implicar que este es negativo y por ende su raíz no existirá en el dominio de los reales. Dicho resultado implica directamente que para  $\eta_2 < 0$  o equivalentemente  $\sigma^{(-1)}$ , no va a existir un valor del radio para el cual  $\sigma'(r_*) = \sigma'_{\text{const.}}$ . Siendo esto el porque,  $\sigma^{(-1)}$  no presenta un límite superior (ver Fig. 3.8 (derecha)).

Por otro lado, el considerar  $\eta_2 > 0$  pareciera presentar similar comportamiento, ya que el último término del radicando pudiera *dominar* a los demás. Lo anterior no es correcto, puesto que este está acompañado por una potencia cuarta en la frecuencia, la cual, al ser menor que uno reduce drásticamente el *peso* del mismo en el radicando. Se pudiera pensar que el considerar una  $\sigma_0$  grande compensaría la influencia de  $\omega^4$ . Dicha hipótesis no es viable para soluciones asintóticamente nulas, puesto que para estas, existe una relación inversa entre  $\sigma$  y  $\omega$ . Un incremento en la amplitud, implicará una frecuencia aún

menor. Todo lo anterior nos lleva a suponer que  $\sigma^{(+1)}$  pudiera presentar una amplitud superior límite. La misma fue encontrada numéricamente (ver Fig. 3.8) y el *acercamiento* a esta amplitud límite es mostrado por la Figura 3.10. En esta se muestran las derivadas y los perfiles correspondientes a:  $\bar{\sigma}_0^{(+1)} = 0.9$  y  $\bar{\sigma}_0^{(+1)} = 0.92$ , siendo la última, el límite superior de este modelo. Con líneas de color negro son mostradas las respectivas soluciones negativas  $\bar{\sigma}'_{\text{const.}}$ . Como se puede observar, alrededor de  $\bar{r} = 2$  la primera derivada del campo (color rojo) se va acercando a su respectiva  $\bar{\sigma}'_{\text{const.}}$  llegando a *casi* igualarse para el caso límite  $\bar{\sigma}_0^{(+1)} = 0.92$ , lo que lleva a que la segunda derivada del campo (color azul) cambie bruscamente. Considerar una amplitud  $\bar{\sigma}_0^{(+1)} > 0.92$  va a implicar la existencia de  $\sigma'(r_*) = \sigma'_{\text{const.}}$  y que la segunda derivada se indetermine, siendo esta la razón del porque, para  $\eta_2 > 0$  existe un límite superior/inferior para la amplitud central/ frecuencia. Por último, es válido aclarar que un comportamiento similar aparece de analizar el modelo  $F_4 \neq 0$  y que los límites correspondientes son consecuencias de exigir un comportamiento asintóticamente nulo (ver Fig. 3.9 (derecha)). Para los demás casos, no asintóticamente nulos, regiones azules y grises en Fig. 3.8 y Fig. 3.9 no se indetermina la segunda derivada. Finalmente, la Figura 3.11 muestra la relación entre  $\sigma_0^{(\pm 1)}$  y  $\eta_2$ , la misma puede ser obtenida a partir de la relación Ec. (3.34) y los resultados presentados en las Figuras 3.8 y 3.9. Las regiones grises señalan el espacio de parámetros donde se pueden obtener solitones no topológicos. Las azules indican soluciones que asintóticamente tiendan a una constante diferente de cero, o que oscilen. Las regiones grises tienen un límite inferior (líneas discontinuas) dado por las respectivas amplitudes con  $\omega \approx 1$ , mientras que para  $\eta_2 > 0$  aparece un límite superiores (líneas sólidas) dado por las respectivas amplitudes límites de cada modelo. Notar que para el caso  $F_4 \neq 0$ , su límite superior es más grande que el respectivo de  $F_4 = 0$  y por ello su franja es más ancha. En la figura también se representan las soluciones  $-\sigma_0^{(\pm 1)}$ , como se comentó con anterioridad las ecuaciones son invariante ante cambio de signatura. Lo cual explica la simetría con respecto al eje  $x$  que se observa en la

Figura 3.11. Por último, se puede apreciar que las configuraciones no existen para  $\eta_2 = 0$  (línea blanca), en todos los casos tienden asintóticamente a infinito.

### 3.2.3 Estabilidad

En secciones anteriores se definió y restringió la existencia de soluciones tipo solitones no topológicos en modelos tipo beyond Horndeski. Siendo ahora necesario estudiar la estabilidad de los mismos. Para ello emplearemos una metodología basada en los criterios de estabilidad usuales aplicados a solitones en teorías tenso-escalares [195, 201, 202] y nos centraremos en los modelos  $G_4 \sim X^2$ . Es válido señalar que, aunque dichos criterios se obtuvieron para modelos con un término cinético canónico, los mismos se fundamentan en cantidades como la energía, la carga y el número de partículas de los solitones. Dichas cantidades pueden también ser computadas para las soluciones encontradas para estos modelos a través del teorema de Noether.

#### 3.2.3.1 Teorema Noether

Analizando las densidades lagrangianas correspondiente a los modelos tipo beyond Horndeski, Ec. 3.2, destaca que estas no dependen explícitamente de las coordenadas  $x^\mu$ , sino de los valores puntuales del campo  $\phi^i$ , de su primera y segunda derivada. Lo anterior conlleva a la existencia de una invariancia ante una transformación geométrica  $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$ , del espacio-tiempo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_i[\phi, X, x^\mu] &\rightarrow \mathcal{L}_i[\phi, X, x^\mu + a^\mu], \\
 &= \mathcal{L}_i[\phi, X, x^\mu] + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}_i[\phi, X, x^\mu], \\
 &= \mathcal{L}_i[\phi, X, x^\mu] + \partial_\mu (a^\mu \mathcal{L}_i[\phi, X, x^\mu]), \\
 \mathcal{L}_i[\phi, X, x^\mu] &\rightarrow \mathcal{L}_2[\phi, X, x^\mu] + \delta \mathcal{L}_i[\phi, X, x^\mu],
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

donde se asumió  $a^\mu$  como un *desplazamiento* pequeño y constante, y se hizo una expansión en series de potencias de  $a^\mu$ . Como se puede apreciar  $\delta\mathcal{L}_i[\phi, X, x^\mu]$  sería una divergencia, por tanto las ecuaciones de movimiento quedan invariantes ante esta transformación continua. Por el teorema de Noether tendremos la siguiente corriente  $j^\nu$  asociada a esta invariancia

$$\begin{aligned}\partial_\nu j^\nu &= \partial_\nu (a^\mu \Theta^\nu{}_\mu) = 0 \xrightarrow{a^\mu \text{ arbitrario}} \partial_\nu (\Theta^\nu{}_\mu) = 0, \\ \Theta^\nu{}_\mu &= - \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi^i)} - \partial_\gamma \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\partial_\nu\phi^i)} \right) \right] \partial_\mu\phi^i - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\gamma\phi^i)} \partial_\gamma\partial_\mu\phi^i + \delta^\nu{}_\mu\mathcal{L},\end{aligned}\quad (3.38)$$

donde por simplicidad se omitieron las dependencias funcionales y  $\Theta^\nu{}_\mu$  es el tensor de energía-momento.

Es válido aclarar que los índices  $\nu$  y  $\mu$  juegan un rol diferente a los típicos que acompañan al tensor de energía-momento deducido de forma geométrica ( $T^{\mu\nu}$ ). Para este caso,  $P_\mu$  corresponde a la energía total  $E$  ( $\mu = 0$ ) y los tres momentos  $p^i$  ( $\mu = 1, 2, 3$ )<sup>41</sup>

$$P_\mu := \int \Theta^0{}_\mu \sqrt{\gamma} d^3x, \quad (3.39)$$

donde  $\gamma := \det n_{ij}$ , con  $n_{ij}$  la parte espacial de la métrica 2.7. Lo anterior garantiza que las cargas de Noether representen la conservación de la energía y el momento respectivamente

$$\begin{aligned}0 &= \int \partial_\nu \Theta^\nu{}_\mu \sqrt{\gamma} d^3x = \int \partial_0 \Theta^0{}_\mu \sqrt{\gamma} d^3x + \int \cancel{\partial_i \Theta^i{}_\mu \sqrt{\gamma} d^3x} \xrightarrow{\text{término de superficie}} \\ &= \frac{d}{dt} \int \Theta^0{}_\mu \sqrt{\gamma} d^3x = \frac{d}{dt} P_\mu,\end{aligned}$$

donde se usó el teorema de Gauss-Ostrogradski y se asumió que los campos correspondientes a los términos de superficie, se anulan lo suficientemente rápido para que sus

<sup>41</sup>Ver [203] para una explicación más detallada de estas diferencias.

respectivas contribuciones sean despreciables en el infinito. Es decir, ni la energía, ni el momento *escapan* al infinito.

Por otro lado, como fue impuesto las densidades lagrangianas presentan una simetría interna  $U(1)$  o de isospin. Es decir, cuentan con una transformación continua que deja al lagrangiano invariante  $\phi \rightarrow e^{-i\theta}\phi$

$$\phi^i \rightarrow \phi^i - i\theta\phi^i = \phi^i + \delta\phi_F^i, \quad (3.40)$$

donde se hizo una expansión en series de potencias de  $\theta$ . La respectiva corriente de Noether asociada es

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= 0, \\ j^\mu &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta\phi_F^i + \partial_\nu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\phi^i)}\delta\phi_F^i \right) - 2\partial_\nu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\phi^i)} \right) \delta\phi_F^i. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Semejante al caso anterior, podemos definir la carga escalar  $Q$  o el número total de partículas  $N$ , del objeto

$$Q/q \equiv N := \int j^0 \sqrt{\gamma} d^3x, \quad (3.42)$$

donde  $q$  es la *carga* del bosón por unidad de masa. Directamente se puede probar integrando en un volumen  $a$ ,  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , que dichas cantidades se conservan. Por último, tendremos que la masa o energía libre vendrá dada por  $E_r \equiv M_r := Nm$ . Esta línea recta en el plano  $E$  vs  $N$  representará las soluciones de ondas planas con momento nulo.

### 3.2.3.2 Estabilidad de solitones en $G_4 \sim X^2$

A continuación se determinará la estabilidad de las soluciones encontradas para los modelos  $G_4 \sim X^2$ . Dicha estabilidad está delimitada por dos puntos críticos en el espacio de parámetros. Estos pueden ser calculados a través de la relación entre  $E$ ,  $N$  (o  $Q$ ) y  $\omega$ .

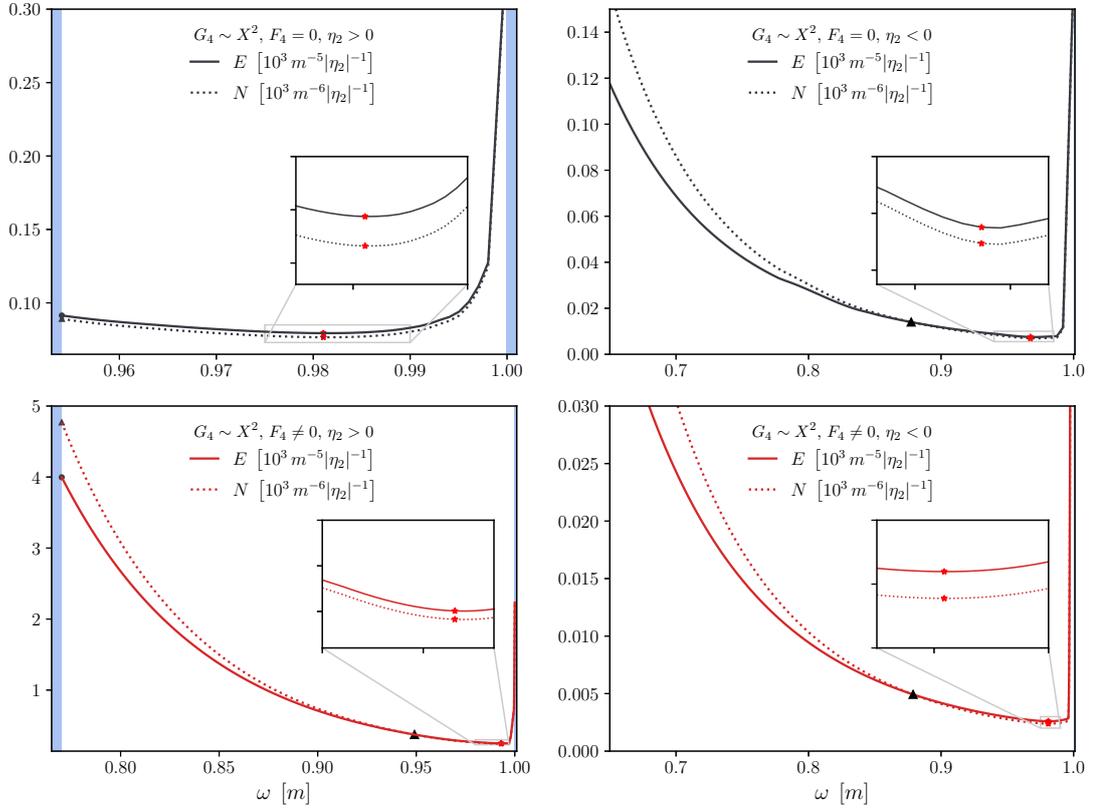


Figura 3.12: Las figuras muestran la relación entre  $E$  (líneas sólidas),  $N$  (líneas discontinuas) y  $\omega$  para la familia de modelos  $G_4 \sim X^2$ . Los gráficos superiores corresponden a  $F_4 = 0$  y los inferiores a  $F_4 \neq 0$  con  $\eta_2 > 0$  (izquierdas) y  $\eta_2 < 0$  (derechas). Los puntos críticos  $\omega_c$  (estrella roja) y  $\omega_s$  (triángulo negro) representan los puntos donde las pendientes son cero Ec. (3.43) y donde se cruzan ambas curvas Ec. (3.44), respectivamente. Las cantidades  $E$  y  $N$  crecen cuando  $\omega \rightarrow 0^+$  y  $\omega \rightarrow m^-$ . Excepto en los casos  $\eta_2 > 0$  donde la región azul representa el rompimiento de la teoría.

El primer punto crítico  $\omega_c$  nos delimita la región para la cual soluciones con  $\omega < \omega_c$  serán estables ante una perturbación  $\delta\phi$  (estabilidad clásica <sup>42</sup>). La condición

$$dN/d\omega = dE/d\omega = 0, \quad (3.43)$$

nos fijará una frecuencia crítica  $\omega_c$ , la cual va a tener relacionado sus respectivas cantidades

<sup>42</sup>Configuraciones estables clásicamente serán aquellas que cumplan que:  $\frac{1}{N} \frac{dN}{d\omega} < 0$ . Lo anterior garantizaría que ante perturbación  $\delta\phi$ , el respectivo hamiltoniano tenga un autovalor negativo, lo cual asegura que ante una excitación el solitón *regrese* a la solución sin perturbar. [201]

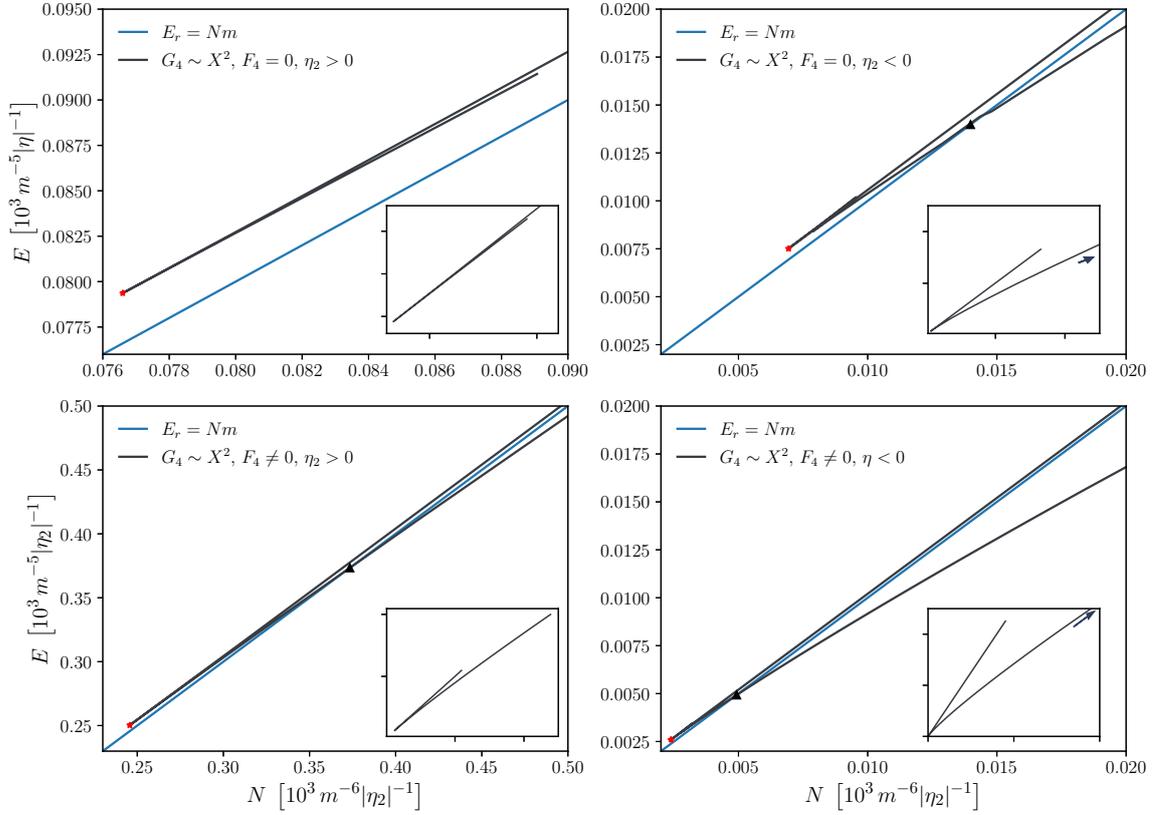


Figura 3.13: Las figuras muestran la relación entre  $E$  y  $N$  a través del parámetro  $\omega$  para la familia de modelos  $G_4 \sim X^2$ . Los gráficos superiores corresponden a  $F_4 = 0$  y los inferiores a  $F_4 \neq 0$  con  $\eta_2 > 0$  (izquierdas) y  $\eta_2 < 0$  (derechas). Los valores críticos correspondientes a  $\omega_c$  (estrella roja) y  $\omega_s$  (triángulo negro) nos delimitan las regiones de estabilidad. La rama superior ( $\omega \rightarrow m^-$ ) es inestable y la inferior ( $\omega \rightarrow 0^+$ ) meta/estable (ver Tabla 3.1). La línea azul representa las respectivas configuraciones con  $E = Nm$ .

$N_c$  y  $E_c$ . De manera general se va a tener que  $E_c > E_r \equiv mN$  lo que va a implicar que una parte de las soluciones en la región clásicamente estable, pudieran decaer ante una excitación en sus respectivas solución de onda plana, lo que desharía el correspondiente solitón. Apareciendo así otra constricción en la estabilidad delimitada por el segundo punto crítico  $\omega_s$  dado por

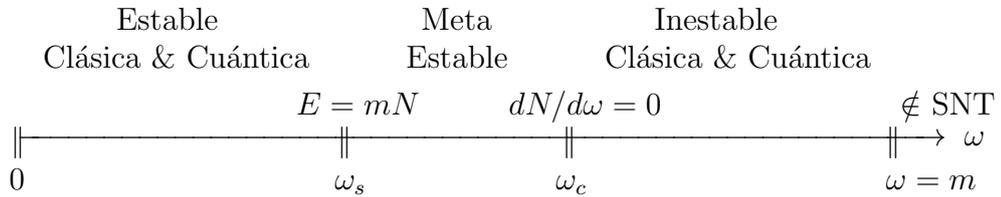
$$E(\omega_s) = mN(\omega_s), \quad (3.44)$$

frecuencias mayores a  $\omega_s$  tendrían una energía menor a  $E_r$  y por tanto estarían a salvo de

decaer al caso libre ante una perturbación.

Por otro lado las configuraciones clásicamente estables con  $E > E_r$ , y derivado de los criterios de estabilidad cuántica <sup>43</sup> pudieran llegar a ser meta-estables, es decir, el tiempo de vida del objeto antes de deshacerse pudiera ser muy grande. Es válido aclarar que esta conclusión de estabilidad cuántica ha de tratarse con cautela puesto que la cuantización fue obtenida para modelos con un término cinético canónico (ver [195,201]), no siendo del todo claro si dicho resultado se pudiera generalizar a estos modelos.

**Resumiendo:** se presentan dos puntos críticos dados por  $\omega_c$  y  $\omega_s$ , cuyas respectivas cantidades asociadas  $N$  y  $E$  nos delimitan las regiones en el espacio de parámetros. Cuando  $\omega > \omega_c$  las soluciones no son estables ante excitaciones del campo, mientras que para  $\omega_c < \omega < \omega_s$  las soluciones van a tener una  $E > E_r$  lo que llevará a una posible meta-estabilidad. Mientras que soluciones con  $\omega > \omega_s$  cumplirán todos los requisitos de estabilidad clásica y cuántica.



Calculando las componentes temporales de Ec. (3.38), Ec. (3.41), y teniendo presente los lagrangianos (3.5) para  $G_4 \sim X^2$ , el ansatz Ec. (3.11) y la métrica esférica (2.7) con

<sup>43</sup>Esta estabilidad viene del hecho de promover a operadores el campo y estudiar sus autovalores y sus respectivos modos (ver [195,201]).

$A^2 = B^2 = 1$ , podremos obtener las respectivas expresiones

$$j^0 = 2\omega\sigma^2 + \frac{4\eta_2\omega\sigma^3\sigma'}{r^2} \left[ \chi^3 + 2a_2\chi^2 - \chi(2a_1 + r^2\omega^2) - 6r\omega^2 - \xi(\chi^2 + 4a_1\chi + 3r\omega^2) \right], \quad (3.45a)$$

$$\Theta^0_0 = \sigma'^2 + (m^2 + \omega^2)\sigma^2 - \frac{4\eta_2\omega^2\sigma'\sigma^3}{r^2} \left[ \frac{a_1\chi^3}{\omega^2r^2} - a_3\chi^2 + a_1\chi + 4r\omega^2 + 2\xi(r\omega^2 + \frac{\chi^3}{\omega^2r^2} + \chi^2 + a_1\chi) \right], \quad (3.45b)$$

donde  $\chi^i \equiv r^{i-1} \left( \frac{d}{dr} \ln \sigma \right)$ ,  $\xi^i \equiv r^i \left( \frac{d}{dr} \ln \sigma' \right)$  y  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_3 = 0$  para  $G_4 \sim X^2$  con  $F_4 = 0$ , mientras que  $a_1 = a_3 = 2$ ,  $a_2 = 3$  para  $G_4 \sim X^2$  con  $F_4 \neq 0$ . Notar que el considerar este último modelo introduce un término  $\chi^2$  en  $\Theta^0_0$ . Mientras que en el caso límite  $\omega \sim m^-$ , tendremos que

$$\Theta^0_0 \approx mj^0 + \dots \rightarrow E \approx E_r + \dots, \quad (3.46)$$

lo que implica que solitones próximos al límite de onda plana tendrán una energía mayor que la respectiva en reposo, lo cual como fue comentado afectará su estabilidad (ver Fig. 3.16).

Usando el resultado anterior y resolviendo numéricamente las integrales Ec. (3.39) y Ec. (3.42) en conjunto con los perfiles numéricos obtenidos, es posible calcular la respectiva energía y número de partículas correspondiente a cada solución solitónica. Notar que una vez introducidas las cantidades adimensionales 3.32, tendremos que:  $N = [m^{-6}|\eta_2|^{-1}]$  y  $E = [m^{-5}|\eta_2|^{-1}]$ .

Las Figuras 3.12 muestran la relación entre  $E$  (líneas sólidas) y  $N$  (líneas discontinuas) a través del parámetro  $\omega$  para cada uno de los modelos con  $G_4 \sim X^2$ . Las líneas negras corresponden al caso  $F_4 = 0$ , con  $\eta_2 > 0$  (Fig. 3.12 superior izquierda) y  $\eta_2 < 0$  (Fig 3.12 superior derecha). Mientras que las líneas rojas representan al caso  $F_4 \neq 0$  para  $\eta_2 > 0$

(Fig. 3.12 inferior izquierda) y  $\eta_2 < 0$  (Fig 3.12 inferior derecha). Usando los criterios Ec. (3.43) y Ec. (3.44) es posible encontrar a través de estas relaciones los dos puntos críticos correspondientes a cada caso. Las estrellas de color rojo representan las respectivas  $\omega_c$  que delimitan las regiones estables clásicamente, mientras que los triángulos negros corresponden a  $\omega_s$ , la cual nos señala la región a partir de donde la energía de los solitones es menor que su respectiva energía en libre (ver Fig. 3.13).

Por otro lado, de las Figuras 3.12 se puede notar dos tipos de comportamientos, el primero: la respectiva energía  $E$  y número de partículas  $N$  en un mismo modelo siempre será mayor en el caso  $\eta_2 > 0$ . Dicho resultado está directamente relacionado con el ancho de los perfiles (ver Fig. 3.7). El segundo: las cantidades  $E$  y  $N$  divergen con  $\omega \rightarrow m^-$  y crecen exponencialmente cuando  $\omega \rightarrow 0^+$ . Estos comportamientos no se cumplen plenamente para modelos con  $\eta_2 > 0$ . Como se demostró, en estos casos, la teoría deja de ser válida en un  $\omega$  determinado (círculos negros en Fig. 3.12) a través de la indeterminación de  $\sigma''$ . Notar que esta ruptura del modelo impide para el caso  $F_4 = 0$  con  $\eta_2 > 0$ , la existencia de configuraciones con una energía menor a la libre. En el otro sentido, aunque  $\omega \rightarrow m^-$  implique una divergencia tanto en  $E$ , como  $N$  los resultados solo están limitados a soluciones con decaimiento asintóticamente nulo, el cual, como vimos, solo es posible de obtener hasta valores  $\omega \sim m$ . Lo anterior explica el porque en las Fig. 3.12 y Fig. 3.13 las ramas correspondientes a  $\omega \rightarrow 0^+$  tienen en ocasiones una energía mayor a  $\omega \rightarrow m^-$ .

De las Figuras 3.13 tendremos que excepto para  $F_4 = 0$  con  $\eta_2 > 0$ , existirán solitones estables clásica y cuánticamente. Dichos límites están representados con estrellas rojas  $N_c$  ( $E_c$ ) y triángulos negros  $N_s$  ( $E_s$ ) respectivamente, siendo el último de ellos el intercepto con la línea azul que representa  $E_r = mN$ . Como era de esperar estos puntos críticos son equivalentes a los presentados en Fig. 3.12, de ahí que,  $\omega \rightarrow m^-$  corresponda a la rama superior (inestable), y  $\omega \rightarrow 0^+$  a la rama inferior (parcialmente estable clásica y cuánticamente). Por último, tendremos que para  $\omega \rightarrow m^-$  la energía del solitón va a ser

		Estable Clásica & Cuántica	Meta Estable	Inestable Clásica & Cuántica	No existen SNT
$F_4 = 0$	$\eta_2 > 0$	-	$0.954 \lesssim \omega \lesssim 0.981$	$0.981 \lesssim \omega \lesssim 1$	$\omega > 1$
	$\eta_2 < 0$	$\omega \lesssim 0.877$	$0.877 \lesssim \omega \lesssim 0.967$	$0.967 \lesssim \omega \lesssim 1$	
$F_4 \neq 0$	$\eta_2 > 0$	$0.770 \lesssim \omega \lesssim 0.949$	$0.949 \lesssim \omega \lesssim 0.993$	$0.993 \lesssim \omega \lesssim 1$	
	$\eta_2 < 0$	$\omega \lesssim 0.879$	$0.879 \lesssim \omega \lesssim 0.981$	$0.981 \lesssim \omega \lesssim 1$	

Tabla 3.1: Regiones de estabilidad para modelos  $G_4 \sim X^2$  dadas por el parámetro  $\omega [m]$

siempre superior a la respectiva libre (línea azul), lo anterior valida el resultado Ec. 3.46.

Para culminar esta sección se presenta un resumen de las regiones estables para cada uno de los modelos de la familia  $G_4 \sim X^2$  en la Tabla 3.1.

### 3.2.4 Conclusiones Parciales

En esta sección se logró demostrar que las no linealidades introducidas por los términos no canónicos de  $L_4$  (con y sin  $F_4$ ) son los que permiten la existencia teórica de solitones no topológicos en un espacio-tiempo plano. Dichas soluciones van a presentar características comunes y particulares, por ejemplo, como particularidad las soluciones en  $G_4 \sim X$  con  $F_4 \neq 0$  muestran una doble degeneración: pueden construirse con igual amplitud central  $\sigma_0$ , pero frecuencias  $\omega$  diferentes, o con iguales frecuencias, pero una amplitud  $\sigma_0$  diferente. Mientras que una característica común sería que todos los solitones no-topológicos tienen que ser de la clase  $C^2$ , algo que es necesario para obtener soluciones asintóticamente nulas. Una indeterminación en la segunda derivada del campo conlleva a un *rompimiento* del modelo, ver por ejemplo para  $\eta_2 > 0$ , la Figura 3.10.

A diferencia de trabajos como [200], en este caso se usó un enfoque complementario, centrándonos en el estudio de estos objetos en un espacio-tiempo 4D, encontrándose solitones no-topológicos en las dos ramas:  $\sigma'_0 = 0$  y  $\sigma'_0 \neq 0$ . Como fue mostrado, la primera

de ellas está restringida a *vivir* en el subespacio de parámetros donde se cumple que  $\sigma_0'' < 0$ ,  $\sigma_0'' \in \mathbb{R}$ . Mientras que la segunda siempre va a cumplir estas condiciones, sin embargo, solo un subconjunto de su espacio de parámetros va a satisfacer el comportamiento asintóticamente nulo solicitado (ver Figs. 3.8, 3.9).

En la última parte de esta sección se estudió la estabilidad clásica y cuántica para la familia  $G_4 \sim X^2$ , aunque no fueron presentados resultados para  $G_4 \sim X$ , la metodología puede ser aplicada sin mayores complicaciones. Las diferentes regiones obtenidas fueron resumidas en la Tabla 3.1. Notándose que los solitones no topológicos con  $\eta_2 > 0$  tendrán una región de estabilidad acotada por la frecuencia límite a partir de la cual la teoría se rompe, debido a que las soluciones dejan de ser  $C^2$ .

Aunque el enfoque de esta sección fue la obtención, caracterización y estudio de solitones no topológicos en espacio plano. Es válido comentar que estos modelos presentan varias virtudes que los han llevado a ser estudiados en disimiles contextos y escalas, p. ej. como candidatos a energía oscura [204, 205], objetos compactos [206, 207]. Por otro lado, en espacio plano (con  $F_4 = 0$ ), estos se reducen a los muy estudiados galileones. En la próxima sección se considerará un acople no mínimo a la gravedad y estudiará la fenomenología de las configuraciones solitónicas. Como se demostrará, en el límite donde la constante de acoplamiento es lo suficientemente grande se recuperarán los resultados presentados para la rama  $\sigma_0' = 0$ .

### 3.3 Gravedad y solitones no topológicos en beyond

#### Horndeski

En la sección anterior se demostró la posibilidad de obtener configuraciones solitónicas en un espacio tiempo plano sustentadas por las no linealidades introducidas por las funciones  $G_4$  y  $F_4$ . El siguiente paso lógico sería acoplar a la gravedad, es decir, considerar que estos objetos pueden deformar el espacio tiempo y este puede influir en su estructura. Soluciones tipo solitones no topológicos en un espacio tiempo curvo han sido ampliamente estudiadas, p. ej. estrellas de bosones [143, 208–211], Q-bolas [202, 212, 213], Oscilones [214, 215].

En el contexto de la gravedad de Horndeski, trabajos como [197, 216–218] han abordado este tipo de soluciones. Sin embargo, como fue comentado en la introducción, modelos que consideran a las funciones  $G_4$  y  $G_5$  se han visto fuertemente restringidos por la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales,  $c_g \approx c$  [187, 188]. Lo anterior, puede ser sorteado fácilmente con la introducción de las funciones  $F_4$ ,  $F_5$  (beyond Horndeski) [189, 190]. Aunque, como fue señalado, bajo ciertas condiciones (ver [191, 192]) es posible la viabilidad de estos modelos sin la introducción de las funciones  $F_i$ , por tanto, en esta sección también los tendremos en cuenta.

Similar a lo realizado para el espacio plano, el primer paso para construir objetos compactos sería derivar las ecuaciones que describen a una solución estática y esféricamente simétrica. Un estudio más general que incluya la rotación y la evolución en el tiempo podría ser posible, sin embargo, como una primera aproximación se está considerando el caso más simple: esféricamente simétrico, asintótico, y localizado. Otra motivación para construirlos de esta forma vendría dado por el hecho de que estas configuraciones son consecuencia del grado extra (escalar) de libertad que tiene la teoría, y por lo tanto, cualquier componente inicial del momento angular probablemente se irradiaría en el proceso

de formación, de modo que el límite estático y simétricamente esférico podría ser razonable. En [219] abordan esta pérdida de momento angular para el modelo EKG, el cual, como veremos, se recupera en ciertos límites del escogido.

### 3.3.1 Solitones no topológicos gravitacionales

A continuación se estudiará el modelo GLPV presentado en la introducción del presente capítulo Ec. (3.1), en particular, la subclase presentada en la sección anterior <sup>44</sup>

$$\mathcal{L}_2 = G_2 = -m^2\phi\bar{\phi} - X, \quad (3.47a)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4R - 2G_{4X}(\square\phi\square\bar{\phi} - \phi^{\mu\nu}\bar{\phi}_{\mu\nu}). \quad (3.47b)$$

y su respectiva extensión (3.3a). Como se puede apreciar, el campo escalar es acoplado no mínimamente a la gravedad mediante el término  $G_4R$ . Este acoplamiento no mínimo gravitacional introducirá la llamada quinta fuerza, la cual se traduce en una constante gravitatoria efectiva  $G_{eff}$ . La misma puede ser utilizada para constringir los parámetros libres del modelo (ver sección fenomenología 3.3.2).

De manera similar a la sección anterior podemos expresar las funciones  $G_4$  y  $F_4$  como Ecs. (3.7)

$$G_4[X] = \frac{c_0\Lambda_2^8}{\Lambda_3^6} + \frac{c_1X\Lambda_2^4}{\Lambda_3^6} + \frac{c_2X^2}{\Lambda_3^6} + \frac{c_3X^3}{\Lambda_3^6\Lambda_2^4} + \dots, \quad (3.48a)$$

$$F_4[X] = \frac{d_1\Lambda_2^4}{\Lambda_3^6X} + \frac{2d_2}{\Lambda_3^6} + \frac{3d_3X}{\Lambda_3^6\Lambda_2^4} + \dots \quad (3.48b)$$

Análogo al espacio plano, la aparición del término  $1/X$  no introduce inconsistencia alguna

<sup>44</sup>Esta elección se puede pensar como una extensión del modelo Fab Four de Charmousis et al [220, 221], aunque la definición original usa la función  $G_5 \sim \phi$ , integrando por parte se puede expresar mediante  $G_4 \sim X$  [216, 222, 223]. Este modelo presenta un mecanismo de autoajuste para abordar el problema de la constante cosmológica, por lo que ha sido estudiado en diferentes contextos, p. ej. [217, 218, 224, 225]

en nuestro análisis. Tendremos entonces que la acción se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}M_{\text{Pl}}^2 R - X - m^2\phi\bar{\phi} \\ & + \frac{M_{\text{Pl}}}{\Lambda_3^3} \left[ c_1 X R - 2c_1 [\square\phi\square\bar{\phi} - \phi^{\mu\nu}\bar{\phi}_{\mu\nu}] + \frac{d_1}{X} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma} \phi_\mu \bar{\phi}_{\mu'} \phi_{\nu\nu'} \bar{\phi}_{\rho\rho'} \right] + \dots, \end{aligned} \quad (3.49)$$

con los puntos suspensivos indicando las restantes contribuciones de potencias mayores a  $X$ . Notar que se usó la relación entre  $\Lambda_2$  y  $\Lambda_3$  dadas por Ec. (3.8) y se tomó a  $c_0 = 1/2$ . Sin perder generalidad en la metodología usada, nos centraremos en la familia de modelos visualizados en Ec. (3.49) (equivalente a tomar:  $d_i = c_i = 0$  con  $i \geq 2$  en (3.48)). Esta elección se fundamenta en el hecho de que, en la región de amplitudes que representan configuraciones estables y para un acoplamiento débil como los usados en el análisis numérico,  $\Lambda_3 \gtrsim (2|c_i|M_{\text{Pl}}^{2-i}/m^{2-4i})^{1/3i}$ , el tomar en cuenta potencias mayores (p. ej.  $c_2 \neq 0$  o  $c_3 \neq 0$  con los restantes  $c_i = 0$ ,  $i > 0$ ) no implica configuraciones muy diferentes a las obtenidas para el EKG (ver Fig. 3.14). Obteniéndose para el caso limítrofe,  $\Lambda_3 \gg (2|c_i|M_{\text{Pl}}^{2-i}/m^{2-4i})^{1/3i}$  (o lo que es igual  $\Lambda_3 \rightarrow \infty$ ) que es posible despreciar todas las contribuciones de los operadores  $c_i$ ,  $d_i$  con  $i > 0$ . Por otro lado, en conjunto a la consideración anterior, suponemos amplitudes  $\sigma_0 \ll M_{\text{Pl}}$  ya no solo podremos aproximar el modelo mediante EKG, sino también a través del sistema Schrödinger-Poisson (SP) (ver Fig. 3.15). Es decir, en dependencia de las escalas de energía  $\Lambda_3$ ,  $m$  y amplitud  $\sigma_0$  que elijamos, las diferentes contribuciones de las potencias mayores tendrán importancia o no y los resultados pueden ser aproximados a los sistemas comentados.

Para el espacio de parámetros explorado en este trabajo, potencias mayores a  $X$  no reflejan un gran cambio con respecto a EKG y por ello no se tienen en cuenta.<sup>45</sup> Aunque, sin embargo, se usará el modelo correspondiente a  $G_4 \sim X^2$  ( $c_0 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$  con los restantes  $c_i = 0$ ) como una muestra de que, en el límite de acoplamiento fuerte,  $\Lambda_3 \ll$

<sup>45</sup>Otra forma de abordar la elección de esta familia de modelos es presentada en [197] desde el punto de vista de una teoría efectiva.

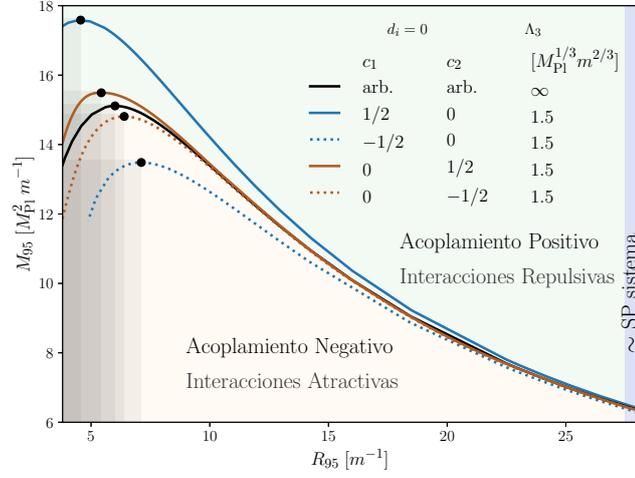


Figura 3.14: Se muestran las relaciones  $M_{95}$  vs  $R_{95}$  correspondientes a diferentes ordenes de la expansión Ec. (3.48) con  $\Lambda_3 \gtrsim M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ . Como se observa, considerar un modelo  $G_4 \sim X^2$  ( $c_2 \neq 0$ , líneas color marrón) implica perfiles más cercanos al modelo EKG (línea negra). Lo cual valida que las mayores diferencias con respecto a la RG vendrán dadas por el modelo  $G_4 \sim X$ . La región inferior a la línea negra (color naranja) representan un acoplamiento negativo, mientras que la superior (color verde) un acoplamiento positivo. Implicando configuraciones con masas menores y mayores respectivamente. La región azul, es donde la aproximación Schrödinger-Poisson (SP) es válida.

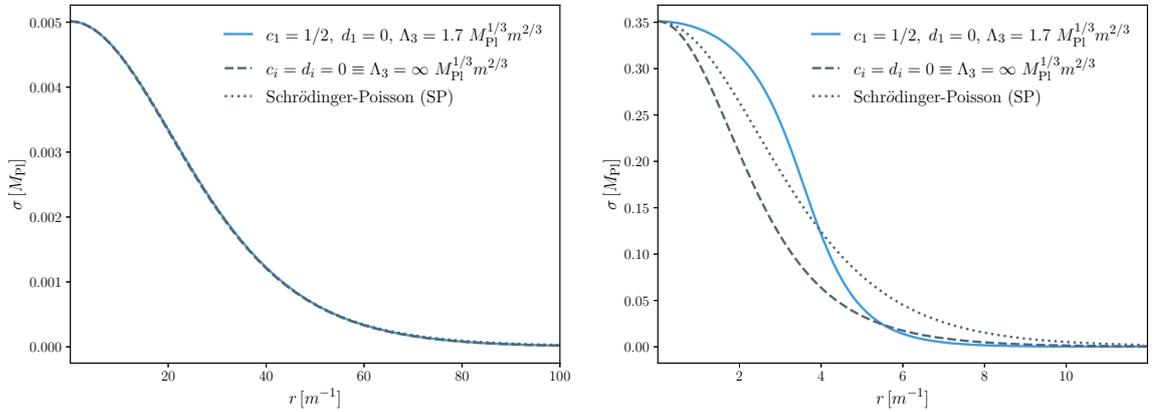


Figura 3.15: Se ilustran dos límites posibles para las amplitudes centrales  $\sigma_0$ . Para el caso  $\sigma_0 \ll M_{\text{Pl}}$  (recuadro izquierdo) las configuraciones resultantes son equivalentes a las de EKG (líneas discontinuas) e incluso al sistema Schrödinger-Poisson (líneas punteadas). Mientras que para amplitudes mayores (recuadro derecho) las configuraciones resultantes no pueden aproximarse por ninguno de los modelos señalados. Es decir, los operadores de orden superior juegan un rol importante.

$(2|c_i|M_{\text{Pl}}^{2-i}/m^{2-4i})^{1/3i} \rightarrow n_i \gg 1$  se recupera, para valores de amplitudes centrales en la región inestable, los resultados obtenidos en espacio plano (ver Figuras 3.8, y 3.11 para un caso particular).

Comentemos algunos detalles sobre la familia de modelos visualizada en Ec. (3.49). Como bien se pudo apreciar de los resultados en secciones anteriores, la inclusión del término  $c_1$  con  $F_4 = 0$  aporta en espacio plano una derivada total en la acción y por tal motivo la misma se reduce al sistema KG, no existiendo soluciones solitónicas en ese contexto. Sin embargo, con la adición de la gravedad, dicho término no introduce una derivada total, apareciendo soluciones solitónicas puramente productos de la gravedad (de ahí el nombre de la sección). Por otro lado, esta no es la primera vez que se propone la inclusión de este término en la literatura: p. ej. como fue señalado constituye uno de los “Fab Four” de Charmousis Charmousis *et al* [220, 221]. Aplicaciones cosmológicas y gravitacionales de este modelo se pueden encontrar en las Refs. [217, 218, 224, 225]. Por último, ha de comentarse que la adición del término  $F_4$  ha venido tomando importancia luego de la aparición de la restricción anteriormente comentada sobre  $c_g$ .

### 3.3.1.1 Ecuaciones de estructura

A continuación escribamos las respectivas ecuaciones de movimiento para la acción cuyo lagrangiano viene dado por (3.49). Para ello variemos primeramente esta con respecto al tensor métrico  $g_{\mu\nu}$

$$\left( M_{\text{Pl}}^2 + 2c_1 \frac{M_{\text{Pl}}}{\Lambda_3^3} X \right) G_{\mu\nu} - t_{\mu\nu} + \frac{M_{\text{Pl}}}{\Lambda_3^3} \left( c_1 a_{\mu\nu} + d_1 \frac{X b_{\mu\nu} - c_{\mu\nu}}{2X^2} \right) + \dots = 0, \quad (3.50a)$$

donde los puntos suspensivos representarían las contribuciones de potencias mayores en  $X$ , las cuales son estudiadas en la sección 3.3.1.4. El término  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein,

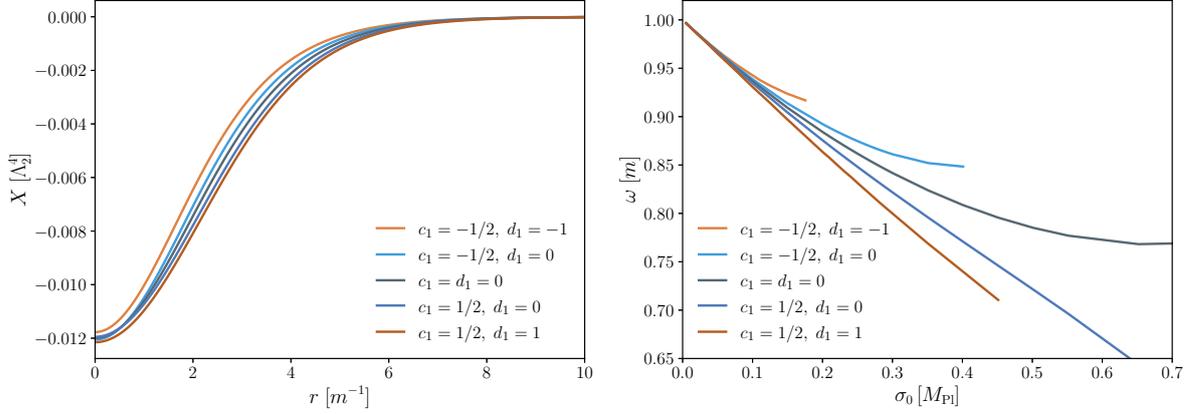


Figura 3.16: Izquierda: se muestra el término cinético canónico  $X = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi$  como función de la coordenada radial. Como se aprecia todos los casos tienen su máximo en el origen y decaen a cero posteriormente, permaneciendo siempre menores que  $\Lambda_2^4$ . Las configuraciones presentadas son las mostradas en la Figura 3.19. Derecha: se muestra la relación entre  $\omega$  vs  $\sigma_0$  correspondientes a los resultados obtenidos en la sección 3.3.1.3. Notar que el límite de campo débil corresponde a  $\omega \rightarrow m$  y que considerar  $d_i \neq 0$  implica una menor región con configuraciones estable.

mientras que los tensores  $t_{\mu\nu}$ ,  $a_{\mu\nu}$ ,  $b_{\mu\nu}$  y  $c_{\mu\nu}$  son presentados en el Apéndice de [197].<sup>46</sup> y tienen dependencia de la métrica y el campo escalar. Notar que  $t_{\mu\nu}$  no es suprimido a ninguna escala de energía (no cuenta con ningún factor  $\Lambda_3$ ), y su expresión corresponde a la del tensor de energía-momento asociado a un campo escalar canónico.

Variando la acción con respecto al campo  $\phi$ , se obtiene la respectiva ecuación de movimiento del campo

$$\square \bar{\phi} - m^2 \bar{\phi} + \frac{M_{\text{Pl}}}{\Lambda_3^3} \left( c_1 a + d_1 \frac{X^2 b - Xc + 2d}{X^3} \right) + \dots = 0, \quad (3.50b)$$

donde de manera similar a la anterior los puntos suspensivos representan las contribuciones de potencias mayores. Las funciones escalares  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  pueden encontrarse en los notebook publicados en [25]. Notar que considerar  $c_1 = d_1 = 0$ , sería similar al tomar el

<sup>46</sup>Debido a la longitud de las expresiones para estos términos los mismos no son presentados en esta tesis, pero pueden encontrarse en los notebook publicados en [25].

límite  $\Lambda_3 \rightarrow \infty$ , lo que implica recuperar EKG como se espera.

Asumiendo la métrica como estática y esféricamente simétrica Ec. 2.7

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + g^2(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.51)$$

y considerando el mismo ansatz de la sección anterior Ec. (3.11)

$$\phi(t, r) = \sigma(r)e^{i\omega t}, \quad (3.52)$$

tendremos que las funciones  $N(r)$ ,  $g(r)$  y  $\sigma(r)$  serán reales y dependerán solo de la coordenada radial. Similar a la sección anterior,  $\omega$  es real, y representará la frecuencia angular de oscilación del campo escalar en el espacio interno  $U(1)$ .

La dependencia explícita del tiempo en el ansatz (3.52), reduce las ecuaciones de movimiento a un sistema independiente del tiempo compatible con la métrica estática (3.51). Lo cual traduce la resolución del sistema de ecuaciones a un problema de valor propios para  $\omega$ . Después de algunas manipulaciones y considerando solo los términos representados en Ecs. (3.50), las ecuaciones de movimiento se pueden expresar de la siguiente manera

$$(1 - \alpha) \frac{N'}{N} + (1 - \beta) \frac{1 - g^2}{2r} - \frac{r}{2M_{\text{Pl}}^2} \left[ (1 + \gamma_1) \sigma'^2 - g^2 \left( m^2 - (1 + \delta_1) \frac{\omega^2}{N^2} \right) \sigma^2 \right] = 0, \quad (3.53a)$$

$$(1 - \alpha) \frac{g'}{g} - (1 + \beta) \frac{1 - g^2}{2r} - \frac{r}{2M_{\text{Pl}}^2} \left[ (1 - \gamma_2) \sigma'^2 + g^2 \left( m^2 + (1 - \delta_2) \frac{\omega^2}{N^2} \right) \sigma^2 \right] = 0, \quad (3.53b)$$

$$(1 + \varepsilon) \sigma'' + \left[ \frac{2(1 - \zeta)}{r} + (1 - \eta) \left( \frac{N'}{N} - \frac{g'}{g} \right) \right] \sigma' - g^2 \left( m^2 - (1 - \theta) \frac{\omega^2}{N^2} \right) \sigma = 0, \quad (3.53c)$$

donde  $\alpha, \beta, \dots, \theta$  son funciones adimensionales que modifican al sistema EKG y son presentadas en los notebook publicados en [25]. En lo adelante a las soluciones del sistema Ecs. (3.53) les llamaremos estrellas beyond Horndeski (EbH), en analogía a las EBs presentadas en la literatura.

Las ecuaciones (3.53) presentan diferencias respecto al sistema EKG. De manera general, se tendrá que las segundas derivadas del campo escalar en el lagrangiano (3.49), conducirán a derivadas de segundo orden en los términos métricos. Aunque bien es cierto que este orden en las derivadas de la función  $g_{00}$ , aparecen en la RG, y en modelos tipo Horndeski ( $F_i = 0$ ), la existencia de una segunda derivada en la función radial  $g_{rr}$ , es totalmente consecuencia de las funciones beyond Horndeski  $F_i$ . A simple vista se pudiera inferir de este lagrangiano, la existencia de derivadas de cuarto orden en el campo para  $d_1 \neq 0$  (beyond Horndeski). Lo anterior no es lo que sucede con el modelo considerando, estas derivadas cuartas desaparecen después de usar las propiedades del tensor de Levi-Civita, lo que da como resultado ecuaciones de tercer orden. Algunas de estas terceras derivadas se pueden eliminar después de manipulaciones utilizando las propiedades del tensor de Riemann,  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]v^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}v^\beta$  y las que sobreviven, se cancelan mutuamente en simetría esférica, siendo esta la razón por la cual no aparecen explícitamente en (3.53). Es importante señalar que lo anterior no afecta el número de grados de libertad que se propagan en la teoría [169,170] y por tanto el número de condiciones a la frontera que se han de establecer se mantiene igual.

Por otro lado, es evidente en las Ecs. (3.53), que el sistema de EKG también se recupera en el límite donde los términos  $\alpha, \beta, \dots, \theta$  se pueden despreciar. Esto ocurre en régimen de acoplamiento débil y amplitudes pequeñas, donde se cumple que

$$\sigma_0 \ll \frac{M_{\text{Pl}}^{1/2} \Lambda_3^{3/2}}{m}. \quad (3.54)$$

Esta condición se puede deducir a partir del máximo absoluto en el término cinético  $X = g^{-2}\sigma'^2 - N^{-2}\omega^2\sigma^2$ . Como se puede apreciar de la Figura 3.16 (izquierda) dicho máximo ocurre en el origen y a partir de este punto comienza a decaer hasta cero (en el infinito). Si consideramos una amplitud cercana a la límite inferior, es posible aproximar

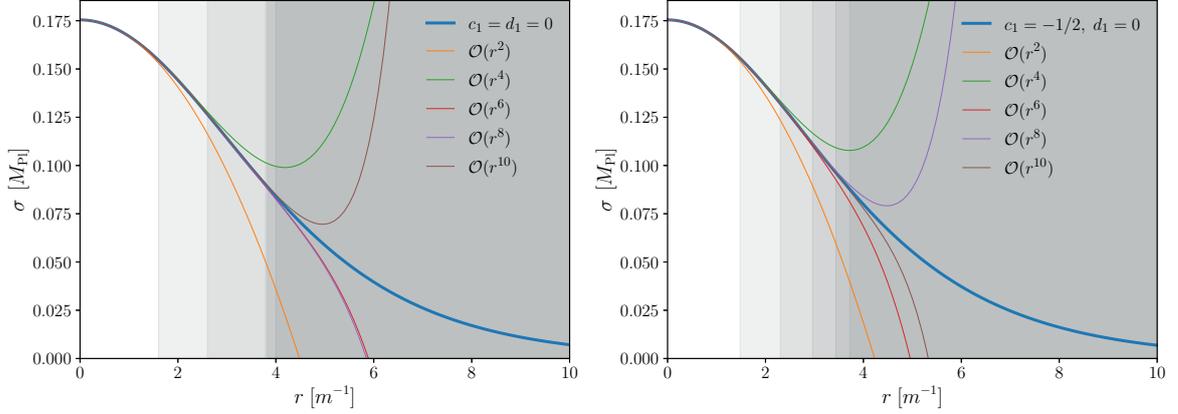


Figura 3.17: Se muestra la expansión alrededor del origen del perfil de la función de onda  $\sigma(r)$  a diferentes órdenes en la expansión de la serie, Ec. (3.57a) solo en  $r$ . Las líneas sólidas negras se obtuvieron integrando numéricamente las Ecs. (3.53), para los casos  $\sigma_0 = 0.175M_{\text{Pl}}$ ,  $\Lambda_3 = 1.5M_{\text{Pl}}^{1/3}m^{2/3}$ , y dos diferentes opciones de las constantes de acoplamiento adimensional:  $c_1 = d_1 = 0$  (izquierda) y  $c_1 = -1/2$ ,  $d_1 = 0$  (derecha). En cada caso, el valor particular de la frecuencia que conduce al estado fundamental se obtuvo *a posteriori* después de resolver numéricamente el sistema de ecuaciones. La región sombreada delimita el radio hasta el cual la aproximación Ec. (3.57a) es viable, para este caso  $r = 4.2m^{-1}$

el máximo absoluto global a,  $|X| \approx m^2\sigma_0^2$ , notar que amplitudes mayores implican que  $\omega < m$  (ver Figura 3.16 derecha). Por otro lado, de las expansiones (3.48) se aprecia que para  $X \ll \Lambda_2^4 = M_{\text{Pl}}\Lambda_3^3$ , la contribución debida a los operadores  $c_i$ ,  $d_i$  con  $i > 0$  puede ser despreciable con respecto a los términos lineales. Juntando todo estos resultados, se llega a la condición Ec. (3.54).

### 3.3.1.2 Condiciones de frontera

Similar al procedimiento usado en espacio plano, para una resolución numérica de las ecuaciones de movimiento es conveniente reescribir estas en término de variables adimensionales

$$\bar{r} = mr, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{M_{\text{Pl}}}, \quad \frac{\bar{\omega}}{N_\infty} = \frac{\omega}{m}, \quad \bar{\Lambda}_3 = \frac{\Lambda_3}{M_{\text{Pl}}^{1/3}m^{2/3}}, \quad (3.55)$$

donde  $N_\infty$  es una constante positiva y arbitraria. La principal ventaja de esta elección es que remueve la dependencia explícita de la masa del campo  $m$  en las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de (3.49) (a cualquier potencia) y codifica las escalas de energía  $m$  y  $\Lambda_3$ , en un único parámetro  $\bar{\Lambda}_3$  (los  $c_i$  y  $d_i$  solo fijan el modelo estudiado).

Siguiendo la misma metodología desarrollada anteriormente, se sigue el análisis de las condiciones de contorno, buscando que las mismas sean compatibles con una solución regular en el origen y localizada en el espacio. Dichos comportamientos serán conectados por soluciones obtenidas numéricamente. Las condiciones de contorno que conducen a configuraciones espacio-temporales regulares (en el sentido de que no existen divergencias de escalares de curvatura) vienen dadas por

$$\bar{\sigma}(\bar{r} = 0) = \bar{\sigma}_0, \quad \bar{\sigma}'(\bar{r} = 0) = 0, \quad (3.56a)$$

$$N(\bar{r} = 0) = N_0, \quad N'(\bar{r} = 0) = 0, \quad (3.56b)$$

$$g(\bar{r} = 0) = 1, \quad \bar{g}'(\bar{r} = 0) = 0, \quad (3.56c)$$

donde  $\bar{\sigma}_0$  y  $N_0$  representan la amplitud del campo y la función de lapso evaluada evaluadas en el origen respectivamente. Ambas serán constantes arbitrarias y positivas. Similar a lo que ocurre para el sistema EKG siempre se podrá reabsorber  $N_0$  en la definición de parámetro  $\omega$  y fijar  $N_0 = 1$  sin pérdida de generalidad.

Como es bien conocido, el asumir una métrica esférica obliga al estudio de las ecuaciones alrededor del origen. Para ello, se realizó una expansión de Taylor de las ecuaciones adimensionales alrededor de  $\bar{r} = 0$  e introducimos las relaciones (3.56), obteniéndose luego

de un poco de álgebra, la solución perturbativa

$$\bar{\sigma}(\bar{r}) = \bar{\sigma}_0 \left\{ 1 + \bar{r}^2 \left[ \frac{1 - \bar{\omega}^2}{6} + \frac{c_1}{\bar{\Lambda}_3^3} \frac{2(1 - \bar{\omega}^2 + 2\bar{\omega}^4)}{6} \bar{\sigma}_0^2 + \frac{d_1}{\bar{\Lambda}_3^3} \frac{(1 - \bar{\omega}^2) [1 + \bar{\omega}^2 (7 - 6\bar{\sigma}_0^2) - \bar{\omega}^4 (8 - 3\bar{\sigma}_0^2)]}{27\bar{\omega}^2} + \dots \right] + \dots \right\}, \quad (3.57a)$$

$$N^2(\bar{r}) = 1 - \bar{r}^2 \left[ \frac{(1 - 2\bar{\omega}^2) \bar{\sigma}_0^2}{3} - \frac{c_1}{\bar{\Lambda}_3^3} \frac{2 [2\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^4 (2 + 3\bar{\sigma}_0^2)] \bar{\sigma}_0^2}{3} + \frac{d_1}{\bar{\Lambda}_3^3} \frac{4(1 - \bar{\omega}^2) \bar{\sigma}_0^2}{9} + \dots \right] + \dots, \quad (3.57b)$$

$$g^2(\bar{r}) = 1 + \bar{r}^2 \left[ \frac{(1 + \bar{\omega}^2) \bar{\sigma}_0^2}{3} - \frac{c_1}{\bar{\Lambda}_3^3} \frac{2(1 + \bar{\omega}^2) \bar{\omega}^2 \bar{\sigma}_0^4}{3} - \frac{2c_1 - d_1}{\bar{\Lambda}_3^3} \frac{2(1 - \bar{\omega}^2)^2 \bar{\sigma}_0^2}{9} + \dots \right] + \dots, \quad (3.57c)$$

donde los puntos suspensivos hacen referencia a factores de  $\mathcal{O}(1/\bar{\Lambda}_3^6)$  y  $\mathcal{O}(\bar{r}^4)$  que no hemos incluido explícitamente. Para obtener expresiones *manejables* también hemos asumido que la escala  $\Lambda_3$  es relativamente grande en unidades de  $M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ . Lo anterior no es necesariamente cierto, sin embargo, las expresiones generales son engorrosas y no muy ilustrativas, sirviendo las ecuaciones (3.57) como referencia. En la Figura 3.17 ilustramos la validez de esta expansión para dos ejemplos representativos, notar que los resultados corresponden a la expansión solo en  $r$ .

Aunque es cierto que las ecuaciones (3.57) tiene una aplicación limitada (al no estar escritas completamente), hay información útil que podemos inferir a partir de estas. Por ejemplo, como se puede apreciar, mientras que la contribución principal del operador  $d_1$  a la función de onda es lineal en  $\bar{\sigma}_0$ , para la ecuación (3.57a), la misma no tiene factores de  $c_1$  hasta el tercer orden en la amplitud central. Esto se debe a que para el orden lineal en  $\bar{\sigma}_0$  el elemento de línea del espacio-tiempo permanece plano,  $N^2(\bar{r}) = g^2(\bar{r}) = 1$  en las ecuaciones (3.57b), (3.57c), y en ese caso el operador  $c_1$  solo contribuye como una derivada total a la acción. Entonces necesitamos alejarnos del espacio-tiempo de Minkowski, es decir, del orden lineal en  $\bar{\sigma}_0$ , para ver cualquier efecto de este operador. Lo anterior está en concordancia con los resultados encontrados para el espacio-tiempo plano, donde el operador  $d_1$  si tenía que tenerse a consideración (permitía soluciones solitónicas).

Por otro lado teniendo presente que para las configuraciones en un estado fundamental (sin nodos) su segunda derivada en el origen, debe ser necesariamente negativa, y usando que,  $\bar{\omega}^2 > 1$  (no confundir con  $\omega$  que es menor a  $m$ ), tendremos entonces que el término colindante a la constante  $c_1$  en Ec. (3.57a) será definido positivo, lo mismo aplicará para el término que acompaña a  $d_1$ . Luego, si asumimos que la amplitud central permanece más pequeña que la escala de Planck (en la próxima sección se prueba que no existen configuraciones estable para  $\bar{\sigma}_0 \gtrsim 1$ , ver Fig. 3.16 panel derecho y Fig. 3.20), podemos suponer entonces que los términos mostrados en Ec. (3.57a) son los dominantes y llegar a la conclusión de que, valores positivos de las constantes de acoplamiento,  $c_1$  y  $d_1$ , *ancharían* el perfil de la función de onda en comparación con su equivalente EBs, mientras que, los valores negativos lo *encogerían* el perfil. Esto parece indicar que los acoplamientos positivos (negativos) están asociados a interacciones repulsivas (atractivas). En la siguiente sección, confirmamos este resultado numéricamente para el caso general de un  $\Lambda_3$  arbitrario de orden  $M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ , ver Figura 3.19.

Habiendo estudiado el comportamiento alrededor del origen, el próximo paso es estudiar la existencia de configuraciones localizadas. Las condiciones de frontera para radios grandes deben ser las mismas que las correspondientes al estado de vacío (recordar definición de solitón no-topológico), o en otras palabras, se debe exigir que a distancias largas se recupere el espacio plano. Para ello es necesario exigir

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \bar{\sigma}(\bar{r}) = 0, \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} N(\bar{r}) = N_\infty, \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} g(\bar{r}) = 1, \quad (3.58)$$

donde  $N_\infty$  es una constante positiva arbitraria que está relacionada con la función lapso y el haber fijado  $N_0 = 1$  para nuestros cálculos.

Usando la ecuación de movimiento del campo Ec. (3.53), y considerando el límite de campo débil, en conjunto con el asumir las condiciones (3.58), es posible probar que de

manera general se tendrá el siguiente comportamiento asintótico

$$\bar{\sigma}(\bar{r}) \sim \frac{1}{\bar{r}} \exp \left( \sqrt{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{N_\infty^2}} \bar{r} \right), \quad (3.59)$$

garantizándose así la existencia para radios grandes, de la conducta deseada en las ecuaciones.

Notar que si se restauran las unidades físicas, se tendría que el término de masa  $m$  es el causante del decaimiento exponencial en el infinito, esto siempre y cuando  $\omega/N_\infty < m$ . Estableciéndose así un límite superior en el rango de frecuencias permitidas (ver Fig. 3.16 derecha). Por otro lado, la expresión (3.59) es exactamente la misma que la correspondiente a EKG, donde los operadores de derivadas superiores son ceros. Esto no es ninguna sorpresa, ya que, como fue comentado, los operadores de orden superior son despreciables a bajas energías. Siendo este el principal motivo por el cual, en próximas secciones, nos limitamos a estudiar numéricamente la familia  $c_1$ ,  $d_1$ . A excepción de la sección 3.3.1.4 donde trabajamos con la familia  $c_2$ .

En este punto, hay una pequeña observación que debemos hacer sobre la obtención de las soluciones numéricas. Por lo general, el término  $N_\infty$  es elegido de tal manera que  $N_\infty = 1$ , pero esto no siempre se cumple una vez que se realiza la integración a partir de  $N_0 = 1$ . Sin embargo, podemos hacer uso de la libertad para redefinir la coordenada de tiempo y la frecuencia, en consecuencia:  $(N, \bar{\omega}) \mapsto x(N, \bar{\omega})$ , de tal manera que esta condición se satisfaga en el infinito, donde  $x$  es un factor constante arbitrario mayor que cero. A tal efecto, primero obtenemos la solución correspondiente asociada a una amplitud central  $\bar{\sigma}_0$ , que da como resultado  $\bar{\omega}$  como valor propio de frecuencia, y  $N(\bar{r})$  como el perfil de la función lapso, con la propiedad de que asintóticamente converge a un valor que es diferente de uno en el infinito. Para cumplir con la condición de frontera  $N_\infty = 1$ , se reescribe la coordenada de tiempo como  $N^{\text{nueva}}(\bar{r}) = xN(\bar{r})$ , definiéndose una nueva

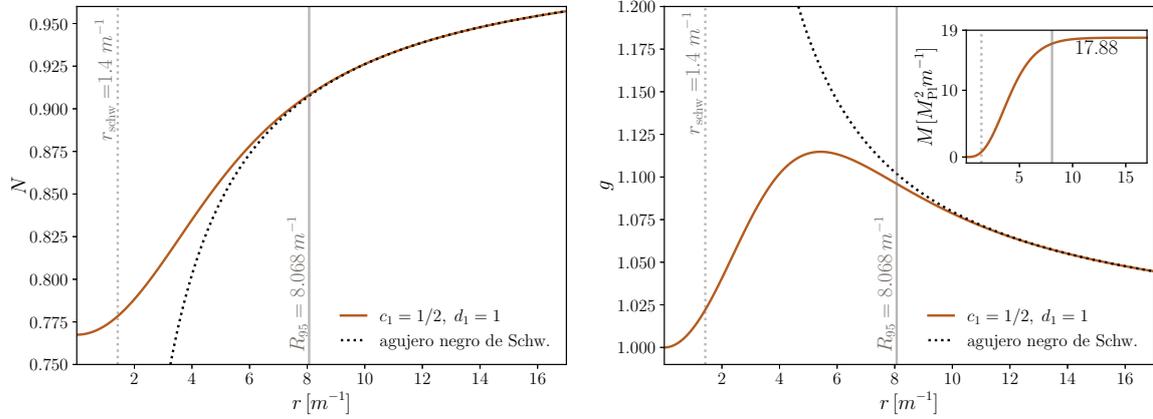


Figura 3.18: Se muestran las componentes del tensor métrico: la función de lapso  $N(r)$  normalizada a uno en  $r \rightarrow \infty$ , (izquierda) y la componente radial  $g(r)$  (derecha), ambas como funciones de la coordenada radial. La configuración corresponde a la cuarta línea de Tabla 3.2. Como referencia, también es mostrado los términos métricos de Schwarzschild  $N_{\text{schw}}(r) = (1 - r_s/r)^{1/2}$  y  $g_{\text{schw}}(r) = N_{\text{schw}}^{-1}(r)$ , donde  $r_s = M/(4\pi M_{\text{Pl}}^2)$ , para un objeto de la misma masa total  $M = M_T = 17.88 M_{\text{Pl}}^2 m^{-1}$  y radio insignificante. El perfil de masa respectivo se muestra como una figura de inserción en el gráfico de la derecha.

frecuencia  $\bar{\omega}^{\text{nueva}} = x\bar{\omega}_1$ , de tal manera que

$$xN(\bar{r}_{\text{max}}) = \frac{1}{g(\bar{r}_{\text{max}})}, \quad (3.60)$$

con  $r_{\text{max}}$  el radio máximo de integración. En lo adelante y para simplificar la notación, no escribiremos explícitamente el superíndice “nueva”, reportándose solo los valores ya reescalados. Un ejemplo de este reescalamiento y los respectivos perfiles métricos se muestran en la Figura 3.18.

### 3.3.1.3 Perfiles numéricos

En esta sección procedemos a resolver numéricamente las Ecs. (3.53). Para ello partimos de las condiciones *iniciales* (3.56), con  $N_0 = 1$  y usamos la expansión alrededor del origen Ecs (3.57) como punto de partida, en busca de obtener una solución que integrada desde

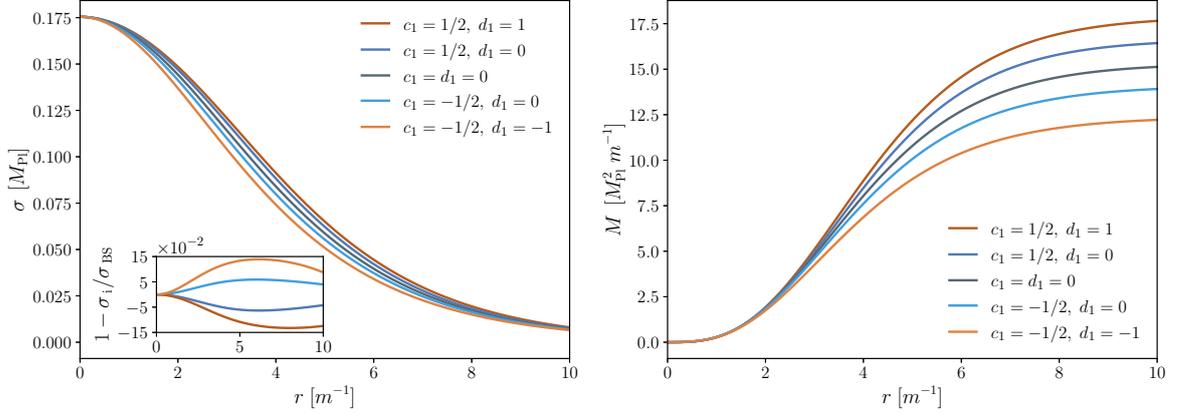


Figura 3.19: Perfiles correspondientes a la componente radial de la función de onda  $\sigma(r)$ , Ec. (3.52) (izquierda), y el perfil de masa  $M(r)$ , Ec. (3.61) (derecha), como funciones de la coordenada radial en teorías Horndeski ( $c_1 = \pm 1/2$ ,  $d_1 = 0$ ) y *viable* beyond Horndeski ( $c_1 = \pm 1/2$ ,  $d_1 = \pm 1$ ). A modo comparación se ilustra el caso en el que  $c_1 = d_1 = 0$ , correspondiente a un EBs estándar. La amplitud central es  $\sigma_0 = 0.175M_{\text{Pl}}$  y fue elegida puesto que proporciona la máxima masa estable para el modelo  $c_1 = -1/2$ ,  $d_1 = -1$ . El valor del acoplamiento se fija a  $\Lambda_3 = 1.5M_{\text{Pl}}^{1/3}m^{2/3}$ . Como se observa el perfil de las estrellas se contrae (expande) para las constantes de acoplamiento negativas (positivas)  $c_1$  y  $d_1$  de tal manera que sus radios no se ven afectados significativamente. En la figura interior mostramos la diferencia relativa con respecto al límite de BS, que nunca supera los 15% para estas configuraciones. Las propiedades más importantes de estos objetos se informan en la Tabla 3.2.

el origen, coincida con el comportamiento asintótico de la ecuación (3.58) en el infinito. Para encontrar dicha solución ajustamos el valor propio de frecuencia  $\omega$  de tal manera que la respectiva solución satisfaga estos requerimientos. Tal ajuste es realizado mediante un método de *shooting* [154, 227]. En principio, hay un número infinito de frecuencias que, dada una amplitud central  $\sigma_0$ , satisfacen las condiciones (3.58). En la práctica, sin embargo, buscamos solo configuraciones en el *estado base*, o de manera equivalente, perfiles de campo escalar sin nodos. Para una amplitud dada en el origen, estas soluciones tienen asociado la menor magnitud posible de la frecuencia que sea compatible con las condiciones de contorno previamente establecidas.

En la Figura 3.19 (panel izquierda), son mostrados algunos ejemplos representativos de la

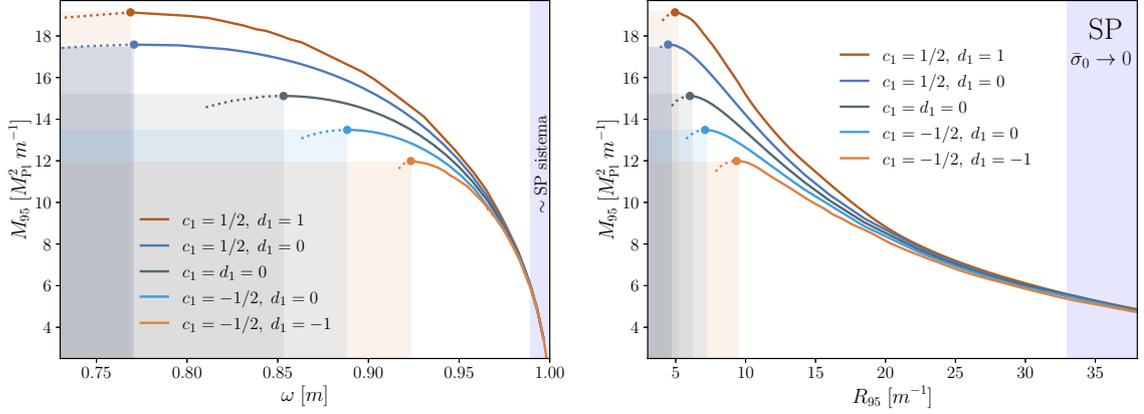


Figura 3.20: Se ilustran los perfiles  $M_{95}$  vs  $\omega$  (izquierda) y  $M_{95}$  vs  $R_{95}$  (derecha) correspondiente a los modelos  $c_1 = \pm 1/2$ ,  $d_1 = 0$  (Horndeski), y  $c_1 = \pm 1/2$ ,  $d_1 = \pm 1$  (beyond Horndeski) con  $\Lambda_3 = 1.5 M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ . A modo de comparación se presenta la solución correspondiente a EKG ( $c_1 = d_1 = 0$ ). Nótese que las configuraciones en la rama de acoplamiento negativa (positiva) siempre tienen masas más altas (más bajas) que la configuración de EKG equivalentes. Los puntos representan las configuraciones cuya masa es máxima y son los equivalentes límite de masa de Kaup para EBs [211]. A partir de ese punto, las soluciones de radio más pequeño se vuelven inestables. La región color púrpura corresponde a configuraciones SP es una buena aproximación (la diferencia relativa en la masa es menor que 1%).

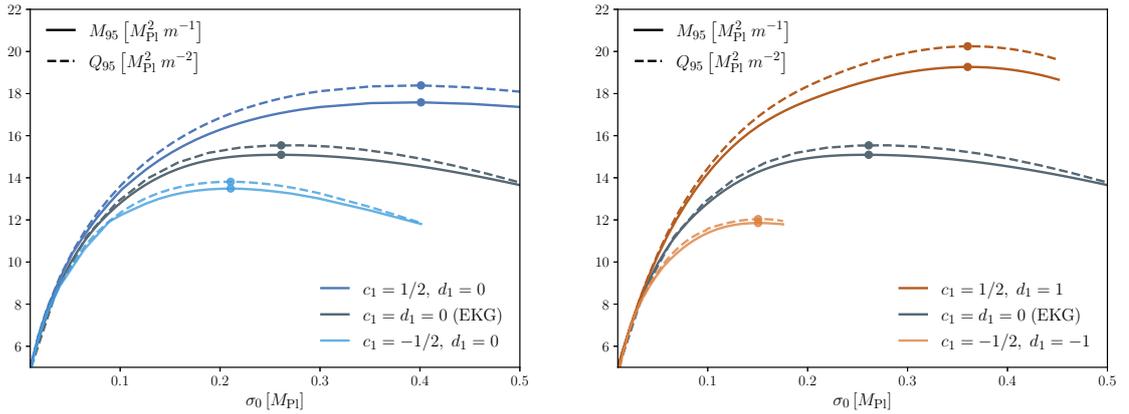


Figura 3.21: Se muestra la relación  $M_{95}$ ,  $Q_{95}$  vs  $\sigma_0$ . Los resultados corresponden a las configuraciones presentadas en la Figura 3.20. Como se aprecia, similar al resultado reportado en [226], la primera configuración con pendiente nula para los perfiles de  $M_{95}$  y  $Q_{95}$ , es la misma en cada caso.

		$\Lambda_3$ [ $M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ ]	$\sigma_0$ [ $M_{\text{Pl}}$ ]	$\omega$ [ $m$ ]	$M_{95}$ [ $M_{\text{Pl}}^2 m^{-1}$ ]	$R_{95}$ [ $m^{-1}$ ]	$C$
$c_1 = d_1 = 0$	(EBs)	$\infty$	0.175	0.896136	14.548	7.959	0.073
$c_1 = 1/2, d_1 = 0$	(EH)	1.5	0.175	0.889535	15.801	7.977	0.079
$c_1 = -1/2, d_1 = 0$	(EH)	1.5	0.175	0.902360	13.385	7.945	0.067
$c_1 = 1/2, d_1 = 1$	(EbH)	1.5	0.175	0.880272	16.984	8.068	0.084
$c_1 = -1/2, d_1 = -1$	(EbH)	1.5	0.175	0.916858	11.792	8.033	0.058

Tabla 3.2: Se muestran los parámetros característicos para los solitones gravitacionales (estrellas): amplitud central  $\sigma_0$ , frecuencia  $\omega$ , masa  $M_{95}$ , radio  $R_{95}$  y compacidad  $C$  (definida Ec. (3.67)). Los datos corresponden a las configuraciones mostradas en la Figura 3.19. Los valores positivos (negativos) de las constantes de acoplamiento  $c_1$  y  $d_1$  aumentan (disminuyen) la masa  $M_{95}$  en comparación con una EBs de la misma amplitud central. Sin embargo, el radio  $R_{95}$  es mucho menos sensible a la inclusión de los operadores de derivadas superiores. Esto también es evidente en el perfil de las estrellas que sufren modificaciones solo en la región de radios intermedios, vea el panel izquierdo en la Figura 3.19.

parte radial de los perfiles del campo, computados a través de la implementación numérica desarrollada. En este caso, todas las soluciones toman los valores:  $\Lambda_3 = 1.5M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ ,  $\sigma_0 = 0.175M_{\text{Pl}}$ , y corresponden respectivamente a los modelos  $c_1 = \pm 1/2$ ,  $d_1 = 0$  (Horndeski), y  $c_1 = \pm 1/2$ ,  $d_1 = \pm 1$  (beyond Horndeski). A modo de comparación es mostrado la solución correspondiente a EKG, que en la parametrización usada corresponde al caso donde  $c_1 = d_1 = 0$ . Las propiedades más relevantes de estos objetos se resumen en Tabla 3.2.

Una de las cantidades más importantes a la hora de estudiar este tipo de objetos es su masa gravitacional, la misma puede ser calculada de varias formas.<sup>47</sup> En virtud de las condiciones de contorno, el campo escalar desaparece asintóticamente a medida que la métrica del espacio-tiempo se aproxima a la solución de Schwarzschild. Por lo tanto, si se elige un radio suficientemente grande  $\bar{r}$ , es posible usar la métrica de Schwarzschild para

<sup>47</sup>Ver por ejemplo [140].

estimar asintóticamente la masa de uno de estos objetos, a través de

$$\bar{M} = 4\pi\bar{r} \left( 1 - \frac{1}{g^2(\bar{r})} \right), \quad (3.61)$$

donde  $M = \bar{M} M_{\text{Pl}}^2 m^{-1}$  en unidades físicas. En lo que sigue, nos referimos a la ecuación anterior como “perfil de masa” de la configuración. La Figura 3.19 (panel derecho), muestra de manera ilustrativa algunos perfiles de masa. A simple vista se puede verificar que el perfil del campo escalar disminuye monótonamente a medida que  $\bar{r}$  aumenta, y  $\bar{M}$  tiende a un valor constante, como se esperaba. Sin embargo, el campo escalar no desaparece estrictamente para un  $\bar{r}$  finito, por lo que es necesario definir un radio del objeto. En este caso es definido  $\bar{R}_{95}$  como el valor del radio efectivo que contiene el 95 % de la masa total,  $\bar{M}_{95}$ . Por último observar que para  $c_1, d_1 > 0$ ,  $\bar{M}$  es más grande que su equivalente EKG, y para  $c_1, d_1 < 0$ ,  $\bar{M}$  es más pequeño. El radio, sin embargo, permanece insensible a los nuevos términos.

La Figura 3.20 muestra la relación entre  $M_{95}$  vs  $\omega$  (panel izquierdo) y  $M_{95}$  vs  $R_{95}$  (panel derecho) para toda la familia de modelos estables  $c_1 = \pm 1/2, d_1 = 0$  (Horndeski), y  $c_1 = \pm 1/2, d_1 = \pm 1$  (beyond Horndeski) con  $\Lambda_3 = 1.5 M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ . A modo de referencia se presenta la solución correspondiente a EKG ( $c_1 = d_1 = 0$ ). Cada punto de las curvas en la Fig. 3.20 representa a una configuración con amplitud  $\sigma_0$  que se encuentra en el rango:  $0.01 M_{\text{Pl}} < \sigma_0 < 0.2 M_{\text{Pl}}$ . A simple vista se puede observar que amplitudes pequeñas conllevarán radios grandes, y frecuencias cercanas a la unidad (en unidades de  $m$ ). En estos casos y como fue comentado, los operadores de orden superior (provenientes de los términos cinéticos no canónicos) son despreciables, no siendo necesario resolver la ecuación de Horndeski (3.53), sino la de EKG, o en el caso límite SP. Este último caso es señalado con un sombreado púrpura que demarca la región donde la masa obtenida mediante (3.53) y SP tiene una diferencia relativa al 1 %.

Por otro lado, el considerar un aumento de  $\sigma_0$  implicará una mayor influencia de los operadores de orden superior, lo que conlleva a una separación de las diferentes curvas en Fig. 3.20. Como se puede apreciar, cada curva (modelo) alcanza un punto máximo (señalados con sus respectivos colores) y luego comienzan a disminuir. La configuración correspondiente a ese punto, delimitará los respectivos objetos estables (a la derecha del punto) e inestables (a la izquierda del punto) ante perturbaciones radiales para cada modelo. La metodología seguida en este trabajo para definir la comentada estabilidad fue la presentada en [226, 228] para estrellas de bosones. Las conclusiones presentadas por el autor pueden ser aplicadas en los modelos acá estudiados puestos que los mismos, se conectan (como ha sido probado) con EKG en el infrarrojo. Esto implicará que los autovalores asociados a las configuraciones en el modo fundamental, tengan una signatura igual a los de EKG. Es decir, son definidos positivos desde la izquierda hasta el primer máximo en un gráfico  $Q$  vs  $\sigma_0$ . Como se puede apreciar de la Figura 3.21, cada configuración correspondiente a ese máximo local, también será la de mayor masa (local), similar a lo q pasa en EKG (ver Figura 1 en [226]) llegándose al resultado de la estabilidad señalado con puntos en 3.20. <sup>48</sup>

Por último usando el perfil correspondiente al modelo EKG como referencia, se puede apreciar de la Fig. 3.20 que el valor positivo (negativo) de la constante de acoplamiento  $c_1$  y  $d_1$  conlleva a que el perfil para  $M_{95}(\omega)$  y  $M_{95}(R_{95})$  esté por encima (por debajo) del referente EKG. este resultado es consistente con lo comentado en secciones anteriores.

Finalmente, a modo de resumen tendremos:

- i. en el régimen de campo débil  $\sigma_0 \ll \frac{M_{\text{Pl}}^{1/2} \Lambda_3^{3/2}}{m}$  los operadores relacionados a  $c_i$  y  $d_i$  dejan de jugar un rol importante en las ecuaciones de movimiento y las soluciones pueden ser descritas usando el modelo EKG (ver Figs. 3.20 y 3.16). Para el caso extremo,  $\sigma_0 \ll M_{\text{Pl}}$ , podemos describir estos objetos por el sistema Schrödinger-

<sup>48</sup>La obtención de la respectiva expresión para la carga es mostrada en los notebook publicados en [25]

Poisson (Fig 3.15).

- ii. Los acoplamientos positivos (negativos) de  $c_1$  y  $d_1$  implicarán interacciones repulsivas (atractivas) que se traducen en una masa mayor (menor) en las configuraciones. Lo anterior está sustentado en el hecho de que al *fortalecerse* la componente repulsiva (atractiva) en la relación hidrostática se necesitaría una mayor (menor) masa para alcanzar su equilibrio (Ver Figs. 3.19, y 3.20). Una consecuencia directa de la signatura del acoplamiento se ve reflejada en los respectivos límites de estabilidad, ocurriendo que en dependencia de la signatura la configuración limítrofe tendrá una masa mayor (menor) que su contraparte con la otra signatura.

Aunque el análisis mostrado en esta sección se centra en la familia de soluciones con  $\Lambda_3 = 1.5M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ , las conclusiones arribadas son validas en la región donde se cumple la relación  $\Lambda_3^3 \gtrsim M_{\text{Pl}} m^2$ . En la sección de Fenomenología 3.3.2 presentamos resultados obtenidos para un rango de valores más amplio del acoplamiento  $\Lambda_3$ .

#### 3.3.1.4 Conexión con espacio plano

A continuación se abordará la conexión en el límite de acoplamiento fuerte entre soluciones solitónicas no topológicas en espacio plano y curvo. Como se pudo observar de la Figura 3.11 dicha conexión debe ocurrir en el límite,  $\Lambda_3 \ll (2|c_i|M_{\text{Pl}}^{2-i}/m^{2-4i})^{(1/3i)} \rightarrow n_i \gg 1$ . Esta conexión se justificaría por el hecho de que, mientras más fuerte es el acoplamiento, menos relevante se vuelve el término  $G_4 R$  (asociado a la gravedad). En dicho régimen se espera que aún, para amplitudes menores a la masa de Planck, las soluciones no sean estables ante perturbaciones radiales.

Para ejemplificar esta conexión entre los dos regímenes gravitatorios se tomará (por simplicidad) un caso particular de,  $G_4 \sim X^2$ . Considerando el siguiente término de la serie en

las Ecs. (3.50), (3.50b) tendremos

$$\left(M_{\text{Pl}}^2 + \dots + 2c_2 \frac{X^2}{\Lambda_3^6}\right) G_{\mu\nu} - t_{\mu\nu} + \dots + \frac{2}{\Lambda_3^6} \left(c_2 [X a_{\mu\nu} + 2k_{\mu\nu}] + \frac{d_2 b_{\mu\nu}}{4}\right) + \dots = 0, \quad (3.62a)$$

$$\square \bar{\phi} - m^2 \bar{\phi} + \dots + \frac{2}{\Lambda_3^6} \left(c_2 [X a + k] + \frac{d_2 b}{2}\right) + \dots = 0, \quad (3.62b)$$

donde los tensores  $a_{\mu\nu}, \dots$  y escalares  $a, \dots$  son mostrados en los notebook publicados en [25]. Los primeros puntos suspensivos indican términos asociados a  $c_1$ , y los últimos potencias mayores ( $c_i, i > 2$ ). Usando la métrica (3.51) tendremos de Ec. (3.62) para la familia de  $G_4 \sim X^2$  con  $c_0 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$  y los restantes  $c_i = d_i = 0$ , las ecuaciones de movimiento

$$\left(1 - \frac{c_2}{\Lambda_3^6} \beta_1^{(+)}\right) \frac{N'}{N} + \frac{r}{2M_{\text{Pl}}^2} \left(\beta_2 - \frac{2c_2 \sigma^4}{\Lambda_3^6 r^2} \beta_3\right) = 0, \quad (3.63a)$$

$$\left(1 - \frac{c_2}{\Lambda_3^6} \beta_1^{(-)}\right) \frac{g'}{g} + \frac{r}{2M_{\text{Pl}}^2} \left(\Theta_1 - \frac{2c_2 \sigma^4}{\Lambda_3^6} \left[\frac{\Theta_2}{r^2} + \Theta_3\right]\right) = 0, \quad (3.63b)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{c_2 \xi_1}{\Lambda_3^6}\right) \sigma'' + \left[\frac{2}{r} \left(1 - \frac{c_2 \xi_2}{\Lambda_3^6}\right) + \left(1 - \frac{c_2 \xi_3}{\Lambda_3^6}\right) \left(\frac{N'}{N} - \frac{g'}{g}\right)\right] \sigma' \\ - g^2 \left[m^2 - \left(1 - \frac{c_2 \xi_4}{\Lambda_3^6}\right) \frac{\omega^2}{N^2}\right] \sigma = 0, \end{aligned} \quad (3.63c)$$

donde los términos  $\beta_i, \Theta_i, \xi_i$  son presentados en los notebook publicados en [25]. Notemos que la estructura presentada es similar al resultado presentado en Ecs. (3.53), es decir, las conclusiones para el régimen de acoplamiento débil anteriormente comentadas, también se aplican (como era esperado) en el caso de potencias mayores del término cinético canónico. De igual forma, las conclusiones presentadas en esta sección se pueden aplicar para el caso lineal en  $G_4 \sim X$  con  $F_4 \neq 0$ , con las particularidades presentadas en la sección ?? y que, al estar *pesados*  $\Lambda_3$  con una potencia menor, se tendría que considerar valores mucho más pequeños que los considerados para este caso. Es decir, para lograr que los términos dominante sean los relacionados al acoplamiento, tendríamos que considerar valores muy cercanos a cero para  $\bar{\Lambda}_3$ , algo que no abordamos por cuestiones numéricas. De ahí que,

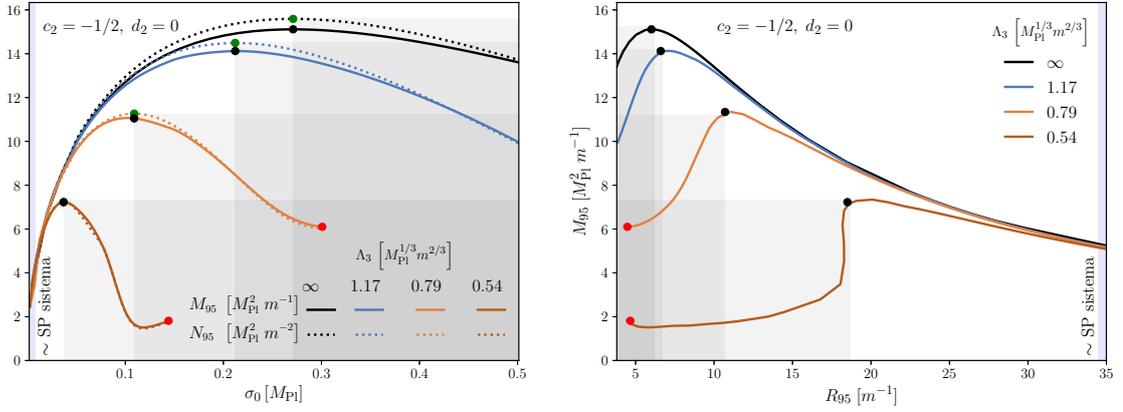


Figura 3.22: Se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores de  $\Lambda_3$  correspondientes al modelo  $c_2 = 1/2, d_2 = 0$ . Se puede apreciar que valores de  $\Lambda_3 \gtrsim M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  implican un perfil similar al modelo límite EKG (línea negra). Mientras que para valores menores (acoplamiento fuerte) los perfiles se *deforman*. Izquierda: se muestra la relación masa/número de partícula *vs* amplitud central. Los puntos verdes corresponden a  $dN/d\rho_0 = 0$  y demarca la frontera entre las regiones estable (región blanca) e inestable (región gris). Derecha: se señala la relación entre las masas y sus radios. Los puntos negros corresponden al punto de máxima masa y como se aprecia, coincide con los punto verdes. Los puntos rojos señalan un límite numérico donde  $\sigma''$  se indetermina.

para ejemplificar esta conexión con el espacio plano, se consideró la segunda potencia en la serie de  $X$ .

Durante la resolución del sistema de ecuaciones Ecs. (3.63) se buscaron solitones no topológicos usándose la misma metodología explicada en secciones anteriores, es decir: variables adimensionales definidas en (3.55), condiciones de contornos dadas por (3.56), y comportamientos en el origen y asintóticos descritos por Ecs. (3.57) y (3.59) respectivamente. Notar que es posible usar los comportamientos asintóticos anteriormente encontrados puesto que al tener las ecuaciones una estructura similar, a primer orden se llega a resultados equivalentes.

La Figura 3.22 recuadro derecho, muestra la familia de soluciones correspondientes a diferentes valores de  $\Lambda_3$ . Como se puede aprecia (y era esperado), considerar  $\Lambda_3 \gtrsim (M_{\text{Pl}} m^2)^{1/3}$

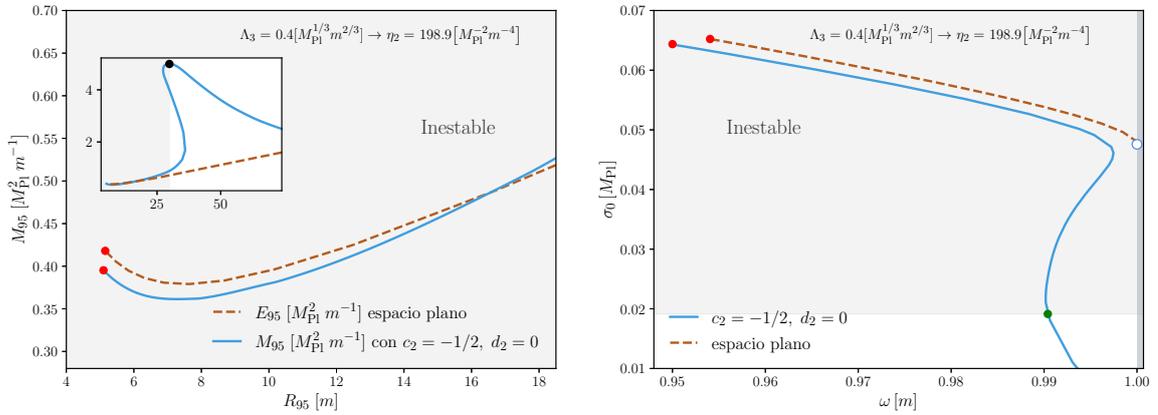


Figura 3.23: En ambas figuras se intenta mostrar que para  $\Lambda_3 < 1$  parte del perfil obtenido corresponderá a los resultados obtenidos en espacio plano. Mientras más pequeño sea  $\Lambda_3$  mayor parte del perfil podrá ser tratado como su equivalente en espacio plano. Recuadro izquierdo: se compara la relación entre  $M_{95}$  vs  $R_{95}$  con su equivalente  $E_{95}$  vs  $R_{95}$  en espacio plano. Recuadro izquierdo: se realiza una comparación similar, pero esta vez  $\sigma_0$  vs  $\omega$ , los resultados para el espacio plano son los presentados en Fig. 3.8. La región gris corresponde a la región inestable y los puntos rojos a la configuración límite a partir de la cual  $\sigma''$  se indefine.

conllevará a obtener configuraciones muy similares a sus equivalentes en el modelo EKG (línea negra,  $\Lambda_3 = \infty$ ). Una conclusión similar fue expuesta a partir de los resultados mostrados en la Fig 3.14). A la misma vez, si se considerasen amplitudes mucho menor que la masa de Planck, podrían obtenerse en este límite, las mismas configuraciones mediante el sistema Schrödinger-Poisson (región blanca), algo que ya fue abordado en la sección anterior (ver Fig 3.15). De forma general, los resultados muestran que para régimen de valores:  $\Lambda_3 \gtrsim (M_{\text{Pl}} m^2)^{1/3}$  y amplitudes  $\sigma_0$  en la región estable, los comportamientos son similares a los reportados para la familia  $G_4 \sim X$ . Sin embargo, considerar valores menores a la unidad, es decir:  $\Lambda_3 \rightarrow 0$ , conlleva a la aparición de nuevos comportamientos y a una *deformación* en el perfil de configuraciones  $M_{95}$  vs  $R_{95}$ . De la Figura 3.22 se puede apreciar que, luego del punto de máxima masa (puntos negros) comienza a presentarse un cambio de pendiente cada vez más pronunciado. Mientras que los puntos rojos representan la aparición de una divergencia en la segunda derivada. La misma puede tener su causa en

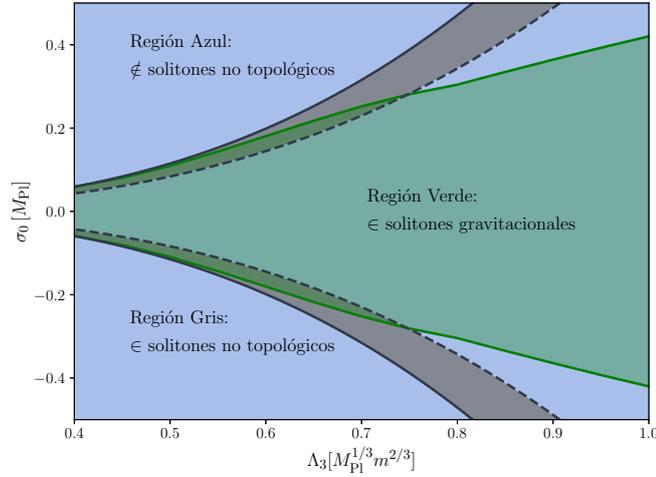


Figura 3.24: Se muestra que para  $\Lambda_3 \rightarrow 0$  es posible recuperar los resultados obtenidos considerando el espacio como plano. La región verde señala el configuraciones dentro del espacio de parámetros donde es posible encontrar solitones gravitacionales, mientras que la gris, corresponde a los resultados mostrados en la Fig. 3.11. Por último la región azul representa la región donde no se encuentran ningún tipo de soluciones.

el modelo escogido, puesto que, como se observa de las Figuras 3.23 y 3.24, en este límite de  $\Lambda_3$ , las soluciones se asemejan a las de espacio plano presentadas en la sección 3.2 para este modelo (ver Figuras 3.8, 3.11). Por tal motivo, es lógico pensar que la naturaleza de esta divergencia sea la misma detallada para este caso. Nótese también que todos estos cambios ocurren en la región inestable (color gris), algo que también estaría en concordancia con los resultados presentados respecto a la estabilidad de este modelo en espacio plano (se concluyó que era inestable). La Figura 3.22 recuadro izquierdo, muestra los respectivos perfiles de densidad y masa versus la amplitud central. Como fue demostrado en [226], el valor de la amplitud  $\sigma_0$  a la cual  $dN/d\sigma_0 = 0$ , delimitará la frontera estable ante perturbaciones (color blanco) y no estable (color gris), siendo este el criterio aplicado en este trabajo. Como se aprecia de la Figura, dicha configuración coincidirá con la masa máxima. Por último, notar que en el caso extremo  $\Lambda_3 \rightarrow 0$  puede llegar a ocurrir que ni en el límite  $\sigma_0 \ll M_{Pl}$  la aproximación EKG o Schrödinger-Poisson es válida.

La Figura 3.11 muestra un resumen de los resultados encontrados. La región verde corresponde a configuraciones solitónicas gravitacionales, mientras que las grises a solitones desacoplados de la gravedad. Nótese que valores de  $\Lambda_3 \rightarrow 0$  solapan ambas regiones, apareciendo así un límite en el cual es posible estudiar estos objetos sin tener en cuenta la gravedad. Aunque, como fue deducido, en ambos casos dichas configuraciones no parecen ser estables. Las regiones azules representan el espacio de parámetros donde no es posible encontrar ningún tipo de solitones no-topológicos.

Con respecto a los resultados mostrados en las Figuras 3.8, y 3.11, es válido aclarar que, para realizar las respectivas comparaciones fue necesario hacer uso de las relaciones

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{m^2 |\eta_i|^{1/(2(i-1))}}, \quad (3.64a)$$

$$\eta_i = -2c_i \Lambda_2^{8-4i} / \Lambda_3^6. \quad (3.64b)$$

### 3.3.2 Fenomenología

En esta sección se presentarán diferentes estudios fenomenológicos que pudieran ser relevantes en el estudio de estos solitones gravitacionales (estrellas). Antes de proceder a mostrar los resultados, argumentaremos de manera rápida algunas ideas que se han de tener presentes respecto a las escalas de energía  $\Lambda_3$  y  $m$ , (ver [197] para más detalles).

Como es usual, en modelos de gravedad modificada, los parámetros libres de la teoría, sufren constricciones en dependencia de la escala a la que se estudien. El modelo beyond Horndeski no es un caso atípico, y debe cumplir ciertas cotas tanto en el infrarrojo (baja energía), como en el ultravioleta (alta energía), dichas cotas vienen impuestas por evidencias observacionales. Una *posible frontera* que brinda una noción referente la escala a la cual se espera que el modelo introduzca modificaciones (y por ende, deberá ser puesto a prueba con los respectivos observables), es cuando la masa de las partículas que media

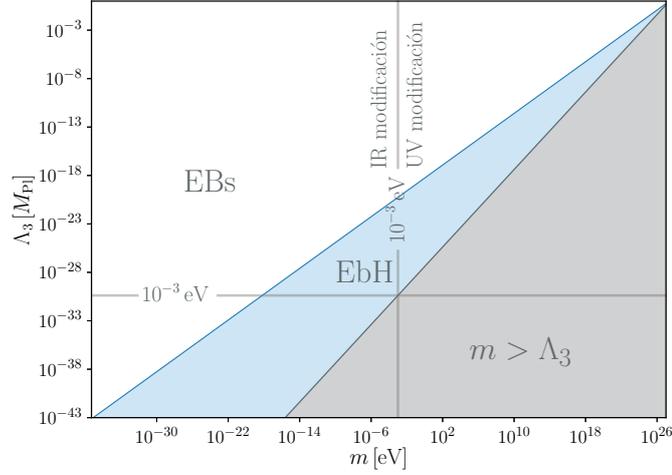


Figura 3.25: Se ilustran diferentes regiones aproximadas dentro del espacio de parámetros. La región blanca señala las configuraciones donde los términos superiores de la serie para  $G_4$  (3.48a) no son relevantes. Configuraciones que se encuentren en las cercanías de la región azul serán las que presentarán una mayor discrepancia con respecto a sus equivalente EBs. La región azul indica la región a la cual podría ser necesario considerar términos superiores de la serie. En la región gris,  $m > \Lambda_3$ , no es posible encontrar configuraciones. Las líneas sólidas horizontal y vertical indican la relación presentada en (3.65).

la fuerza gravitacional (sin tener presente el gravitón) es del orden de  $10^{-3}$  eV. Aunque de manera general dicha *frontera* no tiene que ser estrictamente ese valor, este puede ser útil como una primera aproximación. Se esperará entonces que: masa menores introducirán modificaciones en el infrarrojo (IR), mientras que masas mayores lo harán en el ultravioleta (UV).

Un comentario necesario lo lleva la escala de energía  $\bar{\Lambda}_3$ , la misma como fue presentado, está ligada al valor de  $m$ , y nos da una noción de cuán fuerte o débil es la desviación introducida por los términos de derivadas superiores. Usando el valor fronterizo  $m = 10^{-3}$  eV, tendremos que

$$m \gtrsim \Lambda_3^{3/2} [10^{-3} \text{ eV}] \times 10^{-19} \text{ eV}. \quad (3.65)$$

La Fig 3.25 resume de manera ilustrativa los límites introducidos por los diferentes criterios

comentados anteriormente (líneas sólidas), mientras que las diferentes regiones codifican la influencia de los operadores de orden superior, en la región de parámetros. Es necesario señalar que mientras más nos *adentramos* en la región azul, los operadores relacionados a los términos  $X^i$  con  $i > 2$  son importantes y el modelo usado deja de ser del todo válido. Notar que aunque no se muestra directamente un eje con valores para  $\rho_0$ , las regiones señaladas tienen su influencia implícitamente.

### 3.3.2.1 Compacidad

Durante todo el análisis realizado con anterioridad no fue relevante el valor de la masa del campo escalar  $m$ , aunque, como fue señalado, ciertas cantidades físicas de las configuraciones p.ej. masa y radio, se relacionan con este valor mediante:  $M = \bar{M} M_{\text{Pl}}^2/m$  y  $R_{95} = \bar{R}_{95}/m$  respectivamente. En unidades físicas las mismas se pueden escribir como

$$M = \frac{5.31\bar{M}}{m[\text{eV}]} \times 10^{-12} M_{\odot}, \quad R_{95} = \frac{1.97\bar{R}_{95}}{m[\text{eV}]} \times 10^{-10} \text{ km}. \quad (3.66)$$

Usando estas relaciones se podría en principio, mediante una curva  $\bar{M}_{95}(\bar{R}_{95})$  para una masa  $m$  del campo, definir la masa y radio del objeto. Por ejemplo, de los resultados particulares mostrados en el panel derecho de la Figura 3.20 uno podría *construir* teóricamente, objetos con las características que se desearan. La realidad es un poco diferente, veamos el caso de las configuraciones estables más masivas, como se aprecia en Fig. 3.20, las mismas están en el rango:  $11 \lesssim \bar{M}_{95} \lesssim 20$ ,  $5 \lesssim \bar{R}_{95} \lesssim 10$ . Considerando que la modificación introducida a la gravedad ocurre en el UV,  $m \gtrsim 10^{-3} \text{ eV}$ , tendremos que los objetos resultantes tendrán una masa menor a  $10^{-7} M_{\odot}$ , lo cual los haría (en caso de existir) inaccesibles observacionalmente. Ahora, si por el contrario, es asumido que esta modificación ocurre en el infrarrojo, el objeto resultante puede ser de interés astrofísico, p. ej. para partículas escalares en el rango  $10^{-13} \text{ eV} \lesssim m \lesssim 10^{-10} \text{ eV}$ , se tendrá que

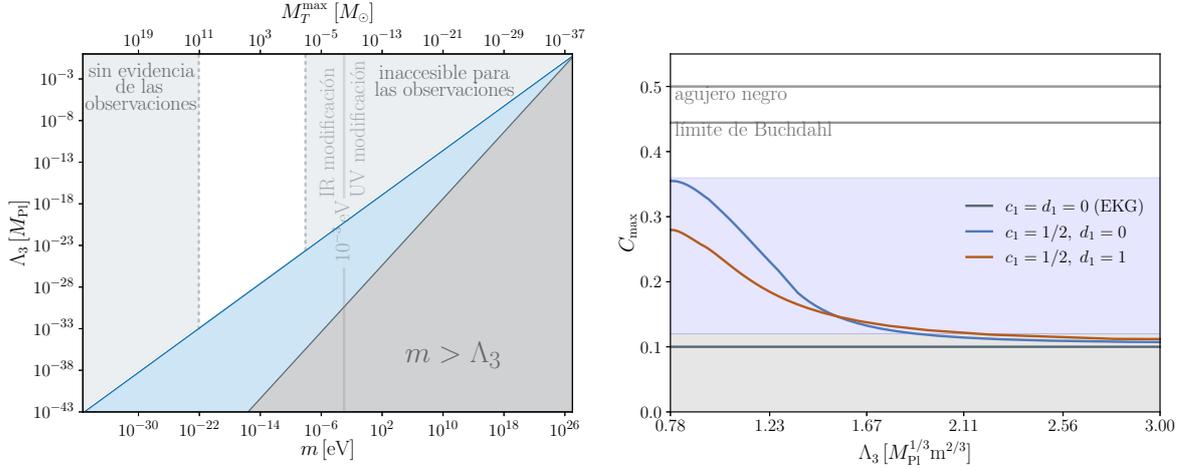


Figura 3.26: Izquierda: se acotan la región blanca (líneas verticales) de la Fig. 3.25 mediante constricciones observacionales sobre la masa de objetos compactos (eje superior). En esta región sabemos que,  $\text{EbH} \sim \text{EBs}$ , por lo que se usa en (3.66) la máxima masa para una EBs,  $\bar{M}_T^{\text{max}} = 15.91$ . Dicha aproximación comienza a fallar cuando  $\Lambda_3 \sim M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  (línea azul). En la región azul,  $\text{EbH} \approx \text{EBs}$ , y la asunción realizada no es válida. La región blanca señalaría el espacio de parámetros en el cual los objetos pudieran ser detectados. Derecha: relación entre la compacidad máxima estable y el parámetro  $\Lambda_3$ . Las líneas grises denotan la compacidad de un agujero negro tipo Schwarzschild,  $C = 1/2$  y el límite de Buchdahl,  $C = 4/9$  [163]. El sombreado azul representa la región donde las EbH serían lo suficiente compactas para que, en un proceso de colisión binaria (de igual masa) se emitiese más radiación gravitacional que su equivalente en agujeros negros (ver Ec. (3.68)). La región sombreada de gris serían los valores para los cuales lo anterior no es cierto.

los objetos que se forman del *agrupamiento* de estas, tendrán un rango de masa entre  $1 M_{\odot} \lesssim M_{95} \lesssim 10^3 M_{\odot}$ . Mientras que para  $m \lesssim 10^{-29}$  eV el resultado sería un objeto con un radio  $R_{95} \gtrsim 10$  Mpc, el cual es el tamaño típico de los clusters de galaxias (ver Figura 3.26 panel izquierdo). Aunque formalmente nada impide postular objetos con esos radios, valores de la masa del orden  $m \sim 10^{-33}$  eV, tienen una motivación más cosmológica que astrofísica (abordan el problema de la constante cosmológica).

Por otro lado, el parámetro  $\Lambda_3$  nos permite caracterizar cuando se ha de tener presente las correcciones introducidas por los operadores de orden superior y cuando la aproximación a EKG es aceptable. En las restantes secciones nos centraremos en la región de valores

de  $\Lambda_3$  donde los términos de orden superior contribuyen y asumiremos valores para  $m$  tales que reproduzcan objetos astrofísicos. El objetivo es encontrar con el análisis de sus propiedades, posibles señales provenientes del propio modelo.

La primera propiedad que se suele estudiar en los objetos estelares es la compacidad, por la notación usada en este capítulo la misma se define como

$$C = \frac{M_{95}}{8\pi M_{\text{Pl}}^2 R_{95}}, \quad (3.67)$$

donde el factor  $8\pi M_{\text{Pl}}^2$  es incluido para obtener las unidades correctas (adimensional). Con esta definición la compacidad de un agujero negro tipo Schwarzschild es  $C = 1/2$ , el límite de Buchdahl igual a  $C = 4/9$  [163] y la compacidad para una estrella de neutrones entra en el rango de  $C \approx 0.1 - 0.2$  (como fue señalado en el capítulo anterior). En el caso de las estrellas de bosones no interactuantes se alcanza  $C \approx 0.1$ , aunque con la inclusión de un término atractivo tipo  $\lambda\phi^4$  en el potencial se llega a  $C \approx 0.158$  [159], mientras que potenciales más complejos pueden llegar hasta  $C \approx 0.35$  [162].

El análisis presentado se centrará solo en los objetos más compactos, esto implicará considerar las configuraciones con valores positivos en las constantes de acoplamiento:  $c_1 = 1/2$ ,  $d_1 = 0, 1/2$  y  $c_i = d_i = 0$  para  $i > 1$ . Puesto que solo nos interesan configuraciones estables, se tendrá que la más compacta vendrá dada por la configuración que delimita las regiones de estabilidad en una curva  $M_{95}(R_{95})$  (p. ej. puntos señalados en la Fig. 3.20).

El panel derecho de la Figura 3.26 nos muestra la relación existente entre la compacidad máxima (estable) y el parámetro  $\Lambda_3$  (en unidades  $M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ ) para los modelos  $c_1 = 0, 1/2$ ,  $d_1 = 0, 1/2$ . Nótese que cada punto en las curvas de la Fig. 3.26 representa la compacidad de las respectivas configuraciones que delimitan la estabilidad en sus curvas  $M_{95}(R_{95})$  construida con el valor de  $\Lambda_3$  respectivo. Como se puede apreciar, el considerar  $c_1 =$

$1/2$ ,  $d_1 = 0$ , permite alcanzar una compacidad del orden de la máxima teórica reportada para estrellas de bosones  $C \approx 0.35$ , esto sin tener que introducir términos extras en el potencial. Se pudiera pensar que valores equivalentes al límite de Buchdahl o incluso al de un agujero negro, pudieran obtenerse considerando términos extras en el potencial, o incluso estudiando el régimen de acoplamiento fuerte (donde la estabilidad no se define de igual forma). Por otro lado, notar que aún, cuando el término beyond nos permite obtener objetos más masivos (ver Fig. 3.20), la compacidad de los mismos es menor mientras mayor sea el acoplamiento (p. ej. a partir de  $\Lambda_3 \lesssim 1.5 M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ ). Lo anterior ocurre puesto que un mayor acoplamiento implicará también objetos más extendidos, haciendo que la relación masa-radio sea menor que su equivalente en Horndeski ( $d_1 = 0$ ). Las regiones sombreadas es un resultado que se argumenta en la próxima sección.

Procedamos ahora a estudiar las configuraciones con características astrofísicas.

### 3.3.2.2 Radiación gravitatoria

Aunque relativamente *nuevas*, las detecciones de ondas gravitatorias proveniente de colisiones de objetos compactos han revolucionado la gravitación y la cosmología en general. Como es probado en [156, 157, 229, 230], colisiones de EBs altamente compactas pueden producir señales particulares de ondas gravitatorias que permitirían distinguirlas de otros objetos compactos como: agujeros negros o estrellas de neutrones. Lo anterior motiva a pensar que dada la gran compacidad que pueden presentar las EbH y su similitud con las EBs, puede resultar de interés el estudio de la energía gravitatoria radiada durante la colisión de estos objetos como un posible observable.

En la presente sección no se muestra el desarrollo formal del proceso de colisión, ni de la emisión dinámica de la radiación gravitatoria de estos objetos solitónicos. El análisis presentado se centra en un modelo simple para estimar la radiación gravitatoria de sistemas

binarios compactos [231]. Este modelo permite a través de la compacidad de las configuraciones, obtener un orden de magnitud para la energía total irradiada por la colisión de solitones de igual masa y compacidad [156]

$$\xi_{rad} \approx 0.48 C M_0, \quad (3.68)$$

donde  $M_0 = M_1 + M_2 = 2M$ , con  $M$  la masa inicial del objeto y  $C$  su compacidad. Es válido aclarar que, aunque este resultado se deriva para un campo escalar mínimamente acoplado con un potencial solitónico [162], las consideraciones en [231] son lo suficientemente genéricas como para que las particularidades del modelo estudiado no afecten el resultado. La ecuación (3.68) es obtenida mediante argumentos de conservación de la energía de un sistema irrotacional, donde dos objetos de densidad constante, con igual masa  $M$  y radio  $R$  se fusionan en un solo objeto de masa aproximadamente igual a  $2M$  con un momento angular nulo y se asume que, durante la colisión, todas las demás formas de radiación, a parte de la gravitatoria, son despreciables (por ejemplo, radiación electromagnética o escalar).

Usando (3.68) como una cota superior de la energía total irradiada durante la colisión de dos solitones gravitacionales, y dado que las colisiones de agujeros negros irradian aproximadamente 5 % de su masa total en ondas gravitatorias.<sup>49</sup> Podría darse el caso en que la colisión binaria de dos solitones pueda emitir más que un sistema de agujeros negros de masa similar, para ello, sería necesario una compacidad  $C \gtrsim 0.12$ . Como se muestra en la Fig. 3.26 (panel derecho), varias configuraciones estables alcanzan una compacidad superior a  $C = 0.12$ , incluso para valores *moderados* de  $\Lambda_3$  con  $c_1 = 1/2, d_1 = 0, 1$ . Por ejemplo, si  $\Lambda_3 \approx 1.26 M_{\text{pl}}^{1/3} m^{2/3}$  tenemos  $C \approx 0.20$ , y la energía total radiada pudiera

<sup>49</sup>Modelos numéricos de la colisión de dos agujeros negros no rotantes con igual masa, predicen que la radiación gravitacional emitida durante el proceso es menor al 4 % de la masa del sistema binario [232]. Algo que fue verificado gracias a la observación GW150914 la cual correspondió a un sistema binario de agujeros negros que emitió en forma de ondas gravitacionales aproximadamente el 5 % de su masa. [99]

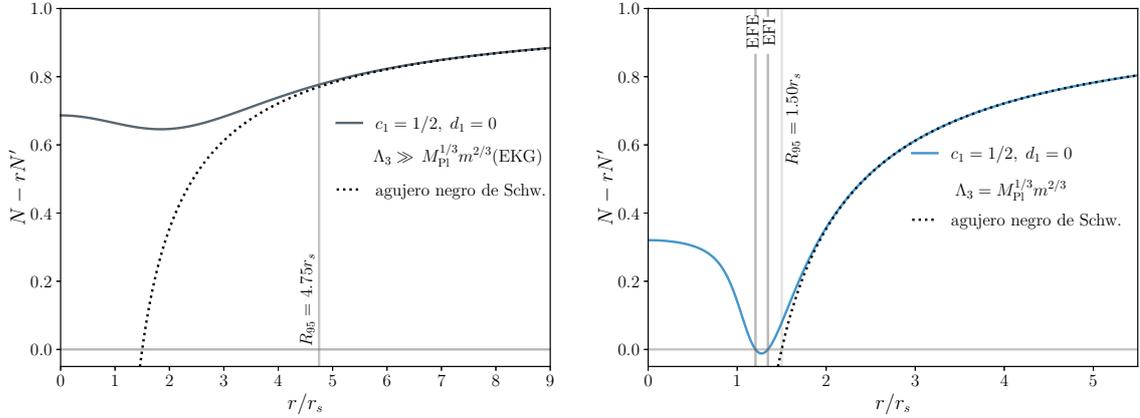


Figura 3.27: Se muestra la relación Ec. (3.70 correspondiente a las configuraciones mostradas en la Fig. 3.28. Como se puede apreciar el caso correspondiente a  $\Lambda_3 \gg M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  (panel izquierdo) no presenta ninguna raíz (no tiene esfera de fotones), mientras que  $\Lambda_3 = M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  presenta dos:  $r_{\text{EF}} = 1.34r_s$  inestable (EFI) y  $r_{\text{EF}} = 1.21r_s$  estable (EFE). A modo de comparación se muestra en ambos casos los resultados para los respectivos agujeros negros de Schwarzschild, así como se señalan los correspondientes  $R_{95}$ .

llegar a ser aproximadamente 10% de la masa total del sistema. Por otro lado estos resultados (Fig. 3.26 panel derecho) muestran configuraciones lo suficientemente compactas como para ser consideradas como objetos exóticos compactos (OEC). Este tipo de objetos han recibido una atención creciente en los últimos años puesto que la radiación gravitacional que pueden llegar a emitir en una colisión entra en el rango de sensibilidad de los observatorios de ondas gravitatorias, y presentan la posibilidad de reproducir colisiones atribuidas a agujeros negros [233] (para una revisión ver [230, 234, 235]).

En resumen, aunque el estudio presentado se basa en un modelo sencillo, y los resultados son cualitativos, es decir, en ordenes de magnitud, los mismos muestran que sería propicio e interesante estudiar con más detalle la radiación gravitatoria proveniente de colisiones entre solitonicos gravitacionales.

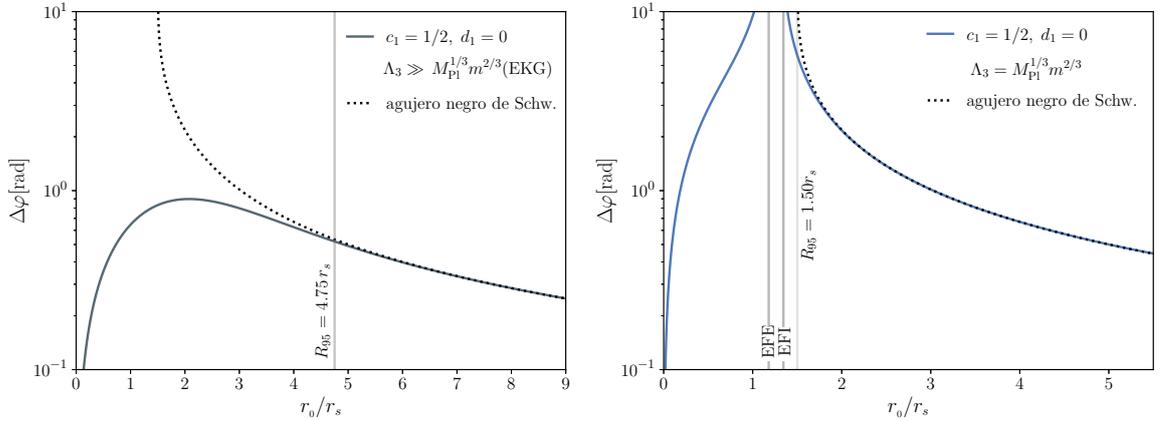


Figura 3.28: Ángulo de deflexión  $\Delta\varphi(r_0)$ , de los rayos de luz como función de la distancia de la aproximación más cercana  $r_0$  para dos EbH en una teoría con  $c_1 = 1/2$ ,  $d_1 = 0$ . Izquierda: configuración más compacta con  $\Lambda_3 \gg M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  (EKG). Derecha: configuración más compacta con  $\Lambda_3 = M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ , las líneas verticales corresponden a las dos esferas de fotones estable (EFE) e inestable (EFI). En ambos casos se ha representado los respectivos  $R_{95}$  e incluido la predicción para un agujero negro de Schwarzschild con la misma masa que las respectivas estrellas:  $M_T = 15.9M_{\text{Pl}}^2/m$  (panel izquierdo),  $M_T = 27.7M_{\text{Pl}}^2/m$  (panel derecho).

### 3.3.2.3 Lentes gravitacionales

Como bien es conocido un rayo de luz sufre una desviación al pasar cerca de un objeto compacto. El valor de ese ángulo de deflexión dependerá de la deformación espacio temporal que produzca dicho objeto. En tal sentido, una posible evidencia observacional de las EbH, pudiera provenir de la desviación que sufriría un rayo de luz al pasar cerca de uno de estos objetos.

Siguiendo la metodología presentada en [236], y corroborando el resultado presentado en [237] se obtiene que para una métrica estática y esféricamente simétrica (3.51) el ángulo de deflexión de los fotones es

$$\Delta\varphi(r_0) = 2 \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{g(r)}{r} \left[ \frac{r^2 N^2(r_0)}{r_0^2 N^2(r)} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} - \pi, \quad (3.69)$$

donde  $r_0$  es la distancia de aproximación más cercana del rayo de luz al centro del objeto compacto. La integral (3.69) se puede resolver analíticamente para casos particulares, por ejemplo para un *espacio-tiempo* plano  $N^2(r) = g^2(r) = 1$ , se tendría que  $\Delta\varphi(r_0) = 0$  sin importar el valor de  $r_0$ , para la métrica de Schwarzschild una solución analítica fue obtenida por Darwin en términos de integrales elípticas [238, 239]. Casos más generales como el acá presentado deben ser abordados mediante una implementación numérica.<sup>50</sup>

La Figura 3.28 muestra los resultados obtenidos para las respectivas configuraciones más compactas correspondiente a dos modelos particulares:

- 1-  $c_1 = 1/2$ ,  $d_1 = 0$ ,  $\Lambda_3 \gg M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  (EKG), con  $\sigma_0 = 0.27M_{\text{Pl}}$ , cuya masa y radio obtenidos son:  $M_T = 15.9M_{\text{Pl}}^2/m$ , y  $R_{95} = 6.01m^{-1} = 4.75r_s$  respectivamente (panel izquierdo)
- 2-  $c_1 = 1/2$ ,  $d_1 = 0$ ,  $\Lambda_3 = M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  con  $\sigma_0 = 0.4M_{\text{Pl}}$ , cuya masa y radios obtenidos son:  $M_T = 27.7M_{\text{Pl}}^2/m$ , y  $R_{95} = 3.30m^{-1} = 1.50r_s$  respectivamente (panel derecho)

donde  $r_s = M/(4\pi M_{\text{Pl}}^2)$  representa el radio de Schwarzschild.

Como se puede apreciar de la Fig. 3.28, el ángulo de deflexión para valores de  $r_0 \gtrsim R_{95}$ , es indistinguible del obtenido para un agujero negro tipo Schwarzschild con la misma masa. Este comportamiento no es sorprendente ya que por construcción, fuera de las EbH, se ha de recuperar la RG (ver Fig. 3.18). Por tal motivo, es de esperar que las discrepancias con respecto a Schwarzschild aparezcan a medida que nos acercamos al borde de la estrella. De la Fig. 3.28 se observa dos escenarios posibles que pueden surgir en dependencia de la compacidad del objeto. El primero de ellos corresponde a compacidades pequeñas (panel izquierdo), para este caso  $\Delta\varphi(r_0)$  crece hasta un máximo dentro de la estrella, para luego decrecer hasta hacerse cero en  $r_0 = 0$ . Este comportamiento es diferente al predicho para su agujero negro equivalente, donde  $\Delta\varphi(r_0)$  diverge cuando  $r_0$  se acerca a la respectiva

<sup>50</sup>Una metodología alternativa a resolver numéricamente la integral es presentada para soluciones numéricas de agujeros negros en [207].

esfera de fotones  $r = \frac{3}{2}r_s$ , no estando definido para trayectorias cuyo  $r_0 < \frac{3}{2}r_s$  (caerían dentro del horizonte de eventos).<sup>51</sup> El segundo escenario correspondería a objetos cuya compacidad los clasifica como OEC, el ejemplo mostrado presenta dos esferas de fotones:  $r_{\text{EF}} = 1.34r_s$  inestable (EFI) y  $r_{\text{EF}} = 1.21r_s$  estable (EFE). Como se puede apreciar, similar a su agujero negro equivalente, el ángulo de deflexión diverge cuando  $r_0$  se acerca a los radios  $r_{\text{EF}}$  correspondientes a las esferas de fotones. Sin embargo, a diferencia del agujero negro y análogo al primer escenario  $\Delta\varphi(r_0)$  crece dentro de la estrella, para luego disminuir hasta anularse.

Finalmente, de la comparación entre ambos paneles se puede apreciar los siguientes comportamientos:

- mientras más compacto es el objeto, mayor será el máximo del ángulo de deflexión (divergiendo en la/las esfera/s de fotones),
- para  $r_0 = R_{95}$ , siempre  $\Delta\varphi(r_0)$  permanecerá por debajo de la predicción dada por los respectivos agujeros negros, por ejemplo para los casos mostrado la diferencia relativa nunca es mayor al 2.10 %.
- contrario a los agujeros negros y estrellas de neutrones, el ángulo de deflexión para las EbH siempre disminuirá hasta cero dentro de la estrella, lo cual puede favorecer la aparición de múltiples imágenes.

Es válido señalar que las restricciones observacionales más fuertes sobre el ángulo de deflexión gravitacional, provienen del experimento Very Long Baseline Interferometry,

<sup>51</sup>Para partículas no masivas se tendrán órbitas circulares para valores del radio  $r_0$  que sean raíces de la ecuación (ver [197] para más detalles)

$$N(r_0) - r_0 N'(r_0) = 0. \quad (3.70)$$

A estas soluciones  $r_{\text{EF}}$  se les conoce como esferas de fotones y estarán relacionadas a la compacidad del objeto estudiado. Para el caso de las EbH, estas pueden llegar a presentar hasta dos esferas de fotones (los agujeros negros solo presentan una puesto que no son regulares). La estabilidad de las mismas vendrá dada por la signatura de la derivada de (3.70), evaluada en las soluciones  $r_{\text{EF}}$ . Si esta derivada es positiva (negativa) se considerará inestable (estable), ver Figura 3.27.

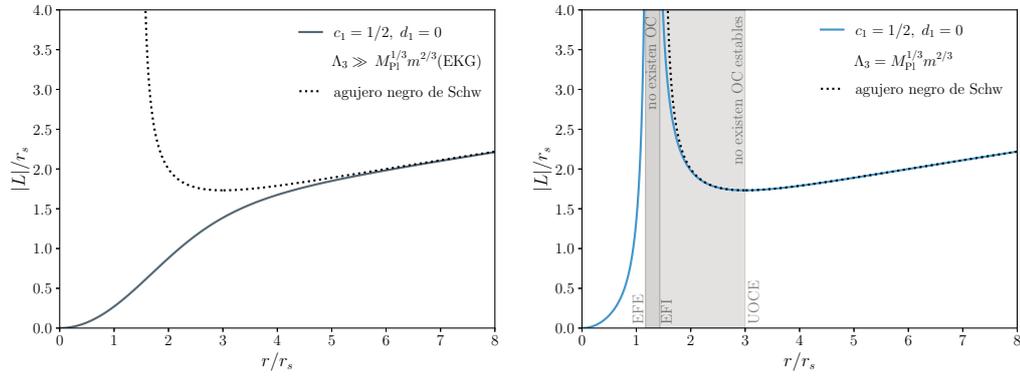


Figura 3.29: Órbitas circulares (OC) correspondiente a partículas de prueba masivas que siguen la geodésica determinada por dos EbH. Izquierda: se consideró una estrella con  $\Lambda_3 \gg M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ , y como se aprecia los resultados son equivalentes a los conocidos para EBs. Derecha: se consideró una estrella en la región  $\Lambda_3 \lesssim M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ , apareciendo que, similar a los agujeros negro de Schwarzschild se presentará una UOCE en  $r = 3r_{\text{schw}}$ , la que delimita la región de OC estables (sombreado blanco) y las inestables (sombreado gris claro), pero a diferencia de este, también puede existir una región sin OC estables (sombreado gris oscuro), la cual está delimitada por dos esferas de fotones obtenidas en las Figs. 3.27, 3.28: esfera de fotones inestable (EFI) y esfera de fotones estable (EFE). Notar que radios menores a EFE también permiten órbitas estables. A modo de comparación, se incluye el perfil de un agujero negro de Schwarzschild de la misma masa.

el cual estudia las ondas de radio que pasan cerca del Sol, los resultados reportados muestran una incertidumbre de aproximadamente 0.04 % [240]. Sin embargo, para objetos más distantes, las mediciones de este ángulo se vuelven menos precisas y la precisión actual no sería suficiente para diferenciar (con una medición directa) si el objeto compacto es un solitón gravitacional o un agujero negro tipo Schwarzschild, aún teniendo *acceso* a fuentes con una distancia de aproximación  $r_0$  dentro de la región donde la desviación es mayor. Nuestra expectativa es que estudios adicionales y la mejora paulatina de la estadística, permitan una reducción del orden de error, haciendo viable el análisis aquí presentado.

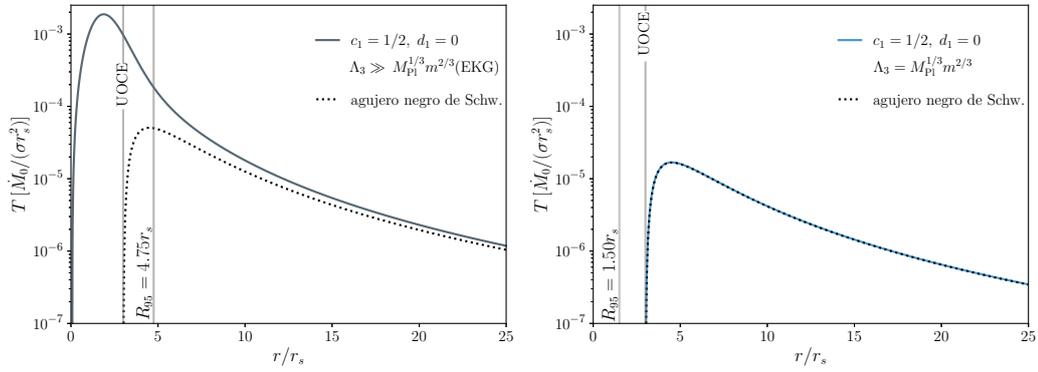


Figura 3.30: Se muestra la temperatura radial normalizada para las configuraciones usadas en las Figuras 3.28, 3.27 y 3.29. Como se puede apreciar valores grandes de  $\Lambda_3$  (pequeñas compacidades) permiten configuraciones para el disco que pueden extenderse hasta el centro del objeto, lo que lleva a una región interna que es muy diferente del caso de un agujero negro tipo Schwarzschild con un borde interno en  $r_{\text{UOCE}} = 3r_s$  (panel izquierdo). Esta diferencia desaparece a medida que consideramos EbH con mayor una compacidad disminuimos (panel derecho). Las líneas verticales son introducidas a modo de referencia y corresponden a los respectivos  $R_{95}$ , así como a la ubicación de las UOCE que aparece en el caso de  $\Lambda_3 = M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  y los agujeros negros representados.

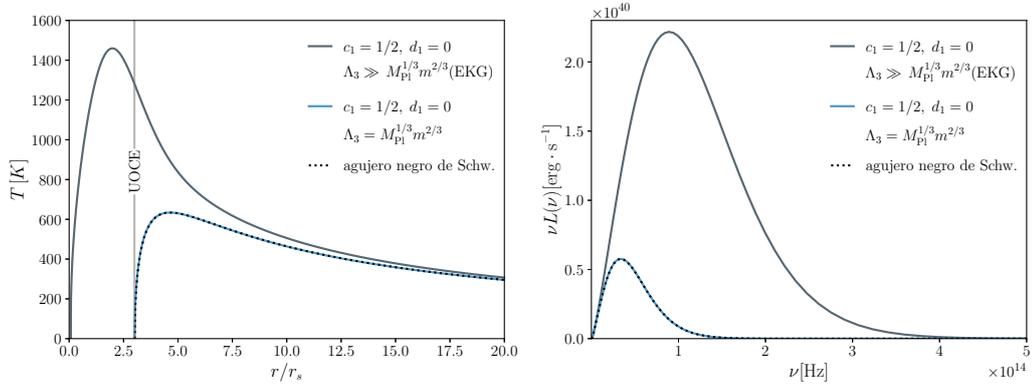


Figura 3.31: Se muestra la distribución de temperatura radial del disco  $T$ , y su espectro de emisión  $\nu L(\nu)$ , en unidades físicas para tres configuraciones de la misma masa total  $M = 3 \times 10^9 M_\odot$  que aparecen en modelos con: i.  $\Lambda_3 \gg M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  y  $m = 2.82 \times 10^{-20}$  eV, ii.  $\Lambda_3 = M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  y  $m = 4.89 \times 10^{-20}$  eV, iii. y un agujero negro de Schwarzschild. Como se puede apreciar del recuadro izquierdo considerar un aumento en las compacidades conllevan a que el espectro de emisión de una EbH sea indistinguible al de un agujero negro con la misma masa.

### 3.3.2.4 Disco delgado de acreción

Otra prueba observacional de la que pudiera surgir alguna evidencia que nos permita diferenciar las EbH, de agujeros negros o estrellas de neutrones, es el estudio del espectro de potencia emitido por un disco de acreción que rodea la vecindad de la configuración. Por simplicidad se asume el modelo de disco de acreción delgado presentado en [241–243].<sup>52</sup> La metodología desarrollada en esta sección es la aplicada en las referencias [142, 245–248], la cual describimos brevemente a continuación.

El modelo de disco de acreción delgado supone que el radio del disco es mucho mayor que su espesor, y que las partículas se encuentran moviéndose siguiendo órbitas circulares estables, bajo estas suposiciones y producto de la pérdida de momento angular, las partículas caen muy lentamente en espiral hacia el objeto estático, esféricamente simétrico. La descripción de estas partículas de pruebas se hace mediante las cantidades: velocidad angular  $\Omega$ , energía  $E$  y momento angular  $L$ , por unidad de masa definidas en función de la métrica como<sup>53</sup>

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{-\partial_r g_{t\varphi} \pm \sqrt{(\partial_r g_{t\varphi})^2 - \partial_r g_{tt} \partial_r g_{\varphi\varphi}}}{\partial_r g_{\varphi\varphi}} = \pm m \frac{\sqrt{\bar{r} N N'}}{\bar{r}}, \quad (3.71a)$$

$$E = \frac{-g_{tt} - g_{t\varphi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2\Omega g_{t\varphi} - \Omega^2 g_{\varphi\varphi}}} = \frac{N^2}{\sqrt{N(N - \bar{r}N')}}}, \quad (3.71b)$$

$$L = \frac{g_{t\varphi} + g_{\varphi\varphi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2\Omega g_{t\varphi} - \Omega^2 g_{\varphi\varphi}}} = \frac{1}{m} \frac{\bar{r}^2 \bar{\Omega}}{\sqrt{N(N - \bar{r}N')}}}, \quad (3.71c)$$

donde la prima indica que se deriva respecto a la variable  $\bar{r}$  definida en (3.55) y  $g_{tt}$ ,  $g_{t\varphi}$ ,  $g_{\varphi\varphi}$  son componentes de la métrica Ec. (3.51):  $g_{tt} = -N^2(r)$ ,  $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$  y  $g_{ti} = g_{\varphi i} = 0$ , con  $\theta = \pi/2$  puesto que consideramos que las partículas se mueven en el plano ecuatorial. Notar que debido a la simetría del objeto, las ecuaciones finales solo dependen de  $g_{tt}$  y

<sup>52</sup>Modelos un más generales de discos de acreción se pueden encontrar en [244]

<sup>53</sup>Notar que las cantidades físicas  $E$  y  $L$  están normalizadas en términos de la masa  $m_t$ , correspondiente a la partícula de prueba.

están escritas en términos de las variables adimensionales (3.55).

Siguiendo los mismos argumentos presentados en [242, 246–248] se tendrá que el flujo electromagnético por unidad de área generado por un disco de este tipo que gira alrededor de un objeto central viene dada por

$$F(R) = -\frac{\dot{M}_0}{4\pi\sqrt{g^{(3)}}} \frac{\partial_r \Omega}{(E - \Omega L)^2} \int_{r_i}^r (E - \Omega L) \partial_r L dr, \quad (3.72)$$

donde  $g^{(3)} = -N^2 g^2 r^2$  es el determinante de la métrica inducida en el plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$ . Los parámetros observacionales  $\dot{M}_0$  y  $r_i$  representan la razón de acreción del disco y su radio interior respectivamente. El considerar un disco en un estado estable conlleva a que  $\dot{M}_0$  sea constante en el tiempo e independiente de la coordenada radial. En cuanto al radio interior  $r_i$  su estimación es obtenida mediante argumentos teóricos, por ejemplo para agujeros negros tipo Schwarzschild este valor se suele tomar como la última órbita circular estable (UOCE),  $r_i = r_{\text{UOCE}} = 3r_s$ , mientras que para EBs la elección usual es  $r_i = 0$  (como se aprecia en la Figura 3.29 todas las órbitas son estables). Para el caso de las EbH, el valor de  $r_i$  dependerá de la configuración que se estudie, puesto que, como ha sido argumentado para  $\Lambda_3 \gg M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ , estas pueden llegar a ser muy similares a las EBs, sin embargo, configuraciones con  $\Lambda_3 \lesssim M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  presentan notables diferencias, la cuales se ven reflejadas en la compacidad (ver Fig. 3.26). En ese sentido, y como se puede apreciar en la Figura 3.29 existirán estrellas lo suficientemente compactas,  $\Lambda_3 \lesssim M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ , para presentar una UOCE. Notar que a diferencia de los agujeros negros tipo Schwarzschild, las EbH podrán volver a tener órbitas estables en regiones internas a estas, (recordar que no presentan horizonte de eventos)<sup>54</sup>

<sup>54</sup>Para partículas masivas se tendrá órbitas circulares para valores del radio  $r_0$  tales que (ver [197] para más detalles)

$$\frac{L^2}{r_0} N(r_0^2) - \left[ \frac{L^2}{r_0^2} + 1 \right] r_0 N'(r_0) = 0. \quad (3.73)$$

Despejando  $L$  se llega a  $|L| = \sqrt{\frac{r_0^3 N'}{N - r_0 N'}}$ , existiendo órbitas circulares para radios  $r_0$  dentro del dominio

Finalmente, asumiendo que el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico, se puede hacer uso de la ecuación (3.72) para definir la distribución de temperatura radial  $T$  del disco, para ello se usa la ley de Stefan-Boltzmann:  $F = \sigma T^4$  ( $\sigma = 5.67 \times 10^{-5}$  erg/s cm<sup>2</sup> K<sup>4</sup>). Este último resultado, junto con la suposición de que el espectro de emisión del disco es tipo cuerpo negro, nos permite obtener la expresión para la luminosidad en un rango de frecuencias  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  [247]

$$L(\nu) = \frac{16\pi^2 h (\cos i) \nu^3}{c^2} \int_{r_i}^{r_{out}} \frac{N g r}{e^{h\nu/[k_B T(r)]} - 1} dr, \quad (3.74)$$

donde  $i$  es el ángulo de inclinación del disco con respecto al plano de la esfera celeste y  $r_{out}$  es la coordenada radial en el borde exterior del disco. Notar que las unidades físicas fueron restauradas donde  $h = 6.6256 \times 10^{-27}$  erg s,  $k = 1.3805 \times 10^{-16}$  erg/K son la constante de Planck y Boltzmann respectivamente.

La expresión Ec. (3.74), permite calcular el espectro de emisión a partir de las soluciones numéricas de las componentes del tensor métrico  $N$ , y  $g$ , que satisfacen las condiciones de contorno (3.56), (3.58). Para ello es necesario definir un valor para la masa  $m$  del campo, la cual nos permita calcular la velocidad angular, la energía y el momento angular de una partícula masiva de prueba (Ecs. (3.71)). Con estas cantidades y los valores dados para  $r_i$  y  $\dot{M}$ , se computa el flujo electromagnético emitido (3.72), para posteriormente, obtener la temperatura del disco mediante la ley de Stefan-Boltzmann. Una vez que tenemos la temperatura, usando (3.74) con  $r_{out}$  definido, es posible obtener la luminosidad para una frecuencia  $\nu$ . Este último paso se ha de repetir para diferentes valores de  $\nu$  construyéndose así el espectro de emisión del disco.<sup>55</sup>

---

de esta función. Es necesario señalar que estas órbitas serán estables para valores de  $r_0$  tales que la función  $L(r_0)$  sea creciente e inestable para aquellos valores donde decrezca. La Figura 3.29 muestra el resultado obtenido para algunas configuraciones de interés.

<sup>55</sup>Es válido comentar que este procedimiento no tiene en cuenta el corrimiento al rojo que sufren los fotones al viajar de la fuente a la Tierra, en [248] se puede encontrar la corrección que se ha de introducir. La razón de no tenerlo en cuenta es debido a que en esta sección no se busca comparar

La Figura 3.30 muestra para las mismas configuraciones usadas en las Figuras 3.28, 3.27 y 3.29, la temperatura normalizada del disco en función de la coordenada radial. Como se aprecia a grandes distancias del centro (en comparación con el radio de la estrella,  $R_{95}$ ) la temperatura no parece depender de la naturaleza del objeto compacto decayendo de forma equivalente a la de un agujero negro de Schwarzschild. Sin embargo para distancias  $r \lesssim R_{95}$  la temperatura si depende en gran medida de las propiedades de la estrella. Por ejemplo la EbH correspondiente al panel izquierdo presenta una gran diferencia en la región interior del disco con respecto a el caso Schwarzschild. Esto está motivado principalmente por el hecho de que las partículas de prueba no pueden orbitar de manera estable un agujero negro de Schwarzschild en radios menores a  $r_{\text{UOCE}} = 3r_s$ , lo que lleva a una región vacía para  $r < r_{\text{UOCE}}$  y por tanto una menor contribución a la temperatura. A medida que consideramos EbH más compactas esta diferencia va desapareciendo puesto que estas estrellas comenzarían a presentar una UOCE. Un ejemplo de esto es la configuración presentada en el panel derecho, para este caso, las dos distribuciones de temperatura son indistinguibles.

En busca de comprender que tan *semejante* puede ser la predicción de una EbH con respecto a la del agujero negro de Schwarzschild, se calculó los respectivos espectros de emisión para un objeto compacto de masa total  $M = 3 \times 10^9 M_{\odot}$ .<sup>56</sup> Durante el cálculo se mantuvieron fijas las propiedades del disco, tasa de acreción  $\dot{M}_0 = 2 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{yr}$ , el radio exterior  $r_{\text{out}} = 100r_s$ <sup>57</sup>, y el ángulo de inclinación  $i = 0$  (nótese que este ángulo solo contribuiría como factor global tipo  $\cos i$  a la expresión de la luminosidad). El radio

---

con espectros de emisión contruidos a partir de evidencia observacional. Solo se desea explorar la posibilidad de que uno de estos objetos pueda reproducir o no, el espectro producido por un agujero negro. En tal sentido bastaría con solo comparar los espectros en el instante que *abandonan* la fuente.

<sup>56</sup>Es válido comentar que la masa del campo escalar se define de manera particular para cada configuración:  $m = 2.82 \times 10^{-20}$  eV ( $m = 4.89 \times 10^{-20}$  eV) para  $\Lambda_3 \gg M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$  ( $\Lambda_3 = M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ ).

<sup>57</sup>Los resultados obtenidos no son muy sensibles a esta elección de  $r_{\text{out}}$  una vez que este se elige mucho más grande que el del objeto,  $r_{\text{out}} \gg R_{95}$ ; esto se debe a que la luminosidad está dominada por la región interior del disco.

interior del disco (y debido a lo comentado con anterioridad) se tomó como  $r_i = r_{\text{UOCE}}$ , para los casos en que la EbH no presentara UOCE, se tiene que  $r_i = 0$ . La razón por la que hemos elegido estos valores es porque caracterizan en orden de magnitud candidatos a agujeros negros supermasivos [249,250] (p. ej. Sagittarius A\* [251], en el centro de nuestra galaxia, M87 [252] en el centro de una galaxia elíptica gigante). Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 3.31, donde a modo de comparación, se incluyó la temperatura y los espectros de emisión correspondientes a un agujero negro de Schwarzschild de la misma masa. Como se puede apreciar la emisión aumenta con el valor de  $\Lambda_3$  (menor compacidad), esto es debido a las contribuciones a la temperatura provenientes de las regiones interiores del disco, las mismas como se comentó están ausentes en objetos que presentan una UOCE. Como era de esperar, considerar estrellas con compacidad relativamente grande (presentan una UOCE) conllevan a que el espectro sea indistinguible con respecto al de un agujero negro (p. ej. la configuración de la Fig. 3.31 con  $\Lambda_3 = M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ ).

### 3.3.3 Conclusiones Parciales

En esta sección se estudió la influencia de los términos lineales y no lineales provenientes de la gravedad GLPV, en la formación de los llamados solitones no topológicos gravitacionales. En particular, se consideró modelos que cumplen con la restricción observacional  $c_g = c$  (ec. 3.4), y cuyas densidades lagrangianas  $L_3$  y  $L_5$  son tomadas como cero, mientras que  $L_2$  y  $L_4$  son definidas en ec. 3.47. A diferencia de la primera parte del Capítulo, en esta segunda si se asumió un acoplamiento no mínimo entre el campo y la métrica.

Primeramente fueron estudiados los diferentes regímenes (escalas de energía) a los cuales los operadores de orden superior se vuelven o no relevantes. Obteniéndose para el caso limítrofe  $\Lambda_3 \gg (2|c_i|M_{\text{Pl}}^{2-i}/m^{2-4i})^{1/3i}$  (o lo que es igual  $\Lambda_3 \rightarrow \infty$ ) es posible despreciar todas las contribuciones de los operadores  $c_i, d_i$  con  $i > 0$  y recuperar el comportamiento

gravitatorio dado por la RG. Por otro lado, bajo la suposición de amplitudes  $\sigma_0 \ll M_{\text{Pl}}$ , ya no solo podremos aproximar el modelo mediante EKG, sino también a través del sistema Schrödinger-Poisson (ver Fig. 3.15). Es decir, en dependencia de las escalas de energía  $\Lambda_3$ ,  $m$  y amplitud  $\sigma_0$  que elijamos, las diferentes contribuciones de las potencias mayores en  $X$  tendrán importancia o no, y los resultados pueden ser aproximados a los sistemas comentados.

En la subsección 3.3.1.1 se definió las ecuaciones de estructura para estos objetos, estudiándose su comportamiento en una región cercana al origen, y en el infinito. Posteriormente se validaron los mismos numéricamente, destacándose la relación entre la signatura de las constantes  $c_i$ ,  $d_i$ , y la diferencia relativa al objeto equivalente en EKG dentro del régimen de acoplamiento fuerte: para  $c_i, d_i > 0$ , siempre los perfiles de masa están por encima de sus equivalentes EB, mientras que para  $c_i, d_i < 0$  ocurre lo contrario. Algo similar, pero mucho menos significativo se presenta con los perfiles del campo (ver Fig. 3.20). En esta sección también se estudió la estabilidad radial de estos objetos, llegándose a los mismos criterios presentados para EB típicas.

En busca de explorar la conexión con las soluciones obtenidas para el espacio plano (primera parte del Capítulo), se consideró en la sección 3.3.1.4 el modelo  $G_4 \sim X^2$ , en la región de parámetros donde el acoplamiento es fuerte. Como fue probado valores de  $\Lambda_3 < M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ , conllevan a que el acoplamiento entre el campo y la métrica se rompa a partir de cierta amplitud central. Mientras más fuerte sea el acoplamiento, menor será la correspondiente amplitud central de ruptura. También se estudió la estabilidad de estas configuraciones, concluyéndose (con cautela) que las configuraciones desacopladas son inestables ante perturbaciones radiales. Algo que estaría en concordancia con los resultados obtenidos en la sección 3.2. Es necesario señalar que la ruptura del acoplamiento solo ocurre para algunas ramas del modelo.

En la última parte de la sección se presentaron diferentes análisis cualitativos estudiándose en primera instancia propiedades genéricas (que no dependen de la masa  $m$  del campo) como la compacidad máxima ( $C_{\max}$ )-acoplamiento ( $\Lambda_3$ ). En el primero de los casos se demostró como los objetos construidos pueden presentar una  $G_{\text{eff}}$  con valor diferente al experimental obtenido en la Tierra, lo cual no descarta el modelo, pero permitió validar varios de los comportamientos numéricos encontrados. Del estudio de las compacidades máximas (ver Fig. 3.20), se pudo demostrar que los objetos construidos pueden llegar a alcanzar la máxima compacidad reportada para una EB, sin necesidad de considerar otro término a parte del  $m|\phi|^2$  en el potencial. Es decir, los términos cinéticos no canónicos parecen reproducir resultados equivalentes a considerar auto-interacciones en el potencial. Una posibilidad abierta, sería añadir términos auto-interacción, y estudiar su efecto en las compacidades, pudiéndose llegar a sobrepasar los límites teóricos de Buchdahl,  $C = 4/9$  [163] o el de un agujero negro tipo Schwarzschild,  $C = 1/2$ . Configuraciones con interés astrofísico ( $m < 10^{-3} eV$ ) fueron exploradas; en particular se analizó la radiación gravitacional que puede llegar a emitir una colisión binaria de dos solitones gravitacionales, llegándose a la conclusión (usando un modelo ideal) de que durante este proceso se puede llegar a emitir tanta o más radiación que su equivalente en agujeros negros, algo que convierte a las configuraciones en buenos candidatos a OECs. El estudio sobre la deflexión de la luz al pasar una EbH mostró una relación directa entre la compacidad (o equivalentemente  $\Lambda_3$ ) y el máximo del ángulo de deflexión: mientras más compacta sea la estrella, mayor será el ángulo de deflexión. Destacándose que para las estrellas de mayor compacidad se tendrá que la relación  $r_0$  vs  $\Delta\varphi(r_0)$  predicha, será muy similar a la de un agujero negro de masa equivalente, para valores donde  $r_0 \gtrsim 3/2 r_s$ . Es necesario señalar que para  $r_0 = R_{95}$ , siempre  $\Delta\varphi(r_0)$  permanecerá por debajo de la predicción dada por los respectivos agujeros negros, aunque esta diferencia oscilará alrededor de un 2%. Contrario a los agujeros negros, el ángulo de deflexión debido a las EbH siempre disminuirá hasta

cero dentro de la estrella lo que puede favorecer la aparición de múltiples imágenes. El último análisis fenomenológico correspondió al espectro de emisión proveniente de un disco delgado de materia que se encuentre afectada por una de estas estrellas. Los resultados mostraron que EbH con alta compacidad presentaría UOCE y el espectro predicho sería muy similar al de un agujero negro de Schwarzschild con igual masa. Mientras que discos afectados por EbH de menor compacidad emitirían con mayor intensidad y en un rango de frecuencias mayor.

A modo de resumen, en esta sección se probó la posibilidad de construir en la gravedad (beyond) Horndeski solitones no topológicos que en el límite de acoplamiento fuerte pueden espontáneamente desacoplarse de la métrica. Debido a su dependencia con la constante de acoplamiento  $\Lambda_3$ , en ciertas regiones las configuraciones obtenidas no presentan una gran diferencia con respecto a las EB típicas, siendo necesario explorar posibles firmas en el régimen de acoplamiento fuerte. En este régimen las EbH tienen predicciones muy similares a la de un agujero negro de Schwarzschild con la misma masa, con ciertas particularidades provenientes de la regularidad en el origen que presentan las mismas y conllevan a un comportamiento particular en regiones interiores a estas.

# CONCLUSIONES

Los estudios presentados exploraron modelos gravitatorios diferentes a la RG desde el punto de vista de los objetos compactos. Como fue argumentado en la sección 1.3, estos han ido ganando notoriedad en los últimos años dada la estrecha relación entre el modelo gravitatorio de fondo y varias de sus propiedades. Aunque es cierto que la mayoría de la evidencia observacional favorece a la RG, el análisis de sus alternativas es necesario, puesto que podría permitirnos comprender, o explicar, las tensiones actuales y allanar así el camino para la construcción de un modelo concordante con toda la evolución del Universo. En ese sentido los objetos compactos serían *laboratorios* ideales.

En una primera parte se consideró un escenario donde se incluía tanto la MO, como una descripción alternativa de la gravedad dada por:  $f(R) = R + \alpha R^2$  (R-cuadrada). Construyéndose en este marco, objetos teóricos compactos, a los cuales se les llamó EOF, y cuyos constituyentes eran partículas fermiónicas oscuras auto-interactuantes en el límite degenerado. A modo de comparación, y en busca de encontrar posibles diferencias o similitudes, también fueron investigadas estas EOF en el contexto de la RG, demostrándose la existencia teórica de EOF más compactas que las EB típicas, abriendo la posibilidad (en dependencia de la elección de la masa del fermión oscuro) de ser consideradas imitadores de EB o incluso de agujeros negros. Algo que sería interesante explorar en futuros trabajos mediante un estudio fenomenológico. Por otro lado, en la gravedad R-cuadrada

se encontró una relación entre la masa de las EOF, y el término cuadrático: cuanto mayor fue el valor de  $\bar{\alpha}$ , una menor masa máxima era obtenida para esa familia de configuraciones. Esta reducción en la masa conllevó a EOF menos compactas en comparación con su contraparte en RG. Por último, fue demostrada la imposibilidad de definir propiedades de la MO propuesta, o incluso, determinar el modelo gravitatorio de fondo, a través de (solo) el estudio de efectos relacionados con la masa, radio y compacticidad de estas estrellas. Lo anterior es debido a la degeneración que presenta la constante de acoplamiento  $y$  con el parámetro  $\alpha$ . Aunque esta degeneración fue demostrada para un modelo de gravedad R-cuadrada, es muy probable que la misma se mantenga para cualquier otro modelo  $f(R)$  arbitrario que tenga uno o más parámetros libres, algo que se investigará en futuros proyectos usando modelos  $f(R)$  más atractivos a nivel cosmológico. Por otro lado, un proyecto en desarrollo es intentar utilizar los datos observacionales de las velocidades de dispersión existentes para galaxias enanas esferoidales, para acotar los parámetros libres presentados.

En una segunda parte se exploró una familia de modelos *viabiles* correspondientes a la gravedad de beyond Horndeski (3.47). Estudiándose en primera instancia la existencia de solitones no topológicos en un espacio-tiempo plano. Los resultados mostrados prueban que las no linealidades introducidas por los términos cinéticos no canónicos de  $L_4$  (con y sin  $F_4$ ), permiten la formación de tales objetos. En particular, se encontró dos familias de soluciones  $\sigma'_0 = 0$ , y  $\sigma'_0 \neq 0$ , la primera de estas (como fue probado) se conecta en cierto límite con los resultados obtenidos para un espacio tiempo curvo. Diferentes criterios de estabilidad fueron explorados, destacándose la existencia de un límite definido por la configuración a partir de la cual, las soluciones dejan de ser tipo  $C^2$ . Un aspecto curioso que presentaron estos objetos es la existencia de ciertas degeneraciones entre sus parámetros libres p. ej.  $\sigma_0$  y  $\eta_i$ , la cual es removida una vez que se considera un acoplamiento no mínimo entre el campo y la gravedad. Este tipo de configuraciones son exploradas a partir

de la sección 3.3 encontrándose para el caso límite,  $\Lambda_3 \rightarrow \infty$  que es posible despreciar todas las contribuciones de los operadores  $c_i, d_i$  con  $i > 0$  recuperándose la RG. También bajo la suposición de amplitudes  $\sigma_0 \ll M_{\text{Pl}}$  y valores de  $\Lambda_3 \gg (2|c_i|M_{\text{Pl}}^{2-i}/m^{2-4i})^{1/3i}$  las configuraciones pueden ser tratadas mediante el sistema Schrödinger-Poisson. Es decir, en dependencia de las escalas de energía  $\Lambda_3, m$  y la amplitud  $\sigma_0$  que elijamos, las diferentes contribuciones de los operadores serán importantes o no, y los resultados pueden ser aproximados a los sistemas comentados. Por otro lado, para el régimen de campo fuerte  $\Lambda_3 \lesssim M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ , se encontró una relación lineal entre la signatura de las constantes  $c_i, d_i$ , y la diferencia relativa con la masa del objeto equivalente en EKG. Para  $c_i, d_i > 0$ , las masas siempre se encontrarán por encima de las equivalentes EBs, mientras que para  $c_i, d_i < 0$  ocurre lo contrario. En la parte final de la sección se estudiaron cualitativamente en el régimen de campo fuerte estos objetos. Del estudio de las máximas compacidades estables, se pudo demostrar que las EbH en el régimen de campo fuerte, son más compactas que las EB típicas, pudiendo llegar a emitir durante una colisión binaria tanta, o más energía gravitatoria que sus equivalentes agujeros negros, según el modelo ideal presentado en la sección 3.3.2.2. Configuraciones con interés astrofísico ( $m < 10^{-3}eV$ ) fueron estudiadas en el contexto de las EbH, estudiándose el efecto gravitatorio que estas producirían sobre partículas con y sin masa. Como fue demostrado en las secciones 3.3.2.3 y 3.3.2.4 estrellas que presenten una alta compacidad ( $\Lambda_3 \lesssim M_{\text{Pl}}^{1/3} m^{2/3}$ ) exhiben predicciones para  $\nu L(\nu)$  y  $\Delta\varphi(r_0)$  similares a las de un agujero negro tipo Schwarzschild con similar masa, aunque a diferencia de estos una EbH permite que las partículas crucen hacia su interior (no tiene horizonte).

Aunque bien es cierto que considerar un modelo gravitatorio diferente si afecta las características de las estrellas, posibles discrepancias con las predicciones de RG no parecen estar al alcance de las observaciones actuales. Es importante señalar que el presentar ambos modelos compacidades mayores a las equivalentes en la RG, una colisión de estos si

podiera ser detectada en la actualidad, de ahí que un estudio dinámico de las colisiones pudiera ser significativo. Por otro lado, para el caso beyond Horndeski se encontró en el régimen de campo fuerte la existencia teórica de objetos no acoplados al espacio-tiempo. Futuros trabajos donde se aborden estos objetos pudieran resultar interesantes.

# FUENTES CONSULTADAS

- [1] V. Faraoni and S. Capozziello, *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Springer, Dordrecht, 2011.
- [2] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, “Modified Gravity and Cosmology,” *Phys. Rept.* **513** (2012) 1–189, [arXiv:1106.2476](https://arxiv.org/abs/1106.2476) [astro-ph.CO].
- [3] A. Joyce, B. Jain, J. Khoury, and M. Trodden, “Beyond the Cosmological Standard Model,” *Phys. Rept.* **568** (2015) 1–98, [arXiv:1407.0059](https://arxiv.org/abs/1407.0059) [astro-ph.CO].
- [4] J. M. Ezquiaga and M. Zumalacárregui, “Dark Energy in light of Multi-Messenger Gravitational-Wave astronomy,” *Front. Astron. Space Sci.* **5** (2018) 44, [arXiv:1807.09241](https://arxiv.org/abs/1807.09241) [astro-ph.CO].
- [5] “The albert einstein archives.” <http://www.albert-einstein.org/index.html> .
- [6] G. M. Clemence, “The relativity effect in planetary motions,” *Rev. Mod. Phys.* **19** (Oct, 1947) 361–364. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.19.361>.
- [7] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, “A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* **220** (Jan., 1920) 291–333.

- [8] R. V. Pound and G. A. Rebka, “Gravitational red-shift in nuclear resonance,” *Phys. Rev. Lett.* **3** (Nov, 1959) 439–441.  
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.3.439>.
- [9] **GRAVITY** Collaboration, A. Amorim *et al.*, “Test of the Einstein Equivalence Principle near the Galactic Center Supermassive Black Hole,” *Phys. Rev. Lett.* **122** no.~10, (2019) 101102, [arXiv:1902.04193](https://arxiv.org/abs/1902.04193) [astro-ph.GA].
- [10] T. E. Collett, L. J. Oldham, R. J. Smith, M. W. Auger, K. B. Westfall, D. Bacon, R. C. Nichol, K. L. Masters, K. Koyama, and R. van den Bosch, “A precise extragalactic test of General Relativity,” *Science* **360** (2018) 1342, [arXiv:1806.08300](https://arxiv.org/abs/1806.08300) [astro-ph.CO].
- [11] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “Tests of General Relativity with GW170817,” *Phys. Rev. Lett.* **123** no.~1, (2019) 011102, [arXiv:1811.00364](https://arxiv.org/abs/1811.00364) [gr-qc].
- [12] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. 1993.
- [13] C. M. Will, “The Confrontation between general relativity and experiment,” *Living Rev. Rel.* **9** (2006) 3, [arXiv:gr-qc/0510072](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0510072).
- [14] E. Berti *et al.*, “Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations,” *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) 243001, [arXiv:1501.07274](https://arxiv.org/abs/1501.07274) [gr-qc].
- [15] T. Baker, D. Psaltis, and C. Skordis, “Linking Tests of Gravity On All Scales: from the Strong-Field Regime to Cosmology,” *Astrophys. J.* **802** (2015) 63, [arXiv:1412.3455](https://arxiv.org/abs/1412.3455) [astro-ph.CO].
- [16] M. Ishak, “Testing General Relativity in Cosmology,” *Living Rev. Rel.* **22** no.~1, (2019) 1, [arXiv:1806.10122](https://arxiv.org/abs/1806.10122) [astro-ph.CO].

- 
- [17] D. N. Spergel, “The dark side of cosmology: Dark matter and dark energy,” *Science* **347** (2015) 1100–1102.
- [18] M. A. Deliyergiyev, “Recent Progress in Search for Dark Sector Signatures,” *Open Phys.* **14** no.~1, (2016) 281–303, [arXiv:1510.06927 \[hep-ph\]](#).
- [19] E. Abdalla and A. Marins, “The Dark Sector Cosmology,” *Int. J. Mod. Phys. D* **29** no.~14, (2020) 2030014, [arXiv:2010.08528 \[gr-qc\]](#).
- [20] K. Arun, S. B. Gudennavar, and C. Sivaram, “Dark matter, dark energy, and alternate models: A review,” *Advances in Space Research* **60** no.~1, (2017) 166–186, [arXiv:1704.06155 \[physics.gen-ph\]](#).
- [21] P. O. Hess, “Alternatives to Einstein’s General Relativity Theory,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **114** (2020) 103809.
- [22] V. H. Satheesh Kumar and P. K. Suresh, “Understanding gravity: Some extra dimensional perspectives,” *ISRN Astron. Astrophys.* **2011** (2011) 131473, [arXiv:gr-qc/0605152](#).
- [23] Y.-X. Liu, *Introduction to Extra Dimensions and Thick Braneworlds*, ch.~Chapter 8, pp.~211–275.
- [24] G. Narain, J. Schaffner-Bielich, and I. N. Mishustin, “Compact stars made of fermionic dark matter,” *Phys. Rev. D* **74** (2006) 063003, [arXiv:astro-ph/0605724](#).
- [25] “Ecuaciones usadas durante la tesis.”  
[https://github.com/Mandy8808/thesis\\_equations](https://github.com/Mandy8808/thesis_equations).
- [26] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 7, 2019.
- [27] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984.

- [28] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [29] J. B. Hartle, *Gravity : an introduction to Einstein's general relativity*. 2003.
- [30] L. Keltner, *UV Properties of Galileons*. PhD dissertation, Case Western Reserve University, 2015.
- [31] T. Padmanabhan, *The Grand Cube of Theoretical Physics*, pp. 1–6. Springer International Publishing, Cham, 2015.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-319-13443-7\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-13443-7_1).
- [32] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. i. the canonical theory,” *Phys. Rev.* **160** (1967) 1113–1148.  
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.160.1113>.
- [33] B. DeWitt, “Quantum Gravity Yesterday and Today,” *Gen. Rel. Grav.* **41** (2009) 413–419, [arXiv:0805.2935](https://arxiv.org/abs/0805.2935) [physics.hist-ph]. [Erratum: *Gen.Rel.Grav.* **41**, 671 (2009)].
- [34] C. Kiefer, “Conceptual Problems in Quantum Gravity and Quantum Cosmology,” *ISRN Math. Phys.* **2013** (2013) 509316, [arXiv:1401.3578](https://arxiv.org/abs/1401.3578) [gr-qc].
- [35] A. Ashtekar, “Loop Quantum Cosmology: An Overview,” *Gen. Rel. Grav.* **41** (2009) 707–741, [arXiv:0812.0177](https://arxiv.org/abs/0812.0177) [gr-qc].
- [36] A. Ashtekar and E. Bianchi, “A short review of loop quantum gravity,” *Rept. Prog. Phys.* **84** no. 4, (2021) 042001, [arXiv:2104.04394](https://arxiv.org/abs/2104.04394) [gr-qc].
- [37] I. I. Shapiro, M. E. Ash, R. P. Ingalls, W. B. Smith, D. B. Campbell, R. B. Dyce, R. F. Jurgens, and G. H. Pettengill, “Fourth test of general relativity - new radar result,” *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971) 1132–1135.
- [38] I. Ciufolini and E. C. Pavlis, “A confirmation of the general relativistic prediction

- of the Lense-Thirring effect,” *Nature* **431** (2004) 958–960.
- [39] C. W. F. Everitt *et al.*, “Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity,” *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 221101, [arXiv:1105.3456 \[gr-qc\]](#).
- [40] Y. Zhang *et al.*, “Testing general relativity on cosmological scales at redshift  $z \sim 1.5$  with quasar and CMB lensing,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **501** no. 1, (2021) 1013–1027, [arXiv:2007.12607 \[astro-ph.CO\]](#).
- [41] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, R. Abbott *et al.*, “Tests of General Relativity with Binary Black Holes from the second LIGO-Virgo Gravitational-Wave Transient Catalog,” [arXiv:2010.14529 \[gr-qc\]](#).
- [42] A. G. Riess *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *Astron. J.* **116** (1998) 1009–1038.
- [43] S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae,” *Astrophys. J.* **517** (1999) 565–586.
- [44] S. M. Carroll, “The Cosmological constant,” *Living Rev. Rel.* **4** (2001) 1, [arXiv:astro-ph/0004075](#).
- [45] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, “Dynamics of dark energy,” *Int. J. Mod. Phys. D* **15** (2006) 1753–1936, [arXiv:hep-th/0603057](#).
- [46] V. C. Rubin, N. Thonnard, and W. K. Ford, Jr., “Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 / $R = 4\text{kpc}$ / to UGC 2885 / $R = 122\text{kpc}$ /,” *Astrophys. J.* **238** (1980) 471.
- [47] K. G. Begeman, A. H. Broeils, and R. H. Sanders, “Extended rotation curves of spiral galaxies: Dark haloes and modified dynamics,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **249** (1991) 523.

- [48] E. Corbelli and P. Salucci, “The Extended Rotation Curve and the Dark Matter Halo of M33,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **311** (2000) 441–447, [arXiv:astro-ph/9909252](#).
- [49] S. M. Faber and R. E. Jackson, “Velocity dispersions and mass to light ratios for elliptical galaxies,” *Astrophys. J.* **204** (1976) 668.
- [50] J. Binney and M. Merrifield, *Galactic Astronomy*. 1998.
- [51] X.-P. Wu, T. Chiueh, L.-Z. Fang, and Y.-J. Xue, “A comparison of different cluster mass estimates: consistency or discrepancy ?,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **301** (1998) 861, [arXiv:astro-ph/9808179](#).
- [52] A. Refregier, “Weak gravitational lensing by large scale structure,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **41** (2003) 645–668, [arXiv:astro-ph/0307212](#).
- [53] S. Weinberg, *Cosmology*. 2008.
- [54] D. M. Scolnic *et al.*, “The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample,” *Astrophys. J.* **859** no. 2, (2018) 101, [arXiv:1710.00845 \[astro-ph.CO\]](#).
- [55] **Planck** Collaboration, Y. Akrami *et al.*, “Planck 2018 results. VII. Isotropy and Statistics of the CMB,” *Astron. Astrophys.* **641** (2020) A7, [arXiv:1906.02552 \[astro-ph.CO\]](#).
- [56] **Planck** Collaboration, N. Aghanim *et al.*, “Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck,” *Astron. Astrophys.* **641** (2020) A1, [arXiv:1807.06205 \[astro-ph.CO\]](#).
- [57] **BOSS** Collaboration, S. Alam *et al.*, “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the

- DR12 galaxy sample,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **470** no.~3, (2017) 2617–2652, [arXiv:1607.03155 \[astro-ph.CO\]](#).
- [58] G. Jungman, M. Kamionkowski, and K. Griest, “Supersymmetric dark matter,” *Phys. Rept.* **267** (1996) 195–373, [arXiv:hep-ph/9506380](#).
- [59] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, “Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints,” *Phys. Rept.* **405** (2005) 279–390, [arXiv:hep-ph/0404175](#).
- [60] G. Arcadi, M. Dutra, P. Ghosh, M. Lindner, Y. Mambrini, M. Pierre, S. Profumo, and F. S. Queiroz, “The waning of the WIMP? A review of models, searches, and constraints,” *Eur. Phys. J. C* **78** no.~3, (2018) 203, [arXiv:1703.07364 \[hep-ph\]](#).
- [61] **Particle Data Group** Collaboration, M. Tanabashi *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Phys. Rev. D* **98** no.~3, (2018) 030001.
- [62] **Planck** Collaboration, N. Aghanim *et al.*, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.* **641** (2020) A6, [arXiv:1807.06209 \[astro-ph.CO\]](#).
- [63] A. Padilla, “Lectures on the Cosmological Constant Problem,” [arXiv:1502.05296 \[hep-th\]](#).
- [64] S. Weinberg, “The Cosmological Constant Problem,” *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1–23.
- [65] **LUX** Collaboration, D. S. Akerib *et al.*, “Results from a search for dark matter in the complete LUX exposure,” *Phys. Rev. Lett.* **118** no.~2, (2017) 021303, [arXiv:1608.07648 \[astro-ph.CO\]](#).
- [66] **LUX** Collaboration, D. Woodward, “Latest results of the LUX dark matter experiment,” *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* **50** (2020) 2060002.
- [67] **PandaX-II** Collaboration, X. Cui *et al.*, “Dark Matter Results From 54-Ton-Day

- Exposure of PandaX-II Experiment,” *Phys. Rev. Lett.* **119** no.~18, (2017) 181302, [arXiv:1708.06917 \[astro-ph.CO\]](#).
- [68] **PandaX-II** Collaboration, Q. Wang *et al.*, “Results of dark matter search using the full PandaX-II exposure,” *Chin. Phys. C* **44** no.~12, (2020) 125001, [arXiv:2007.15469 \[astro-ph.CO\]](#).
- [69] **PICO** Collaboration, C. B. Krauss, “PICO-60 Results and PICO-40L Status,” *J. Phys. Conf. Ser.* **1468** no.~1, (2020) 012043.
- [70] **PICO** Collaboration, C. Amole *et al.*, “Dark Matter Search Results from the Complete Exposure of the PICO-60 C<sub>3</sub>F<sub>8</sub> Bubble Chamber,” *Phys. Rev. D* **100** no.~2, (2019) 022001, [arXiv:1902.04031 \[astro-ph.CO\]](#).
- [71] **PICO** Collaboration, C. Amole *et al.*, “Improved dark matter search results from PICO-2L Run 2,” *Phys. Rev. D* **93** no.~6, (2016) 061101, [arXiv:1601.03729 \[astro-ph.CO\]](#).
- [72] R. Bernabei *et al.*, “First model independent results from DAMA/LIBRA-phase2,” *Nucl. Phys. Atom. Energy* **19** no.~4, (2018) 307–325, [arXiv:1805.10486 \[hep-ex\]](#).
- [73] R. Bernabei *et al.*, “Final model independent result of DAMA/LIBRA-phase1,” *Eur. Phys. J. C* **73** (2013) 2648, [arXiv:1308.5109 \[astro-ph.GA\]](#).
- [74] **DAMA, LIBRA** Collaboration, R. Bernabei *et al.*, “New results from DAMA/LIBRA,” *Eur. Phys. J. C* **67** (2010) 39–49, [arXiv:1002.1028 \[astro-ph.GA\]](#).
- [75] **SuperCDMS** Collaboration, R. Agnese *et al.*, “Results from the Super Cryogenic Dark Matter Search Experiment at Soudan,” *Phys. Rev. Lett.* **120** no.~6, (2018) 061802, [arXiv:1708.08869 \[hep-ex\]](#).

- [76] **SuperCDMS** Collaboration, R. Agnese *et al.*, “Low-mass dark matter search with CDMSlite,” *Phys. Rev. D* **97** no.~2, (2018) 022002, [arXiv:1707.01632](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [77] **CRESST** Collaboration, A. H. Abdelhameed *et al.*, “First results from the CRESST-III low-mass dark matter program,” *Phys. Rev. D* **100** no.~10, (2019) 102002, [arXiv:1904.00498](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [78] **CRESST** Collaboration, M. Mancuso *et al.*, “Searches for Light Dark Matter with the CRESST-III Experiment,” *J. Low Temp. Phys.* **199** no.~1-2, (2020) 547–555.
- [79] **CRESST** Collaboration, H. Kluck *et al.*, “Latest results of CRESST-III’s search for sub-GeV/c<sup>2</sup> dark matter,” *J. Phys. Conf. Ser.* **1468** no.~1, (2020) 012038.
- [80] J. H. Davis, “The Past and Future of Light Dark Matter Direct Detection,” *Int. J. Mod. Phys. A* **30** no.~15, (2015) 1530038, [arXiv:1506.03924](#) [[hep-ph](#)].
- [81] **LUX** Collaboration, D. S. Akerib *et al.*, “Constraints on Effective Field Theory Couplings Using 311.2 days of LUX Data,” [arXiv:2102.06998](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [82] **PandaX-II** Collaboration, J. Yang *et al.*, “Constraining self-interacting dark matter with the full dataset of PandaX-II,” [arXiv:2104.14724](#) [[hep-ex](#)].
- [83] **IceCube, PICO** Collaboration, M. G. Aartsen *et al.*, “Velocity Independent Constraints on Spin-Dependent DM-Nucleon Interactions from IceCube and PICO,” *Eur. Phys. J. C* **80** no.~9, (2020) 819, [arXiv:1907.12509](#) [[astro-ph.HE](#)].
- [84] K. A. Olive, “TASI lectures on dark matter,” in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 2002): Particle Physics and Cosmology: The Quest for Physics Beyond the Standard Model(s)*. 1, 2003. [arXiv:astro-ph/0301505](#).

- [85] J. Liu, X. Chen, and X. Ji, “Current status of direct dark matter detection experiments,” *Nature Phys.* **13** no.~3, (2017) 212–216, arXiv:1709.00688 [astro-ph.CO].
- [86] J. Cooley, “Overview of Non-Liquid Noble Direct Detection Dark Matter Experiments,” *Phys. Dark Univ.* **4** (2014) 92–97, arXiv:1410.4960 [astro-ph.IM].
- [87] R. B. Tully and J. R. Fisher, “A New method of determining distances to galaxies,” *Astron. Astrophys.* **54** (1977) 661–673.
- [88] S. S. McGaugh, J. M. Schombert, G. D. Bothun, and W. J. G. de Blok, “The Baryonic Tully-Fisher relation,” *Astrophys. J. Lett.* **533** (2000) L99–L102, arXiv:astro-ph/0003001.
- [89] R. Sancisi, “The Visible matter - Dark matter coupling,” *IAU Symp.* **220** (2004) 233, arXiv:astro-ph/0311348.
- [90] A. G. Riess *et al.*, “Milky Way Cepheid Standards for Measuring Cosmic Distances and Application to Gaia DR2: Implications for the Hubble Constant,” *Astrophys. J.* **861** no.~2, (2018) 126, arXiv:1804.10655 [astro-ph.CO].
- [91] M. J. Reid, D. W. Pesce, and A. G. Riess, “An Improved Distance to NGC 4258 and its Implications for the Hubble Constant,” *Astrophys. J. Lett.* **886** no.~2, (2019) L27, arXiv:1908.05625 [astro-ph.GA].
- [92] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic, “Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond  $\Lambda$ CDM,” *Astrophys. J.* **876** no.~1, (2019) 85, arXiv:1903.07603 [astro-ph.CO].
- [93] E. Di Valentino, O. Mena, S. Pan, L. Visinelli, W. Yang, A. Melchiorri, D. F.

- Mota, A. G. Riess, and J. Silk, “In the Realm of the Hubble tension – a Review of Solutions,” [arXiv:2103.01183](#) [astro-ph.CO].
- [94] M. Ostrogradsky, “Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres,” *Mem. Acad. St. Petersbourg* **6** no. 4, (1850) 385–517.
- [95] A. Pais and G. E. Uhlenbeck, “On Field theories with nonlocalized action,” *Phys. Rev.* **79** (1950) 145–165.
- [96] A. Ganz and K. Noui, “Reconsidering the Ostrogradsky theorem: Higher-derivatives Lagrangians, Ghosts and Degeneracy,” *Class. Quant. Grav.* **38** no.~7, (2021) 075005, [arXiv:2007.01063](#) [hep-th].
- [97] D. Lovelock, “The Einstein tensor and its generalizations,” *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498–501.
- [98] D. Lovelock, “The four-dimensionality of space and the einstein tensor,” *J. Math. Phys.* **13** (1972) 874–876.
- [99] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,” *Phys. Rev. Lett.* **116** no.~6, (2016) 061102, [arXiv:1602.03837](#) [gr-qc].
- [100] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs,” *Phys. Rev. X* **9** no.~3, (2019) 031040, [arXiv:1811.12907](#) [astro-ph.HE].
- [101] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, R. Abbott *et al.*, “GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run,” [arXiv:2010.14527](#) [gr-qc].
- [102] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, R. Abbott *et al.*, “Population Properties

- of Compact Objects from the Second LIGO-Virgo Gravitational-Wave Transient Catalog,” [arXiv:2010.14533](#) [astro-ph.HE].
- [103] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral,” *Phys. Rev. Lett.* **119** no.~16, (2017) 161101, [arXiv:1710.05832](#) [gr-qc].
- [104] **LIGO Scientific, Virgo** Collaboration, R. Abbott *et al.*, “GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of  $150M_{\odot}$ ,” *Phys. Rev. Lett.* **125** no.~10, (2020) 101102, [arXiv:2009.01075](#) [gr-qc].
- [105] **KAGRA** Collaboration, T. Akutsu *et al.*, “Overview of KAGRA : KAGRA science,” [arXiv:2008.02921](#) [gr-qc].
- [106] “Kagra observatory.” <https://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/>.
- [107] “Indian initiative in gravitational wave observations.” <http://www.gw-indigo.org/tiki-index.php>.
- [108] **TianQin** Collaboration, J. Mei *et al.*, “The TianQin project: current progress on science and technology,” [arXiv:2008.10332](#) [gr-qc].
- [109] V. Cardoso and P. Pani, “Testing the nature of dark compact objects: a status report,” *Living Rev. Rel.* **22** no.~1, (2019) 4, [arXiv:1904.05363](#) [gr-qc].
- [110] A. Stepanian, S. Khlghatyan, and V. G. Gurzadyan, “Black hole shadow to probe modified gravity,” *Eur. Phys. J. Plus* **136** no.~1, (2021) 127, [arXiv:2101.08261](#) [gr-qc].
- [111] K. Freese, P. Gondolo, J. Sellwood, and D. Spolyar, “Dark Matter Densities during the Formation of the First Stars and in Dark Stars,” *Astrophys. J.* **693** (2009) 1563–1569, [arXiv:0805.3540](#) [astro-ph].
- [112] V. Berezhinsky, V. Dokuchaev, and Y. N. Eroshenko, “Small-scale clumps of dark

- matter,” *Phys. Usp.* **57** (2014) 1–36, arXiv:1405.2204 [astro-ph.HE].
- [113] K. Freese, T. Rindler-Daller, D. Spolyar, and M. Valluri, “Dark Stars: A Review,” *Rept. Prog. Phys.* **79** no. 6, (2016) 066902, arXiv:1501.02394 [astro-ph.CO].
- [114] S. Capozziello and M. De Laurentis, “Extended Theories of Gravity,” *Phys. Rept.* **509** (2011) 167–321, arXiv:1108.6266 [gr-qc].
- [115] A. Guarnizo, L. Castaneda, and J. M. Tejeiro, “Boundary Term in Metric  $f(R)$  Gravity: Field Equations in the Metric Formalism,” *Gen. Rel. Grav.* **42** (2010) 2713–2728.
- [116] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “ $f(R)$  Theories Of Gravity,” *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 451–497, arXiv:0805.1726 [gr-qc].
- [117] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy,” *eConf C0602061* (2006) 06, arXiv:hep-th/0601213.
- [118] A. De Felice and S. Tsujikawa, “ $f(R)$  theories,” *Living Rev. Rel.* **13** (2010) 3, arXiv:1002.4928 [gr-qc].
- [119] L. G. Jaime, L. Patino, and M. Salgado, “Robust approach to  $f(R)$  gravity,” *Phys. Rev. D* **83** (2011) 024039, arXiv:1006.5747 [gr-qc].
- [120] L. G. Jaime, L. Patino, and M. Salgado, “ $f(R)$  Cosmology revisited,” arXiv:1206.1642 [gr-qc].
- [121] A. A. Starobinsky, “Disappearing cosmological constant in  $f(R)$  gravity,” *JETP Lett.* **86** (2007) 157–163, arXiv:0706.2041 [astro-ph].
- [122] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, “On Massive neutron cores,” *Phys. Rev.* **55** (1939) 374–381.
- [123] D. Mihalas and B. W. Mihalas, *Foundations of radiation hydrodynamics*. 1984.

- [124] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004.
- [125] N. K. Glendenning, *Special and General Relativity. With Applications to White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag New York, 2007.
- [126] B. W. Lee and S. Weinberg, “Cosmological Lower Bound on Heavy Neutrino Masses,” *Phys. Rev. Lett.* **39** (1977) 165–168.
- [127] L. Roszkowski, E. M. Sessolo, and S. Trojanowski, “WIMP dark matter candidates and searches—current status and future prospects,” *Rept. Prog. Phys.* **81** no.~6, (2018) 066201, [arXiv:1707.06277 \[hep-ph\]](#).
- [128] L. Roszkowski, “Axino: New candidate for cold dark matter,” in *4th International Conference on Particle Physics and the Early Universe*, pp. 71–84. 2, 2001. [arXiv:hep-ph/0102325](#).
- [129] S. Dodelson and L. M. Widrow, “Sterile-neutrinos as dark matter,” *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 17–20, [arXiv:hep-ph/9303287](#).
- [130] X.-D. Shi and G. M. Fuller, “A New dark matter candidate: Nonthermal sterile neutrinos,” *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 2832–2835, [arXiv:astro-ph/9810076](#).
- [131] A. Boyarsky, M. Drewes, T. Lasserre, S. Mertens, and O. Ruchayskiy, “Sterile neutrino Dark Matter,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **104** (2019) 1–45, [arXiv:1807.07938 \[hep-ph\]](#).
- [132] H. Davoudiasl, P. B. Denton, and D. A. McGady, “Ultralight Fermionic Dark Matter,” [arXiv:2008.06505 \[hep-ph\]](#).
- [133] **Planck** Collaboration, P. Ade *et al.*, “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.* **594** (2016) A13, [arXiv:1502.01589](#)

- [astro-ph.CO].
- [134] S. Dodelson, A. Melchiorri, and A. Slosar, “Is cosmology compatible with sterile neutrinos?,” *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 041301, [arXiv:astro-ph/0511500](#).
- [135] B. Dasgupta and J. Kopp, “Cosmologically Safe eV-Scale Sterile Neutrinos and Improved Dark Matter Structure,” *Phys. Rev. Lett.* **112** no.~3, (2014) 031803, [arXiv:1310.6337](#) [hep-ph].
- [136] P.-H. Chavanis, “Statistical mechanics of self-gravitating systems in general relativity: I. The quantum Fermi gas,” *Eur. Phys. J. Plus* **135** no.~3, (2020) 290, [arXiv:1908.10806](#) [gr-qc].
- [137] M. R. Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. Schaum Publishing, 1st. ed., 1968.
- [138] D. N. Spergel and P. J. Steinhardt, “Observational evidence for selfinteracting cold dark matter,” *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 3760–3763, [arXiv:astro-ph/9909386](#).
- [139] D. Harvey, R. Massey, T. Kitching, A. Taylor, and E. Tittley, “The non-gravitational interactions of dark matter in colliding galaxy clusters,” *Science* **347** (2015) 1462–1465, [arXiv:1503.07675](#) [astro-ph.CO].
- [140] D. Pugliese, H. Quevedo, J. A. Rueda H., and R. Ruffini, “On charged boson stars,” *Phys. Rev. D* **88** (2013) 024053, [arXiv:1305.4241](#) [astro-ph.HE].
- [141] D. F. Torres, S. Capozziello, and G. Lambiase, “A Supermassive scalar star at the galactic center?,” *Phys. Rev. D* **62** (2000) 104012, [arXiv:astro-ph/0004064](#).
- [142] F. Guzman and J. Rueda-Becerril, “Spherical boson stars as black hole mimickers,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 084023, [arXiv:1009.1250](#) [astro-ph.HE].
- [143] S. L. Liebling and C. Palenzuela, “Dynamical Boson Stars,” *Living Rev. Rel.* **20** no.~1, (2017) 5, [arXiv:1202.5809](#) [gr-qc].

- [144] P. O. Mazur and E. Mottola, “Gravitational vacuum condensate stars,” *Proc. Nat. Acad. Sci.* **101** (2004) 9545–9550, [arXiv:gr-qc/0407075](#).
- [145] J. Barranco and A. Bernal, “Self-gravitating system made of axions,” *Phys. Rev. D* **83** (2011) 043525, [arXiv:1001.1769](#) [astro-ph.CO].
- [146] J. Eby, P. Suranyi, C. Vaz, and L. Wijewardhana, “Axion Stars in the Infrared Limit,” *JHEP* **03** (2015) 080, [arXiv:1412.3430](#) [hep-th]. [Erratum: *JHEP* **11**, 134 (2016)].
- [147] E. Braaten and H. Zhang, “Colloquium : The physics of axion stars,” *Rev. Mod. Phys.* **91** no.~4, (2019) 041002.
- [148] A. A. Starobinsky, “A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity,” *Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.* **3** (1987) 130–133.
- [149] J. D. Barrow and A. Ottewill, “The Stability of General Relativistic Cosmological Theory,” *J. Phys. A* **16** (1983) 2757.
- [150] A. V. Astashenok, S. D. Odintsov, and A. de la Cruz-Dombriz, “The realistic models of relativistic stars in  $f(R) = R + \alpha R^2$  gravity,” *Class. Quant. Grav.* **34** no.~20, (2017) 205008, [arXiv:1704.08311](#) [gr-qc].
- [151] A. Arapoglu, C. Deliduman, and K. Eksi, “Constraints on Perturbative  $f(R)$  Gravity via Neutron Stars,” *JCAP* **07** (2011) 020, [arXiv:1003.3179](#) [gr-qc].
- [152] J. Naf and P. Jetzer, “On the  $1/c$  Expansion of  $f(R)$  Gravity,” *Phys. Rev. D* **81** (2010) 104003, [arXiv:1004.2014](#) [gr-qc].
- [153] P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, and D. J. Shaw, “ $f(R)$  Gravity and Chameleon Theories,” *Phys. Rev. D* **78** (2008) 104021, [arXiv:0806.3415](#) [astro-ph].
- [154] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical*

- Recipes in C. The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, 2nd. ed., 2002.
- [155] K. S. Stelle, “Classical Gravity with Higher Derivatives,” *Gen. Rel. Grav.* **9** (1978) 353–371.
- [156] C. Palenzuela, P. Pani, M. Bezares, V. Cardoso, L. Lehner, and S. Liebling, “Gravitational Wave Signatures of Highly Compact Boson Star Binaries,” *Phys. Rev. D* **96** no.~10, (2017) 104058, [arXiv:1710.09432 \[gr-qc\]](#).
- [157] M. Bezares and C. Palenzuela, “Gravitational Waves from Dark Boson Star binary mergers,” *Class. Quant. Grav.* **35** no.~23, (2018) 234002, [arXiv:1808.10732 \[gr-qc\]](#).
- [158] M. Kesden, J. Gair, and M. Kamionkowski, “Gravitational-wave signature of an inspiral into a supermassive horizonless object,” *Phys. Rev. D* **71** (2005) 044015, [arXiv:astro-ph/0411478](#).
- [159] P. Amaro-Seoane, J. Barranco, A. Bernal, and L. Rezzolla, “Constraining scalar fields with stellar kinematics and collisional dark matter,” *JCAP* **11** (2010) 002, [arXiv:1009.0019 \[astro-ph.CO\]](#).
- [160] “Xtreme astrophysics group at the university of arizona.”  
<http://xtreme.as.arizona.edu/NeutronStars/>.
- [161] K. Henriksson, F. Foucart, L. E. Kidder, and S. A. Teukolsky, “Initial data for high-compactness black hole–neutron star binaries,” *Class. Quant. Grav.* **33** no.~10, (2016) 105009, [arXiv:1409.7159 \[gr-qc\]](#).
- [162] R. Friedberg, T. Lee, and Y. Pang, “Scalar Soliton Stars and Black Holes,” *Phys. Rev. D* **35** (1987) 3658.
- [163] H. A. Buchdahl, “General Relativistic Fluid Spheres,” *Phys. Rev.* **116** (1959) 1027.

- [164] G. W. Horndeski, “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space,” *Int. J. Theor. Phys.* **10** (1974) 363–384.
- [165] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, and A. Vikman, “Covariant Galileon,” *Phys. Rev. D* **79** (2009) 084003, [arXiv:0901.1314 \[hep-th\]](#).
- [166] C. Deffayet, S. Deser, and G. Esposito-Farese, “Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 064015, [arXiv:0906.1967 \[gr-qc\]](#).
- [167] D. Langlois and K. Noui, “Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability,” *JCAP* **02** (2016) 034, [arXiv:1510.06930 \[gr-qc\]](#).
- [168] M. Crisostomi, K. Koyama, and G. Tasinato, “Extended Scalar-Tensor Theories of Gravity,” *JCAP* **04** (2016) 044, [arXiv:1602.03119 \[hep-th\]](#).
- [169] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, “Healthy theories beyond Horndeski,” *Phys. Rev. Lett.* **114** no. 21, (2015) 211101.
- [170] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, “Exploring gravitational theories beyond Horndeski,” *JCAP* **02** (2015) 018, [arXiv:1408.1952 \[astro-ph.CO\]](#).
- [171] M. Zumalacárregui and J. García-Bellido, “Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) 064046, [arXiv:1308.4685 \[gr-qc\]](#).
- [172] H. Georgi, “Effective field theory,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **43** (1993) 209–252.
- [173] A. Pich, “Effective field theory: Course,” in *Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Session 68: Probing the Standard Model of Particle Interactions*, pp. 949–1049. 6, 1998. [arXiv:hep-ph/9806303](#).

- [174] C. Burgess, “Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory,” *Living Rev. Rel.* **7** (2004) 5–56, [arXiv:gr-qc/0311082](#).
- [175] D. B. Kaplan, “Five lectures on effective field theory,” 10, 2005. [arXiv:nucl-th/0510023](#).
- [176] A. V. Manohar, “Introduction to Effective Field Theories,” *Les Houches Lect. Notes* **108** (2020) , [arXiv:1804.05863 \[hep-ph\]](#).
- [177] T. Cohen, “As Scales Become Separated: Lectures on Effective Field Theory,” *PoS TASI2018* (2019) 011, [arXiv:1903.03622 \[hep-ph\]](#).
- [178] C. Burgess, *Introduction to Effective Field Theory*. Cambridge University Press, 12, 2020.
- [179] R. Penco, “An Introduction to Effective Field Theories,” [arXiv:2006.16285 \[hep-th\]](#).
- [180] C. Deffayet, O. Pujolas, I. Sawicki, and A. Vikman, “Imperfect Dark Energy from Kinetic Gravity Braiding,” *JCAP* **10** (2010) 026, [arXiv:1008.0048 \[hep-th\]](#).
- [181] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, “G-inflation: Inflation driven by the Galileon field,” *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 231302, [arXiv:1008.0603 \[hep-th\]](#).
- [182] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. F. Mukhanov, “k - inflation,” *Phys. Lett. B* **458** (1999) 209–218, [arXiv:hep-th/9904075](#).
- [183] T. Chiba, T. Okabe, and M. Yamaguchi, “Kinetically driven quintessence,” *Phys. Rev. D* **62** (2000) 023511, [arXiv:astro-ph/9912463](#).
- [184] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, “A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration,” *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 4438–4441, [arXiv:astro-ph/0004134](#).

- [185] A. Goldstein *et al.*, “An Ordinary Short Gamma-Ray Burst with Extraordinary Implications: Fermi-GBM Detection of GRB 170817A,” *Astrophys. J. Lett.* **848** no.~2, (2017) L14, [arXiv:1710.05446](#) [astro-ph.HE].
- [186] **LIGO Scientific, Virgo, Fermi-GBM, INTEGRAL** Collaboration, B. Abbott *et al.*, “Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A,” *Astrophys. J. Lett.* **848** no.~2, (2017) L13, [arXiv:1710.05834](#) [astro-ph.HE].
- [187] L. Lombriser and A. Taylor, “Breaking a Dark Degeneracy with Gravitational Waves,” *JCAP* **03** (2016) 031, [arXiv:1509.08458](#) [astro-ph.CO].
- [188] L. Lombriser and N. A. Lima, “Challenges to Self-Acceleration in Modified Gravity from Gravitational Waves and Large-Scale Structure,” *Phys. Lett. B* **765** (2017) 382–385, [arXiv:1602.07670](#) [astro-ph.CO].
- [189] P. Creminelli and F. Vernizzi, “Dark Energy after GW170817 and GRB170817A,” *Phys. Rev. Lett.* **119** no.~25, (2017) 251302, [arXiv:1710.05877](#) [astro-ph.CO].
- [190] J. M. Ezquiaga and M. Zumalacárregui, “Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead,” *Phys. Rev. Lett.* **119** no.~25, (2017) 251304, [arXiv:1710.05901](#) [astro-ph.CO].
- [191] L. Bordin, E. J. Copeland, and A. Padilla, “Dark energy loopholes some time after GW170817,” [arXiv:2006.06652](#) [astro-ph.CO].
- [192] E. J. Copeland, M. Kopp, A. Padilla, P. M. Saffin, and C. Skordis, “Dark energy after GW170817 revisited,” *Phys. Rev. Lett.* **122** no.~6, (2019) 061301, [arXiv:1810.08239](#) [gr-qc].
- [193] G. Derrick, “Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles,” *J. Math. Phys.* **5** (1964) 1252–1254.

- [194] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004.
- [195] T. Lee and Y. Pang, “Nontopological solitons,” *Phys. Rept.* **221** (1992) 251–350.
- [196] Y. M. Shnir, *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2018.
- [197] J. Barranco, J. Chagoya, A. Diez-Tejedor, G. Niz, and A. A. Roque, “Horndeski stars in theories with weakly broken galileon symmetry,” *Work in progress*.
- [198] D. Pirtskhalava, L. Santoni, E. Trincherini, and F. Vernizzi, “Weakly Broken Galileon Symmetry,” *JCAP* **09** (2015) 007, [arXiv:1505.00007 \[hep-th\]](#).
- [199] L. Santoni, E. Trincherini, and L. G. Trombetta, “Behind Horndeski: structurally robust higher derivative EFTs,” *JHEP* **08** (2018) 118, [arXiv:1806.10073 \[hep-th\]](#).
- [200] J. Sakstein and M. Trodden, “Oscillons in Higher-Derivative Effective Field Theories,” *Phys. Rev. D* **98** no.~12, (2018) 123512, [arXiv:1809.07724 \[hep-th\]](#).
- [201] R. Friedberg, T. Lee, and A. Sirlin, “A Class of Scalar-Field Soliton Solutions in Three Space Dimensions,” *Phys. Rev. D* **13** (1976) 2739–2761.
- [202] S. R. Coleman, “Q Balls,” *Nucl. Phys. B* **262** (1985) 263. [Erratum: *Nucl.Phys.B* 269, 744 (1986)].
- [203] M. Forger and H. Romer, “Currents and the energy momentum tensor in classical field theory: A Fresh look at an old problem,” *Annals Phys.* **309** (2004) 306–389, [arXiv:hep-th/0307199](#).
- [204] R. Kase and S. Tsujikawa, “Dark energy in Horndeski theories after GW170817: A review,” *Int. J. Mod. Phys. D* **28** no.~05, (2019) 1942005, [arXiv:1809.08735](#)

- [gr-qc].
- [205] B. Bayarsaikhan, S. Koh, E. Tsedenbaljir, and G. Tumurtushaa, “Constraints on dark energy models from the Horndeski theory,” *JCAP* **11** (2020) 057, [arXiv:2005.11171](#) [gr-qc].
- [206] J. Chagoya and G. Tasinato, “Compact objects in scalar-tensor theories after GW170817,” *JCAP* **08** (2018) 006, [arXiv:1803.07476](#) [gr-qc].
- [207] J. Chagoya, C. Ortiz, B. Rodríguez, and A. A. Roque, “Strong gravitational lensing by DHOST black holes,” *Class. Quant. Grav.* **38** no. 7, (2021) 075026.
- [208] D. J. Kaup, “Klein-Gordon Geon,” *Phys. Rev.* **172** (1968) 1331–1342.
- [209] R. Ruffini and S. Bonazzola, “Systems of selfgravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state,” *Phys. Rev.* **187** (1969) 1767–1783.
- [210] P. Jetzer, “Boson stars,” *Phys. Rept.* **220** (1992) 163–227.
- [211] F. E. Schunck and E. W. Mielke, “General relativistic boson stars,” *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) R301–R356, [arXiv:0801.0307](#) [astro-ph].
- [212] K. Enqvist and J. McDonald, “Q balls and baryogenesis in the MSSM,” *Phys. Lett. B* **425** (1998) 309–321, [arXiv:hep-ph/9711514](#).
- [213] B. Kleihaus, J. Kunz, and M. List, “Rotating boson stars and Q-balls,” *Phys. Rev. D* **72** (2005) 064002, [arXiv:gr-qc/0505143](#).
- [214] E. J. Copeland, M. Gleiser, and H.-R. Muller, “Oscillons: Resonant configurations during bubble collapse,” *Phys. Rev. D* **52** (1995) 1920–1933, [arXiv:hep-ph/9503217](#).
- [215] E. Seidel and W. M. Suen, “Oscillating soliton stars,” *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991)

- 1659–1662.
- [216] H. O. Silva, A. Maselli, M. Minamitsuji, and E. Berti, “Compact objects in Horndeski gravity,” *Int. J. Mod. Phys. D* **25** no.~09, (2016) 1641006, [arXiv:1602.05997 \[gr-qc\]](#).
- [217] E. Babichev, K. Koyama, D. Langlois, R. Saito, and J. Sakstein, “Relativistic Stars in Beyond Horndeski Theories,” *Class. Quant. Grav.* **33** no.~23, (2016) 235014, [arXiv:1606.06627 \[gr-qc\]](#).
- [218] Y. Brihaye, A. Cisterna, and C. Erices, “Boson stars in biscalar extensions of Horndeski gravity,” *Phys. Rev. D* **93** no.~12, (2016) 124057, [arXiv:1604.02121 \[hep-th\]](#).
- [219] N. Sanchis-Gual, F. Di Giovanni, M. Zilhão, C. Herdeiro, P. Cerdá-Durán, J. A. Font, and E. Radu, “Nonlinear Dynamics of Spinning Bosonic Stars: Formation and Stability,” *Phys. Rev. Lett.* **123** no.~22, (2019) 221101, [arXiv:1907.12565 \[gr-qc\]](#).
- [220] C. Charmousis, E. J. Copeland, A. Padilla, and P. M. Saffin, “General second order scalar-tensor theory, self tuning, and the Fab Four,” *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 051101, [arXiv:1106.2000 \[hep-th\]](#).
- [221] C. Charmousis, E. J. Copeland, A. Padilla, and P. M. Saffin, “Self-tuning and the derivation of a class of scalar-tensor theories,” *Phys. Rev. D* **85** (2012) 104040, [arXiv:1112.4866 \[hep-th\]](#).
- [222] T. Kobayashi and N. Tanahashi, “Exact black hole solutions in shift symmetric scalar–tensor theories,” *PTEP* **2014** (2014) 073E02, [arXiv:1403.4364 \[gr-qc\]](#).
- [223] A. Diez-Tejedor, F. Flores, and G. Niz, “Horndeski dark matter and beyond,” *Phys. Rev. D* **97** no.~12, (2018) 123524, [arXiv:1803.00014 \[gr-qc\]](#).

- [224] A. A. Starobinsky, S. V. Sushkov, and M. S. Volkov, “The screening Horndeski cosmologies,” *JCAP* **06** (2016) 007, [arXiv:1604.06085 \[hep-th\]](#).
- [225] K. Salahshoor and K. Nozari, “Circular orbits and accretion process in a class of Horndeski/Galileon black holes,” *Eur. Phys. J. C* **78** no.~6, (2018) 486, [arXiv:1806.08949 \[gr-qc\]](#).
- [226] M. Gleiser and R. Watkins, “Gravitational Stability of Scalar Matter,” *Nucl. Phys. B* **319** (1989) 733–746.
- [227] O. J. C. Dias, J. E. Santos, and B. Way, “Numerical Methods for Finding Stationary Gravitational Solutions,” *Class. Quant. Grav.* **33** no.~13, (2016) 133001, [arXiv:1510.02804 \[hep-th\]](#).
- [228] M. Gleiser, “Stability of Boson Stars,” *Phys. Rev. D* **38** (1988) 2376. [Erratum: *Phys.Rev.D* 39, 1257 (1989)].
- [229] C. Pacilio, M. Vaglio, A. Maselli, and P. Pani, “Gravitational-wave detectors as particle-physics laboratories: Constraining scalar interactions with boson-star binaries,” [arXiv:2007.05264 \[gr-qc\]](#).
- [230] N. Sennett, T. Hinderer, J. Steinhoff, A. Buonanno, and S. Ossokine, “Distinguishing Boson Stars from Black Holes and Neutron Stars from Tidal Interactions in Inspiring Binary Systems,” *Phys. Rev. D* **96** no.~2, (2017) 024002, [arXiv:1704.08651 \[gr-qc\]](#).
- [231] C. Hanna, M. C. Johnson, and L. Lehner, “Estimating gravitational radiation from super-emitting compact binary systems,” *Phys. Rev. D* **95** no.~12, (2017) 124042, [arXiv:1611.03506 \[gr-qc\]](#).
- [232] D. Pollney, C. Reisswig, E. Schnetter, N. Dorband, and P. Diener, “High accuracy binary black hole simulations with an extended wave zone,” *Phys. Rev. D* **83**

- (2011) 044045, [arXiv:0910.3803 \[gr-qc\]](#).
- [233] Q. Wang and N. Afshordi, “Black hole echology: The observer’s manual,” *Phys. Rev. D* **97** no.~12, (2018) 124044, [arXiv:1803.02845 \[gr-qc\]](#).
- [234] M. Wade, J. D. E. Creighton, E. Ochsner, and A. B. Nielsen, “Advanced LIGO’s ability to detect apparent violations of the cosmic censorship conjecture and the no-hair theorem through compact binary coalescence detections,” *Phys. Rev. D* **88** no.~8, (2013) 083002, [arXiv:1306.3901 \[gr-qc\]](#).
- [235] V. Cardoso and P. Pani, “Tests for the existence of black holes through gravitational wave echoes,” *Nature Astron.* **1** no.~9, (2017) 586–591, [arXiv:1709.01525 \[gr-qc\]](#).
- [236] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, New York, NY, 1972.  
<https://cds.cern.ch/record/100595>.
- [237] K. Virbhadra, D. Narasimha, and S. Chitre, “Role of the scalar field in gravitational lensing,” *Astron. Astrophys.* **337** (1998) 1–8, [arXiv:astro-ph/9801174](#).
- [238] C. G. Darwin, “The gravity field of a particle,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **249** no.~1257, (1959) 180–194,  
<https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1959.0015>.
- [239] C. G. Darwin, “The gravity field of a particle. II,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **263** no.~1312, (1961) 39–50,  
<https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1961.0142>.

- [240] S. Shapiro, J. Davis, D. Lebach, and J. Gregory, “Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979-1999,” *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 121101.
- [241] I. D. Novikov and K. S. Thorne, “Astrophysics and black holes,” in *Les Houches Summer School of Theoretical Physics: Black Holes*. 1973.
- [242] D. N. Page and K. S. Thorne, “Disk-Accretion onto a Black Hole. Time-Averaged Structure of Accretion Disk,” *Astrophys. J.* **191** (1974) 499–506.
- [243] K. S. Thorne, “Disk accretion onto a black hole. 2. Evolution of the hole.,” *Astrophys. J.* **191** (1974) 507–520.
- [244] J. Frank, A. King, and D. J. Raine, *Accretion Power in Astrophysics: Third Edition*. 2002.
- [245] D. F. Torres, “Accretion disc onto a static nonbaryonic compact object,” *Nucl. Phys. B* **626** (2002) 377–394, [arXiv:hep-ph/0201154](#).
- [246] T. Harko, Z. Kovacs, and F. S. N. Lobo, “Can accretion disk properties distinguish gravastars from black holes?,” *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 215006, [arXiv:0905.1355 \[gr-qc\]](#).
- [247] C. Bambi and E. Barausse, “Constraining the quadrupole moment of stellar-mass black-hole candidates with the continuum fitting method,” *Astrophys. J.* **731** (2011) 121, [arXiv:1012.2007 \[gr-qc\]](#).
- [248] K. V. Staykov, D. D. Doneva, and S. S. Yazadjiev, “Accretion disks around neutron and strange stars in  $R+aR(2)$  gravity,” *JCAP* **08** (2016) 061, [arXiv:1606.01529 \[gr-qc\]](#).
- [249] E. M. Murchikova, E. S. Phinney, A. Pancoast, and R. D. Blandford, “A cool accretion disk around the Galactic Centre black hole,” *Nature* **570** no.~7759,

- (2019) 83–86, [arXiv:1906.08289](#) [astro-ph.GA].
- [250] S. E. Hosseini, M. Zajaček, A. Eckart, N. B. Sabha, and L. Labadie, “Constraining the accretion flow density profile near Sgr A\* using the L'-band emission of the S2 star,” *Astronomy & Astrophysics* **644** (2020) A105, [arXiv:2010.00530](#) [astro-ph.GA].
- [251] A. Eckart and R. Genzel, “Stellar proper motions in the central 0.1 PC of the galaxy,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **284** (1997) 576–598.
- [252] K. Gebhardt, J. Adams, D. Richstone, T. R. Lauer, S. M. Faber, K. Gültekin, J. Murphy, and S. Tremaine, “The Black Hole Mass in M87 from Gemini/NIFS Adaptive Optics Observations,” *Astrophys. J.* **729** no.~2, (2011) 119, [arXiv:1101.1954](#) [astro-ph.CO].

# **Cartas Tribunal**



Universidad  
de Guanajuato

CAMPUS LEÓN  
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Asunto:** Revisión de tesis de doctorado  
León, Gto., Junio de 2021

**DR. DAVID Y. G. DELEPINE**  
**DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS**  
**PRESENTE**

Por este medio le comunico que he revisado la tesis **Teorías alternativas a la gravitación y objetos astrofísicos compactos**, escrita por el **M. en F. Armando A. Roque Estrada**, para efecto de presentarla para la obtención del grado de Doctor en Física.

El texto de la tesis se encuentra completo y se presentan resultados interesantes y bien explicados sobre la construcción de objetos compactos, autogravitantes, y de sus propiedades particulares, dentro de teorías alternativas de gravitación. Los resultados se presentan completos y han sido calculados con cuidado, mostrando claramente las características de los objetos y su estabilidad. Igualmente, he podido ver que el texto fue modificado por el autor para reflejar las sugerencias y comentarios que le fueron expresados durante la revisión. En mi opinión, la tesis cumple con los elementos necesarios para ser defendida ante el comité sinodal asignado en fecha próxima que sea acordada de manera conjunta.

Agradeciendo su amable atención, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**  
**“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”**

**DR. LUIS ARTURO UREÑA LÓPEZ**  
**PROFESOR TITULAR C**



Asunto: Carta aval de Sinodal

León, Gto., 31 de Mayo, 2021

**Dr. David Yves Ghislain Depeline**  
**Director de la División de Ciencias e Ingenierías**

**Presente**

Por medio de la presente hago constar que he revisado la tesis titulada: "**Teorías alternativas a la gravitación y objetos astrofísicos compactos**" que presente el MSc. ARMANDO A. ROQUE ESTRADA para obtener el grado de Doctor en Física.

Le comunico que he discutido cuidadosamente dicha tesis con el sustentante, a quien le he hecho llegar mis comentarios y correcciones. Le expreso además que en lo general me parece un buen trabajo por lo que avalo su presentación.

Sin otro particular, quedo de Uds. Para cualquier asunto relacionado con este documento.

Atentamente

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Miguel Ángel Vallejo Hernández".

Dr. Miguel Ángel Vallejo Hernández  
**Profesor Investigador**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FÍSICA,**  
**DIVISION DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN**

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre, C.P. 37150 León, Gto., México. Tel. (477) 788-5100, Fax: (477) 788-5100 ext. 8410, <http://www.fisica.ugto.mx>

UNIVERSIDAD DE  
GUANAJUATO



León, Guanajuato, a 7 de junio de 2021

**Dr. DAVID YVES GHISLAIN DELEPINE**  
**DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS**  
**P R E S E N T E**

Estimado Doctor David Delepine,

Por este medio le informo que he leído y revisado la tesis de doctorado en física del estudiante **M.F.Armando Andrés Roque Estrada** titulada **“Teorías alternativas a la gravitación y objetos astrofísicos compactos”**. El trabajo tiene como asesor al Dr. Alberto Diez Tejedor, y como co-asesor al Dr. Juan Barranco Monarca.

Le he hecho al estudiante recomendaciones para el documento final, sostuvimos discusiones sobre el trabajo de investigación y he comprobado que posee un excelente dominio del tema. Además considero que los resultados por él obtenidos, son de relevancia y originalidad científica. Me complace informarle que estoy de acuerdo con que se realice la presentación del trabajo de tesis, puesto que el mismo cuenta con los requisitos para la obtención del grado de Doctorado en Física.

Reciba mis cordiales saludos,

**ATENTAMENTE**  
**“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”**

---

**Dra. Nana Geraldine Cabo Bizet**

**Departamento de Física**  
*Campus León, Universidad de Guanajuato*  
Loma del Bosque 103, Colonia Lomas del Pedregal  
C.P. 37150, León, Guanajuato,  
México



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS  
"Francisco García Salinas"

UNIDAD ACADÉMICA DE FÍSICA



Revisión de tesis de doctorado  
Zacatecas, Zacatecas a 10 de junio de 2021

Dr. David Y. G. Delepine  
Director de la División de Ciencias e Ingenierías  
Presente:

Por este conducto hago de su conocimiento que he revisado el trabajo de tesis titulado **Teorías alternativas a la gravitación y objetos astrofísicos compactos** que presenta el **M. en F. Armando A. Roque Estrada**. Después de revisar extensamente este trabajo en sus contenidos teóricos y prácticos, así como en su presentación, he determinado que el mismo cumple con los requisitos para ser presentado como tesis del programa de Doctorado en Física y con ello aspirar a obtener el grado respectivo.

Esperando que la presente sirva para generar los trámites administrativos conducentes y sin otro particular por el momento, me despido de usted enviándole un cordial saludo.

Atentamente,

Dr. Javier Fernando Chagoya Saldaña  
Profesor Investigador  
Unidad Académica de Física - UAZ



**Gustavo Niz Quevedo**  
Departamento de Física  
División de Ciencias e Ingenierías

León, Gto., 8 de Junio de 2021.

**Dr. David Yves Ghislain Delepine**  
Director de la División de Ciencias e Ingenierías  
Universidad de Guanajuato

Estimado Dr. David Yves Ghislain Delepine

Por medio de la presente le informo que he recibido, leído y revisado la tesis de Doctorado titulada “Teorías alternativas a la gravitación y objetos astrofísicos compactos” del alumno Armando Andrés Roque Estrada, bajo la supervisión de los Drs. Alberto Diez y Juan Barranco.

El trabajo cumple con los estándares requeridos para la obtención del grado, y apoyo la defensa del mismo en la fecha convenida.

Me pongo a su disposición para cualquier duda sobre la revisión de dicho trabajo de tesis.

Atentamente,

Gustavo Niz



Universidad  
de Guanajuato

**Alberto Diez Tejedor**  
Profesor Asociado C  
Departamento de Física  
DCI-León

León, Guanajuato; a 31 de mayo de 2021

Dr. David Yves Ghislain Delepine  
Director de la División de Ciencias e Ingenierías  
Campus León, Universidad de Guanajuato  
P R E S E N T E

Estimado Dr. Delepine,

Por este medio, me permito informarle que he leído y revisado la tesis titulada "**Teorías alternativas a la gravitación y objetos astrofísicos compactos,**" que realizó el estudiante **Armando Andrés Roque Estrada** como requisito para obtener el grado de Doctor en Física.

Considero que el trabajo de tesis realizado por Armando reúne los requisitos necesarios de calidad e interés académico para que sea defendido en un examen de grado, razón por la cual extiendo mi aval para que así se proceda.

Sin más que agregar, agradezco su atención y aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE  
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

Dr. Alberto Diez Tejedor  
Departamento de Física  
DCI, Campus León



León, Guanajuato, 9 de junio de 2021

Dr. David Delepine  
Director de la División de Ciencias e Ingenierías  
Campus León, Universidad de Guanajuato  
PRESENTE

Estimado Dr. Delepine:

Por este medio, me permito informarle que he leído la tesis titulada “**Teorías alternativas de la gravitación y objetos astrofísicos compactos**” que realizó el Maestro en Física **Armando Andrés Roque Estrada** como requisito para obtener el grado de Doctor en Física.

Considero que el trabajo de doctorado realizado por Armando puede abrir una línea de investigación que tenga por objetivo final determinar si la teoría de la gravedad de Einstein requiere de alguna modificación o no para poder explicar la basta mayoría de los fenómenos gravitatorios observados en la naturaleza. En mi opinión su trabajo realizado reúne los requisitos necesarios de calidad e interés académico para que sea defendida en un examen profesional, razón por la cual extiendo mi aval para que así se proceda.

Sin más que agregar, agradezco su atención y aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE  
“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”

---

**Dr. Juan Barranco Monarca**  
División de Ciencias e Ingenierías UG