



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

*“DESARROLLO DE MÓDULOS DE SISTEMAS MECÁNICOS
PARA LA ENSEÑANZA DE LA INGENIERÍA MECÁNICA.”*

TESIS:

QUE PARA OBTENER
EL TÍTULO DE INGENIERO EN MECATRÓNICA
EN LA UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

PRESENTA:

Eleazar Damián Ramírez

Directores:

Dr. José María Rico Martínez
Dr. J. Jesús Cervantes Sánchez

*A mis padres y hermanas.
A la vida misma y aquella singularidad del espacio-tiempo
que dio comienzo al universo y al tiempo mismo.*

*I would rather have questions that can't
be answered than answers that can't be questioned*
Richard Feynman

Agradecimientos

Agradezco a toda mi familia, a mis padres Olga y Eleazar, por el enorme sacrificio que hicieron para darnos una educación a mis hermanas y a mí, por toda la paciencia que tuvieron para conmigo, por ser el apoyo y la motivación a lo largo de toda mi formación académica. Agradezco enormemente a mi madre por las atenciones y cuidados a lo largo de todo este difícil recorrido de la vida. Hago especial mención a mi padre, siendo esa personita tan importante en mi vida, mi mejor amigo, mi bandera y un excelente padre. A mis hermanas Jacqueline y Sarhai, gracias por siempre apoyarme y por creer en mi.

Agradezco enormemente al Dr. José María Rico, mi asesor, por darme el enorme privilegio y la oportunidad de trabajar con él en el desarrollo de este trabajo de tesis, por toda su paciencia, su apoyo, su confianza y sus buenos deseos. Agradezco a el codirector Dr. J. Jesús Cervantes Sánchez y sinodales Dr. José Colín Venegas y Dr. Luz Antonio Aguilera Cortés, por sus observaciones, recomendaciones, correcciones y por todo su tiempo invertido en la revisión de este trabajo de tesis.

A la Universidad de Guanajuato, por abrirme las puertas, acogerme y darme una formación académica, profesional y humana. Agradezco a mis compañeros y amigos: Rocío, Ilse, Andrea y Hugo Hernández; porque sin ellos no hubiera sido tan divertida, alocada, competitiva e intensa esta hermosa etapa de mi vida.

Resumen

El presente trabajo de tesis analiza y desarrolla problemas de dinámica de la partícula y de dinámica del cuerpo rígido provenientes de distintas fuentes bibliográficas, empleando el programa de simulación de sistemas mecánicos Adams[©] más específicamente unos de sus módulos conocido como Machinery. El objetivo de este esfuerzo es auxiliar la enseñanza de la Ingeniería Mecánica y Mecatrónica. Todos estos problemas se analizan de forma analítica empleando medios tradicionales, para después comparar sus respuestas con las obtenidas mediante el programa de simulación Adams[©]/Machinery. Este trabajo incluye una descripción detallada de como modelar estos sistemas mecánicos y como variar sus parámetros, con el fin de que el usuario pueda recrear dichos problemas sin ningún tipo de problema.

Abstract

The present B. Sc. thesis analyzes problems from the dynamic of a particle and dynamic of rigid bodies obtained from different textbooks and simulates the systems using the programs Adams[©], more specifically the module Machinery of Adams[©]. The objective of this effort is to provide an additional tool for the learning of Mechanical and Mechatronic Engineering. All the problems were approached using analytical tools using the traditional methods employed in Mexican universities and then this approach is compared with the results obtained using Adams[©]/Machinery. The present work also includes a detailed description of the modeling of these systems and its parameters; for the user can easily redo by him/herself these problems.

Capítulo 1

Introducción.

En este capítulo se presenta el contexto del trabajo de tesis, la descripción del problema que se desea resolver, los objetivos del presente trabajo, el estado de arte y la descripción del resto de la tesis.

1.1. Contexto del trabajo de tesis.

Para nadie es una sorpresa que la educación nacional se encuentra en medio de una crisis estructural que dura al menos 50 años. Las causas son muchas, algunas de ellas son:

- El abandono de los estándares mínimos para acreditar un año escolar en la educación primaria y secundaria, vea OECD [31], página 5.
- La falta de aplicación y en algunos casos la inexistencia de estándares mínimos para acceder a la enseñanza media superior y superior.
- La deficiente y en ocasiones inexistente infraestructura educativa —desde la ausencia de edificios e instalaciones sanitarias, hasta la ausencia de los profesores en las primarias y secundarias rurales por la falta de caminos, la violencia cotidiana en muchas comunidades o por irresponsabilidad de los propios maestros— algunas de estas deficiencias se acarrean, con algunos matices, a las primarias y secundarias urbanas y a las instituciones de enseñanza media superior y superior, vea Castañeda Valle y Rebolledo Gómez, [32] y Carron, G. y Chdau T. N., [10], páginas 144, 161, 192, 241 y 261.
- El incremento no planeado de la matrícula, en particular en los niveles de enseñanza media superior y superior, para satisfacer metas impuestas por las instancias que proporcionan los recursos económicos para la operación de esas instituciones, o autoimpuestas para “cumplir” programas de desarrollo realizados al vapor y sin el concurso de la comunidad de la institución, vea Gil-Antón, [15], Jayaram [20] y Kent [23].
- El convencimiento, por parte de los estudiantes de enseñanza secundaria, media superior y superior, de que la obtención de un título profesional ya no constituye una garantía de movilidad socioeconómica, vea Castañeda Valle y Rebolledo Gómez, [32].

- La ocurrencia de casos de corrupción en algunas instituciones de enseñanza superior, vea Hallack y Poisson [17], Linares [25] y Jayaram [20].
- El empleo, en instituciones de educación superior, de currículas anticuadas, incorrectamente actualizadas o que no se revisan durante muchos años.
- La imposición irreflexiva de modelos educativos que no han sido probados suficientemente o para los cuales las instituciones de educación superior no tienen los recursos materiales y humanos para implementarlos correctamente, vea Allais [1], Carabaña-Morales [9], Hyland, [19] y Lum [26].

Es importante reconocer que no todo es apocalíptico en el campo de la educación, en general, y en el caso de la educación superior en particular. Es siempre posible encontrar ejemplos de estudiantes, profesores e instituciones que procuran, dentro de sus limitaciones, encender, en sentido figurado, “una luz en la oscuridad”.

Este es el contexto en el que se desarrolla el presente trabajo de tesis.

1.2. Descripción del problema.

En las licenciaturas de Ingeniería Mecánica e Ingeniería Mecatrónica que oferta la División de Ingenierías del Campus Irapuato-Salamanca de la Universidad de Guanajuato una de las secuencias de unidades de aprendizaje más demandantes, desde el punto de vista de los alumnos, es la que consiste de las unidades de aprendizaje:¹

1. Dinámica de la partícula.
2. Dinámica del cuerpo rígido.
3. Análisis y síntesis de mecanismos.
4. Dinámica de maquinaria.
5. Vibraciones mecánicas.

Los índices de reprobación en estas unidades de aprendizaje y en otras del área básica común son muy altos y contribuyen a que un número elevado de estudiantes tarden uno o dos años más que los usualmente requeridos para completar sus estudios profesionales y titularse. El problema es de tal magnitud que en la última revisión del programa, realizada después de casi 15 años, se solicitó relajar los requisitos de esta secuencia de unidades para aminorar el retraso en el egreso de alumnos.²

¹Es importante señalar que las dos últimas unidades de aprendizaje son optativas para la licenciatura en ingeniería mecatrónica.

²Paradójicamente, a pesar de que las unidades de aprendizaje son idénticas en ambas licenciaturas, los requisitos no lo son.

Un análisis empírico de los altos índices de reprobación en estas unidades de aprendizaje, en particular las de Dinámica de la partícula y Dinámica del cuerpo rígido, indica que además de las problemas generales mencionados en la sección 1.1 —que conducen a la presencia de estudiantes en esas unidades con un débil conocimiento de cálculo diferencial e integral, trigonometría, álgebra y, en algunos casos, aritmética— algunas de las causas de estos índices de reprobación son:

1. Las carencias pedagógicas del personal docente, vea Bernasconi página 45, [6] y [27].
2. La falta de conocimiento del personal docente acerca del contenido de las unidades de aprendizaje, vea [27].
3. El requerimiento, inexistente en otras unidades de aprendizaje, de comprender los fenómenos físicos que involucran los problemas a resolver y que se traducen, usualmente, en el desarrollo de un proceso de solución, que puede tener un buen número de pasos. Para muchos estudiantes este requerimiento representa un reto importante, pues frecuentemente la solución de un problema, en otras unidades de aprendizaje, consta de un único paso o requiere únicamente la sustitución de datos en una fórmula.
4. La falta de equipo experimental que ofrezca una alternativa para la comprensión de los fenómenos fundamentales estudiados en estas unidades de aprendizaje.
5. La falta de implementación formal de programas de simulación, que a falta de equipo experimental, permita ofrecer una alternativa para la comprensión de los fenómenos fundamentales estudiados en estas unidades de aprendizaje.

Esta última causa; es decir, la carencia de programas de simulación, que a falta de equipo experimental, permita ofrecer una alternativa para la comprensión de los fenómenos fundamentales estudiados en estas unidades de aprendizaje, es la que propone aminorar el presente trabajo de tesis. Sin embargo, es necesario reconocer tres puntos importantes:

1. Que resolver o aminorar esta última causa no absuelve a la institución de educación superior de simultáneamente resolver, o al menos, aminorar la falta de equipo experimental que ofrezca una alternativa para la comprensión de los fenómenos fundamentales estudiados en estas unidades de aprendizaje.
2. Que el presente trabajo de tesis únicamente se concentra en las unidades de aprendizaje de Dinámica de la partícula y Dinámica del cuerpo rígido. Algunos de estos resultados se extienden también a la unidad de aprendizaje de Análisis y síntesis de mecanismos.
3. Que es muy importante asegurarse que los resultados arrojados por los programas de simulación sean correctos, pues, en caso contrario, el efecto sobre los estudiantes de estas unidades de aprendizaje será aún más perjudicial.

Es igualmente necesario reconocer que para el caso de mecanismos formados por barras rígidas, el programa de cómputo Adams[©] de la compañía MSC y otros similares ya proveen de herramientas muy satisfactorias para su simulación y que éstas ya se han empleado de manera más o menos continua en la enseñanza de las unidades de aprendizaje correspondientes. No obstante, su empleo no está exento de errores como los indicados en Pérez-Soto et al, [33].

1.3. Objetivos.

Una vez establecidos el contexto del trabajo y la justificación del mismo, se indica cual es el objetivo y cuales las metas del presente trabajo de tesis. **El objetivo de este trabajo es el desarrollo de una metodología para la simulación de sistemas mecánicos que incluyan cables, cadenas, bandas y engranes y su empleo en la enseñanza de las unidades de aprendizaje de Dinámica de la partícula y Dinámica del cuerpo rígido.** La consecución de este objetivo requerirá de la solución de diferentes tipos de problemas presentados en los libros de texto, más empleados en la enseñanza a nivel nacional, mediante los métodos que tradicionalmente se emplean y la comparación crítica de los resultados obtenidos, de esta manera, con los obtenidos mediante la simulación de los mismos problemas mediante las herramientas proporcionadas por el módulo Machinery incluido en las versiones más recientes del programa Adams[©] de la compañía MSC. Es necesario mencionar que la adición del módulo Machinery es tan reciente que los manuales correspondientes no están redactados de manera consistente; por lo tanto, los diferentes ejemplos contenidos en este trabajo de tesis paliarán los errores u omisiones de los manuales suministrados por la compañía.

Las metas que implica la consecución del objetivo antes indicado requiere para cada uno de los diferentes tipos de sistemas: cables, cadenas, bandas y engranes, la explicación somera de las características más importantes de los sistemas mecánicos que involucran esos elementos mecánicos, la explicación de los requerimientos del módulo Machinery del programa Adams[©] para simular esos sistemas mecánicos,³ la selección de los problemas que de manera más completa representen el comportamiento de cada uno de esos tipos de sistemas, la simulación de esos sistemas mediante el programa Adams[©], la solución de esos sistemas mediante los métodos de enseñanza tradicionales y la comparación crítica de los resultados obtenidos empleando ambos procedimientos.

Tres metas un cuanto tanto inesperadas que se obtuvieron durante la realización de este trabajo de tesis fueron:

1. Que las tareas necesarias para la simulación de los diferentes sistemas mecánicos mediante el programa Adams[©] frecuentemente requiere que el usuario, sea estudiante o instructor, enfrente la realidad de que los cuerpos que es necesario incluir en los sistemas mecánicos son cuerpos tridimensionales y que para su completa descripción se requiere más información que la usualmente proporcionada por los libros de texto. Este requisito acerca más a los estudiantes a la praxis de su desempeño profesional y los obliga a discernir aquellas propiedades que son indispensables para la solución del problema, usualmente suministradas por los libros de texto, de las que son necesarias para describir de manera precisa un elemento mecánico pero que no tienen influencia en el resultado del problema y su simulación.
2. Que la simulación de los sistemas mecánicos en los que se incluye las propiedades másicas e inerciales de cables, cadenas o bandas presentan, como es de esperarse, una respuesta transitoria seguida de la respuesta estacionaria del sistema. Ahora bien, la solución de los problemas

³Esta meta es necesaria, pues se desea que el trabajo de tesis sirva como una herramienta didáctica para la enseñanza de las unidades de aprendizaje mencionadas.

de los libros de texto usualmente concierne únicamente con la respuesta estacionaria del sistema mecánico, sin indicación alguna de la respuesta transitoria; mientras que en la praxis, la respuesta transitoria de esos sistemas está siempre presente en menor o mayor medida. De esta manera, la simulación de estos sistemas permite al instructor advertir, a sus estudiantes, de que la enseñanza teórica de algunos de estos temas está, en esos casos, alejada de la realidad.

3. Que la simulación de los sistemas mecánicos en los que se incluye las propiedades másicas e inerciales de las poleas o catarinas presentes en algunos de esos sistemas permite ilustrar de manera sencilla el efecto de la inercia en la solución de esos sistemas. Este detalle es particularmente importante en la transición de la enseñanza de la Dinámica de la partícula, en la cual usualmente se supone que poleas o catarinas son de masa e inercia despreciable, a la enseñanza de la Dinámica del cuerpo rígido, donde es posible y conveniente considerar las propiedades inerciales de las poleas o catarinas.

1.4. Estado del arte.

Los esfuerzos para incorporar la simulación de sistemas mecánicos para la enseñanza de la ingeniería son muy diversos y van desde el empleo de software matemático como MathCad[®], Maple[®] —entre otros programa para el análisis de las ecuaciones resultantes— el empleo de programas de simulación como Simulink[®] para la simulación de las ecuaciones diferenciales que resultan de resolver un sistema mecánico, hasta programas desarrollados a partir de lenguajes de programación fundamentales, como C++ o VisualBasic[®], hasta aquellos basados en lenguajes de alto nivel como MatLab[®] o Scilab[®] etc, o incluyen el uso de laboratorios virtuales, que se emplean a partir del uso del internet.

En el campo específico de la Dinámica, ya sea de la partícula o de cuerpo rígido, el número de contribuciones se reduce considerablemente, algunas de ellas están enfocadas a problemas relativamente elementales como Santos-Benito et al. [35] o Lee y Huang [24] o bien al estudio estadístico de los resultados obtenidos mediante diferentes métodos de enseñanza, vea Ha [16]. Entre las referencias encontradas hay tres que se aproximan al objetivo de este trabajo, la primera debida Bernhard, [7], muestra muy pocos detalles de las simulaciones propuestas y parecen realizadas en un lenguaje de programación elemental, la segunda desarrollada por Deliktas, [12] está orientada para el estudio de la Estática, finalmente, la tercera debida a Azis et al. [4], muestra un laboratorio virtual para la enseñanza de los trenes de engranes y parece ser desarrollado a partir de lenguajes de programación fundamentales.

A diferencia de las referencias mencionadas, el objetivo del presente trabajo es emplear un programa de simulación de sistemas mecánicos ya establecido y de empleo frecuente en la comunidad de ingenieros practicantes para mejorar la enseñanza de la Dinámica de partículas y Cuerpos rígidos y al mismo tiempo, introducir al estudiante al empleo de esas herramientas que le serán de utilidad en su práctica profesional.

1.5. Descripción de la tesis.

En esta sección se describe el contenido del resto de los capítulos del presente trabajo de tesis. El capítulo 2 contiene los fundamentos teóricos de la operación de sistemas mecánicos que incluyen las

poleas para cables y bandas, cadenas, catarinas y engranes. Este capítulo contiene los fundamentos teóricos necesarios para la simulación de:

1. Sistemas mecánicos que incluyen cables, poleas y cabrestantes.⁴
2. Sistemas mecánicos que incluyen cadenas y catarinas.
3. Sistemas mecánicos que incluyen bandas —planas, sincronizadas y poly V— y poleas.
4. Sistemas mecánicos que incluyen engranes y cremalleras, además esta sección incluye una pequeña introducción a la geometría de los perfiles de los engranes, el módulo Machinery permite analizar engranes rectos, helicoidales, cónicos, de tornillo helicoidal e hipoidales, incluyendo la posibilidad de emplear cremalleras correspondientes a los engranes rectos y helicoidales.

El capítulo 3 contiene un conjunto de problemas del área de cinética y cinemática de partículas y cuerpo rígido, resueltos mediante los métodos tradicionales y mediante la simulación con las herramientas del módulo Machinery. Adicionalmente, cada problema incluye una comparación de los resultados obtenidos mediante ambas metodologías.

El capítulo 4 contiene un conjunto de problemas de la unidad de aprendizaje de la dinámica del cuerpo rígido, tanto del área de cinemática como de cinética, resueltos mediante los métodos tradicionales y mediante la simulación con las herramientas del módulo Machinery. Adicionalmente, cada problema incluye una comparación de los resultados.

El capítulo 5 contiene un conjunto de problemas de la unidad de aprendizaje de la dinámica del cuerpo rígido, tanto del área de cinemática como de cinética, resueltos mediante los métodos tradicionales y mediante la simulación con las herramientas del módulo Machinery. Adicionalmente, cada problema incluye una comparación de los resultados obtenidos mediante ambas metodologías.

El capítulo 6 de engranes del módulo Machinery permite analizar los sistemas de engranes con diferentes niveles de sofisticación: Desde el nivel denominado **Coupler** que únicamente toma en cuenta las relaciones cinemáticas de los engranes en contacto,⁵ pasando por el nivel **Simplified** que toma en cuenta el módulo del diente, el ángulo de presión, número de dientes y huelgo entre dientes —backlash— e inercia; a partir de esos resultados, el módulo Machinery determina las fuerzas de contacto en ausencia de fricción y la relación de velocidades, el capítulo contiene un conjunto de problemas de la unidad de aprendizaje de la dinámica del cuerpo rígido, tanto del área de cinemática como de cinética, resueltos mediante los métodos tradicionales y mediante la simulación con las herramientas del nivel **Simplified** del módulo Machinery. Existen otros niveles de sofisticación denominados **Detailed** y **3D Contact** que permiten realizar análisis más detallados y dirigidos hacia el diseño de los engranes basados en consideraciones de resistencia a la fatiga de los dientes de engrane y a la fatiga de la superficies de los dientes de engrane. Ninguno de estos niveles es necesario para los propósitos de este trabajo.

⁴En el español que comúnmente se emplea en México es más frecuente llamarlos malacates.

⁵Este nivel nunca pudo emplearse en el transcurso de este trabajo de tesis.

Los Apéndices A y C contienen, los fundamentos básicos acerca de la teoría de contactos de Hertz, donde se explican los distintos modelos en la mecánica de contactos, la clasificación de las fuerzas de contacto, las distintas áreas de contacto entre distintos cuerpos y por último las ecuaciones que definen el contacto entre una esfera y un semi espacio y el contacto entre dos esferas. El Apéndice B contiene los fundamentos básicos de la función IMPACT, función empleada por Adams[©] Solver y su estrecha relación con la teoría de contactos de Hertz, además de explicar con más detalle los parámetros que conforman la ecuación de la fuerza normal de contacto.

El Apéndice D explica la operación de orientación, esta operación permite modificar la orientación de los ejes de rotación de la polea o cualquier otro cuerpo con respecto a otro sistema de referencia. Esta operación de orientación emplea los ángulos de Euler, mientras que el Apéndice E explica todos los parámetros requeridos para la creación de una fuerza de fricción en un par prismático, entre los cuales se encuentran los coeficientes de fricción estático y dinámico, el solapamiento inicial y final, factor de amortiguamiento, deformación máxima debida a la fricción estática entre otros.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos.

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos de los sistemas mecánicos que contienen: Poleas y cables, poleas y bandas, cadenas y catarinas y engranes. Únicamente los detalles indispensables para emplear las herramientas del módulo Machinery se explicarán de manera muy somera.

2.1. Fundamentos teóricos de sistemas de poleas para cables y bandas.

De acuerdo con el Servicio Nacional de Aprendizaje (SENA) [36], una polea se considera un sistema de transmisión lineal que está formado por un cuerpo circular que cuenta con un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo usualmente baricéntrico y que alrededor de toda su periferia se forma una canaleta conocida como garganta, del inglés “throat”, vea la figura 2.1, la cual simplifica el contacto entre el cable o banda y la polea.

La polea está conformada por tres partes primordiales, vea la figura 2.1.

- (a) **Cuerpo:** es la parte de la polea encargada de unir el cubo y la llanta. Cuando el tamaño del cuerpo sea relativamente pequeño éste tiende a ser fabricado como un cuerpo sólido, pero a medida que el tamaño del cuerpo aumente éstas serán fabricadas con brazos, con el objeto de disminuir la masa y por ende el peso de la polea.
- (b) **Cubo:** es un pequeño agujero por el cual el eje de rotación se ensambla con la polea.
- (c) **Garganta:** es la parte de la polea donde existe contacto con el cable o banda y donde llega a existir mayor desgaste.

De acuerdo con Slocum, [37], cuando un cable, correa o banda se utiliza para transmitir movimiento o para levantar una carga y se utiliza una polea fija, la eficiencia de la transmisión disminuye y el cable, correa o banda tienden a desgastarse rápidamente por rozamiento y el calor generado en el punto de contacto, vea la figura 2.3. Para evitar esos problemas se debe emplear una polea que permita movimiento de rotación, ya que de esta manera el contacto es de rodadura entre la polea y el cable, correa o la banda. Mas aún, para evitar daño por fatiga, se recomienda emplear poleas

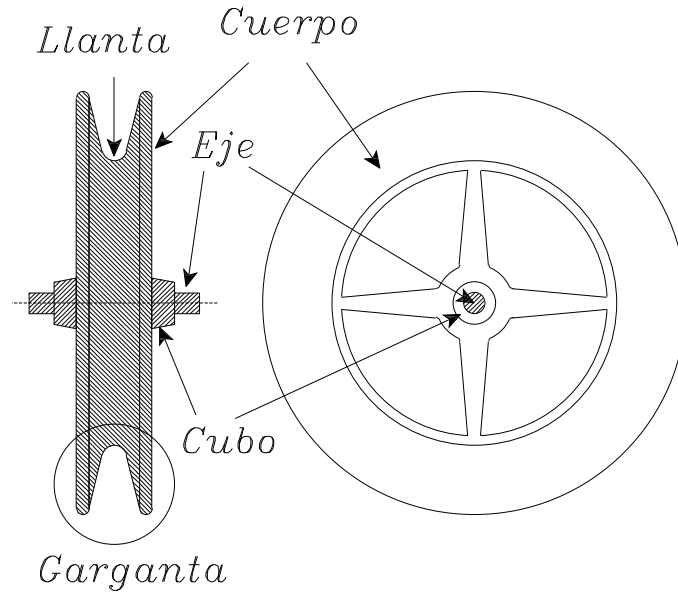


Figura 2.1: Elementos básicos de las poleas para cable.

cuyo radio sea de por lo menos 20 veces el diámetro nominal del cable en el caso de utilizar poleas para cables metálicos.

Las aplicaciones más comunes de las poleas es la transmisión de potencia desde un punto a otro, la transmisión de movimiento lineal o rotatorio y la posibilidad de modificar la dirección de una fuerza, vea la figura 2.3. Además las poleas pueden generar una relación de transmisión directamente vinculada con la velocidad de giro de la polea de entrada y la velocidad de giro de la polea de salida, cuando la transmisión es mediante poleas y bandas, vea la figura 2.2 y la ecuación (2.1).

$$i = \frac{r_B}{r_A} = \frac{\omega_A}{\omega_B} \quad (2.1)$$

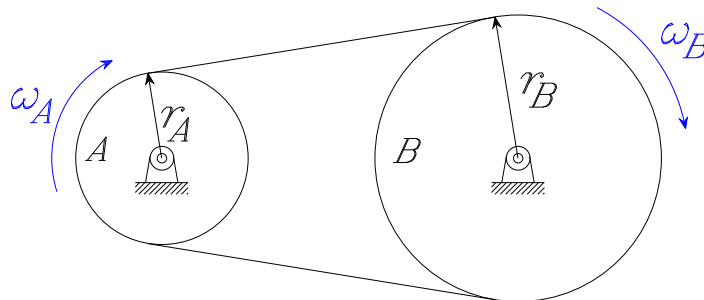


Figura 2.2: Relación de transmisión mediante poleas y bandas.

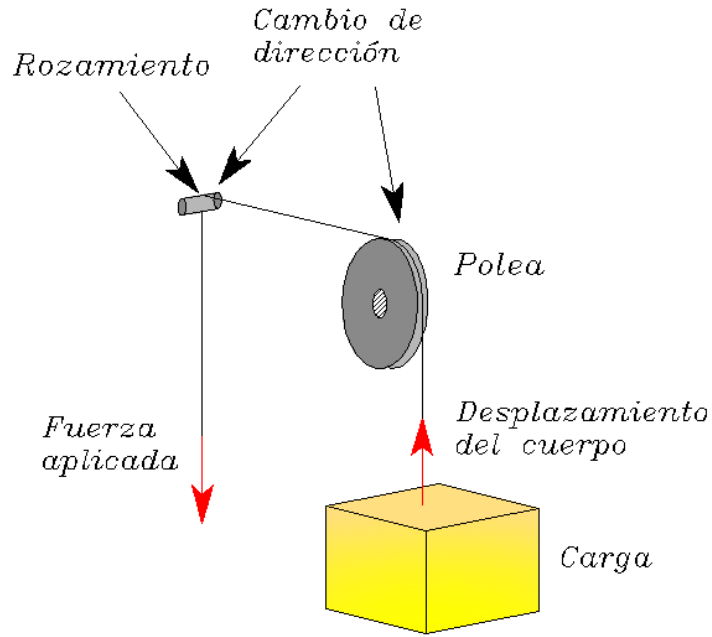


Figura 2.3: Propiedades de las poleas.

Las correas y cables son muy comunes para la transmisión de potencia, eso se debe a que ambos tienen cierta elasticidad que les permite acoplarse alrededor de cuerpos con perfil circular y con una eficiencia relativamente alta, por lo tanto, se puede clasificar las poleas en dos categorías: poleas para cable y poleas para bandas o correas, vea la figura 2.4.

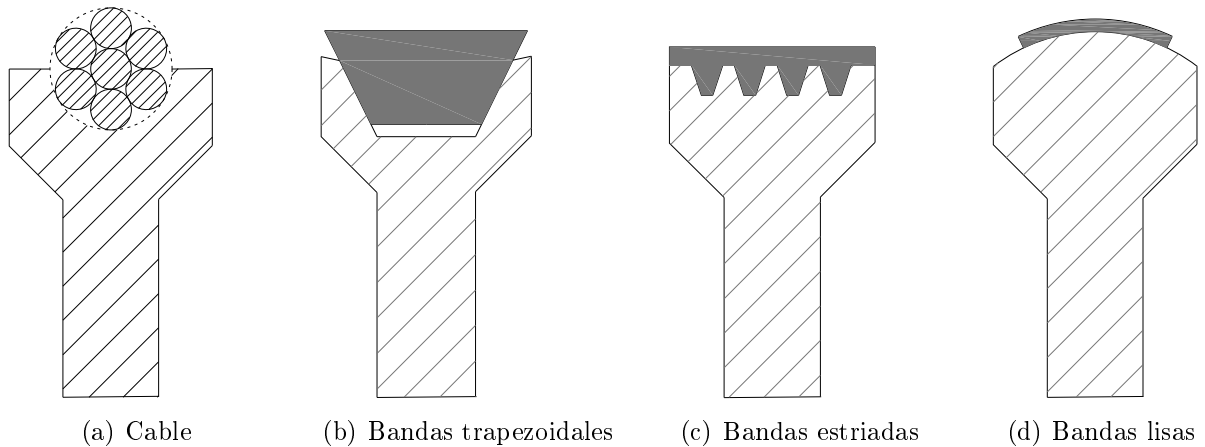


Figura 2.4: Secciones de los diferentes tipos de poleas.

Las poleas para cable poseen una garganta con un perfil semicircular donde entra en contacto con el cable de acero, este tipo de polea se emplean para elevar cargas y para tracción. Por otro lado, las poleas para bandas, poseen una garganta con un perfil trapezoidal, liso o estriado, y se emplean para transmitir movimiento entre ejes de acuerdo con una relación de transmisión, vea la ecuación (2.1).

2.2. Fundamentos teóricos de poleas para cables.

Básicamente la función primordial de una polea para cable de acero es levantar y arrastrar cargas y se clasifican en dos tipos principales: poleas fijas y poleas móviles.

Las poleas fijas mantienen su eje de rotación fijo en un punto en el espacio, esto limita el movimiento de la polea únicamente a rotación alrededor de un eje fijo usualmente baricéntrico; esto quiere decir, que la polea no podrá trasladarse en el espacio mientras que las poleas móviles no solamente poseen movimiento alrededor de un eje, sino que dicho eje de rotación puede desplazarse en el espacio, en otras palabras, las poleas móviles van unidas a la carga y se desplazan junto con ella.

Oberg, [30], hace mucho énfasis en la ganancia mecánica que ambos tipos de poleas generan, según el autor la polea fija no genera ningún tipo de ganancia mecánica por lo que su función esencial es la reducción del rozamiento entre la misma polea y el cable; de esa manera se logra reducir el desgaste entre el cable y la polea y por consecuencia aumentar la vida útil de ambas. Mientras tanto las poleas móviles son un mecanismo que genera ganancia mecánica, lo que permite vencer mas fácilmente una carga o resistencia; de acuerdo con lo anterior, sólo es necesario aplicar una fuerza igual o ligeramente mayor a la mitad de la fuerza producida por la carga o resistencia. La combinación tanto de poleas fijas y móviles se le conoce como polipasto, vea la figura 2.5.

Considerando un sistema polipasto con n número de poleas móviles y que requiere vencer una resistencia T , necesita aplicar una fuerza ligeramente mayor a $F = T/2^n$.

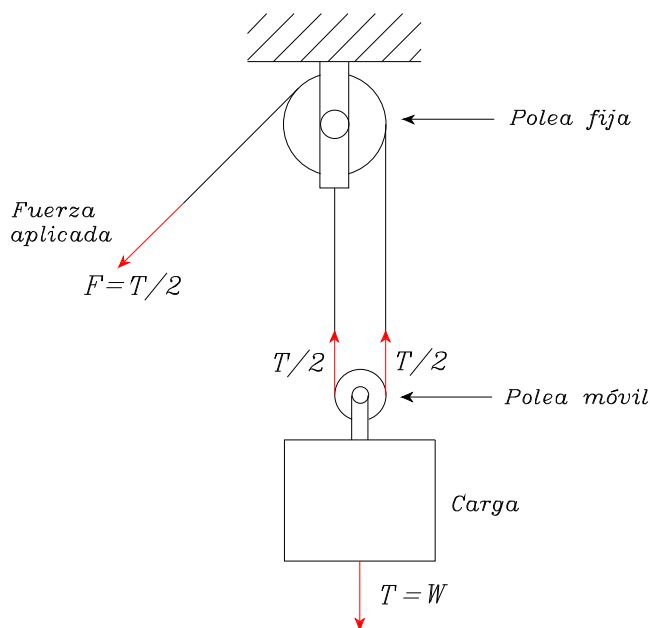


Figura 2.5: Polipasto para elevación de carga.

Como se muestra en la figura 2.5, si se quiere levantar una carga de 150 N , es necesario aplicar una fuerza F ligeramente mayor a 75 N para vencer la carga, esto debido a que el sistema de poleas

contiene una polea móvil y otra fija, aplicando la ecuación anterior se obtiene:

$$F = \frac{150N}{2} = 75 N$$

Es necesario aclarar que estos análisis desprecian completamente el peso tanto de la poleas como de la cuerda, y por consecuencia sus momentos de inercia.

2.2.1. Dimensiones de la polea para cables.

La polea para cable está conformada por tres secciones importantes, la garganta, el cuerpo y el cubo como se explicó de forma general en la sección 2.1, vea la figura 2.1. Estos elementos se describen con más detalle en la figura 2.6.

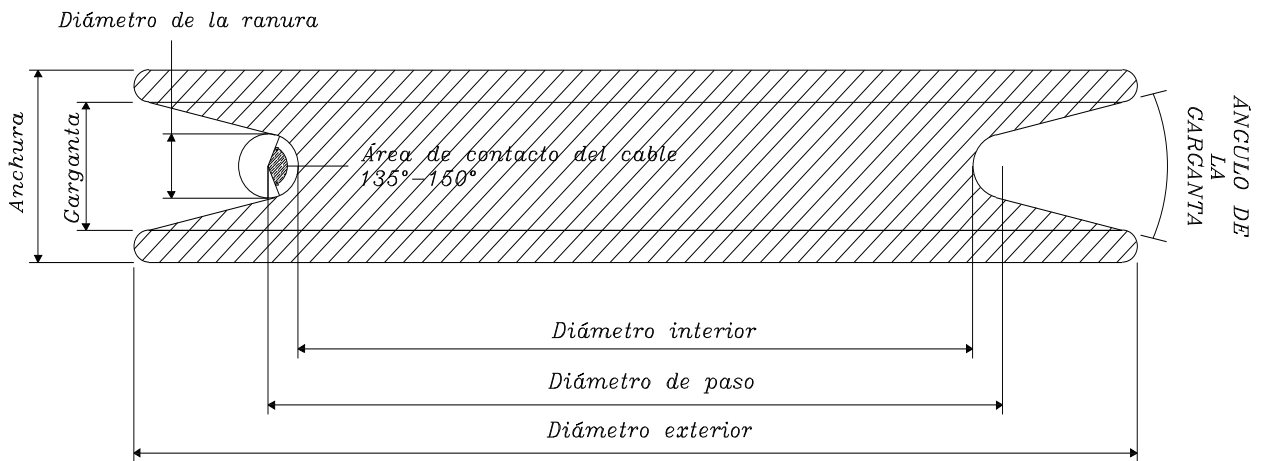


Figura 2.6: Dimensionamiento de una polea para cables.

La polea está conformada por tres diámetros fundamentales, el diámetro exterior, outside diameter, el diámetro primitivo, pitch diameter, y el diámetro de rodamiento, tread diameter, estos parámetros conforman el cuerpo de la polea. La anchura de la polea, width, el diámetro de la ranura, groove diameter, el ángulo de la garganta y la profundidad de la canaleta forman la garganta de la polea. Se puede observar el área de contacto entre el cable y la polea que tiene un valor entre los 135° y 150°, algunos autores como CODELCO [11] mencionan un ángulo de contacto entre 120° y 150°. Estos parámetros son de importancia al momento de diseñar una polea para cable en MSC Adams®.

Otro aspecto que debe considerarse al seleccionar una polea es el diámetro de rodamiento de la garganta. Existen dos casos:

1. El diámetro de rodamiento es más pequeño que el diámetro del cable.

Al tener la garganta de la polea un diámetro de rodamiento más pequeño que el del cable genera una mayor presión en el área de contacto generando fatiga en el cable. Los esfuerzos de flexión harán que se marquen las huellas del cable sobre toda la garganta y hará que el mismo se desgaste más rápidamente por abrasión o rozamiento.

2. El diámetro de rodamiento es más grande que el diámetro del cable.

Si la polea cuenta con un diámetro de rodamiento mucho más grande que el diámetro del cable, esto hará que el cable no sea soportado de forma correcta creándose esfuerzos transversales y provocando aplastamiento en el mismo y por consecuencia provocando daño por distorsión o deformación como el alargamiento del cable. Estos fenómenos aceleran el daño por fatiga y reducen la vida útil del cable, vea la figura 2.7 y CODELCO [11].

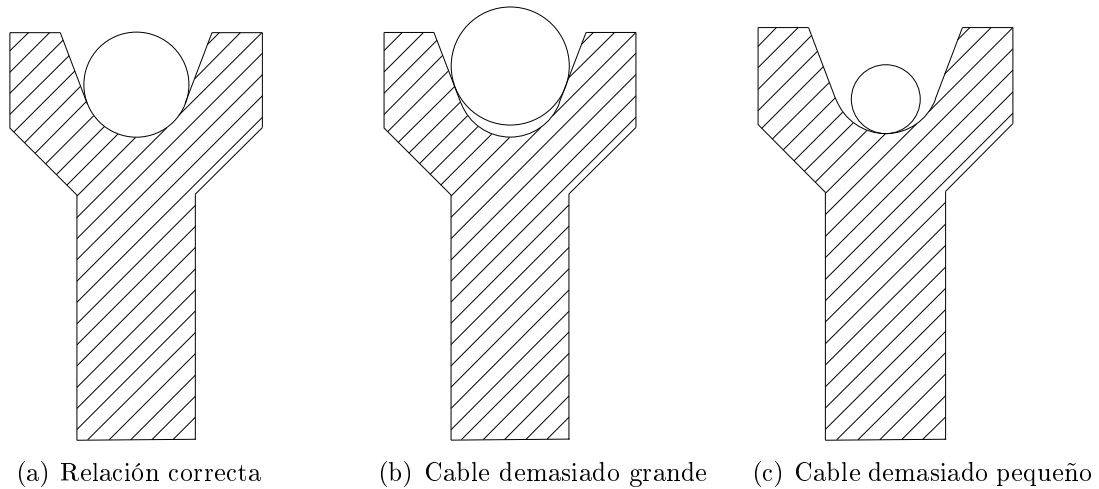


Figura 2.7: Relación entre el diámetro del cable y el diámetro de rodamiento de la polea.

Si se emplea un cable de acero con un diámetro mucho más pequeño que el diámetro de rodamiento de la polea, con el tiempo se formará un canal bajo el diámetro de rodamiento de la polea, vea la parte central de la figura 2.8. Si después de esta situación se reemplaza el cable más pequeño por otro de la medida correcta, el contacto entre el cable y la polea dañará la polea por la el canal generado en la periferia de la garganta, vea la parte derecha de la figura 2.8.

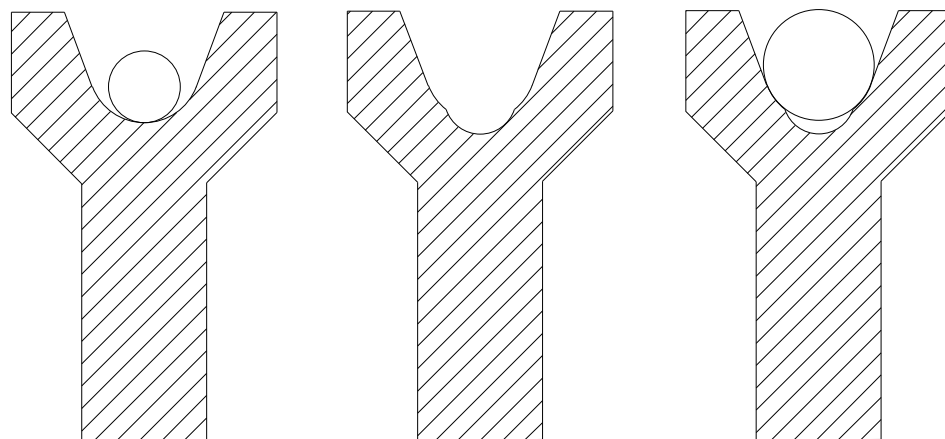


Figura 2.8: Efecto de una relación de radios inapropiada entre el cable y una polea.

Como se mencionó el ángulo de contacto que debe existir para que el cable y la polea funcionen correctamente debe tener un valor entre $120^\circ - 150^\circ$ o $135^\circ - 150^\circ$, mientras que la profundidad de la garganta debe ser por lo menos 1.5 veces el diámetro nominal del cable mientras que el diámetro de rodadura debe ser por lo menos 1.08 el diámetro nominal del cable, vea la figura 2.9.

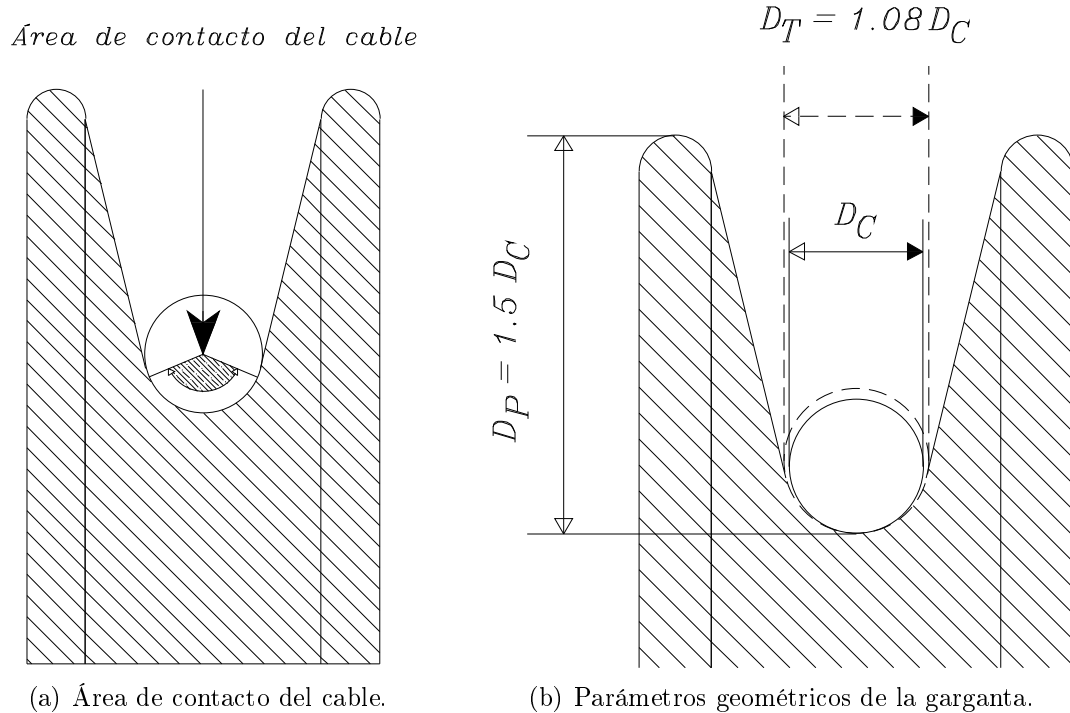


Figura 2.9: Selección de los parámetros geométricos de la garganta de la polea.

2.3. Fundamentos teóricos de cadenas y catarinas

En esta sección se presenta una visión general de los diversos tipos de cadenas, sus usos, sus ventajas y desventajas al igual que sus características de diseño.

De acuerdo con la American Chain Association [3], la cadena puede considerarse como una cremallera flexible y continua que se engrana alrededor de un par de ruedas dentadas o catarinas, "sprockets". La cadena puede usarse con el propósito de transmitir potencia desde una fuente, o para el transporte de distintos materiales. En esta sección se describen dos tipos de cadenas: cadenas de rodillos y cadenas silenciosas, estos dos tipos de cadenas son importantes para el desarrollo de un sistema de cadenas y catarinas en Adams[®]/Machinery. Se sabe que las cadenas de rodillo sirven para cualquier tipo de aplicación mientras que la cadena silenciosa se utiliza esencialmente para aplicaciones de transmisión de potencia.

Las principales funciones y aplicaciones de las cadenas y catarinas son similares a las de las bandas y poleas, entre las cuales se encuentran la transmisión de potencia, los transportadores y

los elevadores de cangilones. Los sistemas de cadenas y catarinas son aplicables cuando la distancia entre cada uno de los ejes de rotación de la polea conductora y conducida es demasiadamente corta para usar bandas y demasiadamente grande para usar engranes. Usualmente las velocidades angulares de los ejes de las catarinas son menores que las velocidades angulares de los ejes de las poleas, pues las cadenas pueden transmitir potencias considerables a velocidades angulares menores.

La ventajas que presentan los sistemas de transmisión mediante cadena son:

- La posibilidad de emplearlos tanto para distancias cortas y largas entre los centros de las catarinas.
- La posibilidad de accionar un número elevado, mayor a dos, de ejes que rotan en la misma dirección o en la dirección opuesta, por medio de una única cadena y a partir de una sola catarina.
- Los sistemas de cadenas no presentan deslizamiento, son compactos y no requieren tensión inicial como es el caso de las poleas.
- Si están bien diseñados presentan una vida útil relativamente larga, son poco sensibles al área en que se trabajan, permitiendo condiciones de altas y bajas temperaturas, al igual que en presencia de algún material extraño.

Vea el catálogo Renold, [34].

Existen algunas consideraciones al momento de implementar un sistema de cadenas y catarinas para su buen funcionamiento.

- Los ejes de rotación tienen que ser paralelos y las ruedas dentadas deben estar ubicadas en el mismo plano.
- Es preferible que los ejes de rotación se encuentren completamente horizontales, de esta manera se evita el uso de algún apoyo lateral.
- Requieren de un buen mantenimiento, limpieza periódica de la cadena y catarina, al igual que el área donde se encuentren trabajando.
- Necesitan una lubricación adecuada y periódica.
- Los sistemas de cadenas y catarinas no son adecuados cuando se requiere un movimiento de precisión. Pues el efecto poligonal o cordal genera ruido y vibraciones sobre la cadena.
- Para evitar el alargamiento de la cadena es necesario permitir el desplazamiento de, al menos, uno de los ejes, de manera que la cadena pueda tensarse o bien emplear un piñón tensor sobre el ramal flojo.

2.3.1. Cadenas de rodillos.

De acuerdo con la American Chain Association, [3], el principal propósito de los rodillos es el reducir las fuerzas de fricción, además de ayudar a engranar cada uno de los dientes de las catarinas o piñón y poder transferir cualquier acción deslizante a cada uno de los miembros internos de la cadena. Otra función de los rodillos es la de servir como guía al momento en que la cadena se acopla con los dientes de la catarina o para poder transportar algún material.

Las cadenas de rodillos están conformadas por una hilera de rodillos o por múltiples hileras, vea la figura 2.11. En los sistemas de cadenas múltiples, las hileras de cadenas van unidas una a lado de otra, como se observa en la figura 2.11.

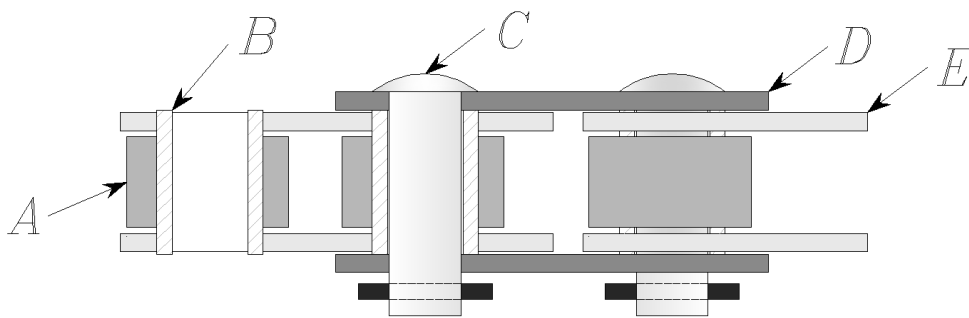


Figura 2.10: Componentes de una cadena de rodillos de una hilera.

Los principales componentes de una cadena de rodillos son:

1. **A** Rodillo “Roller”.
2. **B** Buje “Bushing”.
3. **C** Perno “Pin”.
4. **D** Placa de unión externa “Pin link plate - Outer link plate”.
5. **E** Placa de unión interna “Roller link plate - Iner link plate”.

Las dimensiones nominales de las cadenas son aproximadamente proporcionales al paso de la cadena, vea la figura 2.11. Para más información revisar el catálogo Renold [34]. La nomenclatura empleada en la descripción de una cadena de rodillos está dada por:

- p Paso de la cadena.
- B Anchura interior del buje.
- C Diámetro del rodillo.
- H_1 Longitud del perno, cadenas de una sola hilera.
- H_2 Longitud del perno, cadenas de dos hileras.
- F Ancho de la placa exterior.
- E Ancho de la placa interior.

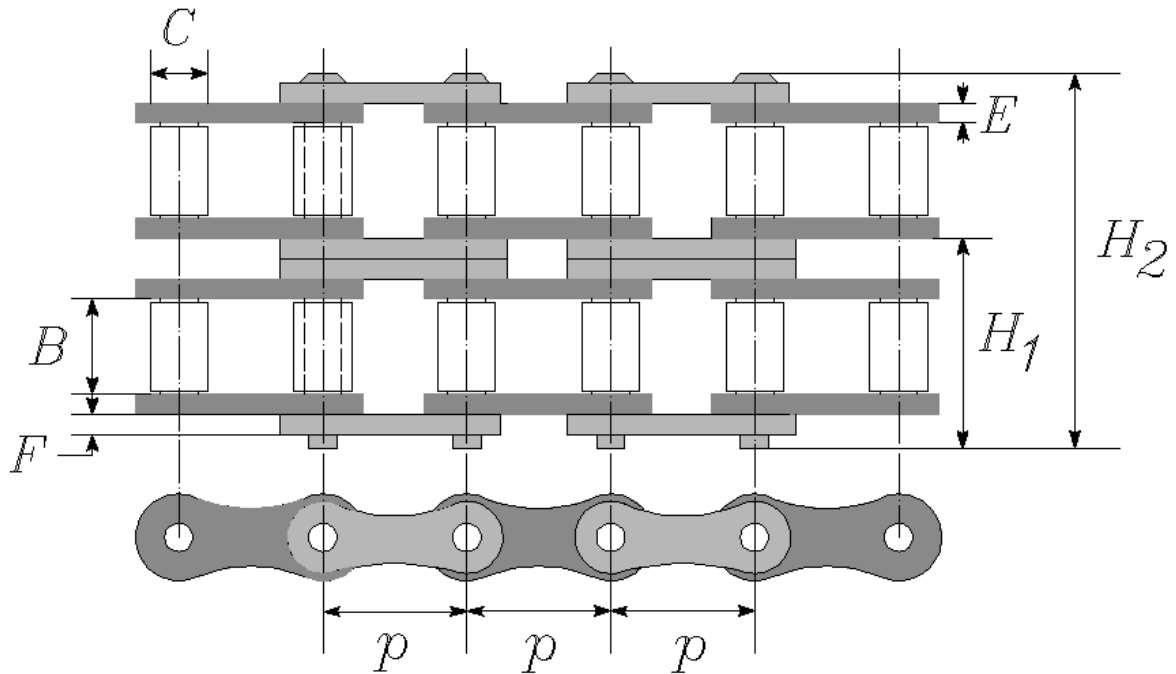


Figura 2.11: Dimensionamiento de una cadena de rodillos.

2.3.2. Cadena silenciosa.

La cadena silenciosa también conocida como cadena de dientes invertidos, vea American Chain Association [3], se encuentra formada por placas de eslabones dentados unidas por medio de uno o dos pernos y las juntas de los componentes de tal forma que permite una flexión libre entra cada paso, vea la figura 2.12.

- Las cadenas silenciosas transmiten potencia de forma suave y eficiente.
- Las cadenas silenciosas transmiten potencia a velocidades relativamente altas, a comparación de los otros tipos de cadena, como la cadena de rodillos.
- Las cadenas silenciosas reducen considerablemente el ruido y las vibraciones.
- Las cadenas silenciosas pueden tener un índice o factor de transmisión elevado.
- Las cadenas silenciosas pueden emplearse en condiciones de altas temperatura y húmedas.
- Las cadenas silenciosas disminuyen el impacto entre la cadena y las catarinas.

2.3.3. Análisis geométrico y cinemático de la cadena de rodillo.

La figura 2.13 muestra una parte de un sistema de cadena de rodillos y catarina, donde la catarina rota en sentido antihorario.

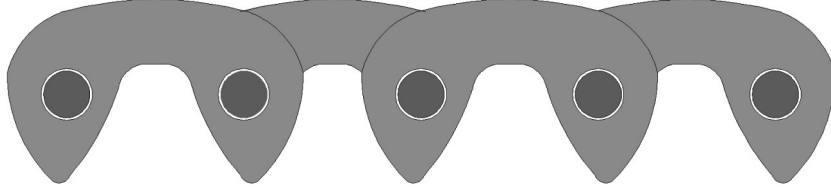


Figura 2.12: Perfil de una cadena silenciosa de una hilera.

Haciendo un análisis trigonométrico, se obtiene una expresión del diámetro de paso de la catarina, en función del número de dientes de la catarina, vea la figura 2.13(b).

$$\text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{D}{2}} \quad (2.2)$$

Además de la misma figura 2.13(b) el ángulo de paso, de un eslabón de la cadena está dada por:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{Z} \quad (2.3)$$

Donde Z es el número de dientes de la catarina.

Sustituyendo la ecuación 2.3 en la ecuación (2.2), se obtiene que:

$$D = \frac{p}{\text{sen} \left(\frac{180^\circ}{Z} \right)} \quad (2.4)$$

De acuerdo con Budynas et al. [8], el ángulo $\alpha/2$ se le conoce como ángulo de articulación, y es el ángulo a través del cual el eslabón y rodillo de la cadena entra en contacto con la catarina. Este contacto inicial genera un impacto entre los rodillos de la cadena y los dientes de la catarina, generando desgaste tanto en los dientes de la catarina como en los rodillos y bujes de la cadena.

La longitud de la cadena, L , está dado por:

$$L = \frac{2C}{p} + \frac{(Z_2 - Z_1)}{2} + \left[\frac{p(Z_2 - Z_1)^2}{4\pi^2 C} \right]$$

donde p es el paso de la cadena, C es la distancia entre centros de las catarinas y Z_1 y Z_2 son el número de dientes de la catarina motriz y la catarina conducida, respectivamente.

Trabajando la ecuación anterior, se obtiene una expresión para la distancia entre centros de las catarinas.

$$C = \frac{p}{4} \left[L - \frac{(Z_2 - Z_1)}{2} + \sqrt{\left(L - \frac{Z_2 - Z_1}{2} \right)^2 - \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{4\pi^2}} \right]$$

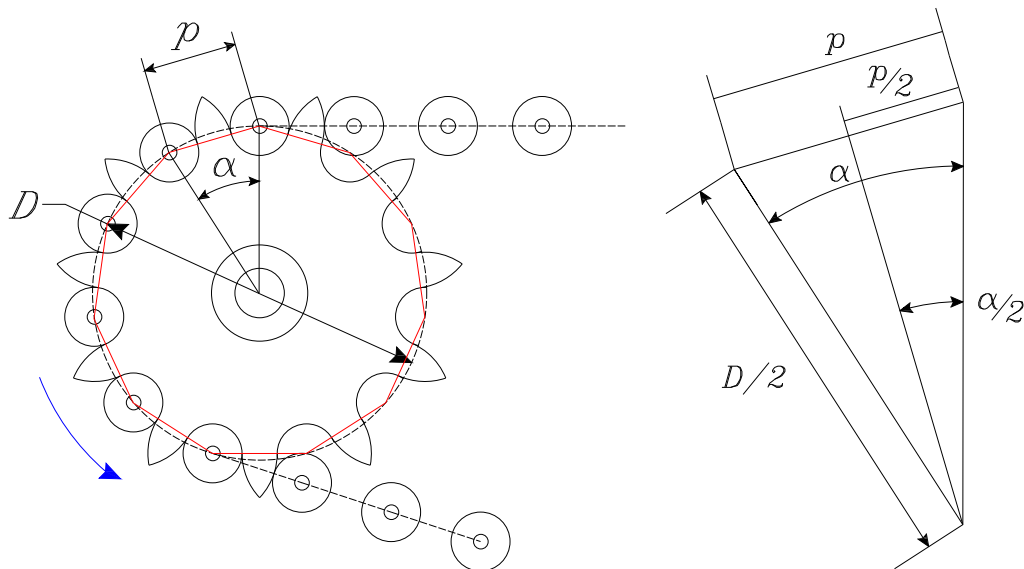


Figura 2.13: Análisis geométrico de una cadena de rodillos.

2.3.4. Efecto poligonal en cadenas.

En esta sección se analizará el efecto poligonal que aparece en sistemas de cadenas y catarinas. Como puede observarse en la figura 2.14, los rodillos de una cadena, al estar en contacto con la catarina, forman un polígono —que si toda la catarina estuviera envuelta por la cadena tendría Z lados, donde Z es el número de dientes de la catarina. Al rotar la catarina, el radio desde el centro de la catarina al centro de los rodillos de la cadena varia, este fenómeno ocasiona dos efectos:

- Un movimiento vertical de los tramos de la cadena, entre las catarinas, que están libres. Este movimiento vertical, cuyo desplazamiento está representado por δ , puede ocasionar vibraciones que conducen a un deterioro extremadamente rápido de las catarinas y cadenas.
- Un cambio en la velocidad de la cadena, que se conoce como efecto poligonal y que deriva en la conocida como velocidad cordal.

La figura 2.14 muestra la línea que conecta los centros de los rodillos de la cadena en la parte que no está envolviendo a las catarinas, esta línea —supuesta recta— se conoce como línea de paso. Esta línea de paso tiene dos posiciones, una cuando el rodillo de la cadena está a una distancia r_a del centro de la catarina y otra cuando el rodillo de la cadena está a una distancia r_b del centro de la catarina. Cuando esta distancia es r_a la línea de paso se encuentra en su posición más elevada, mientras que cuando esta distancia es r_b la línea de paso se encuentra en la posición mas baja; en otras palabras, esta es la posición en el que la línea de paso de la cadena se aproxima más al centro de la catarina.

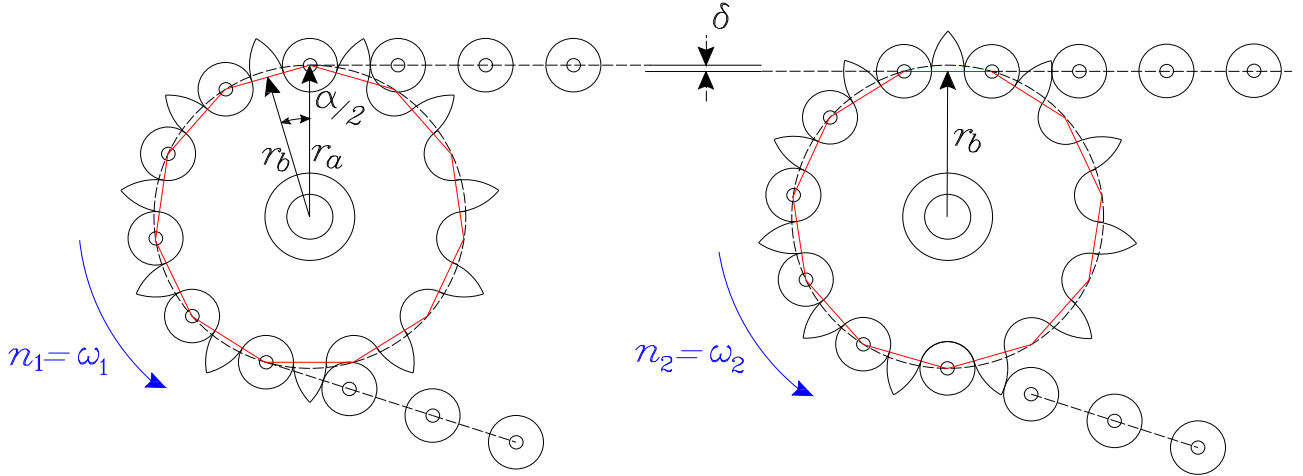


Figura 2.14: Efecto cordal o efecto polígono.

De acuerdo con Deutschman et al. [39] y la figura 2.14, resulta:

$$r_B = r_A \cos\left(\frac{180^\circ}{Z_1}\right)$$

De manera que el desplazamiento vertical de la cadena δ , está dado por:

$$\delta = r_a - r_b = r_a \left(1 - \cos\frac{180^\circ}{Z_1}\right)$$

La diferencia de altura, que es equivalente a una diferencia del radio entre el centro de la catarina al centro del rodillo de la cadena bajo análisis, genera un cambio en la velocidad de la cadena. En particular, la velocidad de la cadena es máxima cuando el radio entre el centro de la catarina al centro del rodillo de la cadena es máximo es igual a r_a y la velocidad de la cadena es mínima cuando el radio entre el centro de la catarina al centro del rodillo de la cadena es máximo es igual r_b . Este efecto se le conoce como efecto cordal o efecto poligonal y se genera debido a que la línea de paso de la cadena, cuando envuelve a la catarina no forma una circunferencia sino un polígono con un número de lados igual al número de dientes de la catarina, vea la figura 2.15. Por lo tanto, el número de dientes de la catarina es de suma importancia, ya que afecta la variación de la velocidad durante la rotación de la catarina, vea Deutschman et al. [39]. Para minimizar la variación de la velocidad de la cadena, es necesario incrementar el número de dientes de la catarina.

Como puede observarse en la figura 2.15, la velocidad de la cadena dependerá de la posición en que se encuentre el polígono, es decir si la posición de la catarina corresponde a un vértice (velocidad máxima) o a un lado (velocidad mínima) del polígono.

La velocidad promedio de la cadena, v , vea Budynas et al. [8], se define como:

$$v = \frac{Z p \omega}{2 \pi}$$

Donde ω es la velocidad angular de la catarina en radianes por segundo. En este caso, la velocidad promedio, v , estará dada en mm/s o $pulg/s$ dependiendo si el paso, p , de la cadena está dada en mm o $pulgadas$, respectivamente.

La velocidad máxima de la cadena, que se produce cuando el radio entre el centro de la catarina y el centro del rodillo es igual a r_a , está dada por:

$$v_{max} = \omega r_a = \omega \frac{D}{2} = \frac{\omega p}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{Z}\right)}$$

La velocidad mínima de la cadena, que se produce cuando el radio entre el centro de la catarina y el centro del rodillo es igual a r_b , está dada por:

$$v_{min} = \omega r_b = \omega \frac{D}{2} \cos\left(\frac{180^\circ}{Z}\right) = \frac{\omega p \cos\left(\frac{180^\circ}{Z}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{Z}\right)}$$

Por lo que la variación de la velocidad de la cadena resulta igual a:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v_{max} - v_{min}}{v} = \frac{\omega p}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{Z}\right)} \frac{1 - \cos\left(\frac{180^\circ}{Z}\right)}{\frac{Z p \omega}{2\pi}} = \frac{\pi}{Z} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{Z}\right)} - \frac{1}{\tan\left(\frac{180^\circ}{Z}\right)} \right) \quad (2.5)$$

Esta variación de velocidad se le conoce como variación cordal de la velocidad. La gráfica de la ecuación (2.5) se muestra en la figura 2.15. Allí se puede apreciar que entre menor sea el número de dientes de la catarina, mayor será la diferencia de velocidad de la cadena. Por lo que para disminuir el efecto poligonal aumentará es necesario aumentar el número de dientes de la catarina. Para poder seleccionar el tipo de catarina, es necesario revisar los catálogos de los fabricantes, como el manual de Renold [34] o el manual de Fenner [13].

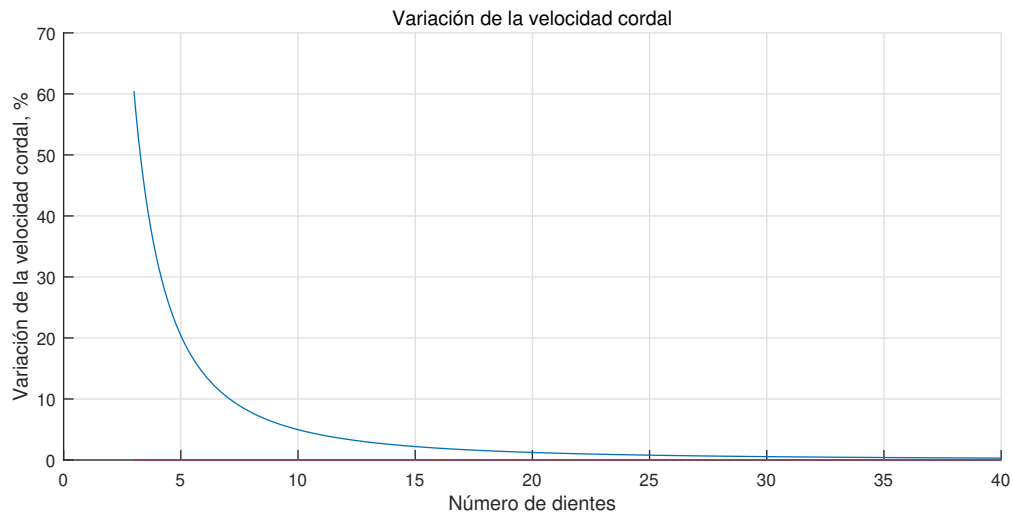


Figura 2.15: Velocidad cordal en función del número de dientes de la catarina.

2.4. Fundamentos teóricos de sistemas de engranes.

El sistema de engranes más simple se compone de dos engranes o ruedas dentadas que pueden tener diámetros diferentes. El caso más común es encontrar sistemas de engranes con diferentes diámetros, con el fin de aumentar o disminuir la relación de velocidad entre ellos.

Básicamente un sistema de engranes, es un mecanismo cuya función principal es el transmitir un movimiento de rotación uniforme desde el eje de un engrane al eje del otro, mediante el contacto entre dientes de ambos engranes. Existen cuatro principales tipos de engranes: rectos, helicoidales, cónicos y sinfín.

1. Engranes Rectos.

Los engranes rectos poseen dientes cuyo perfil es paralelo al eje de rotación del engrane y cuyo propósito es el transmitir movimiento de rotación uniforme de un eje a otro. En este caso los ejes de rotación de ambos engranes deben ser paralelos entre sí, vea la figura 2.16(a).

2. Engranes Helicoidales.

De acuerdo con Budynas et al. [8], los engranes helicoidales poseen sus dientes cuyo perfil está inclinado respecto al eje de rotación de ambos engranes. De esta manera, se transmite potencia entre ejes paralelos, aunque existen casos en la que este tipo de engranes se usan para transmitir movimiento de rotación entre ejes no paralelos. Los engranes helicoidales tienen la ventaja de ser más silenciosos que los engranes rectos, vea la figura 2.16(b). El ángulo entre el perfil del diente y el eje de rotación del engrane se le conoce como ángulo de la hélice.

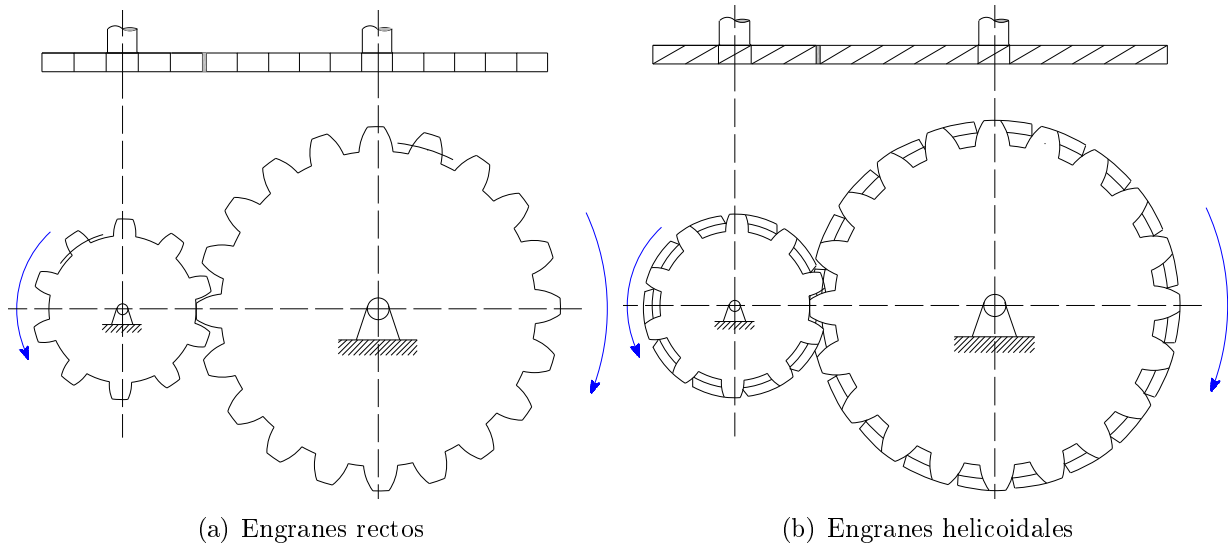


Figura 2.16: Tipos de engranes.

3. Engranés cónicos.

Los engranes cónicos poseen dientes rectos o en espiral, estos dientes están labrados sobre superficies cónicas. De manera que, estos engranes poseen una forma de cono truncado, permitiendo la transmisión de movimiento de rotación uniforme entre ejes que se interesectan con un ángulo variable, vea la figura 2.17.

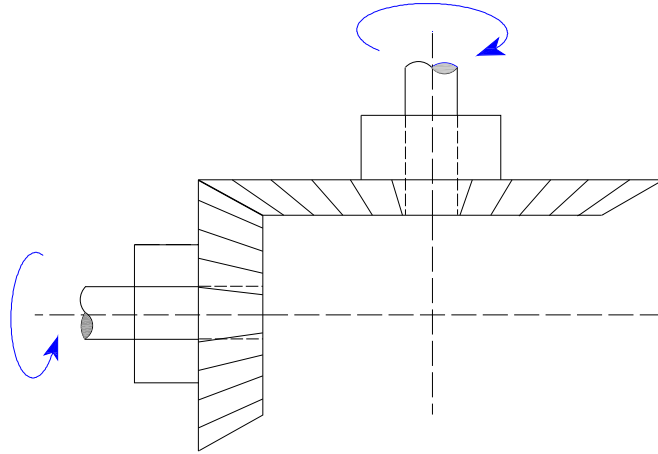


Figura 2.17: Engranés cónicos

Además de los engranes cónicos rectos también se pueden encontrar engranes cónicos en espiral y los engranes del tipo hipoide. La diferencia entre los engranes cónicos y los engranes hipoide —que conectan ejes perpendiculares entre si—, es que en los engranes cónicos, los ejes de rotación del piñón y de la corona se interesectan, mientras que los engranes del tipo hipoide, el eje de rotación del piñón posee cierto desplazamiento con respecto al eje de la corona; es decir, no se interesectan. A medida que el desplazamiento incrementa, también lo hace la longitud de los dientes del piñón, vea la figura 2.18.

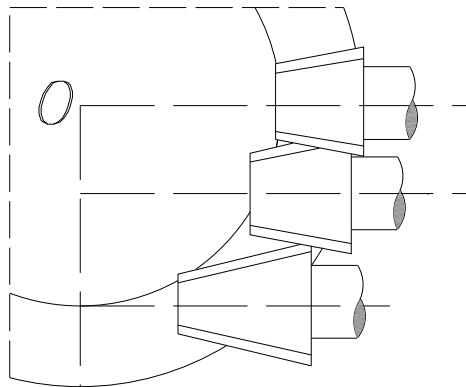


Figura 2.18: Longitud del piñón en función del grado de desplazamiento del eje de rotación del mismo.

4. Tornillo sinfín.

El tornillo sinfín está compuesto por dos elementos: el tornillo sinfín o gusano, que actúa como un elemento motriz y la rueda dentada o corona, que actúa como un elemento conducido. Al igual que cualquier sistema de engranes, este arreglo permite la transmisión de movimiento de rotación desde un componente a otro. La rosca del tornillo sinfín engrana con los dientes de la rueda dentada, de tal forma que los ejes de rotación de ambos son perpendiculares entre sí, vea la figura 2.19.

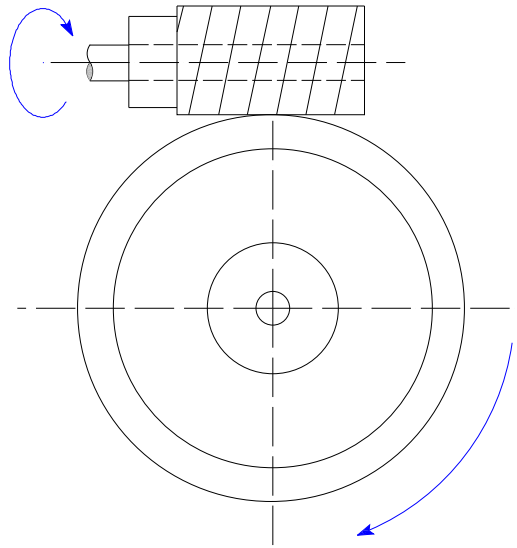


Figura 2.19: Tornillo sinfín.

El sentido de rotación de la rueda dentada depende del sentido de rotación del tornillo sinfín, es decir, si los dientes del tornillo están cortados a la derecha o izquierda. Básicamente la rueda dentada rota un solo diente por cada vuelta del tornillo sinfín, por lo que, si se quiere que la rueda dentada de una vuelta completa es necesario que el tornillo gire tantas veces como dientes tenga la rueda dentada, por lo que la relación de velocidad entre el piñón y la rueda dentada está dada por:

$$i = \frac{1}{Z}$$

Donde z es el número de dientes de la corona. Debido a que el sistema posee una relación de velocidad baja, el sistema actúa como un excelente reductor de velocidad. Sin embargo, su eficiente es relativamente pobre por la presencia importante de deslizamiento entre las superficies.

Estos son los tipos de engranajes más comunes, pero el usuario también puede encontrar sistemas de engrane y cremallera y los sistemas planetarios, vea las figuras 2.20(a) y 2.20(b). Este trabajo únicamente trata los engranes del tipo recto o de perfil de involuta.

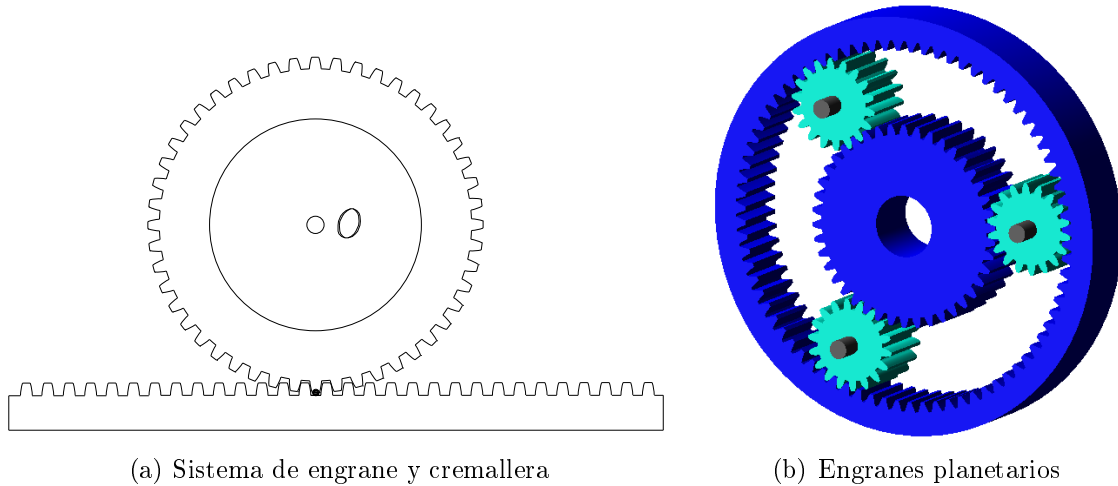


Figura 2.20: Otros tipo de engranes.

2.4.1. Análisis geométrico de un sistema de engranes rectos con perfil de involuta.

Al igual que la transmisión por cadenas, la relación de transmisión de velocidades, i , está dada por la siguiente ecuación:

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (2.6)$$

Donde Z_1 y Z_2 son el número de dientes del engrane 1 y del engrane 2, respectivamente —en la literatura inglesa el número de dientes de los engranes se representa por la letra N — y ω_1 y ω_2 son sus velocidades angulares.

Como se comentó anteriormente, los engranajes sirven para transmitir potencias elevadas cuando la distancia entre ejes no es demasiado grande. El perfil que poseen los engranes rectos debe ser tal que la relación de transmisión se mantenga constante, para lo cual los perfiles deben satisfacer la ley fundamental de los engranajes. En este trabajo se analizarán exclusivamente engranes con el perfil de la involuta de un círculo. Se puede mantener una misma relación de transmisión de velocidad entre dos engranes rectos con solo variar el número de dientes y sin modificar el tamaño de éstos.

La figura 2.21, muestran la transmisión de fuerza entre dos engranes rectos. Como se puede apreciar, el punto de aplicación de la fuerza varía conforme los engranes rotan. Cabe mencionar que en el instante en el que los engranes se tocan en el punto de paso, la velocidad en el punto de paso como parte del engrane motriz es igual que la velocidad en el punto de paso como parte del engrane conducido; por lo que en el instante en el que las curvas de involuta están haciendo contacto en el punto de paso, no existe deslizamiento, en todos los demás casos, va a existir deslizamiento y por lo tanto desgaste.

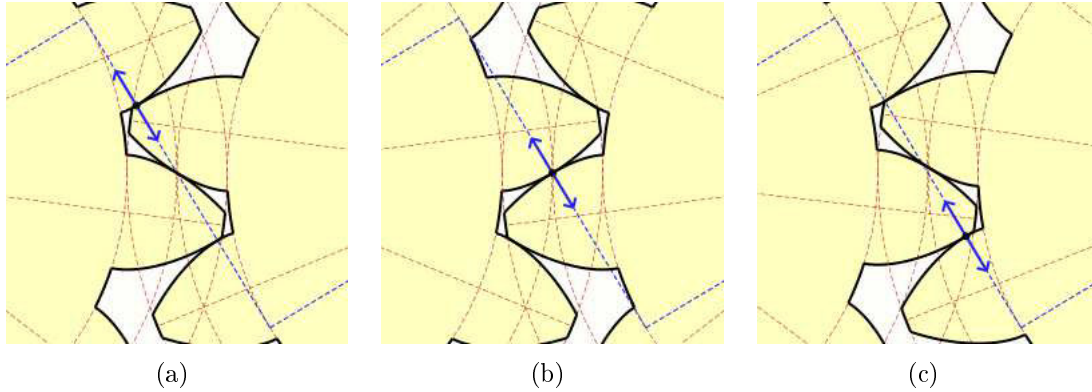


Figura 2.21: Línea de acción.

A continuación se analizan algunas de las características geométricas de los engranes rectos de perfil de involuta.

Las circunferencias que conforman el engrane recto, vea la figura 2.22, son:

- La circunferencia de paso: Representa la circunferencia cuyo centro está en el eje de rotación del engrane y que pasa por el punto de paso. Esta circunferencia sería igual a la que tendría una polea o una rueda de fricción que transmitiera velocidades con la misma relación de velocidad que el engranaje.
- La circunferencia exterior o circunferencia de diente: Es la circunferencia que limita la parte exterior del engrane, es la circunferencia que circunscribe el engrane.
- La circunferencia interior o de fondo: Es la circunferencia que limita el pie de diente.

A partir de estas circunferencias es posible definir otros parámetros geométricos del diente, que se muestran en la figura 2.22:

- a es la cabeza del diente o adendo y es la distancia comprendida entre el las circunferencias exterior y de paso.

$$a = R_o - R_p \quad (2.7)$$

- b se le conoce como pie del diente o dedendo y es la distancia comprendida entre el las circunferencias paso y de fondo o dedendo.

$$b = R_p - R_d \quad (2.8)$$

- h es la altura del diente y está dada por la suma del adendo y el dedendo.

$$h = a + b \quad (2.9)$$

- S es el espesor del diente medido sobre la circunferencia de paso y S' es el ancho del hueco del diente igualmente medido sobre la circunferencia de paso.

- p_c se le conoce como paso circular y es la distancia entre dos puntos iguales de dos dientes consecutivos, medido sobre la circunferencia de paso. El paso circular está comprendido por la suma del espesor del diente y el ancho del hueco del diente.

$$p_c = S + S' \quad (2.10)$$

- p_b se le conoce como el paso base y es la distancia entre dos puntos iguales de dos dientes consecutivos, medido sobre la circunferencia de base.

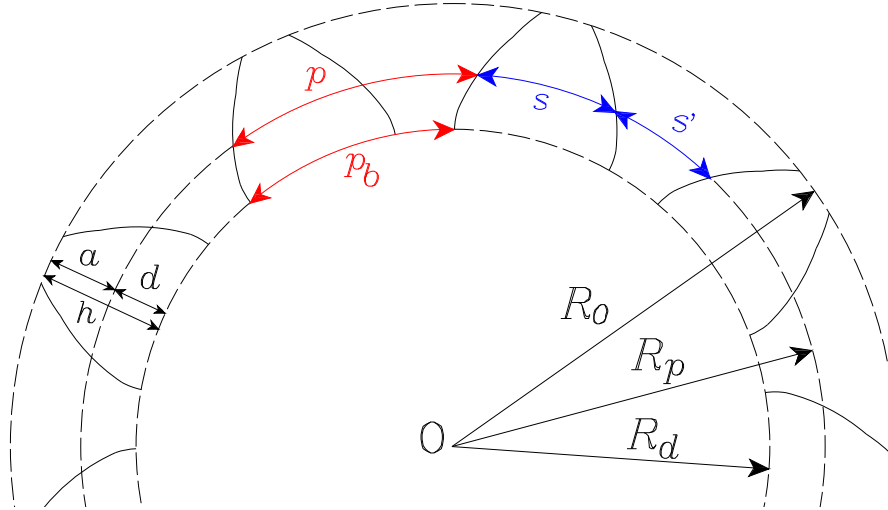


Figura 2.22: Parámetros geométricos de un engrane recto.

A partir de estas definiciones es posible abordar el problema de estandarización de los engranes rectos.

El perímetro de la circunferencia de paso es igual a la multiplicación del número de dientes por el paso circular.

$$l_p = Z p_c \quad \text{por lo tanto} \quad Z p_c = 2 \pi R_p = \pi D_p \quad (2.11)$$

Donde D_p representa el diámetro de la circunferencia de paso. De manera que:

$$p_c = \frac{\pi D_p}{Z} \quad (2.12)$$

Como se mencionó anteriormente el paso circular o paso del diente debe ser constante en un sistema de engranes rectos, por lo que el paso circular del engrane motriz debe ser igual al paso circular del engrane conducido.

$$p_{c1} = p_{c2} = \frac{\pi D_{p1}}{Z_1} = \frac{\pi D_{p2}}{Z_2} \quad (2.13)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{D_{p1}}{Z_1} = m = \frac{D_{p2}}{Z_2} \quad (2.14)$$

Si los diámetros de paso se miden en milímetros, a esta relación, se le denomina módulo del engranaje y es la base de la estandarización de engranes en los sistemas métricos. El módulo representa la relación entre el diámetro de paso, medido en milímetros, y el número de dientes del engrane.

Además, el módulo permite calcular el paso circular de los engranes, de la ecuación (2.13), se tiene que:

$$p_{c1} = p_{c2} = \pi m \quad (2.15)$$

Concluyendo, para que dos ruedas dentadas puedan engranar es necesario que tengan el mismo paso circular o, lo que es igual, que tengan el mismo módulo.

En el sistema inglés de unidades, el recíproco del módulo se le conoce como paso diametral, denotado por la letra P . El paso diametral es la relación que existe entre el número de dientes del engrane respecto al diámetro de paso medido en pulgadas, por lo cual las unidades del paso diametral están dadas en dientes por pulgadas.

$$P = \frac{Z}{D_p} \quad (2.16)$$

De acuerdo con la ecuación (2.6), la relación de velocidad del sistema de engranes, se puede expresar en términos de sus diámetros de paso y, consecuentemente, de sus radios de paso.

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{m D_{p1}}{m D_{p2}} = \frac{D_{p1}}{D_{p2}} = \frac{R_{p1}}{R_{p2}} \quad (2.17)$$

La distancia entre los centros de los engranes, C , está dada como:

$$C = \frac{D_{p1} + D_{p2}}{2} = R_{p1} + R_{p2} = m \frac{Z_1 + Z_2}{2} \quad (2.18)$$

Estas son las ecuaciones básicas que definen a un sistema de engranes rectos, cabe mencionar que la ecuación que define al módulo del engranes, vea la ecuación 2.14, es aplicable para un sistema de engrane y cremallera. Estas ecuaciones son de vital importancia al momento de diseñar ya sea un sistema de engranes rectos o un sistema de engrane y cremallera en Adams[©]/Machinery. Para más información, vea Budynas et al. [8].

Capítulo 3

Sistemas de cables resueltos mediante Adams[©]/Machinery.

En este capítulo se presentan diferentes problemas que involucran sistemas de cables y contrapesos, todos esos problemas se resolverán inicialmente mediante los métodos analíticos que se presentan en las unidades de aprendizaje correspondientes en las licenciaturas de ingeniería mecánica e ingeniería mecatrónica de la División de Ingenierías del Campus Irapuato-Salamanca de la Universidad de Guanajuato; posteriormente esos problemas se resuelven mediante la simulación del sistema empleando las herramientas del módulo Adams[©]/Machinery. Dependiendo de las características de las poleas del sistema los problemas presentados en este capítulo pueden pertenecer a la dinámica de la partícula o a la dinámica del cuerpo rígido.

3.1. Primer problema de sistemas por cables.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 13-12 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 123.

Problema 1: A partir la figura 3.1, determine la aceleración de los cuerpos A , B y C y la fuerza de tensión en cada uno de los cable. El plano inclinado es liso y el coeficiente de fricción cinético, entre la superficie horizontal y el bloque C , es de $\mu_k = 0.2$. Considere una cuerda inextensible, un sistema de poleas de masa despreciable y tres cuerpos con masas de: $m_A = 25\text{ kg}$, $m_B = 5\text{ kg}$ y $m_C = 10\text{ kg}$, respectivamente.

3.1.1. Solución analítica.

De acuerdo con el problema, existe un coeficiente de fricción cinético entre el cuerpo C y el suelo; mientras que, el cuerpo A se desliza sin fricción sobre el plano inclinado. En adición se está considerando una cuerda inextensible y un sistema de polea con masa despreciable. A partir de este resultado, se deduce que las magnitudes de las aceleraciones de traslación; tanto del cuerpo C , el cuerpo B y el cuerpo A ; son iguales. De manera que:

$$a_A = a_B = a_C = a \tag{3.1}$$

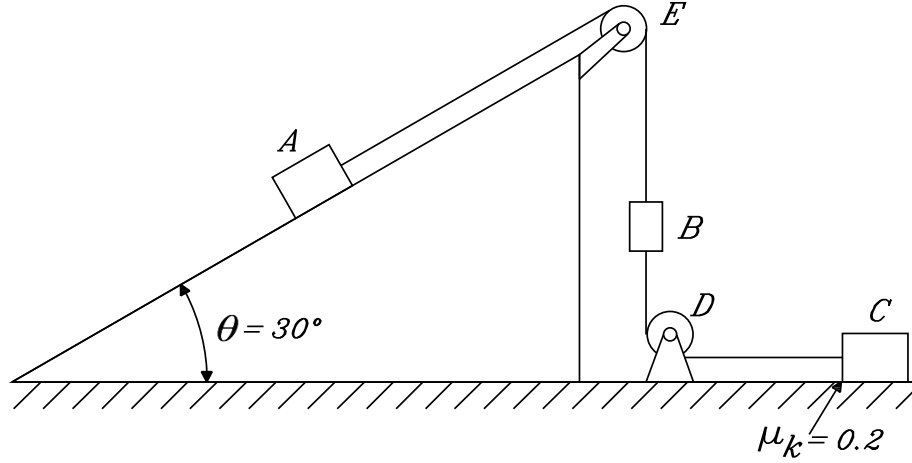


Figura 3.1: Modelo del problema 13-12 Hibbeler [18] .

A continuación, se obtienen los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos, vea la figura 3.2. De manera que, aplicando la segunda ley de Newton-Euler sobre cada uno de los cuerpos, se obtiene una expresión para la aceleración de los cuerpos en función del coeficiente de fricción cinético, μ_k , y de las masas: m_A , m_B y m_C ; vea la ecuación (3.10). Por consiguiente, se obtienen expresiones tanto para las fuerzas de tensión T_1 y T_2 ; así como, para la fuerza de fricción F_r .

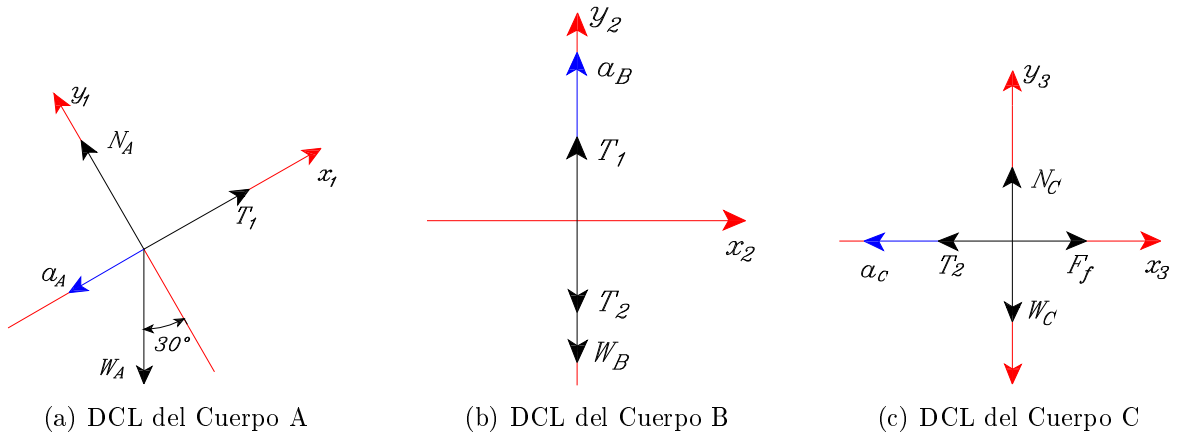


Figura 3.2: Diagramas de cuerpo libre.

De la sumatoria de fuerzas respecto al eje x_1 del cuerpo A , se sabe que:

$$\Sigma F_{x_1} = m_A a_{Ax_1} \quad \text{donde} \quad a_{Ax_1} = -a_A$$

Por consiguiente, se obtiene:

$$T_1 - m_A g \text{sen}(\theta) = -m_A a_A \quad \text{tal que} \quad T_1 = -m_A a_A + m_A g \text{sen}(\theta) \quad (3.2)$$

Ahora bien, de la sumatoria de fuerzas respecto al eje y_2 del cuerpo B , se sabe que:

$$\Sigma F_{y_2} = m_B a_{By_2} \quad \text{donde} \quad a_{By_2} = a_B$$

De lo anterior, resulta:

$$T_1 - T_2 - m_B g = m_B a_B \quad (3.3)$$

Por otro lado, de la sumatoria de fuerzas respecto al eje y_3 del cuerpo C , se conoce que:

$$\Sigma F_{y3} = m_C a_{Cy3} \quad \text{donde} \quad a_{Cy3} = 0$$

Por consiguiente, se obtiene que:

$$N_C - m_C g = 0 \quad \text{tal que} \quad N_C = m_C g \quad (3.4)$$

Así mismo, de la sumatoria de fuerzas con respecto al eje x_3 del cuerpo C , se conoce que:

$$\Sigma F_{x3} = a_{Cx3} \quad \text{donde} \quad a_{Cx3} = -a_C$$

Por lo tanto, resulta:

$$F_r - T_2 = -m_C a_C. \quad (3.5)$$

De acuerdo con la ecuación (3.4) la fuerza de fricción se expresa como:

$$F_r = \mu_{KC} N_C \quad \text{tal que} \quad F_r = \mu_{KC} m_C g \quad (3.6)$$

Sustituyendo el valor de la fuerza de fricción F_r , ecuación (3.6), en la ecuación (3.5) y despejando la fuerza de tensión T_2 , se obtiene:

$$T_2 = \mu_{KC} m_C g + m_C a_C \quad (3.7)$$

De igual forma, sustituyendo T_1 de la ecuación (3.2) y T_2 de la ecuación (3.7) en la ecuación (3.3), resulta:

$$-m_A a_A + m_A g \text{sen}(\theta) - \mu_{KC} m_C g - m_C a_C = m_B a_B + m_B g \quad (3.8)$$

Gracias a la ecuación (3.1), se sabe que la aceleración de los cuerpos A , B y C son iguales, por lo tanto, la ecuación (3.8) se puede expresar como:

$$m_B a + m_C a + m_A = m_A g \text{sen}(\theta) - \mu_{KC} m_C g - m_B g \quad (3.9)$$

Despejando la aceleración de la ecuación anterior, da como resultado:

$$a = \frac{g [m_A \text{sen}(\theta) - \mu_{KC} m_C - m_B]}{m_A + m_B + m_C} \quad (3.10)$$

Ahora, sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (3.7) se obtiene un valor de la aceleración igual a:

$$a = \frac{(9.81 \text{ m/s}^2) [(25 \text{ kg}) \text{sen}(30) - (0.2) (10 \text{ kg}) - (5 \text{ kg})]}{(25 + 10 + 5) \text{ kg}} = 1.348875 \text{ m/s}^2$$

Una vez obtenido el valor de la aceleración se pueden obtener las fuerzas de tensión T_1 , T_2 y la fuerza de fricción F_r . De manera que:

$$T_1 = (25 \text{ kg}) [(9.81 \text{ m/s}^2) \text{sin}(30) - 1.348875 \text{ m/s}^2] = 88.903125 \text{ N.}$$

$$F_r = (0.2) (9.81 \text{ m/s}^2) (10 \text{ kg}) = 19.62 \text{ N.}$$

$$T_2 = (19.62 \text{ N}) + (10 \text{ kg}) (1.348875 \text{ m/s}^2) = 33.1087 \text{ N.}$$

3.1.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de sistemas con cables dentro del módulo de **Machinery** del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la polea y el cable; ni los parámetros de la fricción que se presenta entre el cuerpo *C* y el plano horizontal. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.2 y 2.2.1, en las páginas 11 y 12 de este trabajo. En esta parte únicamente debe ponerse atención en minimizar la inercia de la polea, la masa del cable y maximizar la rigidez del cable.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 13-12 se muestra en la figura 3.20. Es importante hacer notar que el módulo **Machinery** de Adams[©], no permite importar modelos generados por programas de modelado sólido; tales como: SolidWorks[©], Inventor[©], Catia[©]. De manera que no es posible representar fielmente las características de los cuerpos del problema. Por otro lado, el usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 3.4.

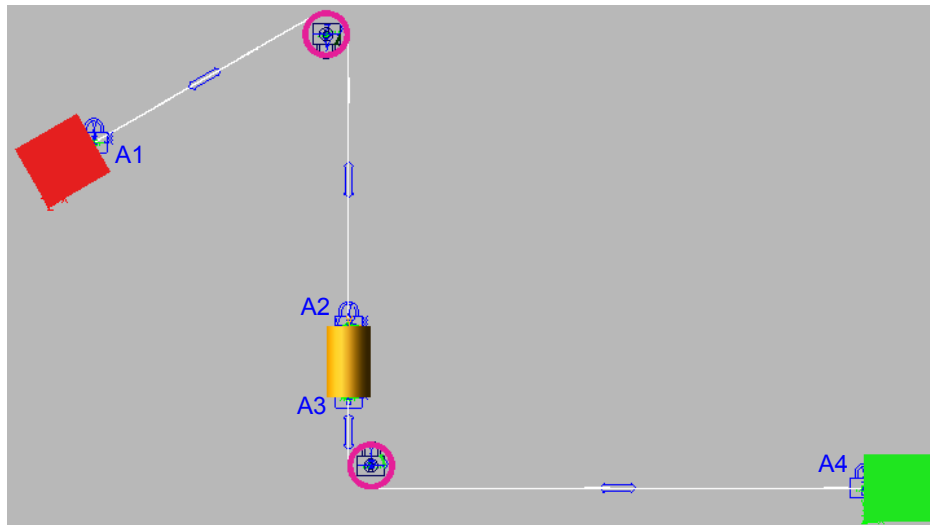


Figura 3.3: Modelo del problema en Adams[©].

Length	Millimeter
Mass	Kilogram
Force	Newton
Time	Second
Angle	Degree
Frequency	Hertz

Figura 3.4: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Los parámetros geométricos e inerciales de las poleas E y D , que en este caso, son iguales; se presentan en las figuras 3.5 y 3.6. Debe notarse que al ser un problema de cinemática, los datos como las masas de las poleas y los cables no son de interés; por lo que, el usuario debe poner atención en minimizar la inercia de la polea. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y de las poleas, no son de importancia para este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco, sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .

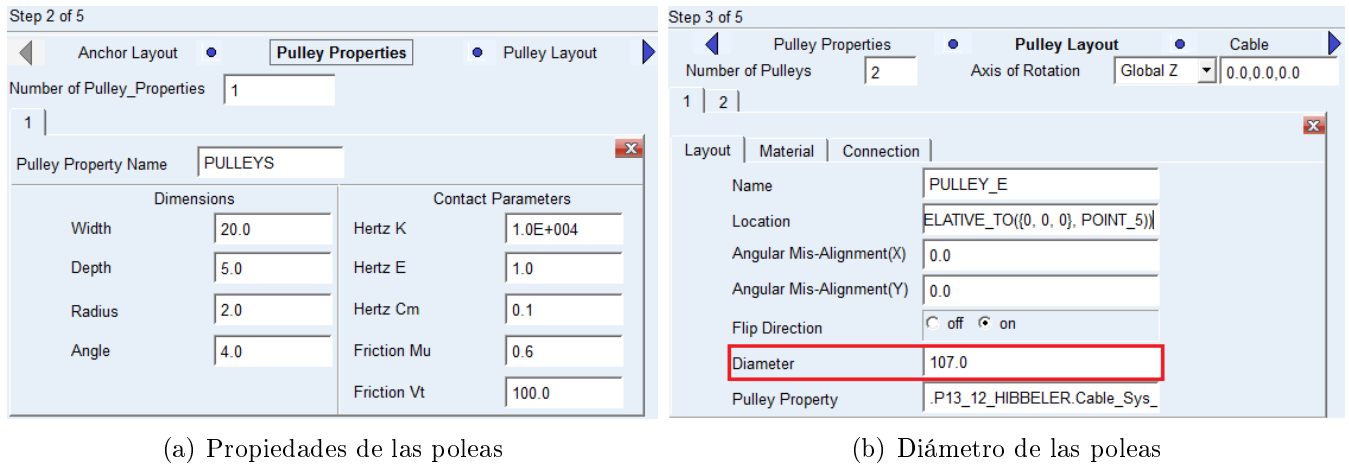


Figura 3.5: Propiedades geométricas de la poleas E y D .

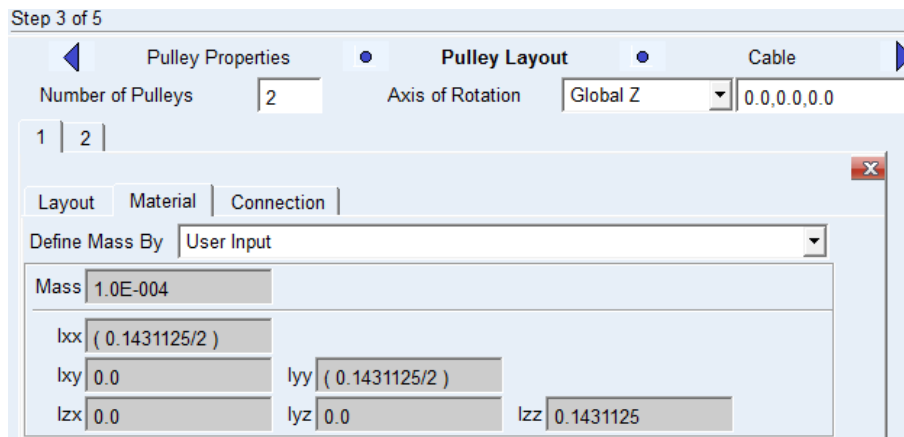
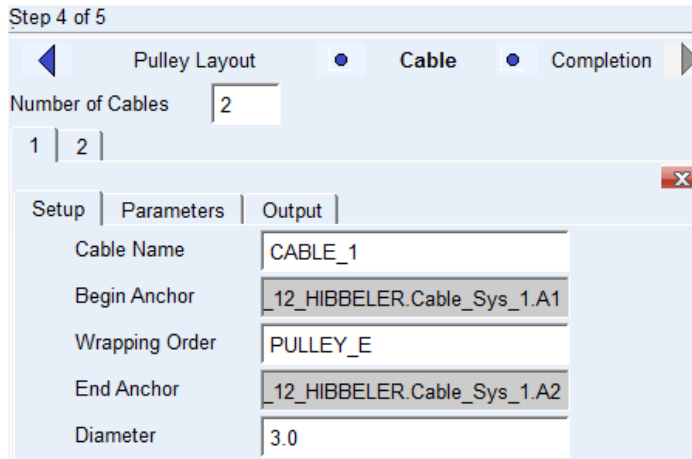
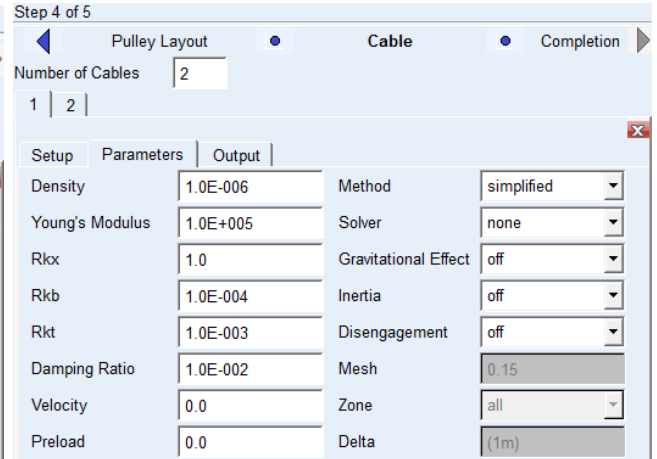


Figura 3.6: Propiedades inerciales de la poleas E y D .

Las figuras 3.7(a) y 3.7(b) muestran los parámetros geométricos y elásticos de los cables que unen los contrapesos, cabe mencionar que Adams[©] solo puede unir dos contrapesos por cable, por lo que fué necesario crear dos cuerdas para unir los cuerpos $A-B$ y $B-C$. Por otro lado los parámetros de fricción entre el cuerpo C y el plano horizontal se muestran en la figura 3.8.



(a) Configuración de los cables



(b) Parámetros de los cables

Figura 3.7: Parámetros geométricos y elásticos de los cables.

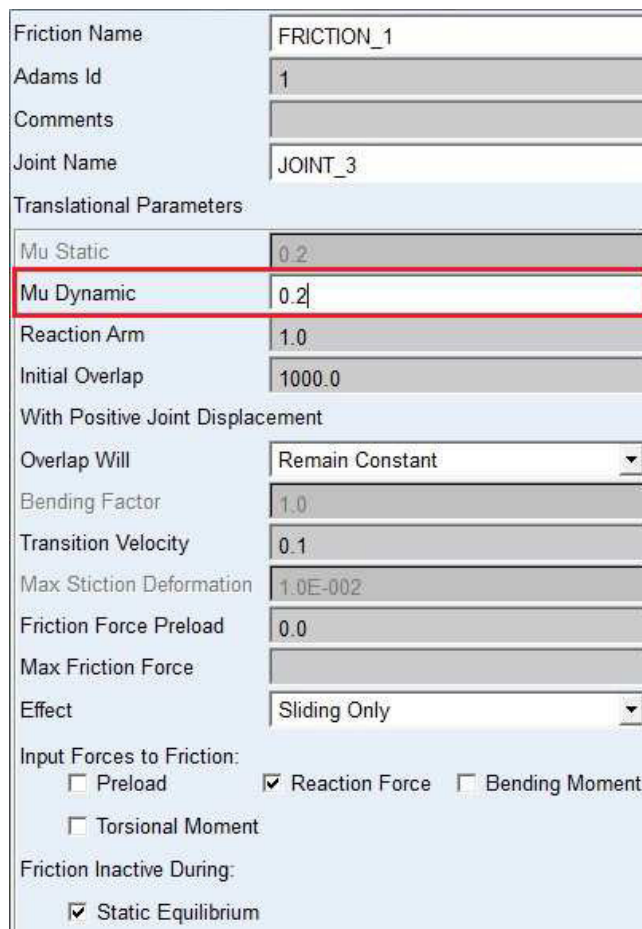


Figura 3.8: Parámetros de fricción.

Para la simulación del modelo basta con ingresar un tiempo de simulación de 0.35 segundos, ingresar un total de 500 pasos y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 3.9.

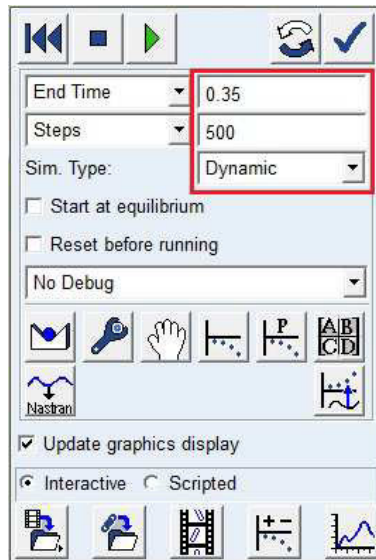


Figura 3.9: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Por otro lado, para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar las opciones mostradas en las figuras 3.10, 3.11, 3.12 y 3.13.

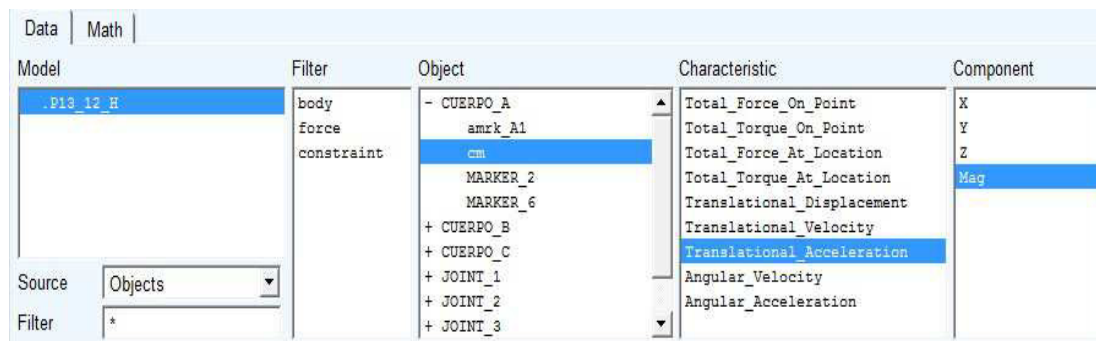


Figura 3.10: Aceleración del cuerpo A.

De igual forma, para solicitar los resultados de las aceleraciones de los cuerpos B y C, se escogen las mismas opciones que se emplearon en el cuerpo A. Obviamente seleccionando el cuerpo que se quiere analizar, vea la figura 3.10.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P13_12_H	body	+ JOINT_3	Element_Force	X
	force	FRICITION_1	Element_Torque	Y
	constraint	- Cable_Sys_1	Translational_Displacement	Z
		+ A1	Ax_Ay_Az_Projection_Angles	Mag
		+ anchor	Translational_Velocity	
		+ fix	Translational_Acceleration	
		+ A2	Angular_Velocity	
		+ A3	Angular_Acceleration	
		+ A4		
		ALL_PULLEYS		
		+ CABLE_1		

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.11: Fuerza de tensión del cable uno.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P13_12_H	body	+ JOINT_3	Element_Force	X
	force	FRICITION_1	Element_Torque	Y
	constraint	- Cable_Sys_1	Translational_Displacement	Z
		+ A1	Ax_Ay_Az_Projection_Angles	Mag
		+ A2	Translational_Velocity	
		- A3	Translational_Acceleration	
		+ anchor	Angular_Velocity	
		+ fix	Angular_Acceleration	
		+ A4		
		ALL_PULLEYS		
		+ CABLE_1		

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.12: Fuerza de tensión del cable dos.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P13_12_H	body	+ CUERPO_A	Element_Force	X
	force	+ CUERPO_B	Element_Torque	Y
	constraint	+ CUERPO_C		Z
		+ JOINT_1		Mag
		+ JOINT_2		
		+ JOINT_3		
		FRICITION_1		
		+ Cable_Sys_1		

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.13: Fuerza de fricción entre el cuerpo C y el plano horizontal.

Como puede observarse en la figura 3.13, se solicitó el resultado de la fuerza de fricción entre el cuerpo C y el plano horizontal, a pesar de que el problema no lo requiere. Sin embargo, para fines educativos los valores obtenidos por medio de la simulación se mostrarán en este trabajo; lo mismo ocurre con las aceleraciones de los cuerpos B y C .

Los resultados obtenidos por el programa Adams[®], se muestran en las figuras 3.14, 3.15, 3.16 y 3.17.

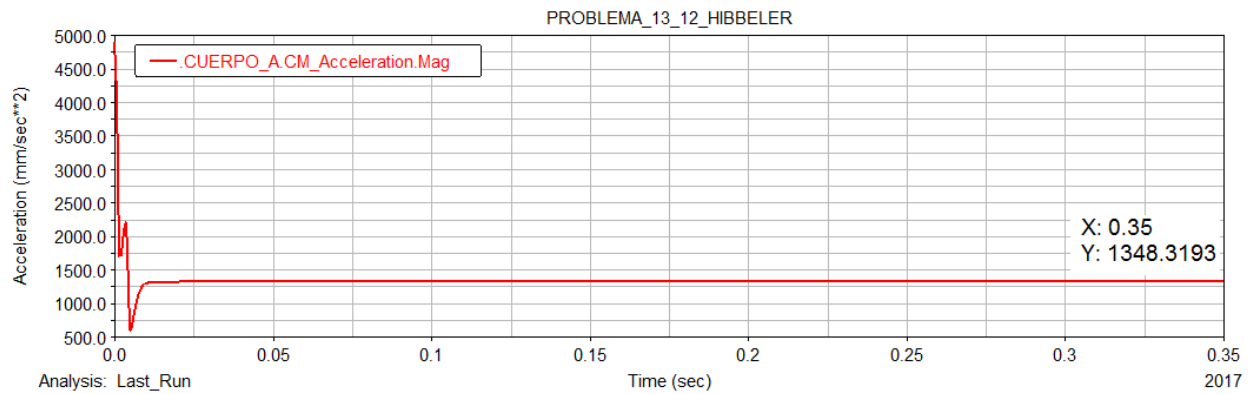


Figura 3.14: Resultado de la aceleración del cuerpo *A*.

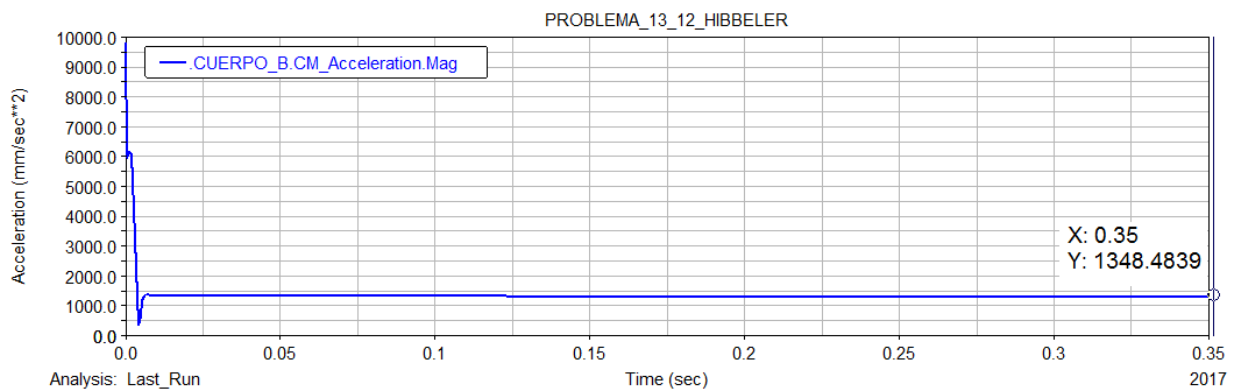


Figura 3.15: Resultado de la aceleración del cuerpo *B*.

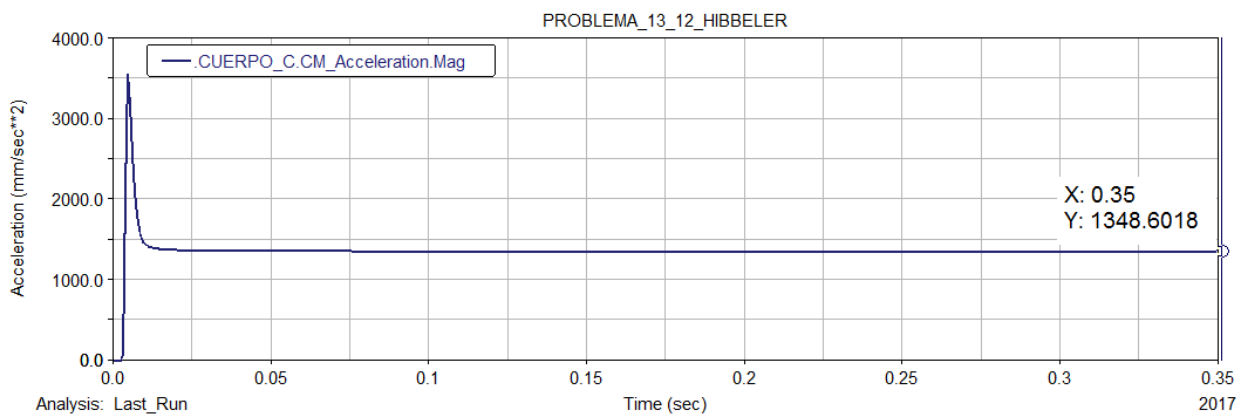


Figura 3.16: Resultado de la aceleración del cuerpo *C*.

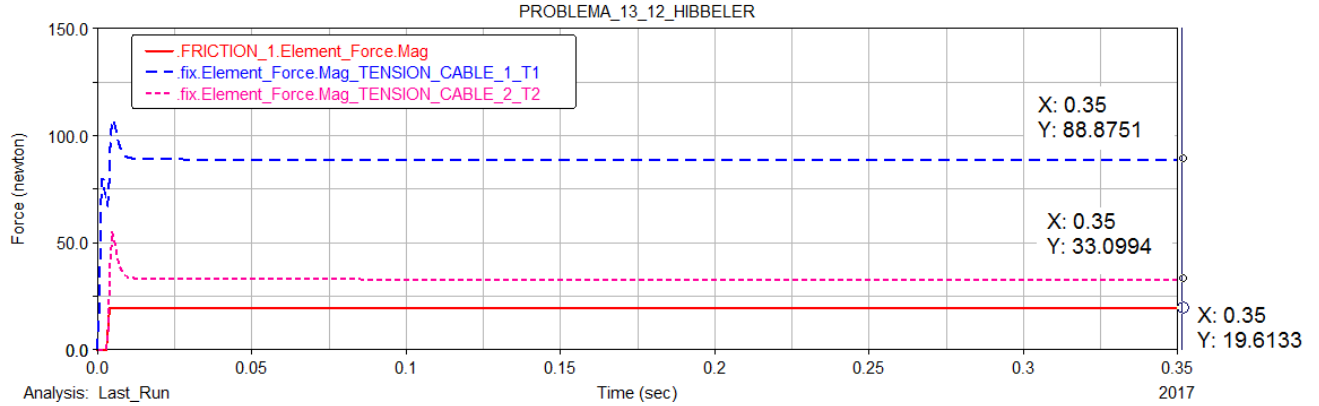


Figura 3.17: Resultados de la fuerza de fricción y las fuerzas de tensión T_1 y T_2 .

Los resultados obtenidos mediante simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 3.1 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación en Adams[©].

Tabla 3.1: Comparación de resultados. 1.^{er} problema de poleas y cables.

Variable	Resultado analítico	Resultado Adams [©]
a_A	1348.875 mm/s^2	1348.3193 mm/s^2
a_B	1348.875 mm/s^2	1348.4839 mm/s^2
a_C	1348.875 mm/s^2	1348.6018 mm/s^2
F_r	19.62 N	19.6133 N
T_1	88.903125 N	88.8751 N
T_2	33.10875 N	33.0994 N

3.2. Segundo problema de sistemas por cables.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 3-9 del libro de Meriam y Kraige [28], incluido en la página 112.

Problema 2: En el sistema mostrado en la figura 3.18 calcular la aceleración, a , del cilindro D con masa $m_D = 150 \text{ kg}$ y del cilindro E con masa $m_E = 200 \text{ kg}$ despreciar el rozamiento y la masa de las poleas.

3.2.1. Solución analítica.

De acuerdo con el problema, considerando una cuerda inextensible y un sistema de poleas con masa despreciable, se deduce que las magnitudes de las aceleraciones de traslación tanto del cuerpo D como del cuerpo E son iguales. De manera que:

$$a_D = a_E = a$$

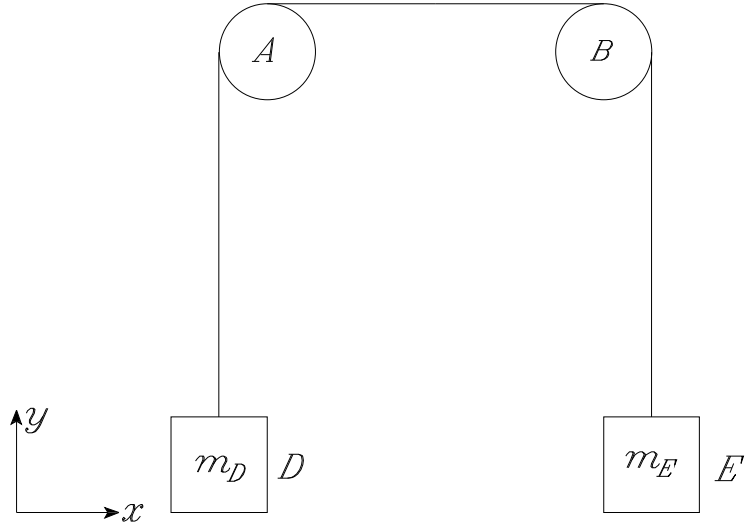


Figura 3.18: Modelo del problema 3-9 Meriam y Kraige [28].

A continuación, se obtienen los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos, vea la figura 3.19. Por lo que, aplicando la segunda ley de Newton-Euler, se obtiene una expresión para la aceleración de los cuerpos en términos de las masas m_D , m_E y la aceleración de la gravedad de la tierra; vea la ecuación (3.13).

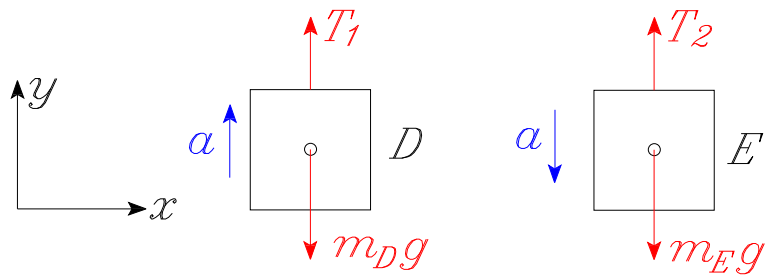


Figura 3.19: Diagramas de cuerpo libre del cuerpo D y E .

De la sumatoria de fuerzas respecto al eje y del cuerpo D , se sabe que:

$$\Sigma F_y = m_D a$$

Por consiguiente, se obtiene:

$$T_1 - m_D g = m_D a \quad \text{tal que} \quad T_1 = m_D (a + g) \quad (3.11)$$

Ahora bien, de la sumatoria de fuerzas respecto al eje y del cuerpo E , se conoce:

$$\Sigma F_y = m_E a$$

Por lo tanto, resulta:

$$T_2 - m_E g = -m_E a \quad \text{donde} \quad T_2 = m_E (g - a) \quad (3.12)$$

De manera que, al estar el cuerpo D y E unidos a una sola cuerda inextensible y considerando poleas de masa despreciable, se deduce que $T_1 = T_2$; por lo tanto, igualando las ecuaciones (3.11) y (3.12), se obtiene una relación para la aceleración de los cuerpos; tal que:

$$m_D a + m_D g = -a m_E + m_E g \quad \text{donde} \quad a (m_D + m_E) = g (m_E - m_D)$$

De lo anterior, resulta:

$$a = g \frac{m_E - m_D}{m_D + m_E} \quad (3.13)$$

Sustituyendo los valores numéricos en ecuación (3.13), se obtiene:

$$a = \left(9.81 \frac{m}{s^2}\right) \left(\frac{50 \text{ kg}}{350 \text{ kg}}\right) = 1.401428 \frac{m}{s^2}$$

Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones (3.11) y (3.12), se obtienen los valores tanto de la tensión T_1 como de la tensión T_2 . Tal que:

$$\begin{aligned} T_1 &= m_D (a + g) = (150 \text{ kg}) (1.401428 + 9.81) \text{ m/s}^2 = 1681.7142 \text{ N} \\ T_2 &= m_E (g - a) = (200 \text{ kg}) (9.81 - 1.401428) \text{ m/s}^2 = 1681.7144 \text{ N} \end{aligned}$$

3.2.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de sistemas con cables dentro del módulo de **Machinery** del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la polea y el cable. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.2 y 2.2.1, en las páginas 11 y 12 de este trabajo. En esta parte únicamente debe ponerse atención en minimizar la inercia de las poleas, la masa del cable y maximizar la rigidez del cable.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 3-9 se muestra en la figura 3.20. Es importante hacer notar que el módulo **Machinery** de Adams[©], no permite importar modelos generados por programas de modelado sólido; tales como: SolidWorks[©], Inventor[©], Catia[©]. De manera que no es posible representar fielmente las características de los cuerpos del problema.

De manera que, el usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo. Para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 3.21.

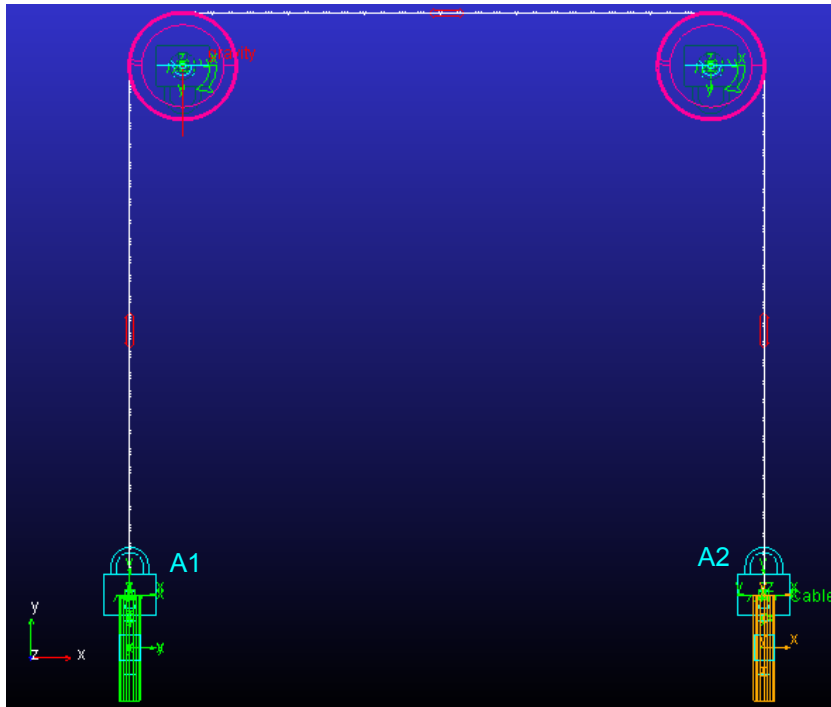


Figura 3.20: Modelo del problema en Adams[©].

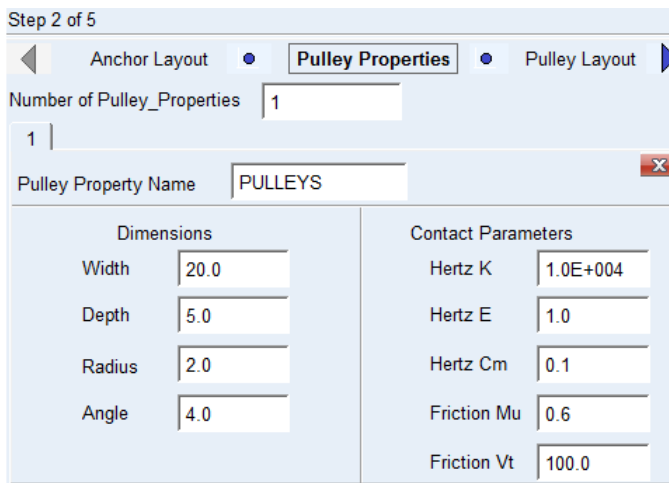
Length	Millimeter
Mass	Kilogram
Force	Newton
Time	Second
Angle	Degree
Frequency	Hertz

Figura 3.21: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

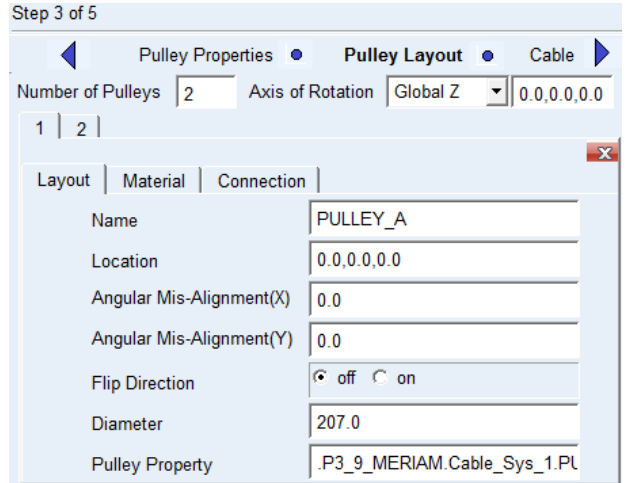
Los parámetros geométricos e inerciales de las poleas se presentan en las figuras 3.22(a), 3.22(b) y 3.22(c)¹.

Por otro lado, las figuras 3.23(a) y 3.23(b) muestran los parámetros geométricos y elásticos del cable que une los contrapesos. Mientras que los parámetros inerciales de los cuerpos D y E , se muestran en las figuras 3.24(a) y 3.24(b).

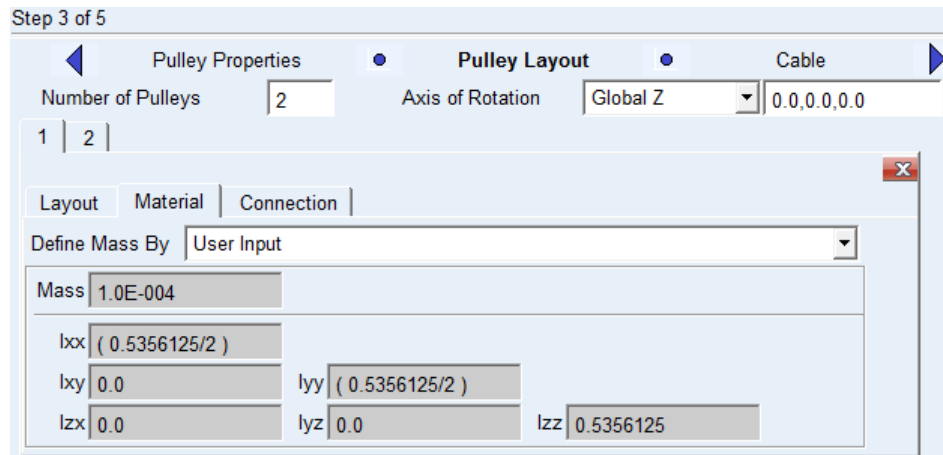
¹Ambas poleas poseen las mismas características geométricas e inerciales, por esa razón se decidió mostrar las propiedades de una sola polea dentro de Adams[©]



(a) Propiedades geométricas de las poleas *A* y *B*



(b) Diámetro de las poleas *A* y *B*



(c) Masa y momentos de inercia de las poleas *A* y *B*

Figura 3.22: Propiedades geométricas e inerciales de la poleas *A* y *B*.

Step 4 of 5

Pulley Layout • Cable • Completion

Number of Cables 1

1

Setup	Parameters	Output
Cable Name	CABLE_1	
Begin Anchor	P3_9_MERIAM.Cable_Sys_1.A2	
Wrapping Order	PULLEY_B,PULLEY_A	
End Anchor	P3_9_MERIAM.Cable_Sys_1.A1	
Diameter	3.0	

(a) Configuración del cable

Step 4 of 5

Pulley Layout • Cable • Completion

Number of Cables 1

1

Setup	Parameters	Output
Density	1.0E-006	Method simplified
Young's Modulus	1.0E+005	Solver none
Rkx	1.0	Gravitational Effect off
Rkb	1.0E-004	Inertia off
Rkt	1.0E-003	Disengagement off
Damping Ratio	1.0E-002	Mesh 0.15
Velocity	0.0	Zone all
Preload	0.0	Delta (1m)

(b) Parámetros del cable

Figura 3.23: Parámetros geométricos y elásticos del cable.

Body	CUERPO_E	
Category	Mass Properties	
Define Mass By	User Input	
Mass	(150KG)	
Ixx	1.5E+004	<input type="checkbox"/> Off-Diagonal Terms
Iyy	1.5E+004	
Izz	3.0E+004	
Center of Mass Marker	CUERPO_E.cm	
Inertia Reference Marker		

(a) Masa y momentos de inercia del cuerpo D

Body	CUERPO_D	
Category	Mass Properties	
Define Mass By	User Input	
Mass	(200KG)	
Ixx	2.0E+004	<input type="checkbox"/> Off-Diagonal Terms
Iyy	2.0E+004	
Izz	4.0E+004	
Center of Mass Marker	CUERPO_D.cm	
Inertia Reference Marker		

(b) Masa y momentos de inercia del cuerpo E

Figura 3.24: Masa y momentos de inercia de los cuerpos D y E .

Para la simulación del modelo basta con ingresar un tiempo de simulación de 0.6 segundos, ingresar 500 pasos y seleccionar el tipo de simulación cinemática, vea la figura 3.25.

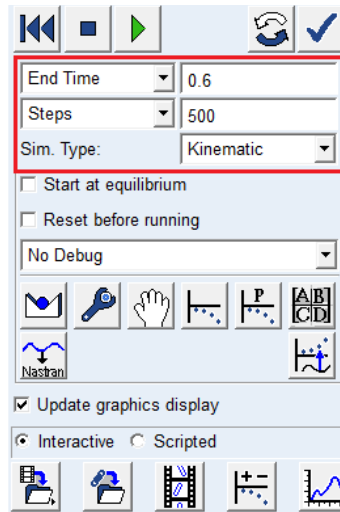


Figura 3.25: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

De manera que, para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 3.26, 3.27, 3.28 y 3.29.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P3_9_MERIAM	body	- CUERPO_D	Total_Force_On_Point	X
	force	amrk_A2	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	cm	Total_Force_At_Location	Z
		MARKER_2	Total_Torque_At_Location	Mag
		MARKER_18	Translational_Displacement	
		+ CUERPO_E	Translational_Velocity	
		+ Cable_Sys_1	Translational_Acceleration	
			Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Figura 3.26: Solicitud de la aceleración del cuerpo D .

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P3_9_MERIAM	body	+ JOINT_1	Element_Force	X
	force	+ JOINT_2	Element_Torque	Y
	constraint	- Cable_Sys_1	Translational_Displacement	Z
		- A1	Ax_Ay_Az_Projection_Angles	Mag
		+ fix	Translational_Velocity	
		+ A2	Translational_Acceleration	
		+ CABLE	Angular_Velocity	
		+ PULLEY_A	Angular_Acceleration	
		+ PULLEY_B		

Figura 3.28: Solicitud de la fuerza de tensión T_1 .

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P3_9_MERIAM	body	+ CUERPO_D	Total_Force_On_Point	X
	force	- CUERPO_E	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	amrk_A1	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		MARKER_1	Translational_Displacement	
		MARKER_16	Translational_Velocity	
		+ Cable_Sys_1	Translational_Acceleration	
			Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Figura 3.27: Solicitud de la aceleración del cuerpo E .

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P3_9_MERIAM	body	+ JOINT_1	Element_Force	X
	force	+ JOINT_2	Element_Torque	Y
	constraint	- Cable_Sys_1	Translational_Displacement	Z
		+ A1	Ax_Ay_Az_Projection_Angles	Mag
		- A2	Translational_Velocity	
		+ fix	Translational_Acceleration	
		+ CABLE	Angular_Velocity	
		+ PULLEY_A	Angular_Acceleration	
		+ PULLEY_B		

Figura 3.29: Solicitud de la fuerza de tensión T_2 .

Los resultados obtenidos por el programa Adams[®], se muestran en las figuras 3.30, 3.31 y 3.32.

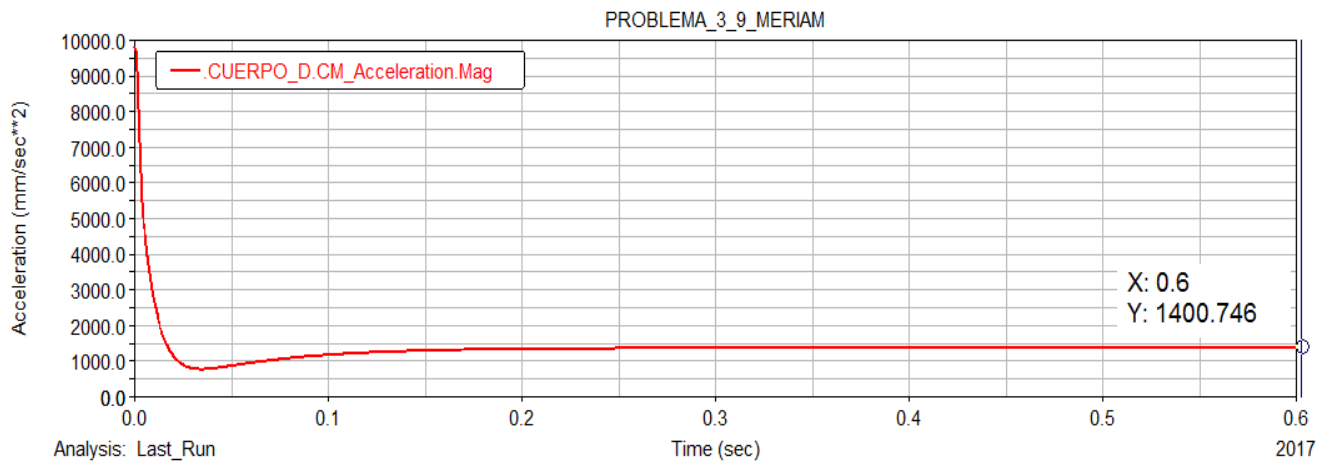


Figura 3.30: Resultados de la aceleración del cuerpo D .

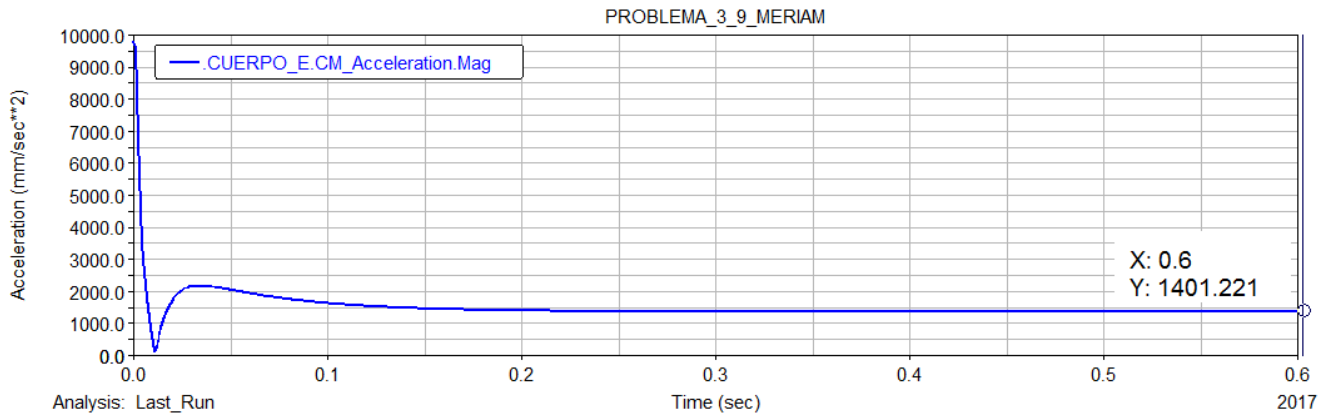


Figura 3.31: Resultados de la aceleración del cuerpo E .

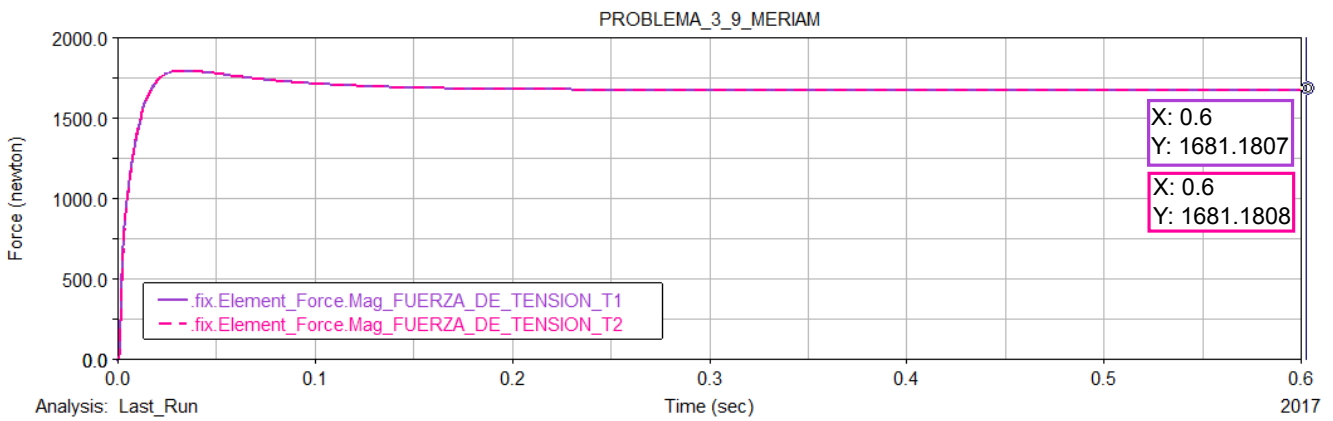


Figura 3.32: Resultados de la fuerzas de tensión T_1 y T_2 .

Cabe mencionar, que las fuerzas de tensión T_1 y T_2 , que se muestran en la figura 3.32, están siendo aplicadas con respecto a los cuerpos D y E , y no con respecto al cable. Por lo que el sentido de las fuerzas de tensión mostradas en la figura 3.32 son inversas al sentido de la fuerza de tensión de la cuerda.

Los resultados obtenidos mediante simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 3.2 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación en Adams[©].

Tabla 3.2: Comparación de resultados. 2.º problema de poleas y cables.

Variable	Resultado analítico	Resultado Adams [©] para $t = 0.6$ s
a_D	$1401.428571 \text{ mm/s}^2 \downarrow$	$1400.746 \text{ mm/s}^2 \downarrow$
a_E	$1401.428571 \text{ mm/s}^2 \uparrow$	$1401.221 \text{ mm/s}^2 \uparrow$
T_1	1681.7142 N	1681.1807 N
T_2	1681.7144 N	1681.1808 N

Debe notarse que, los resultados de las fuerzas y aceleraciones obtenidos mediante Adams[®], no son constantes durante todo el intervalo de la simulación. Los resultados presentan un transitorio de 0.2 s aproximadamente. Después de este transitorio, los resultados son muy aproximados a los obtenidos analíticamente.

De manera que, estos resultados muestran que en la realidad, los sistemas mecánicos no responden de manera inmediata a las fuerzas aplicadas al sistema. Por lo que, la elasticidad y la inercia del sistema, hacen que la respuesta presente un estado transitorio durante el cual no es posible compararse.

3.3. Tercer problema de sistemas por cables

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 3-22 del libro de Meriam y Kraige [28], incluido en la página 114.

Problema: El sistema se abandona desde el reposo con el cable tenso. Despreciando la pequeña masa de la polea y el rozamiento en ella, calcular la aceleración de los cuerpos A y B , y la fuerza de tensión en el cable. Cuando: (a) $\mu_e = 0.25$ y $\mu_c = 0.20$ y (b) $\mu_e = 0.15$ y $\mu_c = 0.10$. De manera que, las masas de los cuerpos y el ángulo de inclinación están dadas por: $m_A = 60 \text{ kg}$, $m_B = 20 \text{ kg}$ y $\alpha = 30^\circ$.

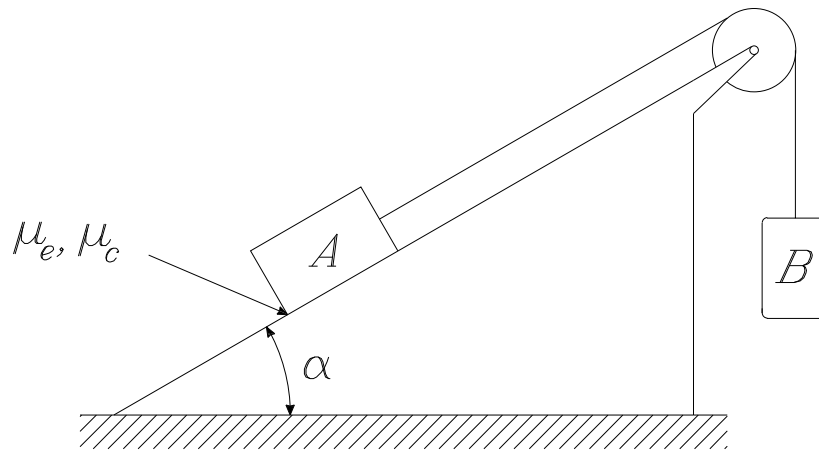


Figura 3.33: Modelo del problema 3-22 Meriam y Kraige [28].

3.3.1. Solución analítica.

De acuerdo con el problema, se presenta dos situaciones: la primera, cuando el coeficiente de fricción estático y dinámico son iguales a 0.25 y 0.20, respectivamente; la segunda, cuando dichos coeficientes son iguales a 0.15 y 0.10 entre el cuerpo A y el plano inclinado. Para el análisis se considera una cuerda inextensible y un sistema de poleas de masa despreciable.

De manera que, para cada una de las situaciones, se hace un análisis estático con el fin de verificar si tanto el cuerpo A como el cuerpo B , sufren o no desplazamiento; y en función de este resultado, calcular sus correspondientes aceleraciones y la tensión del cable.

Caso (a) Análisis cuando $\mu_e = 0.25$ y $\mu_c = 0.20$ entre el cuerpo A y el plano inclinado.

Análisis estático. A continuación se obtienen los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos, vea la figura 3.34, y aplicando la primera ley de Newton, se obtiene una expresión para la fuerza de fricción de equilibrio F_{feq} ; es decir para evitar el movimiento.

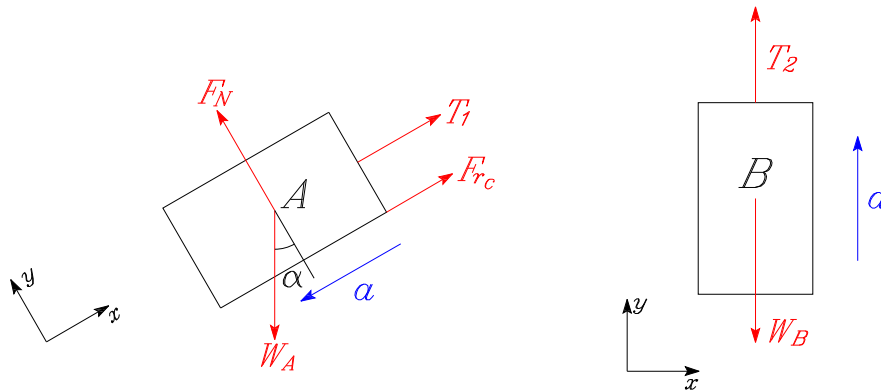


Figura 3.34: Diagramas de cuerpo libre del cuerpo A y B .

De la sumatoria de fuerzas respecto al eje y del cuerpo A , se sabe que:

$$\Sigma F_y = 0$$

Por consiguiente, se obtiene:

$$F_N - W_A \cos(\alpha) = 0 \quad \text{tal que} \quad F_N = W_A \cos(\alpha) \quad (3.14)$$

De la sumatoria de fuerzas respecto al eje x del cuerpo A , se conoce que:

$$\Sigma F_x = 0$$

De lo anterior, resulta:

$$T_1 + F_{feq} - W_A \sin(\alpha) = 0 \quad \text{donde} \quad F_{feq} = W_A \sin(\alpha) - T_1 \quad (3.15)$$

Ahora bien, de la sumatoria de fuerzas respecto al eje y del cuerpo B , se sabe que:

$$\Sigma F_y = 0$$

Por lo tanto, resulta:

$$T_2 - W_B = 0 \quad \text{donde} \quad T_2 = W_B \quad (3.16)$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación anterior, se obtiene un valor de la fuerza de tensión de la cuerda igual a:

$$T_2 = T_1 = \left(9.81 \frac{m}{s^2}\right) (20 \text{ kg}) = 196.2 \text{ N}$$

De acuerdo con la ecuación (3.14), la fuerza de fricción estática del sistema se define como:

$$F_{f_{sis}} = \mu_e F_N = \mu_e W_A \cos(\alpha) \quad (3.17)$$

De manera que, sustituyendo la ecuación (3.16) en la ecuación (3.15), se obtiene una expresión para la fuerza de fricción que se requiere para que el sistema esté en equilibrio.

De aquí que:

$$F_{f_{eq}} = W_A \operatorname{sen} \alpha - W_B \quad \text{tal que} \quad F_{f_{eq}} = g (m_A \operatorname{sen} \alpha - m_B) \quad (3.18)$$

Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones (3.18) y (3.17), se obtiene:

$$\begin{aligned} F_{f_{eq}} &= (9.81) (60 \operatorname{sen}(30^\circ) - 20) = 98.1 \text{ N} \\ F_{f_{sis}} &= (0.25) (60) (9.81) \cos(30^\circ) = 127.4356382 \text{ N} \end{aligned}$$

Para que exista movimiento, es necesario que la fuerza de fricción entre el cuerpo A y el plano inclinado, $F_{f_{sis}}$, sea menor a la fuerza de fricción en equilibrio estático $F_{f_{eq}}$. De acuerdo con los resultados numéricos de $F_{f_{sis}}$ y $F_{f_{eq}}$, la fuerza de fricción $F_{f_{sis}}$, es mayor que la fuerza de fricción en equilibrio estático. Lo que implica que para cuando μ_e es igual a 0.25, los cuerpos A y B no sufren desplazamiento alguno. Por lo tanto, $a = 0$ y $T_1 = T_2 = 196.2 \text{ N}$.

Caso (b) Análisis cuando $\mu_e = 0.15$ y $\mu_c = 0.10$ entre el cuerpo A y el plano inclinado.

Análisis estático. Se sabe que la fuerza de fricción en equilibrio estático, $F_{f_{eq}}$, es igual a 98.1 N. Por lo que, de acuerdo con la ecuación (3.17), la fuerza de fricción entre el cuerpo A y el plano inclinado cuando $\mu_e = 0.15$, resulta:

$$F_{f_{sis}} = \mu_e F_N = \mu_e m_A \cos \alpha = (0.15) (60) (9.81) \cos \alpha = 76.4613829 \text{ N}$$

Como se mencionó con anterioridad, para que pueda existir desplazamiento, la fuerza de fricción entre el cuerpo A y el plano inclinado debe ser menor a la fuerza de fricción cuando el sistema se encuentra en una posición de equilibrio estático. Por lo que:

$$F_{f_{sis}} < F_{f_{eq}}$$

De manera que, para este caso, la condición antes mencionada se cumple. Esto implica que los cuerpos A y B sufren desplazamiento, lo que genera que las aceleraciones de los cuerpos sean diferentes de cero.

Análisis cinemático. Analizando los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos, vea la figura 3.34, y aplicando la segunda ley de Newton-Euler; se obtiene una expresión para la aceleración del sistema a . De acuerdo con el problema, tanto la masa de la cuerda como la del sistema de poleas son despreciables. Por lo que, la aceleración del cuerpo A es la misma para el cuerpo B , además, se desprecia la inercia de la polea, por lo que la fuerza de tensión del cable sobre el cuerpo A es igual a la fuerza de tensión del cuerpo B . De manera que:

$$a_A = a_B = a \quad \text{y} \quad T_1 = T_2$$

De la sumatoria de fuerzas respecto al eje y del cuerpo A , se conoce que:

$$\Sigma F_y = m_A a$$

Por consiguiente, se obtiene:

$$F_N - W_A \cos \alpha = 0 \quad \text{donde} \quad F_N = W_A \cos \alpha \quad (3.19)$$

Por otro lado, de la sumatoria de fuerzas respecto al eje x del cuerpo A , se sabe que:

$$\Sigma F_x = m_A a$$

Por lo tanto:

$$T_1 - W_A \sin \alpha + Fr_c = m_A (-a) \quad (3.20)$$

Ahora bien, de la sumatoria de fuerzas respecto al eje y del cuerpo B , se conoce que:

$$\Sigma F_y = m_B a$$

De lo anterior, resulta:

$$T_2 - W_B = m_B a \quad \text{y} \quad T_2 = T_1 = W_B + m_B a \quad (3.21)$$

Sustituyendo la ecuación (3.21) en la ecuación (3.20), se obtiene una expresión de la aceleración del sistema dada por:

$$W_B + m_B a - W_A \sin \alpha + \mu_c W_A \cos \alpha = -m_A a$$

De manera que:

$$a = -\frac{g [m_B + m_A (\mu_c \cos \alpha - \sin \alpha)]}{m_A + m_B} \quad (3.22)$$

De igual forma, sustituyendo valores numéricos en la ecuación (3.22), se obtiene un valor de la aceleración del sistema igual a:

$$a = -\frac{(9.81 \text{ m/s}^2) [20 \text{ kg} + (60 \text{ kg}) (0.10 \cos 30 - \sin 30)]}{80 \text{ kg}} = 0.5890718 \text{ m/s}^2$$

La fuerza de fricción cinética del cuerpo A , está dada por:

$$Fr_c = \mu_c m_A \cos \alpha = (0.1) (60 \text{ kg}) (9.81 \text{ m/s}^2) \cos 30^\circ = 50.974255 \text{ N}$$

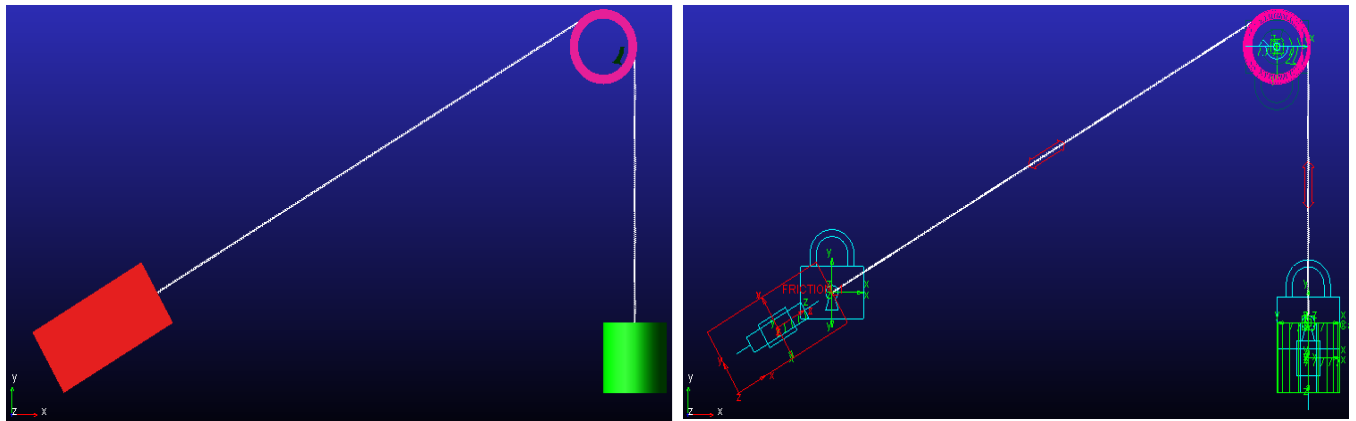
Sustituyendo valores numéricos en la ecuación (3.21), se obtiene un valor de la fuerza de tensión de la cuerda igual a:

$$T_1 = T_2 = 20 \text{ kg} (9.81 \text{ m/s}^2 + 0.5890718 \text{ m/s}^2) = 207.9814362 \text{ N}$$

3.3.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de sistemas con cables dentro del módulo de **Machinery** del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la polea y el cable, ni los parámetros de la fricción que se presenta entre el cuerpo *C* y el plano horizontal. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.2 y 2.2.1, en las páginas 11 y 12 de este trabajo. En esta parte únicamente debe ponerse atención en minimizar la inercia de la polea, la masa del cable y maximizar la rigidez del cable.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 13-12 se muestra en la figura 3.35. Por otro lado, el usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 3.36.



(a) Vista del sistema con sólidos sombreados

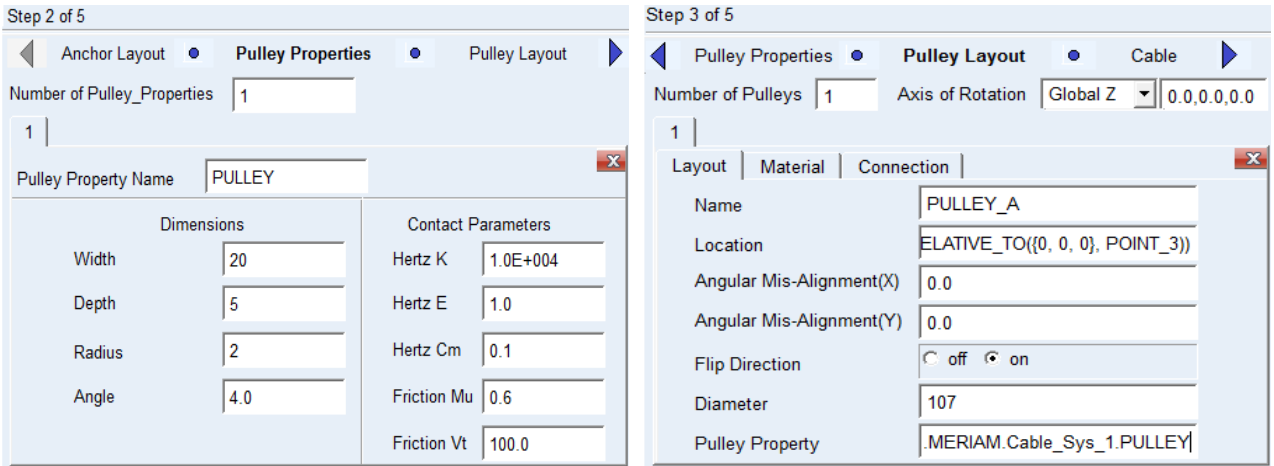
(b) Vista del sistema mediante un marco de alambre

Figura 3.35: Modelo del sistema en Adams[©].

Length	Millimeter
Mass	Kilogram
Force	Newton
Time	Second
Angle	Degree
Frequency	Hertz

Figura 3.36: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Los parámetros geométricos y de localización de la polea se presentan en las figuras 3.37(a) y 3.37(b).



(a) Propiedades geométricas de la polea

(b) Localización de la polea

Figura 3.37: Propiedades geométricas y de localización de la polea.

Los parámetros inerciales de la polea se presentan en la figura 3.38; mientras que, los parámetros geométricos y la localización de la polea se muestran en las figuras 3.39(a) y 3.39(b).

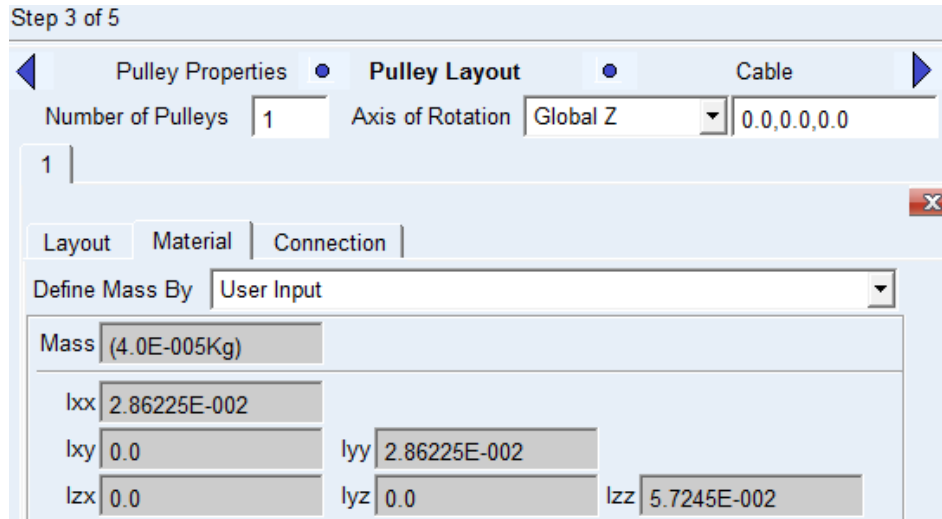
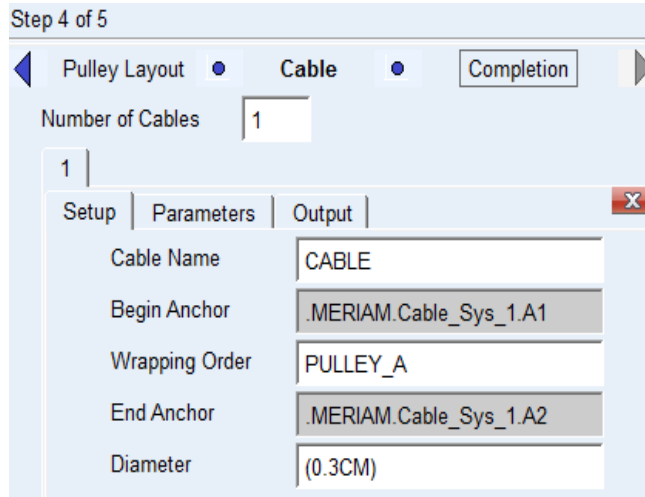
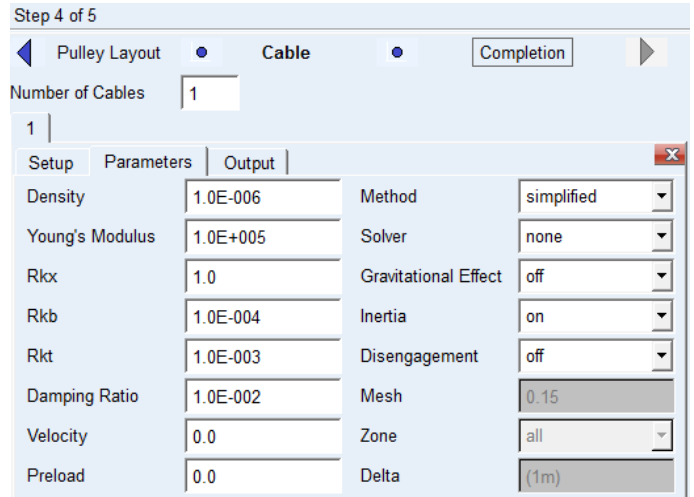


Figura 3.38: Parámetros inerciales de la polea.

Los parámetros de la fricción entre el cuerpo A y el plano inclinado, para los casos (a) y (b), se presentan en la figura 3.40.

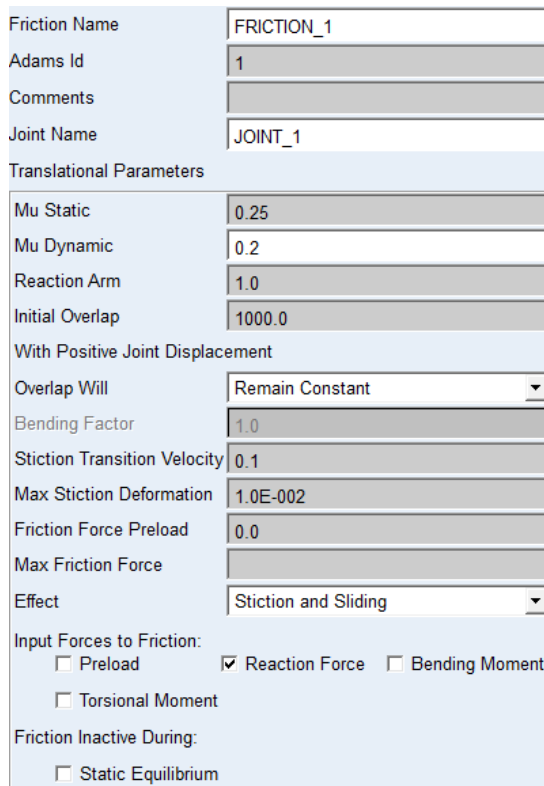


(a) Propiedades geométricas de la polea

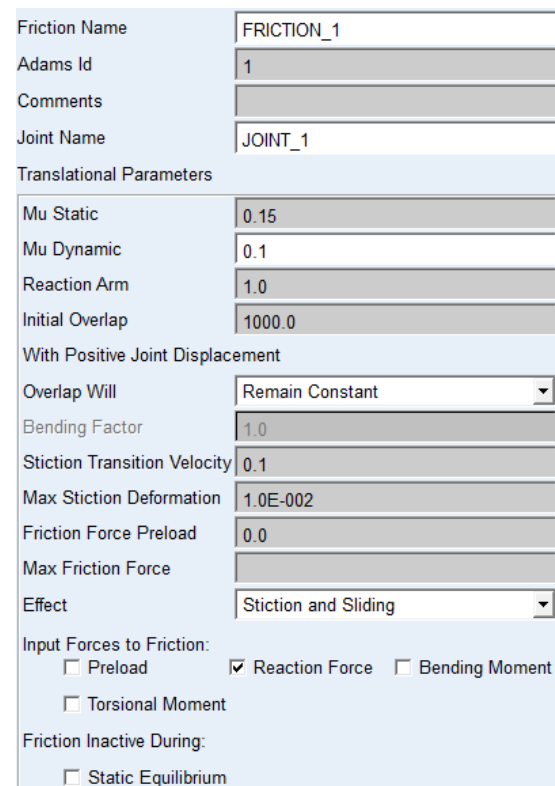


(b) Localización de la polea

Figura 3.39: Propiedades geométricas y de localización de la polea.



(a) Parámetros de la fuerza de fricción caso (a)



(b) Parámetros de la fuerza de fricción caso (b)

Figura 3.40: Parámetros de la fuerza de fricción entre en cuerpo A y el plano inclinado.

Para la simulación del modelo basta con ingresar un tiempo de simulación de 1 segundo, ingresar 500 pasos y seleccionar el tipo de simulación cinemática, vea la figura 3.41.

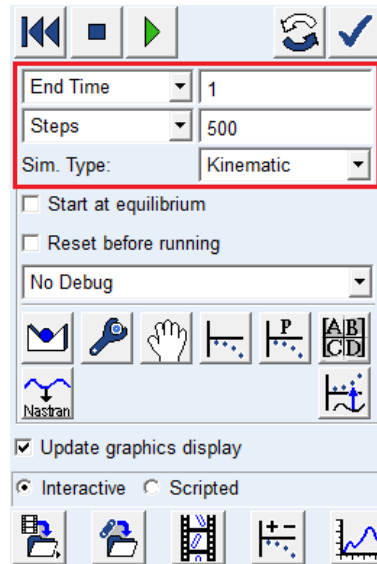


Figura 3.41: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Por otro lado, para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 3.42, 3.43 y 3.44.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.MERIAM	body	- CUERPO_A	Total_Force_On_Point	X
	force	amrk_A1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	cm	Total_Force_At_Location	Z
		MARKER_2	Total_Torque_At_Location	Mag
		MARKER_14	Translational_Displacement	
		MARKER_77	Translational_Velocity	
		+ CUERPO_B	Translational_Acceleration	
		+ Cable_Sys_1	Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

(a) Solicitud de la aceleración del cuerpo A

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.MERIAM	body	+ CUERPO_A	Total_Force_On_Point	X
	force	- CUERPO_B	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	amrk_A2	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		MARKER_4	Translational_Displacement	
		MARKER_16	Translational_Velocity	
		+ Cable_Sys_1	Translational_Acceleration	
			Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

(b) Solicitud de la aceleración del cuerpo B

Figura 3.42: Solicitud de resultados para las aceleraciones de los cuerpos A y B.

Data		Math			
Model	Filter	Object	Characteristic	Component	
.MERIAM	body	+ JOINT_2	Element_Force	X	
	force	FRICION_1	Element_Torque	Y	
	constraint	- Cable_Sys_1	Translational_Displacement	Z	
		- A1	Ax_Ay_Az_Projection_Angles	Mag	
		+ anchor	Translational_Velocity		
		+ fix	Translational_Acceleration		
		+ A2	Angular_Velocity		
		+ CABLE	Angular_Acceleration		
		PULLEY			
		+ PULLEY_A			

(a) Solicitud de la fuerza de tensión T_1

Data		Math			
Model	Filter	Object	Characteristic	Component	
.MERIAM	body	+ JOINT_2	Element_Force	X	
	force	FRICION_1	Element_Torque	Y	
	constraint	- Cable_Sys_1	Translational_Displacement	Z	
		+ A1	Ax_Ay_Az_Projection_Angles	Mag	
		- A2	Translational_Velocity		
		+ anchor	Translational_Acceleration		
		+ fix	Angular_Velocity		
		+ CABLE	Angular_Acceleration		
		PULLEY			
		+ PULLEY_A			

(b) Solicitud de la fuerza de tensión T_2

Figura 3.43: Solicitud de resultados de las fuerzas de tensión T_1 y T_2 .

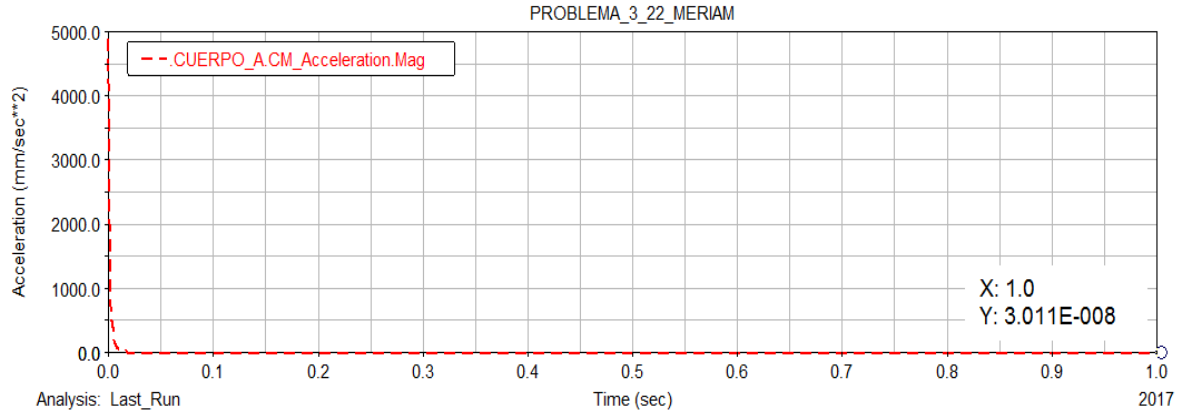
Data		Math			
Model	Filter	Object	Characteristic	Component	
.MERIAM	body	FRICION_1	Element_Force	X	
	force	+ Cable_Sys_1	Element_Torque	Y	
	constraint			Z	
				Mag	

Figura 3.44: Solicitud de resultado para la fuerza de fricción.

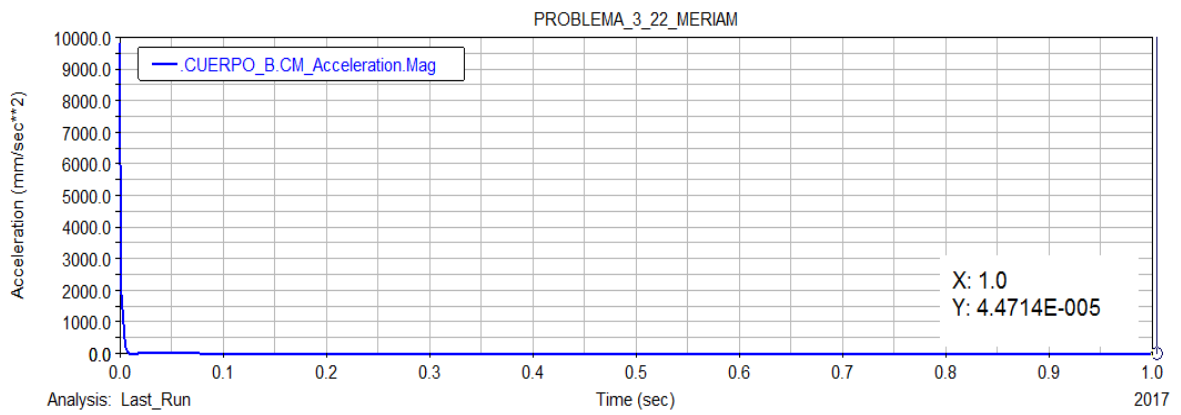
Resultados obtenidos por el programa Adams[©].

Caso (a). Análisis cuando $\mu_e = 0.25$ y $\mu_c = 0.20$ entre el cuerpo A y el plano inclinado, vea las figuras 3.45(b), 3.45(a) y 3.46.

Como puede observarse en las figuras 3.45(b) y 3.45(a), tanto la aceleración del cuerpo A y B son sumamente pequeñas, lo que para fines prácticos son iguales a cero. Teóricamente, las magnitudes de estas aceleraciones deberían ser iguales; sin embargo, como sus magnitudes son tan pequeñas, los errores de simulación las hacen diferentes.



(a) Resultado de la aceleración del cuerpo *A*



(b) Resultado de la aceleración del cuerpo *B*

Figura 3.45: Resultados de las aceleraciones de los cuerpos *A* y *B*.

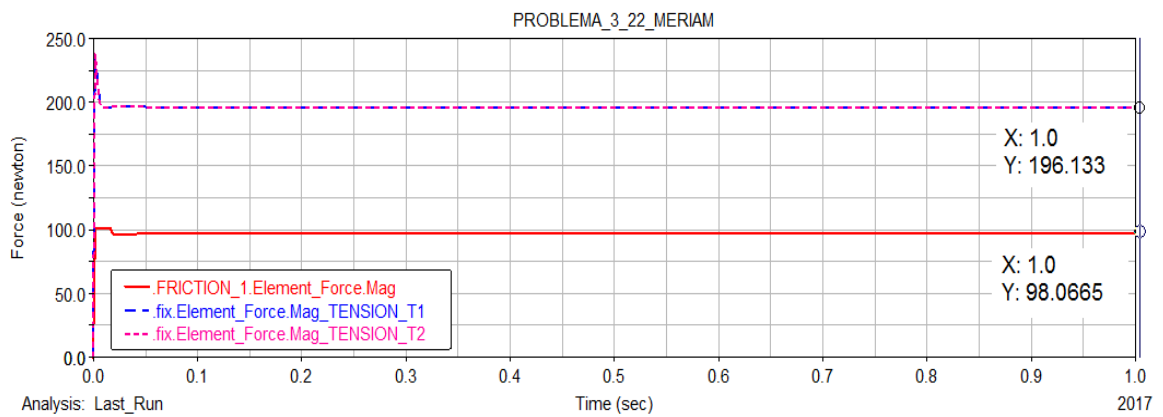
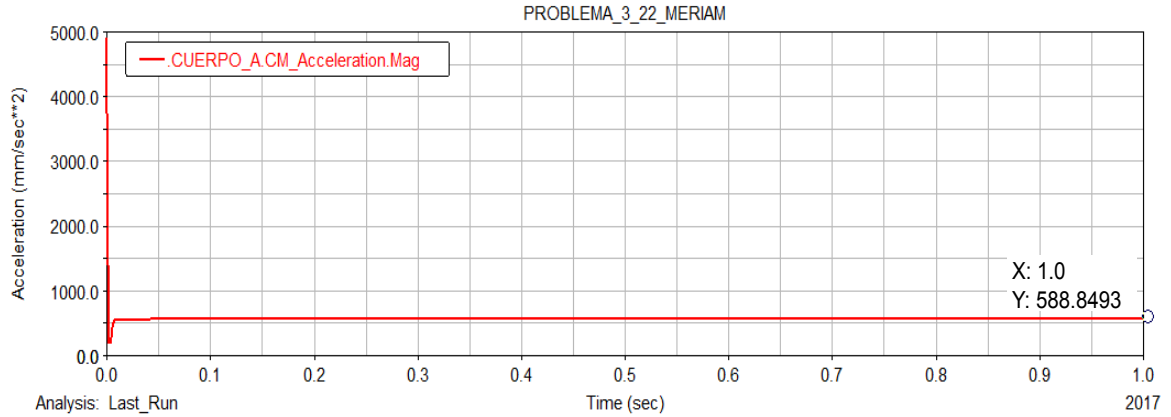
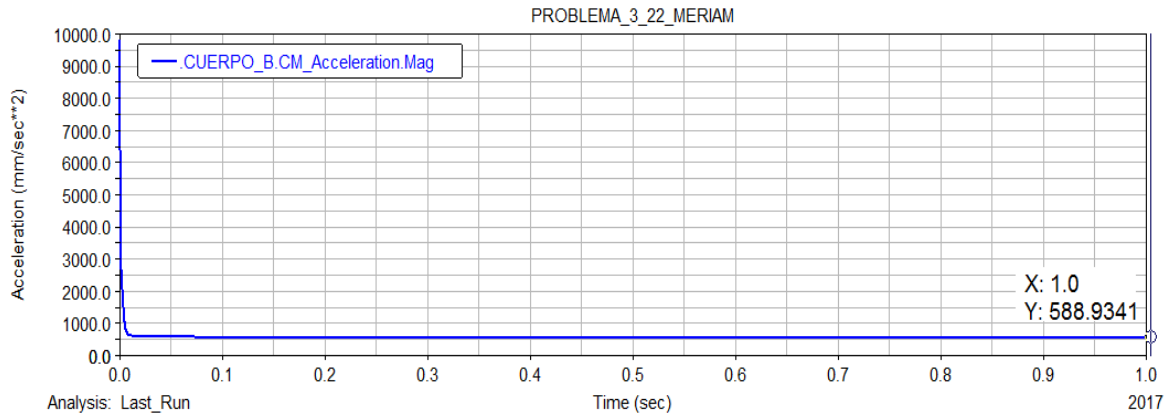


Figura 3.46: Resultado de la fuerza de fricción $F_{f_{sis}}$ y las fuerzas de tensión T_1 y T_2 .

Caso (b) Análisis cuando $\mu_e = 0.15$ y $\mu_c = 0.10$ entre el cuerpo A y el plano inclinado, vea las figuras 3.47(a), 3.47(b) y 3.48.



(a) Resultado de la aceleración del cuerpo A



(b) Resultado de la aceleración del cuerpo B

Figura 3.47: Resultados de las aceleraciones de los cuerpos A y B .

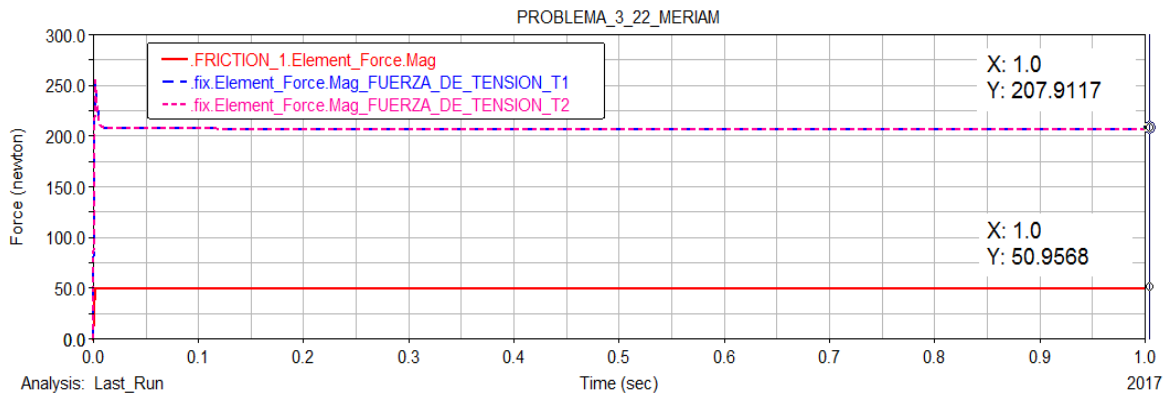


Figura 3.48: Resultado de la fuerza de fricción $F_{f_{sis}}$ y las fuerzas de tensión T_1 y T_2 .

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. Los resultados obtenidos mediante la simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 3.3 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación en Adams[©].

Tabla 3.3: Comparación de resultados. 3.^{er} problema de poleas y cables.

Variable	Resultado analítico	Resultado Adams [©]
Caso (a)		
a_A	0 mm/s^2	$3.011E - 008 \text{ mm/s}^2$
a_B	0 mm/s^2	$4.4714E - 005 \text{ mm/s}^2$
$F_{f_{sis}} = F_{f_{eq}}$	$98.1 \text{ N} \rightarrow$	$98.0665 \text{ N} \rightarrow$
$T_1 = T_2$	196.2 N	196.133 N
Caso (b)		
a_A	$589.0718 \text{ mm/s}^2 \leftarrow$	$588.8493 \text{ mm/s}^2 \leftarrow$
a_B	$589.0718 \text{ mm/s}^2 \uparrow$	$588.9341 \text{ mm/s}^2 \uparrow$
Fr_c	$50.974255 \text{ N} \rightarrow$	$50.9568 \text{ N} \rightarrow$
$T_1 = T_2$	207.9814362 N	207.9117 N

3.4. Cuarto problema de sistemas por cables.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 13-67 del libro de Beer et al. [5], incluido en la página 795.

Problema: Los bloques A y B tienen masa de 4 y 1.5 kg , respectivamente, y están conectados por medio de un sistema de cuerdas y poleas que se sueltan desde el reposo en la posición mostrada en la figura con el resorte sin deformar. Si la constante del resorte es de 300 N/m , determine $a)$ la velocidad del bloque B después de haberse movido 150 mm , $b)$ la velocidad máxima del bloque B , $c)$ el desplazamiento máximo del bloque B . No tome en cuenta la fricción ni la masa de las poleas y el resorte.

3.4.1. Solución analítica.

De acuerdo con el problema se sabe que todo el conjunto de cuerpos comienzan a moverse desde el reposo. Además, se supone que el desplazamiento del cuerpo B es hacia abajo y consecuentemente el desplazamiento del cuerpo A es hacia la derecha, vea la figura 3.49.

Al considerarse una cuerda inextensible, la longitud de la cuerda es constante y puede escribirse en función de las posiciones de los bloques A y B , vea la figura 3.49 y la ecuación (3.23).

$$L = 2x_A + y_B + C \quad (3.23)$$

Ahora bien, la diferencial de esta ecuación está dada por:

$$2\Delta x_A + \Delta y_B = 0$$

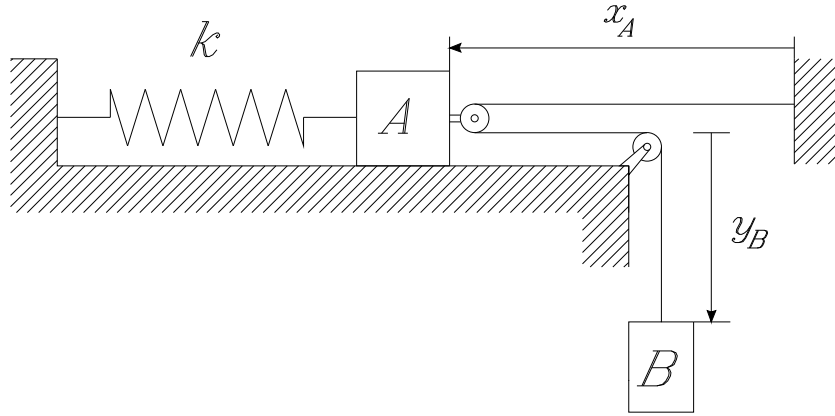


Figura 3.49: Modelo del problema 13-67 Beer et al. [5].

Derivando la ecuación (3.23) con respecto al tiempo se obtiene una relación entre las velocidades de los cuerpos A y B . De manera que:

$$\frac{dL}{dt} = 2\frac{d}{dt}x_A + \frac{d}{dt}y_B = 0 \quad \text{donde} \quad 2v_A + v_B = 0 \quad (3.24)$$

De manera que, derivando la ecuación (3.24) con respecto al tiempo, se obtiene una relación entre las aceleraciones de los cuerpos A y B , dada por:

$$2\frac{d^2}{dt^2}x_A + \frac{d^2}{dt^2}y_B = 0 \quad \text{de manera que} \quad 2a_A + a_B = 0 \quad (3.25)$$

Como se aprecia en la figura 3.50, las únicas fuerzas que producen trabajo son las fuerzas del resorte y el peso del cuerpo B , el sistema es conservativo; de manera que, se puede aplicar la ley de conservación de energía dada por:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

De acuerdo con los puntos de referencia, la primera posición es cuando el sistema está en reposo. Por lo que, la energía cinética está dada por $T_1 = 0$ y para la energía potencial se elige una línea de referencia, de manera que $V_1 = 0$; pues en la posición 1, el resorte tampoco está deformado.

Por consiguiente, la ecuación resulta:

$$0 = T_2 + V_2 \quad (3.26)$$

Donde:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_A v_{A_2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B_2}^2$$

De la ecuación (3.24) se sabe que:

$$v_A = -\frac{1}{2}v_B$$

De manera que:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_A \left(-\frac{1}{2}v_B\right)^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B_2}^2 = \frac{1}{2}v_B^2 \left(\frac{1}{4}m_A + m_B\right) \quad (3.27)$$

Finalmente:

$$V_2 = \frac{1}{2}k\delta^2 - (m_B)g\Delta y_B = \frac{1}{2}k\Delta x_A^2 - (m_B)g\Delta y_B$$

Pues la deformación del resorte es igual a $\delta = \Delta x_A$, además:

$$V_2 = \frac{1}{2}k\left(-\frac{1}{2}\Delta y_B\right)^2 - (m_B)g\Delta y_B \quad (3.28)$$

Ahora, sustituyendo estos resultados en la ecuación (3.26), resulta:

$$\frac{1}{2}v_B^2 \left(\frac{1}{4}m_A + m_B\right) + \frac{1}{8}k\Delta y_B^2 - (m_B)g\Delta y_B = 0$$

Despejando la velocidad del cuerpo B , se obtiene:

$$v_B = \sqrt{\frac{m_B g \Delta y_B - \frac{1}{8}k\Delta y_B^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}m_A + m_B\right)}} \quad (3.29)$$

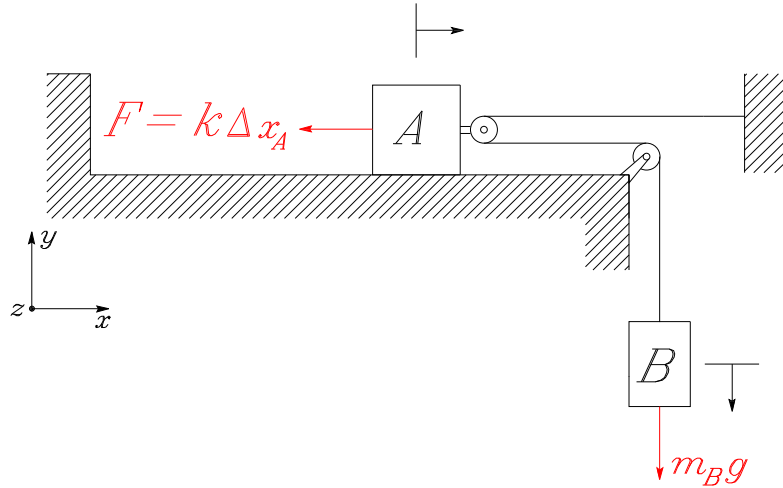


Figura 3.50: Diagramas de cuerpo libre de los cuerpo A y B .

Caso (a). Determinar la velocidad del bloque B después de haberse movido 150 mm .

Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones (3.29) y (3.24), se obtiene:

$$v_B = \sqrt{\frac{(1.5\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.15\text{ m}) - \frac{1}{8}(300\text{ N/m})(0.15\text{ m})^2}{\frac{1}{8}(4\text{ kg}) + \frac{1}{2}(1.5\text{ kg})}} = 1.044413711\text{ m/s}$$

$$v_A = \frac{1}{2} (1.044413711 \text{ m/s}) = 0.5222068556 \text{ m/s}$$

Caso (b). Determinar la velocidad máxima del bloque B .

La velocidad máxima del cuerpo B sucede cuando las aceleraciones de los cuerpo A y B son iguales a cero. Analizando el diagrama de cuerpo libre y aplicando la segunda ley de Newton, se obtiene una expresión para el desplazamiento máximo Δx_A , y por consiguiente, el desplazamiento máximo que sufre el cuerpo B , vea la figura 3.50.

De la sumatoria de fuerzas respecto al eje x del cuerpo A , y considerando una aceleración igual a cero, se sabe que:

$$\Sigma F_x = m_A a \quad \text{tal que} \quad \Sigma F_x = 0$$

De manera que:

$$-k \Delta x_A + 2m_B g = 0 \quad \text{donde} \quad \Delta x_A = \frac{2m_B g}{k} \quad (3.30)$$

Ahora bien, sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (3.30), da como resultado el valor del desplazamiento máximo Δx_A . Tal que:

$$\Delta x_A = \frac{2(1.5 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{300 \text{ N/m}} = 0.0981 \text{ m}$$

De lo anterior, el desplazamiento Δy_B resulta:

$$\Delta y_B = 2\Delta x_A \quad \text{por lo que} \quad \Delta y_B = 2(0.0981 \text{ m}) = 0.1962 \text{ m}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (3.29) y (3.24), se obtiene:

$$v_B = \sqrt{\frac{(1.5 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.1962 \text{ m}) - \frac{1}{8}(300 \text{ N/m})(0.1962 \text{ m})^2}{\frac{1}{8}(4 \text{ kg}) + \frac{1}{2}(1.5 \text{ kg})}} = 1.074631658 \text{ m/s}$$

$$v_A = \frac{1}{2} (1.074631658 \text{ m/s}) = 0.5373158289 \text{ m/s}$$

Caso (c). Determinar el desplazamiento máximo del bloque B .

El desplazamiento máximo del cuerpo B , surge cuando la velocidad de ambos cuerpos es igual a cero, por lo tanto:

$$(m_B) g \Delta y_B - \frac{1}{8} k (\Delta)^2 \quad \text{tal que} \quad \Delta y_B = \frac{8m_B g}{k} \quad (3.31)$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación anterior, resulta:

$$\Delta y_B = \frac{8(1.5 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{300 \text{ N/m}} = 0.3924 \text{ m}$$

3.4.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de sistemas con cables dentro del módulo de **Machinery** del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la polea y el cable. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.2 y 2.2.1, en las páginas 11 y 12 de este trabajo. En esta parte únicamente debe ponerse atención en minimizar la inercia de la polea, la masa del cable y maximizar la rigidez del cable.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 13-67 se muestra en la figuras 3.51 y 3.52. Por otro lado, el usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 3.53(a).

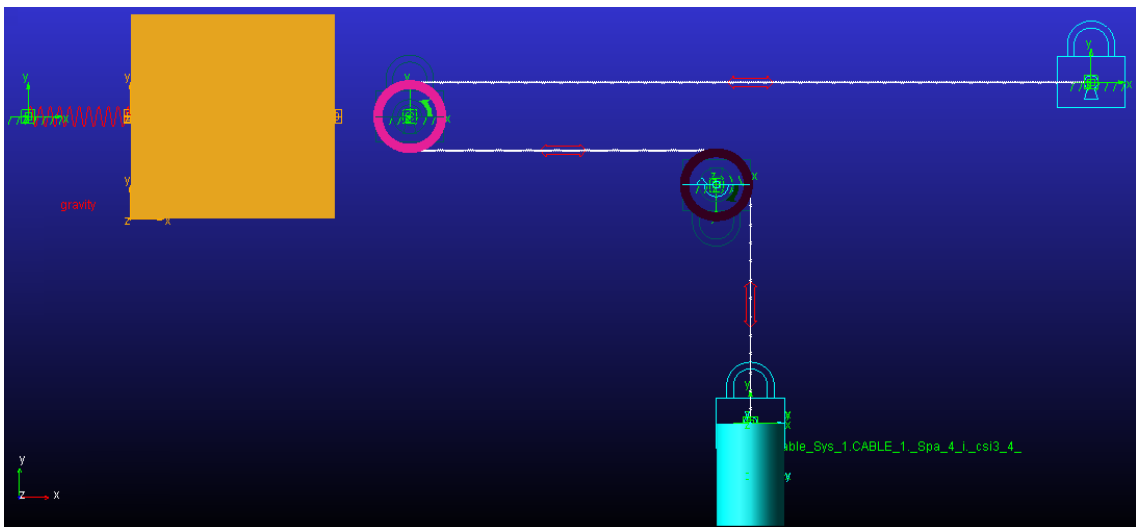


Figura 3.51: Vista del sistema con sólidos sombreados.

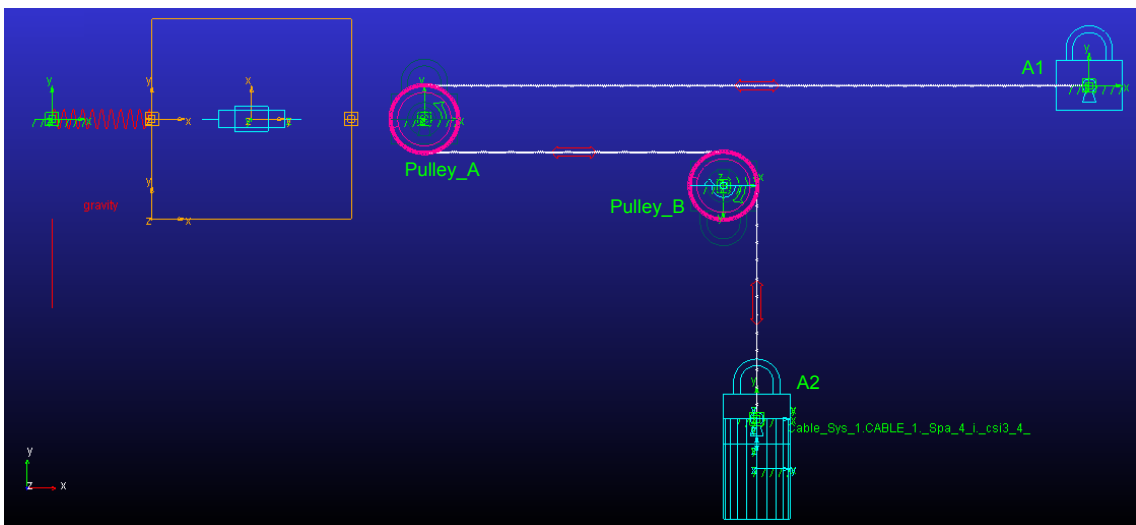
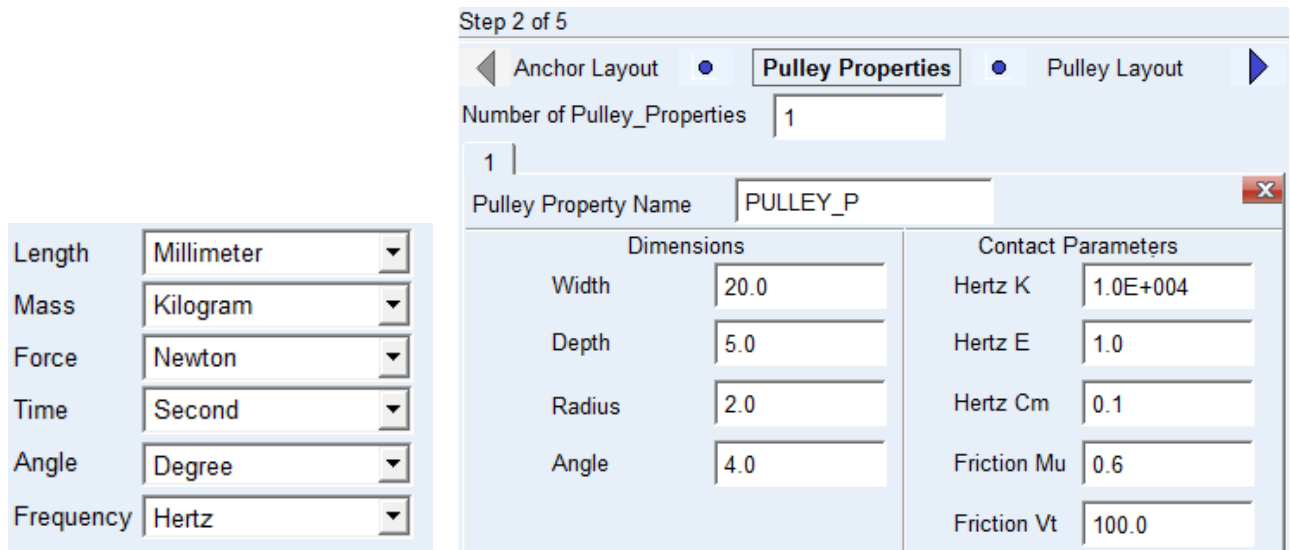


Figura 3.52: Vista del sistema mediante un marco de alambre.

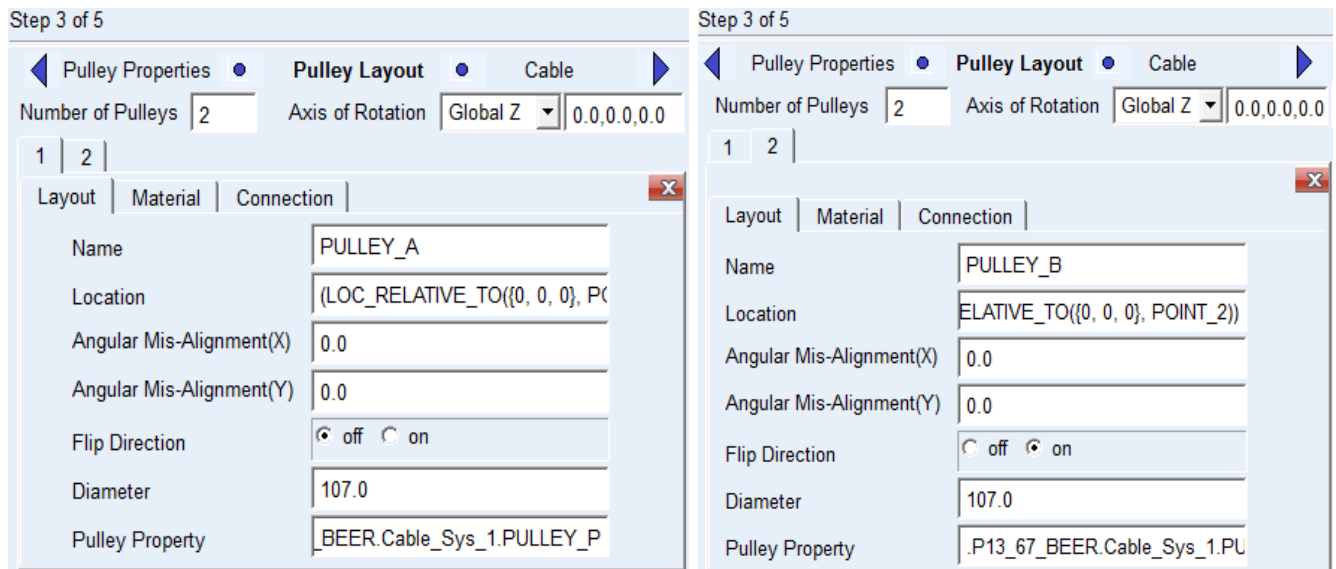


(a) Unidades empleadas en el modelo de Adams[®]

(b) Parámetros geométricos de las poleas

Figura 3.53: Unidades del modelo y los parámetros geométricos de las poleas.

Las propiedades y parámetros geométricos de las poleas se presentan en las figuras 3.53(b), 3.54(a) y 3.54(b). Los parámetros inerciales de la poleas se presentan en la figura 3.55. Al tener las mismas propiedades geométricas e inerciales basta con mostrar únicamente las propiedades inerciales de la polea *A*.



(a) Localización y orientación de la polea *A*

(b) Localización y orientación de la polea *B*

Figura 3.54: Localización y orientación de las poleas *A* y *B*.

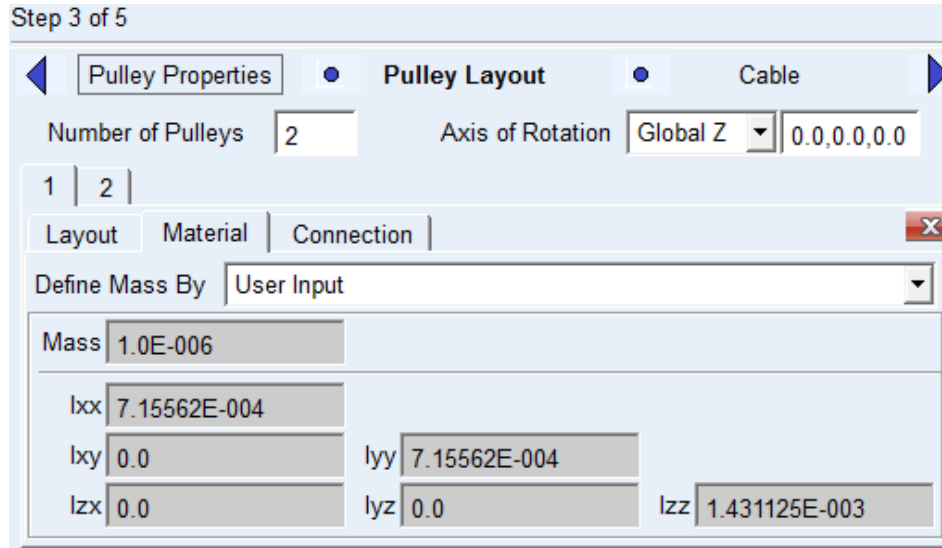
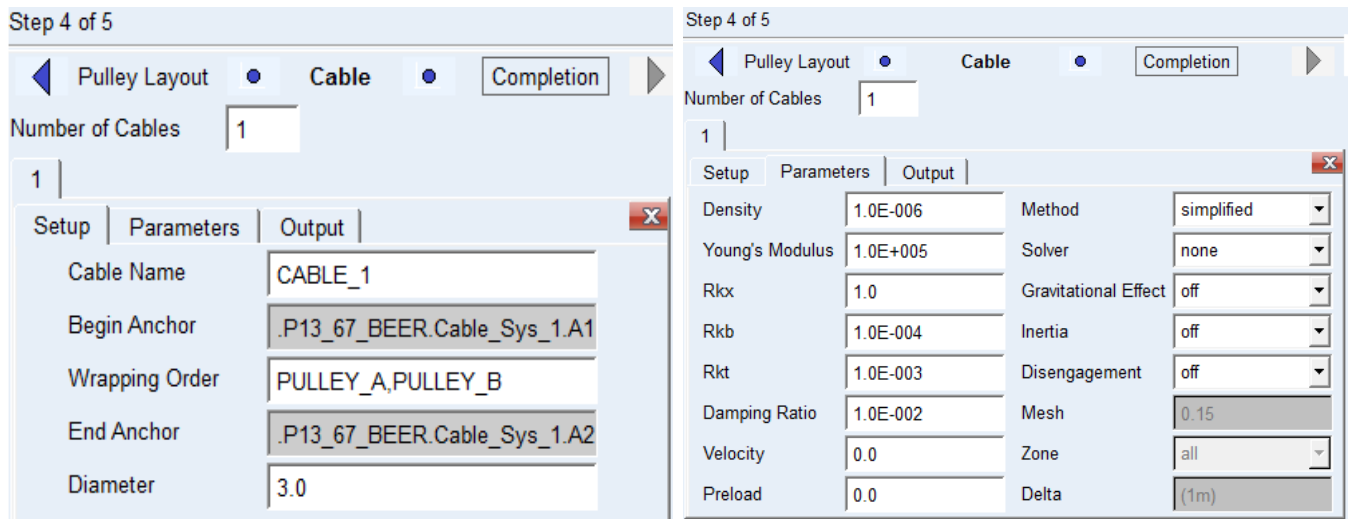


Figura 3.55: Parámetros inerciales de la polea A.

La configuración y los parámetros geométricos e inerciales del cable se muestran en las figuras 3.56(a) y 3.56(b), mientras que los parámetros del resorte se presenta en la figura 3.57.



(a) Configuración del cable

(b) Parámetros del cable

Figura 3.56: Parámetros geométricos y elásticos del cable.

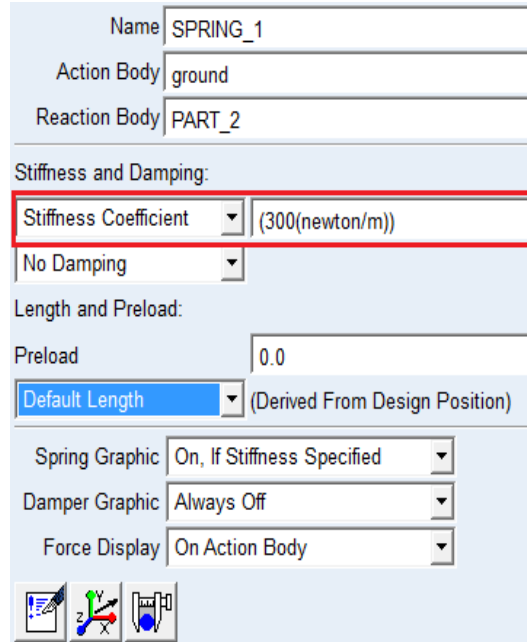


Figura 3.57: Parámetros del resorte

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de simulación de 0.5 segundos, ingresar 1000 pasos y seleccionar el tipo de simulación cinemática, vea la figura 3.58.

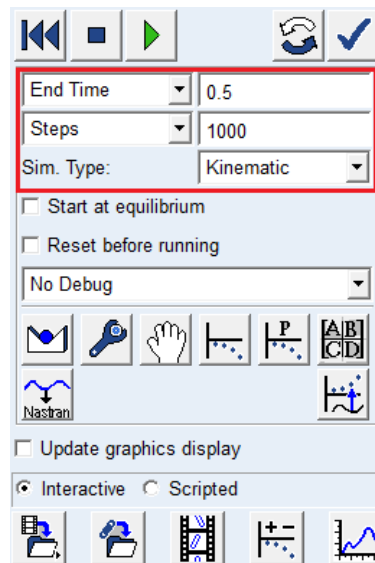


Figura 3.58: Tiempo, números de pasos y tipo de análisis de la simulación

El usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación para solicitar los resultados deseados, se deben seleccionar las opciones mostradas en las figuras 3.59, 3.60 y 3.61.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P13_67_BEER	body	- PART_2	Total_Force_On_Point	X
	force	cm	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	MARKER_1	Total_Force_At_Location	Z
		MARKER_3	Total_Torque_At_Location	Mag
		MARKER_108	Translational_Displacement	
		MARKER_110	Translational_Velocity	
		+ PART_3	Translational_Acceleration	
		+ Cable_Sys_1	Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.59: Solicitud de la velocidad del cuerpo A.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P13_67_BEER	body	+ PART_2	Total_Force_On_Point	X
	force	- PART_3	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	amrk_A2	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		MARKER_4	Translational_Displacement	
		+ Cable_Sys_1	Translational_Velocity	
			Translational_Acceleration	
			Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.60: Solicitud de la velocidad del cuerpo B.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P13_67_BEER	body	+ PART_2	Total_Force_On_Point	X
	force	- PART_3	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	amrk_A2	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		MARKER_4	Translational_Displacement	
		+ Cable_Sys_1	Translational_Velocity	
			Translational_Acceleration	
			Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.61: Solicitud de la aceleración del cuerpo B.

Caso (a).

Antes de solicitar los resultados para el caso (a), primero se requiere averiguar el tiempo que tarda el cuerpo B en desplazarse 150 mm, y para ello se creó una medición de desplazamiento de un marcador perteneciente al cuerpo B con respecto a un punto perteneciente a tierra. De acuerdo con Adams[®] el tiempo que tarda el cuerpo B en desplazarse 150 mm es igual a 0.2435 segundos, vea las figuras 3.62 y 3.63.

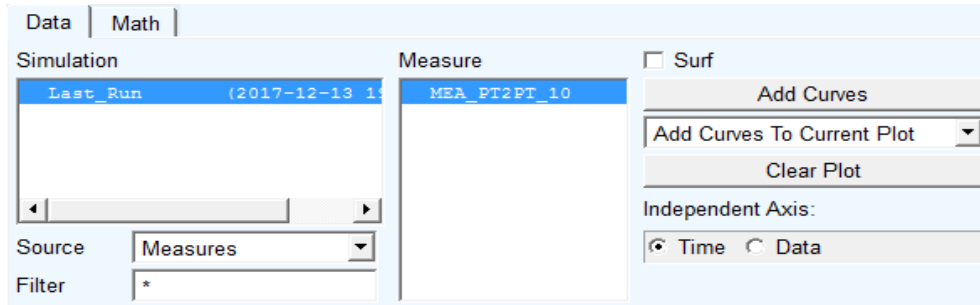


Figura 3.62: Solicitud de la medición del desplazamiento del marcador perteneciente al cuerpo B .

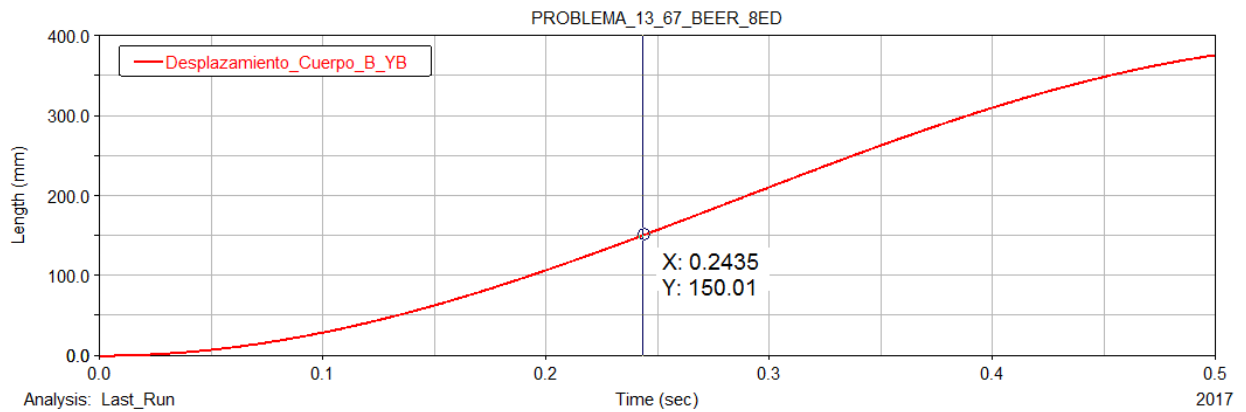


Figura 3.63: Tiempo que tarda el cuerpo B en desplazarse una distancia de 150 mm .

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©], se muestran en las figuras 3.64 y 3.65.

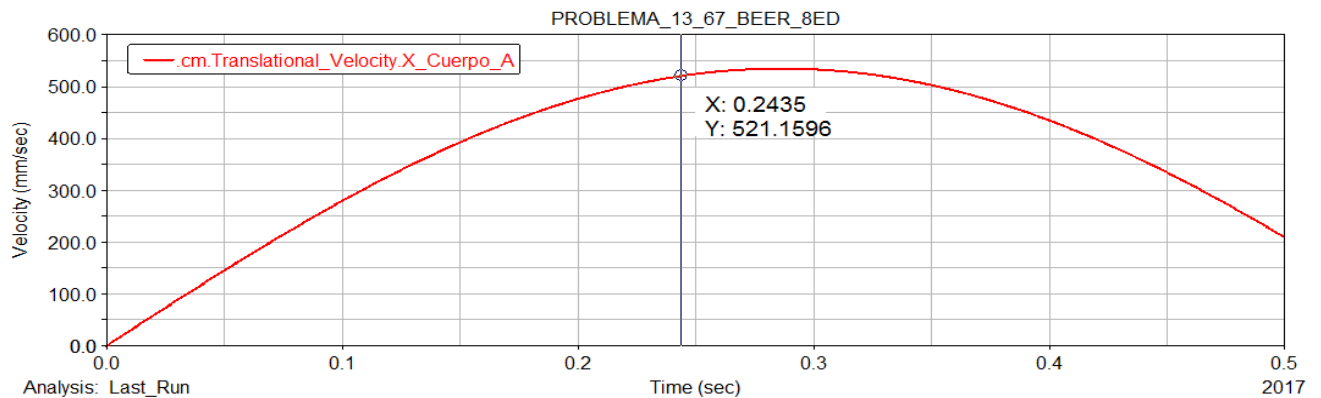


Figura 3.64: Resultado de la velocidad del cuerpo B cuando este se desplaza 150 mm .

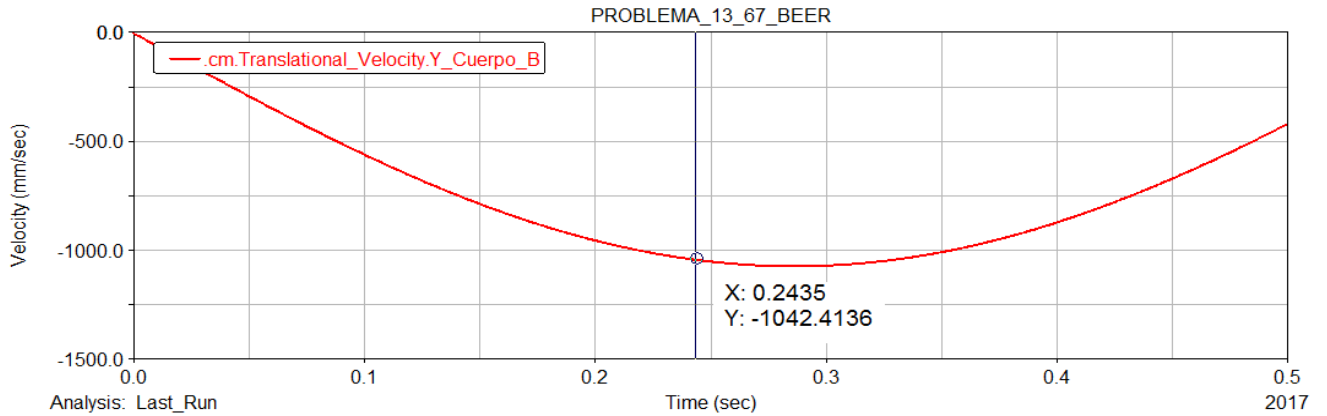


Figura 3.65: Resultado de la velocidad del cuerpo A cuando el cuerpo B se desplaza 150 mm .

Caso (b).

Como ya se mencionó anteriormente, la velocidad máxima del cuerpo B ocurre cuando su aceleración es igual a cero, por lo que primero es necesario calcular el tiempo que tarda la aceleración del cuerpo B en volverse cero. para aumentar la exactitud de los resultados se incrementó el número de pasos a 2500, vea la figura 3.66.

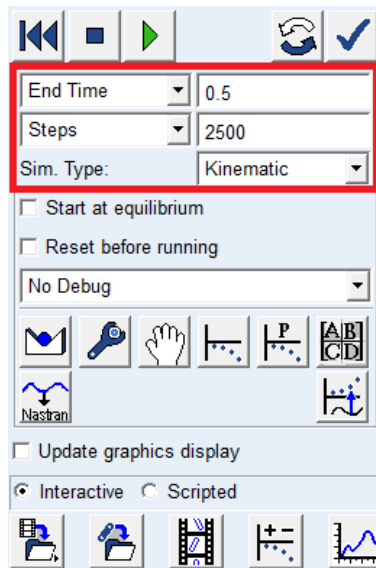


Figura 3.66: Parámetros de simulación con 2500 pasos.

Para solicitar los resultados obtenidos por Adams[®] el usuario debe seleccionar las opciones mostradas en las figuras 3.59, 3.60 y 3.61.

De acuerdo con Adams[®], el tiempo que tarda la aceleración del cuerpo B en volverse cero es igual a 0.2868 segundos, vea la figura 3.67.

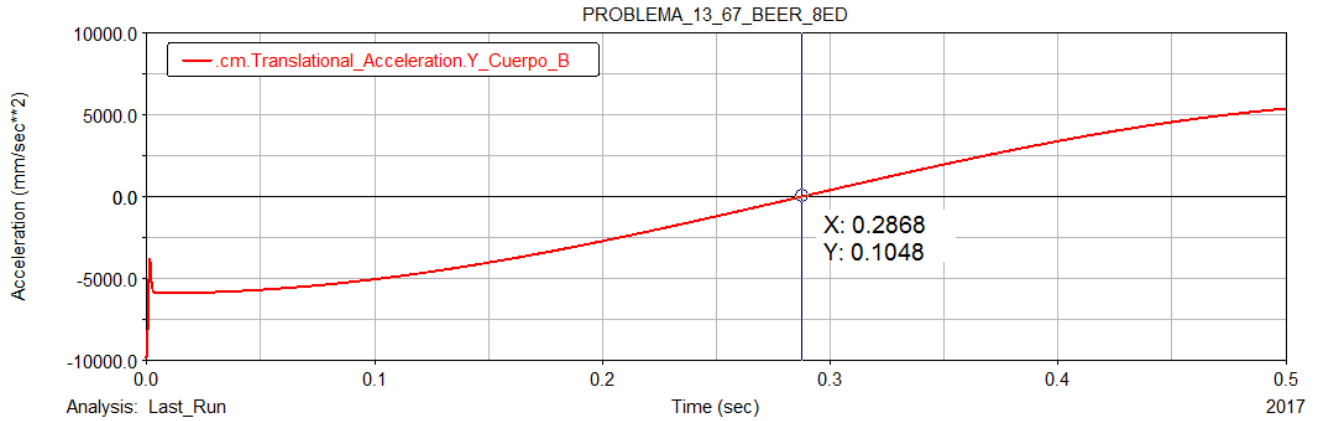


Figura 3.67: Tiempo que tarda la aceleración del cuerpo *B* en volverse cero.

Para solicitar la velocidad del cuerpo *B* y cuerpo *A* obtenidos por Adams[©], el usuario debe seleccionar las opciones mostradas en las figuras 3.60 y 3.59.

De manera que, los resultados obtenidos por el programa Adams[©], se muestran en las figuras 3.68 y 3.69. De acuerdo con Adams[©], las velocidades máximas que sufren los cuerpos *B* y *A* al transcurrir 0.2868 segundos es igual a 1.0743767 m/s y 0.5371376 m/s respectivamente, vea la figura 3.68.

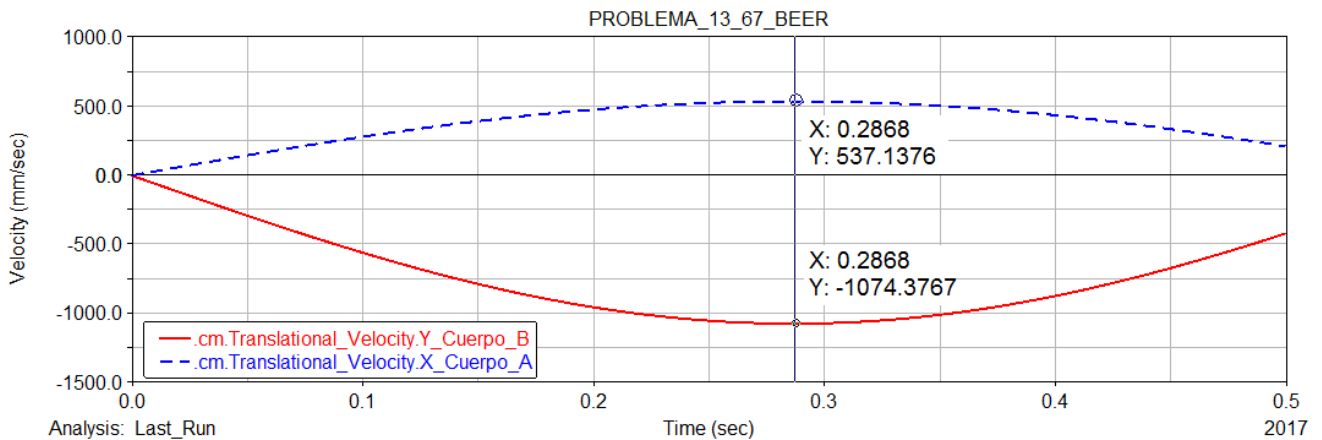


Figura 3.68: Velocidades máximas que sufren los cuerpos *A* y *B*.

Caso (c).

De igual forma para solicitar el desplazamiento que sufre el cuerpo *B* se debe seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 3.62 y 3.63. Para este inciso el tiempo de simulación se aumentó a 1 s con un número de pasos igual a 2500, vea la figura 3.66. De acuerdo con Adams[©] el desplazamiento máximo que sufre el cuerpo *B* es igual a 391.6551 mm , vea la figura 3.69.

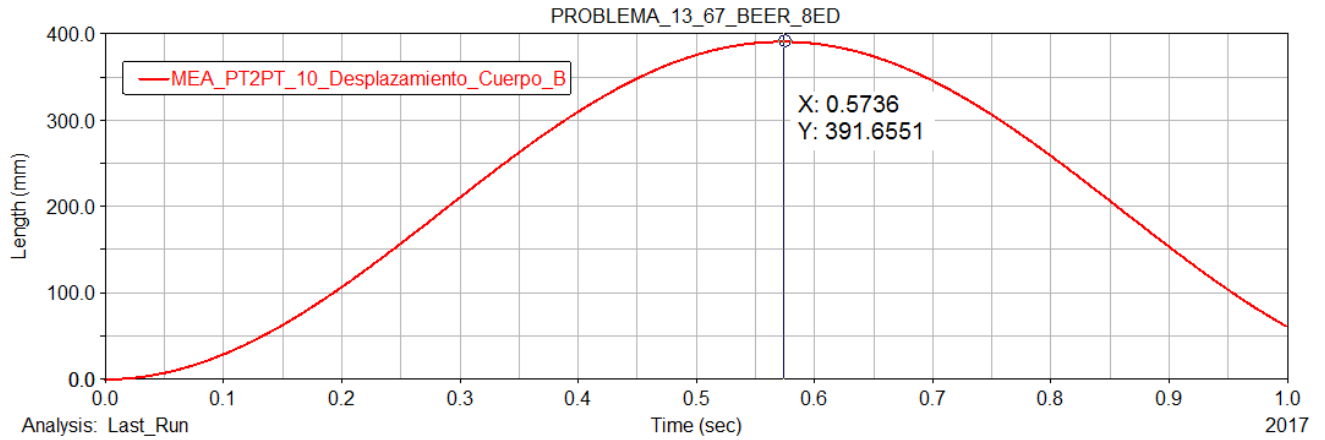


Figura 3.69: Desplazamiento máximo que sufre el cuerpo B .

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. Los resultados obtenidos mediante la simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 3.4 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación en Adams[©].

Tabla 3.4: Comparación de resultados. 4.º problema de poleas y cables.

Variable	Resultado analítico	Resultado Adams [©]
Caso (a)		
v_A	522.2068556 mm/s →	537.3158 mm/s →
v_B	1044.413711 mm/s ↓	1042.4136 mm/s ↓
Caso (b)		
a_B	0 mm/s ²	0.1082 mm/s ²
v_A	537.3158289 mm/s →	537.1376 mm/s →
v_B	1074.6371658 mm/s ↓	1074.3767 mm/s ↓
Caso (c)		
Δy_B	392.4 mm ↓	391.6551 mm ↓

3.5. Quinto problema de sistemas por cables.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 14-13 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 186.

Problema: Determine la velocidad del bloque A de 60 lb , si los dos bloques se sueltan a partir del reposo y el bloque B de 40 lb se mueve 2 pies hacia arriba del plano inclinado. El coeficiente de fricción cinética entre ambos bloques y los planos inclinados es $\mu_k = 0.10$. De manera que: $w_A = 60\text{ lbf}$, $w_B = 40\text{ lbf}$, $\alpha = 60^\circ$ y $\omega = 30^\circ$.

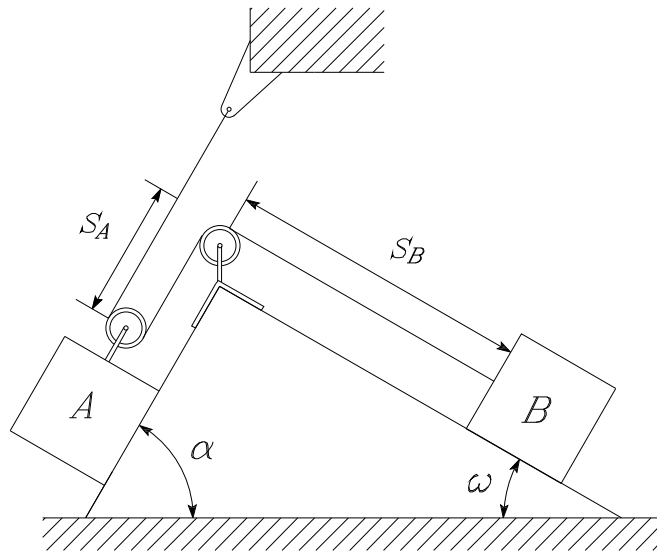


Figura 3.70: Modelo del problema 14-13 Hibbeler [18].

3.5.1. Solución analítica.

De acuerdo con el problema se sabe que todo el conjunto de cuerpos se mueven a partir del reposo; además, se sabe que el bloque B asciende por el plano inclinado. Puesto que se supone que la cuerda es inextensible, la longitud de la cuerda es constante y en función de las posiciones de los bloques A y B , vea la figura 3.70 y la ecuación (3.32). De manera que, C es una constante que toma en cuenta, entre otras cosas, la longitud de la cuerda enrollada en las poleas.

$$L = S_B + 2S_A + C \quad (3.32)$$

Derivando la ecuación (3.32), se tiene que:

$$0 = \frac{dS_B}{dt} + 2\frac{dS_A}{dt} \quad \text{o} \quad v_B + 2v_A = 0 \quad (3.33)$$

De la ecuación (3.33), se deduce:

$$v_A = -\frac{1}{2}v_B \quad (3.34)$$

Puesto que $v_B < 0$, significa que $v_A > 0$ y que el cuerpo A desciende por el plano inclinado. Además la diferencial de la ecuación (3.33) conduce a:

$$\Delta S_B + 2\Delta S_A = 0 \quad (3.35)$$

Ahora bien, derivando nuevamente la ecuación (3.33) con respecto al tiempo, se obtiene una relación entre las aceleraciones de los cuerpos A y B dada por:

$$\frac{d^2 S_B}{dt^2} + 2\frac{d^2 S_A}{dt^2} = 0 \quad \text{de manera que} \quad a_B + 2a_A = 0 \quad (3.36)$$

A continuación, se obtienen los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos², vea la figura 3.71.

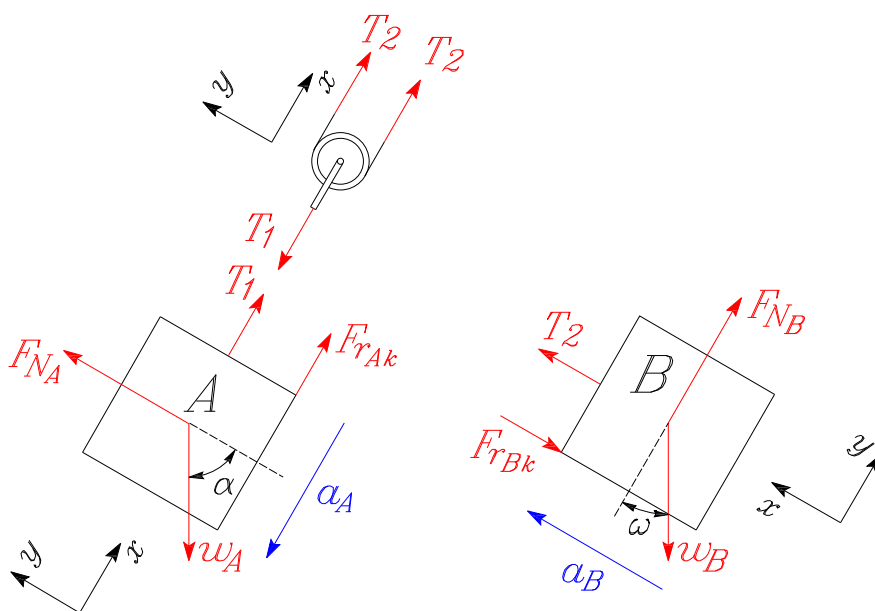


Figura 3.71: Diagramas de cuerpo libre de los cuerpos A , B y de la polea.

De manera que, aplicando la segunda ley de Newton-Euler sobre cada uno de los cuerpos, se obtiene una expresión de la aceleración para cada uno de los cuerpos A y B en función de sus masas m_A y m_B ; sus pesos w_A y w_B ; y el coeficiente de fricción cinético μ_k , vea la ecuación (3.44). Por consiguiente, se obtienen expresiones para las fuerzas de tensión T_1 , T_2 y la fuerza de fricción F_r .

De la sumatoria de fuerzas respecto al eje y del cuerpo A , se sabe que:

$$\Sigma F_y = 0$$

²Este problema también podría resolverse empleando el método de trabajo y energía.

De manera que:

$$F_{N_A} - w_A \cos(\alpha) = 0 \quad \text{donde} \quad F_{N_A} = w_A \cos(\alpha) \quad (3.37)$$

De la sumatoria de fuerzas respecto al eje x del cuerpo A , se conoce que:

$$\Sigma F_x = -m_A a_A$$

Por lo tanto:

$$T_1 - w_A \sin(\alpha) + Fr_{A_k} = -m_A a_A \quad \text{tal que} \quad T_1 = w_A \sin(\alpha) - Fr_{A_k} - m_A a_A \quad (3.38)$$

Ahora bien, de la sumatoria de fuerzas respecto al eje y del cuerpo B , se sabe que:

$$\Sigma F_y = 0$$

De lo anterior, resulta:

$$F_{N_B} - w_B \cos(\omega) = 0 \quad \text{donde} \quad F_{N_B} = w_B \cos(\omega) \quad (3.39)$$

De la sumatoria de fuerzas respecto al eje x del cuerpo B , se conoce que:

$$\Sigma F_x = m_B a_B$$

Por consiguiente, resulta:

$$T_2 - w_B \sin(\omega) - Fr_{B_k} = m_B a_B \quad \text{tal que} \quad T_2 = m_B a_B + Fr_{B_k} + w_B \sin(\omega) \quad (3.40)$$

Por otro lado, las fuerzas de fricción Fr_{A_k} y Fr_{B_k} se definen como:

$$Fr_{A_k} = \mu_k F_{N_A} = \mu_k w_A \cos \alpha \quad (3.41)$$

$$Fr_{B_k} = \mu_k F_{N_B} = \mu_k w_B \cos \omega \quad (3.42)$$

Ya que se supone que las poleas son de masa despreciable, se deduce que $T_1 = 2T_2$. De modo que, sustituyendo el valor de T_1 y la ecuación (3.41) en la ecuación (3.38), resulta:

$$2T_2 = w_A \sin(\alpha) - \mu_k w_A \cos \alpha - m_A a_A \quad (3.43)$$

Sustituyendo la ecuación (3.40), (3.42) en la ecuación (3.43), se obtiene:

$$2(m_B a_B + \mu_k w_B \cos \omega + w_B \sin \omega) = w_A \sin \alpha - \mu_k F_{N_A} - m_A a_A$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (3.36) en la ecuación anterior y despejando la aceleración del cuerpo A , da como resultado:

$$a_A = \frac{w_A \sin \alpha - \mu_k w_A \cos \alpha - 2\mu_k w_B \cos \omega - 2w_B \sin \omega}{4m_B + m_A} \quad (3.44)$$

De igual forma, sustituyendo los valores numéricos en la ecuación de la aceleración del cuerpo A , vea la ecuación (3.44), se obtiene:

$$a_A = \frac{60 \sin 60^\circ - (0.1)(60) \cos 60^\circ - 2(0.1)(40) \cos 30^\circ - 2(40) \sin 30^\circ}{(160 + 60)(1/32.2)} \frac{\text{lb} \cdot \text{f}}{\text{slug}}$$

$$a_A = 0.297604255 \text{ ft/s}^2$$

Se sabe que la magnitud de la aceleración del cuerpo B es igual al doble de la magnitud de la aceleración del cuerpo A , vea (3.36); de manera que, el valor de la aceleración del cuerpo B es igual a:

$$a_B = 0.59520851 \text{ ft/s}^2$$

Como la aceleración del cuerpo A y el cuerpo B son constantes, se sabe que el movimiento de ambos cuerpos es rectilíneo uniformemente acelerado a lo largo del plano inclinado; así mismo, empleando la ecuación (3.45) se calcula la velocidad del cuerpo B al desplazarse 2 ft .

$$v_B^2 = \cancel{v_{B_i}^2} + 2a_B \Delta x \quad \text{Tal que} \quad v_B = \sqrt{2a_B \Delta x} \quad (3.45)$$

Al sustituir los valores numéricos en la ecuación anterior, la velocidad del cuerpo B , resulta:

$$v_B = \sqrt{2(0.59520851 \text{ ft/s}^2)(2 \text{ ft})} = 1.542995152 \text{ ft/s}$$

Se sabe de la ecuación (3.34), que la velocidad del cuerpo A es igual a la mitad de la velocidad del cuerpo B , por tanto:

$$v_A = 0.7714975761 \text{ ft/s}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (3.38), se obtiene un valor de la fuerza de tensión sobre el cuerpo A o T_1 igual a:

$$T_1 = 60 \text{ sen } 60^\circ \text{ lbf} - (0.1)(60) \text{ cos } 60^\circ \text{ lbf} - \left(\frac{60}{32.2} \text{ slug} \right) (0.297604255 \text{ ft/s}^2) = 48.40698214 \text{ lbf}$$

De acuerdo con la figura 3.71, la fuerza de tensión sobre el cuerpo B es igual a la mitad de la fuerza de tensión sobre el cuerpo A o T_2 , así que:

$$T_2 = \frac{48.40698214 \text{ lbf}}{2} = 24.20349107 \text{ lbf}$$

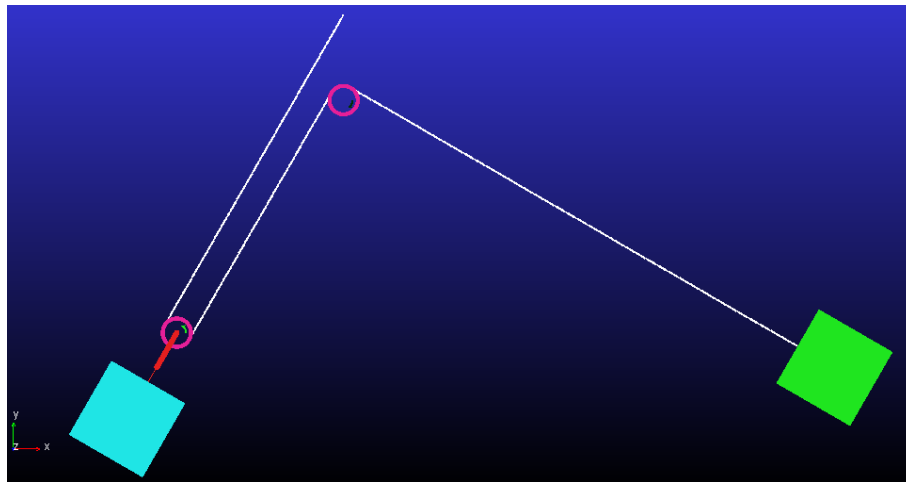
Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones (3.41) y (3.42), se obtienen los valores de las fuerzas de fricción entre los cuerpos A y B , y el plano inclinado.

$$\begin{aligned} Fr_{A_k} &= (0.1)(60) \text{ cos } 60^\circ = 3 \text{ lbf} \\ Fr_{B_k} &= (0.1)(40) \text{ cos } 30^\circ = 3.464161615 \text{ lbf} \end{aligned}$$

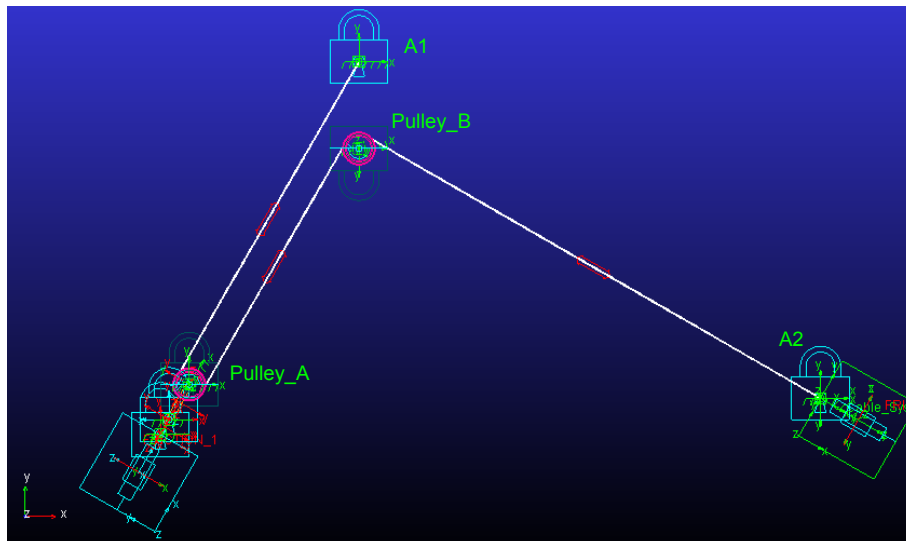
3.5.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de sistemas con cables dentro del módulo de **Machinery** del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la polea y el cable, ni los parámetros de la fricción que se presenta entre el cuerpo *A*, *B* y el plano inclinado. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.2 y 2.2.1, en las páginas 11 y 12 de este trabajo. En esta parte únicamente debe ponerse atención en minimizar la inercia de la polea, la masa del cable y maximizar la rigidez del cable.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 14-13 Hibbeler [18], se muestra en la figura 3.72.



(a) Vista del sistema con sólidos sombreados



(b) Vista del sistema mediante un marco de alambre

Figura 3.72: Modelo del sistema en Adams[©].

Por otro lado, el usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 3.73. Los parámetros de la fricción entre el cuerpo A , B y el plano inclinado se presenta en la figura 3.74.

Length	Foot
Mass	Slug
Force	Pound Force
Time	Second
Angle	Degree
Frequency	Hertz

Figura 3.73: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Las unidades mostradas en la figura 3.73 están en “slug” para la masa y en “slug · ft²” para los momentos de inercia de ambas poleas.

Friction Name	FRICION_2
Adams Id	2
Comments	
Joint Name	JOINT_1
Translational Parameters	
Mu Static	0.1
Mu Dynamic	0.1
Reaction Arm	8.333333333E-002
Initial Overlap	83.333333333
With Positive Joint Displacement	
Overlap Will	Remain Constant
Bending Factor	1.0
Transition Velocity	8.333333333E-003
Max Stiction Deformation	8.333333333E-004
Friction Force Preload	0.0
Max Friction Force	
Effect	Sliding Only
Input Forces to Friction:	
<input type="checkbox"/> Preload	<input checked="" type="checkbox"/> Reaction Force
<input type="checkbox"/> Torsional Moment	<input type="checkbox"/> Bending Moment
Friction Inactive During:	
<input type="checkbox"/> Static Equilibrium	

Figura 3.74: Parámetros para la fuerza de fricción entre el plano inclinado y los cuerpo A y B .

Los parámetros geométricos, de localización e inerciales de las poleas se presentan en las figuras 3.75, 3.76(a), 3.76(b) y 3.77; mientras que la configuración y los parámetros elásticos del cable se muestran en las figuras 3.78(a) y 3.78(b).

Step 2 of 5

Anchor Layout **Pulley Properties** Pulley Layout

Number of Pulley_Properties

1 |

Pulley Property Name

Dimensions		Contact Parameters	
Width	<input type="text" value="0.0656167979"/>	Hertz K	<input type="text" value="1.2E+005"/>
Depth	<input type="text" value="0.01640419948"/>	Hertz E	<input type="text" value="1.0"/>
Radius	<input type="text" value="0.006561679"/>	Hertz Cm	<input type="text" value="1.2"/>
Angle	<input type="text" value="4.0"/>	Friction Mu	<input type="text" value="0.6"/>
		Friction Vt	<input type="text" value="8.3333333333"/>

Figura 3.75: Propiedades geométricas de las poleas.

Step 3 of 5

Pulley Properties **Pulley Layout** Cable

Number of Pulleys Axis of Rotation

1 | 2 |

Layout | Material | Connection |

Name

Location

Angular Mis-Alignment(X)

Angular Mis-Alignment(Y)

Flip Direction off on

Diameter

Pulley Property

(a) Localización de la polea sobre el cuerpo A

Step 3 of 5

Pulley Properties **Pulley Layout** Cable

Number of Pulleys Axis of Rotation

1 | 2 |

Layout | Material | Connection |

Name

Location

Angular Mis-Alignment(X)

Angular Mis-Alignment(Y)

Flip Direction off on

Diameter

Pulley Property

(b) Localización de la polea anclado al plano inclinado

Figura 3.76: Localización de las poleas sobre el cuerpo A y el plano inclinado.

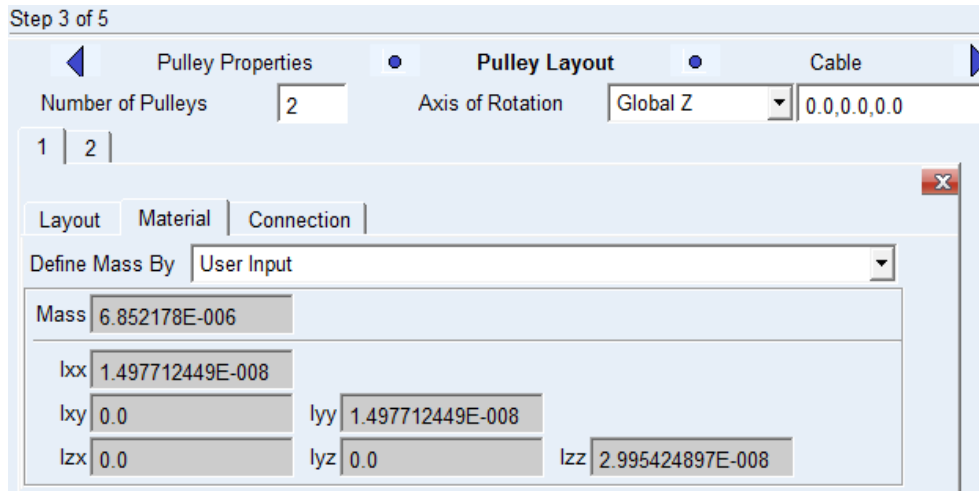
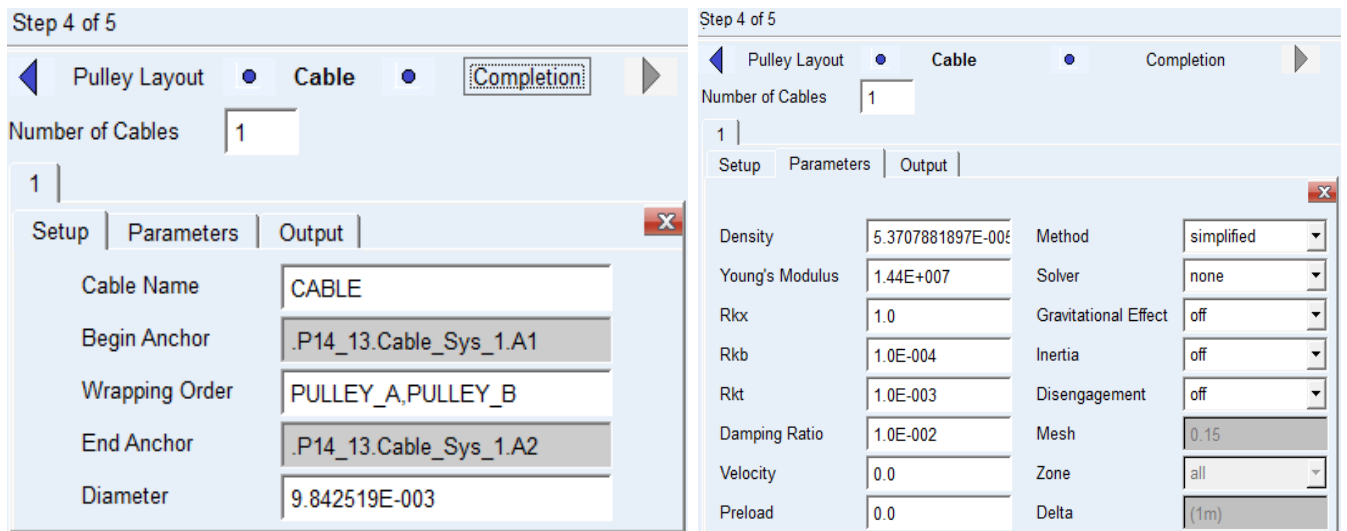


Figura 3.77: Parámetros inerciales de la polea sobre el cuerpo *A* y el plano inclinado.



(a) Configuración del cable

(b) Parámetros elásticos del cable

Figura 3.78: Parámetros geométricos y elásticos del cable.

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de simulación de 2.25 segundos, ingresar 1500 pasos y seleccionar el tipo de simulación cinemática, vea la figura 3.79.

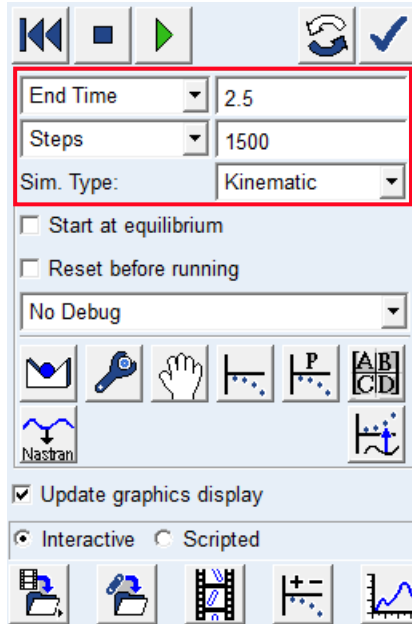


Figura 3.79: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Para medir el desplazamiento que sufre el cuerpo B a lo largo del plano inclinado, se creó un objeto de medición de la magnitud del desplazamiento del centro de masa del cuerpo B , con respecto a un punto anclado a tierra con coordenadas iguales a las coordenadas iniciales del centro de masa del cuerpo B .

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar las opciones mostradas en las figuras 3.80, 3.82, 3.83, 3.84, 3.85, 3.86, 3.87, 3.88 y 3.89.

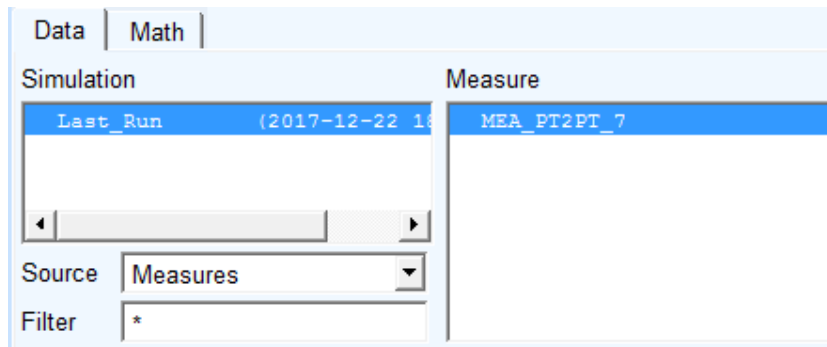


Figura 3.80: Solicitud del desplazamiento del cuerpo B a lo largo del plano inclinado.

Para solicitar la fuerza de tensión, T_1 sobre el cuerpo A y de acuerdo al diseño del modelo en Adams[®], se solicitó la fuerza de tensión sobre el marcado o marker 125 perteneciente al cuerpo o parte 31 dentro del modelo, cabe mencionar que el nombre de cada cuerpo y objeto los proporciona el programa Adams[®] de forma automática, pero el usuario puede modificar el nombre si así lo desea; vea la figura 3.81.

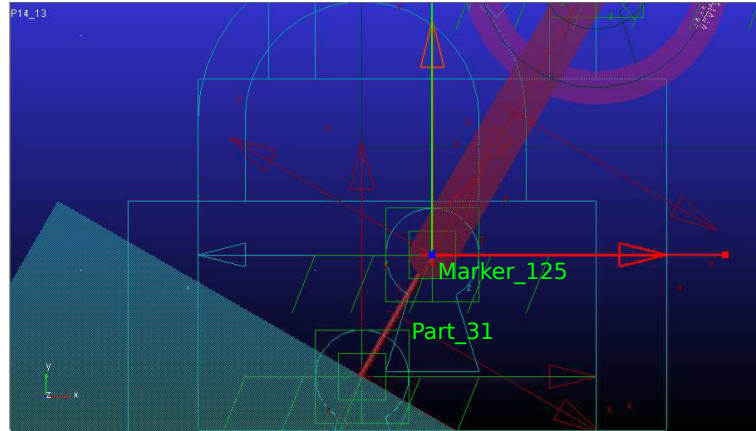
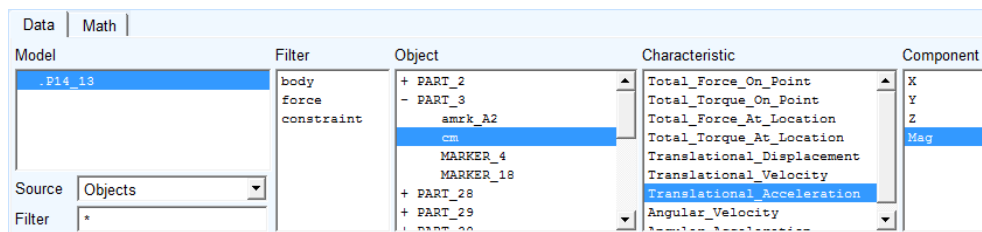
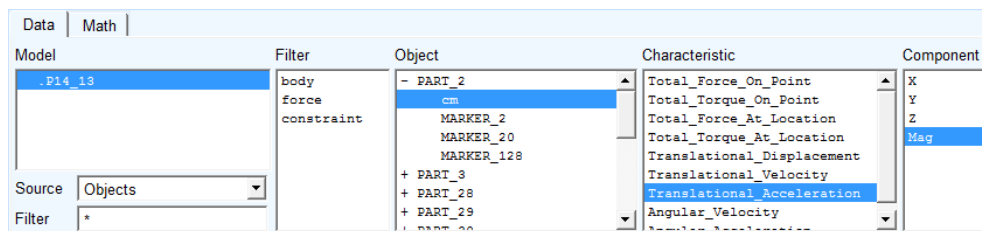


Figura 3.81: Cuerpo o parte 31 y su marcador.



(a) Solicitud de la aceleración traslacional del cuerpo A



(b) Solicitud de la aceleración traslacional del cuerpo B

Figura 3.82: Aceleraciones traslacionales de los cuerpo A y B a lo largo del plano inclinado.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P14_13	body	- PART_2	Total_Force_On_Point	X
	force	cm	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	MARKER_2	Total_Force_At_Location	Z
		MARKER_20	Total_Torque_At_Location	Mag
		MARKER_128	Translational_Displacement	
		+ PART_3	Translational_Velocity	
		+ PART_28	Translational_Acceleration	
		+ PART_29	Angular_Velocity	
		+ PART_30	Angular_Acceleration	
		+ PART_31		

Figura 3.83: Solicitud de la velocidad traslacional del cuerpo A a lo largo del plano inclinado.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P14_13	body	+ PART_2	Total_Force_On_Point	X
	force	- PART_3	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	amrk_A2	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		MARKER_4	Translational_Displacement	
		MARKER_18	Translational_Velocity	
		+ PART_28	Translational_Acceleration	
		+ PART_29	Angular_Velocity	
		+ PART_30	Angular_Acceleration	
		+ PART_31		

Figura 3.84: Solicitud de la velocidad traslacional del cuerpo B a lo largo del plano inclinado.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P14_13	body	FRICTION_1	Element_Force	X
	force	FRICTION_2	Element_Torque	Y
	constraint	+ Cable_Sys_1		Z
				Mag

Figura 3.85: Solicitud de la fuerza de fricción Fr_{A_k} entre el cuerpo A y el plano inclinado.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P14_13	body	FRICTION_1	Element_Force	X
	force	FRICTION_2	Element_Torque	Y
	constraint	+ Cable_Sys_1		Z
				Mag

Figura 3.86: Solicitud de la fuerza de fricción Fr_{B_k} entre el cuerpo B y el plano inclinado.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P14_13	body force constraint	+ PART_30 - PART_31 cm MARKER_120 MARKER_125 MARKER_127 + JOINT_1 + JOINT_2	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity	X Y Z Mag

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.87: Solicitud de la fuerza de tensión T_1 .

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P14_13	body force constraint	FRICITION_1 FRICITION_2 - Cable_Sys_1 + A1 - A2 + anchor - fix	Element_Force Element_Torque Translational_Displacement Ax_Ay_Az_Projection_Angles Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.88: Solicitud de la fuerza de tensión T_2 entre el cable y el cuerpo B .

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P14_13	body force constraint	FRICITION_2 - Cable_Sys_1 - A1 + anchor + fix + A2 + CABLE + PULLEY_A	Element_Force Element_Torque Translational_Displacement Ax_Ay_Az_Projection_Angles Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.89: Solicitud de la fuerza de tensión T_2 entre el cable y el muro o tierra.

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©] se muestran en las figuras 3.90, 3.91, 3.92, 3.93, 3.94, 3.95 y 3.96.

Para revisar los resultados obtenidos por Adams[©], es necesario averiguar cual es el tiempo en el que el cuerpo B se desplaza 2 pies a lo largo del plano inclinado. De acuerdo con la figura 3.90, el tiempo que tarda el cuerpo es igual a 2.245 segundos.

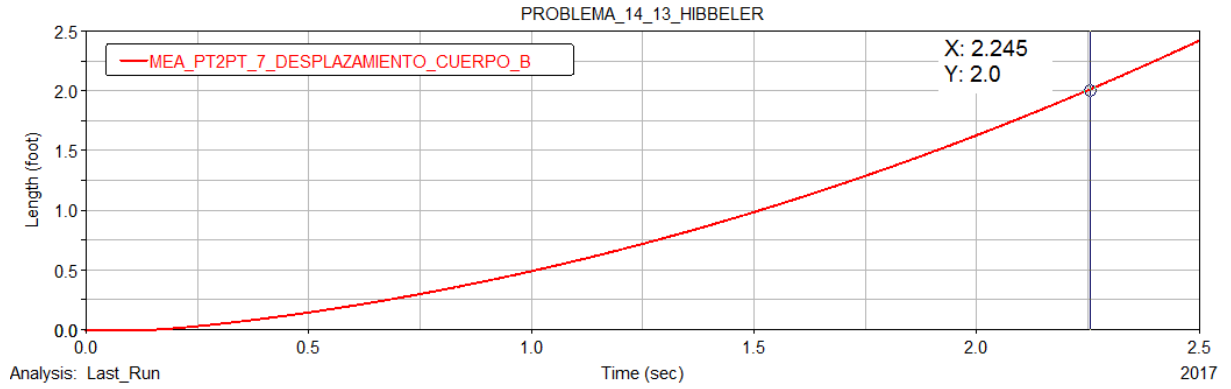


Figura 3.90: Resultado para el desplazamiento del cuerpo *B* a lo largo del plano inclinado.

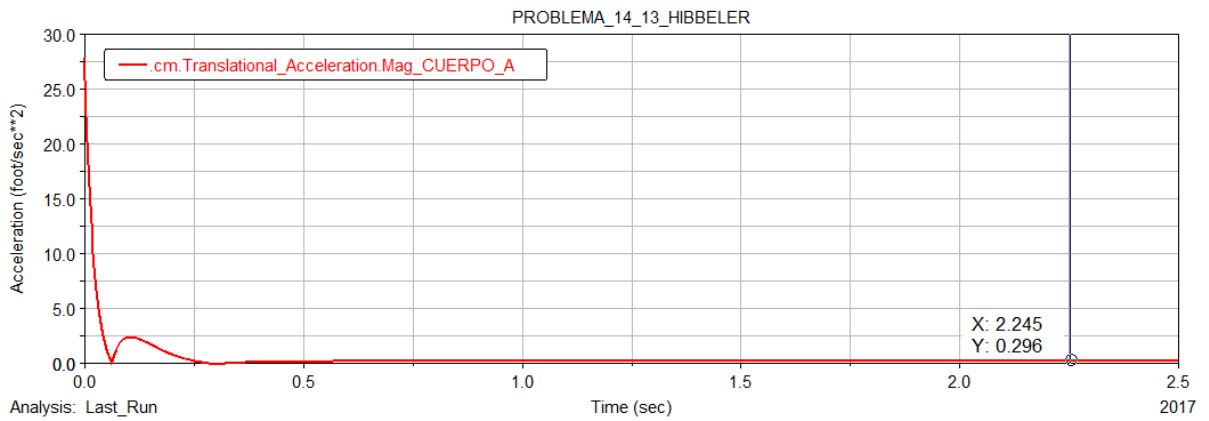


Figura 3.91: Resultado de la aceleración del cuerpo *A*.

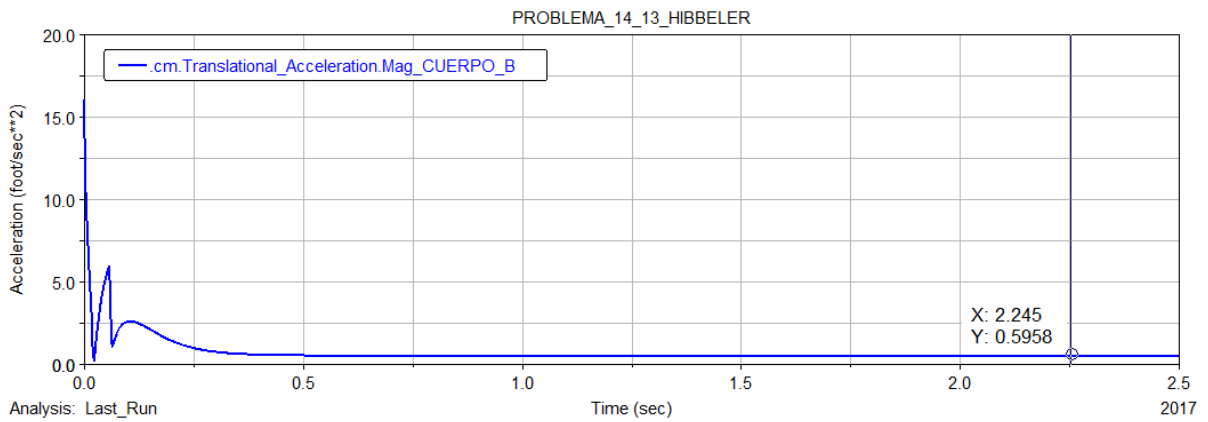


Figura 3.92: Resultado de la aceleración del cuerpo *B*.

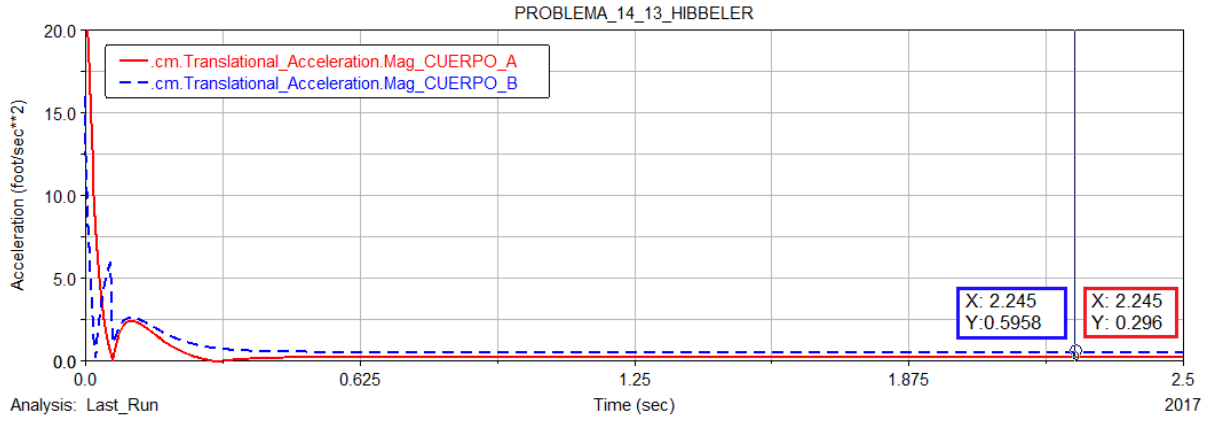


Figura 3.93: Resultado de las aceleraciones de los cuerpos A y B .

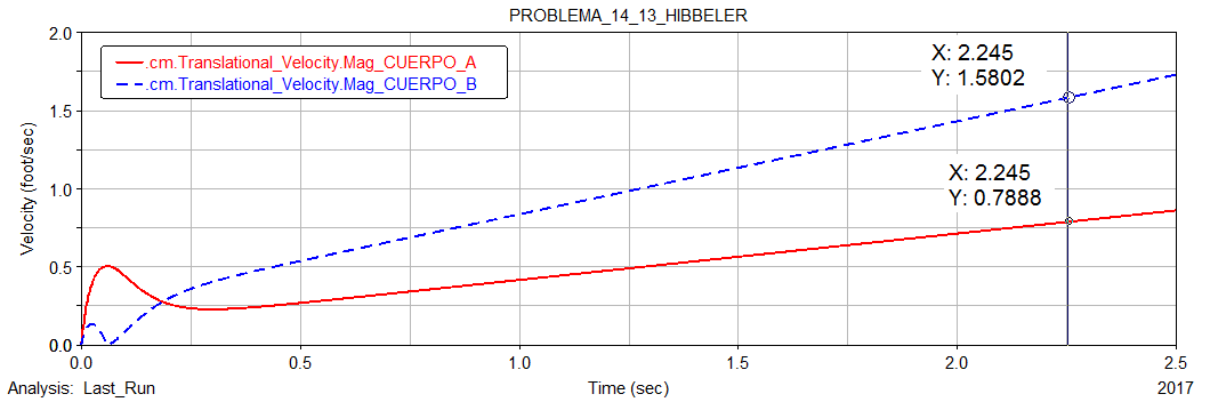


Figura 3.94: Resultado de la velocidad traslacional del cuerpo A y B a lo largo del plano inclinado.

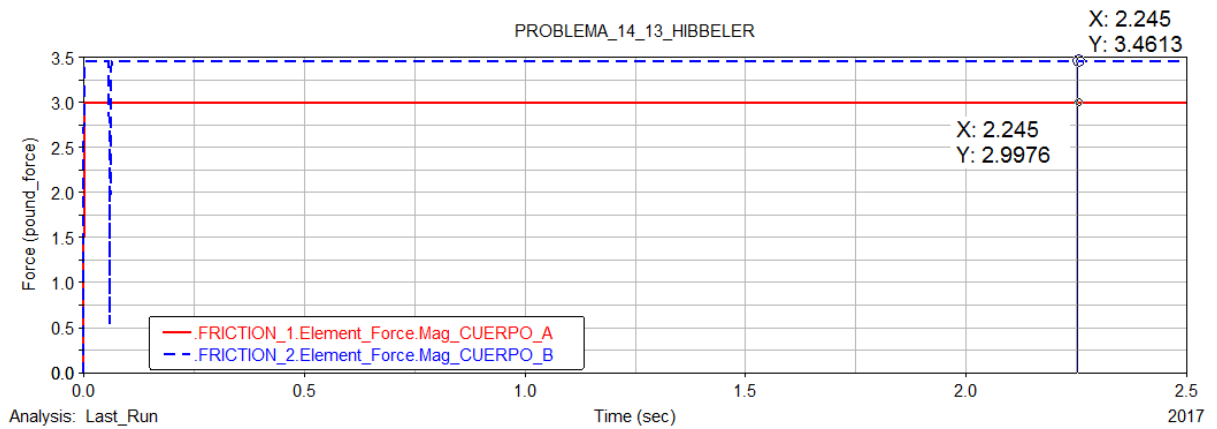


Figura 3.95: Resultado de las fuerzas de fricción $F_{r_{A_k}}$ y $F_{r_{B_k}}$.

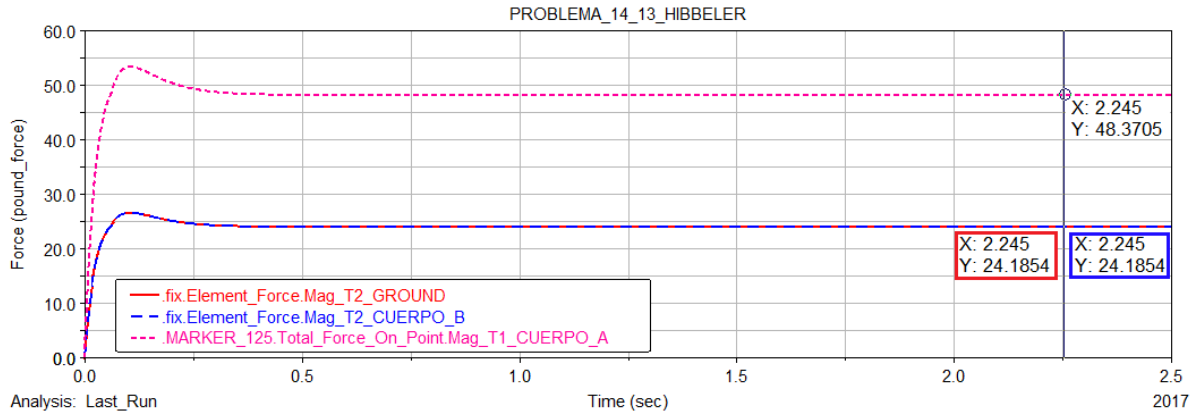


Figura 3.96: Resultado de las fuerzas de tensión T_1 y T_2 .

Estos resultados contienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La Tabla 3.5 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación en Adams[©] para un tiempo $t = 2.245$ s.

Tabla 3.5: Comparación de resultados. 5.º problema de poleas y cables.

Variable	Resultado analítico	Resultado Adams [©]
a_A	$0.297604255 \text{ ft/s}^2$	0.296 ft/s^2
a_B	$0.59520851 \text{ ft/s}^2$	0.5958 ft/s^2
v_A	$0.7714975761 \text{ ft/s}$	0.7888 ft/s
v_B	1.542995152 ft/s	1.5802 ft/s
T_1	48.40698214 lbf	48.3705 lbf
$T_2 = T_{2B} = T_{2tierra}$	24.20349107 lbf	24.1854 lbf
d	2.0 ft	2.0 ft
Fr_{A_k}	3 lbf	2.9976 lbf
Fr_{B_k}	3.464161615 lbf	3.4613 lbf

Debe notarse que los resultados de las fuerzas y aceleraciones obtenidos mediante Adams[©], no son constantes durante todo el intervalo de la simulación. Los resultados presentan un transitorio de 0.3 segundos aproximadamente. Después de ese transitorio, los resultados son muy aproximados a los obtenidos analíticamente.

De manera que, estos resultados muestran que en la realidad, los sistemas mecánicos no responden de manera inmediata a las fuerzas aplicadas al sistema. Por lo que, la elasticidad e inercia del sistema, hacen que la respuesta presente un estado transitorio durante el cual no es posible comparar los resultados. Sin embargo los valores reportados para $t = 2.245$ s corresponden casi exactamente al resultado analítico.

3.6. Sexto problema de sistemas por cables.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 16-38 del libro de Beer et al. [5], incluido en la página 1049.

Problema: Dos discos uniformes y dos cilindros están ensamblados como se indica. El disco A pesa 20 lb y el disco B pesa 12 lb . Si el sistema se suelta desde el reposo, determine la aceleración (a) del cilindro C y (b) del cilindro D . Los cilindros se encuentran unidos a una sola cuerda que pasa sobre los discos. Suponga que no ocurre deslizamiento entre la cuerda y los cilindros. Los datos del problema están dados por:

$$\begin{array}{ll} r_A = 8\text{ in} = 2/3\text{ ft} & w_A = 20\text{ lb}_f \\ r_B = 6\text{ in} = 0.5\text{ ft} & w_B = 12\text{ lb}_f \\ w_C = 15\text{ lb}_f & w_D = 18\text{ lb}_f \end{array}$$

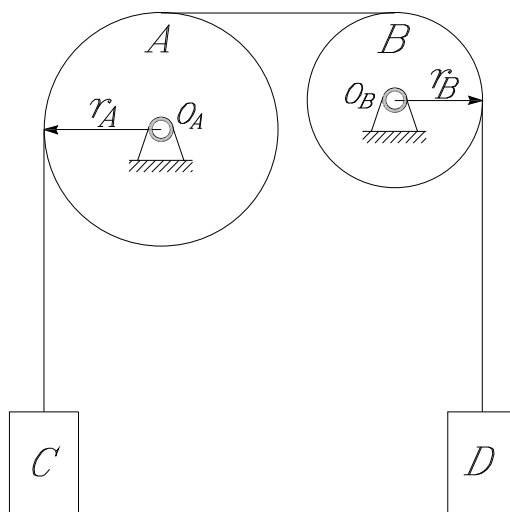


Figura 3.97: Modelo del problema 16-38 Beer et al. [5].

3.6.1. Solución analítica.

Puesto que no existe deslizamiento entre el cable y la poleas, se tiene que las componentes tangenciales de las aceleraciones del punto P_1 en la polea A y del punto P_2 en polea B , son iguales en magnitud. A partir de este resultado, se obtiene una relación entre las aceleraciones tangenciales en los puntos P_1 y P_2 , en función de las aceleraciones angulares y de sus radios, vea la figura 3.98 y ecuación 3.46.

$$\vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\alpha_A \hat{k} \times -r_A \hat{i} = \alpha_A r_A \hat{j} = a_{tAP_1} = a_{tBP_2} = a = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = -\alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{i} = -\alpha_B r_B \hat{j}$$

De manera que:

$$a = r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{de manera que} \quad \alpha_A = \frac{a}{r_A} \quad \text{y} \quad \alpha_B = \frac{a}{r_B} \quad (3.46)$$

Con este resultado termina la parte cinemática del problema.

Para la cinética del sistema, se obtienen los diagramas de cuerpo libre de cada una de las poleas, vea la figura 3.98, y aplicando la ecuación de Euler en cada una de las poleas y la segunda ley de Newton³ a cada uno de los cilindros, se encuentra una expresión para la aceleración angular de las poleas y por consecuencia la aceleración traslacional de los cuerpos C y D .

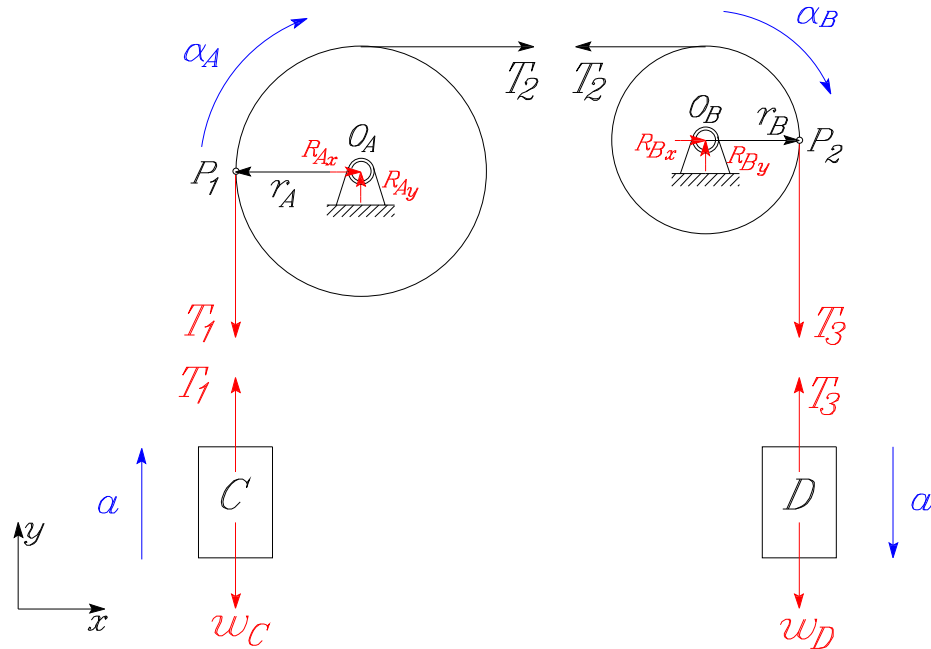


Figura 3.98: Diagrama de cuerpo libre de las poleas A , B y los cuerpos C y D .

De la sumatoria de momentos con respecto al punto O_A de la polea A , resulta:

$$\Sigma M_{O_A} = I_{O_A} \alpha_A \quad \text{donde} \quad r_A (T_1 - T_2) = -I_{O_A} \alpha_A$$

De manera que:

$$T_1 - T_2 = -\frac{I_{O_A}}{r_A} \alpha_A \quad (3.47)$$

De la sumatoria de fuerzas con respecto a y del cuerpo C , resulta:

$$\Sigma F_y = m_C a \quad \text{tal que} \quad T_1 - w_C = \frac{w_C}{g} a$$

Por lo que:

$$T_1 = w_C \left(1 + \frac{a}{g} \right) \quad (3.48)$$

³Debe notarse que no es necesario emplear las ecuaciones de Newton para las poleas A y B , pues ambas poleas se encuentran sujetos a rotación alrededor de un eje fijo baricéntrico, de manera que esas ecuaciones únicamente permiten determinar las reacciones en los cojinetes O_A y O_B que no son de interés.

Sustituyendo la ecuación (3.48) en la ecuación (3.47) y despejando la fuerza de tensión T_2 , se obtiene:

$$T_2 = w_C \left(1 + \frac{a}{g} \right) + \frac{I_{O_A}}{r_A} \alpha_A \quad (3.49)$$

De la sumatoria de momentos con respecto al punto O_B en el disco B , resulta:

$$\Sigma M_{O_B} = -I_{O_B} \alpha_B \quad \text{tal que} \quad r_B (T_2 - T_3) = -I_{O_B} \alpha_B$$

De aquí que:

$$T_2 - T_3 = -\frac{I_{O_B}}{r_B} \alpha_B \quad (3.50)$$

De acuerdo con la sumatoria de fuerzas con respecto a y del cuerpo D , se obtiene:

$$\Sigma F_y = -m_D a \quad \text{donde} \quad T_3 - w_D = -\frac{w_D}{g} a$$

Por consiguiente:

$$T_3 = w_D \left(1 - \frac{a}{g} \right) \quad (3.51)$$

Sustituyendo la ecuación (3.51) en la ecuación (3.50), se obtiene:

$$T_2 = -\frac{I_{O_B}}{r_B} \alpha_B - m_D a + w_D \quad (3.52)$$

Igualando las ecuaciones (3.52) y (3.49) se obtiene la relación:

$$-\frac{I_{O_B}}{r_B} \alpha_B - \frac{w_D}{g} a + w_D = \frac{w_C}{g} a + w_C + \frac{I_{O_A}}{r_A} \alpha_A$$

Ahora sustituyendo las aceleraciones angulares de la ecuación (3.46) en la ecuación anterior, resulta

$$-\frac{I_{O_B}}{r_B} \left(\frac{a}{r_B} \right) - \frac{w_D}{g} a + w_D = \frac{w_C}{g} a + w_C + \frac{I_{O_A}}{r_A} \left(\frac{a}{r_A} \right)$$

De manera que, despejando la aceleración de traslación del sistema, se origina:

$$a = -\frac{w_C - w_D}{\frac{I_{O_B}}{r_B^2} + \frac{I_{O_A}}{r_A^2} + \frac{w_D}{g} + \frac{w_C}{g}} \quad (3.53)$$

Por otro lado, se sabe que los momentos de inercia están dados por:

$$I_{O_A} = \frac{1}{2} m_A r_A^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{20 \text{ lbf}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) \left(\frac{2}{3} \text{ ft} \right)^2 = 0.138026225 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2 = 19.8757764 \text{ slug} \cdot \text{in}^2$$

$$I_{O_B} = \frac{1}{2} m_A r_A^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{20 \text{ lbf}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) \left(\frac{2}{3} \text{ ft} \right)^2 = 0.138026225 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2 = 19.8757764 \text{ slug} \cdot \text{in}^2$$

De manera que, sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (3.53) da como resultado una aceleración igual a:

$$a = - \frac{15 \text{ lbf} - 18 \text{ lbf}}{\left(\frac{0.04658385093 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2}{0.5^2 \text{ ft}^2} \right) + \left(\frac{0.138026225 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2}{2/3^2 \text{ ft}^2} \right) + \left(\frac{18}{32.2} \text{ slug} \right) + \left(\frac{15}{32.2} \text{ slug} \right)}$$

Por consiguiente:

$$a = |a| = a_C = a_D = 1.9714 \text{ ft/s}^2$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (3.46), se obtiene los valores para las aceleraciones angulares de las poleas A y B . Tal que:

$$\alpha_A = \frac{a}{r_A} = \frac{1.971428571 \text{ ft/s}^2}{2/3 \text{ ft}} = 2.9571 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$$

$$\alpha_B = \frac{a}{r_B} = \frac{1.971428571 \text{ ft/s}^2}{0.5 \text{ ft}} = 3.9428 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$$

Estos resultados finalizan la solución del problema mediante los métodos abordados en las Unidades de Aprendizaje, mencionadas al inicio de esta sección.

3.6.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de sistemas con cables dentro del módulo de **Machinery** del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la cadena y la catarina. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.2 y 2.2.1, en las páginas 11 y 12 de este trabajo.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 16-38 se muestra en la figura 3.99.

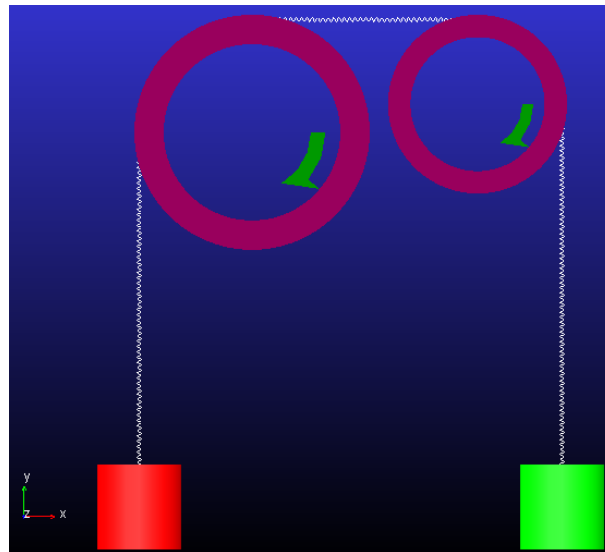


Figura 3.99: Modelo del problema en Adams[©].

Por otro lado, el usuario debe prestar mucha atención en las unidades que esté utilizando en el análisis analítico y en la simulación en Adams[®]. Las unidades empleadas en esta simulación se muestran en la figura 3.100.

Length	Inch
Mass	Slug
Force	Pound Force
Time	Second
Angle	Radian
Frequency	Hertz

MMKS MKS CGS IPS

Figura 3.100: Unidades empleadas en el modelo de Adams[®].

Los parámetros geométricos de las poleas *A* y *B* se presentan en la figura 3.101, en este caso las poleas presentan las mismas propiedades geométricas, por esta razón solo se muestran las propiedades de la polea *A*. El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios iguales a los indicados en el enunciado del problema y seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de las poleas. En este caso debe notarse que la distancia entre centros debe ser mayor a la suma de los radios de de las poleas.

Step 2 of 5

Anchor Layout ● **Pulley Properties** ● Pulley Layout

Number of Pulley_Properties 2

1 | 2 |

Pulley Property Name PULLEY_A

Dimensions		Contact Parameters	
Width	(2IN)	Hertz K	1.0E+004
Depth	(0.5IN)	Hertz E	1.0
Radius	(0.2IN)	Hertz Cm	0.1
Angle	0.06981317008	Friction Mu	0.6
		Friction Vt	100.0

Figura 3.101: Propiedades geométricas de las poleas *A* y *B*.

Los parámetros de localización de las poleas *A* y *B* se muestran en las figuras 3.102(a) y 3.102(b), mientras que la figura 3.103 muestra las configuraciones y parámetros de los cables que unen los contrapesos.

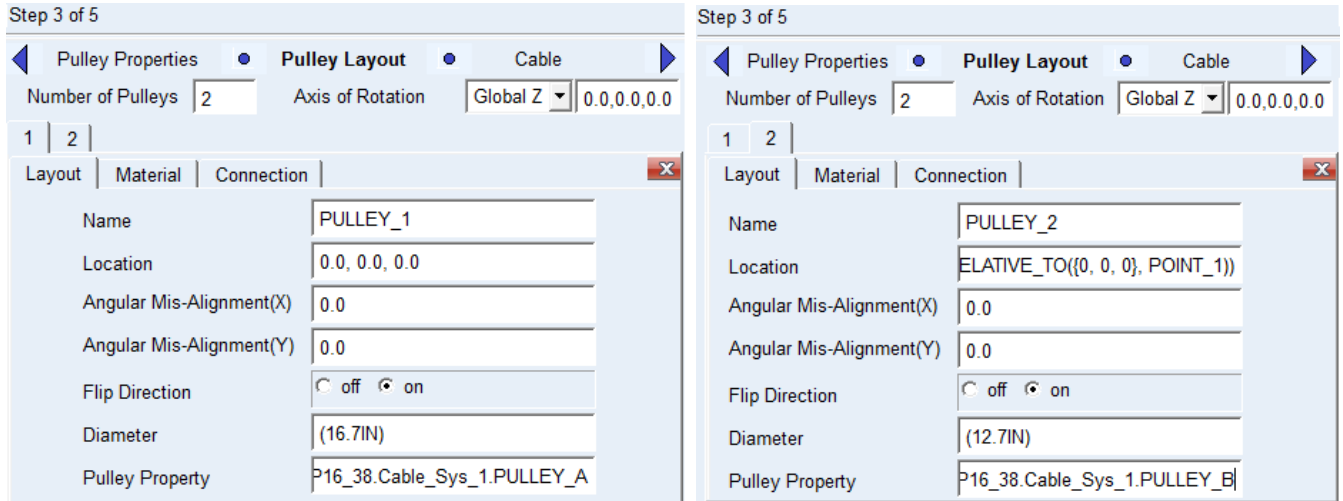
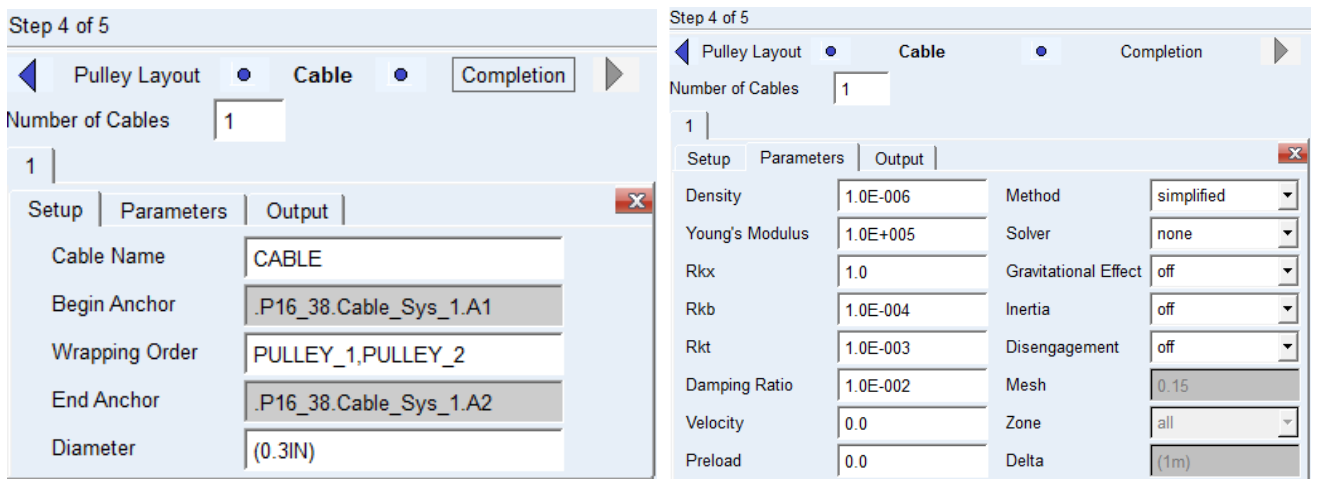


Figura 3.102: Propiedades geométricas y de localización de las poleas *A* y *B*.

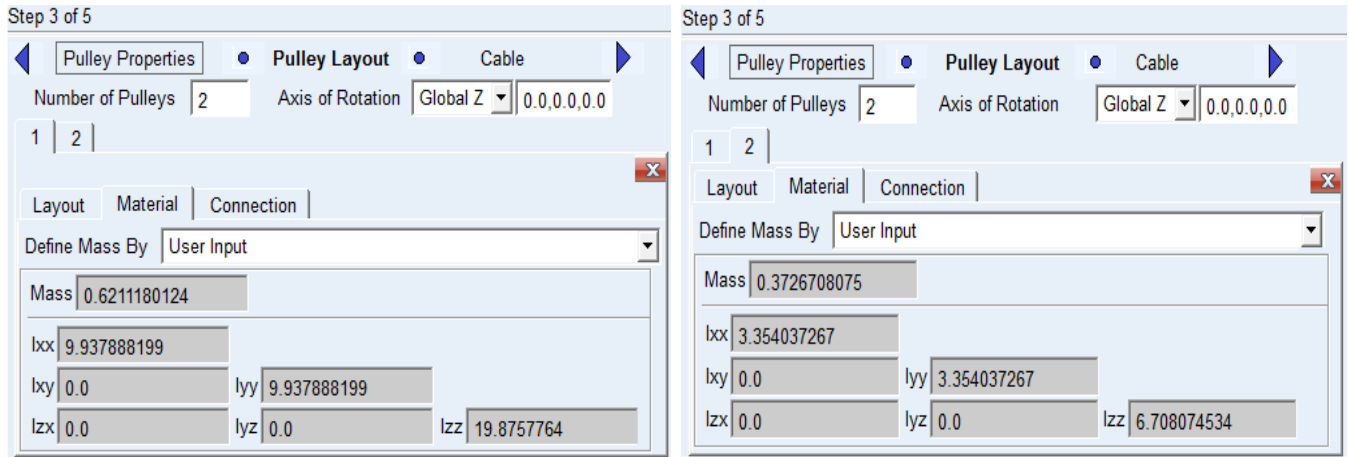


(a) Configuración de los cables

(b) Parámetros de los cables

Figura 3.103: Configuración y parámetros de los cables.

Los parámetros inerciales de las poleas *A* y *B* se presentan en la figuras 3.104(a) y 3.104(b). Debe notarse que los datos más importantes son las masas de las poleas y los momentos de inercia de las poleas respecto al eje z que pasa por el centro de cada una de las poleas. Estos valores deben corresponden a los empleados en la solución analítica del problema. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y , no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco, sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .



(a) Propiedades inerciales de la polea *A*

(b) Propiedades inerciales de la polea *B*

Figura 3.104: Propiedades inerciales de las poleas *A* y *B*.

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 0.9 segundos, con un número de pasos igual a 500 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 3.105. La selección del tiempo es arbitraria y en muchos casos, sólo el tiempo inicial es de interés; sin embargo, en este caso la solución es válida para todo tiempo, obviamente mayor que 0; por otro lado la selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

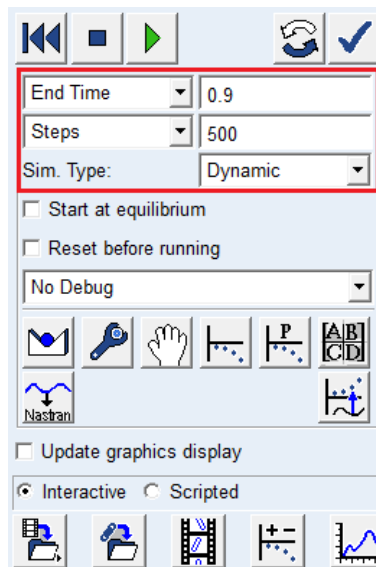


Figura 3.105: Parámetros de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse al post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 3.106, 3.107, 3.108 y 3.109.

Debe notarse que se solicita las aceleraciones angulares de las catarinas en la dirección del eje z . Evidentemente, si hay otras variables de interés, pueden solicitarse.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P16_38	body	- CUERPO_C	Total_Force_On_Point	X
	force	amrk_A1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	cm	Total_Force_At_Location	Z
		MARKER_1	Total_Torque_At_Location	Mag
		MARKER_104	Translational_Displacement	
		+ CUERPO_D	Translational_Velocity	
		+ JOINT_32	Translational_Acceleration	
		+ JOINT_33	Angular_Velocity	

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.106: Solicitud de aceleración traslacional del cuerpo C .

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P16_38	body	+ CUERPO_C	Total_Force_On_Point	X
	force	- CUERPO_D	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	amrk_A2	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		MARKER_2	Translational_Displacement	
		MARKER_106	Translational_Velocity	
		+ JOINT_32	Translational_Acceleration	
		+ JOINT_33	Angular_Velocity	

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.107: Solicitud de aceleración traslacional del cuerpo D .

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P16_38	body	+ JOINT_33	CM_Position	X
	force	- Cable_Sys_1	CM_Velocity	Y
	constraint	+ A1	CM_Acceleration	Z
		+ A2	CM_Angular_Velocity	Mag
		+ CABLE	CM_Angular_Acceleration	
		- PULLEY_1	Kinetic_Energy	
		+ pulley	Translational_Kinetic_Energy	
		+ cv1	Angular_Kinetic_Energy	
		+ fix	Translational_Momentum	

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.108: Solicitud aceleración angular de la polea A .

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P16_38	body	+ JOINT_33	CM_Position	X
	force	- Cable_Sys_1	CM_Velocity	Y
	constraint	+ A1	CM_Acceleration	Z
		+ A2	CM_Angular_Velocity	Mag
		+ CABLE	CM_Angular_Acceleration	
		+ PULLEY_1	Kinetic_Energy	
		- PULLEY_2	Translational_Kinetic_Energy	
		+ pulley	Angular_Kinetic_Energy	
		+ cv1	Translational_Momentum	

Source: Objects
Filter: *

Figura 3.109: Solicitud aceleración angular de la polea B .

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©] están dados de manera gráfica en la figura 3.110 y 3.111.

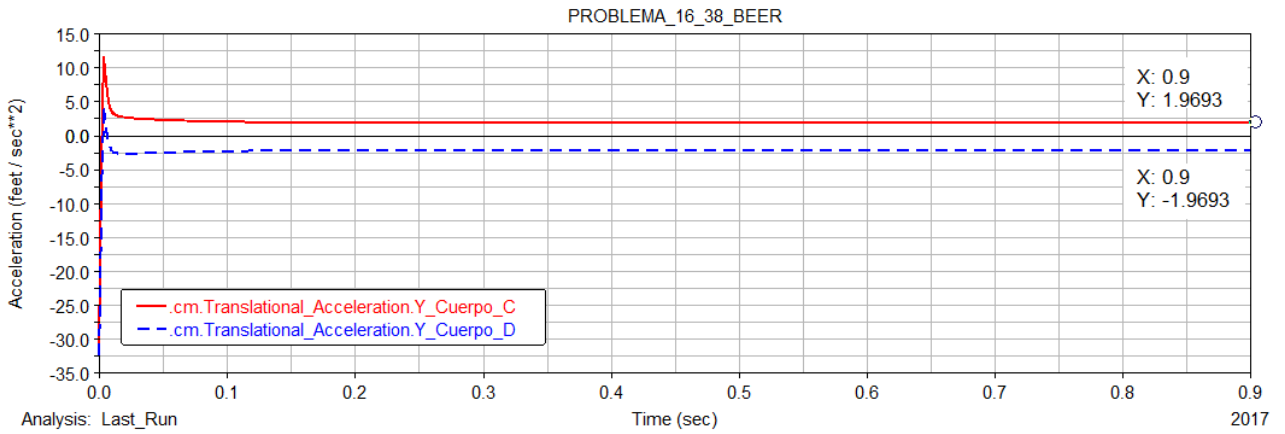


Figura 3.110: Resultados de las aceleraciones traslacionales de los cuerpos *C* y *D*.

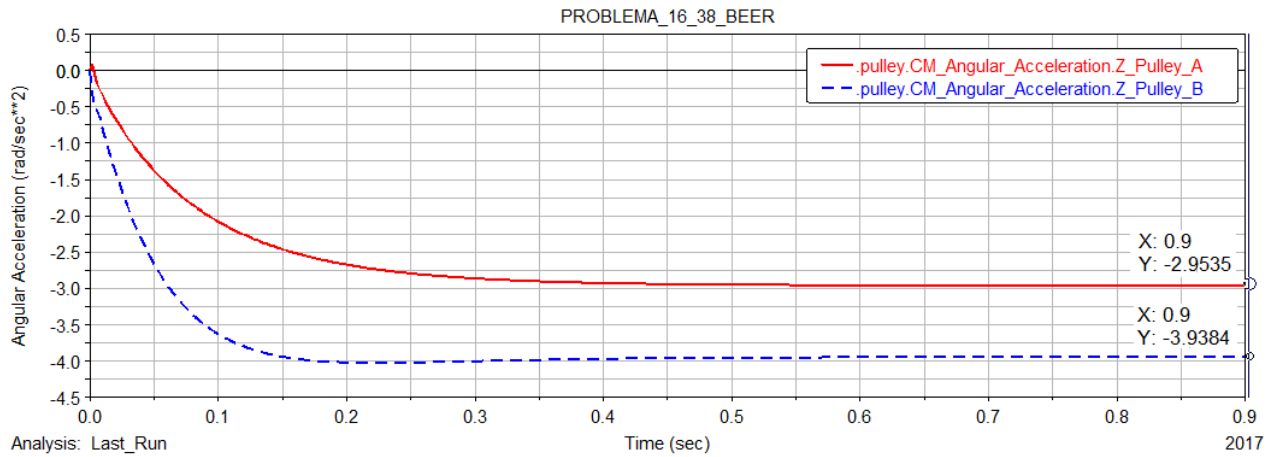


Figura 3.111: Resultados de las aceleraciones angulares de las poleas *A* y *B*.

Los resultados mostrados en las gráfica de las aceleraciones traslacionales de los cuerpos *C* y *D*, fueron modificados para mostrar los valores numéricos en las unidades empleadas en el análisis analítico, esto para cada una de las cuerdas. En este caso el cambio de unidades fué de pulgadas a pies, por lo que los valores numéricos de las aceleraciones de los cuerpo *C* y *B* se dividieron entre 12, vea la figura 3.112.

The screenshot shows a software interface with a 'Math' tab. It contains the following fields:

- Curve Name:** .plot_1.curve_1
- Y Expression:** MEASURE(P16_38.CUERPO_C.cm, 0, 0, Translational_Acceleration, Y_component)/12
- Y Units:** acceleration
- X Expression:** sim_time()
- X Units:** time

An 'Apply' button is located at the bottom right of the configuration area.

Figura 3.112: Cambio de unidades de las aceleraciones angulares de las poleas A y B en Adams[©].

La Tabla 3.6 muestra una comparación de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 3.6: Comparación de resultados. 6.º problema de poleas y cables.

Variable	Resultados analíticos	Resultados Adams [©]
a_C	$1.9714 \text{ ft/s}^2 \uparrow$	$1.9693 \text{ ft/s}^2 \uparrow$
a_D	$1.9714 \text{ ft/s}^2 \downarrow$	$1.9693 \text{ ft/s}^2 \downarrow$
α_A	$2.9571 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$	$2.9535 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$
α_B	$3.9428 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$	$3.9384 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$

A diferencia del método analítico, los resultados de las aceleraciones traslacionales de los cuerpos y de las aceleraciones angulares de las poleas, no son constantes para todo el intervalo de la simulación. Existe un transitorio que dura, en el caso de las aceleraciones traslacionales de 0.05 s y para el caso de las aceleraciones angulares alrededor de 0.5 s . Estos resultados inesperados indican que en la realidad, los sistemas mecánicos no responden de manera inmediata. Esto debido a la inercia de las poleas y del cable; y de las propiedades elásticas de la cuerda. Sin embargo los valores reportados para $t = 0.9 \text{ s}$ corresponden al resultado analítico.

Capítulo 4

Sistemas de cadenas y catarinas resueltos mediante Adams[©]/Machinery.

En este capítulo se presentan diferentes problemas que involucran sistemas de cadenas y catarinas y representan las características más relevantes de estos sistemas. Todos estos problemas se resolverán inicialmente mediante los métodos analíticos que se presentan en las unidades de aprendizaje correspondientes en las licenciaturas de Ingeniería Mecánica e Ingeniería Mecatrónica de la División de Ingenierías del Campus Irapuato-Salamanca de la Universidad de Guanajuato. Posteriormente esos problemas se resuelven mediante la simulación del sistema empleando las herramientas del módulo Adams[©]/Machinery. Por la naturaleza del movimiento de las catarinas, la totalidad de los problemas presentados en este capítulo pertenecen a la dinámica del cuerpo rígido.

4.1. Primer problema de sistemas de cadenas y catarinas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 16-23 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 326.

Problema 1. El aspa cortadora C del cepillo para madera está impulsada por la polea A montada en la flecha de la armadura del motor como indica la figura 4.1. Si la aceleración angular constante de la polea A es $\alpha_A = 40 \text{ rad/s}^2$, determine la velocidad angular del aspa cortadora cuando la polea A ha realizado 400 revoluciones, a partir del reposo. Las dimensiones de las poleas y del disco, están dadas por: $r_C = 75 \text{ mm}$, $r_B = 50 \text{ mm}$ y $r_A = 25 \text{ mm}$.

4.1.1. Solución analítica.

Las poleas A y B están sujetas a rotación alrededor de un eje fijo perpendicular al plano del papel, que pasan por el punto O_A de la polea A y el punto O_B de la polea B .¹ Puesto que la aceleración angular α_A de la polea A es constante, el movimiento de rotación de la polea A es uniformemente acelerado. Por lo anterior, y conociendo que la polea A parte del reposo; es decir, para $t = 0$, $\omega_A(0) = 0$, la posición angular de la polea A y su velocidad angular están dadas por:

¹Para efectos de este problema el movimiento traslacional del cepillo puede despreciarse y a falta de mayor información, se supondrá que la rotación es en sentido antihorario.

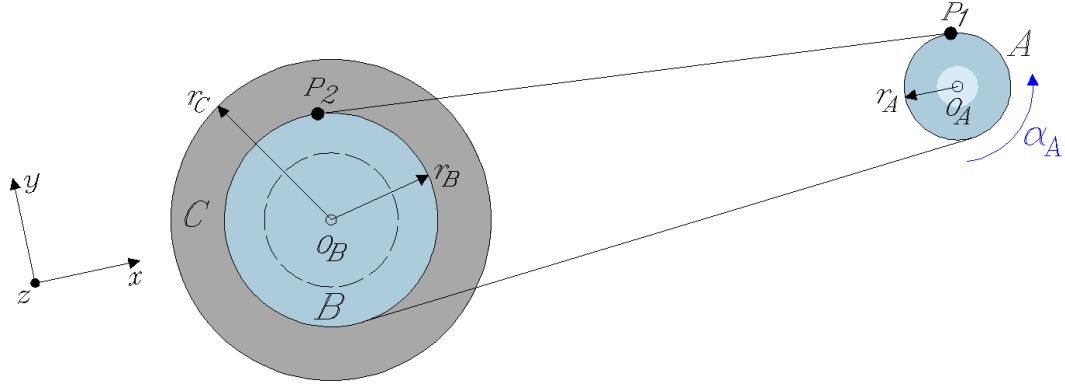


Figura 4.1: Modelo del problema 16-23 Hibbeler [18].

$$\omega_A(t) = \alpha_A t \quad (4.1)$$

y por:

$$\theta_A(t) = \frac{1}{2} \alpha_A t^2 \quad (4.2)$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4.2), se puede determinar el tiempo que la polea A tarda en rotar 400 revoluciones, que es igual a $800 \pi \text{ rad}$. De manera que:

$$t = \sqrt{\frac{2\theta_A}{\alpha_A}} = \sqrt{\frac{2(800\pi) \frac{\text{rad}}{40} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}{40 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}} = 11.20998243 \text{ s}$$

Para el cálculo de la velocidad angular de la polea A, se sustituye el valor de $t = 11.20998243 \text{ s}$ en la ecuación (4.1), por lo que:

$$\omega_A(t = 11.20998243 \text{ s}) = \left(40 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) (11.20998243 \text{ s}) = 448.3992973 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \odot$$

Puesto que no existe deslizamiento entre la banda y las poleas, las velocidades de los puntos P_1 en la polea A y el punto P_2 en la polea B, son iguales. A partir de este resultado, se obtiene la relación entre las velocidades angulares de ambos discos en función de sus radios, vea la figura 4.1 y la ecuación 4.3.

De manera que:

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = \omega_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = -\omega_A r_A \hat{i} = \vec{v}_{A_{P_1}} = \vec{v}_{B_{P_2}} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = \omega_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = -\omega_B r_B \hat{i}$$

Por consiguiente:

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \text{donde} \quad \omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A \quad (4.3)$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4.3), el valor de la velocidad angular resulta:

$$\omega_B = \left(448.3992973 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \left(\frac{125 \text{ mm}}{20 \text{ mm}}\right) = 224.1996487 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \odot$$

Se sabe que el cepillo C se encuentra rígidamente unido a la polea B , por lo que la velocidad angular del cepillo C es la misma que la polea B . De aquí que:

$$\omega_C = \omega_B = 224.1996487 \frac{rad}{s} \circlearrowleft$$

Por otro lado, es importante señalar que el radio de las aspas cortadoras del cepillo para madera, no influye en absoluto en la solución del problema. Esta característica es importante, porque obliga al estudiante a discriminar los datos que no son importantes para la solución del problema.

4.1.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de cadenas y catarinas dentro del módulo de **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la cadena y la catarina. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.3 y 2.3.3, en las páginas 14 y 17 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de cadena, se emplea una opción de suma importancia denominada “**Constraint**”. Esta opción se emplea cuando únicamente se desea analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante. Al seleccionar este tipo de análisis simplificado, Adams[©] desprecia los componentes y los eslabones de la cadena; así mismo, las fuerzas involucradas en el sistema. Por esa razón se puede usar cadenas y catarinas cuando el problema indica que la transmisión se realiza mediante una banda.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 16-23 se muestra en la figura 4.2.

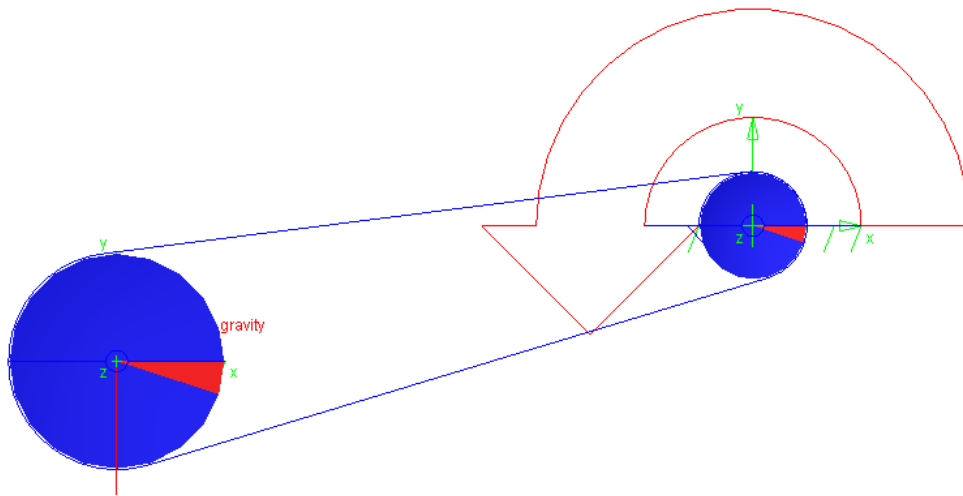
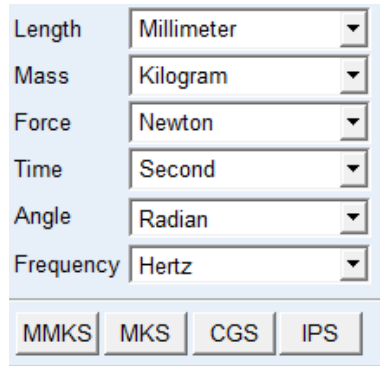
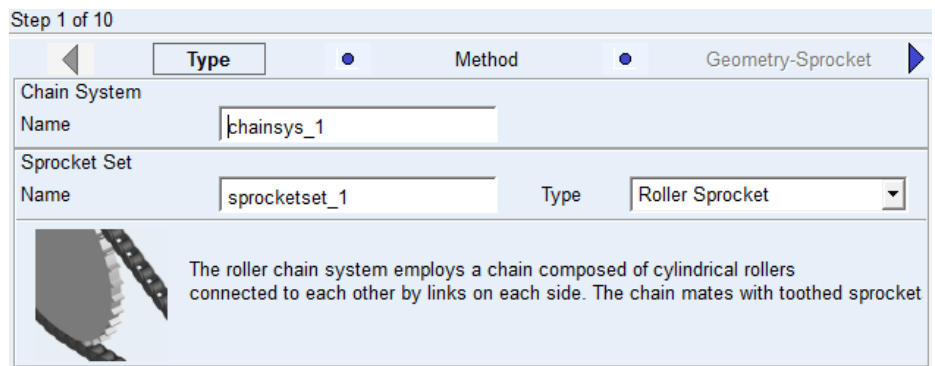


Figura 4.2: Modelo del problema en Adams[©].

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 4.3(a). El tipo de cadena es el mismo para ambas catarinas, vea la figura 4.3(b). Como puede observarse, se seleccionó una cadena de rodillos y la catarina correspondiente.



(a) Unidades empleadas en el modelo de Adams[©]



(b) Tipo de cadena empleado por Adams[©]

Figura 4.3: Unidades y tipo de cadenas empleadas en el modelo de Adams[©].

La figura 4.4, muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema, que debe ser el mismo para ambas catarinas. Es importante mencionar que el método de análisis es el denominado “**Constraint**”. Como se puede leer en la descripción, este método únicamente la transmisión, reducción o amplificación de velocidades es de interés, vea la figura 4.4.

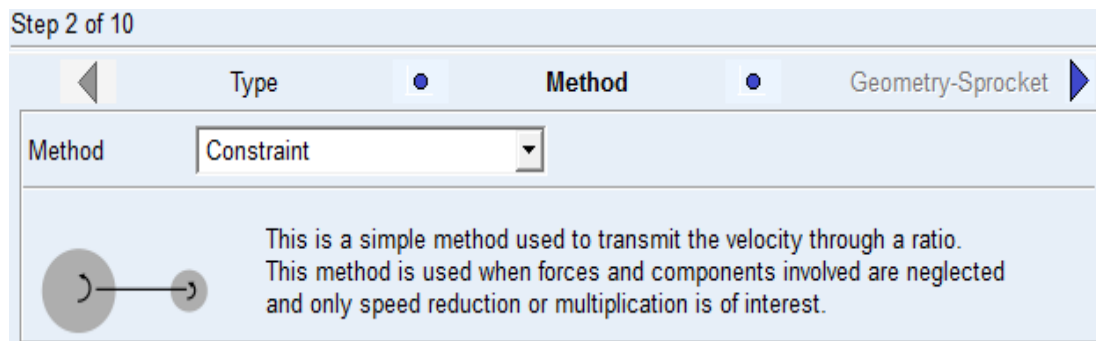


Figura 4.4: Método de análisis empleado por Adams[©].

Los parámetros geométricos de los discos A y B , considerados como catarinas, se presentan en las figuras 4.5(a) y 4.5(b). El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios iguales a los indicados en el enunciado del problema, y seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de los discos, catarinas. En este caso, debe notarse que la distancia entre centros debe ser mayor a la suma de los radios de los discos, catarinas.

Por otro lado, los parámetros inerciales de los discos, catarinas, A y B , se presentan en las figuras 4.6(a) y 4.6(b). Debe notarse que el problema 16-23 corresponde a la cinemática de cuerpos rígidos, los datos como las masas de las poleas, catarinas, no son de interés y cualesquiera valores que el programa Adams[©] seleccione, o el usuario desee seleccionar, serán adecuados.

Step 3 of 10

Method **Geometry-Sprocket** Material and Contact-Sprocket

Number of sprockets 2 Axis of Rotation Global Z 0.0,0.0,0.0

1 | 2 |

sprocket Name B

Center Location 0.0, 0.0, 0.0

Geometry

Sprocket Width 12.7 Sprocket Diameter (50.0*2)

(a) Propiedades geométricas de la catarina *A*

Step 3 of 10

Method **Geometry-Sprocket** Material and Contact-Sprocket

Number of sprockets 2 Axis of Rotation Global Z 0.0,0.0,0.0

1 | 2 |

sprocket Name A

Center Location (0, 0}, POINT_1))

Geometry

Sprocket Width 12.7 Sprocket Diameter (25.0*2)

(b) Propiedades geométricas de las catarina *B*

Figura 4.5: Propiedades geométricas de las catarinas *A* y *B*.

Step 4 of 10

Geometry-Sprocket **Material and Contact-Sprocket** Connection-Sprocket

1 | 2 |

Define Mass By User Input

Mass 1.0E-003

lxx 0.625 lyy 0.625 lzz 1.25

Off-Diagonal Terms

(a) Propiedades inerciales de la catarina *A*

Step 4 of 10

Geometry-Sprocket **Material and Contact-Sprocket** Connection-Sprocket

1 | 2 |

Define Mass By User Input

Mass 1.0E-003

lxx 0.15625 lyy 0.15625 lzz 0.3125

Off-Diagonal Terms

(b) Propiedades inerciales de la catarina *B*

Figura 4.6: Propiedades inerciales de las catarinas *A* y *B*.

Para la simulación del modelo basta con ingresar un tiempo de $t = 11.21 \text{ s}$, que es el tiempo que tarda la polea A en girar 400 revoluciones, con un número de pasos de 1000 y seleccionar el tipo de simulación cinemática, vea la figura 4.7. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

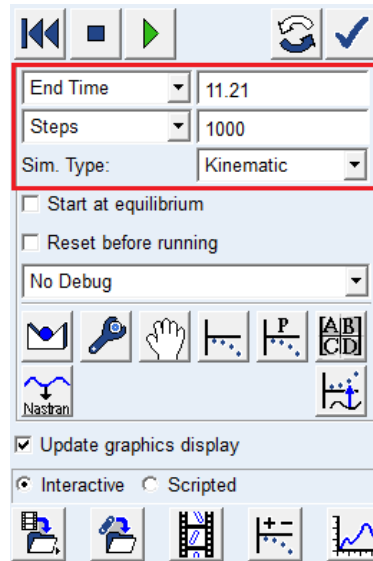


Figura 4.7: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse al post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 4.8 y 4.9. Debe notarse que se solicitan las velocidades angulares de las catarinas en la dirección del eje z . Evidentemente, si hay otras variables de interés, pueden igualmente solicitarse.

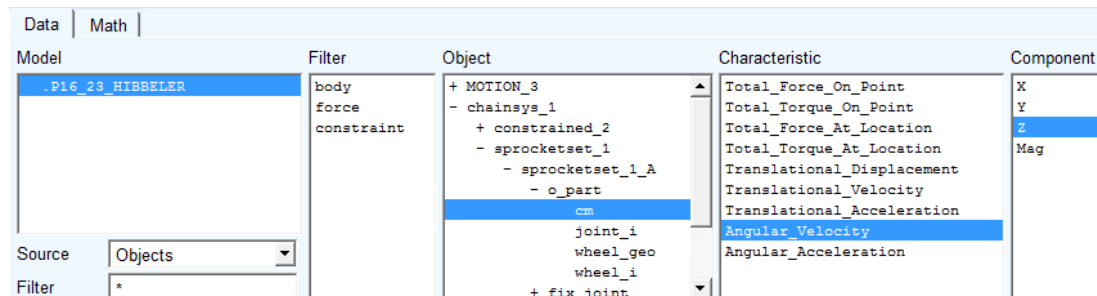


Figura 4.8: Solicitud de la velocidad angular de la catarina A .

Los resultados obtenidos por el programa Adams[®], están dados de manera gráfica en la figura 4.50. Como ya se mencionó, las velocidades angulares varían de manera lineal con respecto al tiempo y a lo largo de todo el tiempo de simulación, por lo que los resultados mostrados en la figura 4.50, corresponden precisamente para un tiempo de $t = 11.21 \text{ s}$, que es el tiempo que la polea A tarda en girar 400 revoluciones.

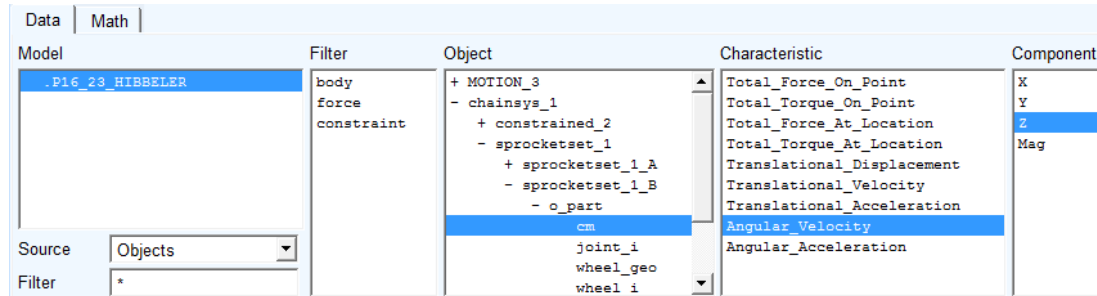


Figura 4.9: Solicitud de la velocidad angular de la catarina B .

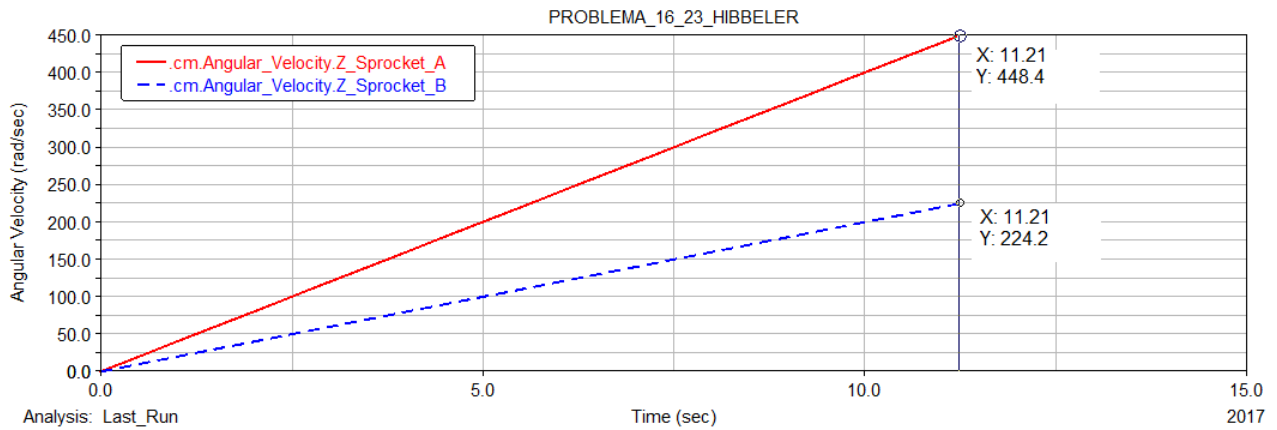


Figura 4.10: Resultados de las aceleraciones angulares.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

La Tabla 4.1 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación. Como ya se mencionó, el comportamiento de las velocidades angulares de la poleas A y B como función del tiempo es lineal, y el valor de interés para ambas velocidades corresponde para el tiempo $t = 11.21$ s. Los resultados obtenidos mediante la simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente.

Tabla 4.1: Comparación de resultados. 1.^{er} problema de cadenas y catarinas.

Variable	Resultados analíticos	Resultados Adams [©]
ω_A	448.39929 rad/s \odot	448.4 rad/s \odot
ω_B	224.19964 rad/s \odot	224.2 rad/s \odot
ω_C	224.19964 rad/s \odot	224.2 rad/s \odot

4.2. Segundo problema de sistemas de cadenas y catarinas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 16-30 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 328.

Problema 2. Si en un principio el operador impulsa los pedales a 20 rev/min y luego inicia una aceleración angular de 30 rev/min^2 , determine la velocidad angular del volante F cuando $t = 3 \text{ s}$. Observe que el brazo del pedal está conectada al plato de la cadena A , la cual al girar impulsa la polea acanalada B mediante un engrane de acoplamiento D . La banda se enrolla alrededor de la polea acanalada y luego impulsa la polea E y el volante unido rígidamente. Las dimensiones de las poleas y catarinas, están dadas por: $r_A = 125 \text{ mm}$, $r_B = 175 \text{ mm}$, $r_D = 20 \text{ mm}$ y $r_E = 30 \text{ mm}$

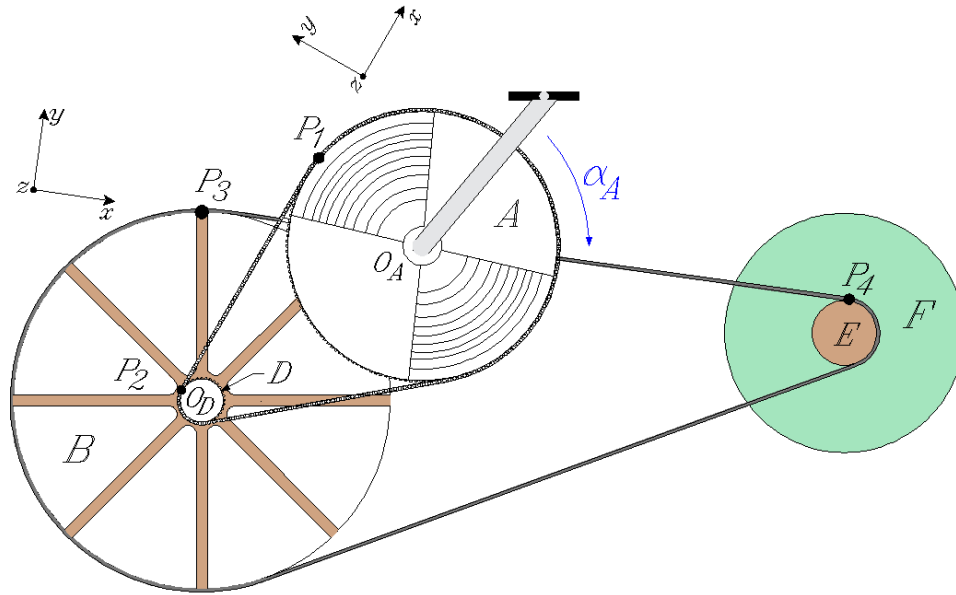


Figura 4.11: Modelo del problema 16-30 Hibbeler [18].

4.2.1. Solución analítica.

Se sabe que la aceleración angular de la catarina unida al pedal α_A es constante, por lo que el sistema se puede analizar como un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo y uniformemente acelerado. Por lo tanto, la velocidad angular de la catarina A está dada por:

$$\omega_A = \omega_{A_0} + \alpha_A t \quad (4.4)$$

La catarina A tiene una velocidad angular inicial igual a 20 rev/min . Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4.4) para $t = 3 \text{ s}$, resulta:

$$\omega_A(3 \text{ s}) = \left(20 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right) + \left(30 \frac{\text{rev}}{\text{min}^2}\right) (3 \text{ s}) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 21.5 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \odot$$

Puesto que no existe deslizamiento entre la catarina A y la cadena, la velocidad en el punto P_1 en la catarina A y del punto P_2 en la catarina B , son iguales. A partir de este resultado, se obtiene una relación entre las velocidades angulares de ambas catarinas en función de sus radios, vea la figura 4.11 y la ecuación (4.5).

De manera que:

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\omega_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = \omega_A r_A \hat{i} = v_{A_{P_1}} = v_{D_{P_2}} = \vec{\omega}_D \times \vec{r}_{P_2/O_D} = -\omega_D \hat{k} \times r_D \hat{j} = \omega_D r_D \hat{i}$$

Por consiguiente:

$$r_A \omega_A = r_D \omega_D \quad \text{donde} \quad \omega_D = \frac{r_A}{r_D} \omega_A \quad (4.5)$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene una velocidad angular de:

$$\omega_D = \left(21.5 \frac{rev}{min} \right) \left(\frac{125 mm}{20 mm} \right) = 134.375 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

Se sabe que la polea B se encuentra unida de forma rígida a la catarina D , por lo que, la velocidad angular de la catarina D es la misma que la polea B . Por consiguiente:

$$\omega_B = \omega_D = 134.375 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

De manera semejante, las velocidades de la banda en los puntos P_3 y P_4 son iguales, vea la figura 4.11; de manera que:

$$\vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_3/O_B} = -\omega_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = \omega_B r_B \hat{i} = v_{B_{P_3}} = v_{E_{P_4}} = \vec{\omega}_E \times \vec{r}_{P_4/O_E} = -\omega_E \hat{k} \times r_E \hat{j} = \omega_E r_E \hat{i}$$

Por lo que:

$$r_B \omega_B = r_E \omega_E \quad \text{tal que} \quad \omega_E = \left(\frac{r_B}{r_E} \right) \omega_B \quad (4.6)$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene una velocidad angular de:

$$\omega_E = \left(134 \frac{rev}{min} \right) \left(\frac{175 mm}{30 mm} \right) = 783.8541 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

Al estar el disco F unido de manera rígida a la polea E , se deduce que sus velocidades angulares son iguales, de manera que:

$$\omega_F = \omega_E = 783.8541 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

4.2.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de cadenas y catarinas dentro del módulo de **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la cadena y la catarina. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.3 y 2.3.3 en las páginas 14 y 17 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de cadena, se emplea una opción de suma importancia denominada “**Constraint**”. Esta opción se emplea cuando únicamente se desea analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante. Al seleccionar este tipo de análisis simplificado, Adams[©] desprecia los componentes y los eslabones de la cadena; así mismo, las fuerzas involucradas en el sistema. Por esa razón se puede usar cadenas y catarinas cuando el problema indica que la transmisión se realiza mediante una banda.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 16-30 se muestra en la figura 4.12.

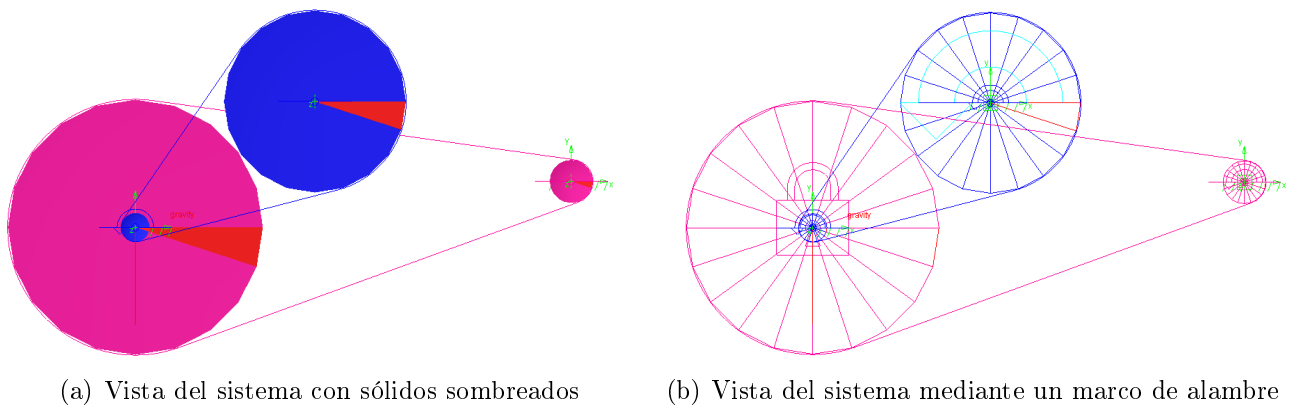


Figura 4.12: Modelo del problema en Adams[©].

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 4.13.

Length	Millimeter
Mass	Kilogram
Force	Newton
Time	Second
Angle	Radian
Frequency	Hertz

Figura 4.13: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Módulo cadena en Adams[©]/Machinery.

La figura 4.14, muestra el tipo de cadena empleado en el modelo, mientras que la figura 4.15, muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema y que debe ser el mismo tanto para el par de catarinas como para el par de poleas. Es importante mencionar que el método de análisis empleado es el denominado “**Constraint**”, el cual únicamente la transmisión, reducción o amplificación, de velocidades es de interés.

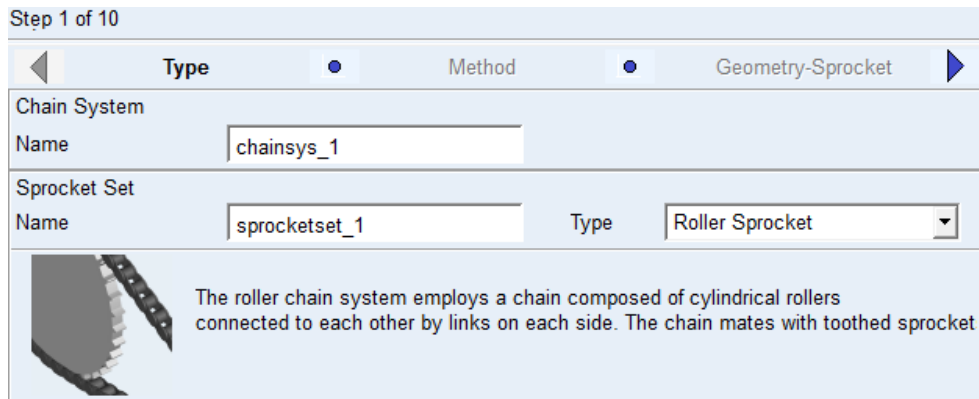


Figura 4.14: Tipo de cadena empleado por Adams[©], para la catarina *A*.

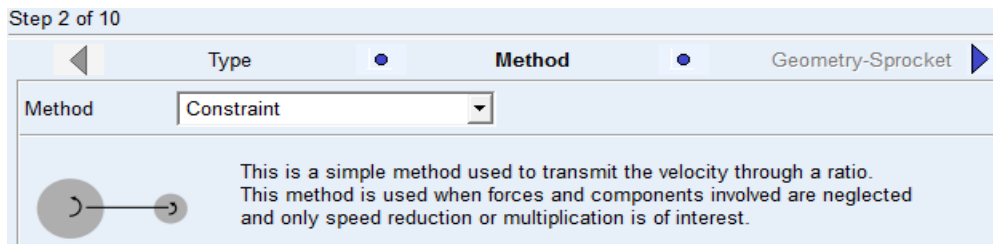
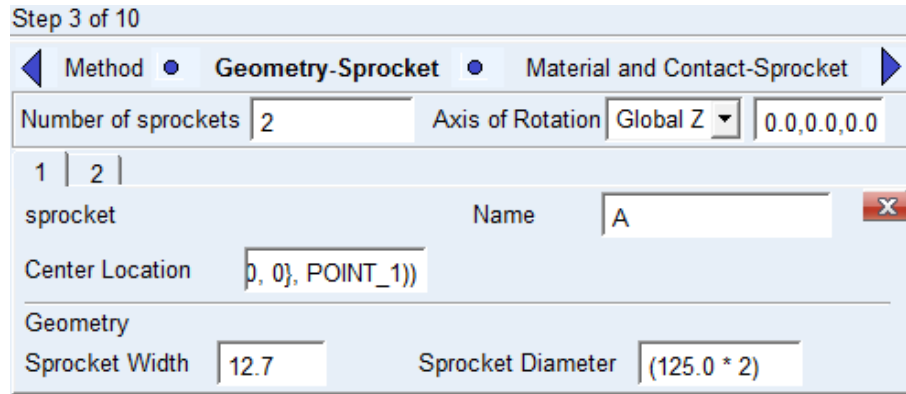


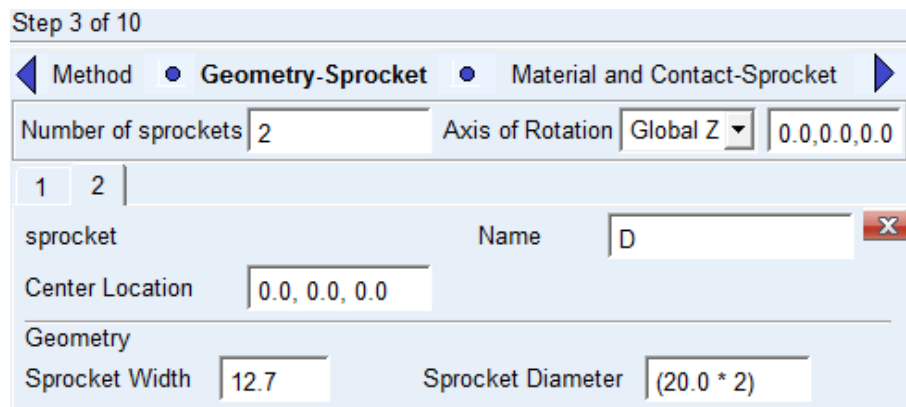
Figura 4.15: Método de análisis empleado por Adams[©].

Los parámetros geométricos de las catarinas *A* y *D* se presentan en las figuras 4.16(a) y 4.16(b). El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios iguales a los indicados en el enunciado del problema, y seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de las catarinas. En este caso, debe notarse que la distancia entre centros debe ser mayor a la suma de los radios de las catarinas.

Por otro lado, los parámetros inerciales de las catarinas *A* y *D*, se presentan en las figuras 4.17 y 4.18. Debe notarse que al ser un problema de cinemática del cuerpo rígido, los datos como las masas de las catarinas no son de interés, por lo que el usuario debe poner atención en minimizar la inercia de las catarinas. Los momentos de inercia con respecto a los ejes *x* y *y* no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco, sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje *z*.



(a) Propiedades geométricas de la catarina *A*



(b) Propiedades geométricas de la catarina *D*

Figura 4.16: Propiedades geométricas de las catarinas *A* y *B*.

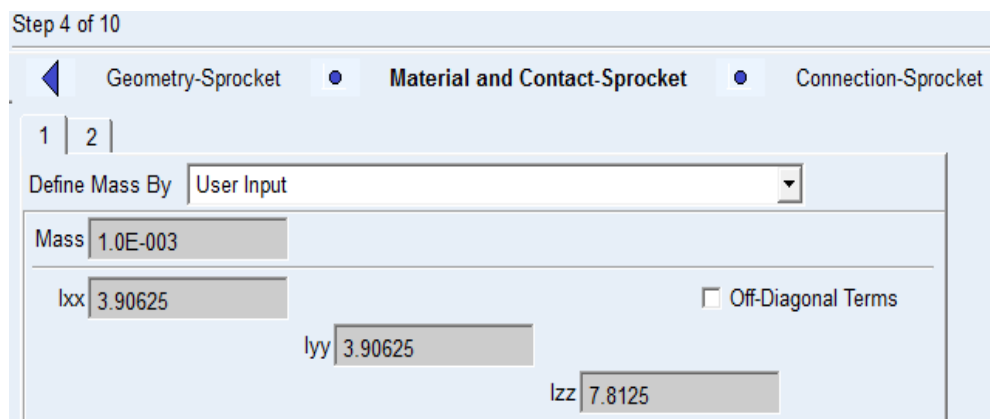


Figura 4.17: Propiedades inerciales de la catarina *A*

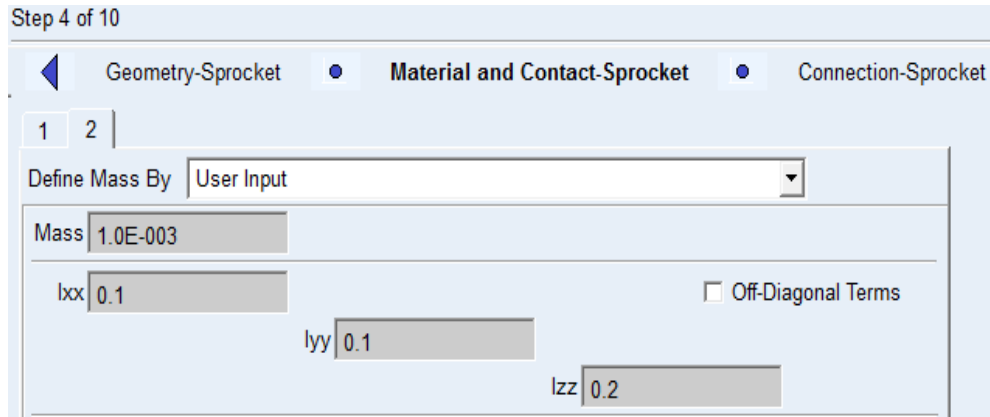


Figura 4.18: Propiedades inerciales de la catarina D

Módulo banda en Adams[©]/Machinery.

La figura 4.19 muestra el tipo de polea empleada en este modelo. En este caso se implementaron poleas del tipo en V, mientras que la figura 4.20 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema.

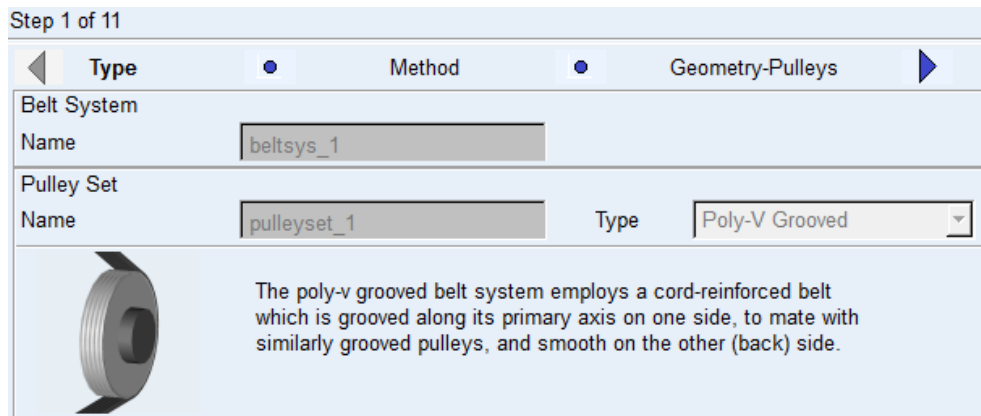


Figura 4.19: Tipo de banda empleada por Adams[©], para la polea B .

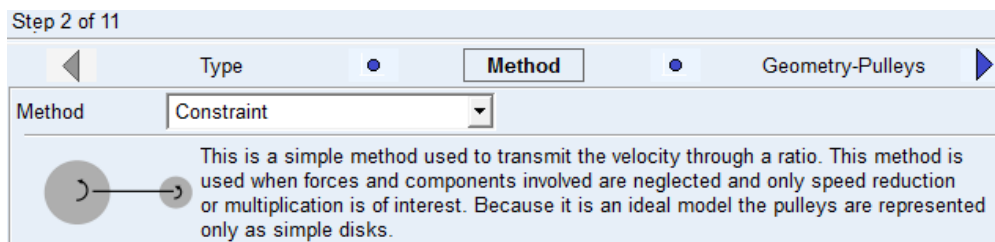


Figura 4.20: Método de análisis empleado por Adams[©].

Los parámetros geométricos de las poleas B y E se presentan en las figuras 4.21 y 4.22. El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios iguales a los indicados en el enunciado del problema, y seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de las catarinas. En este caso, debe notarse que la distancia entre centros debe ser mayor a la suma de los radios de las catarinas.

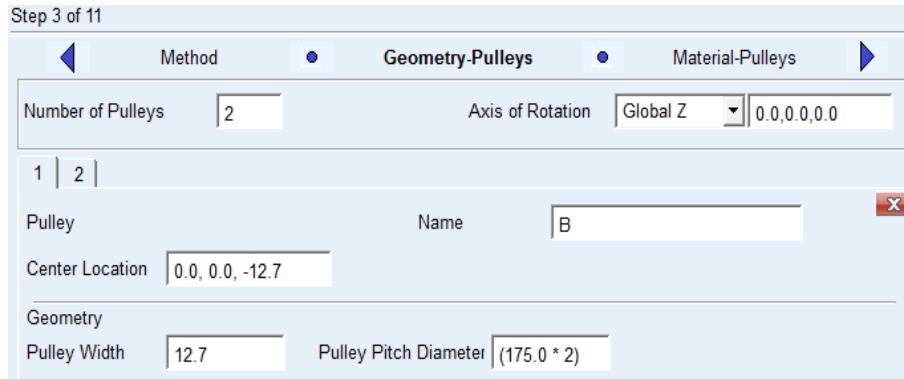


Figura 4.21: Propiedades geométricas de la polea B .

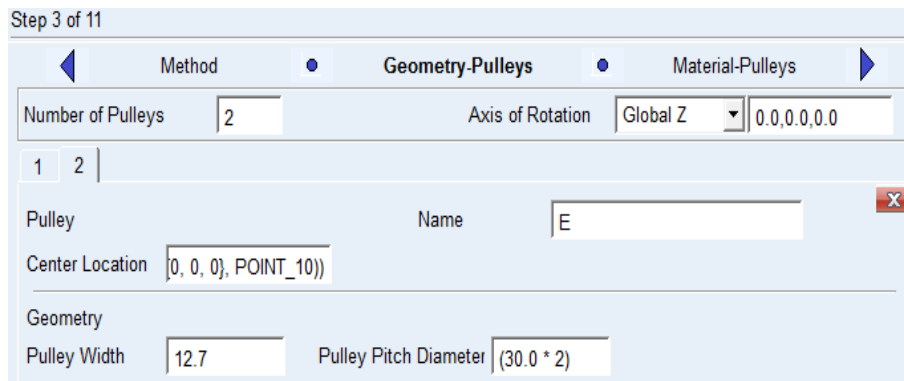
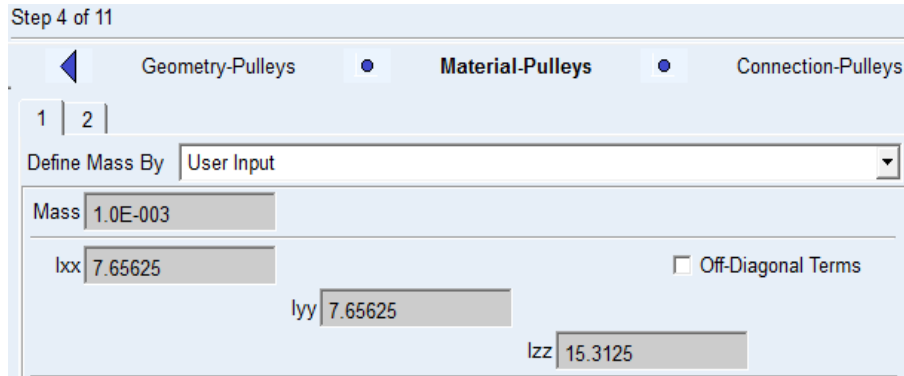


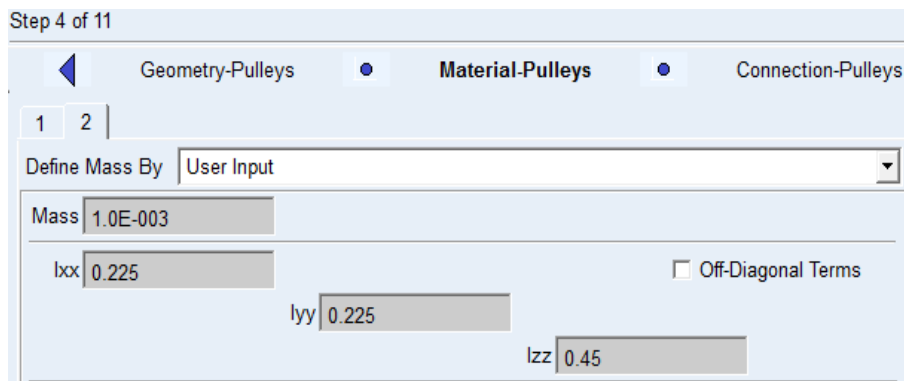
Figura 4.22: Propiedades geométricas de la polea E .

Los parámetros inerciales de las poleas, B y E , se presentan en la figura 4.23. Debe notarse que al ser un problema de cinemática del cuerpo rígido, los datos como las masas de las poleas no son de interés, por lo que el usuario debe poner atención en minimizar la inercia de las poleas. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 3 segundos, con un número de pasos de 1000 y seleccionar el tipo de simulación cinemática, vea la figura 4.24. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se deseé y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.



(a) Propiedades inerciales de la polea *B*



(b) Propiedades inerciales de la polea *E*

Figura 4.23: Propiedades inerciales de las poleas *B* y *E*.

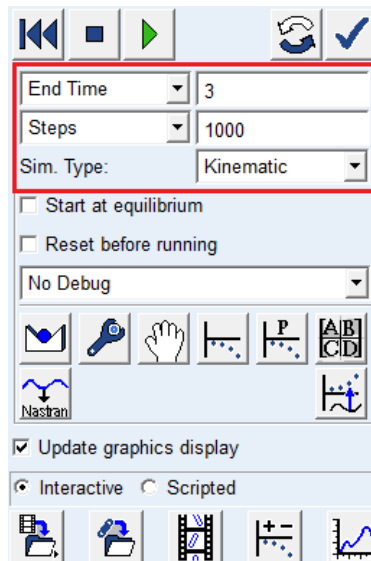


Figura 4.24: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 4.25 y 4.26.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.MODEL_1	body force constraint	+ MOTION_5 + beltsys_1 - chainsys_1 + constrained_2 - sprocketset_1 - sprocketset_1_A - o_part cm joint_i wheel_geo	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag

Source: Objects
Filter: *

(a) Solicitud de la velocidad angular de la catarina A

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.MODEL_1	body force constraint	+ MOTION_5 + beltsys_1 - chainsys_1 + constrained_2 - sprocketset_1 + sprocketset_1_A - sprocketset_1_D - o_part cm joint_i	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag

Source: Objects
Filter: *

(b) Solicitud de la velocidad angular de la catarina D

Figura 4.25: Solicitud de los resultados obtenidos en el post procesamiento de Adams[®].

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.MODEL_1	body force constraint	+ MOTION_5 - beltsys_1 - pulleyset_1 - pulleyset_1_B - o_part cm joint_i wheel_geo wheel_i + fix_joint + rev_joint	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag

Source: Objects
Filter: *

(a) Solicitud de la velocidad angular de la polea B

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.MODEL_1	body force constraint	+ MOTION_5 - beltsys_1 - pulleyset_1 + pulleyset_1_B - pulleyset_1_E - o_part cm joint_i wheel_geo wheel_i + fix joint	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag

Source: Objects
Filter: *

(b) Solicitud de la velocidad angular de la polea E

Figura 4.26: Solicitud de los resultados de las poleas en el post procesamiento de Adams[®].

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©] se muestran en las figuras 4.27 y 4.28.

Resultados obtenidos de las catarinas en el post procesador.

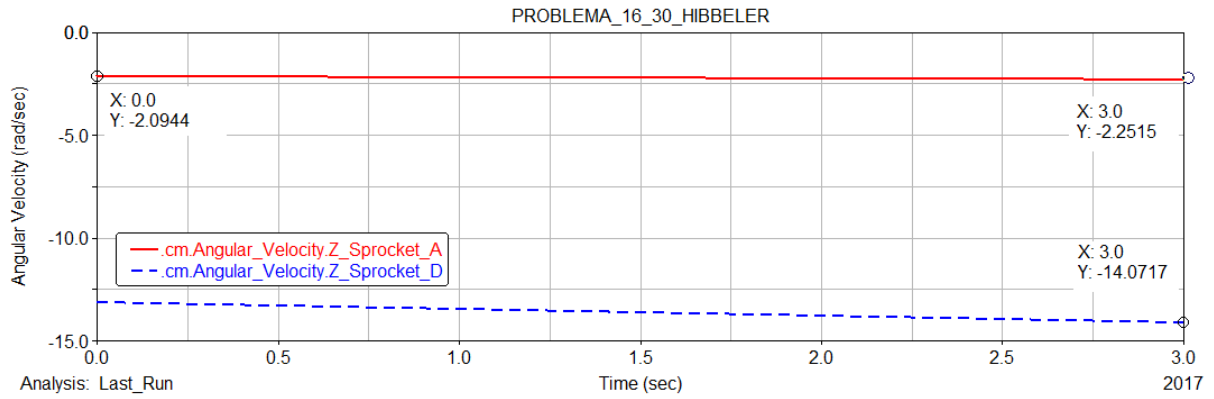


Figura 4.27: Resultados de las velocidades angulares de las catarinas *A* y *D*.

De manera que:

$$\omega_A|_{t=0s} = \left(2.0944 \frac{rad}{s} \right) \left(\frac{1 rev}{2\pi rad} \right) \left(\frac{60 s}{1 min} \right) = 20.0 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

$$\omega_A|_{t=3s} = 2.2515 \frac{rad}{s} = 21.5002 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

$$\omega_D|_{t=3s} = 14.0717 \frac{rad}{s} = 134.3748 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

Resultados obtenidos de las poleas en el post procesador.

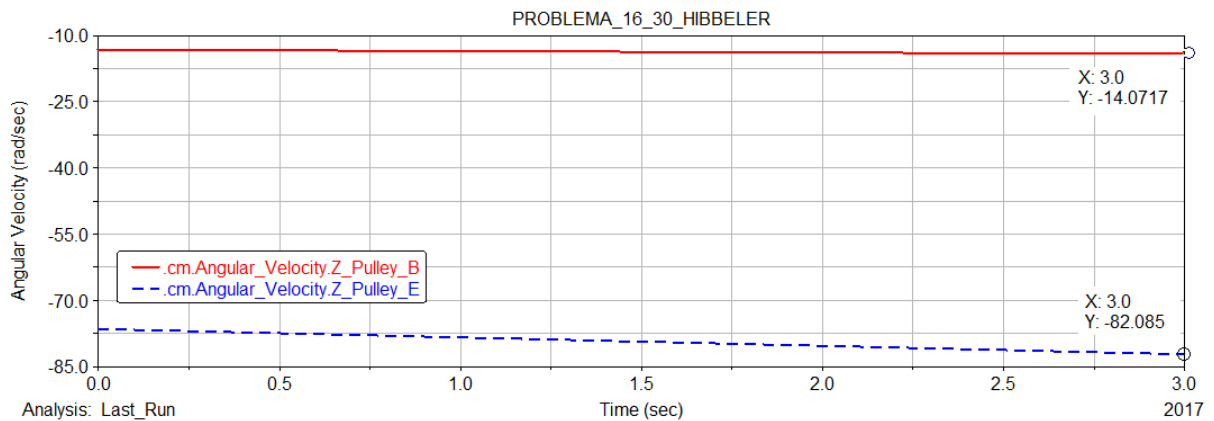


Figura 4.28: Resultados de las velocidades angulares.

Por lo que:

$$\omega_B|_{t=3s} = \left(14.0717 \frac{rad}{s}\right) \left(\frac{1 rev}{2\pi rad}\right) \left(\frac{60 s}{1 min}\right) = 134.3748 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

$$\omega_E|_{t=3s} = \left(82.085 \frac{rad}{s}\right) \left(\frac{1 rev}{2\pi rad}\right) \left(\frac{60 s}{1 min}\right) = 783.8540 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

$$\omega_F|_{t=3s} = \omega_E|_{t=3s} = 783.8540 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

Estos resultados contienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[®]. La Tabla 4.2 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 4.2: Comparación de resultados. 2.º problema de cadenas y catarinas.

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [®]
$\omega_A _{t=0s}$	20.0 <i>rev/min</i> \circlearrowleft	20.0 <i>rev/min</i> \circlearrowleft
$\omega_A _{t=3s}$	21.5 <i>rev/min</i> \circlearrowleft	21.5002 <i>rev/min</i> \circlearrowleft
$\omega_D _{t=3s}$	134.375 <i>rev/min</i> \circlearrowleft	134.3748 <i>rev/min</i> \circlearrowleft
$\omega_B _{t=3s}$	134.375 <i>rev/min</i> \circlearrowleft	134.3748 <i>rev/min</i> \circlearrowleft
$\omega_F _{t=3s}$	783.854 <i>rev/min</i> \circlearrowleft	783.8540 <i>rev/min</i> \circlearrowleft
$\omega_E _{t=3s}$	783.854 <i>rev/min</i> \circlearrowleft	783.8540 <i>rev/min</i> \circlearrowleft

4.3. Tercer problema de sistemas de cadenas y catarinas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 16-31 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 328.

Problema 3. Si en un principio el operador impulsa los pedales a 12 *rev/min* y luego inicia una aceleración angular de 8 *rev/min*², determine la velocidad angular del volante *F* después que el pedal ha girado 2 revoluciones. Observe que el brazo del pedal está conectado a la cadena *A*, la cual al girar impulsa la polea acanalada *B* mediante una catarina de acoplamiento *D*. La banda se enrolla alrededor de la polea acanalada y luego impulsa la polea *E* y el volante *F*. Las dimensiones de las polea y catarinas, están dadas por: $r_A = 125 mm$, $r_B = 175 mm$, $r_D = 20 mm$ y $r_E = 30 mm$

4.3.1. Solución analítica.

Se sabe que la aceleración angular de la catarina unida al pedal α_A es constante por lo que el sistema se puede analizar como un sistema que está sujeto a un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo uniformemente acelerado. De acuerdo a lo anterior, la posición angular de la catarina *A* y su velocidad angular están dada por:

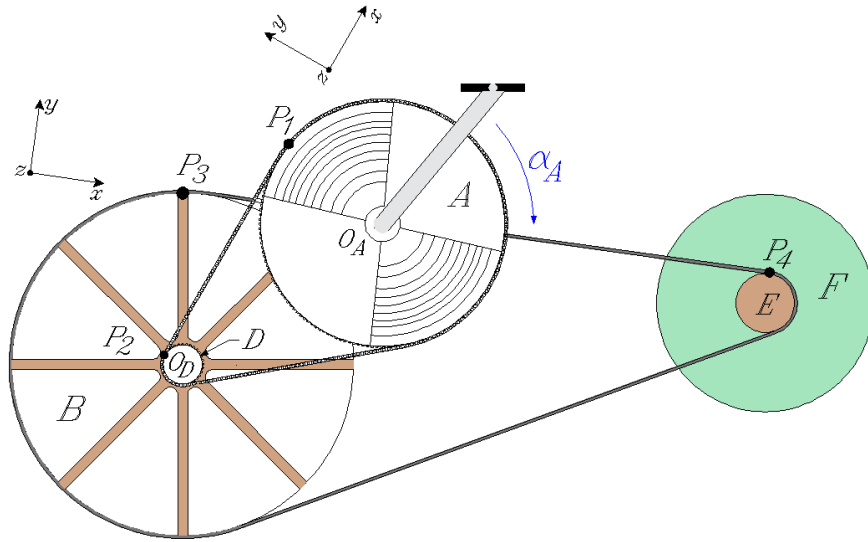


Figura 4.29: Modelo del problema 16-31 Hibbeler [18].

$$\theta_A = \omega_{A_0}t + \frac{1}{2}\alpha_A t^2 \quad (4.7)$$

$$\omega_A = \omega_{A_0} + \alpha_A t \quad (4.8)$$

Por otro lado, se sabe que la catarina A tiene una velocidad angular inicial igual a 20 rev/min . De manera que, sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4.7), se determina la ecuación del desplazamiento angular de la catarina A , en función del tiempo. De aquí que:

$$2 \text{ rev} = \left(12 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)t + \frac{1}{2} \left(8 \frac{\text{rev}}{\text{min}^2}\right)t^2 \quad \text{tal que} \quad 4t^2 + 12t - 2 = 0$$

Obteniendo las raíces de la ecuación cuadrática anterior, se encuentra el tiempo que tarda la catarina A en dar dos revoluciones, por lo que:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.1583 \text{ min} \\ t_2 &= -3.1583 \text{ min} \end{aligned}$$

Obviamente el tiempo que tarda la catarina A en dar 2 revoluciones es igual a t_1 , o en otras palabras, a la raíz positiva de la ecuación cuadrática.

Para el cálculo de la velocidad angular de la catarina A se sustituye el valor de t_1 en la ecuación (4.9), donde:

$$\omega_A = \left(12 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right) + \left(8 \frac{\text{rev}}{\text{min}^2}\right)(0.1583123952) = 13.26649916 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \odot$$

Puesto que no existe deslizamiento entre la catarina A y la cadena, las componentes de la velocidad en el punto P_1 de la catarina A y en el punto P_2 de la catarina D , son iguales. A partir de

este resultado, se obtiene una relación entre las velocidades angulares de ambas catarina en función de sus radios, vea la figura 4.29 y la ecuación (4.9). De manera que:

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\omega_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = \omega_A r_A \hat{i} = v_{A_{P_1}} = v_{D_{P_2}} = \vec{\omega}_D \times \vec{r}_{P_2/O_D} = -\omega_D \hat{k} \times r_D \hat{j} = \omega_D r_D \hat{i}$$

Por consiguiente:

$$r_A \omega_A = r_D \omega_D \quad \text{donde} \quad \omega_D = \frac{r_A}{r_D} \omega_A \quad (4.9)$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene una velocidad angular de:

$$\omega_D = \left(13.26649916 \frac{rev}{min} \right) \left(\frac{125 mm}{20 mm} \right) = 82.91561975 \frac{rev}{min} = 8.682903396 \frac{rad}{s} \curvearrowright$$

Se sabe que la polea B se encuentra unida de forma fija a la catarina D , por lo que la velocidad angular de la catarina D es la misma que la polea B .

$$\omega_B = \omega_D = 82.91561975 \frac{rev}{min} = 8.682903396 \frac{rad}{s} \curvearrowright$$

Se sabe que la velocidad de la banda en el punto P_3 y punto P_4 son la misma, vea la figura 4.29, por lo tanto:

$$\vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_3/O_B} = -\omega_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = \omega_B r_B \hat{i} = v_{B_{P_3}} = v_{E_{P_4}} = \vec{\omega}_E \times \vec{r}_{P_4/O_E} = -\omega_E \hat{k} \times r_E \hat{j} = \omega_E r_E \hat{i}$$

De manera que:

$$r_B \omega_B = r_E \omega_E \quad \text{tal que} \quad \omega_E = \left(\frac{r_B}{r_E} \right) \omega_B \quad (4.10)$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene una velocidad angular de:

$$\omega_E = \left(82.91561975 \frac{rev}{min} \right) \left(\frac{175 mm}{30 mm} \right) = 483.6744485 \frac{rev}{min} = 50.65026981 \frac{rad}{s} \curvearrowright$$

Al estar el disco F unido de manera fija a la polea E , se deduce que la velocidad angular de ambos son la misma, de manera que:

$$\omega_F = \omega_E = 483.6744485 \frac{rev}{min} = 50.65026981 \frac{rad}{s} \curvearrowright$$

4.3.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de cadenas y catarinas dentro del módulo de **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección se muestra únicamente los resultados obtenidos en el post procesador de Adams[©], ya que los parámetros de diseño como los geométricos e inerciales de los elementos dentro del modelo, se encuentran definidos en el desarrollo del problema 16-30 Hibbeler [18], vea la sección 4.3.1.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 16-31 se muestra en la figura 4.30.

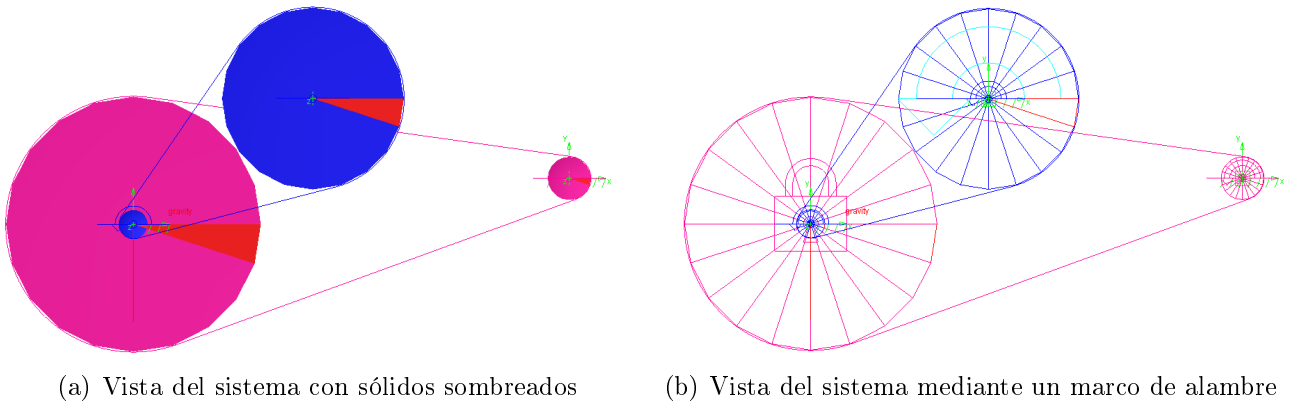


Figura 4.30: Modelo del problema en Adams[©].

Es importante señalar que las modificaciones realizadas en el problema 16-31 Hibbeler [18], comparado al problema 16-30 Hibbeler, vea la sección 4.2; recae en la función que define la velocidad angular de la catarina A , la velocidad angular inicial y la aceleración angular de la misma.

La función que rige la velocidad de la catarina A está definida por la ecuación (4.9). El usuario debe ser consciente del sistema de unidades que está utilizando en Adams[©], ya que estas resultan de gran importancia para definir la función de la velocidad angular de la catarina A . Por otro lado, las unidades empleadas en el desarrollo de este problema, vea la figura 4.31.

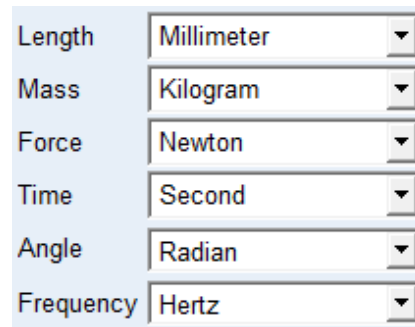


Figura 4.31: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

De acuerdo con el problema, las condiciones iniciales están dadas por:

$$\omega_{A_0} = 12 \frac{rev}{min} = \frac{2}{5} \pi \frac{rad}{s}$$

$$\alpha_A = 8 \frac{rev}{min^2} = \frac{1}{225} \pi \frac{rad}{s^2}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4.9), se obtiene la ecuación (4.11) que rige el comportamiento de la catarina A en función del tiempo. De manera que:

$$\omega(t) = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{225}t \right) \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (4.11)$$

La figura 4.32 muestra la función que define la velocidad angular de la catarina A , así que:

Name	MOTION_5
Joint	sprocketset_1_A.rev_joint
Joint Type	revolute
Direction	Rotational
Define Using	Function
Function (time)	$((2/5)+((1/225)*\text{TIME}))*(\text{PI})$
Type	Velocity
Displacement IC	0.0
Velocity IC	

Figura 4.32: Función de la velocidad angular de la catarina A .

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de $t_1 = 9.4986\text{s} = 0.15831\text{min}$, con un número de pasos de 1000 y seleccionar el tipo de simulación cinemática, vea la figura 4.33. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

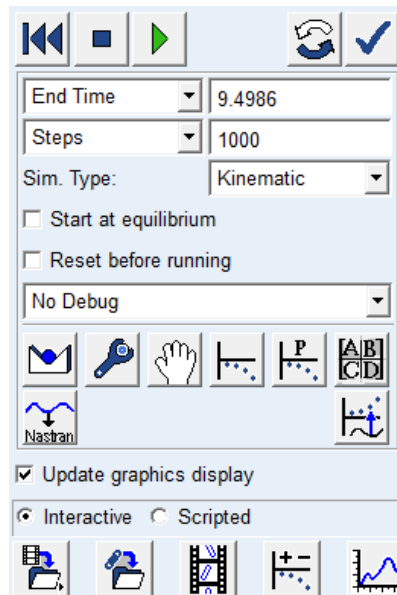


Figura 4.33: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, vea las figuras 4.25 y 4.26 en las páginas 111 y 111 del problema 16-30 Hibbeler [18].

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©] se muestran en las figuras 4.34 y 4.35.

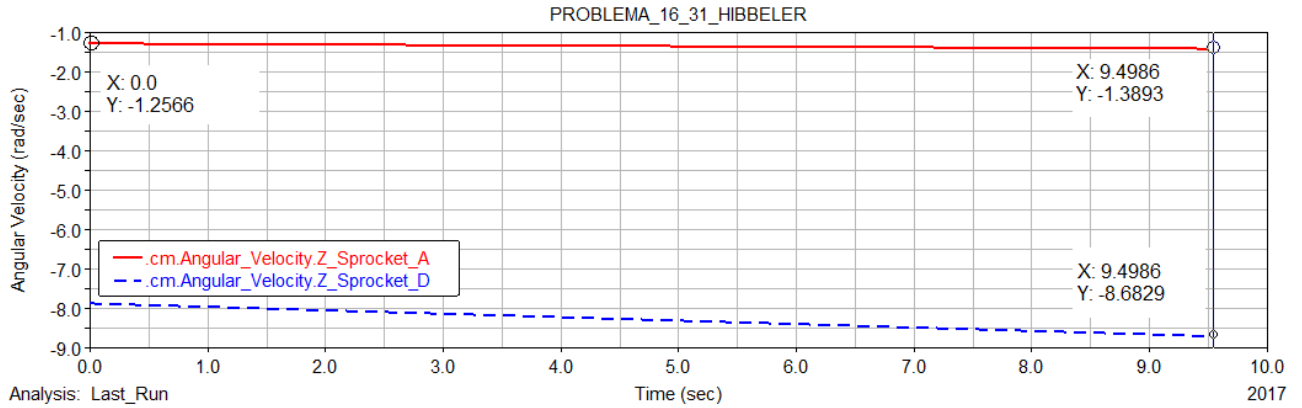


Figura 4.34: Resultados de las velocidades angulares.

De acuerdo con la figura 4.34, los resultados de las velocidades angulares de las catarinas *A* y *D* resultan:

$$\omega_A|_{t=0s} = \left(1.2566 \frac{rad}{s} \right) \left(\frac{1 rev}{2\pi rad} \right) \left(\frac{60 s}{1 min} \right) = 11.9996 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

$$\omega_A|_{t=9.4986s} = 1.38935 \frac{rad}{s} = 13.2668 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

$$\omega_D|_{t=9.4986s} = 8.6829 \frac{rad}{s} = 82.91558 \frac{rev}{min} \circlearrowleft$$

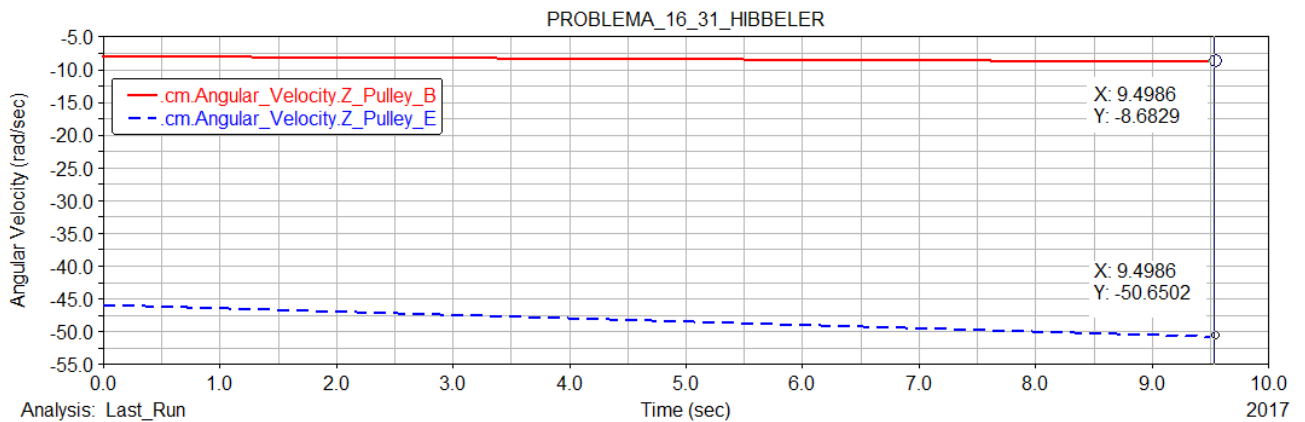


Figura 4.35: Resultados de las velocidades angulares.

De acuerdo con la figura 4.35, los resultados de las velocidades angulares de las catarinas B , E y el disco F resultan:

$$\begin{aligned}\omega_B|_{t=9.4986s} &= \left(8.6829 \frac{rad}{s}\right) \left(\frac{1 rev}{2\pi rad}\right) \left(\frac{60 s}{1 min}\right) = 82.91558 \frac{rev}{min} \circlearrowleft \\ \omega_E|_{t=9.4986s} &= \left(50.6502 \frac{rad}{s}\right) \left(\frac{1 rev}{2\pi rad}\right) \left(\frac{60 s}{1 min}\right) = 483.67378 \frac{rev}{min} \circlearrowleft \\ \omega_F|_{t=9.4986s} &= \omega_E|_{t=9.4986s} = 483.67378 \frac{rev}{min} \circlearrowleft\end{aligned}$$

Los resultados obtenidos mediante la simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

La Tabla 4.3 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación. Como se mencionó, el comportamiento de las velocidades angulares tanto de las catarinas A y D , como el de las poleas B y E , tiene un comportamiento lineal. Por consiguiente, el valor de interés para todas las velocidades angulares es para un tiempo $t = 9.4986 s = 0.15831 min$.

Tabla 4.3: Comparación de resultados. 3.^{er} problema de cadenas y catarinas.

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
$\omega_A _{t=0s}$	12.0000 rev/min \circlearrowleft	11.9996 rev/min \circlearrowleft
$\omega_A _{t=9.4986s}$	13.2665 rev/min \circlearrowleft	13.2668 rev/min \circlearrowleft
$\omega_D _{t=9.4986s}$	82.9156 rev/min \circlearrowleft	82.9155 rev/min \circlearrowleft
$\omega_B _{t=9.4986s}$	82.9156 rev/min \circlearrowleft	82.9155 rev/min \circlearrowleft
$\omega_E _{t=9.4986s}$	483.6744 rev/min \circlearrowleft	483.6737 rev/min \circlearrowleft
$\omega_F _{t=9.4986s}$	483.6744 rev/min \circlearrowleft	483.6737 rev/min \circlearrowleft

4.4. Cuarto problema de sistemas de cadenas y catarinas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema de ejemplo 16-2 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 321.

Problema 4. El motor se utiliza para hacer girar un ensamble de rueda y soplador alojado en una caja. Los detalles del diseño se muestran en la figura 4.36. Si la polea A conectada al motor comienza a girar desde el reposo con una aceleración angular constante de $\alpha_A = 2 \text{ rad/s}^2$, determine las magnitudes de la velocidad y aceleración del punto P en la rueda, después de que la polea ha realizado dos revoluciones. Suponga que la banda de transmisión no se resbala en la polea y la rueda. Las dimensiones de las poleas están dados por $r_A = 0.15 \text{ m}$ y $r_B = 0.4 \text{ m}$.

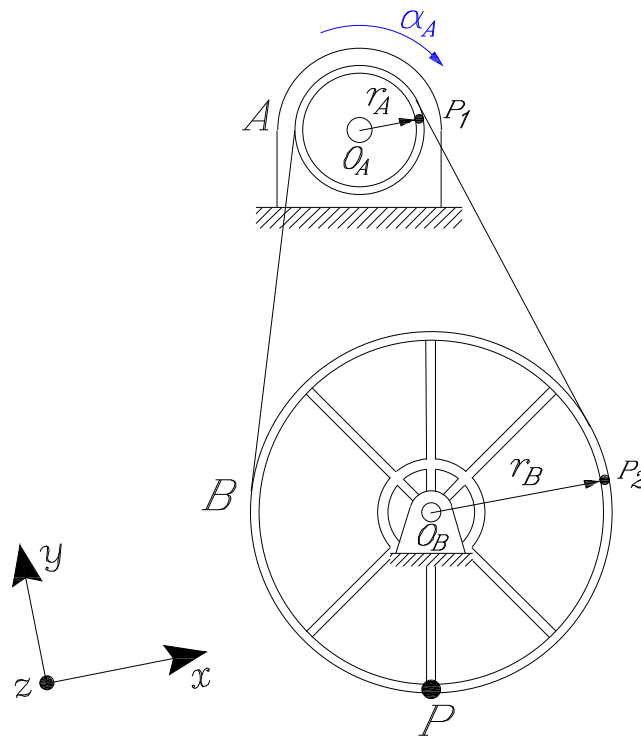


Figura 4.36: Modelo del problema 16-2 Hibbeler [18].

4.4.1. Solución analítica.

De acuerdo con el problema, la polea unida al motor parte del reposo y gira un total de dos revoluciones, por lo que:

$$\theta_A = 2 \text{ rev} \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) = 12.57 \text{ rad} \quad \odot$$

Las poleas A y B están sujetas a rotación alrededor de un eje fijo perpendicular al plano del papel, que pasa por el punto O_A de la polea A y el punto O_B para la polea B . Puesto que la aceleración angular α_A de la polea A es constante, el movimiento de rotación de la polea A es

uniformemente acelerado. Por lo anterior, y conociendo que la polea A parte del reposo; es decir, para $t = 0$, $\omega_A(0) = 0$ y $\theta_A(0) = 0$. De manera que, la velocidad angular de la polea A está dada por:

$$\omega_A^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_A(\theta - \theta_2) = 0 + 2\alpha_A(\theta - 0) = 2(2 \text{ rad/s}^2)(12.57 \text{ rad})$$

Por lo tanto:

$$\omega_A = 7.09083916 \text{ rad/s} \curvearrowright$$

Puesto que no existe deslizamiento entre la polea A y la banda, la velocidad y las componentes tangenciales de la aceleración del punto P_1 en la polea A y del punto P_2 en la polea B , son iguales; vea la figura 4.36. De manera que:

Las velocidades en los punto P_1 y P_2 , como parte de las poleas A y B , resultan:

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\omega_A \hat{k} \times r_A \hat{i} = -\omega_A r_A \hat{j} = v_{A_{P_1}} = v_{B_{P_2}} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = -\omega_B \hat{k} \times r_B \hat{i} = -\omega_B r_B \hat{j}$$

Las aceleraciones en los puntos P_1 y P_2 , como parte de las poleas A y B , resultan:

$$\vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\alpha_A \hat{k} \times r_A \hat{i} = -\alpha_A r_A \hat{j} = a_{tA_{P_1}} = a_{tB_{P_2}} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = -\alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{i} = -\alpha_B r_B \hat{j}$$

A partir de este resultado, se obtienen dos relaciones: la primera, entre las velocidades angulares de ambas poleas en función de sus radios; la segunda, entre las aceleraciones angulares de ambas poleas en función de sus radios, vea las ecuaciones (4.12) y (4.13).

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \text{donde} \quad \omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A \quad (4.12)$$

$$r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{donde} \quad \alpha_B = \frac{r_A}{r_B} \alpha_A \quad (4.13)$$

Sustituyendo los valores numéricos, en las ecuaciones (4.12) y (4.13) se obtiene una velocidad y aceleración angular de:

$$\omega_B = (7.09083916 \text{ rad/s}) \left(\frac{0.15 \text{ m}}{0.4 \text{ m}} \right) = 2.659 \text{ rad/s} \curvearrowright$$

$$\alpha_B = (2 \text{ rad/s}^2) \left(\frac{0.15 \text{ m}}{0.4 \text{ m}} \right) = 0.75 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$$

Análisis de velocidades y aceleraciones tangenciales del punto P .

De acuerdo con el diagrama cinématico de la figura 4.37, la velocidad y aceleración tangencial se definen como:

Velocidad en el punto P .

$$v_{B_P} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P/O_B} = -\omega_B \hat{k} \times -r_B \hat{j} = -\omega_B r_B \hat{i} \quad (4.14)$$

Aceleración tangencial en el punto P .

$$a_{tB_P} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P/O_B} = -\alpha_B \hat{k} \times -r_B \hat{j} = -\alpha_B r_B \hat{i} \quad (4.15)$$

Aceleración normal en el punto P .

$$a_{nB_P} = \vec{\omega}_B \times (\vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P/O_B}) = -\omega_B \hat{k} \times (-\omega_B \hat{k} \times -r_B \hat{j}) = \omega_B^2 r_B \hat{j} \quad (4.16)$$

Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones (4.14), (4.15) y (4.16), se obtienen los valores de la velocidad y las aceleraciones tangencial y normal en el punto P . Tal que:

$$\begin{aligned} v_{B_P} &= -(2.659064685 \text{ rad/s}) (0.4 \text{ m}) \hat{i} = -1.063625874 \hat{i} \text{ m/s} \\ a_{tB_P} &= -(0.75 \text{ rad/s}^2) (0.4 \text{ m}) \hat{i} = -0.3 \hat{i} \text{ m/s}^2 \\ a_{nB_P} &= (2.659064685 \text{ rad/s})^2 (0.4 \text{ m}) \hat{j} = 2.82825 \hat{j} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

La magnitud de la aceleración en el punto P está dada por:

$$a_P = \sqrt{[a_{tB_P}]^2 + [a_{nB_P}]^2} = \sqrt{(0.3 \text{ m/s}^2)^2 + (2.82825 \text{ m/s}^2)^2} = 2.84411694 \text{ m/s}^2$$

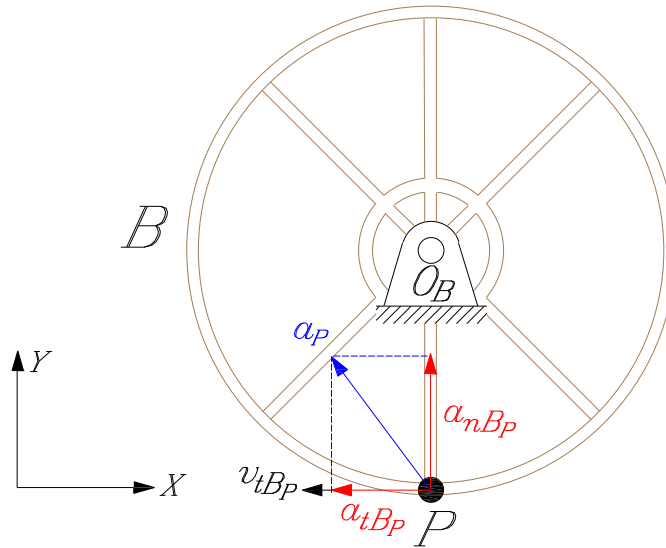


Figura 4.37: Diagrama cinemático de velocidades y aceleraciones en el punto P .

4.4.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de cadenas y catarinas dentro del módulo de **Machinery** del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la cadena y la catarina. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.3 y 2.3.3, en las páginas 14 y 17 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de cadena se emplea una opción de suma importancia denominada “**Constraint**”. Esta opción se emplea cuando únicamente se desea analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante. Al seleccionar este tipo de análisis simplificado, Adams[©] desprecia los componentes, eslabones de la cadena y la catarina; así mismo, las fuerzas involucradas en el sistema. Por esa razón se puede usar cadenas y catarinas cuando el problema indica que la transmisión se realiza mediante una banda.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 16-30 se muestra en la figura 4.38. Por otro lado, el usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelado, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 4.39.

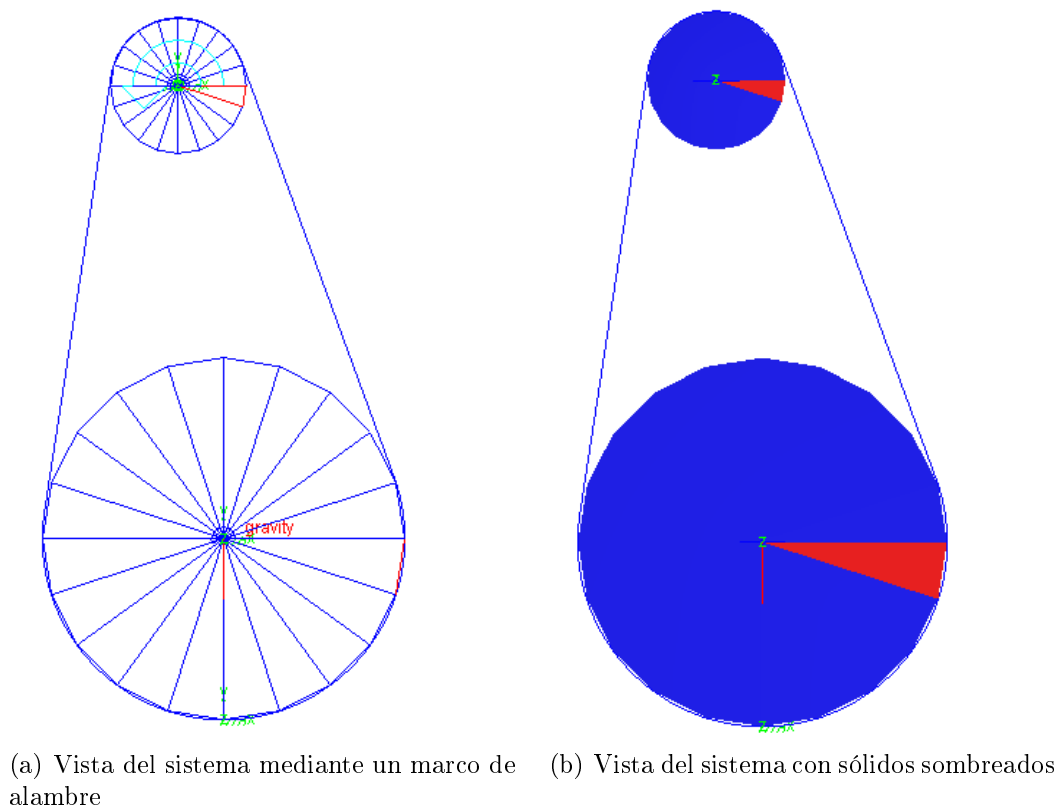
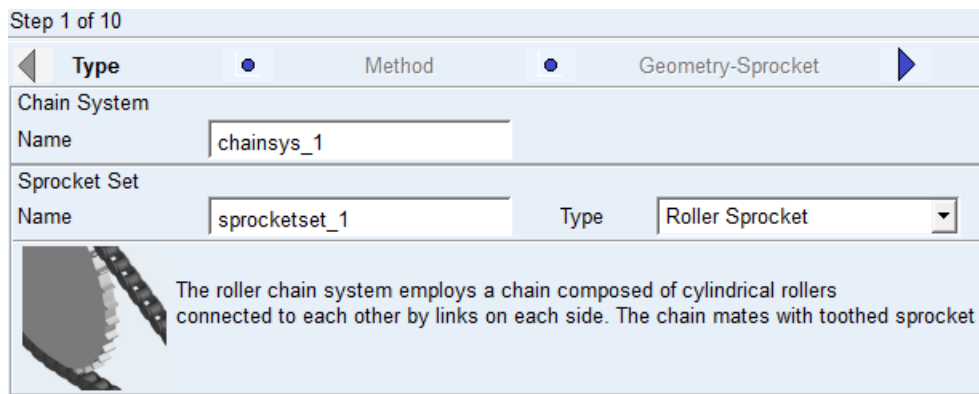


Figura 4.38: Modelo del problema en Adams[©].

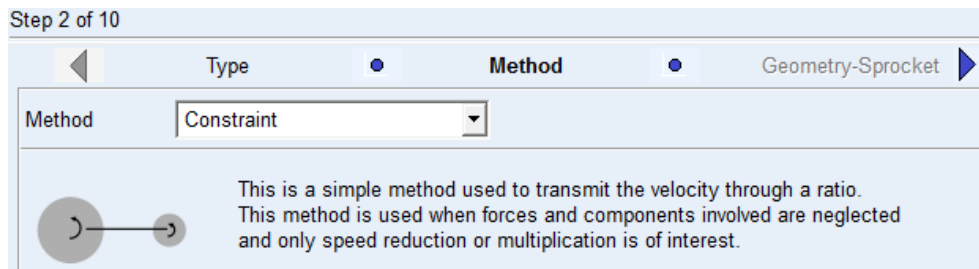
Length	Meter
Mass	Kilogram
Force	Newton
Time	Second
Angle	Radian
Frequency	Hertz

Figura 4.39: Unidades empleadas en el modelado.

Como puede observarse en la figura 4.40(a) se seleccionó una catarina para una cadena de rodillo, mientras que la figura 4.40(b) muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema.



(a) Tipo de cadena empleado por Adams[©]



(b) Método de análisis empleado por Adams[©]

Figura 4.40: Tipo de cadena y método de análisis empleado por Adams[©].

Los parámetros geométricos de las catarinas A y B se presentan en las figuras 4.41 y 4.42. El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios iguales a los indicados en el enunciado del problema, y seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de las catarinas.

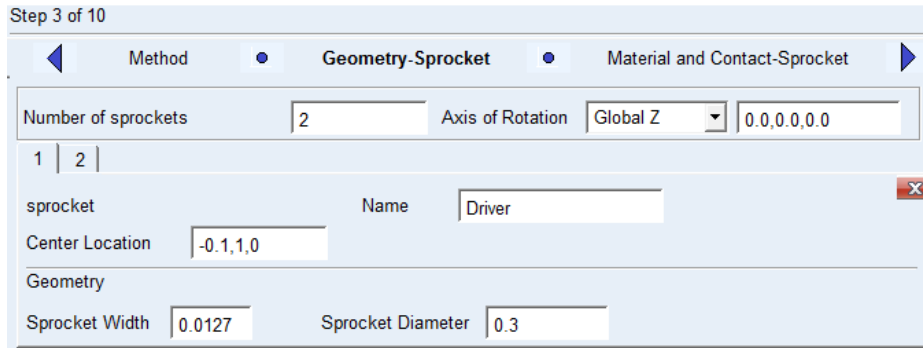


Figura 4.41: Propiedades geométricas de la catarina *A*.

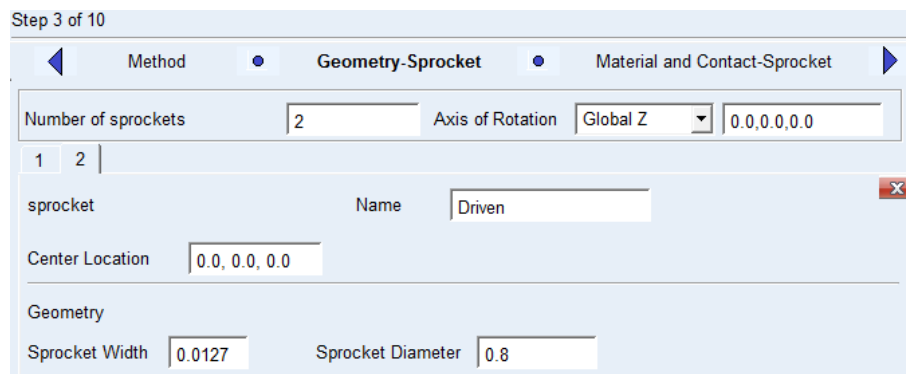


Figura 4.42: Propiedades geométricas de la catarina *B*.

Los parámetros inerciales de las catarinas *A* y *B* se presentan en las figuras 4.43 y 4.44. Debe notarse que al ser un problema de cinemática del cuerpo rígido, los datos como las masas de las catarinas no son de interés, por lo que el usuario debe poner atención en minimizar la inercia de las catarinas. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco, sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .

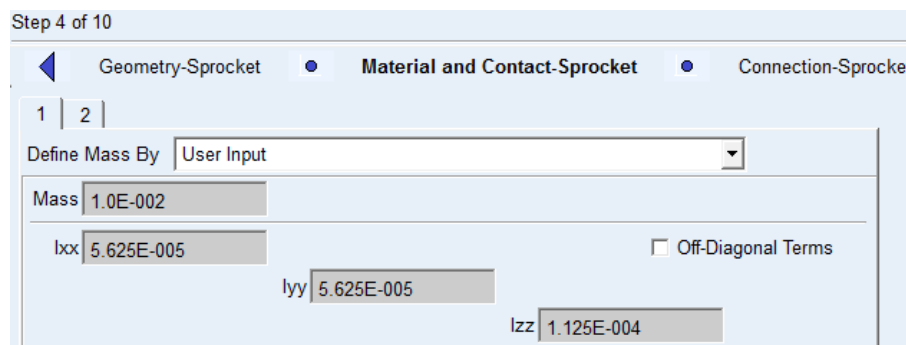


Figura 4.43: Propiedades inerciales de la catarina *A*.

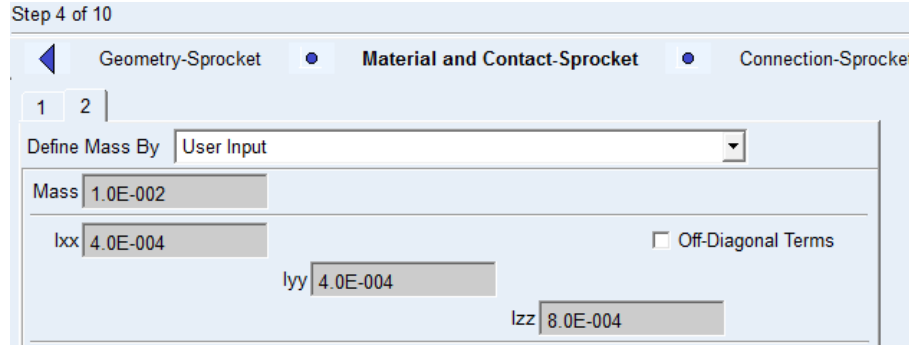


Figura 4.44: Propiedades inerciales de la catarina B .

Para el post procesamiento se calculó un tiempo de simulación igual a 3.5454 s , tiempo en el cual la catarina A gira un total de dos revoluciones. Se sabe que la polea A parte del reposo, es decir, para $t = 0$, $\omega_A(0) = 0$; por lo que la posición angular de la polea A y su velocidad angular están dadas por:

$$\theta_A = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_A t^2 = 0 + \frac{1}{2} \alpha_A t^2$$

Despejando el tiempo, se obtiene:

$$t = \sqrt{\frac{2\theta_A}{\alpha_A}} = \sqrt{\frac{2(12.57\text{ rad})}{2\text{ rad/s}^2}} = 3.5454\text{ s}$$

Para la simulación del modelo se ingresa el tiempo de 3.5454 s , que es el tiempo que tarda la polea A en girar 2 revoluciones, con un número de pasos de 1000 y seleccionar el tipo de simulación cinemática, vea la figura 4.45. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

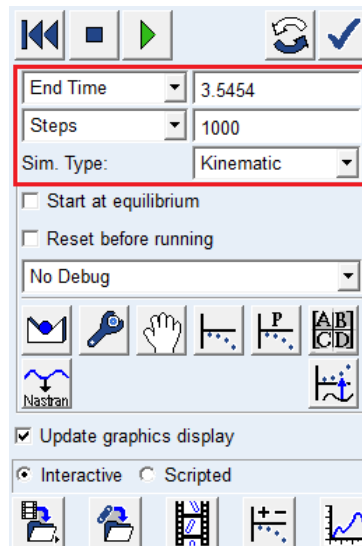


Figura 4.45: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

El “Marker_21” como parte de la catarina B , tiene como función analizar las aceleraciones tangencial y normal del punto P del problema 16-2 [18], vea la figura 4.46.

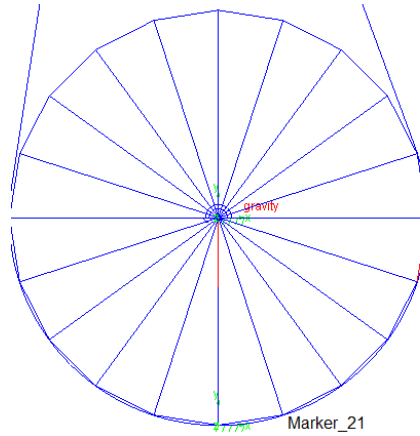


Figura 4.46: “marker_21” (Punto P) como parte de la catarina B .

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 4.47, 4.47 y 4.49. Evidentemente, si hay otras variables de interés, pueden solicitarse.

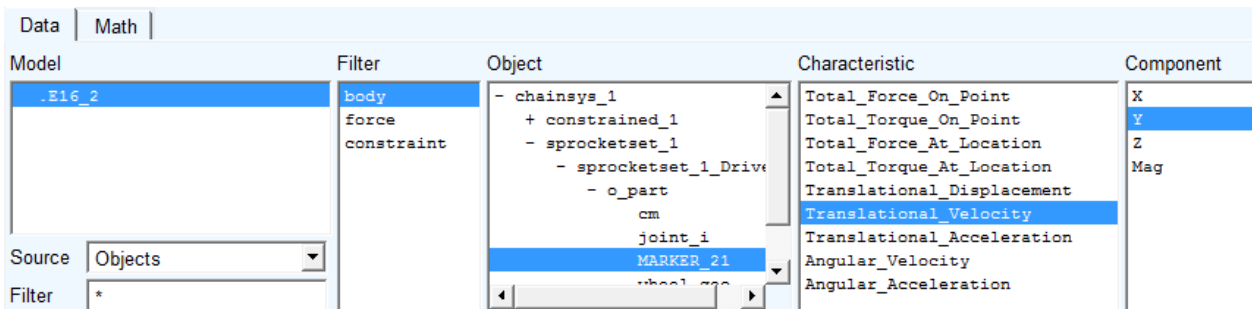


Figura 4.47: Solicitud de la velocidad tangencial en el punto P .

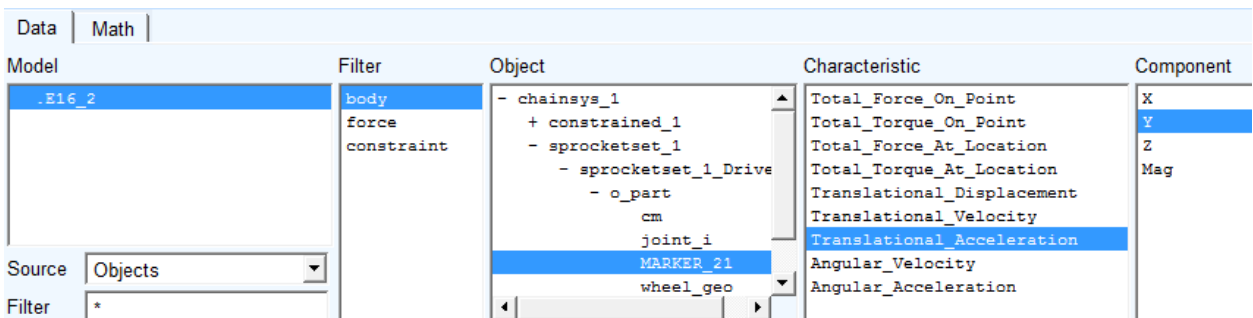


Figura 4.48: Solicitud de la aceleración tangencial en el punto P .

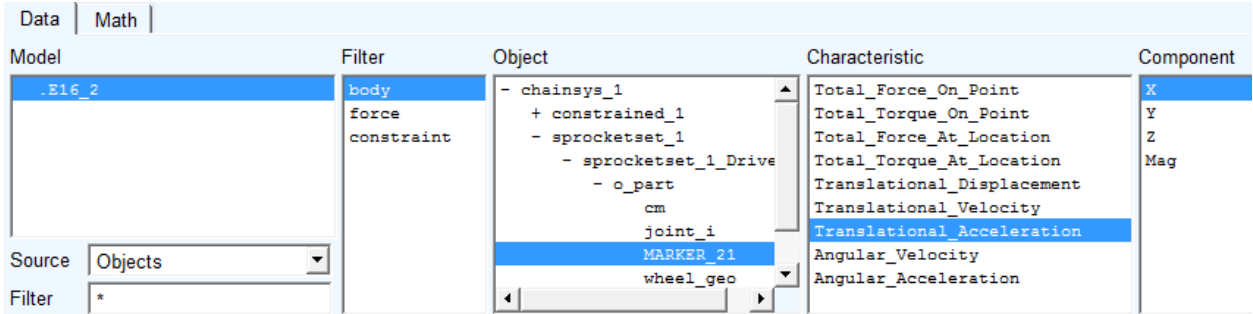


Figura 4.49: Solicitud de la aceleración normal en el punto P .

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©] se muestran en la figura 4.50.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

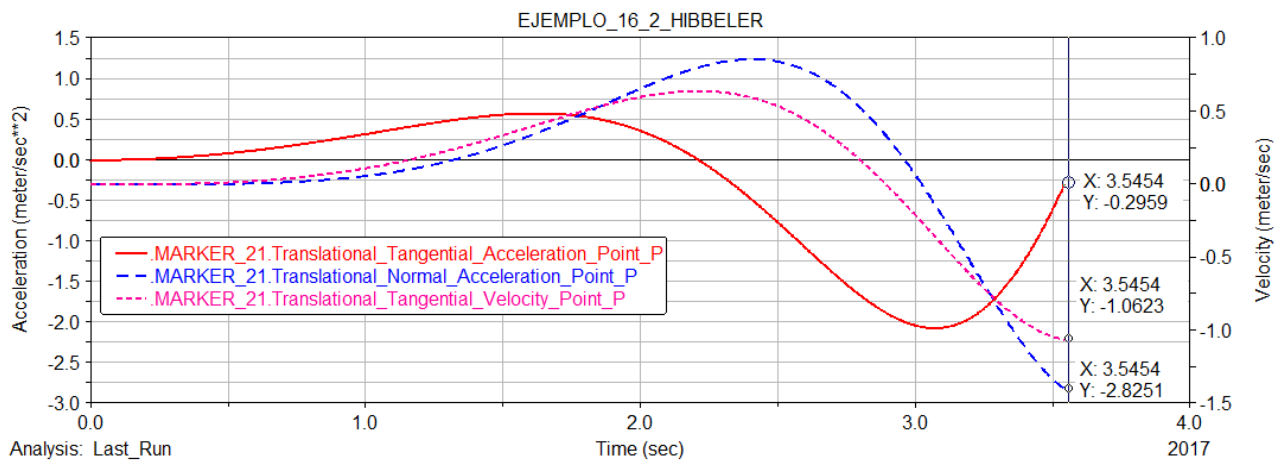


Figura 4.50: Resultados de las aceleraciones angulares.

Los resultados obtenidos mediante la simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 4.4 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 4.4: Comparación de resultados. 4.º problema de cadenas y catarinas.

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
$ a_{tB_P} $	0.3 m/s^2	0.2959 m/s^2
$ a_{nB_P} $	2.82825 m/s^2	2.8251 m/s^2
$ v_{B_P} $	1.06362 m/s	1.0623 m/s

4.5. Quinto problema de sistemas de cadenas y catarinas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 16-30 del libro de Beer et al. [5], incluido en la página 448.

Problema 5. Dos discos A y B , de masa $m_A = 2\text{ kg}$ y $m_B = 4\text{ kg}$, están conectados por medio de una banda como indica la figura 4.51. Si no hay deslizamiento entre la banda y los discos, determine la aceleración angular de cada disco al aplicar un par \mathbf{M} de $2.70\text{ N}\cdot\text{m}$ al disco A . Las dimensiones de las poleas están dadas por $r_A = 200\text{ mm}$ y $r_B = 300\text{ mm}$.

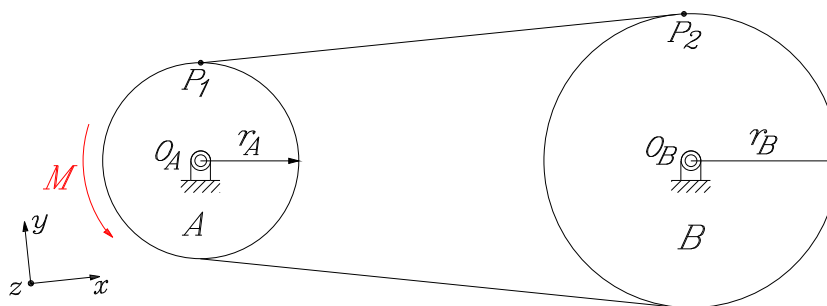


Figura 4.51: Modelo del problema 16-30 Beer et al. [5].

4.5.1. Solución analítica.

Puesto que no existe deslizamiento entre la banda y los discos, se tiene que las componentes tangenciales de la aceleración del disco A en el punto P_1 y del disco B en el punto P_2 , son iguales. A partir de este resultado, se obtiene una relación entre las aceleraciones angulares de ambos discos en función de sus radios, vea la figura 4.51 y ecuación (4.17).

De manera que:

$$-\alpha_A r_A \hat{i} = \alpha_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = -\alpha_A r_A \hat{i} = a_{tA_{P_1}} = a_{tB_{P_2}} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = \alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = -\alpha_B r_B \hat{i}$$

Por consiguiente:

$$r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{tal que} \quad \alpha_B = \frac{r_A}{r_B} \alpha_A \quad (4.17)$$

Con este resultado termina la parte cinemática del problema.

Para la cinética del sistema, se obtienen los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los discos, vea la figura 4.52. Aplicando la ecuación de Euler a cada uno de los discos se encuentran expresiones para las aceleraciones angulares de ambos discos.²

²Debe notarse que no es necesario emplear las ecuaciones de Newton, pues los discos están sujetos a rotación alrededor de un eje fijo baricéntrico, de manera que esas ecuaciones únicamente permiten determinar las reacciones en los cojinetes O_A y O_B que no son de interés.

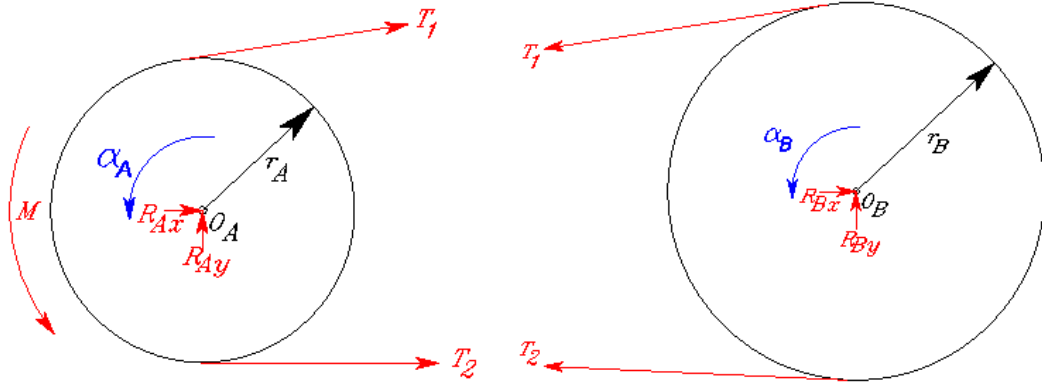


Figura 4.52: Diagrama de cuerpo libre de los discos A y B.

De la suma de momentos con respecto al punto O_A en el disco A, resulta

$$\Sigma M_{O_A} = I_{O_A} \alpha_A \quad \text{tal que} \quad r_A (T_2 - T_1) + M = I_{O_A} \alpha_A$$

De manera que:

$$T_2 - T_1 = \frac{I_{O_A} \alpha_A - M}{r_A} \quad (4.18)$$

De la suma de momentos con respecto al punto O_B en el disco B, se obtiene:

$$\Sigma M_{O_B} = I_{O_B} \alpha_B \quad \text{donde} \quad r_B (T_1 - T_2) = I_{O_B} \alpha_B$$

Por lo tanto:

$$T_2 - T_1 = -\frac{I_{O_B} \alpha_B}{r_B} \quad (4.19)$$

Igualando las ecuaciones (4.18) y (4.19) se obtiene la relación:

$$\frac{I_{O_A} \alpha_A - M}{r_A} = -\frac{I_{O_B} \alpha_B}{r_B} \quad \text{o} \quad \frac{I_{O_A} \alpha_A}{r_A} + \frac{I_{O_B} \alpha_B}{r_B} = \frac{M}{r_A}$$

y una ecuación que relaciona las aceleraciones angulares de los discos con el momento aplicado al disco A, tal que:

$$I_{O_A} \alpha_A + I_{O_B} \frac{r_A}{r_B} \alpha_B = M \quad (4.20)$$

Despejando la aceleración angular del disco B de la ecuación (4.17), se obtiene:

$$\alpha_B = \alpha_A \left(\frac{r_A}{r_B} \right) \quad (4.21)$$

Para el cálculo de la aceleración angular del disco A se sustituye la ecuación (4.21) en la ecuación (4.20) y se despeja α_A , resultando:

$$\alpha_A = \frac{M}{I_A + I_B \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2} \quad (4.22)$$

Se sabe que los momentos de inercia de ambos discos están dados por:

$$I_{O_A} = \frac{1}{2}m_A r_A^2 = \frac{1}{2}(2 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2 = 0.04 \text{ kg} - \text{m}^2$$

$$I_{O_B} = \frac{1}{2}m_B r_B^2 = \frac{1}{2}(4 \text{ kg})(0.3 \text{ m})^2 = 0.18 \text{ kg} - \text{m}^2$$

De manera que, sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4.22), se obtiene:

$$\alpha_A = \frac{2.7}{0.04 + 0.18} \frac{N - m}{(2/3)^2 \text{ kg} - \text{m}^2} = 22.5 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

Por último, se sustituye la aceleración angular α_A en ecuación (4.21) para obtener la aceleración angular α_B , de modo que:

$$\alpha_B = (2/3) 22.5 \text{ rad/s}^2 = 15.0 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

Estos resultados finalizan la solución del problema mediante los métodos abordados en las Unidades de Aprendizaje mencionadas al inicio de esta sección.

4.5.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de cadenas y catarinas dentro del módulo de **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la cadena y la catarina. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.3 y 2.3.3, en las páginas 14 y 17 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de cadena se emplea una opción de suma importancia denominada “**Constraint**”. Esta opción se emplea cuando únicamente se desea analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante. Por esa razón se puede usar cadenas y catarinas cuando el problema indica que la transmisión se realiza mediante una banda.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 16-30 se muestra en la figura 4.53.

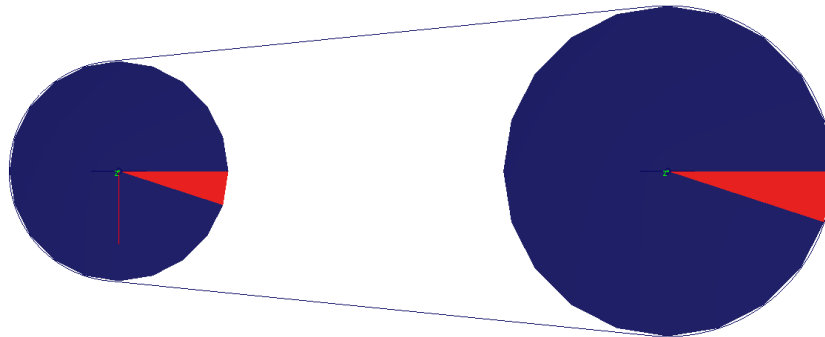


Figura 4.53: Modelo del problema en Adams[©].

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 4.54.

Length	Meter
Mass	Kilogram
Force	Newton
Time	Second
Angle	Radian
Frequency	Hertz

Figura 4.54: Unidades empleadas en el modelo de Adams[®].

El tipo de cadena es el mismo para ambas catarinas, vea la figura 4.55. Como puede observarse en la figura 4.55 se seleccionó una cadena de rodillos y la catarina correspondiente.

Step 1 of 10

Type Method Geometry-Sprocket

Chain System

Name: chainsys_2

Sprocket Set

Name: sprocketset_2 Type: Roller Sprocket

The roller chain system employs a chain composed of cylindrical rollers connected to each other by links on each side. The chain mates with toothed sprocket

Figura 4.55: Tipo de cadena empleado por Adams[®], para la catarina A.

La figura 4.56 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema. Es importante mencionar que el método de análisis es el denominado “**Constraint**”. Este método simplificado únicamente la transmisión, reducción o amplificación, de velocidades es de interés, vea la figura 4.56.

Por otro lado, los parámetros geométricos de los discos A y B, considerados como catarinas, se presentan en la figura 4.57. De manera que, el usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios iguales a los indicados en el enunciado del problema, y seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de los discos, catarinas. En este caso, debe notarse que la distancia entre centros debe ser mayor a la suma de los radios de los discos, catarinas.

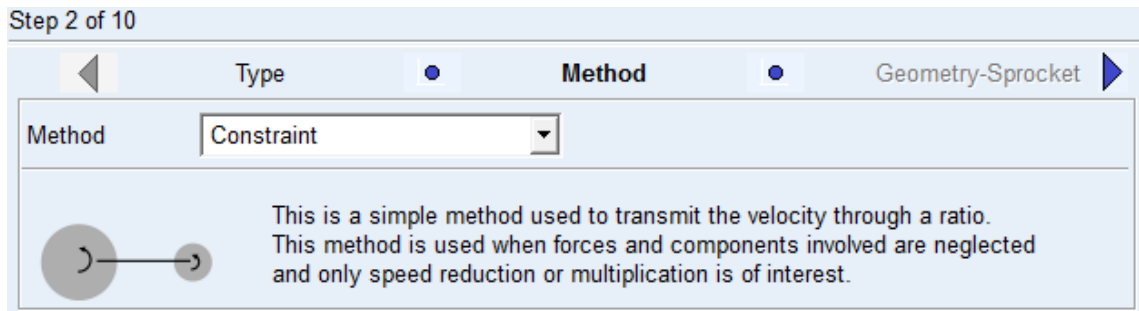
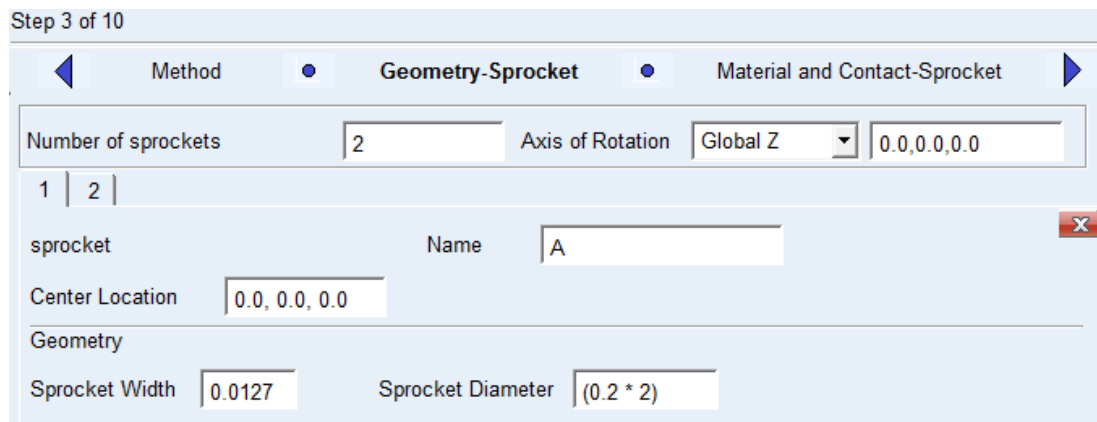
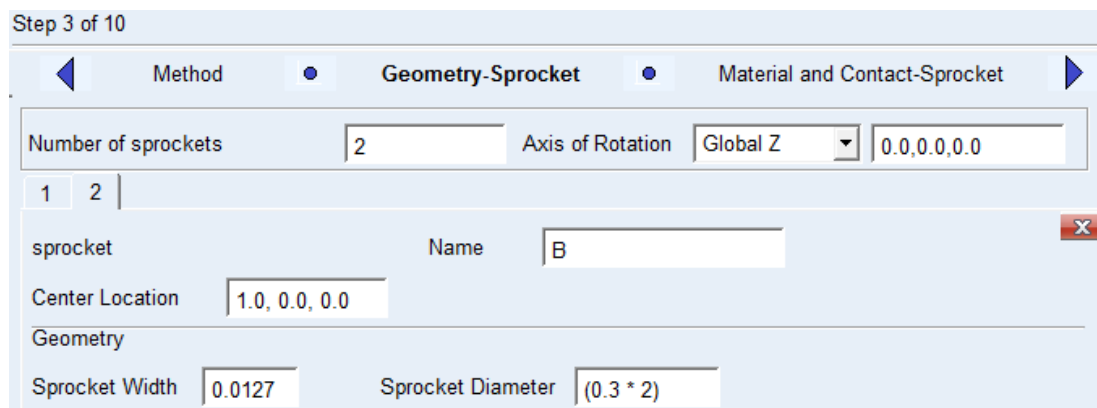


Figura 4.56: Método de análisis empleado por Adams[©].



(a) Propiedades geométricas de la catarina *A*



(b) Propiedades geométricas de la catarina *B*

Figura 4.57: Propiedades geométricas de las catarinas *A* y *B*.

Los parámetros inerciales de los discos, catarinas, A y B , se presentan en la figuras 4.58 y 4.59. Debe notarse que los datos más importantes son las masas de los discos, catarinas, y los momentos de inercia de los discos respecto al eje z que pasa por el centro de cada una de las catarinas. Estos valores deben corresponden a los empleados en la solución analítica del problema. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco, sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .

Step 4 of 10

Geometry-Sprocket | **Material and Contact-Sprocket** | Connection-Sprocket

1 | 2 |

Define Mass By: User Input

Mass: (2kg)

lxx: 2.0E-002 Off-Diagonal Terms

lyy: 2.0E-002

lzz: 4.0E-002

Figura 4.58: Propiedades inerciales de la catarina A .

Step 4 of 10

Geometry-Sprocket | **Material and Contact-Sprocket** | Connection-Sprocket

1 | 2 |

Define Mass By: User Input

Mass: (4kg)

lxx: 9.0E-002 Off-Diagonal Terms

lyy: 9.0E-002

lzz: 0.18

Figura 4.59: Propiedades inerciales de la catarina B .

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 0.5 segundos, con un número de pasos de 1000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 4.72. La selección del tiempo es arbitraria y en muchos casos sólo el tiempo inicial es de interés, sin embargo, en este caso la solución es válida para todo tiempo; es decir para $t \geq 0$. Por otro lado, la selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

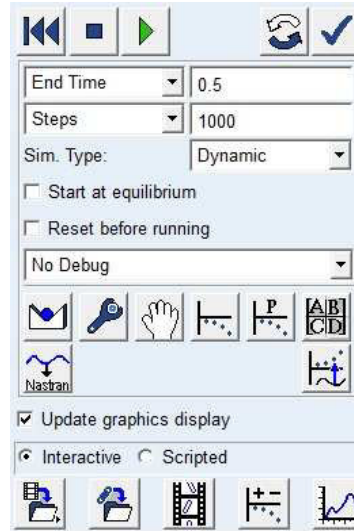


Figura 4.60: Parámetros de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse al post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 4.61 y 4.62. Debe notarse que se solicita las aceleraciones angulares de las catarinas en la dirección del eje z . Evidentemente, si hay otras variables de interés, pueden solicitarse.

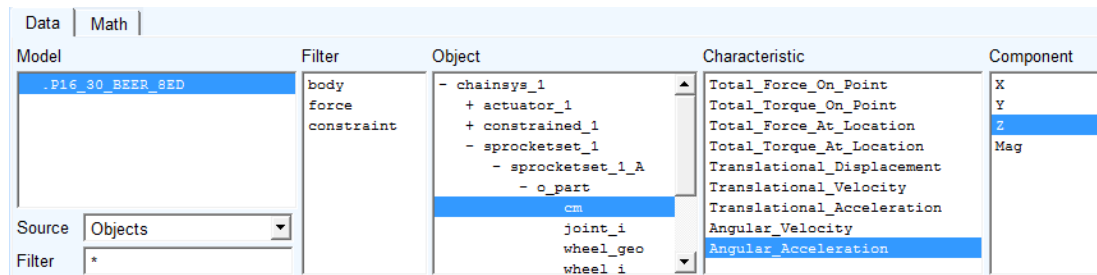


Figura 4.61: Solicitud de la aceleración angular de la catarina A.

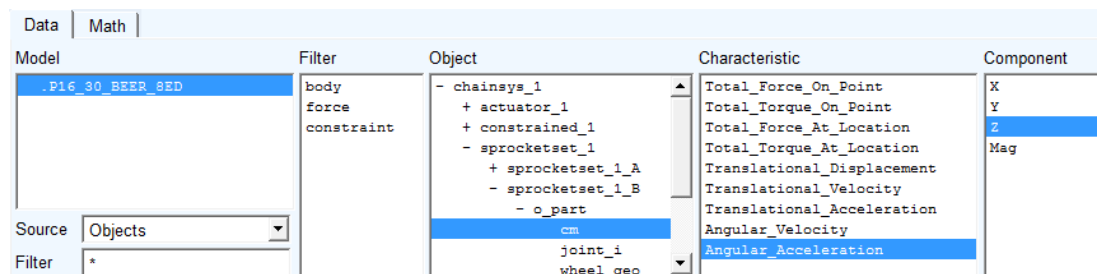


Figura 4.62: Solicitud de la aceleración angular de la catarina B.

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©] se muestran en la figura 4.63.

Como ya se mencionó, las aceleraciones angulares se mantienen constantes a lo largo de toda la simulación, para este problema.

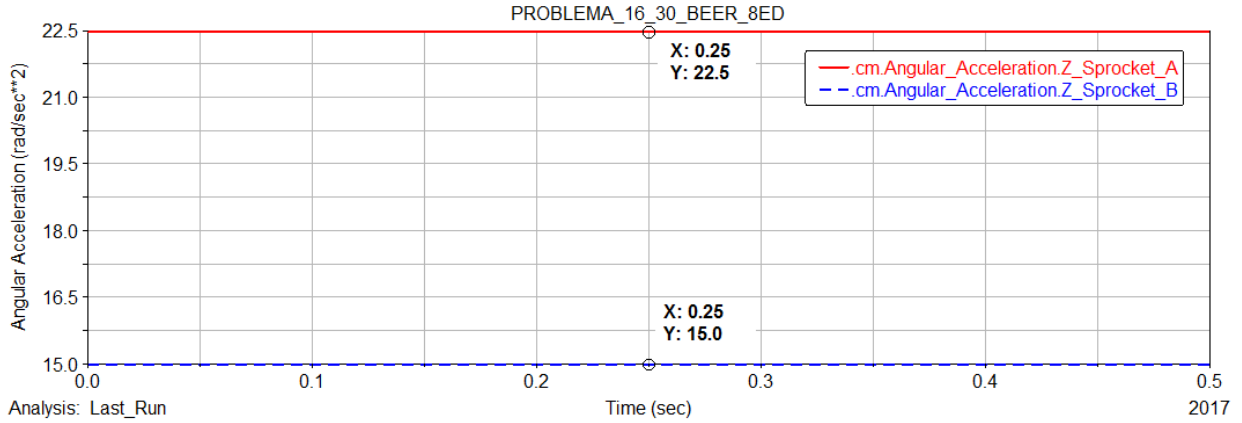


Figura 4.63: Resultados de las aceleraciones angulares.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

La Tabla 4.5 compara los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación. En este caso, se puede observar que los resultados son idénticos para todo el intervalo de la simulación, pues las aceleraciones angulares en este problema son constantes. Como ya se indicó previamente, en muchos otros casos, el único valor que puede compararse es el correspondiente al tiempo inicial de simulación.

Tabla 4.5: Comparación de resultados. 5.º problema de cadenas y catarinas.

Variable	Resultados analíticos	Resultados Adams [©]
α_A	22.5 rad/s^2 ○	22.5 rad/s^2 ○
α_B	15.0 rad/s^2 ○	15.0 rad/s^2 ○

4.6. Sexto problema de sistemas de cadenas y catarinas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 19-19 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 514.

Problema 6. El volante A tiene una masa de 30 kg y un radio de giro de $k_C = 95 \text{ mm}$. El disco B tiene una masa de 25 kg , está apoyado en D por medio de un pasador y está acoplado al volante por una banda, la cual está sometida a una tensión de modo que no se deslicen las superficies de contacto. Si un motor proporciona un par de torsión $M = (12t) \text{ N}\cdot\text{m}$ al volante en sentido contrario al de las manecillas de reloj, donde t está en segundos, determine la velocidad angular del disco 3 s después de que se enciende el motor. Inicialmente, el volante está en reposo. Las dimensiones de la polea y el disco están dadas por $r_A = r_B = 125 \text{ mm}$.

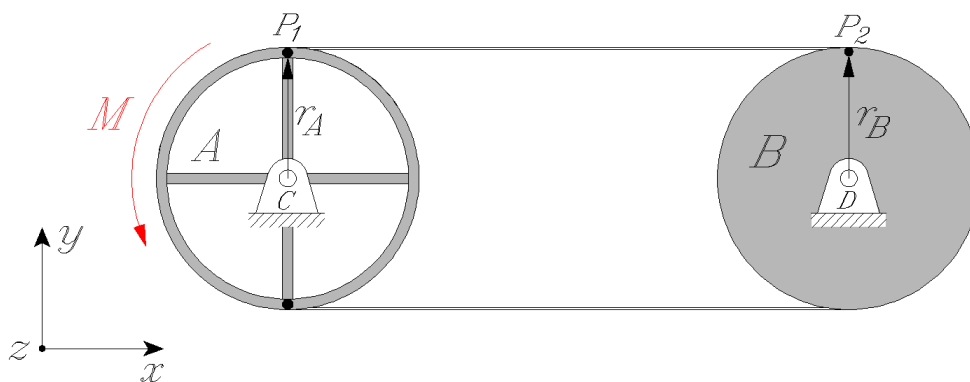


Figura 4.64: Modelo del problema 19-19 Hibbeler [18].

4.6.1. Solución analítica.

Puesto que no existe deslizamiento entre la banda, el volante A y el disco B, las velocidades y las componentes tangenciales de las aceleraciones en el punto P_1 en el volante A y en el punto P_2 en el disco B, son iguales. A partir de este resultado se obtienen dos relaciones: la primera, entre las velocidades angulares de ambas poleas en función de sus radios; la segunda, entre las aceleraciones angulares de ambas poleas en función de sus radios, vea la figura 5.60 y las ecuaciones (4.23) y (4.24).

Las velocidades en los puntos P_1 y P_2 , como parte del volante A y el disco B, resultan:

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/C} = \omega_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = -\omega_A r_A \hat{i} = \vec{v}_{A_{P_1}} = \vec{v}_{B_{P_2}} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_2/D} = \omega_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = -\omega_B r_B \hat{i}$$

Por lo que:

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \text{de manera que} \quad \omega_A = \frac{r_B}{r_A} \omega_B \quad (4.23)$$

Las aceleraciones en los puntos P_1 y P_2 , como parte del volante A y el disco B, resultan:

$$\vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/C} = \alpha_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = -\alpha_A r_A \hat{i} = \vec{a}_{tA_{P_1}} = \vec{a}_{tB_{P_2}} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_2/D} = \alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = -\alpha_B r_B \hat{i}$$

Por consiguiente:

$$r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{tal que} \quad \alpha_B = \frac{r_A}{r_B} \alpha_A \quad (4.24)$$

Con este resultado termina la parte cinemática del problema.

Para la cinética del sistema, es necesario dibujar y analizar los diagramas de cuerpo libre, tanto del volante A como del disco B . Aplicando la ecuación de Euler a cada uno de los discos se encuentran expresiones para las aceleraciones angulares de ambos discos, vea la figura 4.65.³

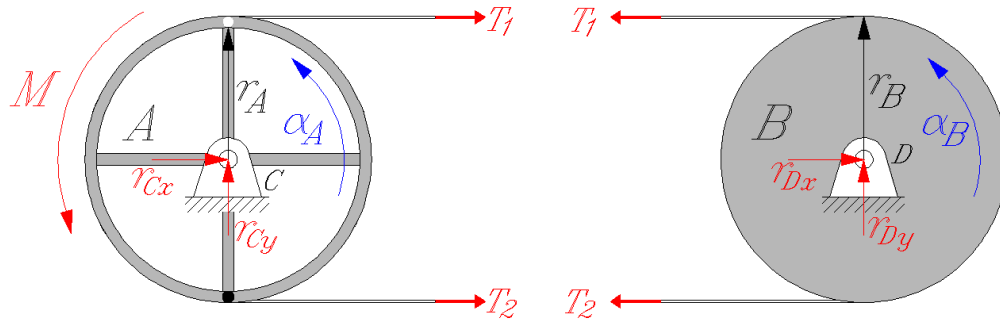


Figura 4.65: Diagramas de cuerpo libre del volante A y el disco B .

De la suma de momentos con respecto al punto C en el volante A , resulta:

$$\Sigma M_C = I_C \alpha_A \quad \text{tal que} \quad r_A (T_2 - T_1) + M = I_C \alpha_A$$

De manera que:

$$T_2 - T_1 = \frac{I_C \alpha_A - M}{r_A} \quad (4.25)$$

De la suma de momentos con respecto al punto D en el disco B , resulta:

$$\Sigma M_D = I_D \alpha_B \quad \text{donde} \quad r_B (T_1 - T_2) = I_D \alpha_B$$

Por lo que:

$$T_2 - T_1 = -\frac{I_D \alpha_B}{r_B} \quad (4.26)$$

Igualando las ecuaciones (4.25) y (4.26) se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{I_C \alpha_A - M}{r_A} = -\frac{I_D \alpha_B}{r_B} \quad \text{o} \quad \frac{I_C \alpha_A}{r_A} + \frac{I_D \alpha_B}{r_B} = \frac{M}{r_A}$$

y de esta relación se obtiene una ecuación que relaciona las aceleraciones angulares de los discos con el momento aplicado al disco A dada por:

$$I_C \alpha_A + I_D \alpha_B \frac{r_A}{r_B} = M \quad (4.27)$$

³Debe notarse que no es necesario emplear las ecuaciones de Newton, pues los discos están sujetos a rotación alrededor de un eje fijo baricéntrico, de manera que esas ecuaciones únicamente permiten determinar las reacciones en los cojinetes C y D que no son de interés.

Sustituyendo la ecuación (4.24) en la ecuación (4.27), se obtiene una relación que expresa el momento M en función de la aceleración angular α_A y los momentos de inercia del volante A y el disco B , tal como:

$$I_C \alpha_A + I_D \alpha_A \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 = M$$

Despejando α_A , se obtiene:

$$\alpha_A = \frac{M}{I_C + I_D \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2} \quad (4.28)$$

Se sabe que los momentos de inercia del volante A y del disco B están definidos como:

$$\begin{aligned} I_C &= m_A k_C^2 = (30 \text{ kg}) (0.095 \text{ m})^2 = 0.27075 \text{ kg} - \text{m}^2 \\ I_D &= \frac{m_B r_B^2}{2} = \frac{(25 \text{ kg})(0.125 \text{ m})^2}{2} = 0.1953125 \text{ kg} - \text{m}^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4.28) se obtiene el valor de la aceleración angular del volante A en función del tiempo.

$$\alpha_A(t) = \frac{12t}{0.27075 + 0.1953125(1)} \frac{N - m}{\text{kg} - \text{m}^2} = 25.74762 t \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \circlearrowleft \quad (4.29)$$

La aceleración angular del volante A al transcurrir 3 segundos, resulta:

$$\alpha_A(3 \text{ s}) = 25.74762 (3) = 77.24286 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \circlearrowleft$$

Para obtener la velocidad angular ω_A , se integra la ecuación (4.29) desde un valor de tiempo igual a cero, hasta un tiempo igual a t .

$$\omega_A(t) - \omega_A(0) = \int_0^t 25.74762 t dt \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Se sabe, que para un tiempo $t = 0$, $\omega_A(0) = 0$, por lo que la velocidad angular ω_A resulta:

$$\omega_A(t) = 25.74762 \left(\frac{t^2}{2} \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \circlearrowleft$$

La velocidad angular del volante A , después de transcurrir 3 segundos, resulta:

$$\omega_A(3 \text{ s}) = 25.74762 \left(\frac{3^2}{2} \right) = 115.85965 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \circlearrowleft$$

Se sabe que la velocidad angular del volante A es la misma que la velocidad angular del disco B , ya que los radios son iguales, por lo que:

$$\omega_B = 115.85965 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \circlearrowleft$$

4.6.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de cadenas y catarinas dentro del módulo de **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección no se discute la selección de los parámetros geométricos de la cadena y la catarina. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.3 y 2.3.3, en las páginas 14 y 17 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de cadena se emplea una opción de suma importancia denominada “**Constraint**”. Esta opción se emplea cuando únicamente se desea analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante. Al seleccionar este tipo de análisis simplificado, Adams[©] desprecia los componentes y eslabones de la cadena; así mismo, las fuerzas involucradas en el sistema. Por esa razón se puede usar cadenas y catarinas cuando el problema indica que la transmisión se realiza mediante una banda.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 19-19 se muestra en la figura 4.66.

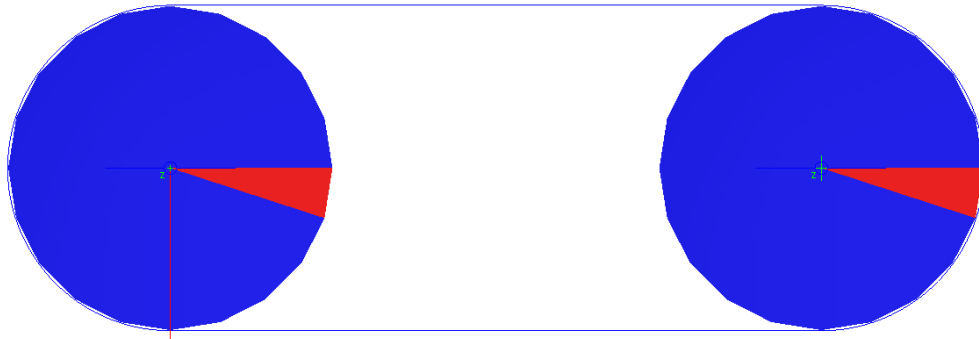


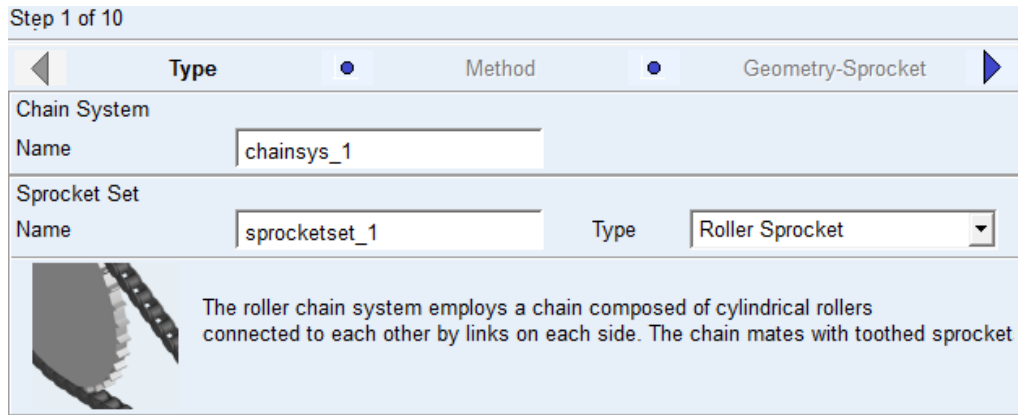
Figura 4.66: Modelo del problema en Adams[©].

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, las unidades empleadas en este problema se muestran en la figura 4.67.

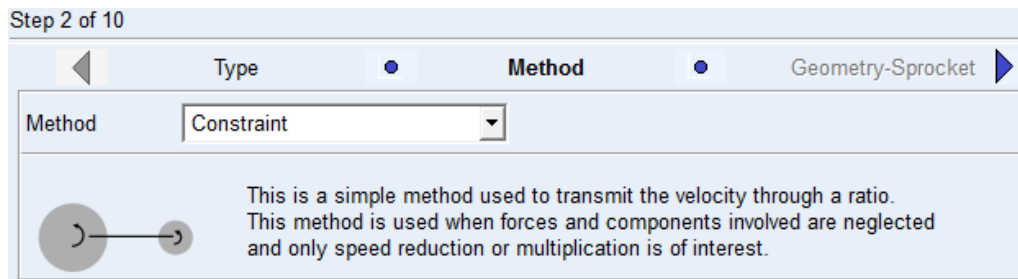
Length	Millimeter
Mass	Kilogram
Force	Newton
Time	Second
Angle	Radian
Frequency	Hertz

Figura 4.67: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

El tipo de cadena es el mismo para ambas catarinas, vea la figura 4.68(a). Como puede observarse, se seleccionó una cadena de rodillos con su respectiva catarina. Por otro lado, la figura 4.68(b) muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema. Es importante mencionar que el método de análisis empleado es el denominado “**Constraint**”, el cual únicamente la transmisión, reducción o amplificación, de velocidades es de interés.



(a) Tipo de cadena empleado por Adams[©]



(b) Método de análisis empleado por Adams[©]

Figura 4.68: Tipo de cadena y método de análisis empleado por Adams[©].

El diámetro de ambos discos, catarinas, son iguales. Por esta razón, únicamente se muestran los parámetros geométricos de la catarina A, vea la figura 4.69.

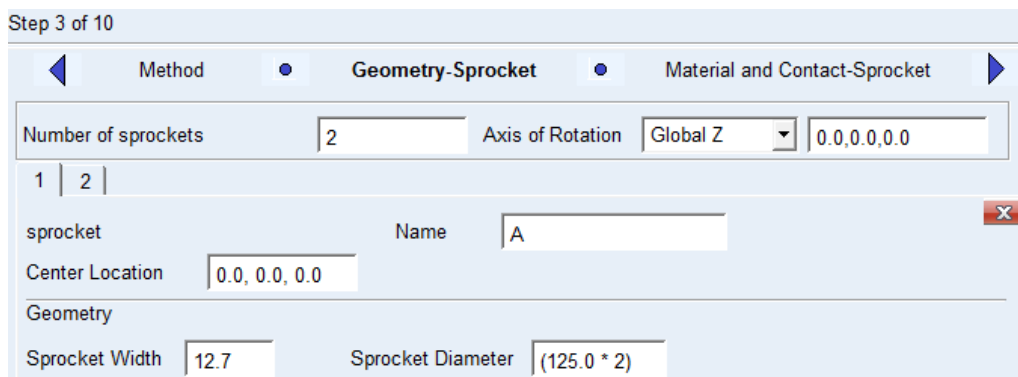


Figura 4.69: Propiedades geométricas de la catarina A.

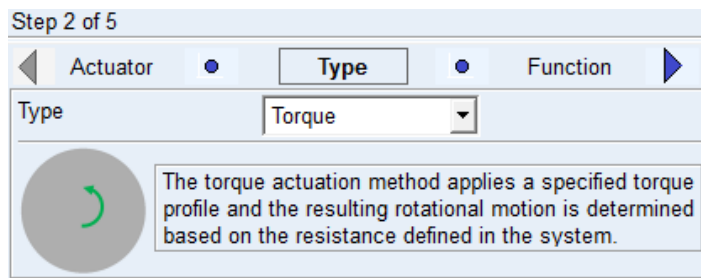
Los parámetros inerciales de los discos, catarinas, A y B , se presentan en la figura 4.70. Debe notarse que los datos más importantes son las masas de los discos, catarinas, y los momentos de inercia de los discos, catarinas, respecto al eje z que pasa por el centro de cada una de las catarinas. Estos valores deben corresponder a los empleados en la solución analítica del problema. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .

(a) Propiedades inerciales de la catarina A

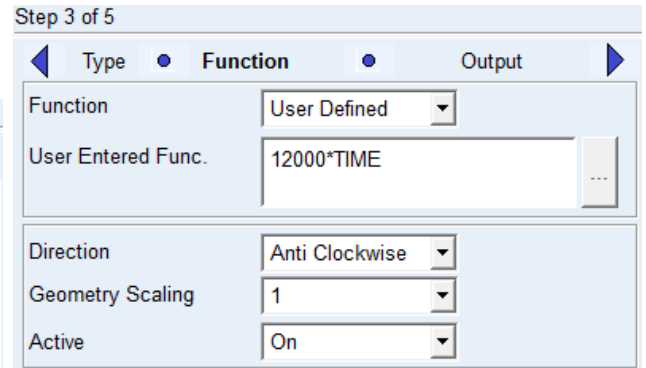
(b) Propiedades inerciales de la catarina B

Figura 4.70: Propiedades inerciales de las catarinas A y B .

Para aplicar torque a la catarina A , es necesario emplear un actuador en Adams[®]/Machinery, vea la figura 4.71. El actuador aplica un torque cuya magnitud es de $12000t$ s. Debe recordarse que la unidad de longitud seleccionada son los milímetros, y la unidad de fuerza está en Newtons; de modo que, el torque aplicado sobre la catarina A es igual a $12000t$ N – mm.



(a) Tipo de actuador



(b) Parámetros de la función que define el torque aplicado a la catarina A

Figura 4.71: Tipo de actuador y torque aplicado a la catarina A.

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 3 segundos, con un número de pasos de 1000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 4.72. Por otro lado, la selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se deseé y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

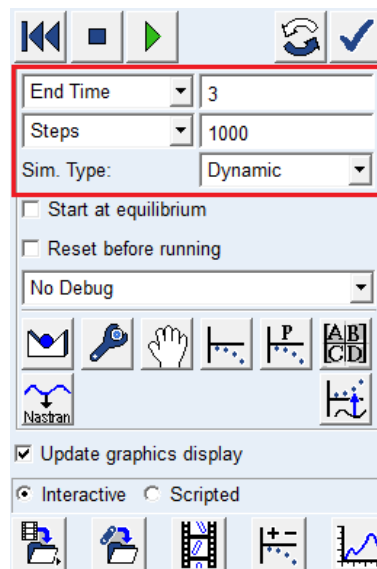


Figura 4.72: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse al post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 4.73, 4.74, 4.75 y 4.76. Debe notarse que se solicitan las aceleraciones y velocidades angulares de las catarinas en la dirección del eje z. Evidentemente, si hay otras variables de interés, pueden igualmente solicitarse.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_19_HIBBELER_12ED	body force constraint	- chainsys_1 + actuator_1 + constrained_1 - sprocketset_1 - sprocketset_1_A - o_part cm joint_i wheel_geo wheel_i	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag

Source: Objects
Filter: *

Figura 4.73: Solicitud de la aceleración angular de la catarina A.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_19_HIBBELER_12ED	body force constraint	- chainsys_1 + actuator_1 + constrained_1 - sprocketset_1 + sprocketset_1_A - sprocketset_1_B - o_part cm joint_i wheel_geo	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag

Source: Objects
Filter: *

Figura 4.74: Solicitud de la aceleración angular de la catarina B.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_19_HIBBELER_12ED	body force constraint	- chainsys_1 + actuator_1 + constrained_1 - sprocketset_1 - sprocketset_1_A - o_part cm joint_i wheel_geo wheel_i	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag

Source: Objects
Filter: *

Figura 4.75: Solicitud de la velocidad angular de la catarina A.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_19_HIBBELER_12ED	body force constraint	- chainsys_1 + actuator_1 + constrained_1 - sprocketset_1 + sprocketset_1_A - sprocketset_1_B - o_part cm joint_i wheel_geo	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag

Source: Objects
Filter: *

Figura 4.76: Solicitud de la velocidad angular de la catarina B.

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©] se muestran en las figuras 4.77 y 4.78.

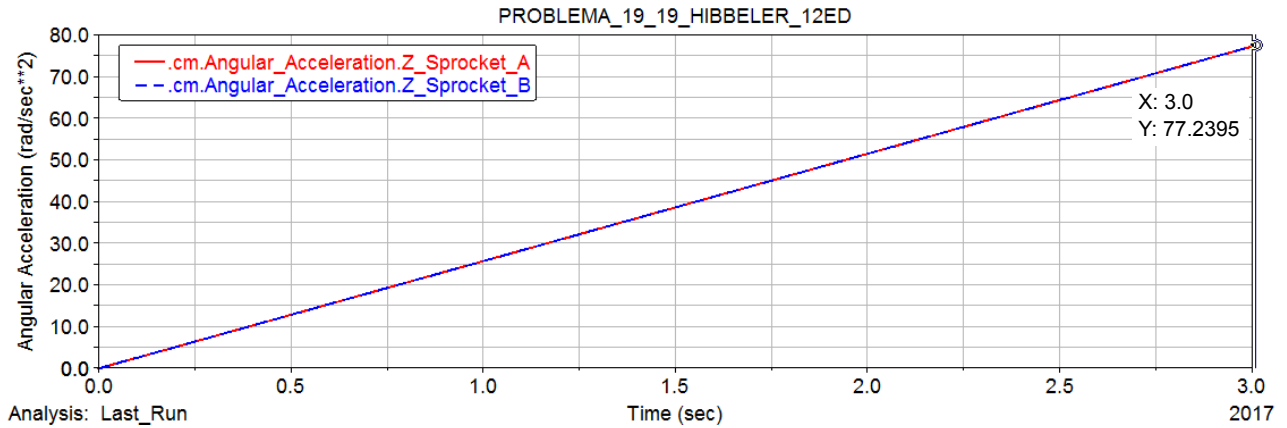


Figura 4.77: Resultado de la aceleración angular de la catarina A.

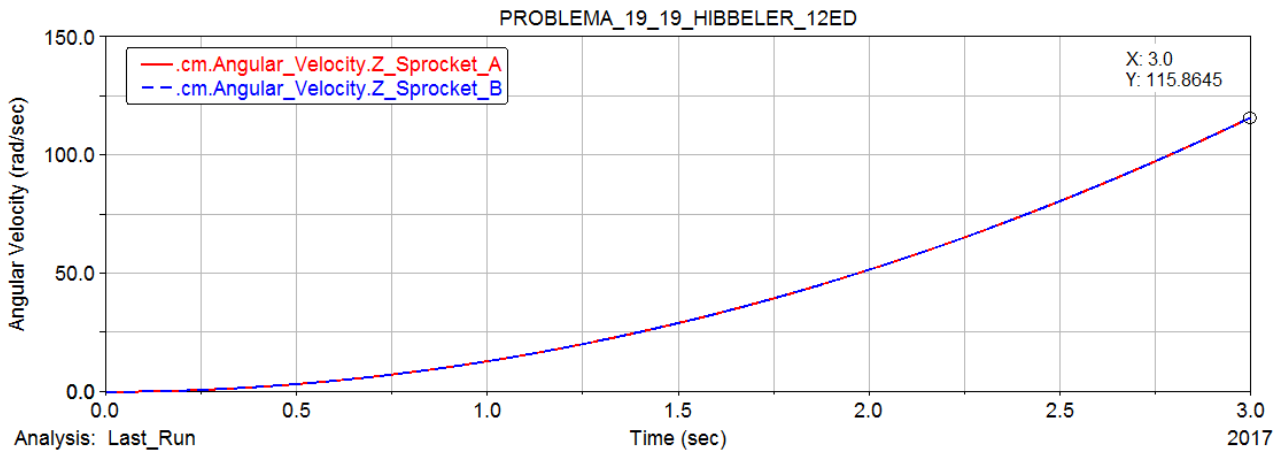


Figura 4.78: Resultado de la velocidad angular de la catarina A.

Como se observa en las figuras 4.77 y 4.78, las velocidades angulares y las aceleraciones angulares del volante A y del disco B, son iguales. Esto es debido a que ambos cuerpos tienen las mismas dimensiones, $r_A = r_B$, vea las ecuaciones (4.23) y (4.24).

Por otro lado, el usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

La Tabla 4.6 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 4.6: Comparación de resultados. 6.º problema de cadenas y catarinas.

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
$\alpha_A _{t=3s}$	$77.24286 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$	$77.2395 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$
$\alpha_B _{t=3s}$	$77.24286 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$	$77.2395 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$
$\omega_A _{t=3s}$	$115.85965 \text{ rad/s} \circlearrowleft$	$115.8645 \text{ rad/s} \circlearrowleft$
$\omega_B _{t=3s}$	$115.85965 \text{ rad/s} \circlearrowleft$	$115.8645 \text{ rad/s} \circlearrowleft$

4.7. Séptimo problema de sistemas de cadenas y catarinas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 19-20 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 514.

Problema 7. El volante A de 30 lb tiene un radio de giro con respecto a su centro de $k_A = 4 \text{ in}$. El disco B pesa 50 lb y está acoplado al volante por medio de una banda que no se desliza en sus superficies de contacto. Si un motor proporciona un par de torsión en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $M = (50t) \text{ lbf-ft}$, donde t está en segundos, determine el tiempo requerido para que el disco B alcance una velocidad angular de 60 rad/s a partir del reposo. Donde: $r_A = 6 \text{ in}$, $r_B = 9 \text{ in}$ y $\omega_B = 60 \text{ rad/s}$.

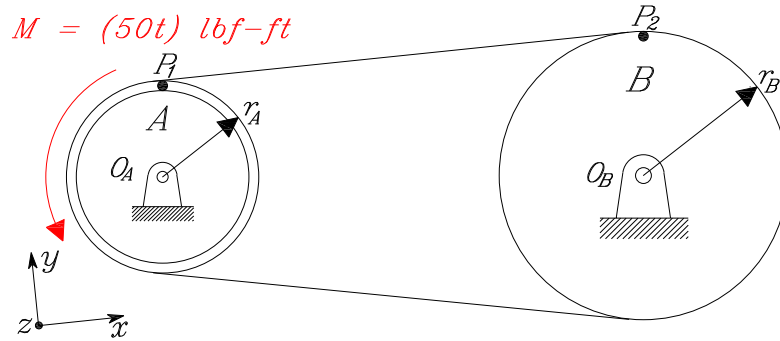


Figura 4.79: Modelo del problema 19-20 Hibbeler [18].

4.7.1. Solución analítica.

Puesto que no existe deslizamiento entre la banda y los discos, se tiene que las velocidades y componentes tangenciales de las aceleraciones del punto P_1 en el volante A y del punto P_2 en el disco B son iguales. A partir de este resultado se obtienen dos relaciones, la primera entre las velocidades angulares de ambas poleas en función de sus radios y la segunda entre las aceleraciones angulares de ambas poleas en función de sus radios, vea la figura 4.79 y las ecuaciones 4.30 y 4.31.

Las velocidades en los puntos P_1 y P_2 , como parte de los discos A y B , resultan:

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = \omega_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = -\omega_A r_A \hat{i} = v_{A_{P_1}} = v_{B_{P_2}} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = \omega_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = -\omega_B r_B \hat{i}$$

Por lo que:

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \text{tal que} \quad \omega_A = \frac{r_B}{r_A} \omega_B \quad (4.30)$$

Las aceleraciones en los puntos P_1 y P_2 , como parte de los discos A y B , resultan:

$$\vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = \alpha_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = -\alpha_A r_A \hat{i} = a_{tA_{P_1}} = a_{tB_{P_2}} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = \alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = -\alpha_B r_B \hat{i}$$

De manera que:

$$r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{tal que} \quad \alpha_A = \frac{r_B}{r_A} \alpha_B \quad (4.31)$$

Con este resultado termina la parte cinemática del problema.

A continuación, se obtienen los diagramas de cuerpo libre tanto de la polea A como la polea B . Aplicando la ley de conservación de la cantidad de movimiento angular y el principio de impulso, se puede encontrar una expresión del tiempo en función de las velocidades angulares, momentos de inercia y sus radios; vea la figura 4.65 y la ecuación (4.32).

Ecuación de impulso angular para un cuerpo rígido E con movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, respecto a un punto arbitrario O , vea la ecuación (4.32) y J.M. Rico [38].

$$I_E (\vec{\omega}_E)_1 + \sum_{F_{ext}}^E \left(\int_0^t M_E dt \right) = I_E (\vec{\omega}_E)_1 + \sum_{F_{ext}}^E \left(\int_0^t \vec{r}_{P/O} \times \vec{F}_{ext} dt \right) = I_E (\vec{\omega}_E)_2 \quad (4.32)$$

Analizando el diagrama de cuerpo libre del volante A , vea la figura 4.80, se tiene que, como el volante A parte del reposo, la velocidad angular inicial del volante A es igual a cero; de manera que, $I_{O_A} (\omega_A)_1 = 0$.

$$\int_0^t M dt + \int_0^t T_2 (r_A) dt - \int_0^t T_1 (r_A) dt = I_{O_A} (\omega_A)_2$$

Por lo que:

$$\int_0^t [T_2 - T_1] dt = \left[I_{O_A} (\omega_A)_2 - \int_0^t M dt \right] \left(\frac{1}{r_A} \right) \quad (4.33)$$

Analizando el diagrama de cuerpo libre del disco B , vea la figura 4.80, se tiene que, como el disco B parte del reposo, la velocidad angular inicial del disco B es igual a cero; de manera que, $I_{O_B} (\omega_B)_1 = 0$.

$$\int_0^t T_1 (r_B) dt - \int_0^t T_2 (r_B) dt = I_{O_B} (\omega_B)_2$$

Tal que:

$$\int_0^t [T_2 - T_1] dt = -\frac{I_{O_B} (\omega_B)_2}{r_B} \quad (4.34)$$

Igualando las ecuaciones (4.33) y (4.34), se obtiene:

$$\left(I_A (\omega_A)_2 - \int_0^t M dt \right) \frac{1}{r_A} = -\frac{I_B (\omega_B)_2}{r_B}$$

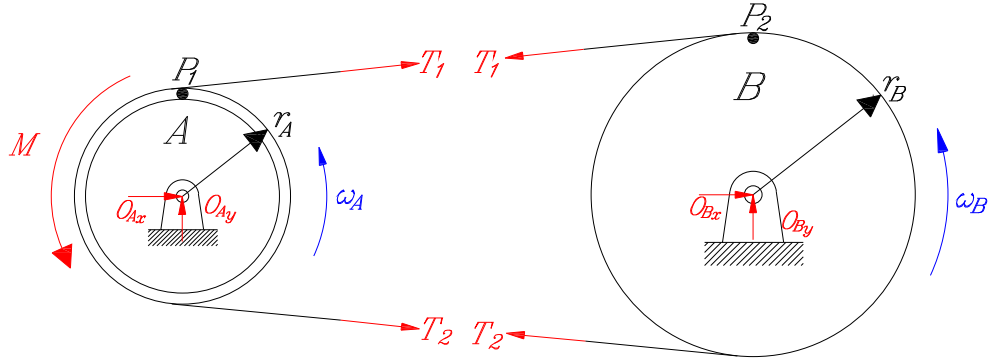


Figura 4.80: Diagrama de cuerpo libre del volante A y el disco B.

De manera que:

$$\int_0^t M dt = I_A (\omega_A)_2 + I_B (\omega_B)_2 \left(\frac{r_A}{r_B} \right) \quad (4.35)$$

Se sabe que los momentos de inercia de ambos discos están definidos como:

$$I_A = m_A k_A^2 = (30 \text{ lb}_f) \left(\frac{1}{32 \text{ ft/s}^2} \right) (4 \text{ in})^2 \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}} \right)^2 = 0.10351967 \text{ slug} - \text{ft}^2$$

$$I_B = \frac{m_B r_B^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{50}{32} \text{ slug} \right) \left(\frac{9}{12} \text{ ft} \right)^2 = 0.4367236 \text{ slug} - \text{ft}^2$$

La velocidad angular de la polea A, vea ecuación (4.30), cuando la polea B alcanza una velocidad angular de 60 rad/s , resulta:

$$\omega_A = \omega_B \frac{r_B}{r_A} = (60 \text{ rad/s}) \left(\frac{9 \text{ in}}{6 \text{ in}} \right) = 90 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \odot$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4.35), se obtiene:

$$\int_0^2 50 t \text{ lb}_f - \text{ft} = (0.10351967 \text{ slug} - \text{ft}^2) (90 \text{ rad/s}) + (0.4367236025 \text{ slug} - \text{ft}^2) (60 \text{ rad/s}) \left(\frac{6}{9} \right)$$

Integrando la parte izquierda de la ecuación y despejando la variable de tiempo, se obtiene:

$$25 t^2 = 26.78571428 \quad \text{de donde} \quad t = \sqrt{\frac{26.78571428}{25}} \text{ s} = 1.035098 \text{ s}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler, tanto al volante A como al disco B, se obtienen las expresiones para las aceleraciones angulares de ambos volantes, vea la figura 4.80.

De la suma de momentos con respecto al punto O_A en el volante A, resulta:

$$\Sigma M_{O_A} = I_{O_A} \alpha_A \quad \text{tal que} \quad r_A (T_2 - T_1) + M = I_{O_A} \alpha_A$$

De manera que:

$$T_2 - T_1 = \frac{I_{O_A} \alpha_A - M}{r_A} \quad (4.36)$$

De la suma de momentos con respecto al punto O_B en el disco B , resulta:

$$\Sigma M_{O_B} = I_{O_B} \alpha_B \quad \text{tal que} \quad r_B (T_1 - T_2) = I_{O_B} \alpha_B$$

De aquí que:

$$T_2 - T_1 = -\frac{I_{O_B} \alpha_B}{r_B} \quad (4.37)$$

Igualando las ecuaciones (4.36) y (4.37) se obtiene una relación igual a:

$$\frac{I_{O_A} \alpha_A - M}{r_A} = -\frac{I_{O_B} \alpha_B}{r_B} \quad \text{o} \quad \frac{I_{O_A} \alpha_A}{r_A} + \frac{I_{O_B} \alpha_B}{r_B} = \frac{M}{r_A}$$

y de allí una ecuación que relaciona las aceleraciones angulares de los discos con el momento aplicado al volante A . De manera que:

$$I_{O_A} \alpha_A + I_{O_B} \alpha_B \frac{r_A}{r_B} = M \quad (4.38)$$

Sustituyendo la ecuación (4.31) en la ecuación (4.38), se obtiene una relación en función de la aceleración angular α_A , y los momentos de inercia del volante A y el disco B . De manera que:

$$I_{O_A} \alpha_A + \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 I_{O_B} \alpha_A = M$$

Despejando α_A , se obtiene:

$$\alpha_A = \frac{M}{I_{O_A} + I_{O_B} \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2} \quad (4.39)$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4.39), se obtiene el valor de la aceleración angular del volante A en función del tiempo dada por:

$$\alpha_A(t) = \frac{50t}{0.2976190465 \text{ slug} - ft^2} \frac{lb_f - ft}{ft^2} = 167.9999999t \frac{rad}{s^2} \quad (4.40)$$

La aceleración angular del volante A al transcurrir 1.035098 segundos, está dada por:

$$\alpha_A(1.035098 \text{ s}) = 167.9999999(1.035098) = 173.8964639 \frac{rad}{s^2} \quad \odot$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4.31) se obtiene un valor de la aceleración angular del disco B igual a:

$$\alpha_B(1.035098 \text{ s}) = (173.8964639) \left(\frac{6 \text{ in}}{9 \text{ in}}\right) = 115.9309759 \text{ rad}/s^2 \quad \odot$$

4.7.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de cadenas y catarinas dentro del módulo de **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la cadena y la catarina. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en las secciones 2.3 y 2.3.3, en las páginas 14 y 17 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de cadena se emplea una opción de suma importancia denominada “**Constraint**”. Esta opción se emplea cuando únicamente se desea analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante. Al seleccionar este tipo de análisis simplificado, Adams[©] despreja los componentes y los eslabones de la cadena; así mismo, las fuerzas involucradas en el sistema. Por esa razón se puede usar cadenas y catarinas cuando el problema indica que la transmisión se realiza mediante una banda.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 19-20 se muestra en la figura 4.81.

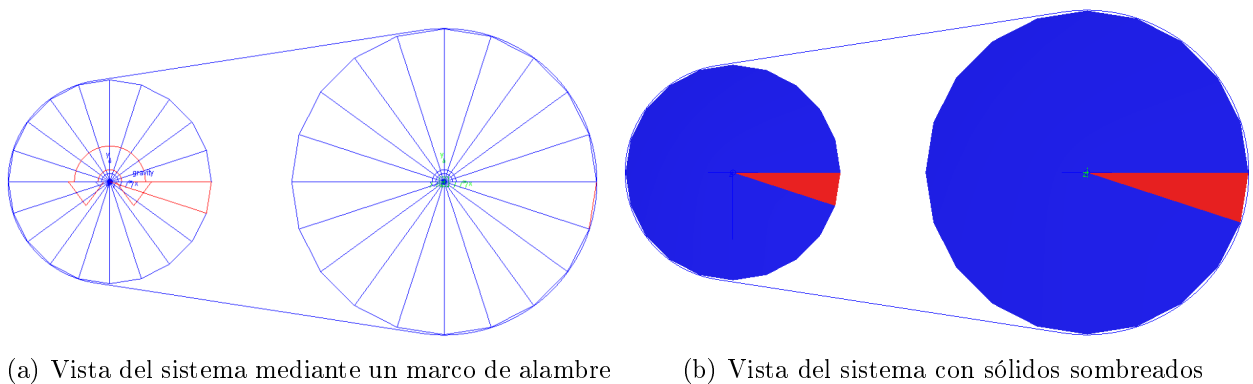


Figura 4.81: Modelo del problema en Adams[©].

La figura 4.82 muestra el tipo de cadena y de catarina empleada en el modelo. Como puede observarse, se seleccionó una cadena de rodillos con su catarina correspondiente.

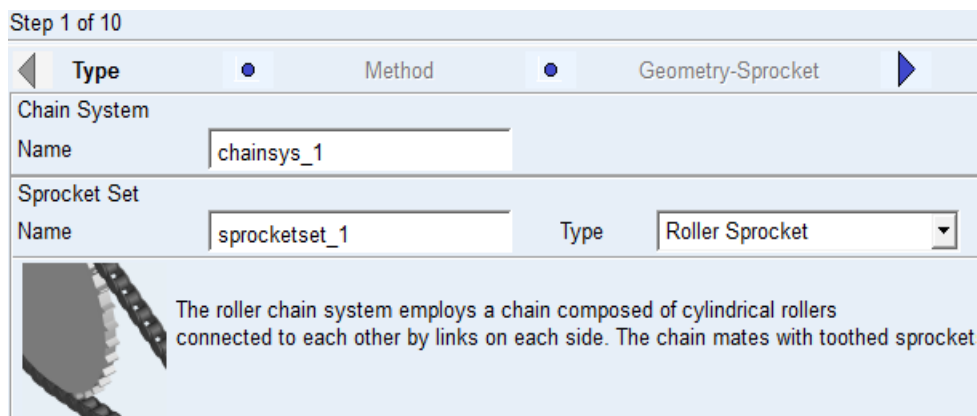


Figura 4.82: Tipo de cadena empleado por Adams[©], para las catarinas A y B.

La figura 4.83 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del modelo. Es importante mencionar que el método de análisis es el denominado “**Constraint**”, el cual únicamente la transmisión, reducción o amplificación, de velocidades es de interés.

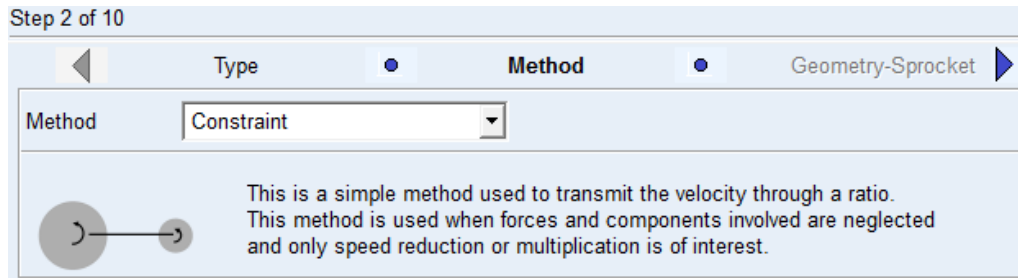


Figura 4.83: Método de análisis empleado por Adams[©].

Por otro lado, las unidades del modelo se describen en la figura 4.84, mientras que los parámetros geométricos del volante *A* y el disco *B*, considerados como catarinas, se presentan en las figuras 4.85 y 4.86.

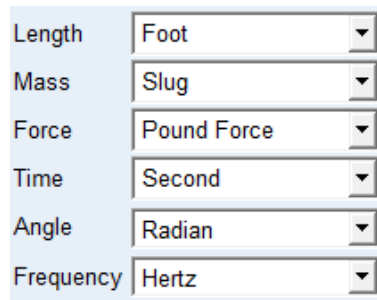


Figura 4.84: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

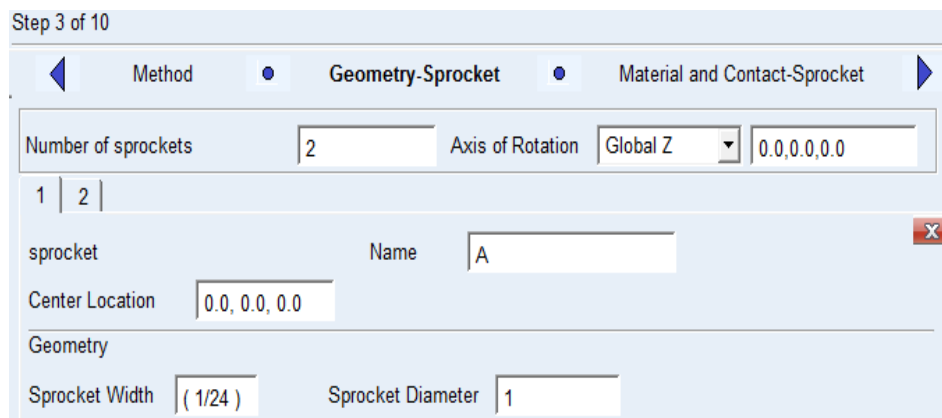


Figura 4.85: Propiedades geométricas de la catarina *A*.

El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios iguales a los indicados en el enunciado del problema. En este caso, debe notarse que la distancia entre centros debe ser mayor a la suma de los radios de los discos, catarinas.

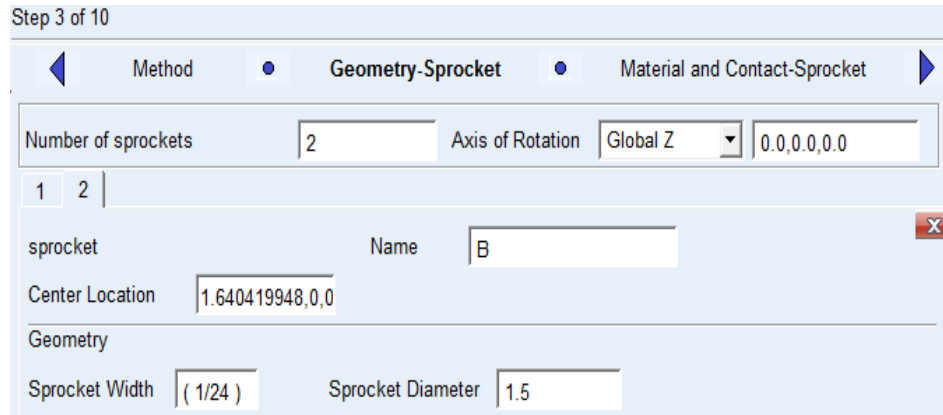


Figura 4.86: Propiedades geométricas de la catarina B .

Los parámetros inerciales de los discos, catarinas, A y B , se presentan en las figuras 4.87 y 4.88. Debe notarse que los datos más importantes son las masas y los momentos de inercia de los discos, catarinas, respecto al eje z y que pasa por el centro de cada una de las catarinas. Estos valores deben corresponder a los empleados en la solución analítica del problema. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco, sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .

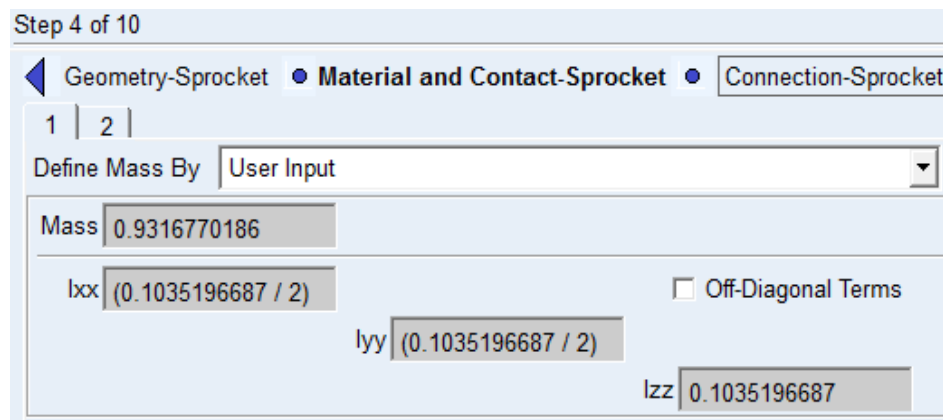


Figura 4.87: Propiedades inerciales de la catarina A

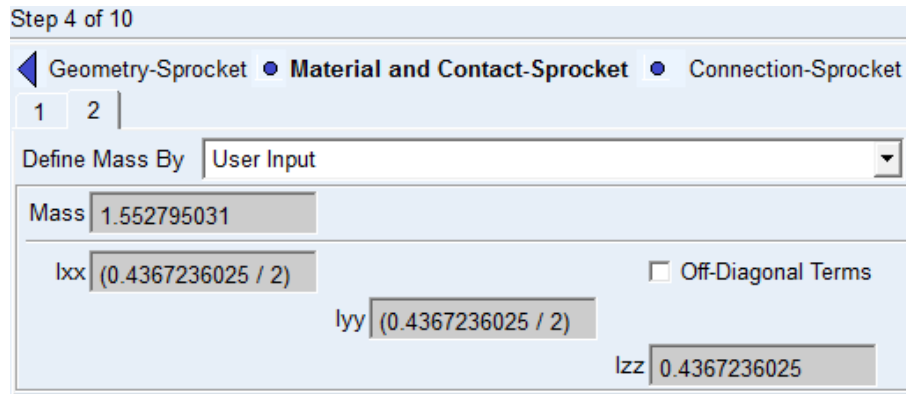
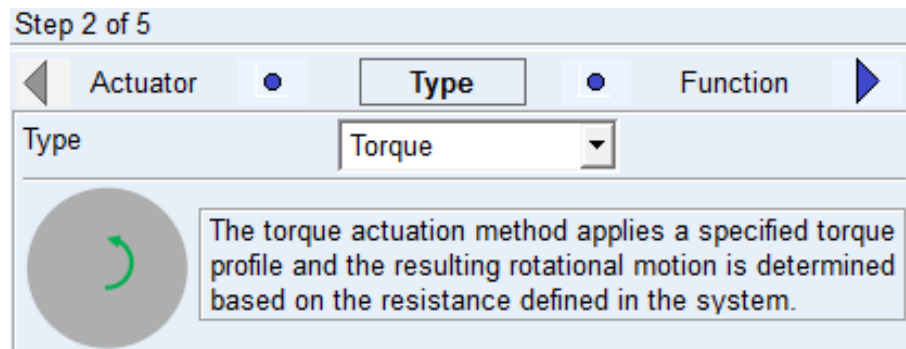
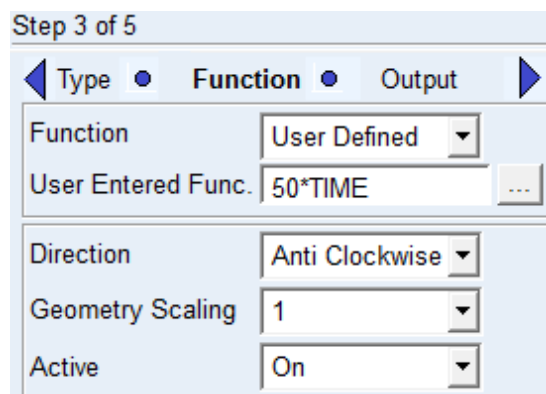


Figura 4.88: Propiedades inerciales de la catarina *B*

Para aplicar torque a la catarina *A*, es necesario emplear un actuador en Adams[®]/Machinery, vea las figuras 4.89(a) y 4.89(b). El actuador aplica un torque cuya magnitud es de $50t$. Debe recordarse que la unidad de longitud seleccionada son pies y la unidad de fuerza es libra fuerza, de modo que, el torque aplicado está dado por $50t\text{ lbf}\cdot\text{ft}$.



(a) Tipo de actuador



(b) Parámetros de movimiento de la catarina *A*

Figura 4.89: Tipo de actuador y parámetros de movimiento de la catarina *A*

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 2 segundos, con un número de pasos de 3000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 4.90. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

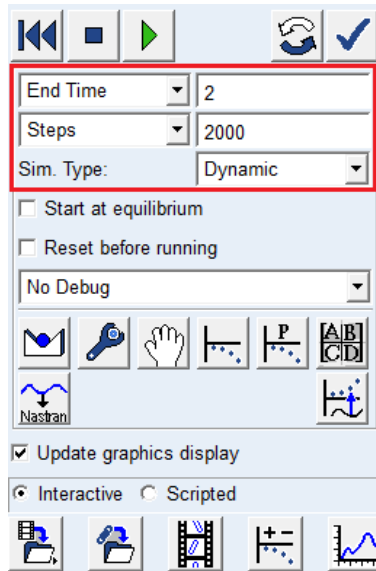


Figura 4.90: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 4.91 y 4.92.

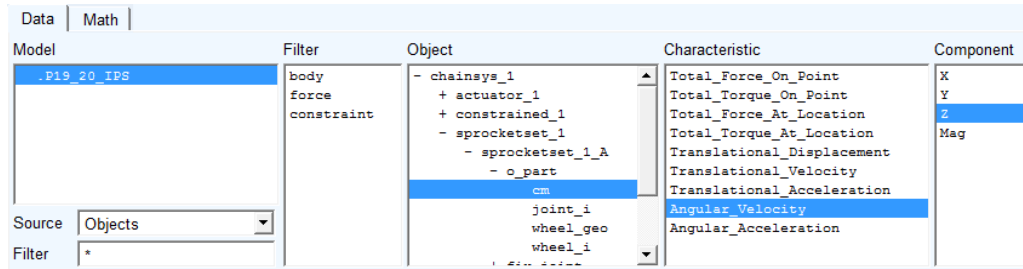
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_20_SI	body	- chainsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	+ constrained_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- sprocketset_1	Total_Force_At_Location	Z
		- sprocketset_1_A	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ sprocketset_1_B		

(a) Solicitud de la aceleración angular de la catarina A

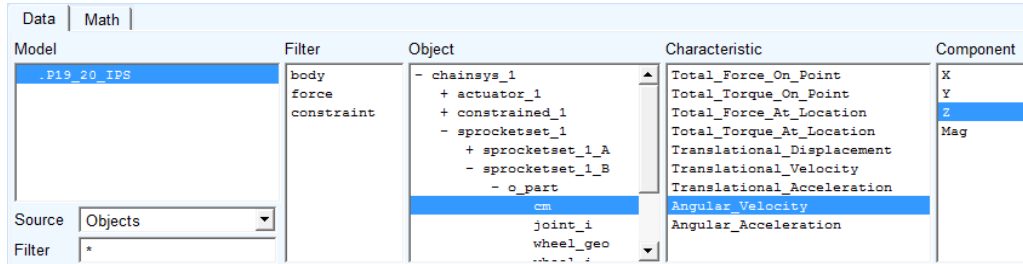
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_20_IPS	body	- chainsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	+ actuator_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ constrained_1	Total_Force_At_Location	Z
		- sprocketset_1	Total_Torque_At_Location	Mag
		+ sprocketset_1_A	Translational_Displacement	
		- sprocketset_1_B	Translational_Velocity	
		- o_part	Translational_Acceleration	
		cm	Angular_Velocity	
		joint_i	Angular_Acceleration	
		wheel_geo		
		wheel_i		

(b) Solicitud de la aceleración angular de la catarina B

Figura 4.92: Solicitud de las aceleraciones angulares de las catarinas A y B.



(a) Solicitud de la velocidad angular de la catarina A



(b) Solicitud de la velocidad angular de la catarina B

Figura 4.91: Solicitud de las velocidades angulares de las catarinas A y B.

Los resultados obtenidos por el programa Adams[®] se muestran en las figuras 4.93, 4.94 y 4.95.

Como ya se mencionó, las velocidades angulares varían a lo largo del tiempo y a lo largo de toda la simulación. Por consiguiente, los resultados que se observan en las figuras 4.93 y 4.94, están indicadas para un tiempo $t = 1.036$, que es el tiempo que la polea B tarda en llegar a una velocidad angular igual a 60 rad/s .

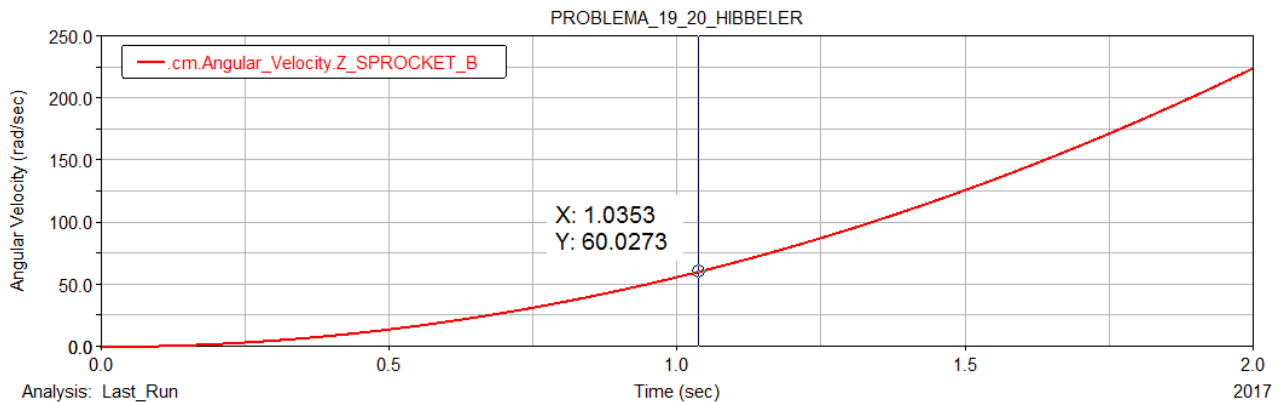


Figura 4.93: Resultado de la variable tiempo t cuando $\omega_B = 60 \text{ rad/s}$.

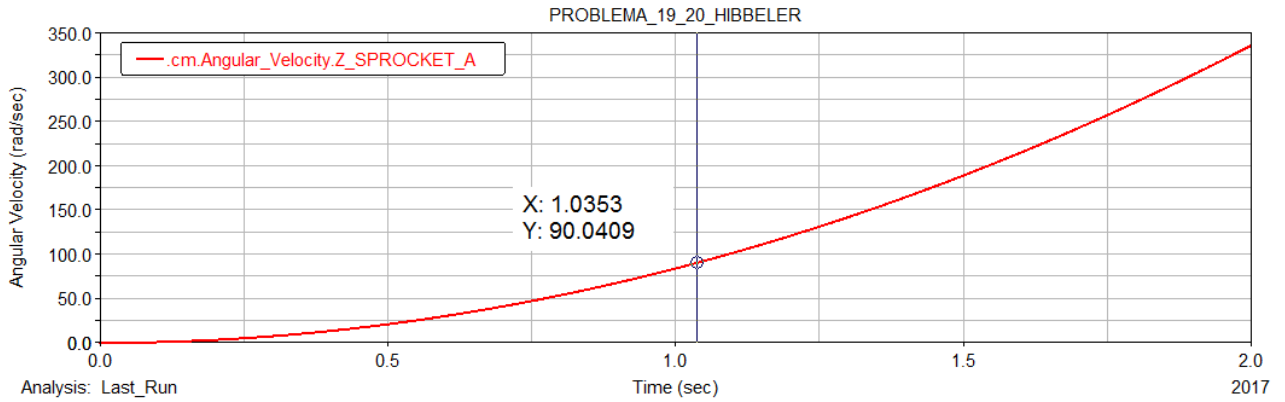


Figura 4.94: Velocidad angular ω_A cuando ω_B alcanza una velocidad angular de 60 rad/s .

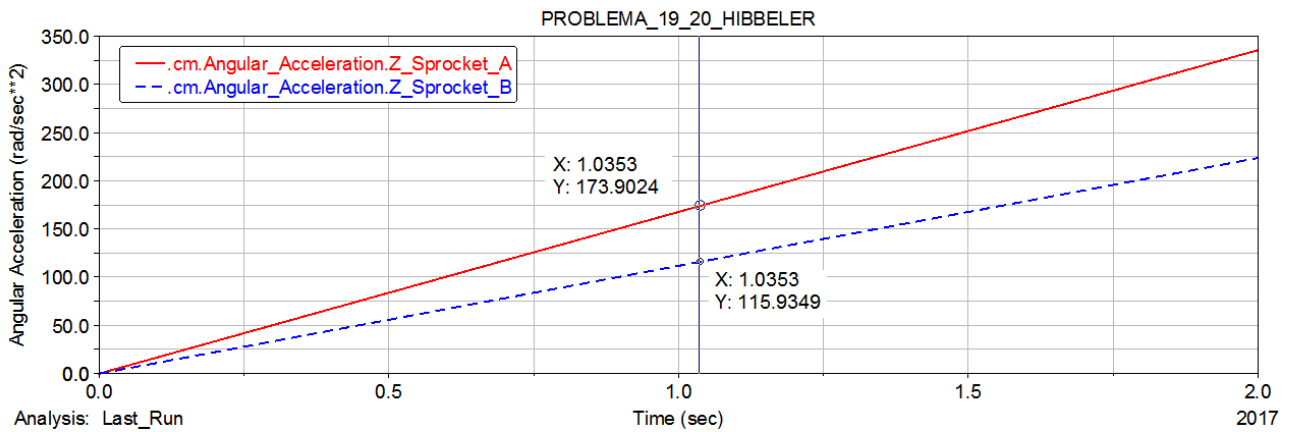


Figura 4.95: Aceleración angular α_A cuando ω_B alcanza una velocidad angular de 60 rad/s .

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Los resultados obtenidos mediante simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 4.7 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 4.7: Comparación de resultados. 7.º problema de cadenas y catarinas.

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
$\omega_A _{\omega_B=60\text{rad/s}}$	$90 \text{ rad/s} \odot$	$90.0409 \text{ rad/s} \odot$
$t _{\omega_B=60\text{rad/s}}$	1.035098 s	1.0353 s
$\alpha_A _{\omega_B=60\text{rad/s}}$	$173.8964639 \text{ rad/s}^2 \odot$	$173.9024 \text{ rad/s}^2 \odot$
$\alpha_B _{\omega_B=60\text{rad/s}}$	$115.9309759 \text{ rad/s}^2 \odot$	$115.9349 \text{ rad/s}^2 \odot$

Capítulo 5

Sistemas de bandas resueltos mediante Adams[©]/Machinery.

En este capítulo se presentan diferentes problemas que involucran sistemas de bandas y poleas, todos esos problemas se resolverán inicialmente mediante los métodos analíticos que se presentan en las unidades de aprendizaje correspondientes en las licenciaturas de ingeniería mecánica e ingeniería mecatrónica de la División de Ingenierías del Campus Irapuato-Salamanca de la Universidad de Guanajuato; posteriormente esos problemas se resuelven mediante la simulación del sistema empleando las herramientas del módulo Adams[©]/Machinery. Por la naturaleza del movimiento de las poleas, la totalidad de los problemas presentados en este capítulo pertenecen a la dinámica del cuerpo rígido.

5.1. Primer problema de sistemas de bandas y poleas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 15.23 del libro de Beer et al. [5], incluido en la página 929.

Problema: La lijadora de banda que se muestra inicialmente está en reposo. Si el tambor de accionamiento B tiene una aceleración angular constante de 120 rad/s^2 en sentido antihorario, determine la magnitud de la aceleración de la correa en el punto C cuando (a) $t = 0.5 \text{ s}$ y (b) $t = 2 \text{ s}$. Donde $r_A = r_B = 25 \text{ mm}$ y $\alpha_B = 120 \text{ rad/s}^2$.

5.1.1. Solución analítica

Puesto que ambas poleas están sujetas a un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo donde la aceleración es constante y además se sabe que el sistema parte del reposo para un tiempo $t = 0$, por lo que:

$$\omega_A = \omega_{A_0}^0 + \alpha_A t \quad \text{de manera que} \quad \omega_A = \alpha_A t \quad (5.1)$$

Además se sabe que no existe deslizamiento entre la banda y los discos, por lo que las velocidades y las componentes tangenciales de la aceleración del punto P_1 en la polea A y del punto P_2

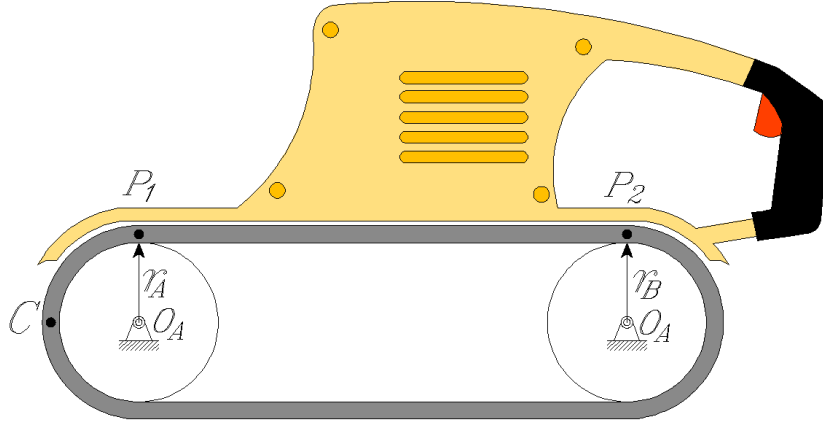


Figura 5.1: Modelo del problema 15.23 Beer et al. [5].

en la polea B son iguales. A partir de este resultado se obtienen dos relaciones: la primera, entre las velocidades angulares de ambas poleas en función de sus radios; la segunda entre las aceleraciones angulares de ambas poleas en función de sus radios, vea la figura 5.2 y las ecuaciones 5.2 y 5.3.

Las velocidades en los puntos P_1 y P_2 , como parte de las poleas A y B , resulta:

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = \omega_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = -\omega_A r_A \hat{i} = v_{A_{P_1}} = v_{B_{P_2}} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = \omega_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = -\omega_B r_B \hat{i}$$

De manera que:

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \text{tal que} \quad \omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A \quad (5.2)$$

Las aceleraciones en los puntos P_1 y P_2 , como parte de los discos A y B , resultan:

$$\vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = \alpha_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = -\alpha_A r_A \hat{i} = a_{tA_{P_1}} = a_{tB_{P_2}} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = \alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = -\alpha_B r_B \hat{i}$$

Por lo tanto:

$$r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{tal que} \quad \alpha_A = \frac{r_B}{r_A} \alpha_B \quad (5.3)$$

Análisis de aceleración.

De acuerdo con la figura 5.2, se sabe que:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{O_A} + \vec{a}_{c/O_A} - \omega_A^2 \vec{r}_{C/O_A}$$

De manera que:

$$\vec{a}_C = \alpha_A \hat{k} \times (-r_{C/O_A}) \hat{i} - \omega_A^2 (-r_{C/O_A}) \hat{i} \quad \text{tal que} \quad \vec{a}_C = -\alpha_A r_A \hat{j} + \omega_A^2 r_A \hat{i} \quad (5.4)$$

Se sabe que la aceleración angular de la polea B es igual a 120 rad/s^2 . Por lo que, sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (5.3), se obtiene un valor de α_A igual a:

$$\alpha_A = \left(\frac{0.025}{0.025} \right) 120 \text{ rad/s}^2 = 120 \text{ rad/s}^2$$

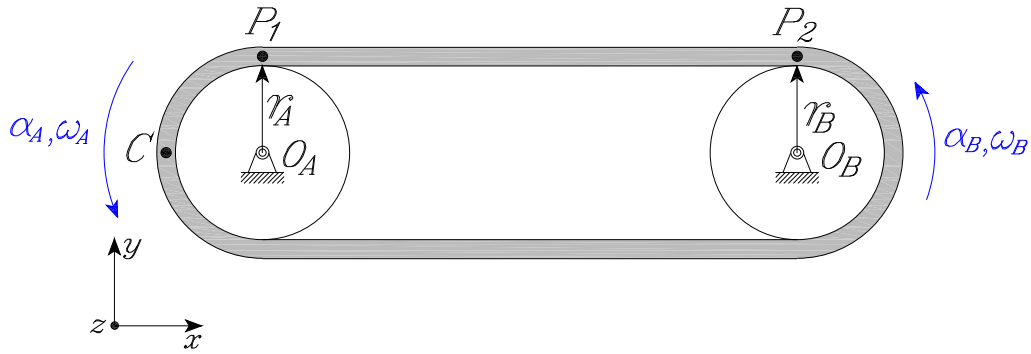


Figura 5.2: Diagrama cinemático del problema.

(a) Calcular la aceleración del punto C para un tiempo $t = 0.5s$. Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (5.1) se calcula un valor de la velocidad angular de la polea A de:

$$\omega_A = (120 \text{ rad/s}^2) (0.5s) = 60 \text{ rad/s}$$

Una vez obtenido el valor de la velocidad y aceleración angular de la polea A , se sustituyen todos los valores numéricos en la ecuación (5.4), para obtener el valor de la aceleración del punto C para un tiempo $t = 0.5s$, por lo que:

$$\vec{a}_C = - (120 \text{ rad/s}^2) (0.025m) \hat{j} + (60 \text{ rad/s})^2 (0.025m) \hat{i} \quad \text{tal que} \quad \vec{a}_C = -90\hat{i} + 3\hat{j} \text{ m/s}^2$$

De manera que, la magnitud de la aceleración en el punto C resulta:

$$|a_C| = \sqrt{90^2 + 3^2} \text{ m/s}^2 = 90.04998612 \text{ m/s}^2$$

(b) Calcular la aceleración del punto C para un tiempo $t = 2s$. Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (5.1), se calcula un valor de la velocidad angular de la polea A de:

$$\omega_A = (120 \text{ rad/s}^2) (2s) = 240 \text{ rad/s}$$

Una vez obtenido el valor de la velocidad y aceleración angular de la polea A , se sustituyen todos los valores numéricos en la ecuación (5.4), para obtener el valor de la aceleración del punto C para un tiempo $t = 2s$, por lo que:

$$\vec{a}_C = - (120 \text{ rad/s}^2) (0.025m) \hat{j} + (240 \text{ rad/s})^2 (0.025m) \hat{i} \quad \text{donde} \quad \vec{a}_C = -1440\hat{i} + 3\hat{j} \text{ m/s}^2$$

De manera que, la magnitud de la aceleración en el punto C resulta:

$$|a_C| = \sqrt{1440^2 + 3^2} \text{ m/s}^2 = 1440.003125 \text{ m/s}^2$$

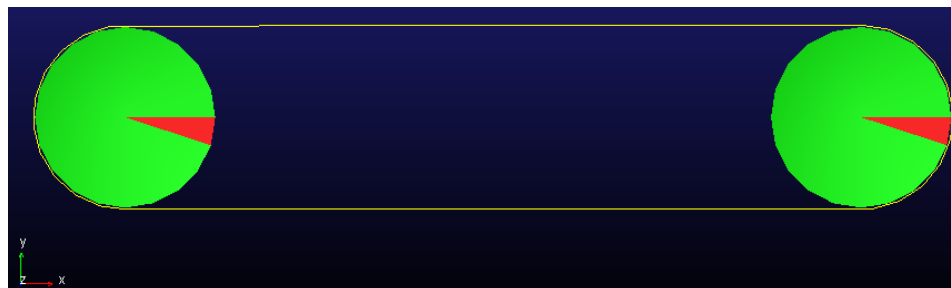
5.1.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de cadenas y catarinas dentro del módulo de **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección no se discute la selección de los parámetros geométricos de las poleas y la banda. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.1, en la página 8 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de bandas se emplea una opción de suma importancia denominada “**Constraint**”. Esta opción se emplea cuando únicamente se desea analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante. De acuerdo con Adams[©], este método se usa cuando las fuerzas y los componentes no son de importancia, y donde únicamente la reducción o multiplicación de velocidad es de interés. Por esa razón, tanto el módulo de bandas como el de cadenas y catarinas, se pueden utilizar cuando el problema indica que la transmisión se realiza mediante una banda.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 15-23 se muestra en la figura 5.3.



(a) Vista del sistema mediante un marco de alambre



(b) Vista del sistema con sólidos sombreados

Figura 5.3: Modelo del problema en Adams[©].

Las unidades del modelo se describen en la figura 5.4, mientras que la figura 5.5(a) muestra el tipo de polea que se seleccionó dentro del modelo. Como puede observarse se seleccionaron poleas del tipo poly-V.

Por otro lado, la figura 5.5(b), muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema. Este método simplificado sólo permite la transmisión, reducción o amplificación, de las velocidades de interés.

Length	Meter
Mass	Kilogram
Force	Newton
Time	Second
Angle	Radian
Frequency	Hertz

MMKS MKS CGS IPS

Figura 5.4: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Step 1 of 11

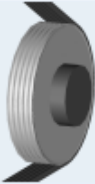
◀ Type • Method • Geometry-Pulleys

Belt System

Name

Pulley Set

Name Type



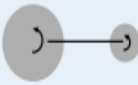
The poly-v grooved belt system employs a cord-reinforced belt which is grooved along its primary axis on one side, to mate with similarly grooved pulleys, and smooth on the other (back) side.

(a) Tipo de polea empleada

Step 2 of 11

◀ Type • Method • Geometry-Pulleys ▶

Method

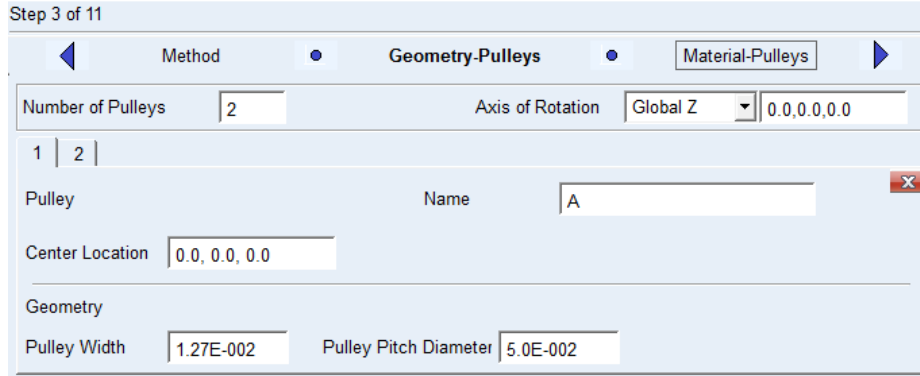


This is a simple method used to transmit the velocity through a ratio. This method is used when forces and components involved are neglected and only speed reduction or multiplication is of interest. Because it is an ideal model the pulleys are represented only as simple disks.

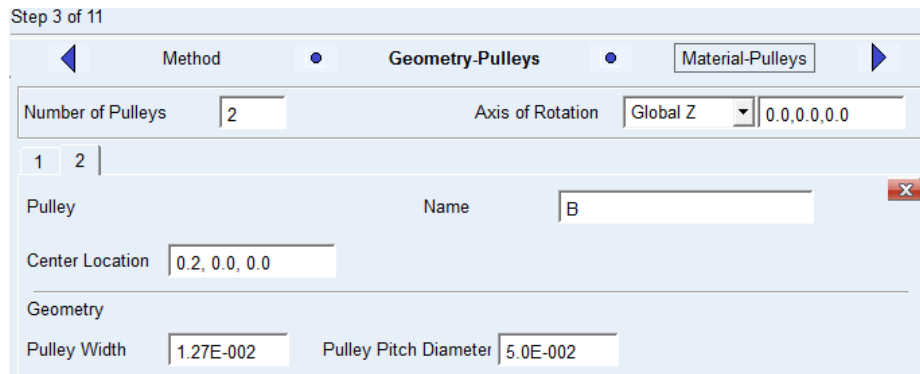
(b) Método de análisis

Figura 5.5: Tipo de polea y método de análisis empleado por Adams[©].

Los parámetros geométricos del volante A y el disco B , se presentan en la figura 5.6. El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios iguales a los indicados en el enunciado del problema, y de esta manera, seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de los discos. En este caso, debe notarse que la distancia entre centros debe ser mayor a la suma de los radios de las poleas.



(a) Propiedades geométricas de la polea *A*



(b) Propiedades geométricas de la polea *B*

Figura 5.6: Propiedades geométricas de las poleas *A* y *B*.

Los parámetros inerciales de las poleas *A* y *B*, se presentan en las figuras 5.7 y 5.8. Debe notarse que el problema 15-23 corresponde a un problema cinemático; por lo que, los datos como las masas de las poleas no son de interés, y cualesquiera valores que el programa Adams[©] seleccione, o el usuario desee seleccionar, serán adecuados. Aunque, lo mejor es minimizar la masa y los momentos de inercia de las poleas. Los momentos de inercia con respecto a los ejes *x* y *y* no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco, sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje *z*.

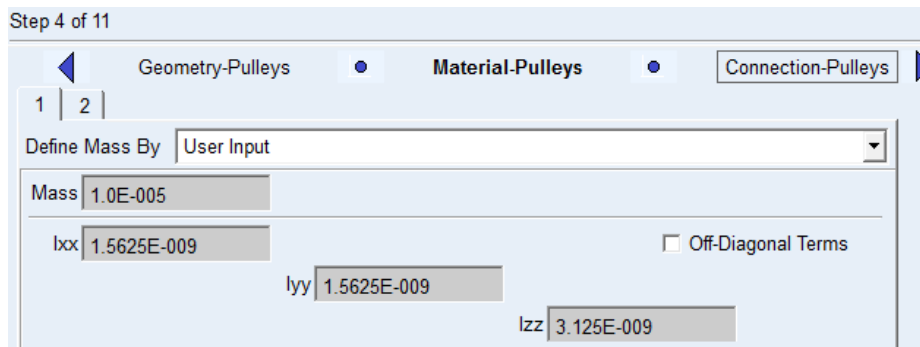


Figura 5.7: Propiedades inerciales de la polea *A*.

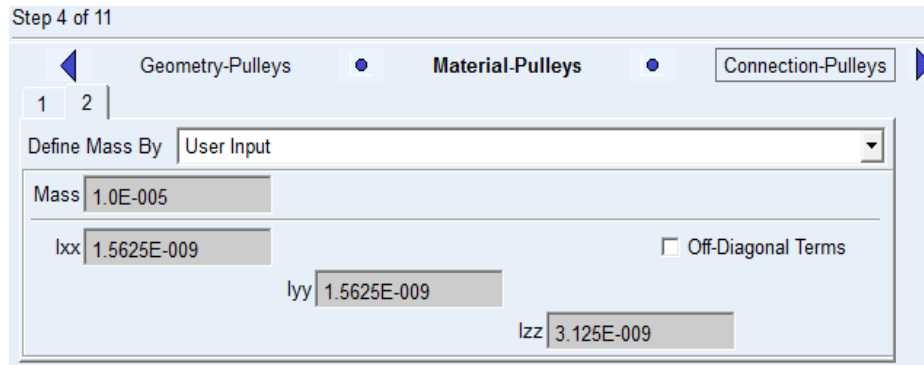


Figura 5.8: Propiedades inerciales de la polea *B*.

Para la creación del movimiento de la polea *B* en Adams[®], vea la figura 5.19.

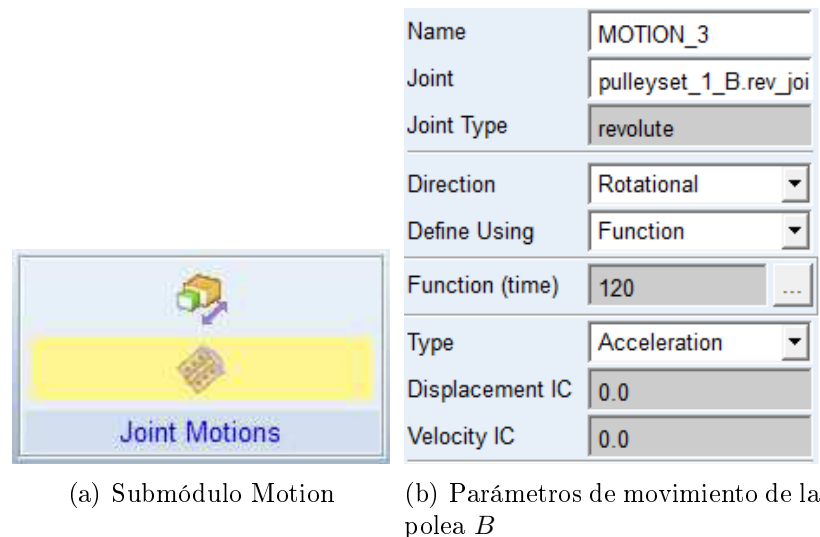


Figura 5.9: Creación del objeto de movimiento sobre la polea *B*.

El “Marker_1” como parte de la polea *A*, tiene como función, analizar la aceleración tangencial y normal, al igual que la magnitud en el punto *C* del problema, vea la figura 5.3(a).

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 2 segundos, un número de pasos de 2500 y seleccionar el tipo de simulación cinemática, vea la figura 5.10. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se deseé y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

Por otro lado, para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 5.11, 5.12 y 5.13.

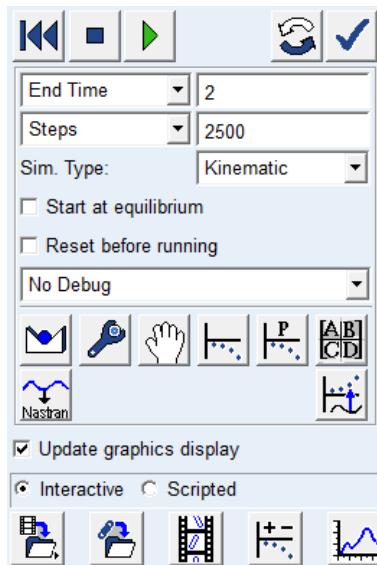


Figura 5.10: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P15_23_BEER	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		MARKER_1	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1_B		
		+ pulleyset_1bprop_1		

(a) Solicitud de la aceleración angular de la polea A

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P15_23_BEER	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_1_B	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1bprop_1		

(b) Solicitud de la aceleración angular de la polea B

Figura 5.11: Solicitud de las aceleraciones angulares de las poleas A y B .

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P15_23_BEER	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		MARKER_1	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1_B		
		+ pulleyset_1bprop_1		

Source: Objects
Filter: *

(a) Solicitud de la velocidad angular de la polea A

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P15_23_BEER	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_1_B	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1_B		
		+ pulleyset_1bprop_1		

Source: Objects
Filter: *

(b) Solicitud de la velocidad angular de la polea B

Figura 5.12: Solicitud de las velocidades angulares de las poleas A y B.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P15_23_BEER	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		MARKER_1	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1_B		
		+ pulleyset_1bprop_1		

Source: Objects
Filter: *

Figura 5.13: Solicitud de la magnitud de la aceleración en el punto C.

Los resultados obtenidos por el programa Adams[®] están dados de manera gráfica en las figuras 5.14, 5.15 y 5.16, para los tiempos $t=0.5s$ y $t=2.0s$.

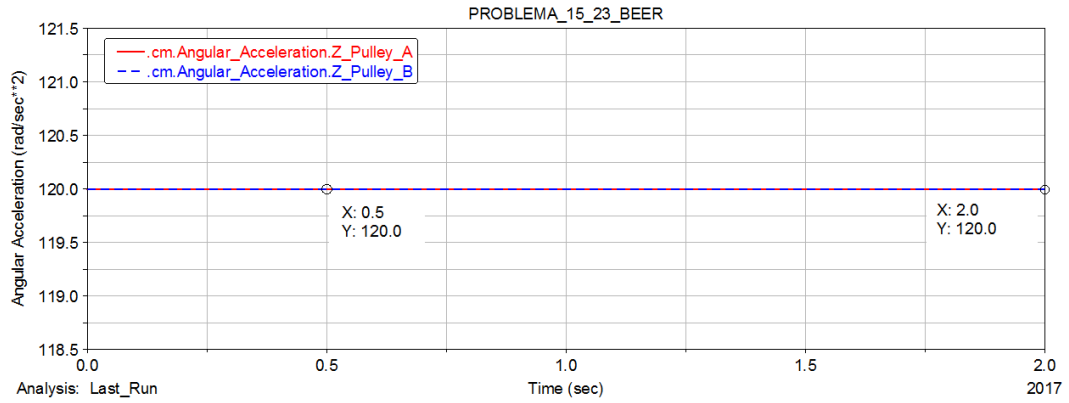


Figura 5.14: Resultado de la aceleración angular de las poleas *A* y *B*.

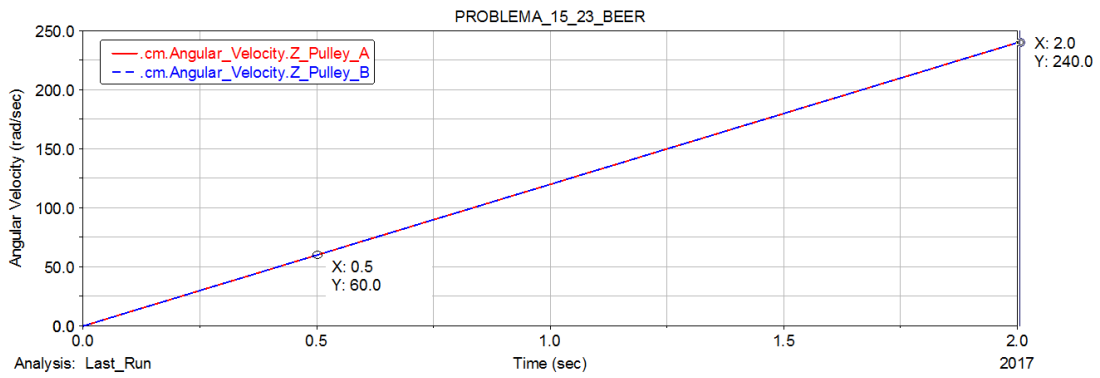


Figura 5.15: Resultado de la velocidad angular de la polea *B*.

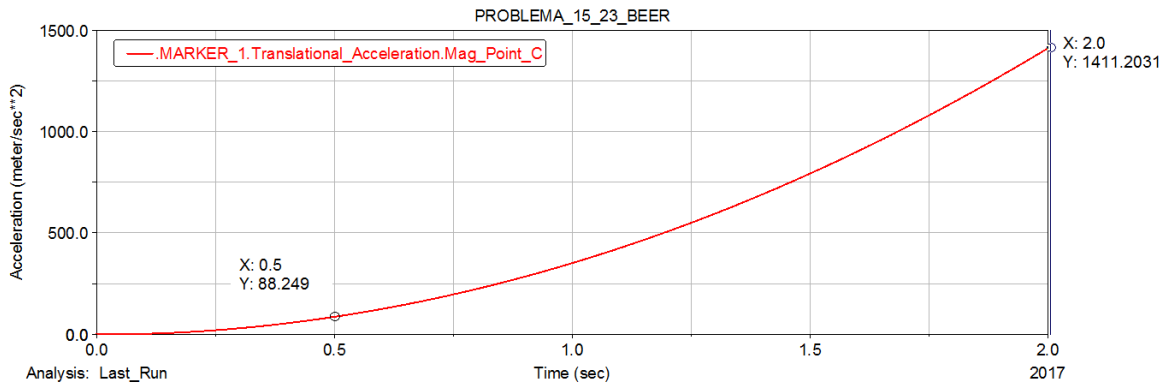


Figura 5.16: Resultado de la magnitud de la aceleración en el punto *C*.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Los resultados obtenidos mediante simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 5.1 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 5.1: Comparación de resultados. 1.^{er} problema de poleas y bandas.

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
$\alpha_A _{t=0.5s} = \alpha_A _{t=2.0s}$	120.0 rad/s ² ∅	120.0 rad/s ² ∅
$\alpha_B _{t=0.5s} = \alpha_B _{t=2.0s}$	120.0 rad/s ² ∅	120.0 rad/s ² ∅
$\omega_A _{t=0.5s}$	60.0 rad/s ∅	60.0 rad/s ∅
$\omega_A _{t=2.0s}$	240.0 rad/s ∅	240.0 rad/s ∅
$\omega_B _{t=0.5s}$	60.0 rad/s ∅	60.0 rad/s ∅
$\omega_B _{t=2.0s}$	240.0 rad/s ∅	240.0 rad/s ∅
$ a_C _{t=0.5s}$	90.04998612 m/s ²	88.249 m/s ²
$ a_C _{t=2.0s}$	1440.003125 m/s ²	1411.2031 m/s ²

5.2. Segundo problema de sistemas de bandas y poleas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 15.24 del libro de Beer et al. [5], incluido en la página 929.

Problema: La velocidad nominal del tambor B de la lijadora de banda mostrada es 2400 rpm. Cuando se desconecta la alimentación, se observa que la lijadora pasa de su velocidad nominal al reposo en 10 segundos. Suponiendo un movimiento uniformemente desacelerado, determine la velocidad y la aceleración de el punto C de la correa, (a) justo antes de que la energía se apague, (b) 9 segundos más tarde, vea la figura 5.1 en la página 158.

5.2.1. Solución analítica.

Se sabe que no existe deslizamiento entre la banda y los discos, por lo que las velocidades y las componentes tangenciales de la aceleración del punto P_1 en el tambor A y del punto P_2 en el tambor B , son iguales. A partir de este resultado se obtienen dos relaciones: la primera, entre las velocidades angulares de ambas poleas en función de sus radios; la segunda entre las aceleraciones angulares de ambas poleas en función de sus radios, vea la figura 5.2 y las ecuaciones (5.5) y (5.6).

Las velocidades en los puntos P_1 y P_2 , como parte de los tambores A y B , resultan:

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = \omega_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = -\omega_A r_A \hat{i} = v_{A_{P_1}} = v_{B_{P_2}} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = \omega_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = -\omega_B r_B \hat{i}$$

Por lo que:

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \text{tal que} \quad \omega_A = \frac{r_B}{r_A} \omega_B \quad (5.5)$$

Las aceleraciones en los puntos P_1 y P_2 , como parte de los tambores A y B , resultan:

$$\vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = \alpha_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = -\alpha_A r_A \hat{i} = a_{tA_{P_1}} = a_{tB_{P_2}} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = \alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = -\alpha_B r_B \hat{i}$$

De manera que:

$$r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{tal que} \quad \alpha_A = \frac{r_B}{r_A} \alpha_B \quad (5.6)$$

De acuerdo con el problema la velocidad angular del tambor B es igual a 2400 rpm , o lo que es igual:

$$\omega_B = 80\pi \text{ rad/s} = 251.3274123 \text{ rad/s} \odot$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (5.5), se obtiene un valor de la velocidad angular del tambor A igual a:

$$\omega_A = \left(\frac{25}{25} \right) (80\pi) = 80\pi \text{ rad/s} = 251.3274123 \text{ rad/s} \odot$$

Análisis de velocidad.

De acuerdo con la figura 5.2, la velocidad del punto C puede expresarse como:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{O_A} + \vec{v}_{C/O_A}$$

De aquí que:

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{C/O_A} = \omega_A \hat{k} \times (-r_A) \hat{i} \quad \text{tal que} \quad \vec{v}_C = -\omega_A r_A \hat{j} \quad (5.7)$$

Análisis de aceleración.

De igual manera, y de acuerdo con la figura 5.2, la aceleración del punto C puede expresarse como:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{O_A} + \vec{a}_{C/O_A} - \omega_A^2 \vec{r}_{C/O_A}$$

Por lo tanto:

$$\vec{a}_C = \alpha_A \hat{k} \times (-r_A \hat{i}) - \omega_A^2 (-r_A) \hat{i} \quad \text{donde} \quad \vec{a}_C = \alpha_A r_A \hat{j} + \omega_A^2 r_A \hat{i} \quad (5.8)$$

Caso (a). Determinar la velocidad y la aceleración de el punto C de la correa justo antes de que la energía se apague.

De acuerdo con el problema, la velocidad angular del tambor B y A son constantes, antes y justo en el momento en que la energía se apaga. Por lo que, la aceleración angular del tambor A y B son iguales a cero; con esto en mente y a sabiendas que $\omega_A = 80\pi \text{ rad/s} = 251.3274123 \text{ rad/s}$, se sustituyen los valores numéricos en las ecuaciones (5.7) y (5.8), para obtener el valor de la velocidad y aceleración del punto C en forma vectorial. De manera que:

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= -(80\pi \text{ rad/s}) (0.025 \text{ m}) \hat{j} = -6.283185307 \hat{j} \text{ m/s} \\ \vec{a}_C &= 0 \hat{j} + (80\pi \text{ rad/s})^2 (0.025 \text{ m}) \hat{i} = 1579.136704 \hat{i} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Mientras que el valor de la magnitud tanto de la velocidad como de la aceleración en el punto C están dados por:

$$\begin{aligned} |v_C| &= 6.283185307 \text{ m/s} \\ |a_C| &= 1579.136704 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Caso (b). Determinar la velocidad y la aceleración de el punto C de la correa 9 segundos más después de apagar la energía.

Como menciona el problema, el tambor sufre un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo con desaceleración constante, justo en el momento de apagar la energía del tambor B ; por lo que, la velocidad angular justo en ese instante es igual a $\omega_{B_0} = 80\pi \text{ rad/s}$. Además, se sabe que el tambor B llega al reposo 10 segundos después de apagar la energía, por lo que:

$$\omega_B = \omega_{B_0} + \alpha_B t \text{ rad/s} \quad \text{donde} \quad \omega_A = 80\pi + \alpha_B t \text{ rad/s} \quad (5.9)$$

Evaluando la ecuación anterior para un tiempo $t = 10$, el cual es justo el momento en el que el tambor B llega al reposo, se obtiene el valor de la aceleración angular α_B cuyo fin es ir deteniendo el tambor B hasta el reposo. Por lo tanto:

$$0 = (80\pi \text{ rad/s}) + \alpha_B (10\text{s}) \quad \text{tal que} \quad \alpha_B = -8\pi = -25.13274123 \text{ rad/s}^2$$

De acuerdo con la ecuación (5.6), la aceleración angular del tambor A resulta

$$\alpha_A = \left(\frac{0.025}{0.025} \right) (-8\pi) = -8\pi = -25.13274123 \text{ rad/s}^2$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (5.9) se obtiene la expresión que rige el comportamiento de la velocidad angular del tambor A , de manera que:

$$\omega_A = \pi (80 - 8t) \text{ rad/s} \quad (5.10)$$

Evaluando la ecuación anterior para un tiempo $t = 9\text{s}$, se obtiene un valor de ω_A para ese instante de:

$$\omega_A = 80\pi - 8\pi (9\text{s}) = 8\pi \text{ rad/s}$$

Para obtener el valor de la velocidad y aceleración en el punto C en forma vectorial, se sustituyen los valores numéricos en las ecuaciones (5.7) y (5.8), de aquí que:

$$\vec{v}_C = - (0.025\text{m}) (8\pi \text{ rad/s}) \hat{j} = -0.6283185307$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= - (-8\pi \text{ rad/s}^2) (0.025\text{m}) \hat{j} + (8\pi \text{ rad/s})^2 (0.025\text{m}) \hat{i} \\ &= 15.79136704 \hat{i} + 0.6283185307 \hat{j} \text{ [m/s}^2\text{]} \end{aligned}$$

Mientras que el valor de la magnitud tanto de la velocidad, como de la aceleración en el punto C , están dados por:

$$\begin{aligned} |v_C| &= 0.6283185307 \text{ m/s} \\ |a_C| &= 15.8038621 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

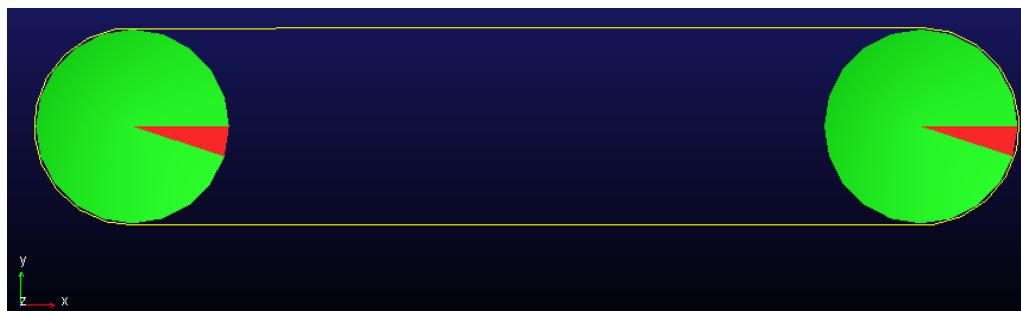
5.2.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de cadenas y catarinas dentro del módulo de **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección no se discute la selección de los parámetros geométricos de las poleas y la banda. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.1, en la página 8 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de bandas se emplea una opción de suma importancia denominada “**Constraint**”. Esta opción se emplea cuando únicamente se desea analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante. De acuerdo con Adams[©], este método se usa cuando la fuerza y los componentes no son de importancia, y donde únicamente la reducción o multiplicación de velocidad es de interés. Por esa razón, tanto el módulo de bandas como el de cadenas y catarinas se pueden utilizar cuando el problema indica que la transmisión se realiza mediante una banda.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 15-24 se muestra en la figura 5.17, mientras que la figura 5.18 muestra las unidades empleadas en el modelo en Adams[©].



(a) Vista del sistema mediante un marco de alambre



(b) Vista del sistema con sólidos sombreados

Figura 5.17: Modelo del problema en Adams[©].

Como este problema es una adaptación del problema 15.23 del libro Beer et al. [5], tanto el tipo de poleas, el método de análisis y las propiedades geométricas e inerciales de las poleas del problema 15.23, son las mismas; vea las figuras 5.5(a), 5.5(b), 5.6 y 5.7.

Por la naturaleza del problema, se creó una función de movimiento que rigen el comportamiento de la polea B dentro del modelo, con el objetivo de poder analizar la velocidad y aceleración en el punto C , justo antes y justo después de apagar la energía aplicada sobre la polea B , vea la figura 5.19.

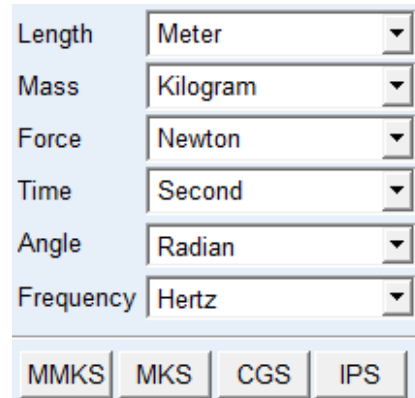


Figura 5.18: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

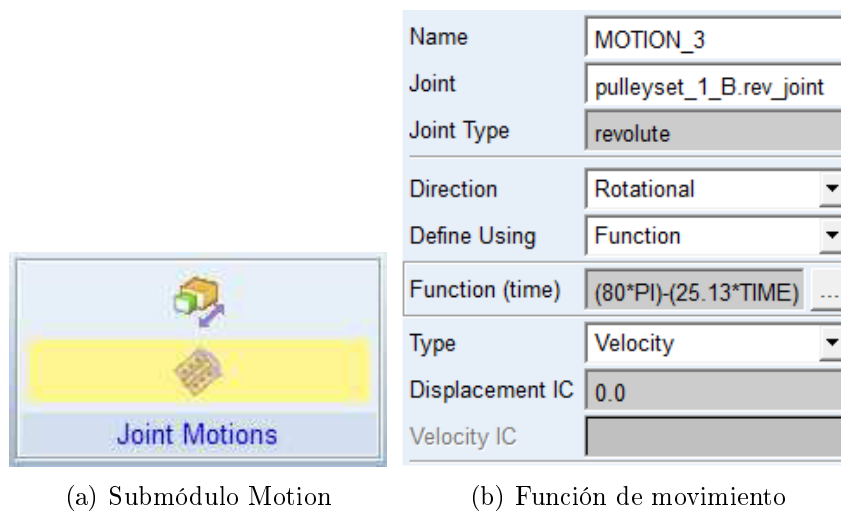


Figura 5.19: Parámetros de movimiento de la polea B .

El “Marker_21” como parte de la polea A , tiene como función, analizar las aceleración tangencial y normal, al igual que la magnitud en el punto C del problema, vea la figura 5.17(a).

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 10 segundos, con un número de pasos de 3000 y seleccionar el tipo de simulación cinemática, vea la figura 5.20. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay. Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25 y 5.26.

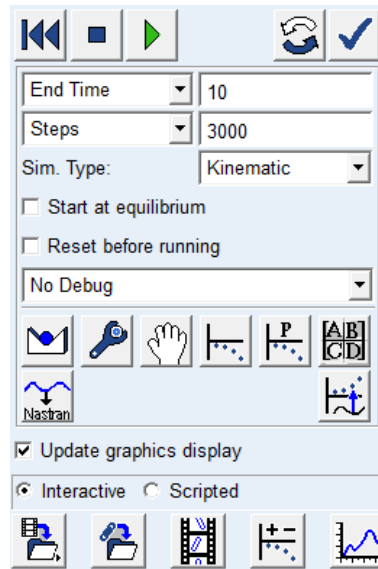


Figura 5.20: Parámetros de la simulación.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_15_24_BEER	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		MARKER_21	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1_B		
		+ pulleyset_1bprop_2		

Figura 5.21: Solicitud de la aceleración angular de la polea A.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_15_24_BEER	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_1_B	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1bprop_2		

Figura 5.22: Solicitud de la aceleración angular de la polea B.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_15_24_BEER	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		MARKER_21	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1_B		
		+ pulleyset_1bprop_2		

Figura 5.23: Solicitud de la velocidad angular de la pulea A.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_15_24_BEER	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_1_B	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1bprop_2		

Figura 5.24: Solicitud de la velocidad angular de la pulea B.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_15_24_BEER	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		MARKER_21	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1_B		

Figura 5.25: Solicitud de la magnitud de la aceleración en el punto C.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_15_24_BEER	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		MARKER_21	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1_B		
		+ pulleyset_1bprop_2		

Figura 5.26: Solicitud de la magnitud de la aceleración en el punto C.

Resultados obtenidos por el programa Adams[©] antes y después de apagar la energía sobre la polea *B* se muestran en las figuras 5.27, 5.28, 5.29 y 5.30.

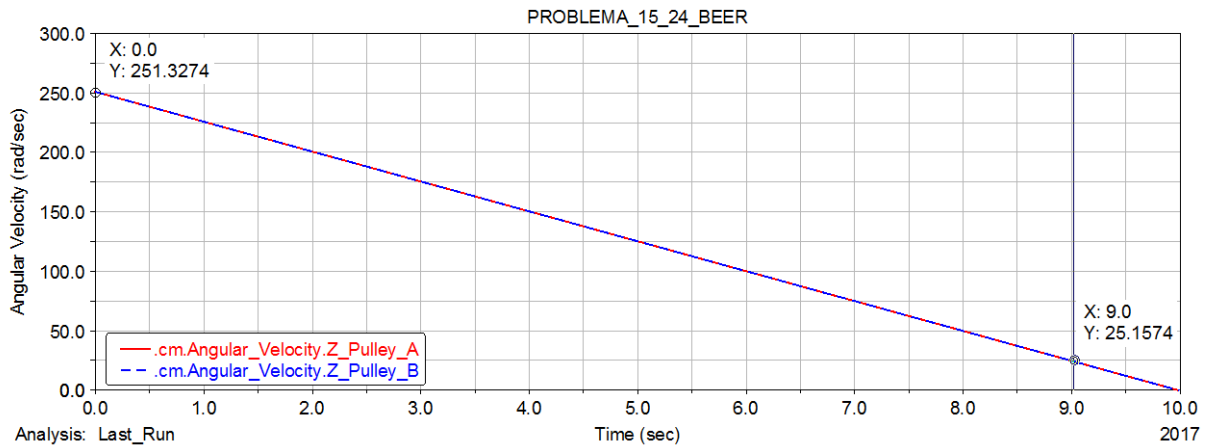


Figura 5.27: Resultado de la velocidad angular de las poleas *A* y *B*.

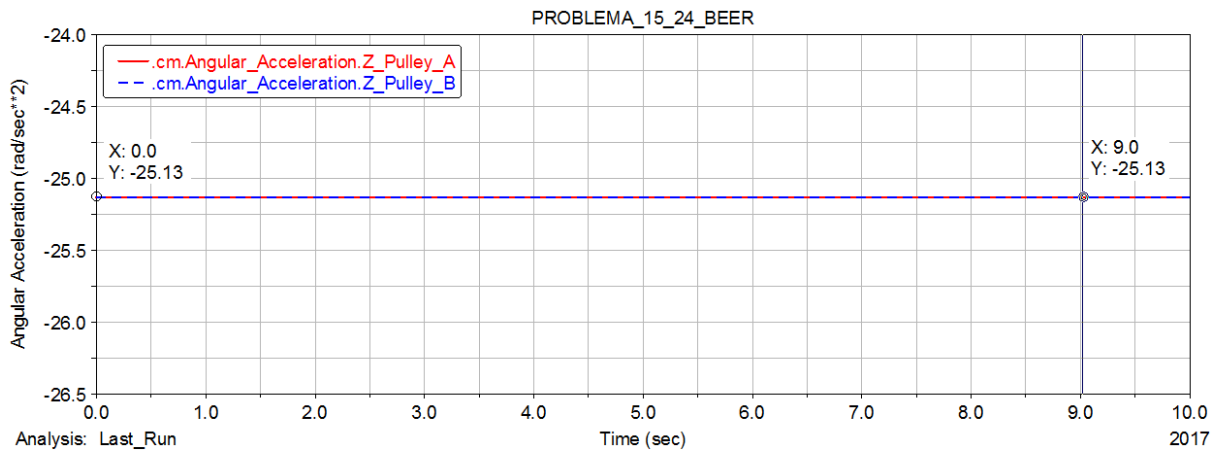


Figura 5.28: Resultado de la aceleración angular de la polea *B*.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Los resultados obtenidos mediante la simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 5.2 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación en Adams[©].

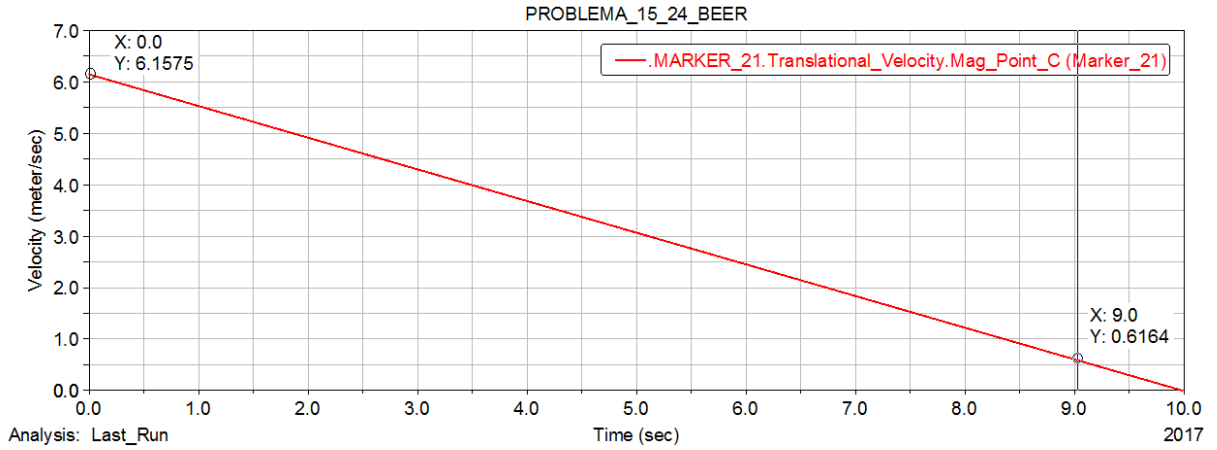


Figura 5.29: Resultado de la magnitud de la velocidad en el punto C .

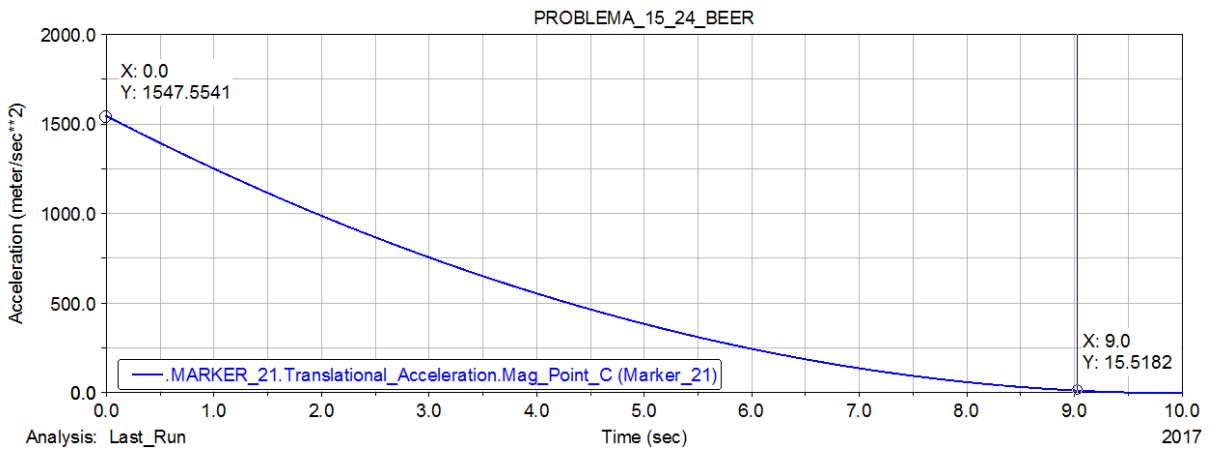


Figura 5.30: Resultado de la magnitud de la aceleración en el punto C .

Tabla 5.2: Comparación de resultados. 2.º problema de poleas y bandas.

Variable	Resultado analítico	Resultado Adams [©]
Caso (a)		
ω_A	$251.3274 \text{ rad/s} \circlearrowleft$	$251.3274 \text{ rad/s} \circlearrowleft$
ω_B	$251.3274 \text{ rad/s} \circlearrowleft$	$251.3274 \text{ rad/s} \circlearrowleft$
$ v_C $	6.2831 m/s	6.1575 m/s
$ a_C $	1579.1367 m/s^2	1547.554 m/s^2
Caso (b) para $t = 9\text{s}$		
ω_A	$25.1327 \text{ rad/s} \circlearrowleft$	$25.1574 \text{ rad/s} \circlearrowleft$
ω_B	$25.1327 \text{ rad/s} \circlearrowleft$	$25.1574 \text{ rad/s} \circlearrowleft$
α_A	-25.1327 rad/s^2	-25.13 rad/s^2
α_B	-25.1327 rad/s^2	-25.13 rad/s^2
$ v_C $	0.6283 m/s	0.6164 m/s
$ a_C $	15.803 m/s^2	15.5182 m/s^2

5.3. Tercer problema de sistemas de bandas y poleas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 5.22 del libro de Meriam y Kraige [28], incluido en la página 292.

Problema: La figura representa un reductor de velocidad a base de bandas trapezoidales, en el que la polea A arrastra a las dos poleas unidas rígidamente B y D , que a su vez arrastra a la polea C . Si A parte del reposo en el instante $t = 0$ y está sujeta a una aceleración angular constante α_A . Donde: $r_A = r_D = r_1$, $r_B = r_C = r_2$ y $\alpha_A = \alpha_1$.

Caso(a): Deduzca las expresiones de la velocidad angular de C y de la magnitud de la aceleración de un punto P de la correa, ambas para un instante t .

Caso (b): Evalúe los resultados para un tiempo $t = 9s$, $\alpha_1 = 57 \text{ rads/s}^2$, $r_1 = 0.1m$ y $r_2 = 0.2m$.

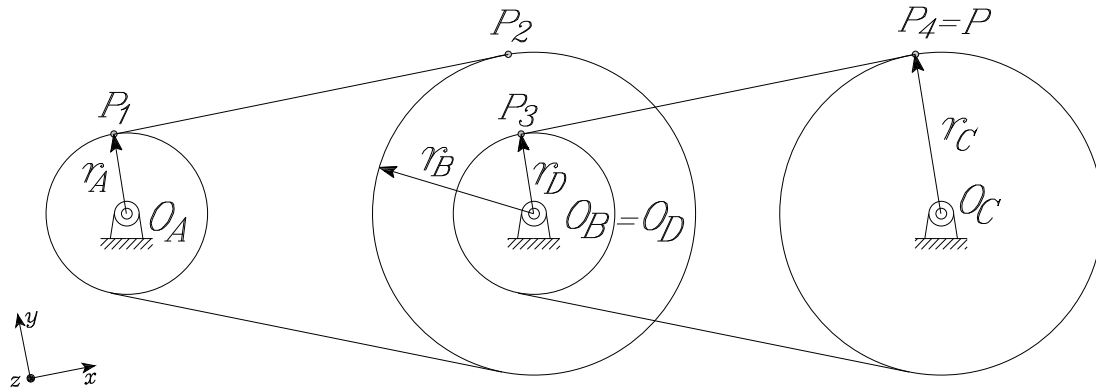


Figura 5.31: Modelo del problema 5.22 Meriam et al. [28].

5.3.1. Solución analítica.

Puesto que no existe deslizamiento entre las bandas y las poleas, por lo que las velocidades y las componentes tangenciales de las aceleraciones del punto P_1 en la polea A y del punto P_2 en la polea B , son iguales. Lo mismo ocurre para la poleas D y C en el punto P_3 y $P_4 = P$. A partir de este resultado se obtienen dos relaciones: la primera, entre las velocidades angulares de ambas poleas en función de sus radios; y la segunda, entre las aceleraciones angulares de ambas poleas en función de sus radios, vea la figura 5.32 y las ecuaciones 5.11, 5.12, 5.13 y 5.14.

Análisis cinemático para las poleas A y B .

Las velocidades en los puntos P_1 y P_2 , como parte de las poleas A y B , resultan:

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\omega_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = \omega_A r_A \hat{i} = v_{A_{P_1}} = v_{B_{P_2}} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = -\omega_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = \omega_B r_B \hat{i}$$

De manera que:

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \text{tal que} \quad \omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A \quad (5.11)$$

Las aceleraciones en los puntos P_1 y P_2 , como parte de las poleas A y B , resultan:

$$\vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\alpha_A \hat{k} \times r_A \hat{j} = \alpha_A r_A \hat{i} = a_{tA_{P_1}} = a_{tB_{P_2}} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = -\alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = \alpha_B r_B \hat{i}$$

Por lo que:

$$r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{tal que} \quad \alpha_B = \frac{r_A}{r_B} \alpha_A \quad (5.12)$$

Análisis cinemático para las poleas D y C .

Las velocidades en los puntos P_3 y P_4 , como parte de las poleas D y C , resultan:

$$\vec{\omega}_D \times \vec{r}_{P_3/O_D} = -\omega_D \hat{k} \times r_D \hat{j} = \omega_D r_D \hat{i} = v_{D_{P_3}} = v_{C_{P_4}} = \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{P_4/O_C} = -\omega_C \hat{k} \times r_C \hat{j} = \omega_C r_C \hat{i}$$

De aquí que:

$$r_D \omega_D = r_C \omega_C \quad \text{donde} \quad \omega_C = \frac{r_D}{r_C} \omega_D \quad (5.13)$$

Las aceleraciones en los puntos P_3 y P_4 , como parte de las poleas D y C , resultan:

$$\vec{\alpha}_D \times \vec{r}_{P_3/O_D} = -\alpha_D \hat{k} \times r_D \hat{j} = \alpha_D r_D \hat{i} = a_{tD_{P_3}} = a_{tC_{P_4}} = \vec{\alpha}_C \times \vec{r}_{P_4/O_C} = -\alpha_C \hat{k} \times r_C \hat{j} = \alpha_C r_C \hat{i}$$

De manera que:

$$r_D \alpha_D = r_C \alpha_C \quad \text{tal que} \quad \alpha_C = \frac{r_D}{r_C} \alpha_D \quad (5.14)$$

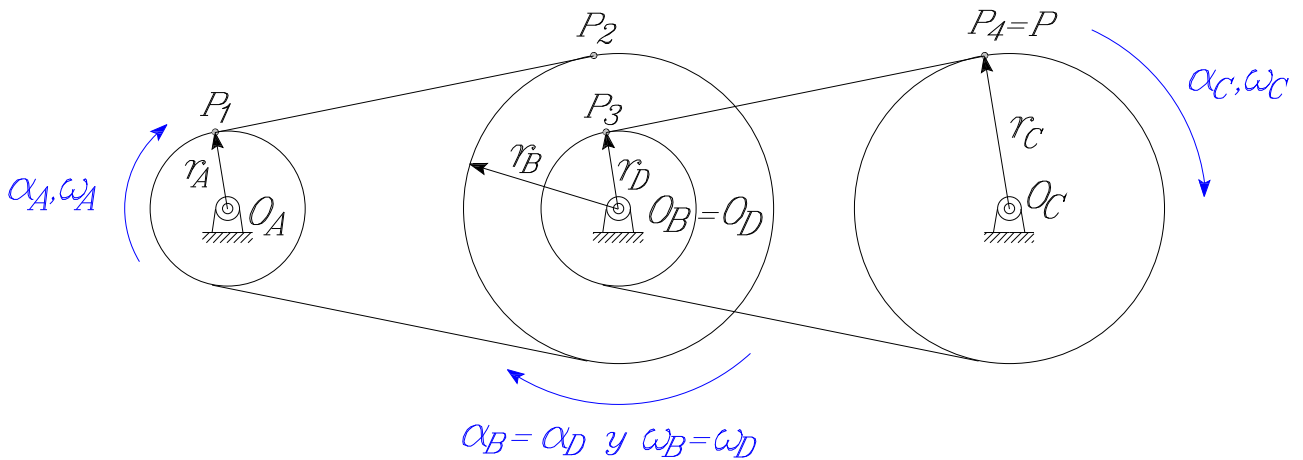


Figura 5.32: Diagrama cinemático del problema.

Caso (a): Deduzca las expresiones de la velocidad angular de C y de la magnitud de la aceleración de un punto P de la correa, ambas para un instante t .

De acuerdo al problema, se sabe que todas las poleas están sujetas a un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo y uniformemente acelerado. Además, se sabe que el sistema parte del reposo para un tiempo $t = 0$, por lo que:

$$\omega_A = \cancel{\omega_{A_0}}^0 + \alpha_A t \quad \text{donde} \quad \omega_A = \alpha_A t \quad (5.15)$$

Sustituyendo la ecuación (5.15) en la ecuación (5.11), se obtiene el valor de la velocidad angular de la polea B .

$$\omega_B = \left(\frac{r_A}{r_B} \right) \alpha_A t \quad (5.16)$$

Puesto que la polea B y D se encuentran rígidamente unidas entre si, la velocidad angular de ambas poleas son iguales, de manera que:

$$\omega_D = \left(\frac{r_A}{r_B} \right) \alpha_A t \quad (5.17)$$

Sustituyendo la ecuación (5.17) en la ecuación (5.13) se obtiene un valor de la velocidad angular de la polea C igual a:

$$\omega_C = \left(\frac{r_D}{r_C} \right) \left(\frac{r_A}{r_B} \right) \alpha_A t$$

En términos de r_1 , r_2 y α_1 , resulta:

$$\omega_C = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \alpha_1 t \quad (5.18)$$

Se sabe que $\alpha_B = \alpha_D$, por lo que, sustituyendo el valor de α_D en la ecuación (5.14) se obtiene una expresión para la aceleración angular de la polea C . De manera que:

$$\alpha_C = \left(\frac{r_D}{r_C} \right) \left(\frac{r_A}{r_B} \right) \alpha_A$$

En términos de r_1 , r_2 y α_1 , resulta:

$$\alpha_C = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \alpha_1 \quad (5.19)$$

Análisis de aceleración del punto P .

De acuerdo con la figura 5.32, se sabe que:

$$\vec{a}_P = \cancel{\vec{a}_{O_C}}^0 + \vec{a}_{P/O_C} - \omega_C^2 \vec{r}_{P/O_C}$$

Por lo que:

$$\vec{a}_P = -\alpha_C \hat{k} \times (r_{P/O_C} \hat{j}) + \omega_C^2 \hat{j} (r_{P/O_C} \hat{j}) \quad \text{donde} \quad \vec{a}_P = \alpha_C r_C \hat{i} - \omega_C^2 r_C \hat{j} \quad (5.20)$$

En donde, la magnitud de la aceleración en el punto P , resulta:

$$a_P^2 = (\alpha_C r_C)^2 + (\omega_C^2 r_C)^2$$

Sustituyendo el valor de cada variable en términos de r_1 , r_2 y α_1 , se obtiene:

$$a_P^2 = \left[\alpha_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 r_2 \right]^2 + \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 (r_2) \alpha_1^2 t^2 \right]^2$$

Desarrollando la ecuación anterior, se obtiene:

$$|a_P| = \alpha_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 r_2 \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 \alpha_1^2 t^4} \quad (5.21)$$

Análisis de velocidad del punto P .

De acuerdo con la figura 5.32, se sabe que:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O_C} + \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{P/O_C}$$

De manera que:

$$\vec{v}_P = -\omega_C \hat{k} \times (r_{P/O_C} \hat{j}) \quad \text{tal que} \quad \vec{v}_P = \omega_C r_C \hat{i}$$

La magnitud de la velocidad en el punto P está dada por:

$$|\vec{v}_P| = r_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \alpha_1 t \quad (5.22)$$

Caso (b): Evalúe los resultados para un tiempo $t = 9s$, $\alpha_1 = 57 \text{ rad/s}^2$, $r_1 = 0.1m$ y $r_2 = 0.2m$.

Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones (5.15), (5.16), (5.17) y (5.18), se obtienen los valores numéricos de las velocidades angulares de cada una de las poleas.

$$\omega_A = (57 \text{ rad/s}^2) (9s) = 513 \text{ rad/s}$$

$$\omega_B = \omega_D = (0.1/0.2) (57 \text{ rad/s}^2) (9s) = 256.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_C = (0.1/0.2)^2 (57 \text{ rad/s}^2) (9s) = 128.25 \text{ rad/s}$$

Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones (5.12) y (5.14), se obtienen los valores numéricos de las aceleraciones angulares de las poleas B , C y D .

$$\alpha_B = \alpha_D = (0.1/0.2) (57 \text{ rad/s}^2) = 28.5 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha_C = (0.1/0.2)^2 (57 \text{ rad/s}^2) = 14.25 \text{ rad/s}^2$$

Para obtener el valor de la magnitud de la aceleración para el punto P , se sustituyen los valores numéricos en la ecuación (5.21), resultando:

$$|a_P| = (57 \text{ rad/s}^2) (0.1/0.2)^2 (0.2 \text{ m}) \sqrt{1 + (0.1/0.2)^4 (57 \text{ rad/s}^2)^2 (9 \text{ s})^4} = 3289.613735 \text{ m/s}^2$$

Evaluando la ecuación (5.22) se obtiene un valor de la magnitud de la velocidad en el punto P igual a:

$$v_P = (0.1/0.2)^2 (57 \text{ rad/s}^2) (9 \text{ s}) (0.2 \text{ m}) = 25.65 \text{ m/s}$$

Con este cálculo finaliza la solución algebraica del problema. Los resultados obtenidos aquí coinciden con los reportados por el libro.

5.3.2. Solución mediante Adams[©]/Machinery.

Es importante señalar que en esta sección no se discute la selección de los parámetros geométricos de las poleas y la banda. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.1, en la página 8 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de bandas se emplea una opción de suma importancia denominada “**Constraint**”. Esta opción se emplea cuando únicamente se desea analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante. De acuerdo con Adams[©], este método se usa cuando la fuerza y los componentes no son de importancia, y en donde únicamente la reducción o multiplicación de velocidad es de interés. Por esa razón, tanto el módulo de bandas como el de cadenas y catarinas se pueden utilizar cuando el problema indica que la transmisión se realiza mediante una banda.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 5.22 se muestran en las figuras 5.33 y 5.34.

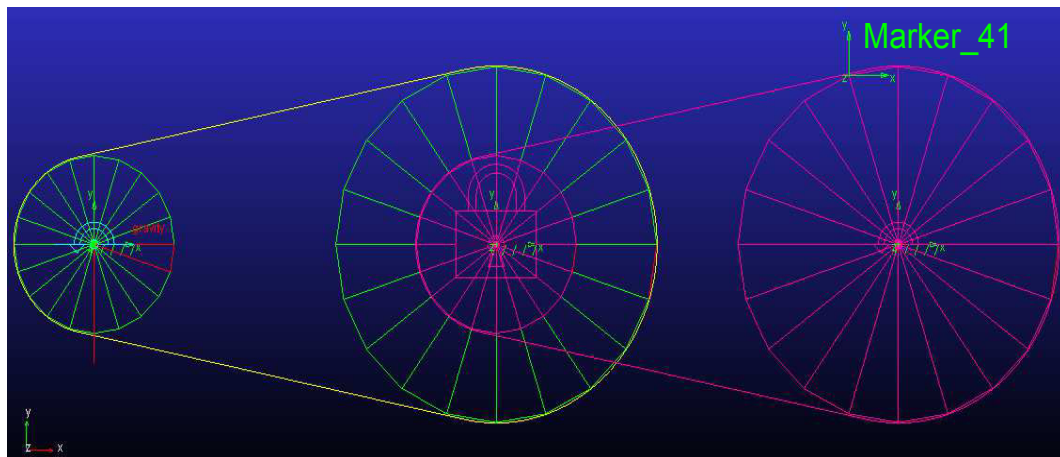


Figura 5.33: Vista del sistema mediante un marco de alambre.

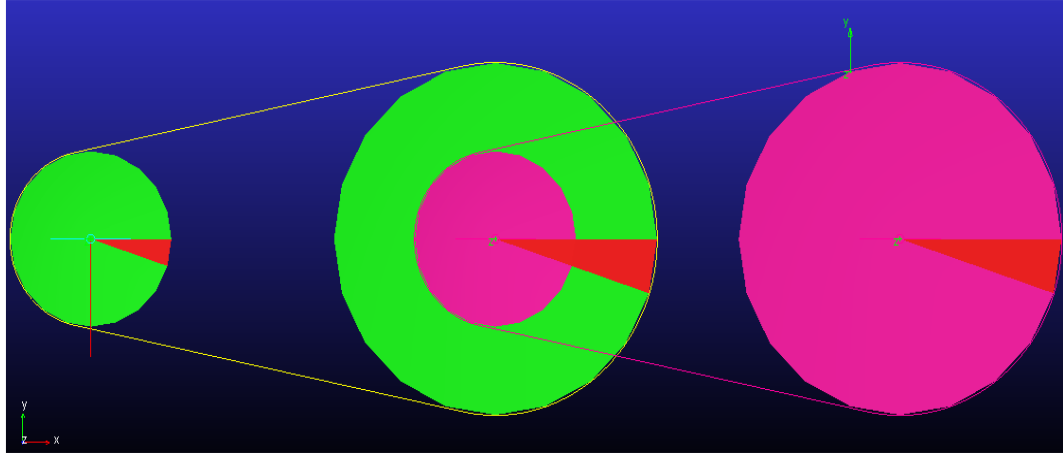


Figura 5.34: Vista del sistema con sólidos sombreados.

Las unidades del modelo se describen en la figura 5.35, mientras que la figura 5.36 muestra el tipo de polea que se seleccionó dentro del modelo. Como puede observarse, se seleccionaron poleas del tipo dentado trapezoidal, aunque para el método de análisis “**Constraint**”, que es el que se seleccionó para este problema, el tipo de polea no es de importancia. Cabe recordar que Adams[©] sólo permite crear un par de poleas a la vez, por lo que fué necesario crear dos pares de poleas para representar las polea *A*, *B*, *D* y *C*.

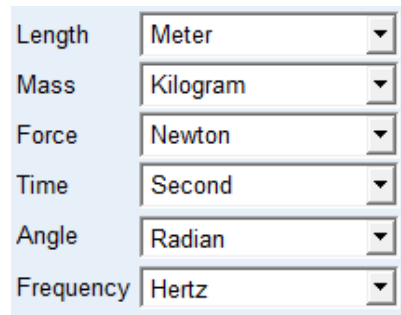


Figura 5.35: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

La figura 5.37 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del modelo. Por otro lado, los parámetros geométricos del par de poleas *A-B*, y el par de poleas *D-C*, se presentan en las figuras 5.38 y 5.39. El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios iguales a los indicados en el enunciado del problema, y de esta manera, seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de las poleas. En este caso, debe notarse que la distancia entre centros debe ser mayor a la suma de los radios de las poleas.

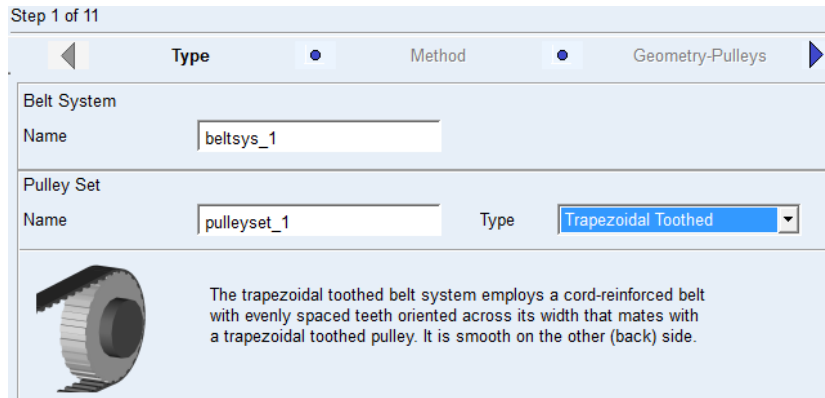


Figura 5.36: Tipo de polea empleada en Adams[©].

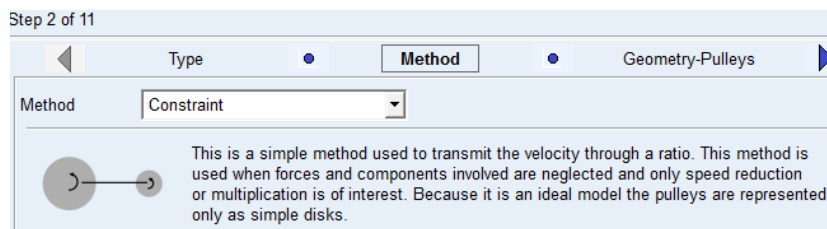
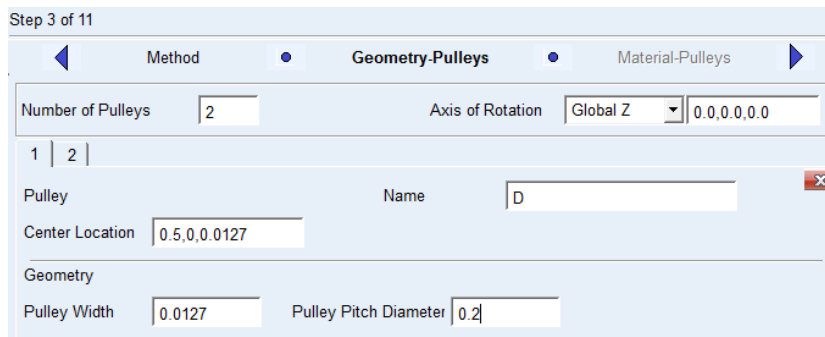
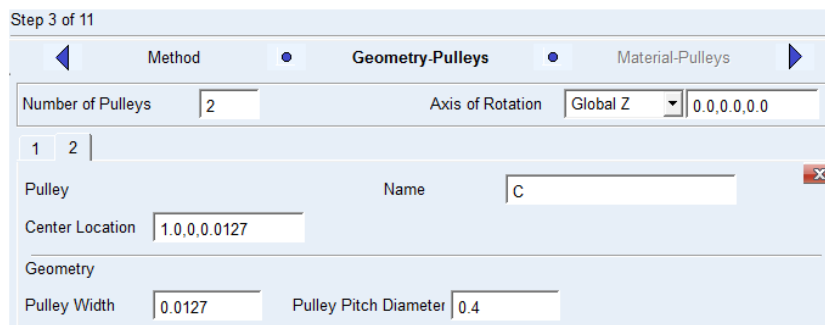


Figura 5.37: Método de análisis empleado por Adams[©].



(a) Propiedades geométricas de la polea D



(b) Propiedades geométricas de la polea C

Figura 5.39: Propiedades geométricas de las poleas D y C .

Step 3 of 11

Method **Geometry-Pulleys** Material-Pulleys

Number of Pulleys Axis of Rotation

1 | 2 |

Pulley Name

Center Location

Geometry

Pulley Width Pulley Pitch Diameter

(a) Propiedades geométricas de la polea *A*

Step 3 of 11

Method **Geometry-Pulleys** Material-Pulleys

Number of Pulleys Axis of Rotation

1 | 2 |

Pulley Name

Center Location

Geometry

Pulley Width Pulley Pitch Diameter

(b) Propiedades geométricas de la polea *B*

Figura 5.38: Propiedades geométricas de las poleas *A* y *B*.

Los parámetros inerciales de las poleas *A* y *B*, se presentan en las figuras 5.40 y 5.41. Debe notarse que el problema 5.22 corresponde a un problema cinemático, por lo que, los datos como las masas de las poleas no son de interés, y cualesquiera valores que el programa Adams[®] seleccione, o el usuario desee seleccionar, serán adecuados. Aunque lo mejor es minimizar la masa y los momentos de inercia de las poleas. Los momentos de inercia de las poleas con respecto a los ejes *x* y *y*, que pasan por los centros de masa de las poleas, no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco, sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje *z*.

Step 4 of 11

Geometry-Pulleys **Material-Pulleys** Connection-Pulleys

1 | 2 |

Define Mass By

Mass

Ixx Off-Diagonal Terms

Iyy

Izz

Figura 5.40: Propiedades inerciales de la polea *A*.

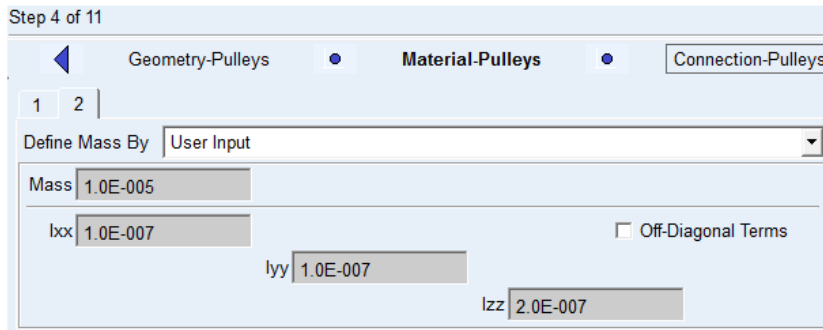


Figura 5.41: Propiedades inerciales de la polea B .

Las propiedades geométricas e inerciales de la polea D y C , son las mismas que el de las poleas A y B , respectivamente. Esto es debido a que la polea D , poseé las mismas propiedades geométricas e inerciales que la polea A , lo mismo ocurre para las poleas D y B ; vea las figuras 5.40 y 5.41.

Para impartirle movimiento al sistema, se creó un movimiento que rige el comportamiento de la aceleración angular de la polea A en Adams[©], vea las figuras 5.42 y 5.43.

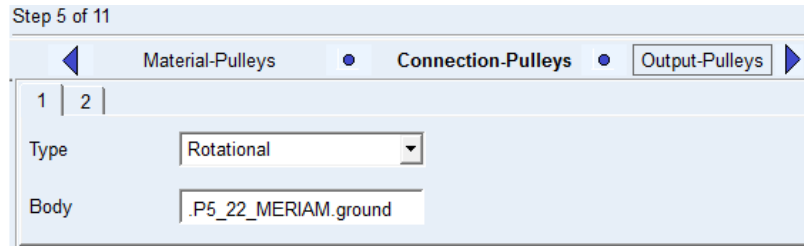


Figura 5.42: Submódulo Motion.

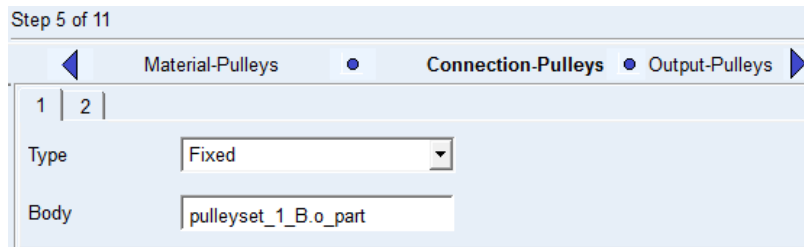
Name	MOTION_5
Joint	pulleyset_1_A.rev_joint
Joint Type	revolute
Direction	Rotational
Define Using	Function
Function (time)	-57
Type	Acceleration
Displacement IC	0.0
Velocity IC	0.0

Figura 5.43: Parámetros de movimiento de la polea A .

El tipo de conexión de las poleas A , B y C , con respecto a la tierra, es un par del tipo revoluta; mientras que, la polea D se conecta de manera fija con respecto a la polea B , vea la figura 5.44.



(a) Tipo de conexión entre las poleas A , B , C y la tierra



(b) Tipo de conexión entre la polea D y la polea B

Figura 5.44: Creación del objeto de movimiento sobre la polea A .

Como se puede observar en la figura 5.33, el “Marker_41” fija en la polea C , tiene como función, analizar las aceleración tangencial y normal, al igual que la magnitud en el punto P del problema.

Para la simulación del modelo basta con ingresar un tiempo de 2 segundos, con un número de pasos de 2500 y seleccionar el tipo de simulación cinemática, vea la figura 5.45. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

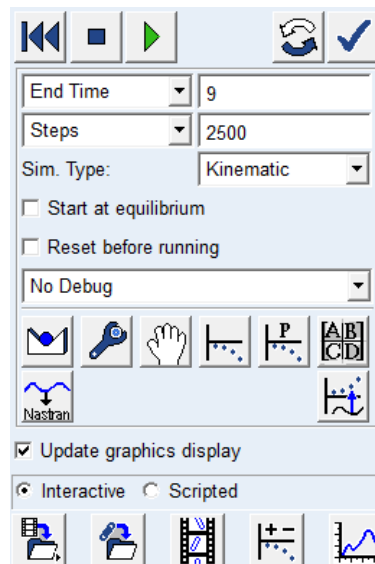


Figura 5.45: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 5.46, 5.47, 5.48, 5.49, 5.50, 5.51, 5.52, 5.53, 5.54 y 5.55.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
. PROBLEMA_5_22_MERIAM	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		wheel_geo	Translational_Acceleration	
		wheel_i	Angular_Velocity	
		+ pulleyset_1_B	Angular_Acceleration	

Figura 5.46: Solicitud de la aceleración angular de la polea A.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
. PROBLEMA_5_22_MERIAM	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_1_B	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		pulleyset_2_1	Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Figura 5.47: Solicitud de la aceleración angular de la polea B.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
. PROBLEMA_5_22_MERIAM	body	- pulleyset_2	Total_Force_On_Point	X
	force	+ pulleyset_2_C	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_2_D	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		wheel_geo	Translational_Acceleration	
		wheel_i	Angular_Velocity	
		+ pulleyset_2bprop_1	Angular_Acceleration	

Figura 5.48: Solicitud de la aceleración angular de la polea D.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_5_22_MERIAM	body	+ beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- beltsys_2	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_2	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_2_C	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
Source	Objects	joint_i	Translational_Acceleration	
Filter	*	MARKER_41	Angular_Velocity	
		wheel_geo	Angular_Acceleration	

Figura 5.49: Solicitud de la aceleración angular de la puela *C*.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_5_22_MERIAM	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
Source	Objects	wheel_geo	Translational_Acceleration	
Filter	*	wheel_i	Angular_Velocity	
		+ pulleyset_1_B	Angular_Acceleration	

Figura 5.50: Solicitud de la velocidad angular de la puela *A*.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_5_22_MERIAM	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_1_B	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
Source	Objects	joint_i	Translational_Acceleration	
Filter	*	pulleyset_2_I	Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Figura 5.51: Solicitud de la velocidad angular de la puela *B*.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_5_22_MERIAM	body	- pulleyset_2	Total_Force_On_Point	X
	force	+ pulleyset_2_C	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_2_D	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
Source	Objects	wheel_geo	Translational_Acceleration	
Filter	*	wheel_i	Angular_Velocity	
		+ pulleyset_2bprop_1	Angular_Acceleration	

Figura 5.52: Solicitud de la velocidad angular de la puela *D*.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_5_22_MERIAM	body	+ beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- beltsys_2	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_2	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_2_C	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		MARKER_41	Angular_Velocity	
		wheel_geo	Angular_Acceleration	

Figura 5.53: Solicitud de la velocidad angular de la polea C .

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_5_22_MERIAM	body	+ beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- beltsys_2	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_2	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_2_C	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		MARKER_41	Angular_Velocity	
		wheel_geo	Angular_Acceleration	

Figura 5.54: Solicitud de la magnitud de la velocidad en el punto P .

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_5_22_MERIAM	body	+ beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- beltsys_2	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_2	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_2_C	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		MARKER_41	Angular_Velocity	
		wheel_geo	Angular_Acceleration	

Figura 5.55: Solicitud de la magnitud de la aceleración en el punto P .

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©] están dados de manera gráfica en la figuras 5.56, 5.57, 5.58 y 5.59, para un tiempo $t=9s$.

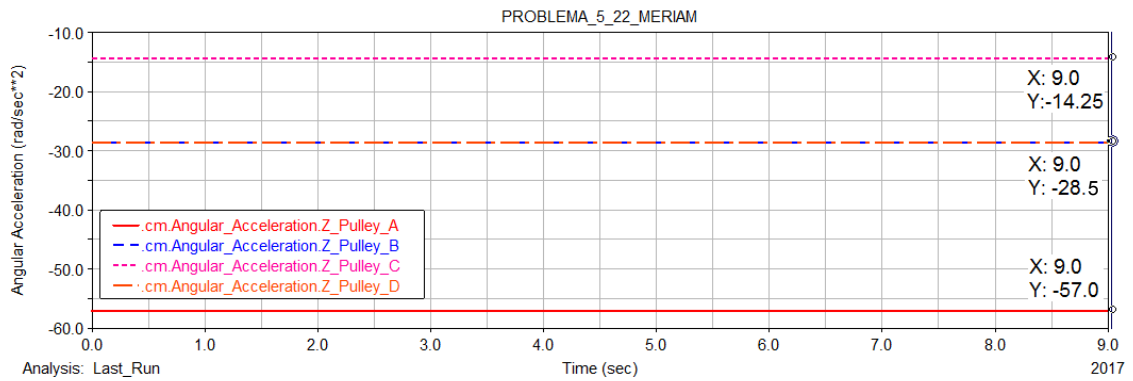


Figura 5.56: Resultado de la aceleración angular de las poleas A , B , C y D .

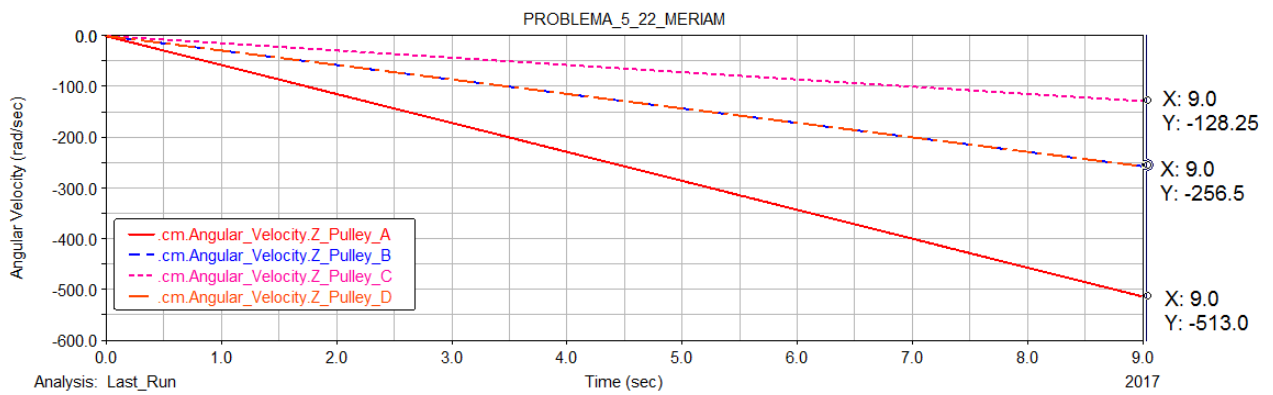


Figura 5.57: Resultado de la velocidad angular de las poleas A , B , C y D .

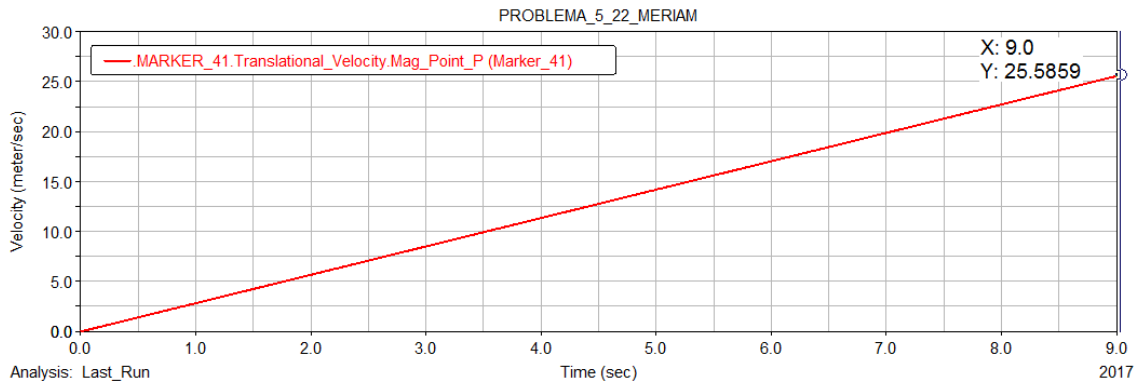


Figura 5.58: Resultado de la magnitud de la velocidad en el punto P .

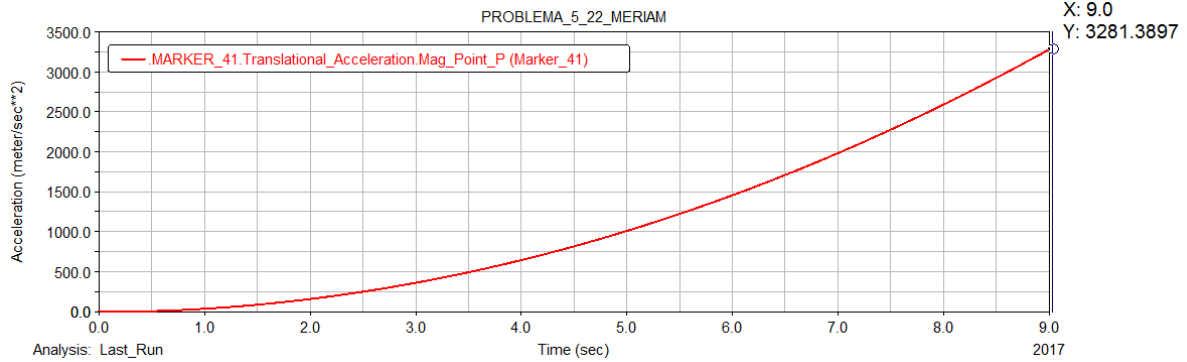


Figura 5.59: Resultado de la magnitud de la aceleración en el punto P .

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Los resultados obtenidos mediante simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 5.3 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 5.3: Comparación de resultados. 3.^{er} problema de poleas y bandas.

Variable	Resultados analíticos	Resultados Adams [©]
α_A	57.0 rad/s^2 ☺	57.0 rad/s^2 ☺
α_B	28.5 rad/s^2 ☺	28.5 rad/s^2 ☺
α_C	14.25 rad/s^2 ☺	14.25 rad/s^2 ☺
α_D	28.5 rad/s^2 ☺	28.5 rad/s^2 ☺
ω_A	513.0 rad/s ☺	513.0 rad/s ☺
ω_B	256.5 rad/s ☺	256.5 rad/s ☺
ω_C	128.25 rad/s ☺	128.25 rad/s ☺
ω_D	256.5 rad/s ☺	256.5 rad/s ☺
$ v_P $	25.65 m/s	25.5859 m/s
$ a_P $	$3289.613735 \text{ m/s}^2$	3281.3897 m/s^2

5.4. Cuarto problema de sistemas de bandas y poleas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 19-19 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 514.

Este problema fué desarrollado con anterioridad en el capítulo 4, por lo que el objetivo para desarrollar este problema nuevamente, es demostrar que se pueden obtener los mismos resultados o resultados aproximados, tanto con el módulo de cadenas como el de poleas y bandas. Con la única condición de emplear el método de análisis denominado “**Constraint**”.

Problema 6. El volante A tiene una masa de 30 kg y un radio de giro de $k_C = 95\text{ mm}$. El disco B tiene una masa de 25 kg , está apoyado en D por medio de un pasador y está acoplado al volante por una banda, la cual está sometida a una tensión de modo que no se deslice sobre las superficies de contacto. Si un motor proporciona un par de torsión $M = (12t)\text{ N} \cdot \text{m}$ al volante en sentido contrario al de las manecillas de reloj, donde t está en segundos, determine la velocidad angular del disco 3 s después de que se enciende el motor. Inicialmente, el volante está en reposo. Donde: $r_A = r_B = 125\text{ mm}$.

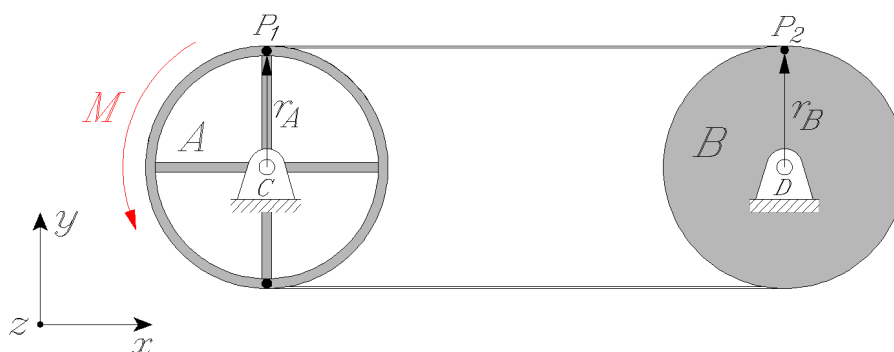


Figura 5.60: Modelo del problema 19-19 Hibbeler [18].

5.4.1. Solución analítica.

La solución analítica puede observarse en la sección 4.6 dentro del capítulo 4, por lo que los resultados obtenidos mediante el análisis cinemático se muestran en las ecuaciones 5.23 y 5.24.

$$\omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A \quad (5.23)$$

$$\alpha_B = \frac{r_A}{r_B} \alpha_A \quad (5.24)$$

Mientras que los resultados obtenidos mediante el análisis cinético se muestran en las ecuaciones 5.25 y 5.26.

$$\alpha_A(t) = 25.74762t \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad (5.25)$$

$$\omega_A(t) = \omega_B(t) = 12.87381t \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (5.26)$$

Los resultados numéricos obtenidos de manera analítica están dados por:

La aceleración y la velocidad angular del volante A al transcurrir 3 segundos resulta

$$\alpha_A(3s) = 77.24286 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \odot$$

$$\omega_A(3s) = 115.85965 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \odot$$

Se sabe que la velocidad angular del volante A es el mismo que la velocidad angular del disco B , por lo que:

$$\omega_B = 115.85965 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \odot$$

Mientras que los momentos de inercia del volante A y del disco B están definidos como

$$I_C = m_A k_C^2 = (30 \text{ kg})(0.095 \text{ m})^2 = 0.27075 \text{ kg} - \text{m}^2$$

$$I_D = \frac{m_B r_B^2}{2} = \frac{(25 \text{ kg})(0.125 \text{ m})^2}{2} = 0.1953125 \text{ kg} - \text{m}^2$$

5.4.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá mediante simulación empleando las herramientas de bandas y poleas dentro del módulo de **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de la cadena y la catarina. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.1, en la página 8 de este trabajo.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 19-19 se muestra en la figura 5.61.

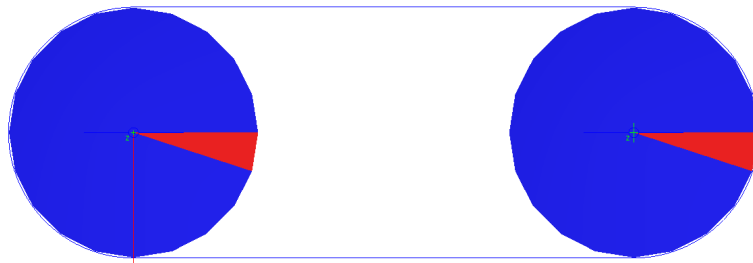


Figura 5.61: Modelo del problema en Adams[©].

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 5.62.

El tipo de polea es el mismo para ambas poleas, vea la figura 5.63. Como puede observarse en la figura 5.63 se seleccionaron poleas del tipo Poly-V. Es importante señalar que Adams[©] /Machinery permite únicamente crear un par de poleas a la vez.

Length	Millimeter
Mass	Kilogram
Force	Newton
Time	Second
Angle	Radian
Frequency	Hertz

Figura 5.62: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

La figura 5.64 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema que debe ser el mismo para ambas catarinas. Es importante mencionar que el método de análisis es el denominado “**Constraint**” donde únicamente la transmisión, reducción o amplificación, de las velocidades es de interés.

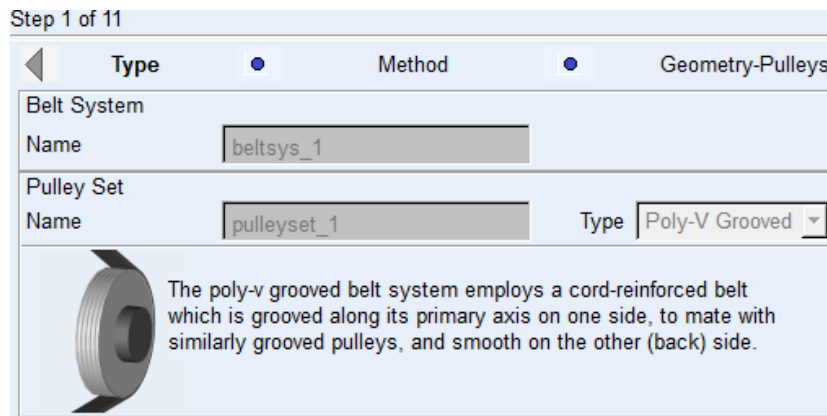


Figura 5.63: Tipo de polea empleado en Adams[©].

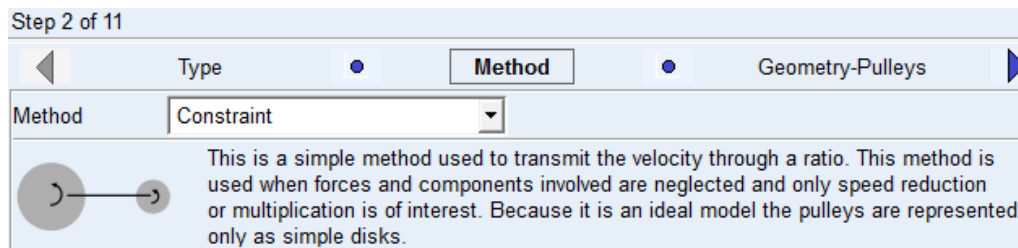


Figura 5.64: Método de análisis empleado por Adams[©].

La figura 5.65 muestra las propiedades geométricas de las poleas *A* y *B*, cabe mencionar que ambas poleas poseen las mismas propiedades. Lo que las diferencia son las coordenadas de sus centros.

Step 3 of 11

Method Geometry-Pulleys Material-Pulleys

Number of Pulleys Axis of Rotation

1 | 2 |

Pulley Name

Center Location

Geometry

Pulley Width Pulley Pitch Diameter

(a) Propiedades geométricas de la polea *A*

Step 3 of 11

Method Geometry-Pulleys Material-Pulleys

Number of Pulleys Axis of Rotation

1 | 2 |

Pulley Name

Center Location

Geometry

Pulley Width Pulley Pitch Diameter

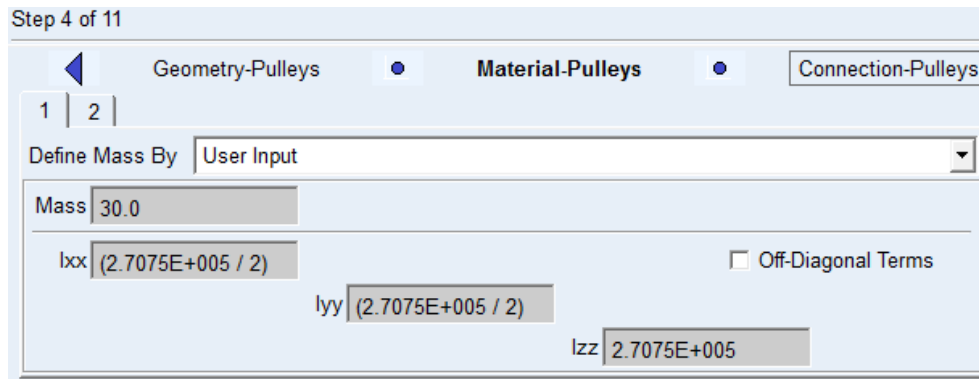
(b) Propiedades geométricas de la polea *B*

Figura 5.65: Propiedades geométricas de las poleas *A* y *B*.

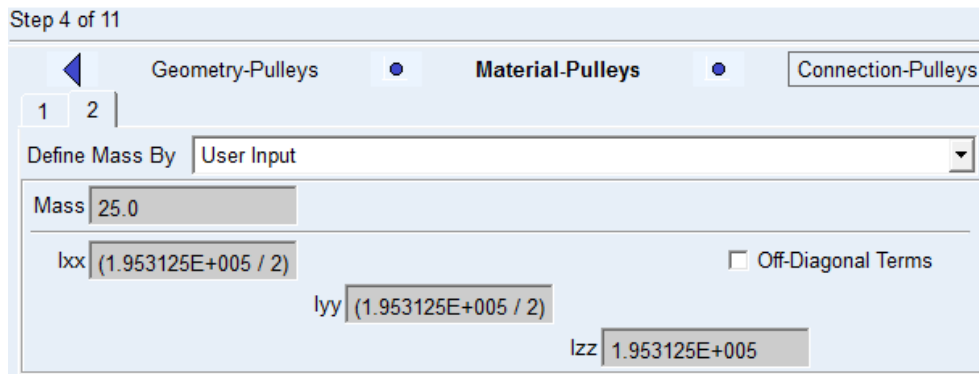
Los parámetros inerciales de las poleas *A* y *B*, se presentan en la figura 5.66. Debe notarse que los datos más importantes son las masas y los momentos de inercia de las poleas, respecto al eje *z* que pasa por el centro de cada una de las poleas. Estos valores deben corresponden a los empleados en la solución analítica del problema. Los momentos de inercia con respecto a los ejes *x* y *y* no son de importancia en este análisis; sin embargo es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje *z*.

Por otro lado, la creación del actuador en Adams/Machinery[©], se muestran en las figuras 5.67(a) y 5.67(b).

Para la simulación del modelo basta con ingresar un tiempo de 3 segundos, con un número de pasos de 1000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 5.68. Por otro lado, la selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se deseé y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

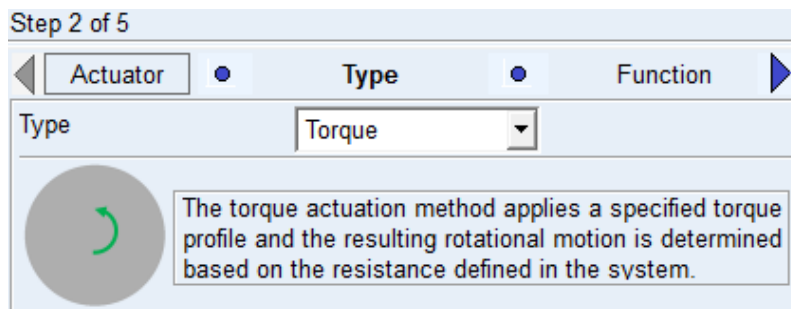


(a) Propiedades inerciales de la polea A

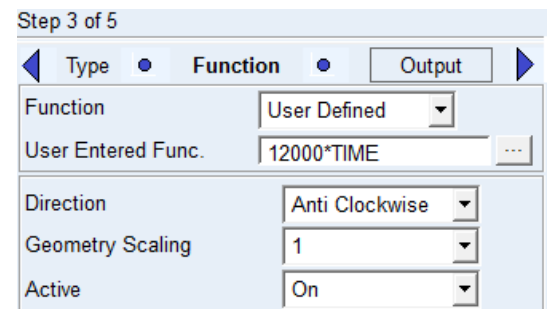


(b) Propiedades inerciales de la polea B

Figura 5.66: Propiedades inerciales de las poleas A y B.



(a) Tipo de actuador



(b) Parámetros de movimiento de la polea A

Figura 5.67: Tipo de actuador y parámetros de la función que define el movimiento de la polea A.

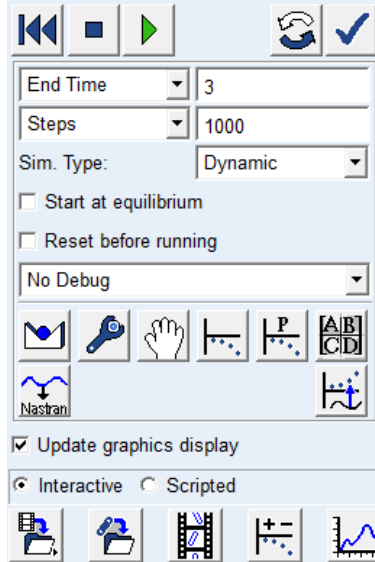


Figura 5.68: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse al post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 5.69 y 5.70.

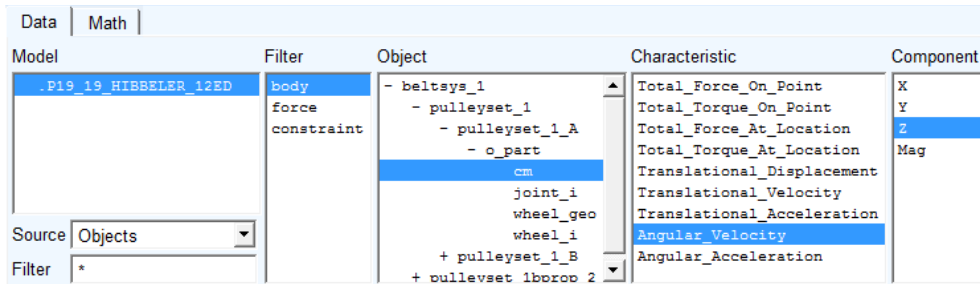
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_19_HIBBELER_12ED	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		wheel_geo	Translational_Acceleration	
		wheel_i	Angular_Velocity	
		+ pulleyset_1_B	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1boroo_2		

(a) Solicitud de la aceleración angular de la polea A

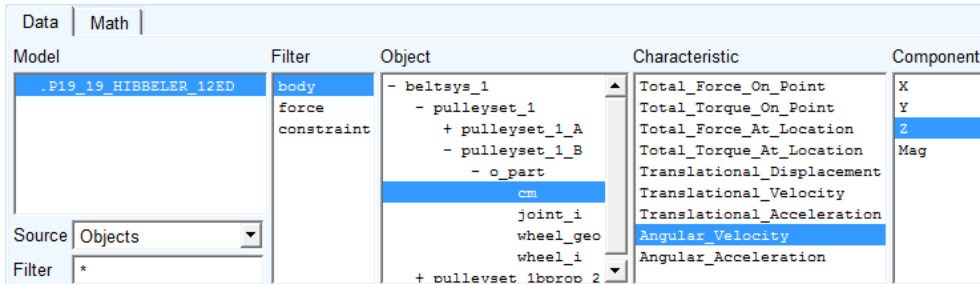
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_19_HIBBELER_12ED	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_1_B	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1boroo_2		

(b) Solicitud de la aceleración angular de la polea B

Figura 5.69: Solicitud de las aceleraciones angulares de ambas poleas.



(a) Solicitud de la velocidad angular de la polea A



(b) Solicitud de la velocidad angular de la polea B

Figura 5.70: Solicitud de las velocidades angulares de ambas poleas.

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©] están dados de manera gráfica en las figuras 5.71 y 5.72.

Como se observa en las figuras 5.71 y 5.72, la velocidad angular del volante A y del disco B son iguales, al igual que sus aceleraciones angulares, esto es debido a que ambos cuerpos tienen las mismas dimensiones, $r_A = r_B$; vea las ecuaciones (5.23) y (5.24).

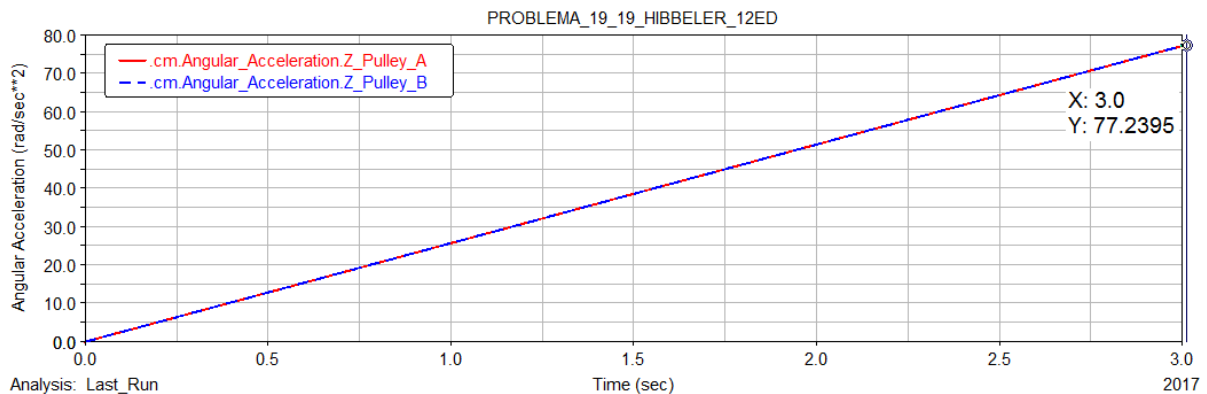


Figura 5.71: Resultado de la aceleración angular de la catarina A.

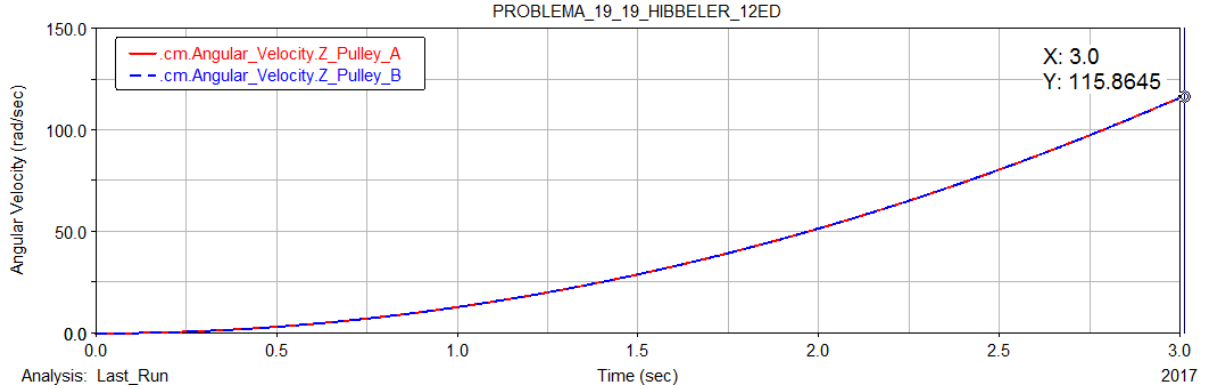


Figura 5.72: Resultado de la velocidad angular de la catarina A.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Los resultados obtenidos mediante simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 5.4 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 5.4: Comparación de resultados. 4.º problema de poleas y bandas.

Variable	Analítico	Módulo Cadenas y Catarina	Módulo Bandas y Poleas
$\alpha_A _{t=3s}$	$77.24286 \text{ rad/s}^2 \text{ } \ominus$	$77.2395 \text{ rad/s}^2 \text{ } \ominus$	$77.2395 \text{ rad/s}^2 \text{ } \ominus$
$\alpha_B _{t=3s}$	$77.24286 \text{ rad/s}^2 \text{ } \ominus$	$77.2395 \text{ rad/s}^2 \text{ } \ominus$	$77.2395 \text{ rad/s}^2 \text{ } \ominus$
$\omega_A _{t=3s}$	$115.85965 \text{ rad/s } \ominus$	$115.8645 \text{ rad/s } \ominus$	$115.8645 \text{ rad/s } \ominus$
$\omega_B _{t=3s}$	$115.85965 \text{ rad/s } \ominus$	$115.8645 \text{ rad/s } \ominus$	$115.8645 \text{ rad/s } \ominus$

5.5. Quinto problema de sistemas de bandas y poleas.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema de ejemplo 19-20 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 514.

Este problema fué desarrollado con anterioridad en el capítulo 4 mediante cadenas y catarinas, por lo que el objetivo de desarrollar este problema nuevamente, es el demostrar que se pueden obtener los mismos resultados o resultados aproximados, tanto con el módulo de cadenas como el de poleas y bandas. Con la única condición de emplear el método de análisis denominado “**Constraint**”.

Problema 7. El volante A de 30 lbf tiene un radio de giro con respecto a su centro de $k_A = 4 \text{ in}$. El disco B pesa 50 lb y está acoplado al volante por medio de una banda que no se desliza en sus superficies de contacto. Si un motor proporciona un par de torsión en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $M = (50t) \text{ lbf-ft}$, donde t está en segundos, determine el tiempo requerido para que el disco B alcance una velocidad angular de 60 rad/s a partir del reposo. Donde: $r_A = 6 \text{ in}$, $r_B = 9 \text{ in}$ y $\omega_B = 60 \text{ rad/s}$.

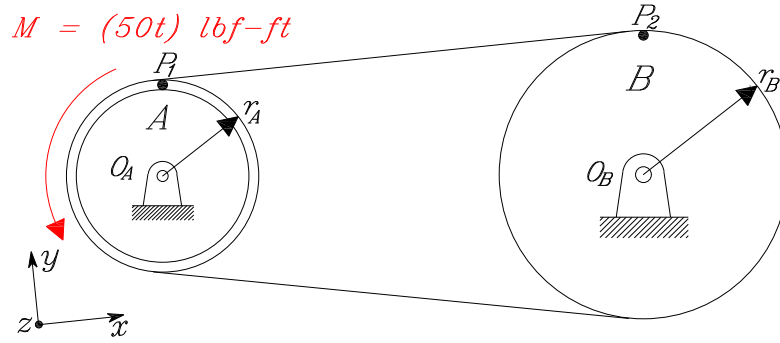


Figura 5.73: Modelo del problema 19-20 Hibbeler [18].

5.5.1. Solución analítica.

La solución analítica puede observarse en la sección 4.7 dentro del capítulo 4, por lo que los resultados obtenidos mediante el análisis cinemático se muestran en las ecuaciones 5.27 y 5.28.

$$\omega_A = \frac{r_B}{r_A} \omega_B \quad (5.27)$$

$$\alpha_B = \frac{r_A}{r_B} \alpha_A \quad (5.28)$$

Mientras que los resultados obtenidos mediante el análisis cinético se muestran en las ecuaciones 5.29 y 5.30.

$$\int_0^t M dt = I_A (\omega_A)_2 + I_B (\omega_B)_2 \left(\frac{r_A}{r_B} \right) \quad (5.29)$$

$$\alpha_A(t) = 167.9999999 t \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad (5.30)$$

La ecuación 5.29 permite calcular el tiempo en el que la velocidad angular del disco B alcanza una velocidad de 60 rad/s .

Se sabe que los momentos de inercia de ambas poleas están definidos como:

$$I_A = 0.10351967 \text{ slug-ft}^2$$

$$I_B = 0.4367236 \text{ slug-ft}^2$$

Resultados numéricos obtenidos de manera analítica.

El tiempo que tarda el disco B en alcanzar una velocidad angular de 60 rad/s .

$$t = 1.035098 \text{ s}$$

La velocidad angular del volante A y B para $t = 1.035098 \text{ s}$, resulta

$$\omega_A = 90.0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \odot$$

$$\omega_B = 60.0 \text{ rad/s} \odot$$

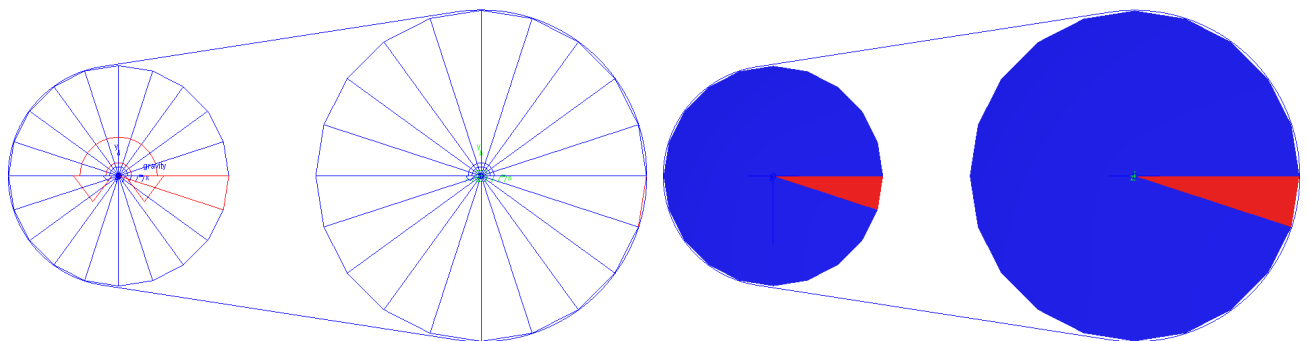
La aceleración angular del volante A y B para $t = 1.035098$ s, resulta

$$\alpha_A = 173.8964639 \frac{rad}{s^2} \odot$$

$$\alpha_B = 115.9309759 \frac{rad}{s^2} \odot$$

5.5.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

En esta sección el problema se resolverá simulando el sistema empleando las herramientas de bandas y poleas dentro del módulo de **Machinery** del programa Adams[©]. El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 19-20 se muestra en la figura 5.74.



(a) Vista del sistema mediante un marco de alambre

(b) Vista del sistema con sólidos sombreados

Figura 5.74: Modelo del problema en Adams[©].

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 5.75.

Length	Foot
Mass	Slug
Force	Pound Force
Time	Second
Angle	Radian
Frequency	Hertz

Figura 5.75: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

El tipo de polea es el mismo para ambas poleas, vea la figura 5.76. Como puede observarse en la figura 5.76 se seleccionaron poleas del tipo Poly-V. Es importante señalar que Adams[©] /Machinery permite únicamente crear un par de poleas a la vez.

La figura 5.77 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema. Es importante mencionar que el método de análisis es el denominado “**Constraint**”, donde únicamente la transmisión, reducción o amplificación, de las velocidades es de interés.

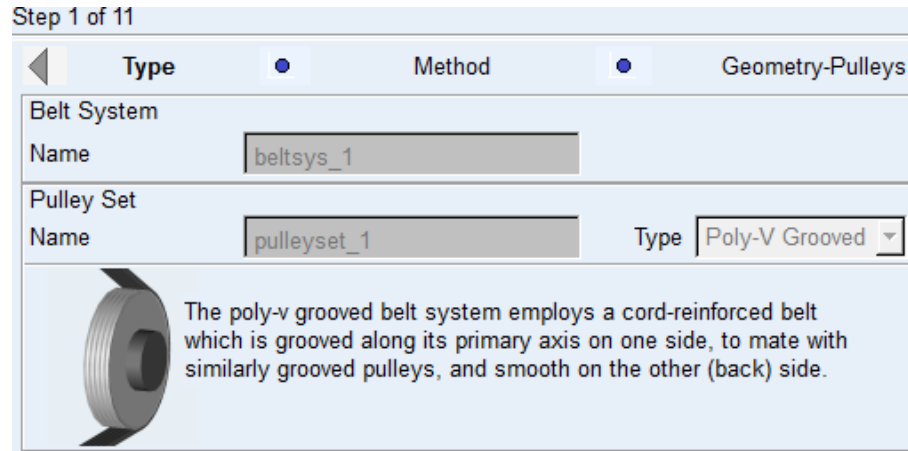


Figura 5.76: Tipo de polea empleado en el modelo de Adams[©].

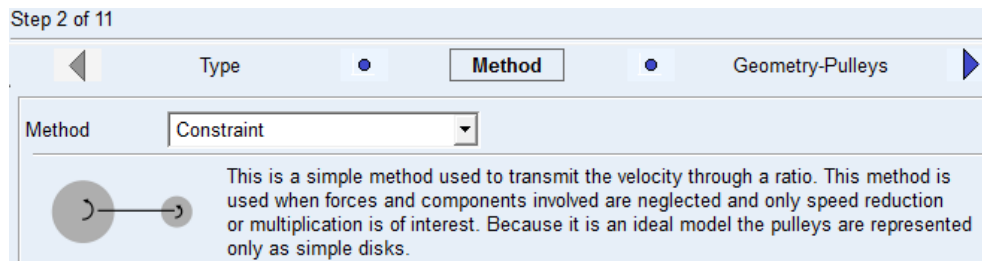


Figura 5.77: Método de análisis empleado por Adams[©].

La figura 5.78 muestra las propiedades geométricas de las poleas *A* y *B*, cabe mencionar que ambas poleas poseén las mismas propiedades, lo que las diferencia son las coordenadas de sus centros.

Los parámetros inerciales de las poleas *A* y *B*, se presentan en la figura 5.79. Debe notarse que los datos más importantes son las masas y los momentos de inercia de las poleas, respecto al eje *z* que pasa por el centro de cada una de las poleas. Estos valores deben corresponden a los empleados en la solución analítica del problema. Los momentos de inercia con respecto a los ejes *x* y *y* no son de importancia en este análisis; sin embargo es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje *z*.

Por otro lado, para la creación del actuador sobre la polea *A* en Adams/Machinery[©], vea la figura 5.80.

Step 3 of 11

Method **Geometry-Pulleys** Material-Pulleys

Number of Pulleys 2 Axis of Rotation Global Z 0.0,0.0,0.0

1 | 2 |

Pulley Name A

Center Location 0.0, 0.0, 0.0

Geometry

Pulley Width (1 / 24) Pulley Pitch Diameter 1.0

(a) Propiedades geométricas del volante *A*

Step 3 of 11

Method **Geometry-Pulleys** Material-Pulleys

Number of Pulleys 2 Axis of Rotation Global Z 0.0,0.0,0.0

1 | 2 |

Pulley Name B

Center Location 1.64042,0.0,0.0

Geometry

Pulley Width (1 / 24) Pulley Pitch Diameter 1.5

(b) Propiedades geométricas del disco *B*

Figura 5.78: Propiedades geométricas del volante *A* y el disco *B*.

Step 4 of 11

Geometry-Pulleys **Material-Pulleys** Connection-Pulleys

1 | 2 |

Define Mass By User Input

Mass 0.9316770186

Ixx (0.1035196687 / 2) Off-Diagonal Terms

Iyy (0.1035196687 / 2)

Izz 0.1035196687

(a) Propiedades inerciales del volante *A*

Step 4 of 11

Geometry-Pulleys **Material-Pulleys** Connection-Pulleys

1 | 2 |

Define Mass By User Input

Mass 1.552795031

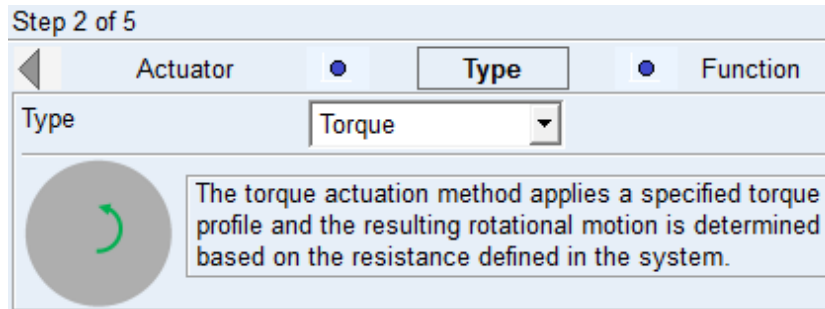
Ixx (0.4367236025 / 2) Off-Diagonal Terms

Iyy (0.4367236025 / 2)

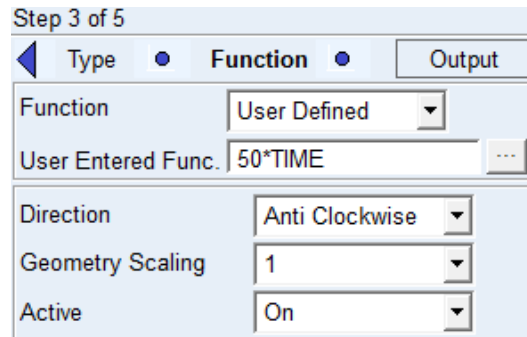
Izz 0.4367236025

(b) Propiedades inerciales del disco *B*

Figura 5.79: Propiedades inerciales del volante *A* y el disco *B*.



(a) Tipo de actuador



(b) Parámetros de movimiento del volante A

Figura 5.80: Tipo de actuador y parámetros de movimiento del volante A.

Para la simulación del modelo basta con ingresar un tiempo de 2 segundos, con un número de pasos de 2000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 5.81. Por otro lado, la selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

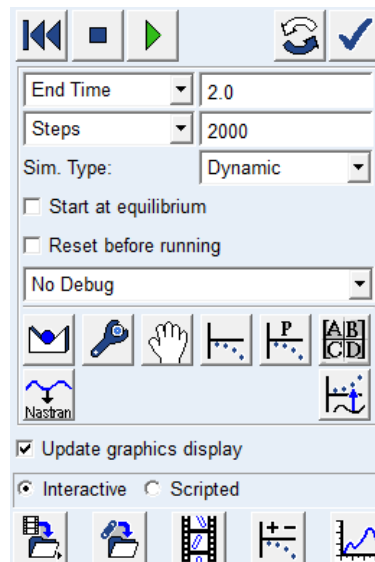


Figura 5.81: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 5.82 y 5.83.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_20_IPS	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		wheel_geo	Translational_Acceleration	
		wheel_i	Angular_Velocity	
		+ pulleyset_1_B	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1hpron ?		

(a) Solicitud de la velocidad angular del volante A

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_20_IPS	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_1_B	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1hpron ?		

(b) Solicitud de la velocidad angular del disco B

Figura 5.82: Solicitud de las velocidades angulares del volante A y el disco B .

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_20_IPS	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- o_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		joint_i	Translational_Velocity	
		wheel_geo	Translational_Acceleration	
		wheel_i	Angular_Velocity	
		+ pulleyset_1_B	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1hpron ?		

(a) Solicitud de la aceleración angular del volante A

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_20_IPS	body	- beltsys_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- pulleyset_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ pulleyset_1_A	Total_Force_At_Location	Z
		- pulleyset_1_B	Total_Torque_At_Location	Mag
		- o_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		joint_i	Translational_Acceleration	
		wheel_geo	Angular_Velocity	
		wheel_i	Angular_Acceleration	
		+ pulleyset_1hpron ?		

(b) Solicitud de la aceleración angular del disco B

Figura 5.83: Solicitud de las aceleraciones angulares del volante A y el disco B .

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©] están dados de manera gráfica en las figuras 5.84, 5.85 y 5.86, todos estos resultados están indicados para un tiempo $t = 1.036$ s, que es el tiempo que la polea B tarda en llegar a una velocidad angular igual a 60 rad/s .

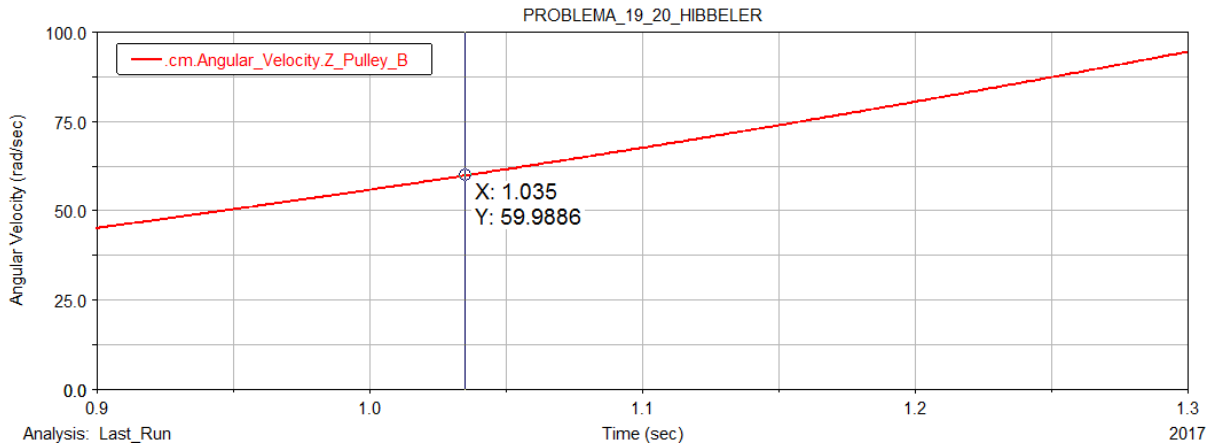


Figura 5.84: Resultado de la variable tiempo t cuando $\omega_B = 60 \text{ rad/s}$.

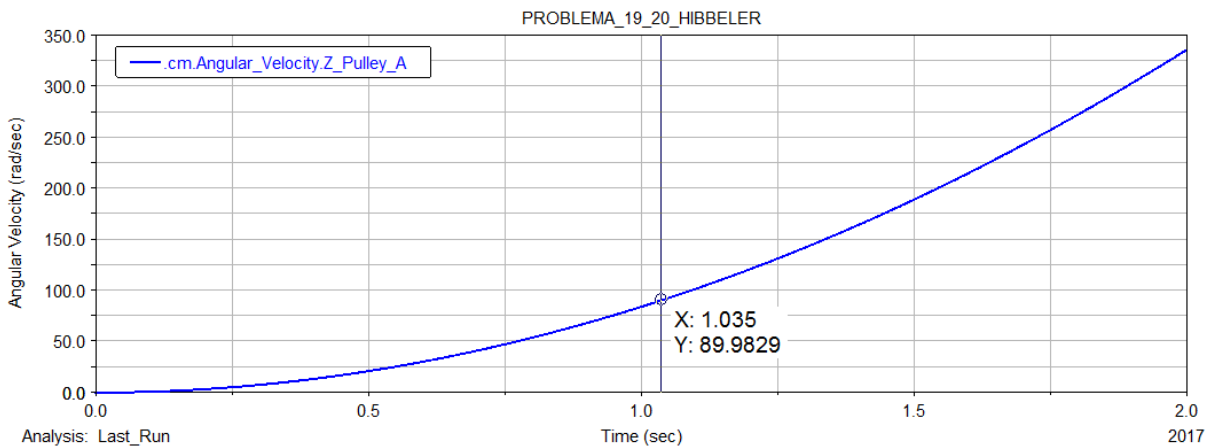


Figura 5.85: Velocidad angular ω_A cuando ω_B alcanza una velocidad angular de 60 rad/s .

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Los resultados obtenidos mediante simulación tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 5.5 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

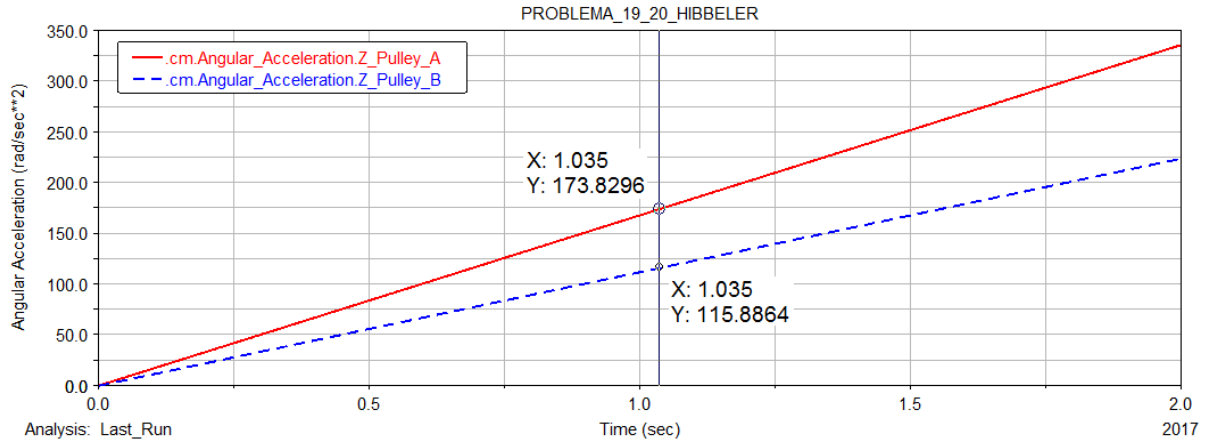


Figura 5.86: Aceleración angular α_A y α_B para un tiempo $t = 1.035$ s.

Tabla 5.5: Comparación de resultados. 5.º problema de poleas y bandas.

Variable	Analíticamente	Módulo Cadenas y Catarinas	Módulo Bandas y Poleas
$\omega_A _{\omega_B=60rad/s}$	$90 rad/s$ ☺	$90.0409 rad/s$ ☺	$89.9829 rad/s$
$t _{\omega_B=60rad/s}$	$1.035098 s$	$1.0353 s$	1.035
$\alpha_A _{\omega_B=60rad/s}$	$173.8964639 rad/s^2$ ☺	$173.9024 rad/s^2$ ☺	$173.8296 rad/s^2$ ☺
$\alpha_B _{\omega_B=60rad/s}$	$115.9309759 rad/s^2$ ☺	$115.9349 rad/s^2$ ☺	$115.8864 rad/s^2$ ☺

Capítulo 6

Sistemas de engranes y cremalleras resueltos mediante Adams[©]/Machinery.

En este capítulo se presentan diferentes problemas que involucran sistemas de engranes o combinaciones de engranes y cremalleras, todos esos problemas se resolverán inicialmente mediante los métodos analíticos que se presentan en las unidades de aprendizaje correspondientes en las licenciaturas de ingeniería mecánica e ingeniería mecatrónica de la División de Ingenierías del Campus Irapuato-Salamanca de la Universidad de Guanajuato; posteriormente esos problemas se resuelven mediante la simulación del sistema empleando las herramientas del módulo Adams[©]/Machinery. Por la naturaleza del movimiento de los engranes, la totalidad de los problemas presentados en este capítulo pertenecen a la dinámica del cuerpo rígido.

6.1. Primer problema de sistemas de engranes y cremalleras.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 16-9 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 324.

Problema 1: Cuando sólo dos engranes están engranados, el engrane propulsor A y el engrane propulsado B siempre girarán en direcciones opuestas. Para hacerlos que giren en la misma dirección se utiliza un engrane loco o guía C . En el caso que se ilustra, determine la velocidad angular del engrane B cuando $t = 5s$, si el engrane A comienza a girar desde el reposo con una aceleración angular $\alpha_A = (3t + 2) \text{ rad/s}^2$, donde t está en segundos. Las dimensiones de los engranes están dadas por: $r_A = 50 \text{ mm}$, $r_C = 50 \text{ mm}$ y $r_B = 75 \text{ mm}$.

6.1.1. Solución analítica.

Puesto que no existe deslizamiento entre el engrane A y el engrane C ; y entre el engrane C y el engrane B , las velocidades y las componentes tangenciales de aceleración del punto P_1 entre los engranes A y C son iguales. De la misma manera ocurre para los engranes C y B en el punto P_2 , vea la figura 6.2. A partir de este resultado, se obtienen dos relaciones: la primera, entre las velocidades angulares de los engranes $A-C$, en función de sus radios, lo mismo ocurre con los engranes $C-B$; la segunda, entre las aceleraciones angulares de los engranes $A-C$, en función de sus radios, lo mismo

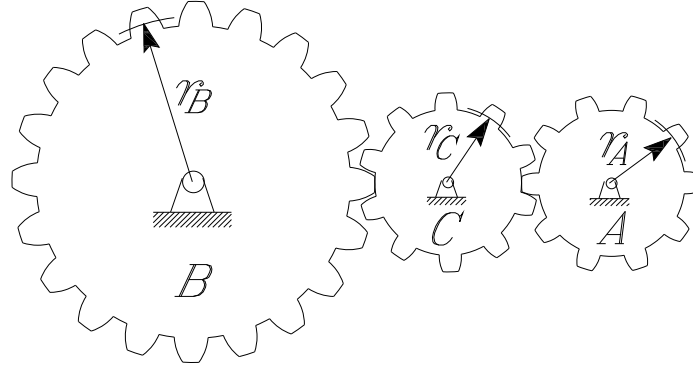


Figura 6.1: Modelo del problema 16-9 Hibbeler [18].

ocurre con los engranes C y B ; vea la figura 6.2 y las ecuaciones (6.1), (6.2), (6.3) y (6.4).

Análisis de velocidades angulares entre los engranes A y C .

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\omega_A \hat{k} \times -r_A \hat{i} = \omega_A r_A \hat{j} = v_{A_{P_1}} = v_{C_{P_1}} = \vec{\omega}_C \times \vec{r}_{P_1/O_C} = \omega_C \hat{k} \times r_C \hat{i} = \omega_C r_C \hat{j}$$

Donde:

$$r_A \omega_A = r_C \omega_C \quad \text{de manera que} \quad \omega_C = \frac{r_A}{r_C} \omega_A \quad (6.1)$$

Análisis de velocidades angulares entre los engranes C y B .

$$\vec{\omega}_C \times \vec{r}_{P_2/O_C} = \omega_C \hat{k} \times -r_C \hat{i} = -\omega_C r_C \hat{j} = v_{C_{P_2}} = v_{B_{P_2}} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = -\omega_B \hat{k} \times r_B \hat{i} = -\omega_B r_B \hat{j}$$

Por lo que:

$$r_C \omega_C = r_B \omega_B \quad \text{tal que} \quad \omega_B = \frac{r_C}{r_B} \omega_C \quad (6.2)$$

Análisis de aceleraciones angulares entre los engranes A y C .

$$\vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\alpha_A \hat{k} \times -r_A \hat{i} = \alpha_A r_A \hat{j} = a_{tA_{P_1}} = a_{tC_{P_1}} = \vec{\alpha}_C \times \vec{r}_{P_1/O_C} = \alpha_C \hat{k} \times r_C \hat{i} = \alpha_C r_C \hat{j}$$

De manera que

$$r_A \alpha_A = r_C \alpha_C \quad \text{y} \quad \alpha_C = \frac{r_A}{r_C} \alpha_A \quad (6.3)$$

Análisis de aceleraciones angulares entre los engranes C y B .

$$\vec{\alpha}_C \times \vec{r}_{P_2/O_C} = \alpha_C \hat{k} \times -r_C \hat{i} = -\alpha_C r_C \hat{j} = a_{tC_{P_2}} = a_{tB_{P_2}} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_2/O_B} = -\alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{i} = -\alpha_B r_B \hat{j}$$

De aquí que:

$$r_C \alpha_C = r_B \alpha_B \quad \text{y} \quad \alpha_B = \frac{r_C}{r_B} \alpha_C \quad (6.4)$$

De acuerdo con el problema la aceleración angular del engrane A está definida por $\alpha_A = (3t + 2) \text{ rad/s}^2$, sustituyendo los valores numéricos para un tiempo $t = 5 \text{ s}$, se obtiene un valor de la aceleración angular α_A de

$$\alpha_A = (3)(5) + 2 = 17 \text{ rad/s}^2 \quad \circlearrowright$$

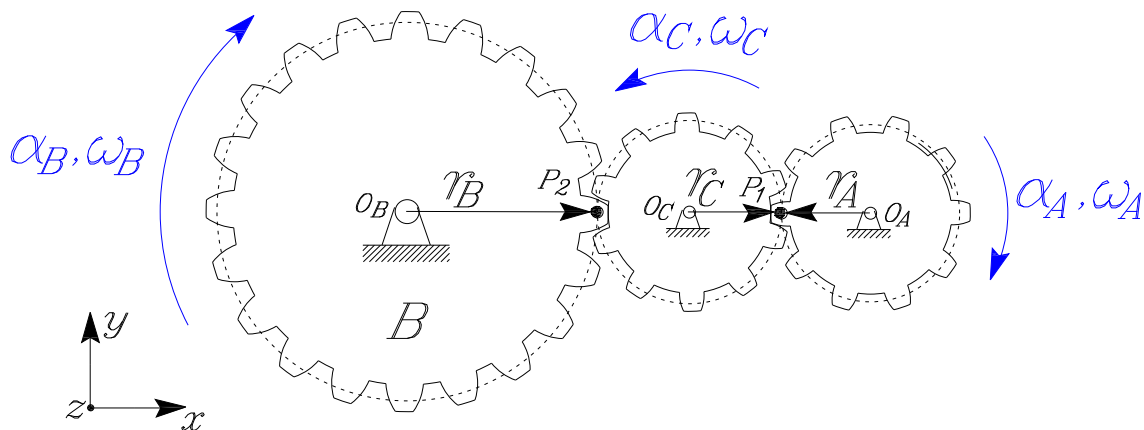


Figura 6.2: Diagrama cinemático del problema.

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (6.3), se obtiene el valor de la aceleración angular del engrane C .

$$\alpha_C = \left(\frac{50 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \right) (17 \text{ rad/s}^2) = 17 \text{ rad/s}^2 \quad \circlearrowleft$$

Como se puede observar, la velocidad angular del engrane A y el engrane C son iguales en magnitud, esto debido a que ambos engranes tienen sus radios primitivos o de paso iguales.

Una vez obtenido el valor de α_C , se sustituyen los datos numéricos en la ecuación (6.4) para obtener el valor de la aceleración angular del engrane B .

$$\alpha_B = \left(\frac{50 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} \right) (17 \text{ rad/s}^2) = 11.33334 \text{ rad/s}^2 \quad \circlearrowleft$$

Para obtener la velocidad angular del engrane motriz A basta con integrar la ecuación de la aceleración angular α_A desde un tiempo $t = 0 \text{ s}$ hasta $t = 5 \text{ s}$.

$$\omega_A = \int_0^5 (3t + 2) dt = \frac{3}{2}t^2 + 2t \Big|_{t=0}^{t=5s} = \frac{3}{2}(5^2) + 2(5) = 47.5 \text{ rad/s} \quad \circlearrowleft$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (6.1), se obtiene el valor de la velocidad angular del engrane C .

$$\omega_C = \left(\frac{50 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \right) (47.5 \text{ rad/s}^2) = 47.5 \text{ rad/s} \quad \circlearrowleft$$

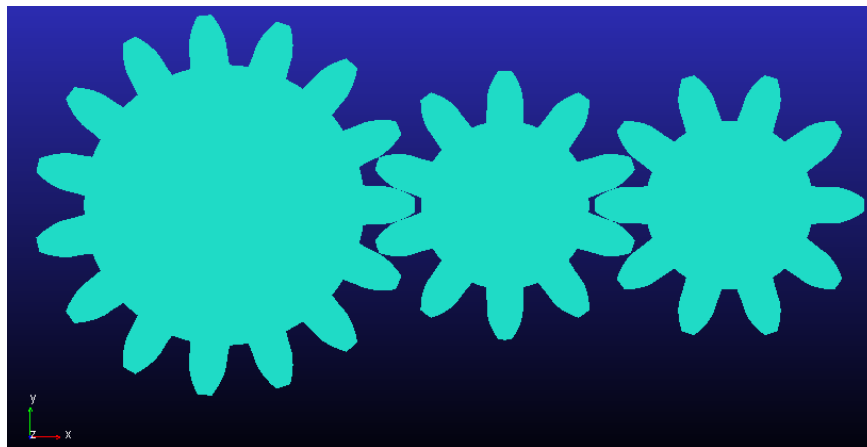
Una vez obtenido el valor de ω_C , se sustituyen los datos numéricos en la ecuación (6.2) para obtener el valor de la velocidad angular del engrane B .

$$\omega_B = \left(\frac{50 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} \right) (47.5 \text{ rad/s}^2) = 31.66667 \text{ rad/s} \quad \circlearrowleft$$

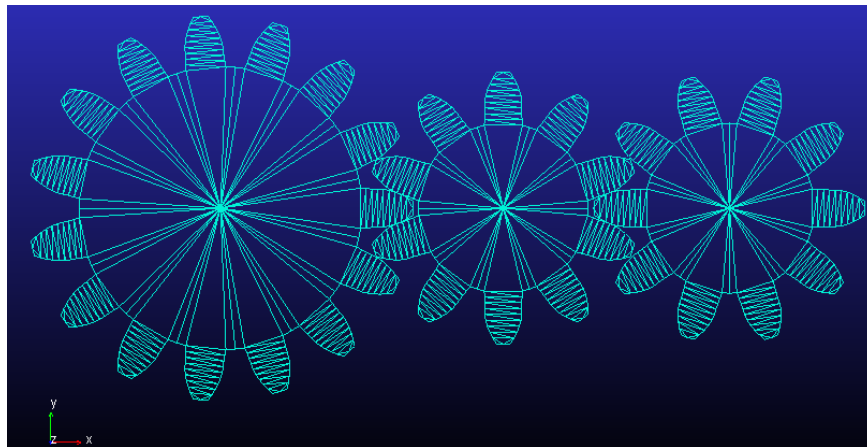
6.1.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

En esta sección el problema se resolverá simulando el sistema empleando las herramientas de engranes dentro del módulo **Machinery** del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección no se discute la selección de los parámetros geométricos de los engranes. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.4 en la página 22. Es necesario mencionar que dentro del módulo de engranes se emplea una opción de suma importancia denominada “**Simplified**”. Esta opción permite calcular las fuerzas en el engranaje, la holgura o backlash entre el par de engranes y analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 16-9 se muestra en la figura 6.3.



(a) Vista del sistema con sólidos sombreados



(b) Vista del sistema mediante un marco de alambre

Figura 6.3: Modelo del problema en Adams[©].

Es importante aclarar que Adams[©]/Machinery sólo puede crear una pareja de engranes a la vez, por lo que para este problema se crearon dos parejas de engranes. El tipo de engrane es el mismo para todos los engranes del modelo, vea la figura 6.4. Como puede observarse se seleccionaron engranes rectos o “spur”.

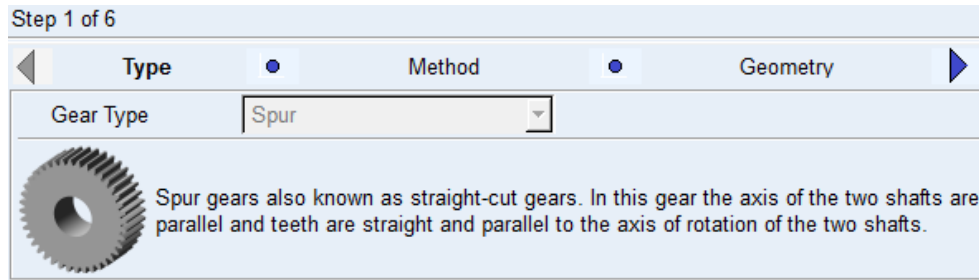


Figura 6.4: Tipos de engranes empleados por Adams[©], para el par de engranes *A* y *C*.

La figura 6.5 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema que debe ser el mismo para toda pareja de engrane dentro del modelo. Es importante mencionar que el método de análisis es el denominado “**Simplified**”.

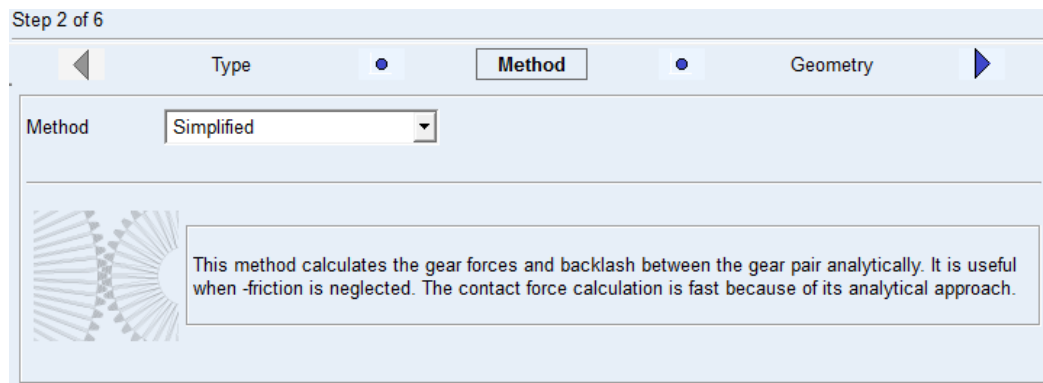


Figura 6.5: Método de análisis empleado por Adams[©], para el par de engranes *A* y *C*.

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 6.6.

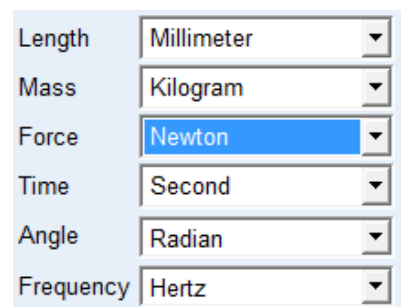


Figura 6.6: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Los parámetros geométricos para el par de engrane A , C y C , B , se presentan en las figuras 6.7 y 6.8. El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios primitivos o de paso iguales a los indicados en el enunciado del problema, y seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de los engranes. En este caso, debe notarse que la distancia entre centros entre los engranes A y C debe ser igual a la suma de los radios de paso de ambos engranes.

Step 3 of 6

Method **Geometry** Material

Module 10.0 Pressure Angle 0.349 $20^\circ = 0.349 \text{ rad}$ Axis of Rotation Global Z 0.0, 0.0, 0.0

GEAR1		GEAR2	
Name	Driver_1	Name	Driven_1 External
Center Location	225.0, 0.0, 0.0 mm	Center Location	125.0, 0.0, 0.0
No. of Teeth	10	No. of Teeth	10
Gear Width	12.7 mm	Gear Width	12.7
Bore Radius	0.0	Bore Radius	0.0

Geometry Settings: Profile points 10 Layers 5

Figura 6.7: Propiedades geométricas del par de engranes A y C .

Step 3 of 6

Method **Geometry** Material

Module 10.0 Pressure Angle 0.349 Axis of Rotation Orientation 0.0, 0.0, 0.0

GEAR1		GEAR2	
Name	Driven_1	Name	Driven External
Center Location	125.0, 0.0, 0.0	Center Location	0.0, 0.0
No. of Teeth	10	No. of Teeth	15
Gear Width	12.7	Gear Width	12.7
Bore Radius	0.0	Bore Radius	0.0

Geometry Settings: Profile points 10 Layers 5

Figura 6.8: Propiedades geométricas del par de engranes C y B .

El usuario debe saber que para la creación del par de engranes C y B , se seleccionó un engrane ya existente dentro del modelo, en este caso se seleccionó el engrane C como el engrane uno o “Gear 1” para esta segunda pareja de engranes, vea la figura 6.8.

La figura 6.9 muestra las propiedades de contacto entre los pares de engranes, para este problema, dichas propiedades se dejan iguales a las que aparecen por default, las cuales son las mismas para el par de engranajes C y B .

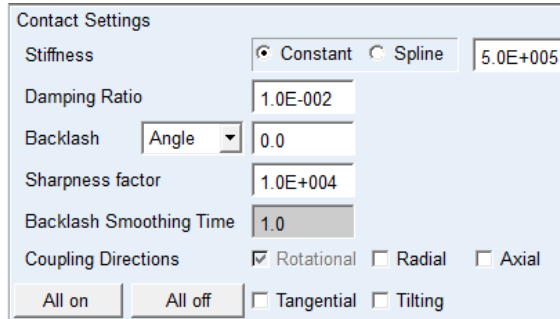
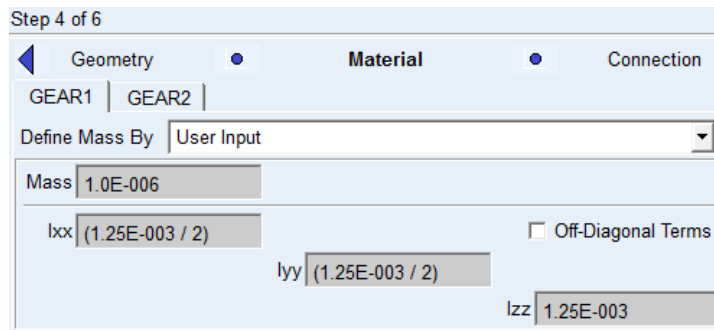
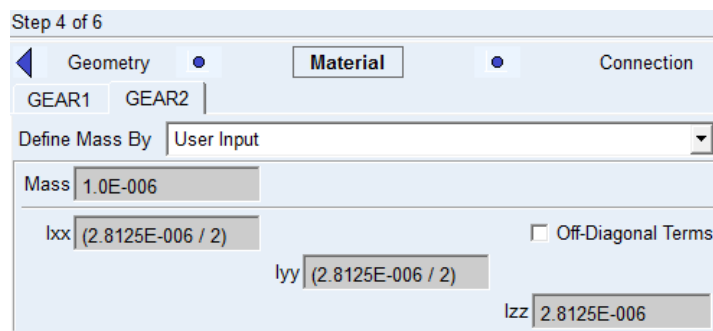


Figura 6.9: Parámetros de contactos para el par de engranes A y C .

Los parámetros inerciales de los pares de engranajes A , C y C , B , se presentan en la figura 6.10. Debe notarse que al ser un problema de cinemática del cuerpo rígido, los datos como las masas de los engranes, no son de interés. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y , no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco, estas sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .



(a) Propiedades inerciales del engrane A



(b) Propiedades inerciales del engrane B

Figura 6.10: Propiedades inerciales de los engranes A y B para los pares de engranes $A-C$ y $C-B$.

Las propiedades inerciales de los engranes A y C , pertenecientes a los pares de engranes $A-C$ y $C-B$, son iguales; por lo que, únicamente se muestran las propiedades inerciales del engrane A , vea la figura 6.10(a). La figura 6.10(b) muestra las propiedades inerciales del engrane B perteneciente al par de engranes $C-B$.

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 5 segundos, con un número de pasos de 2000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 6.11. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se deseé y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

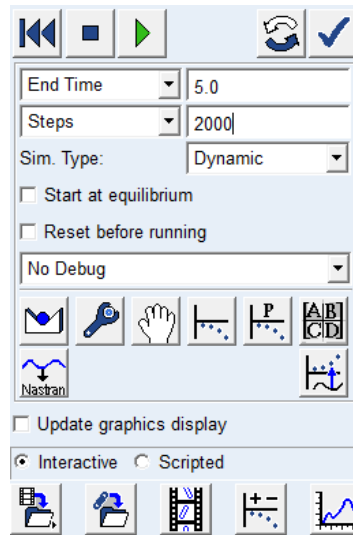


Figura 6.11: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

La figura 6.12, muestra el parámetro *Motion*, o lo que es igual, la función que rige el comportamiento de la aceleración angular del engrane A . Note que las unidades de medición de ángulos, seleccionada en la figura 6.6, son radianes.

Name	MOTION_1
Joint	Driver_1.gear_revolute
Joint Type	revolute
Direction	Rotational
Define Using	Function
Function (time)	3* time+2
Type	Acceleration
Displacement IC	0.0
Velocity IC	0.0

Figura 6.12: Función que rige el comportamiento de la aceleración angular del engrane A .

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 6.13, 6.14, 6.15, 6.16, 6.17 y 6.18.

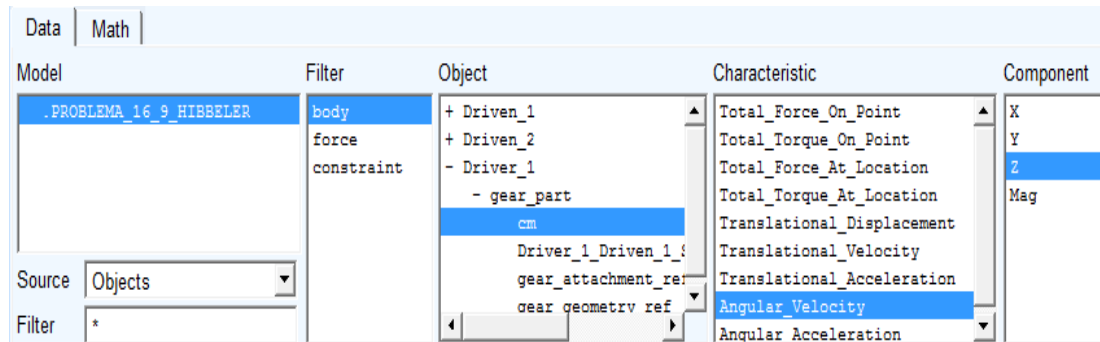


Figura 6.13: Solicitud de la velocidad angular del engrane A.

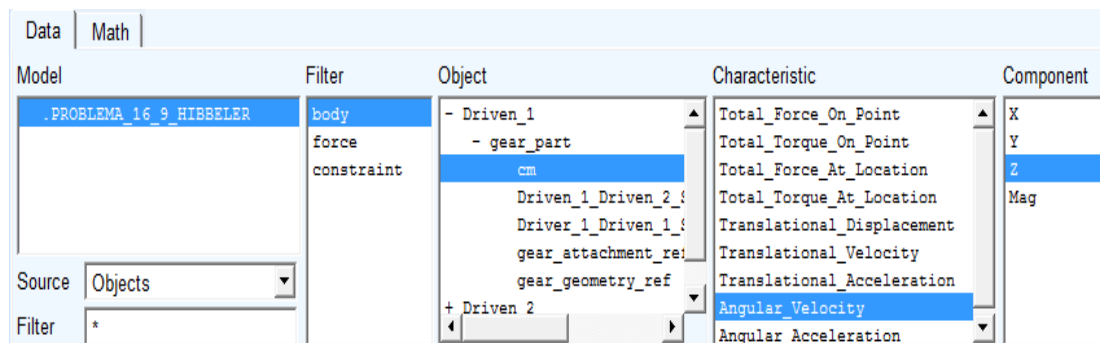


Figura 6.14: Solicitud de la velocidad angular del engrane C.

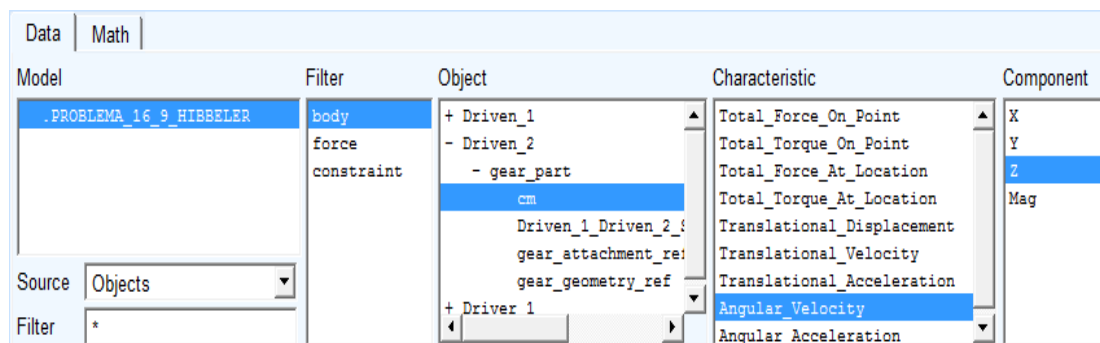


Figura 6.15: Solicitud de la velocidad angular del engrane B.

Data		Math			
Model	Filter	Object	Characteristic	Component	
.PROBLEMA_16_9_HIBBELER	body	+ Driven_1	Total_Force_On_Point	X	
	force	+ Driven_2	Total_Torque_On_Point	Y	
	constraint	- Driver_1	Total_Force_At_Location	Z	
		- gear_part	Total_Torque_At_Location	Mag	
		cm	Translational_Displacement		
		Driver_1_Driven_1_SFo	Translational_Velocity		
		gear_attachment_ref	Translational_Acceleration		
		gear_geometry_ref	Angular_Velocity		
			Angular_Acceleration		

Source: Objects
Filter: *

Figura 6.16: Solicitud de la aceleración angular del engrane A.

Data		Math			
Model	Filter	Object	Characteristic	Component	
.PROBLEMA_16_9_HIBBELER	body	- Driven_1	Total_Force_On_Point	X	
	force	- gear_part	Total_Torque_On_Point	Y	
	constraint	cm	Total_Force_At_Location	Z	
		Driven_1_Driven_2_SFo	Total_Torque_At_Location	Mag	
		Driver_1_Driven_1_SFo	Translational_Displacement		
		gear_attachment_ref	Translational_Velocity		
		gear_geometry_ref	Translational_Acceleration		
		+ Driven_2	Angular_Velocity		
		+ Driver_1	Angular_Acceleration		

Source: Objects
Filter: *

Figura 6.17: Solicitud de la aceleración angular del engrane C.

Data		Math			
Model	Filter	Object	Characteristic	Component	
.PROBLEMA_16_9_HIBBELER	body	+ Driven_1	Total_Force_On_Point	X	
	force	- Driven_2	Total_Torque_On_Point	Y	
	constraint	- gear_part	Total_Force_At_Location	Z	
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag	
		Driven_1_Driven_2_SFo	Translational_Displacement		
		gear_attachment_ref	Translational_Velocity		
		gear_geometry_ref	Translational_Acceleration		
		+ Driver_1	Angular_Velocity		
			Angular_Acceleration		

Source: Objects
Filter: *

Figura 6.18: Solicitud de la aceleración angular del engrane B.

Los resultados obtenidos por el programa Adams[©] se muestran en las figuras 6.19 y 6.20.

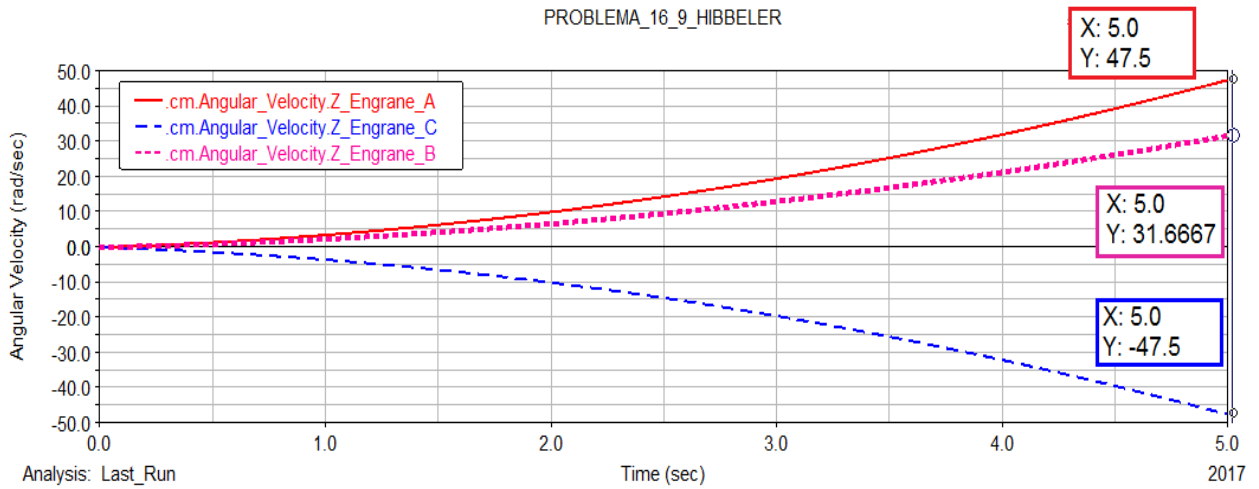


Figura 6.19: Resultados de las velocidades angulares de los engranes *A*, *C* y *B*.

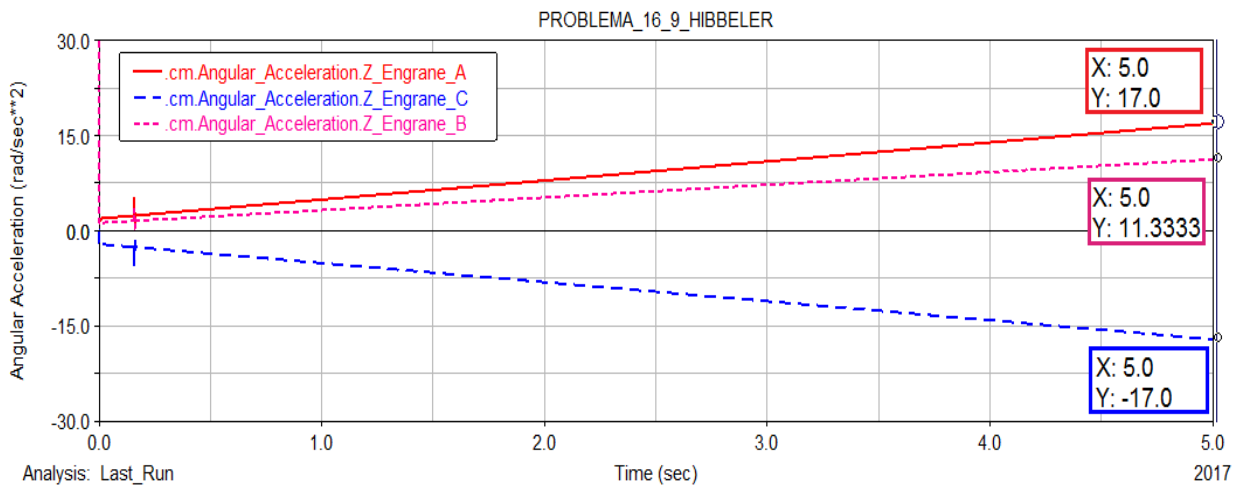


Figura 6.20: Resultados de las velocidades angulares de los engranes *A*, *C* y *B*.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©], vea la figura 6.6.

Estos resultados son casi completamente iguales a los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 6.1 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 6.1: Comparación de resultados. 1.º problema de engranes y cremalleras

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
$\omega_A _{t=5s}$	$47.5 \text{ rad/s} \curvearrowright$	$47.5 \text{ rad/s} \curvearrowright$
$\omega_C _{t=5s}$	$47.5 \text{ rad/s} \curvearrowright$	$47.5 \text{ rad/s} \curvearrowright$
$\omega_B _{t=5s}$	$31.66667 \text{ rad/s} \curvearrowright$	$31.6667 \text{ rad/s} \curvearrowright$
$\alpha_A _{t=5s}$	$17.0 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$	$17.0 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$
$\alpha_C _{t=5s}$	$17.0 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$	$17.0 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$
$\alpha_B _{t=5s}$	$11.33334 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$	$11.3333 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$

6.2. Segundo problema de sistemas de engranes y cremalleras.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema fundamental 16-20 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 322.

Problema 2: El engrane rueda sobre la cremallera fija con una velocidad angular de $\omega = 12 \text{ rad/s}$ y una aceleración angular de $\alpha = 6 \text{ rad/s}^2$. Determine la velocidad y aceleración del punto A. Donde: $r_{A/O} = r_{O/B_2} = 0.3 \text{ m}$, $\omega = 12 \text{ rad/s} \curvearrowright$ y $\alpha = 6 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$

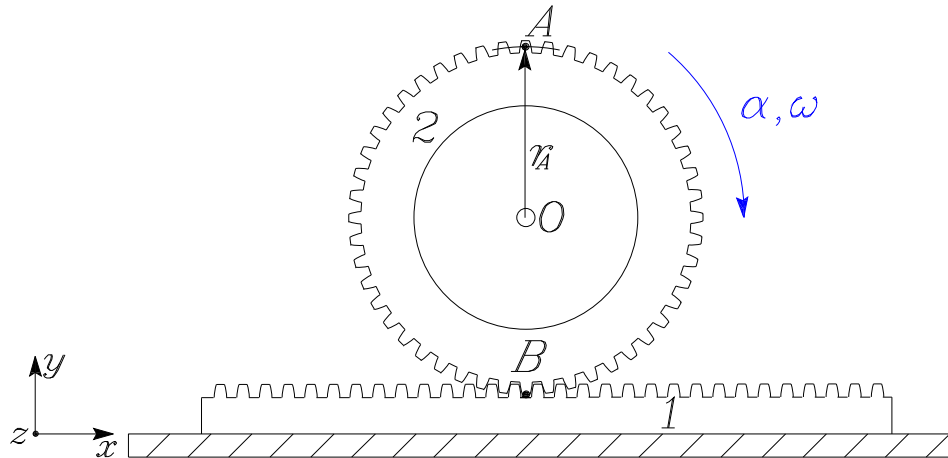


Figura 6.21: Modelo del problema fundamental 16-20 Hibbeler [18].

6.2.1. Solución analítica.

No existe deslizamiento entre el engrane y la cremallera, pues el sistema está sujeto en un movimiento de rodadura, que es un caso especial de movimiento plano general, por lo que la velocidad en el punto B como parte de la cremallera y el punto B como parte del engrane son iguales, lo mismo ocurre con la aceleración tangencial en el punto B como parte de ambos cuerpos, vea la ecuación (6.5) y la figura 6.21.

$$\vec{v}_{B_1} = \vec{v}_{B_2} \quad \text{donde} \quad \vec{a}_{t_{B_1}} = \vec{a}_{t_{B_2}} \quad (6.5)$$

Puesto que la cremallera se encuentra fija, la velocidad y aceleración tangencial del punto B como parte de la cremallera es igual a cero y de acuerdo con la ecuación (6.5), la velocidad y aceleración tangencial del punto B con respecto al engrane es igual a cero.

$$\vec{v}_{B_2} = \vec{0} \quad \vec{a}_{t_{B_2}} = \vec{0}$$

Análisis de velocidad

Se sabe que el centro del engrane, se mueve a lo largo de una línea recta horizontal, de manera que:

$$\vec{v}_0 = v_O \hat{i} \quad (6.6)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_{B_2}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O/B_2} \quad \text{de manera que} \quad \vec{v}_O = -\omega \hat{k} \times r_{O/B_2} = \omega (r_{O/B_1}) \hat{i} \quad (6.7)$$

Mientras que la velocidad lineal en el instante mostrado en la figura 6.21, está dada por:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/O}$$

Sustituyendo la ecuación (6.7) en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\vec{v}_A = \omega (r_{O/B_1}) \hat{i} + (-\omega \hat{k}) \times r_{A/O} \hat{j} \quad \text{Tal que} \quad \vec{v}_A = \omega (r_{O/B_1}) \hat{i} + \omega (r_{A/O}) \hat{i} \quad (6.8)$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (6.7), se obtiene un valor de la velocidad lineal del punto O , igual a:

$$\vec{v}_O = (12 \text{ rad/s}) (0.3 \text{ m}) \hat{i} = 3.6 \hat{i} \text{ m/s}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (6.8), se obtiene un valor de la velocidad lineal en el punto A , igual a:

$$\vec{v}_A = (3.6 \text{ m/s}) \hat{i} + (12 \text{ rad/s}) (0.3 \text{ m}) \hat{i} = 7.2 \hat{i} \text{ m/s}$$

Análisis de aceleración

De acuerdo a las condiciones del movimiento de rodadura que sufre el sistema, se sabe que:

$$\vec{a}_{B_2} = a_{B_2} \hat{j} \quad \text{donde} \quad \vec{a}_O = a_O \hat{i}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\vec{a}_O = \vec{a}_{B_2} + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{O/B_2} - \omega^2 \vec{r}_{O/B_2}$$

Desarrollando la ecuación anterior, resulta:

$$a_O \hat{i} = a_{B_2} \hat{j} + (-\alpha \hat{k}) \times (r_{O/B_2} \hat{j}) - \omega^2 r_{O/B_2} \hat{j}$$

Tomando las componentes en \hat{i} se tiene:

$$a_O = \alpha (r_{O/B_2}) \quad (6.9)$$

Tomando las componentes en \hat{j} se tiene:

$$a_{B_2} + \omega^2 (r_{O/B_2}) = 0 \quad \text{De manera que} \quad a_{B_2} = -\omega^2 (r_{O/B_2}) \quad (6.10)$$

La ecuación de aceleración en el punto A se define como:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/O} - \omega^2 \vec{r}_{A/O}$$

Sustituyendo la ecuación (6.9) y desarrollando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\vec{a}_A = \alpha (r_{A/O} + r_{A/O}) \hat{i} - \omega^2 (r_{A/O}) \hat{j} \quad (6.11)$$

Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones (6.9), (6.10) y (6.11), resulta:

$$\begin{aligned} \vec{a}_O &= (6 \text{ rad/s}^2) (0.3 \text{ m}) = 1.8 \hat{i} \text{ m/s}^2 \\ \vec{a}_{B_2} &= -(12 \text{ rad/s}^2)^2 (0.3 \text{ m}) = -43.2 \hat{j} \text{ m/s}^2 \\ \vec{a}_A &= (6 \text{ rad/s}^2) (0.3 \text{ m} + 0.3 \text{ m}) \hat{i} - (12 \text{ rad/s}^2)^2 (0.3 \text{ m}) \hat{j} = 3.6 \hat{i} - 43.2 \hat{j} \text{ m/s}^2 \\ |\vec{a}_A| &= 43.34974 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

6.2.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá simulando el sistema empleando las herramientas de engranes dentro del módulo **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección no se discute la selección de los parámetros geométricos de los engranes. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.4, en la página 22 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de engranes, se emplea una opción de suma importancia denominada “Simplified”. Esta opción permite calcular las fuerzas en el engranaje, la holgura o backlash entre el par de engranes y permite analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema F16-20 se muestra en las figuras 6.22 y 6.23.

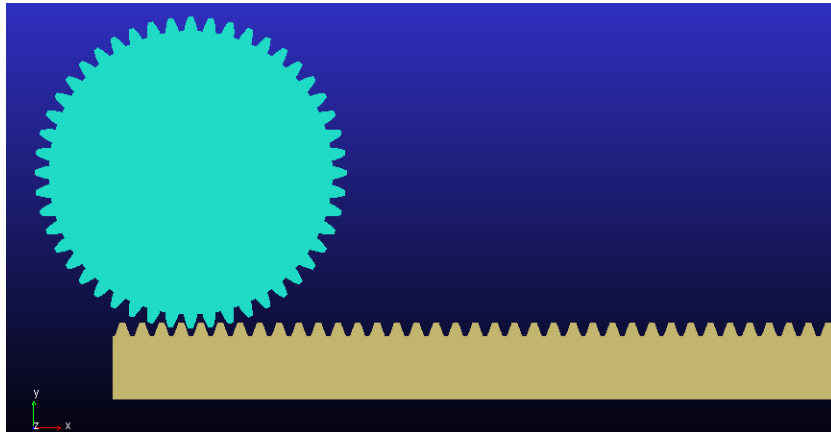


Figura 6.22: Vista del sistema con sólidos sombreados

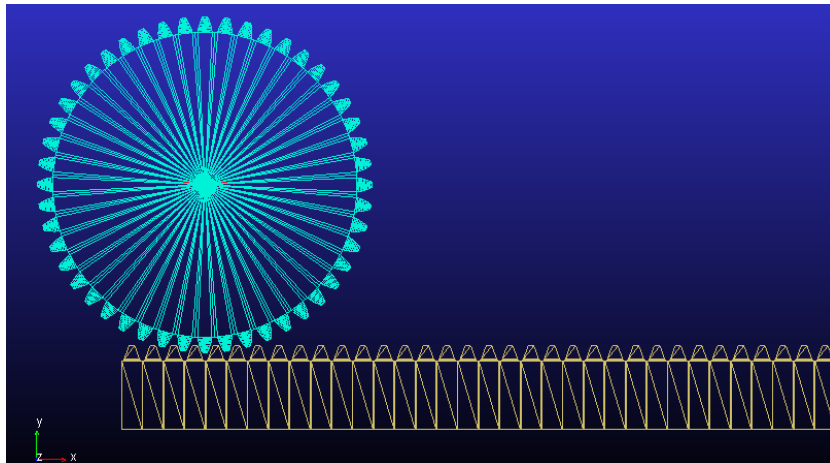


Figura 6.23: Vista del sistema mediante un marco de alambre

La figura 6.24 muestra el tipo de sistema de engranajes dentro del modelo, se seleccionó el tipo engrane y cremallera o “rack”. Es importante aclarar que Adams[©]/Machinery sólo puede crear un par de engrane y cremallera a la vez.

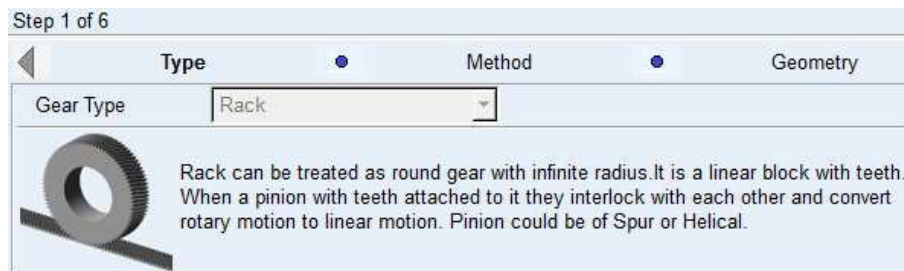


Figura 6.24: Tipos de engranes empleados por Adams[©], engrane y cremallera.

La figura 6.25 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema. Es importante mencionar que el método de análisis es el denominado “Simplified”.

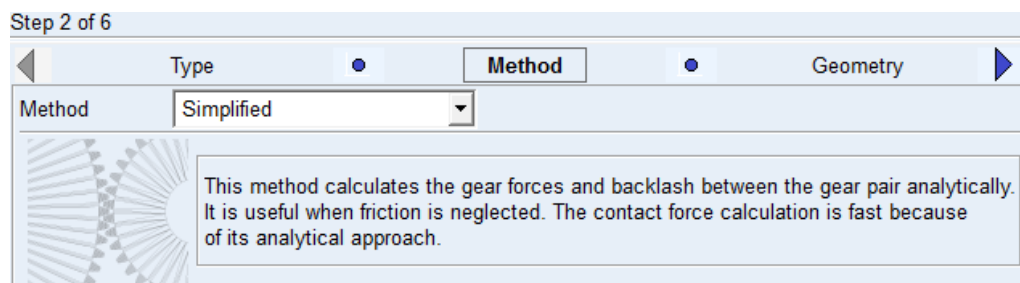


Figura 6.25: Método de análisis empleado por Adams[©].

El usuario debe prestar atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 6.26.

Length	Meter
Mass	Kilogram
Force	Newton
Time	Second
Angle	Radian
Frequency	Hertz

Figura 6.26: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Los parámetros geométricos del engrane y la cremallera se muestra en la figura 6.27. El usuario debe tener cuidado en seleccionar el mismo radio primitivo al indicados en el enunciado del problema.

Step 3 of 6

Method Geometry Material

Module Pressure Angle Helix Angle

Pinion		Rack	
Name	<input type="text" value="Driver_1"/>	Name	<input type="text" value="Driven_1"/>
<input checked="" type="radio"/> New <input type="radio"/> Existing		<input checked="" type="radio"/> New <input type="radio"/> Existing	
Axis of Rotation	<input type="text" value="Global Z"/> <input type="text" value="0.0,0.0,0.0"/>	Axis of Translation	<input type="text" value="Global Z"/> <input type="text" value="0.0,0.0,0.0"/>
Center Location	<input type="text" value="0.0, 0.0, 0.0"/>	Center Location	<input type="text" value="2.2, -0.3, 0.0"/>
No. of Teeth	<input type="text" value="48"/>	No. of Teeth	<input type="text" value="120"/>
Face Width	<input type="text" value="0.0127"/>	Face Width	<input type="text" value="0.0127"/>
Bore Radius	<input type="text" value="0.0"/>	Base Thickness	<input type="text" value="0.0127"/>
Hand of Helix	<input checked="" type="radio"/> LH <input type="radio"/> RH	Hand of Helix	<input type="radio"/> LH <input checked="" type="radio"/> RH
		Root Fillet Rad Coeff.	<input type="text" value="0.38"/>

Geometry Settings: Profile points Layers Fillet points

Figura 6.27: Propiedades geométricas del sistema engrane y cremallera.

Los parámetros inerciales del sistema engrane y cremallera, se presentan en la figura 6.28. Debe notarse que al ser un problema de cinemática del cuerpo rígido, los datos como las masas de los engranes, no son de interés. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z , para el engrane del modelo.

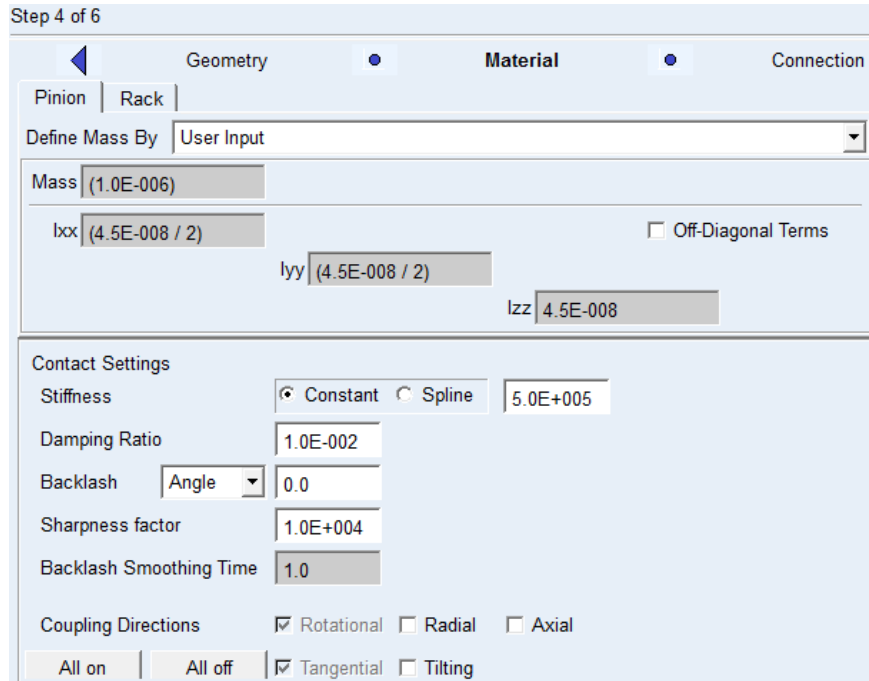


Figura 6.28: Propiedades inerciales y de contacto para el engrane y la cremallera.

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 2.2 segundos, un número de pasos de 2500 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 6.29. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

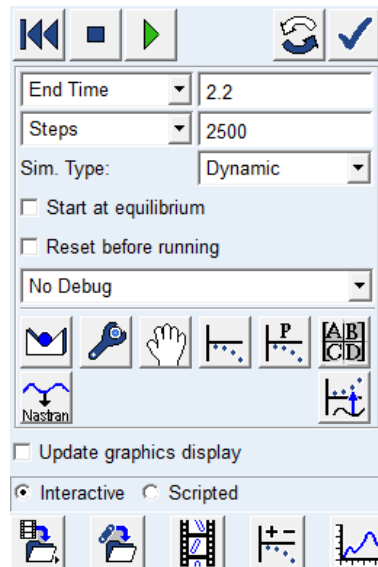


Figura 6.29: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de simulación.

La figura 6.30 muestra el parámetro *Motion* o lo que es igual, la función que rige el comportamiento de la aceleración angular del engrane *A*.

Name	MOTION_1
Joint	Driver_1.gear_revolute
Joint Type	revolute
Direction	Rotational
Define Using	Function
Function (time)	-6
Type	Acceleration
Displacement IC	0.0
Velocity IC	0.0

Figura 6.30: Función que rige el comportamiento de la aceleración angular del engrane.

El “Marker_19” como parte del engrane, tiene como función analizar la velocidad y aceleración en el punto *A*, vea la figura 6.31.



Figura 6.31: “marker_19” (Punto *A*) como parte del engrane.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 6.32, 6.33, 6.34, 6.35, 6.36, 6.37, 6.38 y 6.39.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
PROBLEMA_16_20_HIBBELER	body	+ PART_4	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- Driver_1	Total_Force_At_Location	Z
		- gear_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		Driver_1_Driven_1_S	Translational_Velocity	
		gear_attachment_ref	Translational_Acceleration	
		gear_geometry_ref	Angular_Velocity	
		gear_geometry_ref	Angular_Acceleration	

Figura 6.32: Solicitud de la velocidad angular del engrane.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
PROBLEMA_16_20_HIBBELER	body	+ PART_4	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- Driver_1	Total_Force_At_Location	Z
		- gear_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		Driver_1_Driven_1_S	Translational_Velocity	
		gear_attachment_ref	Translational_Acceleration	
		gear_geometry_ref	Angular_Velocity	
		gear_geometry_ref	Angular_Acceleration	

Figura 6.33: Solicitud de la aceleración angular del engrane.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
PROBLEMA_16_20_HIBBELER	body	+ PART_4	Total_Force_On_Point	X
	force	- Driven_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- gear_part	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		Driver_1_Driven_1_SFo	Translational_Displacement	
		gear_attachment_ref	Translational_Velocity	
		gear_geometry_ref	Translational_Acceleration	
		+ Driver_1	Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Figura 6.34: Solicitud de la velocidad lineal del centro de masas de la cremallera.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
PROBLEMA_16_20_HIBBELER	body	+ PART_4	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- Driver_1	Total_Force_At_Location	Z
		- gear_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		Driver_1_Driven_1_SFo	Translational_Velocity	
		gear_attachment_ref	Translational_Acceleration	
		gear_geometry_ref	Angular_Velocity	
		gear_geometry_ref	Angular_Acceleration	

Figura 6.35: Solicitud de la velocidad lineal del punto O .

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
PROBLEMA_16_20_HIBBELER	body force constraint	+ Driven_1 - Driver_1 - gear_part cm Driver_1_Driven_1_5 gear_attachment_re: gear_geometry_ref MARKER_19	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag
Source	Objects			
Filter	*			

Figura 6.36: Solicitud de la velocidad lineal del punto A del engrane.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
PROBLEMA_16_20_HIBBELER	body force constraint	+ PART_4 + Driven_1 - Driver_1 - gear_part cm Driver_1_Driven_1_5 gear_attachment_re: gear_geometry_ref	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag
Source	Objects			
Filter	*			

Figura 6.37: Solicitud de la aceleración lineal en el punto O.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
PROBLEMA_16_20_HIBBELER	body force constraint	+ Driven_1 - Driver_1 - gear_part cm Driver_1_Driven_1_5 gear_attachment_re: gear_geometry_ref MARKER_19	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag
Source	Objects			
Filter	*			

Figura 6.38: Solicitud de la aceleración lineal en el punto A del engrane en las coordenadas x y y .

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
PROBLEMA_16_20_HIBBELER	body force constraint	+ Driven_1 - Driver_1 - gear_part cm Driver_1_Driven_1_5 gear_attachment_re: gear_geometry_ref MARKER_19	Total_Force_On_Point Total_Torque_On_Point Total_Force_At_Location Total_Torque_At_Location Translational_Displacement Translational_Velocity Translational_Acceleration Angular_Velocity Angular_Acceleration	X Y Z Mag
Source	Objects			
Filter	*			

Figura 6.39: Solicitud de la magnitud para la aceleración lineal del punto A del engrane.

Para averiguar los valores solicitados por el problema, primero se requiere averiguar el tiempo que tarda el engrane en alcanzar una velocidad angular igual a 12 rad/s , para ello se solicitó la velocidad angular del engrane en Adams[©], vea la figura 6.32. De acuerdo con Adams[©] el tiempo que tarda el engrane en alcanzar una velocidad angular de 12 rad/s es igual a 2.0011 segundos, vea la figura 6.40.

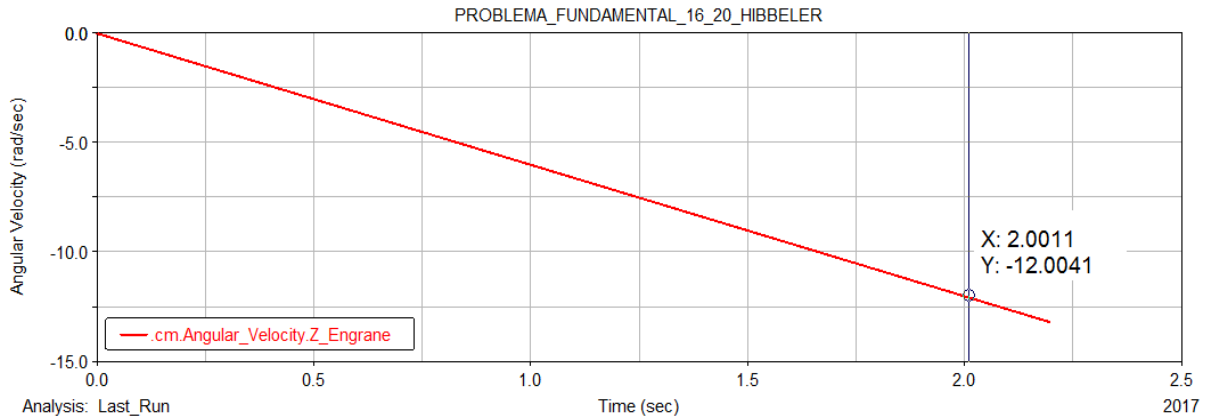


Figura 6.40: Resultado de la velocidad angular del engrane.

Los resultados obtenidos por Adams[©] se muestran en las figuras 6.41, 6.42, 6.43, 6.44, 6.45 y 6.46.

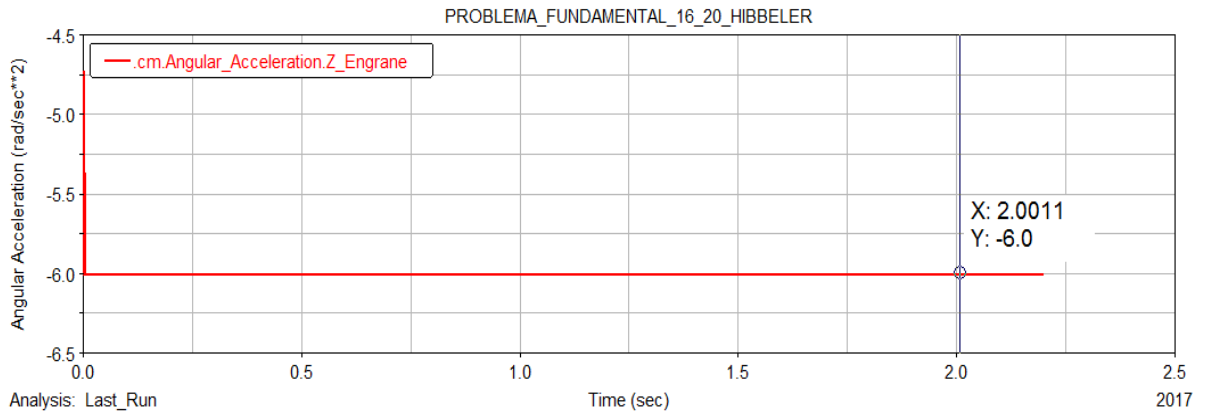


Figura 6.41: Resultado de la aceleración angular del engrane.

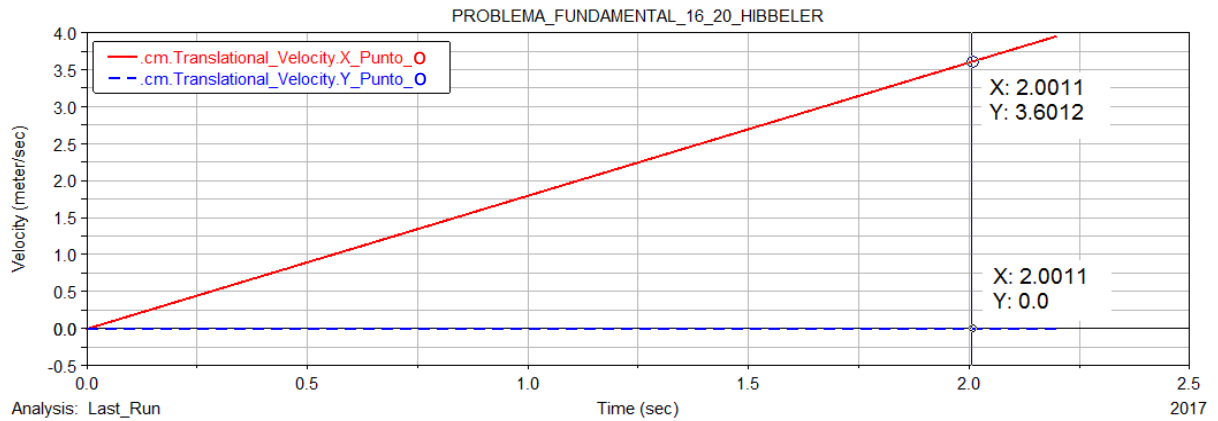


Figura 6.42: Resultado de la velocidad lineal del punto O o centro del engrane.

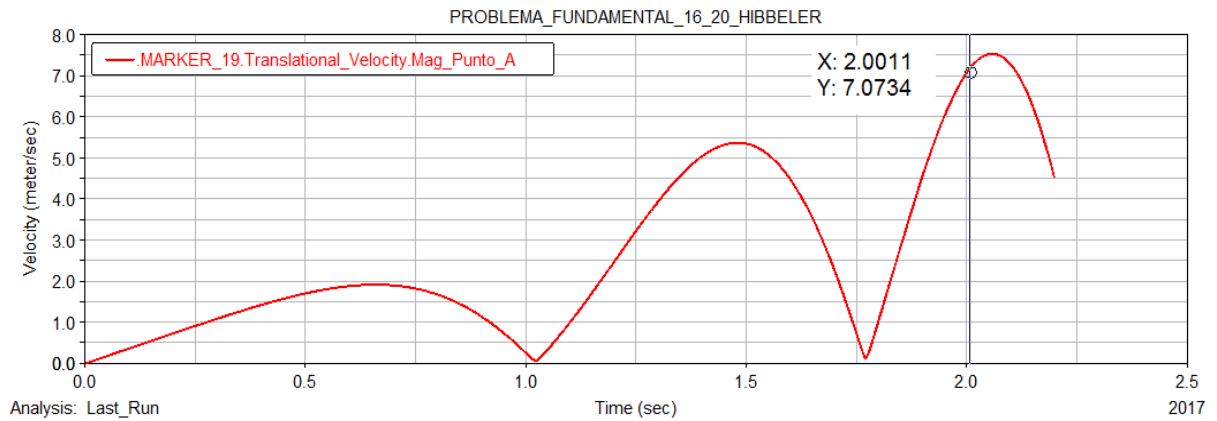


Figura 6.43: Resultado de la velocidad lineal del punto A del engrane.

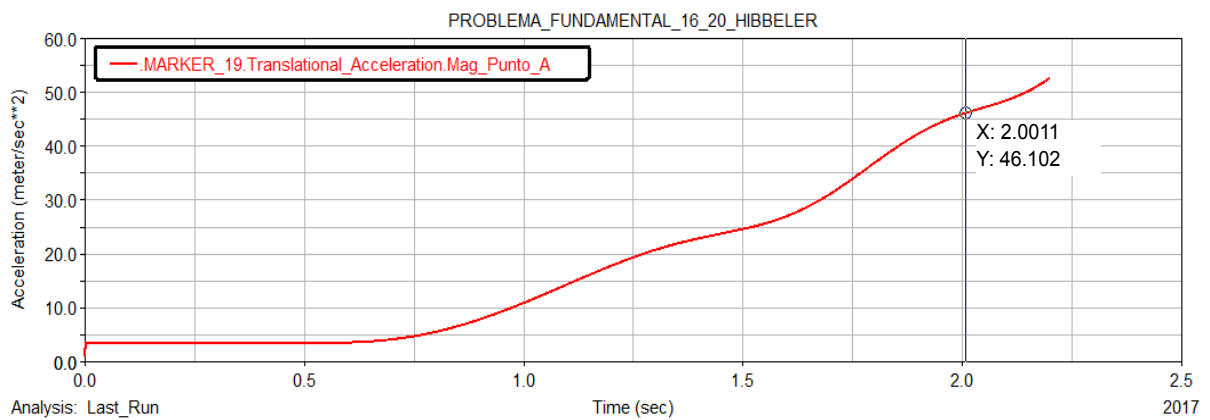


Figura 6.44: Resultado de la aceleración lineal en el punto O .

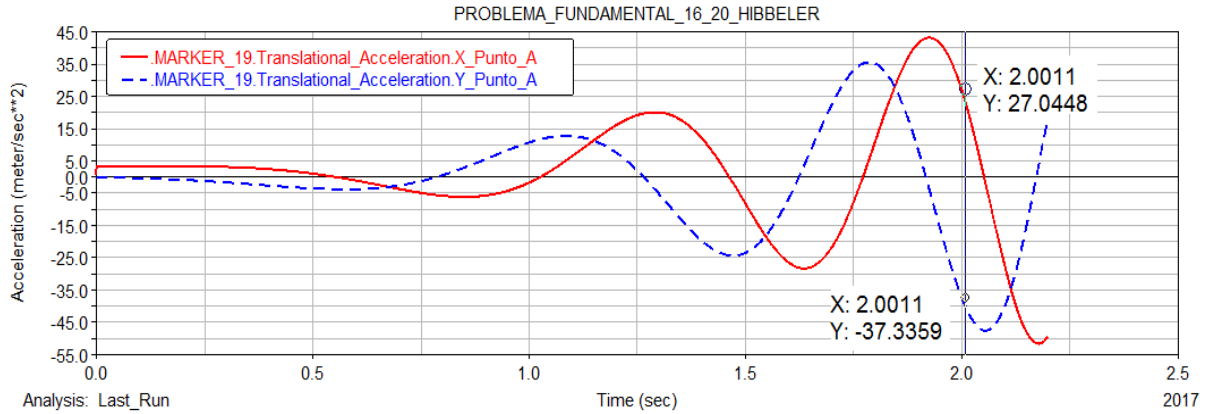


Figura 6.45: Resultado de la aceleración lineal en el punto A del engrane en las coordenadas x y y .

Es importante mencionar que debido a que el marcador que sirve para medir las componentes de la aceleración en el punto A , para un tiempo $t = 2.001$ s, no se localiza en la posición que se muestra en la figura 6.21; instante en el que la velocidad angular del engrane alcanza un valor de 12.0041 rad/s, el valor de la aceleración tangencial y normal no coinciden con los obtenidos de forma analítica.

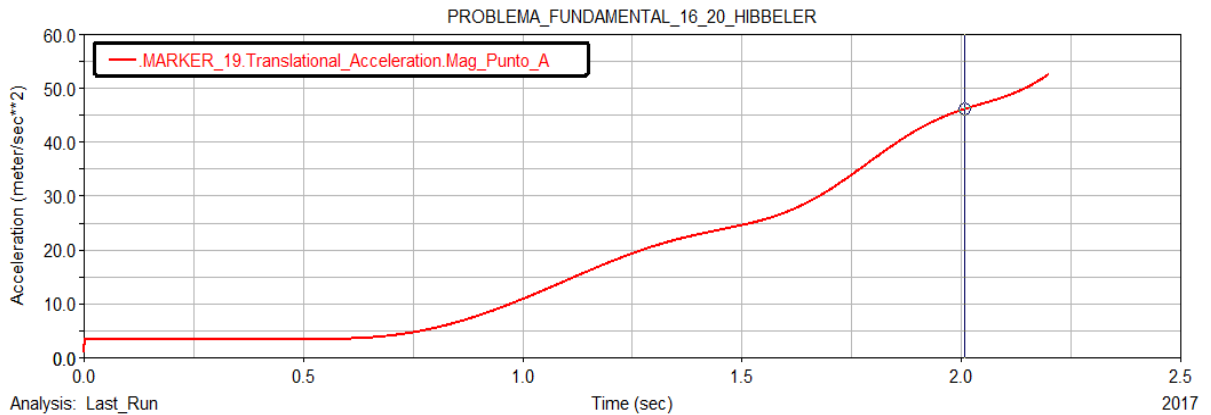


Figura 6.46: Resultado de la magnitud para la aceleración lineal del punto A del engrane.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Estos resultados tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 6.2 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 6.2: Comparación de resultados. 2.º problema de engranes y cremalleras

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
t	2.0 s	2.0011 s
ω	12.0 rad/s \odot	12.0041 rad/s \odot
α	6.0 rad/s ² \odot	6.0 rad/s ² \odot
v_O	3.6 m/s \rightarrow	3.6012 m/s \rightarrow
$v_{cm} = v_{B_1}$	0.0 m/s	0.0 m/s
v_A	7.2 m/s \rightarrow	7.0734 m/s \rightarrow
a_O	1.8 m/s ² \rightarrow	1.8 m/s ² \rightarrow
a_{A_x}	3.2 m/s ² \rightarrow	27.0448 m/s ² \rightarrow
a_{A_y}	43.2 m/s ² \downarrow	37.3359 m/s ² \downarrow
$ a_A $	43.34974 m/s ²	46.102 m/s ²

6.3. Tercer problema de sistemas de engranes y cremalleras.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 16-27 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 327.

Problema 3: Durante un corto tiempo, el engrane A del motor de arranque de un automóvil gira con una aceleración angular de $\alpha_A = (450t^2 + 60) \text{ rad/s}^2$, donde t está en segundos. Determine la velocidad y desplazamiento angulares del engrane B cuando $t = 2 \text{ s}$, a partir del reposo. Los radios de los engranes A y B son de 10 mm y 25 mm , respectivamente, vea la figura 6.47. Donde: $r_A = 10 \text{ mm}$, $r_B = 25 \text{ mm}$ y $\alpha_A = (450t^2 + 60) \text{ rad/s}^2 \odot$

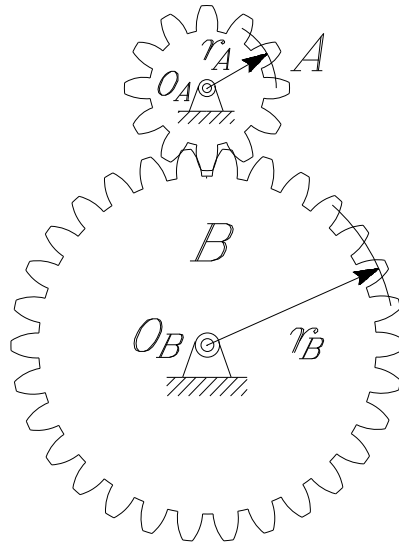


Figura 6.47: Modelo del problema 16-27 Hibbeler [18].

6.3.1. Solución analítica.

Puesto que no existe deslizamiento entre el engrane A y el engrane B , la velocidad y las componentes tangenciales de la aceleración del engrane A y el engrane B en el punto P_1 son iguales. A partir de este resultado se obtienen dos relaciones, la primera entre las velocidades angulares de los engranes A y B en función de sus radios y la segunda entre las aceleraciones angulares de los engranes A y B en función de sus radios, vea la figura 6.48 y las ecuaciones (6.12) y (6.13).

Análisis de velocidades angulares entre los engranes A y B .

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = \omega_A \hat{k} \times -r_A \hat{j} = \omega_A r_A \hat{i} = v_{A_{P_1}} = v_{B_{P_1}} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_1/O_B} = -\omega_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = \omega_B r_B \hat{i}$$

De manera que:

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \text{donde} \quad \omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A \quad (6.12)$$

Análisis de aceleraciones angulares entre los engranes A y B .

$$\vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = \alpha_A \hat{k} \times -r_A \hat{j} = \alpha_A r_A \hat{i} = a_{tA_{P_1}} = a_{tB_{P_1}} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_1/O_B} = -\alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = \alpha_B r_B \hat{i}$$

Por lo tanto:

$$r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{donde} \quad \alpha_B = \frac{r_A}{r_B} \alpha_A \quad (6.13)$$

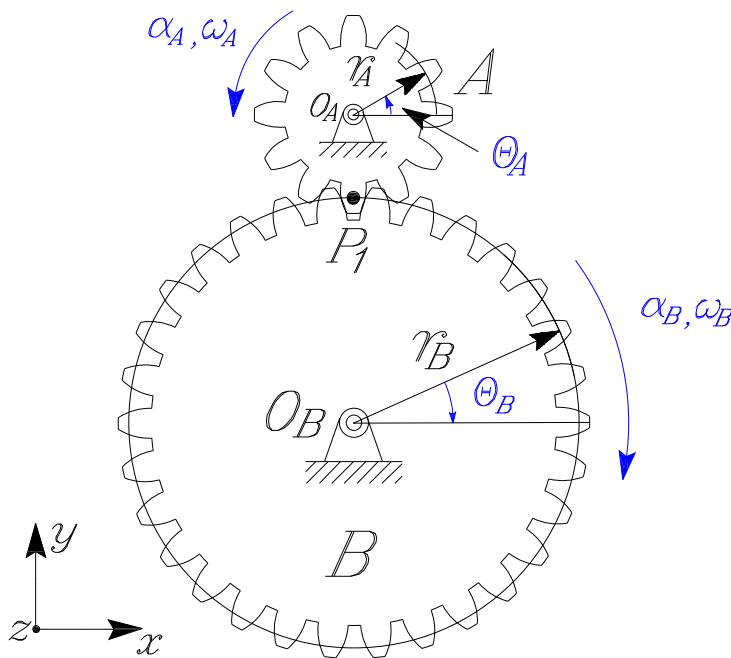


Figura 6.48: Diagrama cinemático del problema.

De acuerdo con el problema, la aceleración angular del engrane A está definida por $\alpha_A = (450t^2 + 60) \text{ rad/s}^2$, sustituyendo los valores numéricos para un tiempo $t = 2s$, se obtiene un valor de la aceleración angular α_A de:

$$\alpha_A|_{t=2} = 450(20)^2 + 60 = 1860 \text{ rad/s}^2 \quad \odot$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (6.13), se obtiene un valor de la aceleración angular del engrane B , igual a:

$$\alpha_B|_{t=2} = \left(\frac{10}{25}\right) (1860 \text{ rad/s}^2) = 744 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

Para obtener la velocidad angular del engrane motriz A , basta con integrar la ecuación de la aceleración angular α_A , desde un tiempo $t = 0s$ hasta t .

$$\omega_A = \int_0^t (450t^2 + 60) dt \text{ [rad/s}^2] = \frac{450}{3}t^3 + 60t \text{ [rad/s}^2] \quad (6.14)$$

Evalutando la ecuación anterior (6.14) desde un tiempo $t = 0s$ hasta $t = 2s$, se obtiene:

$$\omega_A = \frac{450}{3}t^3 + 60t \Big|_{t=0}^{t=2s} = \frac{450}{3} (2^3) + 60(2) = 1320 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (6.12), se obtiene un valor de la velocidad angular del engrane B , igual a:

$$\omega_B = \left(\frac{10}{25}\right) (1320 \text{ rad/s}^2) = 528 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

Para obtener la posición angular del engrane motriz A , basta con integrar la ecuación de la velocidad angular (6.14), desde un tiempo $t = 0s$ hasta $t = 2s$. De manera que:

$$\theta_A = \int_0^2 \left(\frac{450}{3}t^3 + 60t\right) dt \text{ [rad/s]} = \frac{450}{12}t^4 + \frac{60}{2}t^2 \Big|_{t=0}^{t=2s} = 37.5 (2^4) + 30 (2^2) = 720 \text{ rad} \circlearrowleft$$

Integrando la ecuación (6.12), se obtiene la ecuación para la posición angular del engrane B .

$$\theta_B = \frac{r_A}{r_B} \theta_A$$

Evalutando la ecuación anterior se obtiene un valor de la posición angular del engrane B , para un tiempo igual a $t = 2s$, igual a:

$$\theta_B = \frac{10}{25} (720 \text{ rad}) = 288 \text{ rad} \circlearrowleft$$

6.3.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá simulando el sistema empleando las herramientas de engranes dentro del módulo **Machinery** del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección no se discute la selección de los parámetros geométricos de los engranes. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.4, en la página 22 de este trabajo. Es necesario mencionar, que dentro del módulo de engranes se emplea una opción de suma importancia denominada “**Simplified**”. Esta opción permite calcular las fuerzas en el engranaje, la holgura o backlash entre el par de engranes; además, permite analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 16-9 se muestra en la figura 6.49.

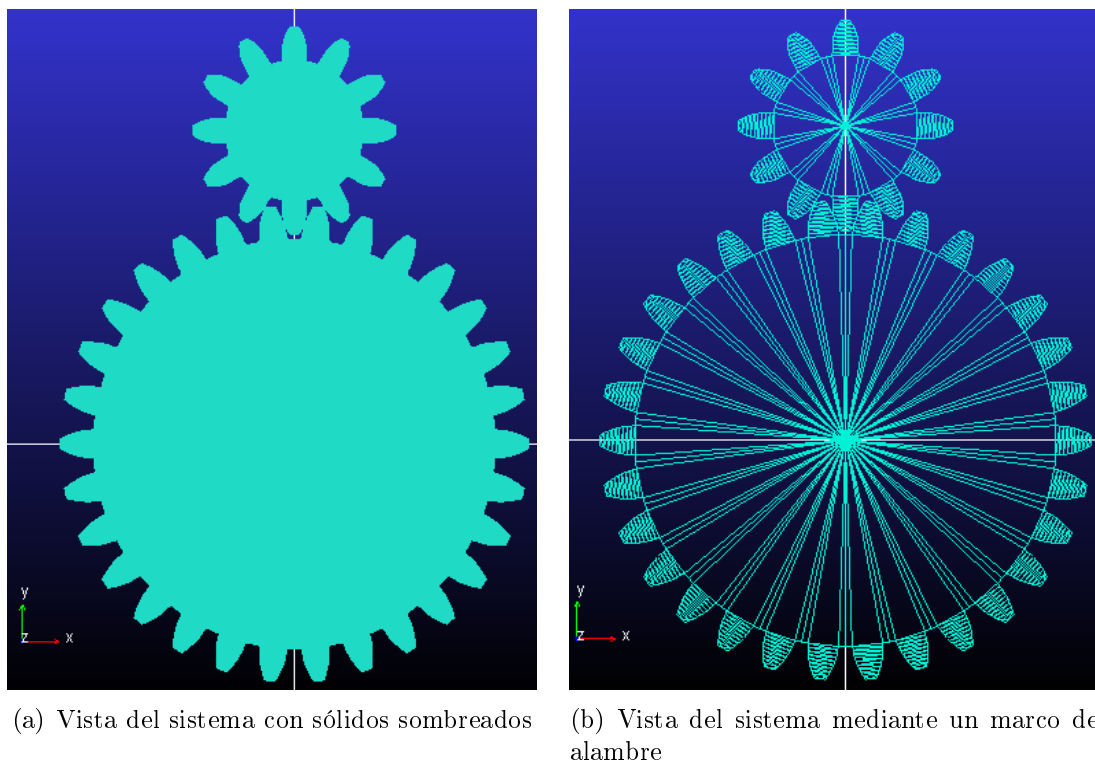


Figura 6.49: Modelo del problema en Adams[©].

Es importante aclarar que Adams[©]/Machinery sólo puede crear un par de engranes a la vez, por lo que para este problema se crearon dos pares de engranes. El tipo de engrane es el mismo para todos los engranes del modelo, vea la figura 6.50. Como puede observarse se seleccionó un engrane tipo recto o “spur”.

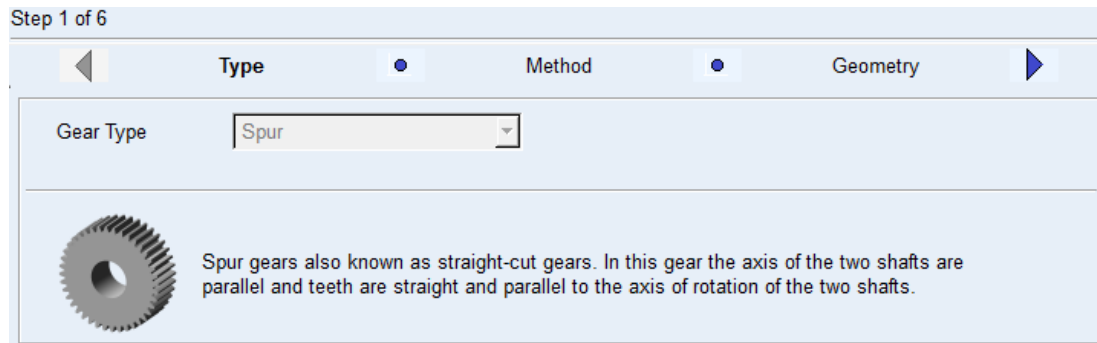


Figura 6.50: Tipos de engranes empleados por Adams[©] para el engrane *A* y *B*.

La figura 6.51 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema que debe ser el mismo para todo par de engrane dentro del modelo. Es importante mencionar que el método de análisis es el denominado “**Simplified**”.

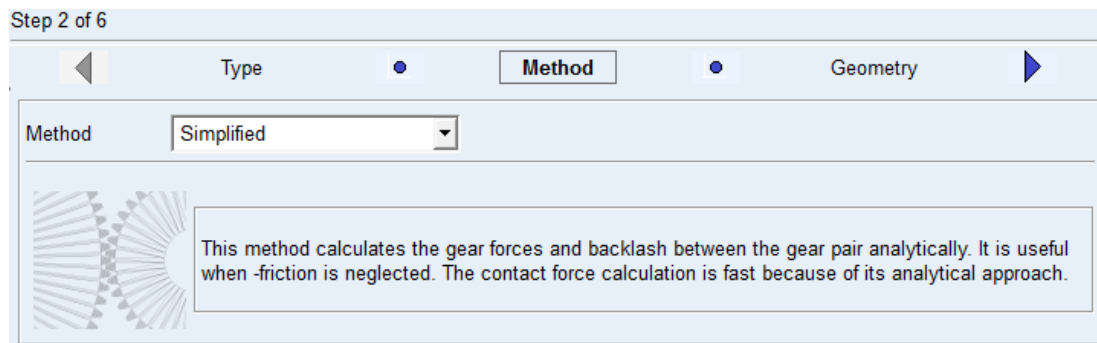


Figura 6.51: Método de análisis empleado por Adams[©].

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 6.52.

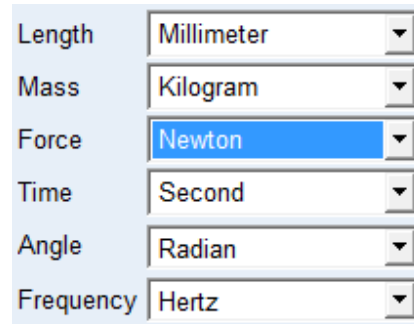


Figura 6.52: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Los parámetros geométricos para el par de engrane A y B se presentan en la figura 6.53. El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios de paso iguales a los indicados en el enunciado del problema y seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de los engranes. En este caso, debe notarse que la distancia entre centros entre los engranes A y B debe ser igual a la suma de los radios de paso de ambos engranes.

Los parámetros de mayor importancia para un usuario no experimentado al momento de diseñar algún sistema con engranes, es el módulo del par de engranes, éste dependerá del número de dientes y el diámetro de los engranes, para ello el usuario debe recordar que el paso circular debe ser el mismo para ambos engranes lo mismo que el módulo, el ángulo de presión de 20° que aparece por defecto se deja intacto a no ser que el usuario empleara otras unidades angulares como son los radianes, en este caso el usuario debe modificar el valor a sus correspondientes unidades, las coordenadas de los centros de los engranes, el número de dientes de ambos engranes son de suma importancia, los demás parámetros se dejan intactos.

The screenshot shows a software interface for defining gear geometry, titled "Step 3 of 6". It has three tabs: "Method", "Geometry" (selected), and "Material".

Global settings include:

- Module: 5 / 3
- Pressure Angle: 0.349
- Axis of Rotation: Global Z (dropdown), 0.0, 0.0, 0.0 (coordinates)

There are two gear definitions: GEAR1 and GEAR2.

GEAR1:

- Name: Driver_2
- Center Location: 0.0, 35.0, 0.0
- No. of Teeth: 12
- Gear Width: 12.7
- Bore Radius: 0.0

GEAR2:

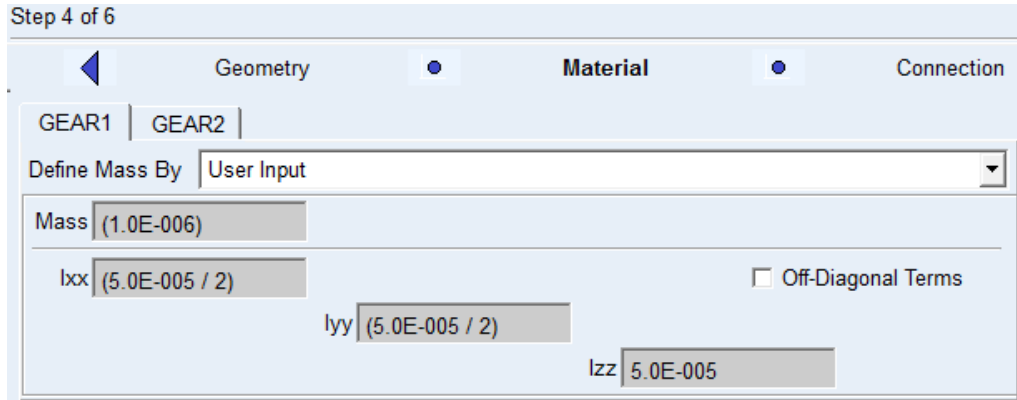
- Name: Driven_2 (dropdown), External (dropdown)
- Center Location: 0.0, 0.0, 0.0
- No. of Teeth: 30
- Gear Width: 12.7
- Bore Radius: 0.0

At the bottom, "Geometry Settings" include:

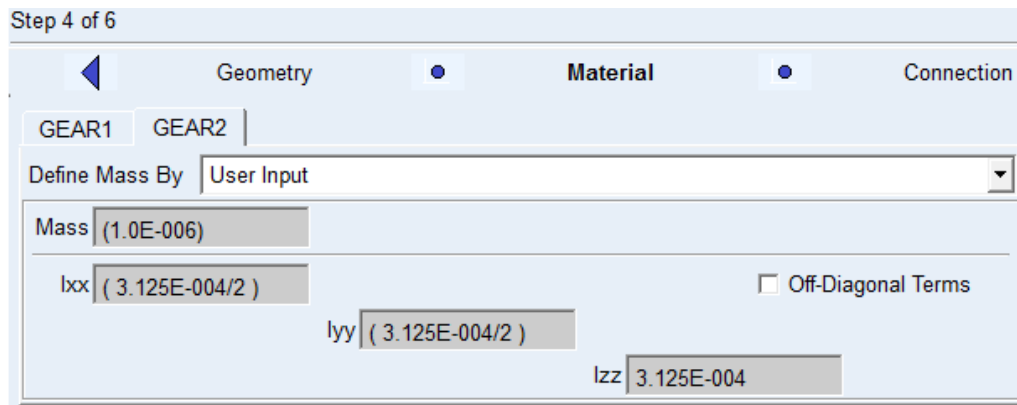
- Profile points: 10
- Layers: 5

Figura 6.53: Propiedades geométricas del par de engranes A y C .

Los parámetros inerciales de los pares de engranajes, A y B se presentan en la figura 6.54. Debe notarse que al ser un problema de cinemática del cuerpo libre, los datos como las masas de los engranes, no son de interés. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y no son de importancia en este análisis; sin embargo es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .



(a) Propiedades inerciales del engrane *A*



(b) Propiedades inerciales del engrane *B*

Figura 6.54: Propiedades inerciales de los engranes *A* y *B*.

La figura 6.55 muestra los parámetros de contacto para el par de engranes *A* y *B*. Los valores de contacto que aparecen por defecto se dejan intactos.

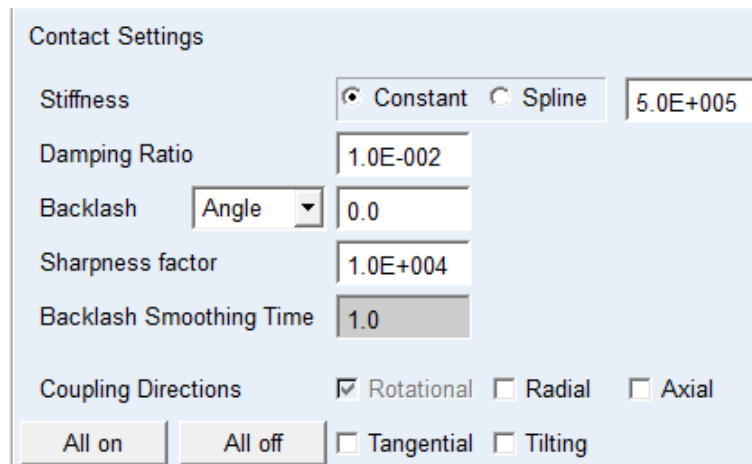


Figura 6.55: Parámetros de contacto para el par de engranes *A* y *B*.

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 2 segundos, con un número de pasos de 2000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 6.56. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

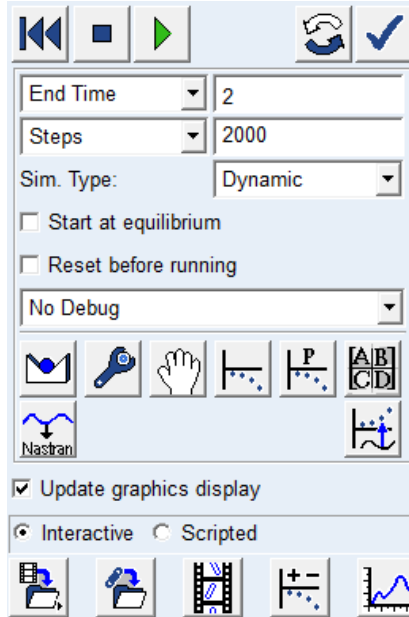


Figura 6.56: Parámetros de la simulación.

La figura 6.57 muestra el parámetro *Motion* o lo que es igual, la función que rige el comportamiento de la aceleración angular del engrane *A*.

Name	MOTION_1
Joint	Driver_2_gear_revolute
Joint Type	revolute
Direction	Rotational
Define Using	Function
Function (time)	$(450 \cdot \text{time} \cdot \text{time}) + 60$
Type	Acceleration
Displacement IC	0.0
Velocity IC	0.0

Figura 6.57: Función que rige el comportamiento de la aceleración angular del engrane *A*.

El “Marker_19” y “Marker_20” como parte del engrane *A* y *B*, respectivamente, tiene como función analizar el desplazamiento angular que sufre tanto el engrane *A* como el engrane *B* para una simulación de dos segundos, vea la figura 6.58.

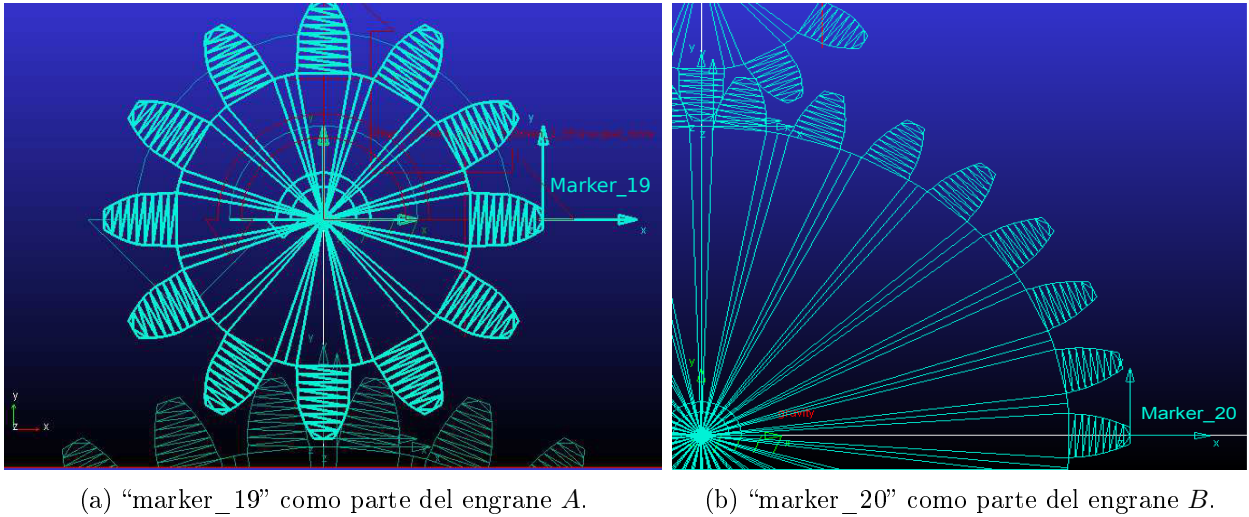


Figura 6.58: Marcadores para medir el desplazamiento angular de los engranes *A* y *B*.

Para poder medir el desplazamiento angular del “Marker_19” y “Marker_20” se creó una función de medición de desplazamiento angular con respecto a los ejes absolutos fijos z del centro de cada engrane para cada uno de los marcadores, vea las figuras 6.59 y 6.60. Estos marcadores fijos son nombrados por Adams[®] como “Driven_2_Ref_1” y “Driver_2_Ref_1”, cabe mencionar que el nombre de todos los marcadores, puntos y cuerpos dentro del modelo son nombrados de forma automática por el programa, por lo que estos pueden variar a los que se muestran en este problema.

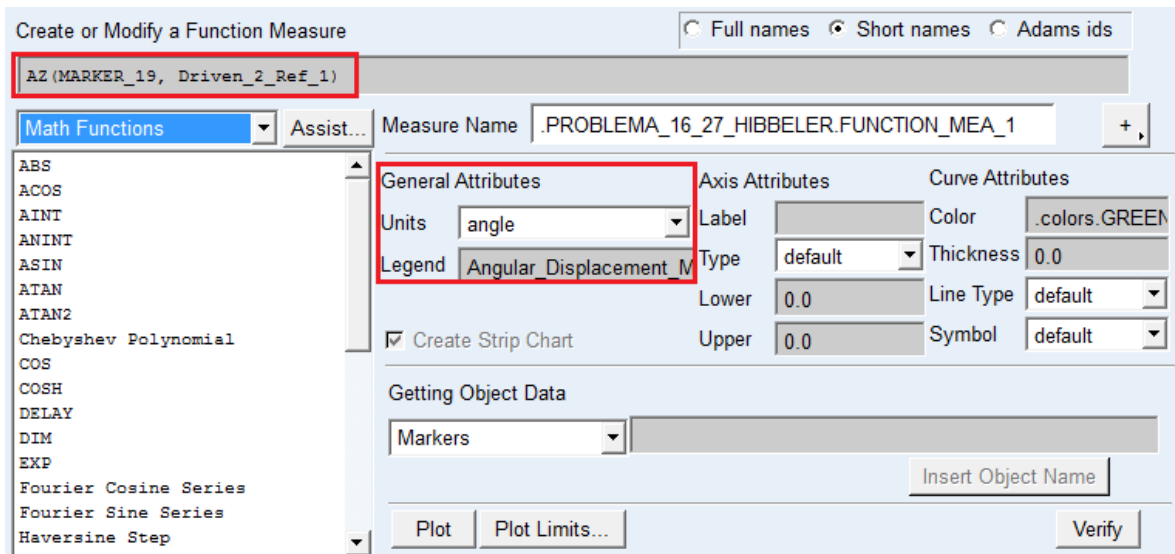


Figura 6.59: Función de medición del desplazamiento angular del “marker_19” como parte del engrane *B*.

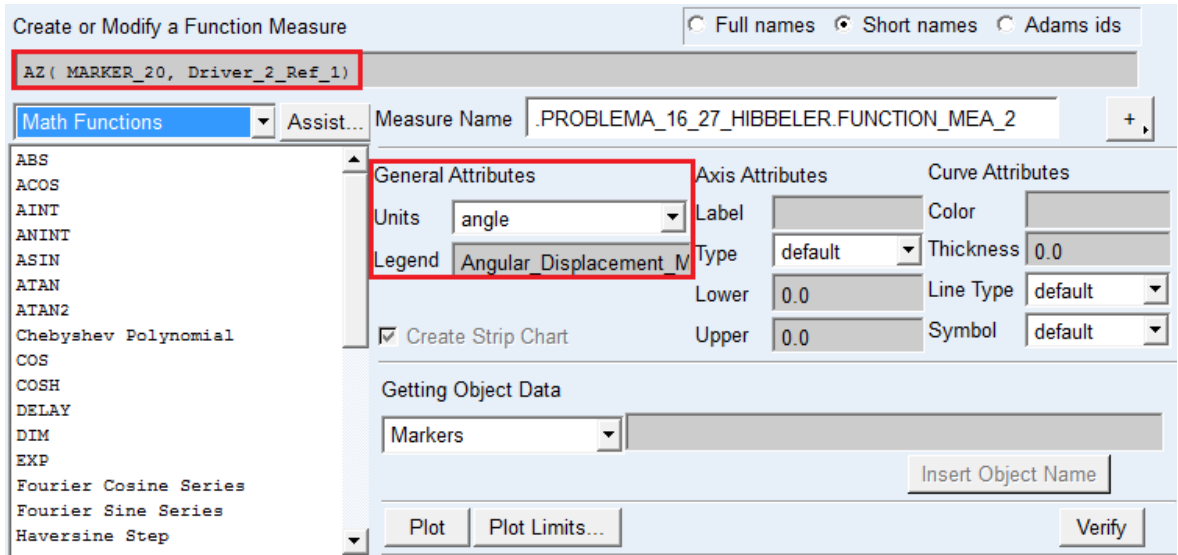


Figura 6.60: Función de medición del desplazamiento angular del “marker_20” como parte del engrane A.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 6.61, 6.62, 6.63, 6.64 y 6.65.

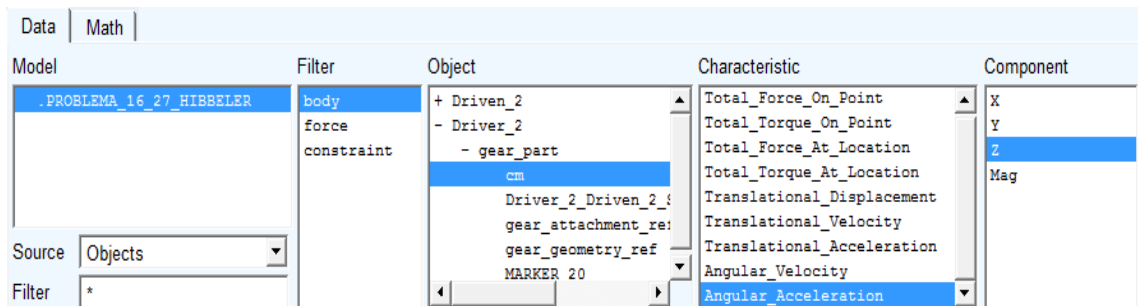


Figura 6.61: Solicitud de la aceleración angular del engrane A.

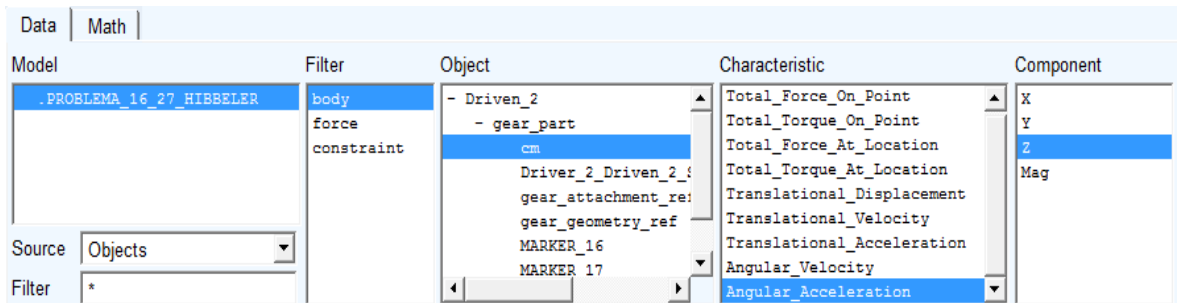


Figura 6.62: Solicitud de la aceleración angular del engrane B.

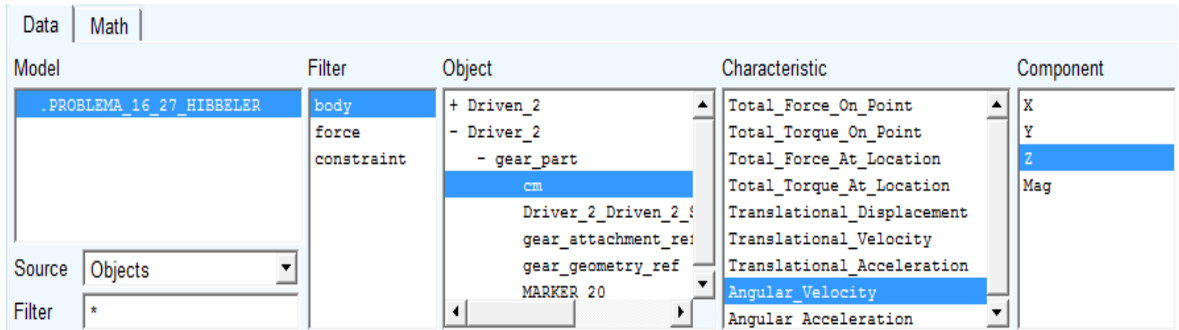


Figura 6.63: Solicitud de la velocidad angular del engrane *A*.

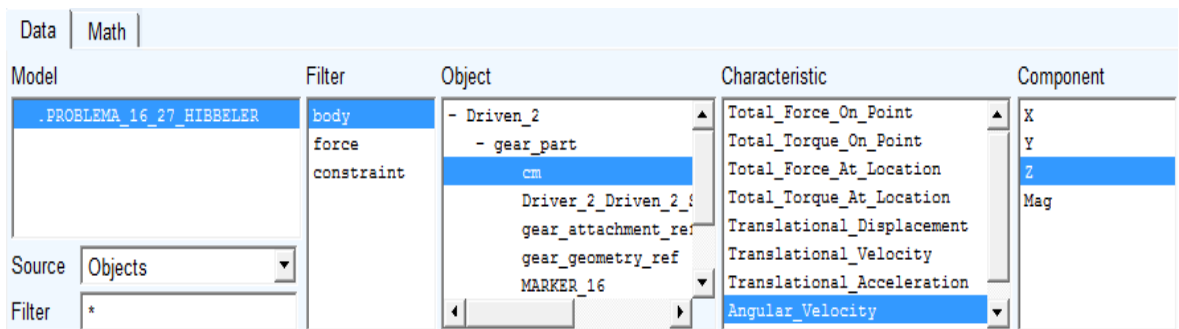


Figura 6.64: Solicitud de la velocidad angular del engrane *B*.

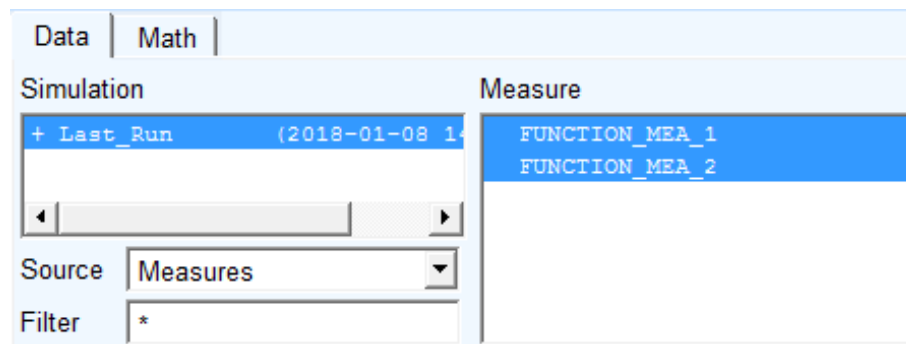


Figura 6.65: Solicitud del desplazamiento angular de los engranes *A* y *B*.

Los resultados obtenidos por Adams[©] se muestran en las figuras 6.66, 6.67 y 6.68.

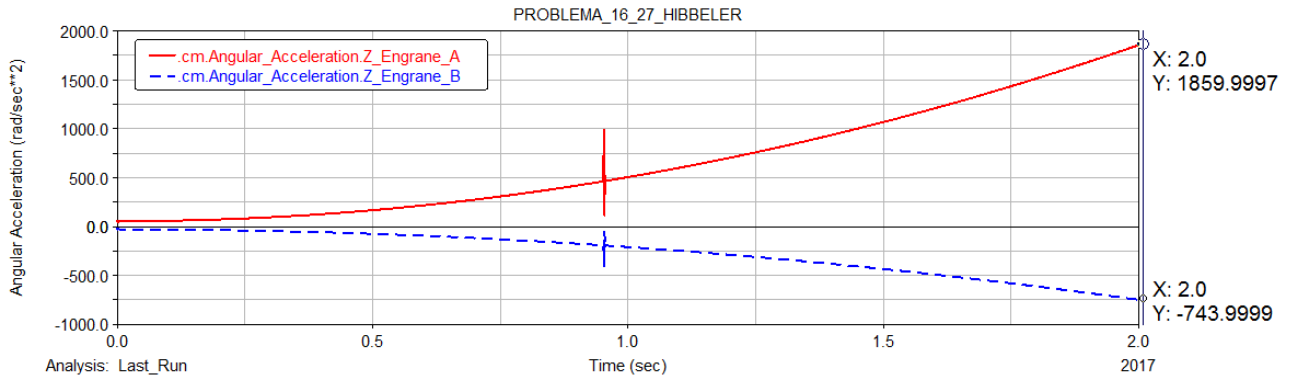


Figura 6.66: Resultados de las aceleraciones angulares de los engranes *A* y *B*.

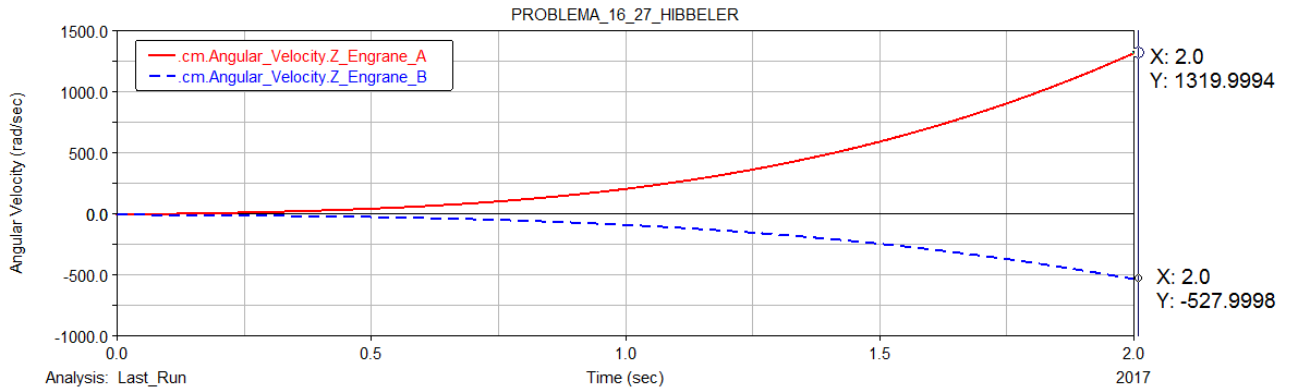


Figura 6.67: Resultado de las velocidades angulares de los engranes *A* y *B*.

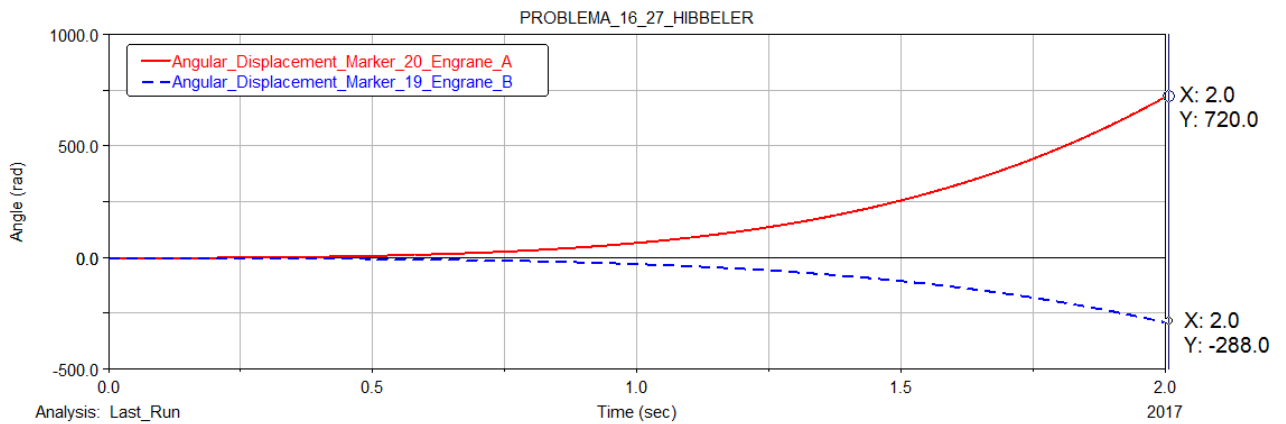


Figura 6.68: Resultados del desplazamiento angular de los engranes *A* y *B*.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Estos resultados tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 6.3 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 6.3: Comparación de resultados. 3.^{er} problema de engranes y cremalleras

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
α_A	$1860 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$	$1859.9997 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$
α_B	$744 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$	$743.9999 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$
ω_A	$1320 \text{ rad/s} \curvearrowright$	$1319.9994 \text{ rad/s} \curvearrowright$
ω_B	$528 \text{ rad/s} \curvearrowright$	$527.9998 \text{ rad/s} \curvearrowright$
θ_A	$720 \text{ rad} \curvearrowright$	$720.0 \text{ rad} \curvearrowright$
θ_B	$288 \text{ rad} \curvearrowright$	$280.0 \text{ rad} \curvearrowright$

6.4. Cuarto problema de sistemas de engranes y cremalleras.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 16-28 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 327.

Problema 4: Durante un corto tiempo, el engrane A del motor de arranque de un automóvil gira con una aceleración angular de $\alpha_A = (50\omega^{1/2}) \text{ rad/s}^2$, donde ω está en rad/s . Determine la velocidad angular del engrane B después de que el engrane A ha realizado 50 revoluciones, a partir del reposo. Los radios de los engranes A y B son 10 mm y 25 mm , vea la figura 6.47, en la página 230. Donde: $r_A = 10 \text{ mm}$, $r_B = 25 \text{ mm}$ y $\alpha = (50\omega^{1/2}) \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$.

6.4.1. Solución analítica.

Puesto que no existe deslizamiento entre el engrane A y el engrane B , la velocidad y las componentes tangenciales de la aceleración del punto P_1 , vea la figura 6.48 en la página 231, entre los engranes A y B son iguales. A partir de este resultado se obtienen dos relaciones: la primera, entre las velocidades angulares de los engranes A y B , en función de sus radios; y la segunda, entre las aceleraciones angulares de los engranes A y B , en función de sus radios, vea la figura 6.48 y las ecuaciones (6.15) y (6.16)

Análisis de velocidades angulares entre los engranes A y B .

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = \omega_A \hat{k} \times (-r_A) \hat{j} = \omega_A r_A \hat{i} = v_{A_{P_1}} = v_{B_{P_1}} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_1/O_B} = -\omega_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = \omega_B r_B \hat{i}$$

De manera que:

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \text{tal que} \quad \omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A \quad (6.15)$$

Análisis de aceleraciones angulares entre los engranes A y B .

$$\vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = \alpha_A \hat{k} \times (-r_A) \hat{j} = \alpha_A r_A \hat{i} = a_{tA_{P_1}} = a_{tB_{P_1}} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_1/O_B} = -\alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{j} = \alpha_B r_B \hat{i}$$

Por lo tanto:

$$r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{donde} \quad \alpha_B = \frac{r_A}{r_B} \alpha_A \quad (6.16)$$

Para calcular la velocidad angular del engrane B al momento que el engrane A gira 50 revoluciones, primeramente se tiene que calcular el tiempo el que el engrane A recorre las revoluciones antes mencionadas.

Se sabe que la aceleración angular del engrane A está definida como el cambio de la velocidad angular con respecto al tiempo, por lo que:

$$\alpha_A = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{donde} \quad dt = \frac{d\omega}{\alpha_A}$$

De acuerdo al problema, la aceleración angular del engrane A es igual a $\alpha = (50\omega^{1/2}) \text{ rad/s}^2$, por lo que, sustituyendo α_A en la ecuación anterior resulta:

$$dt = \frac{d\omega}{50\omega^{1/2}}$$

Como el motor comienza a girar desde el reposo, se integra la ecuación anterior desde un tiempo $t = 0$ hasta t , y desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \omega_A$.

$$\int_0^t dt = \frac{1}{50} \int_0^{\omega_A} \omega^{-1/2} d\omega \quad \text{tal que} \quad t = \frac{1}{25} \omega_A^{1/2} s \quad (6.17)$$

La ecuación (6.17) permite calcular el tiempo que tarda el engrane A , en llegar a una determinada velocidad angular ω_A .

Despejando la velocidad angular ω_A de la ecuación (6.17), resulta:

$$\omega_A = 625t^2 \text{ rad/s} \quad (6.18)$$

se sabe que la velocidad angular del engrane A está definida como el cambio del desplazamiento angular con respecto al tiempo, por lo que:

$$\omega_A = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{donde} \quad dt = \frac{d\theta}{\omega_A}$$

Sustituyendo el valor de ω_A en la ecuación anterior, resulta:

$$d\theta = 625t^2 dt$$

Integrando la ecuación anterior desde un tiempo $t = 0$ hasta t y desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \theta_A$. Por lo que:

$$\int_0^{\theta_A} d\theta = 625 \int_0^t t^2 dt \quad \text{tal que} \quad \theta_A = \frac{625}{3} t^3 \text{ rad} \quad (6.19)$$

Despejando la variable de tiempo de la ecuación (6.19), da como resultado:

$$t = \sqrt[3]{\frac{3\theta_A}{625}}$$

Se sabe que el engrane A gira un total de 50 revoluciones, o lo que es igual a $100\pi \text{ rad} = 314.1592654 \text{ rad}$ en sentido antihorario. Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación anterior, se obtiene el tiempo para el cual el engrane A gira un total de 50 rev .

$$t = \left[\left(\frac{3}{625} \right) (100\pi) \right]^{1/3} = 1.146736678 \text{ s}$$

Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones que definen la velocidad y aceleración angular del engrane A , vea la ecuación (6.18), resulta:

$$\begin{aligned} \omega_A|_{t=1.14674} &= 625t^2 = (625) (1.146736678)^2 = 821.8781299 \text{ rad/s} \quad \circlearrowleft \\ \alpha_A|_{t=1.14674} &= 50\omega_A^{1/2} = 50 (821.8781299)^{1/2} = 1433.420847 \text{ rad/s}^2 \quad \circlearrowleft \end{aligned}$$

De acuerdo con las ecuaciones (6.15) y (6.16) la velocidad y aceleración del engrane B , resultan:

$$\begin{aligned} \omega_B &= \frac{10}{25} (821.8781299 \text{ rad/s}) = 328.751252 \text{ rad/s} \quad \circlearrowleft \\ \alpha_B &= \frac{10}{25} (1433.420847 \text{ rad/s}^2) = 573.3683388 \text{ rad/s}^2 \quad \circlearrowleft \end{aligned}$$

Integrando la ecuación (6.15) se obtiene una relación entre los desplazamientos angulares de los engranes A y B en función de sus radios de paso. De manera que:

$$\theta_A r_A = \theta_B r_B \quad \text{de manera que} \quad \theta_B = \frac{r_A}{r_B} \theta_A$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene

$$\theta_B = \left(\frac{10}{25} \right) (100\pi) = 125.6637061 \text{ rad} \quad \circlearrowleft$$

6.4.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá simulando el sistema empleando las herramientas de engranes dentro del módulo **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de los engranes. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.4, en la página 22 de este trabajo. Es necesario mencionar, que dentro del módulo de engranes se emplea una opción de suma importancia denominada “Simplified”. Esta opción permite calcular las fuerzas en el engranaje, la holgura o backlash entre el par de engranes y analizar la transmisión, reducción o amplificación, de las velocidades y aceleraciones de interés.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 16-28 se muestra en la figura 6.69.

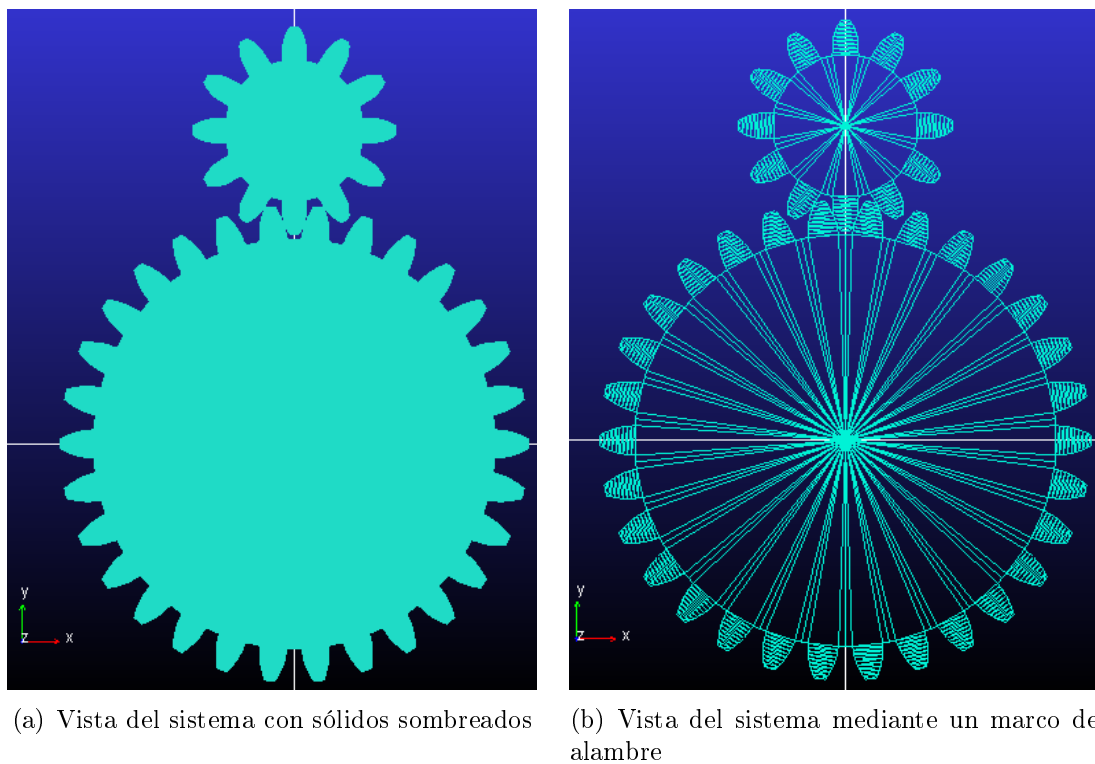


Figura 6.69: Modelo del problema en Adams[©].

Es importante aclarar que Adams[©]/Machinery, sólo puede crear un par de engranes a la vez, por lo que para este problema se crearon dos pares de engranes. El tipo de engrane es el mismo para todos los engranes del modelo, vea la figura 6.70. Como puede observarse, se seleccionó un engrane tipo recto o “spur”.

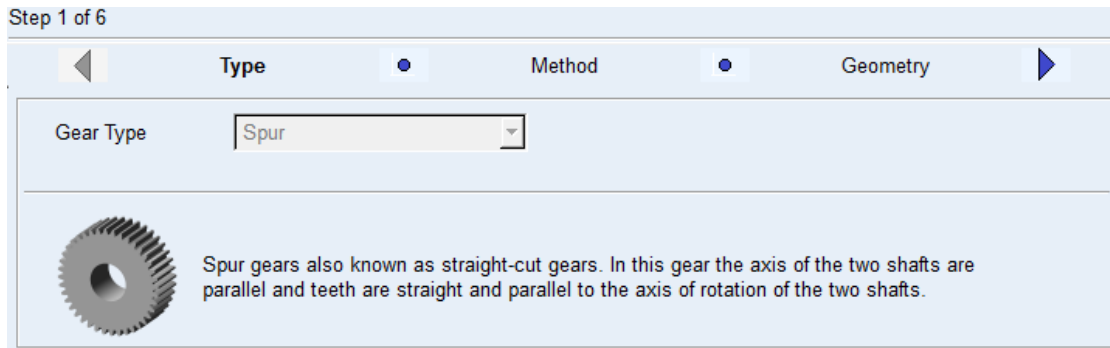


Figura 6.70: Tipos de engranes empleados por Adams[©] para los engranes *A* y *B*.

La figura 6.71 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema. Es importante mencionar, que el método de análisis es el denominado “**Simplified**”.

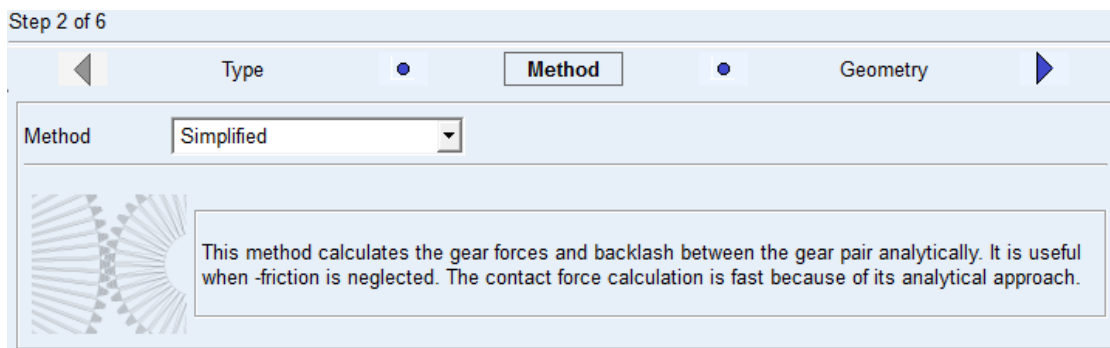


Figura 6.71: Método de análisis empleado por Adams[©] para los engranes *A* y *B*.

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 6.72.

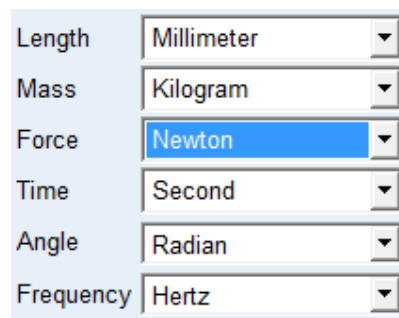


Figura 6.72: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Los parámetros geométricos para el par de engrane A y B se presentan en la figura 6.73. El usuario debe tener cuidado, en seleccionar los radios primitivos o de paso iguales a los indicados en el enunciado del problema, y seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de los engranes. En este caso, debe notarse que la distancia entre centros entre los engranes A y B , debe ser igual a la suma de los radios de ambos engranes.

Los parámetros de mayor importancia para un usuario no experimentado, al momento de diseñar algún sistema con engranes, es el módulo del par de engranes, el cual dependerá del número de dientes y el diámetro de los engranes. Para ello, el usuario debe recordar que el paso circular y el módulo, deben ser iguales para ambos engranes. El ángulo de presión de 20° que aparece por defecto, se deja intacto; a no ser, que el usuario empleara otras unidades angulares. En ese caso, el usuario debe modificar el valor a sus correspondientes unidades. Las coordenadas de los centros de los engranes y el número de dientes de ambos engranes, son de suma importancia; no así, el espesor de los dientes. De manera que, los demás parámetros se dejan intactos.

The screenshot shows a software interface for defining gear geometry, titled "Step 3 of 6". The interface is divided into three tabs: "Method", "Geometry", and "Material". The "Geometry" tab is active. The main settings are as follows:

- Module:** 5 / 3
- Pressure Angle:** 0.349
- Axis of Rotation:** Global Z (dropdown), 0.0, 0.0, 0.0 (coordinates)

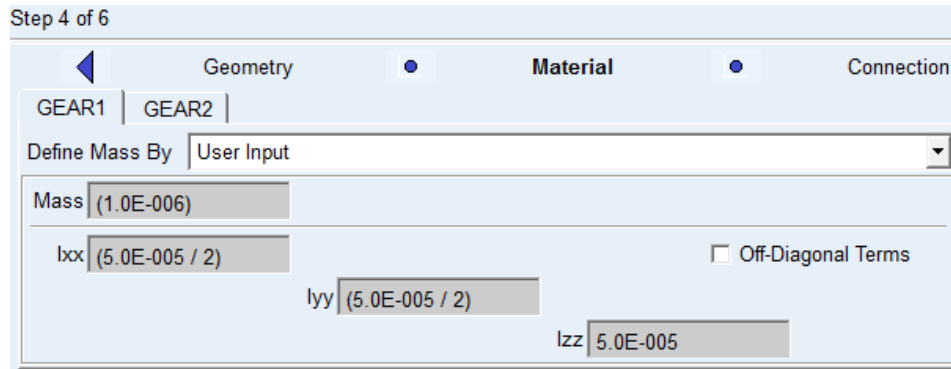
Below these are two columns for gear definitions:

GEAR1		GEAR2	
Name	Driver_2	Name	Driven_2 External (dropdown)
<input checked="" type="radio"/> New <input type="radio"/> Existing		<input checked="" type="radio"/> New <input type="radio"/> Existing	
Center Location	0.0, 35.0, 0.0	Center Location	0.0, 0.0, 0.0
No. of Teeth	12	No. of Teeth	30
Gear Width	12.7	Gear Width	12.7
Bore Radius	0.0	Bore Radius	0.0

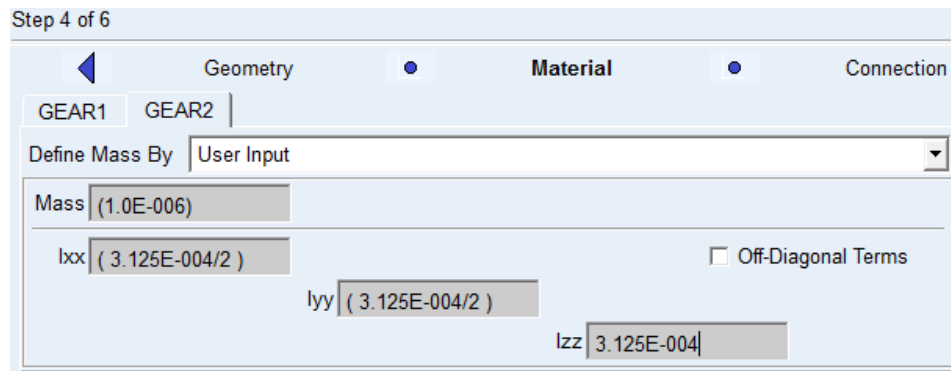
At the bottom, there are "Geometry Settings": Profile points (10) and Layers (5).

Figura 6.73: Propiedades geométricas del par de engranes A y C .

Los parámetros inerciales de los pares de engranajes A y B , se presentan en la figura 6.74. Debe notarse que al ser un problema de cinemática del cuerpo rígido, los datos como las masas de los engranes, no son de interés. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y , no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco, sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .



(a) Propiedades inerciales del engrane *A*



(b) Propiedades inerciales del engrane *B*

Figura 6.74: Propiedades inerciales de los engranes *A* y *B*.

La figura 6.75 muestra los parámetros de contacto para el par de engranes *A* y *B*. Los valores de contacto que aparecen por defecto se dejan intactos.

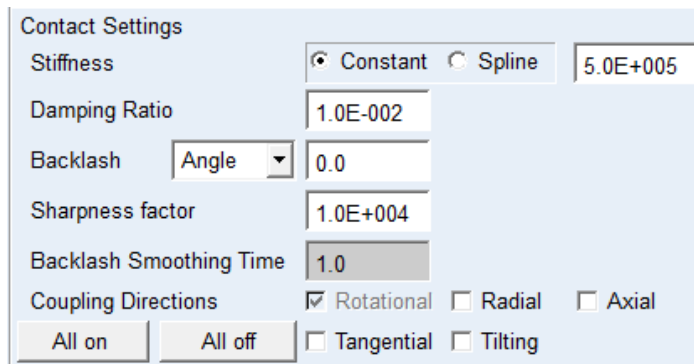


Figura 6.75: Parámetros de contacto para el par de engranes *A* y *B*.

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 1.5 segundos, con un número de pasos de 2000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 6.76. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

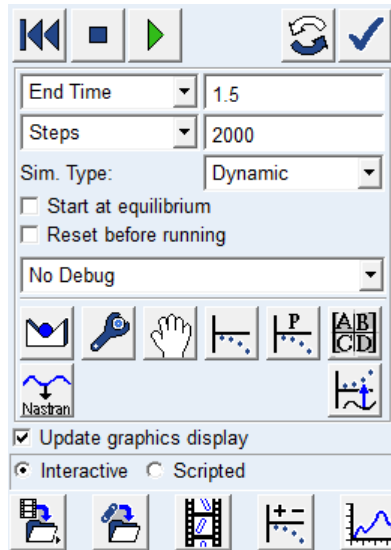


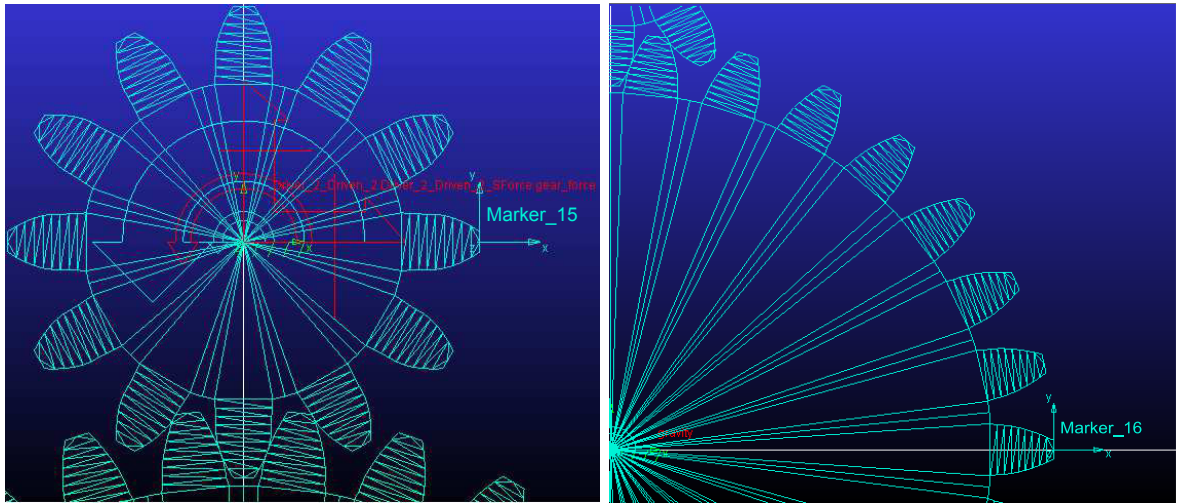
Figura 6.76: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

La figura 6.77 muestra el parámetro *Motion*, o lo que es igual, la función que rige el comportamiento de la aceleración angular del engrane *A*. Como se puede observar en el análisis analítico, la aceleración angular del engrane *A* está en términos de la velocidad angular del mismo engrane. Hasta el momento se desconoce una forma de ingresar una aceleración angular en función de su velocidad angular en Adams[®]; por lo que, es necesario dejar la aceleración angular del engrane *A* en función del tiempo, para ello se sustituye la ecuación (6.18) en la ecuación que define la aceleración angular α_A . De manera que: $\alpha_A = 1250 t \text{ rad/s}^2$.

Name	MOTION_1
Joint	Driver_2.gear_revolute
Joint Type	revolute
Direction	Rotational
Define Using	Function
Function (time)	1250*time
Type	Acceleration
Displacement IC	0.0
Velocity IC	0.0

Figura 6.77: Función que rige el comportamiento de la aceleración angular del engrane *A*.

El “Marker_15” y “Marker_16” como parte del engrane *A* y *B*, respectivamente, tiene como función analizar el desplazamiento angular que sufre tanto el engrane *A* como el engrane *B*, para un tiempo de dos segundos, vea la figura 6.78.



(a) “marker_15” como parte del engrane A. (b) “marker_16” como parte del engrane B.

Figura 6.78: Marcadores para medir el desplazamiento angular de los engranes A y B.

Para poder medir el desplazamiento angular del “Marker_15” y “Marker_16”, se creó una función de medición de desplazamiento angular con respecto a los ejes absolutos fijos z , que pasan por el centro de cada engrane; esto ocurre para cada uno de los marcadores. Estos marcadores fijos son nombrados por Adams[®] como “Driver_2_Ref_1” y “Driven_2_Ref_1”, cabe mencionar que el nombre de todos los marcadores, puntos y cuerpos dentro del modelo, los nombra de forma automática el programa; por lo que, estos pueden variar a los que se muestran en este problema, vea las figuras 6.79 y 6.80.

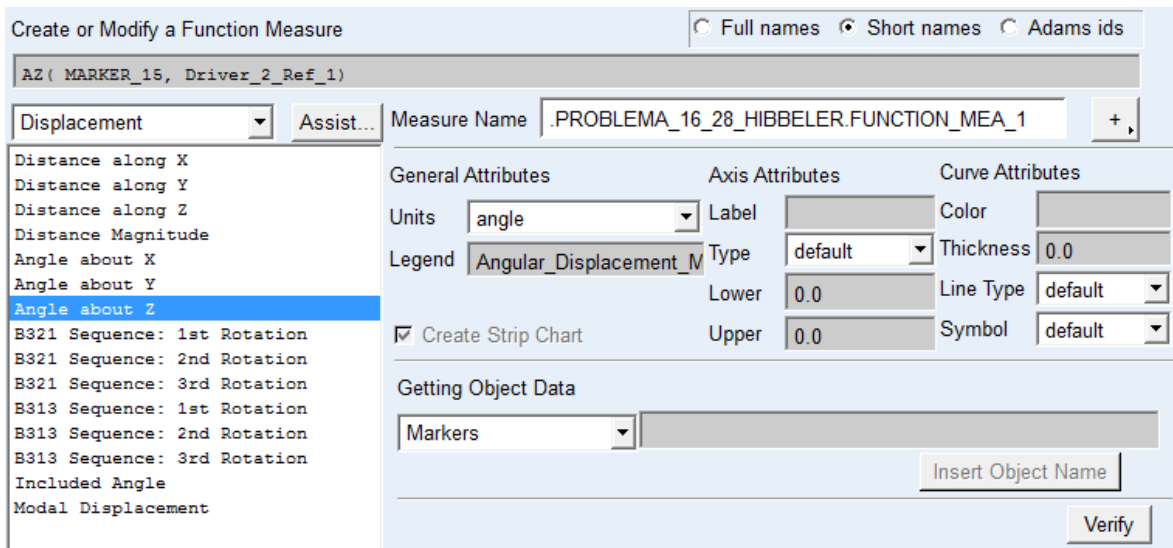


Figura 6.79: Función de medición del desplazamiento angular del “marker_15”.

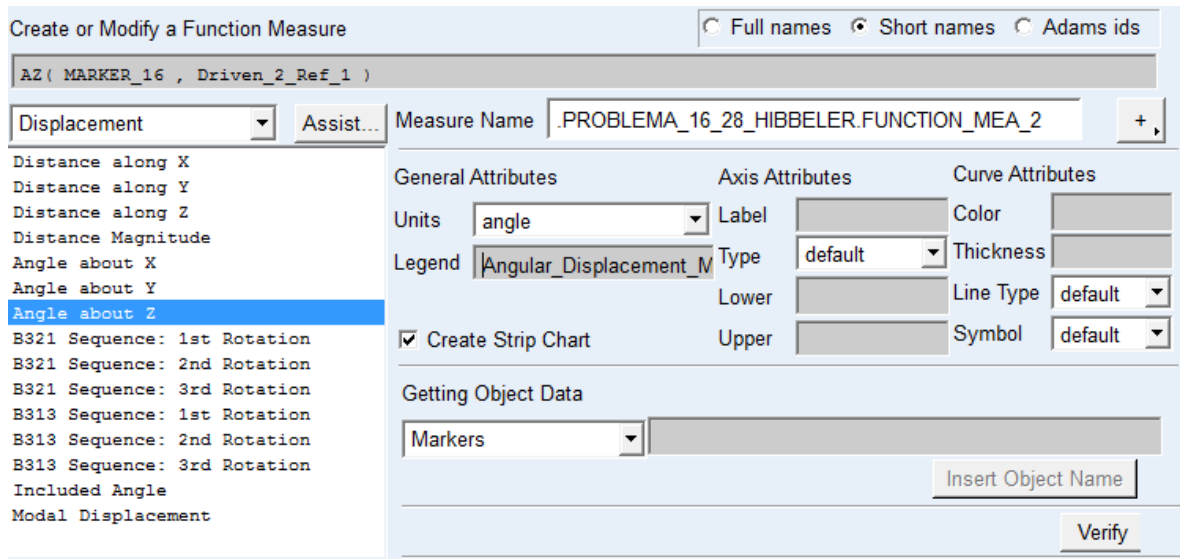


Figura 6.80: Función de medición del desplazamiento angular del “marker_16”.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 6.81, 6.82, 6.83, 6.84 y 6.85.

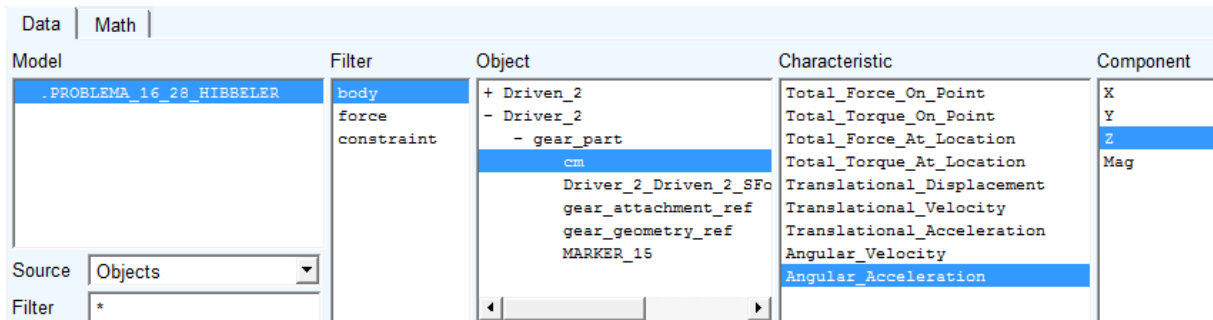


Figura 6.81: Solicitud de la aceleración angular del engrane A.

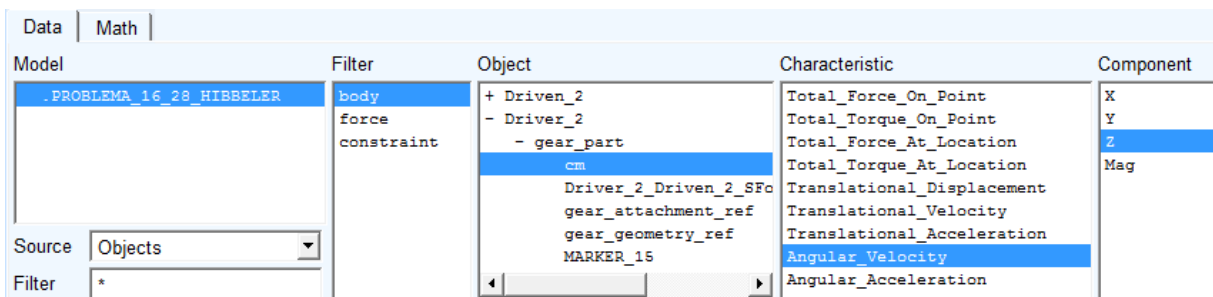


Figura 6.83: Solicitud de la velocidad angular del engrane A.

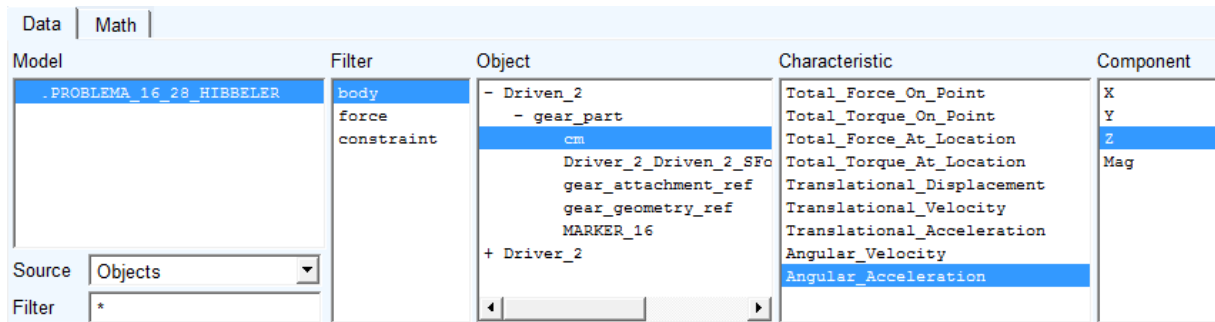


Figura 6.82: Solicitud de la aceleración angular del engrane *B*.

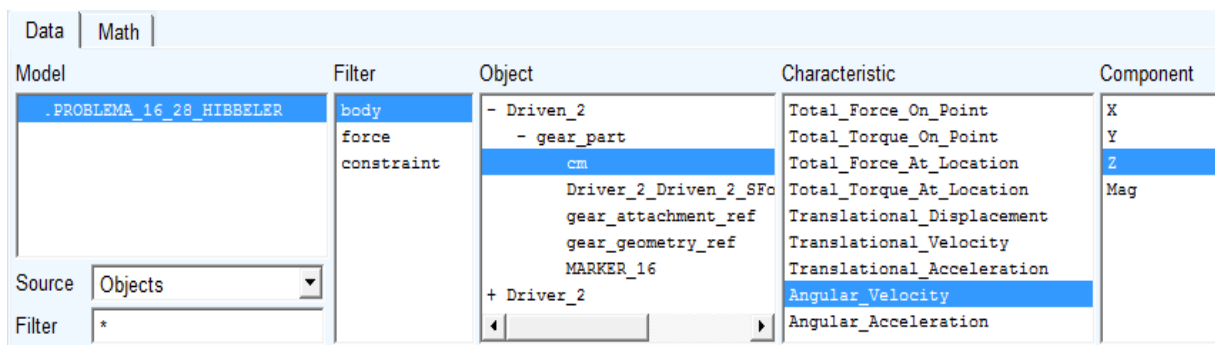


Figura 6.84: Solicitud de la velocidad angular del engrane *B*.

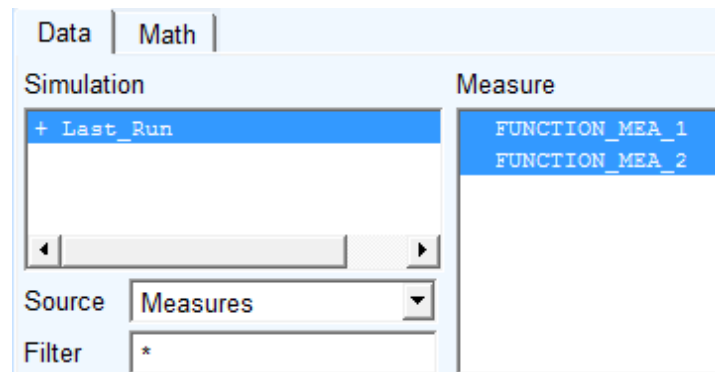


Figura 6.85: Solicitud del desplazamiento angular de los engranes *A* y *B*.

Los resultados obtenidos por Adams[©] se muestran en las figuras 6.86, 6.87 y 6.88.

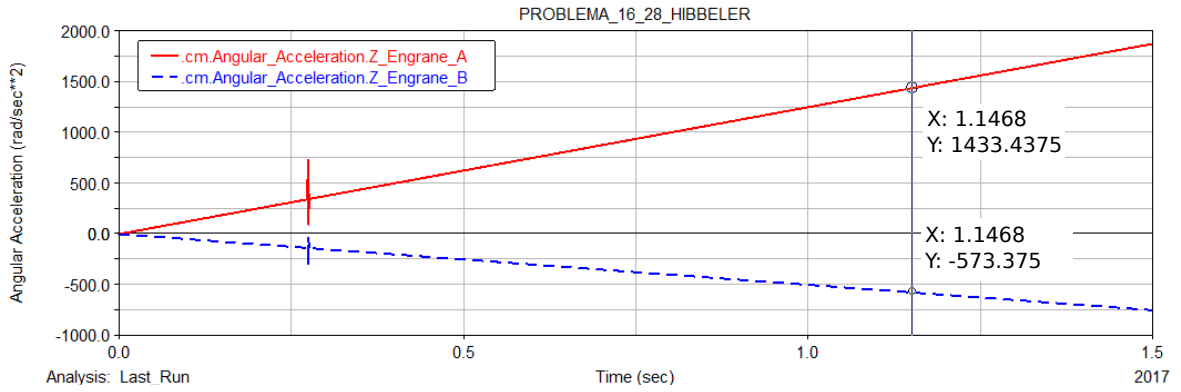


Figura 6.86: Resultado de las aceleraciones angulares de los engranes *A* y *B*.

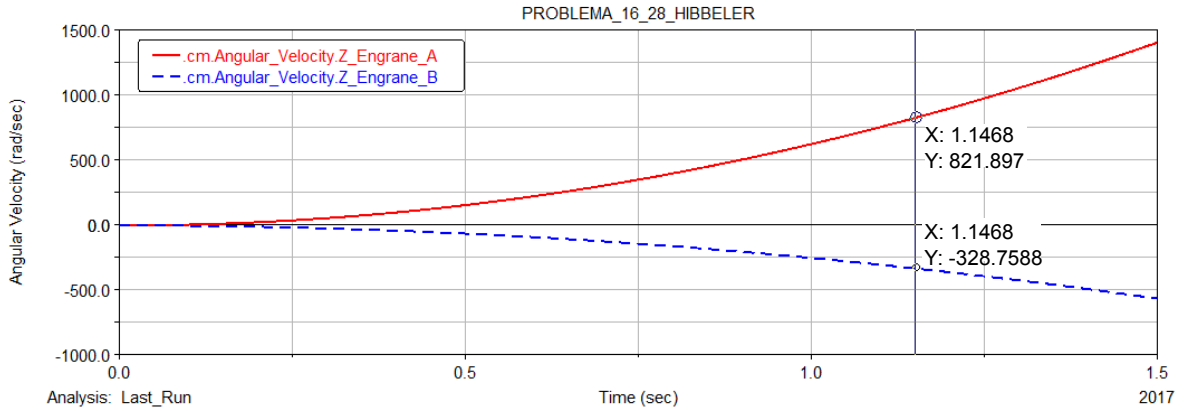


Figura 6.87: Resultado de las velocidades angulares de los engranes *A* y *B*.

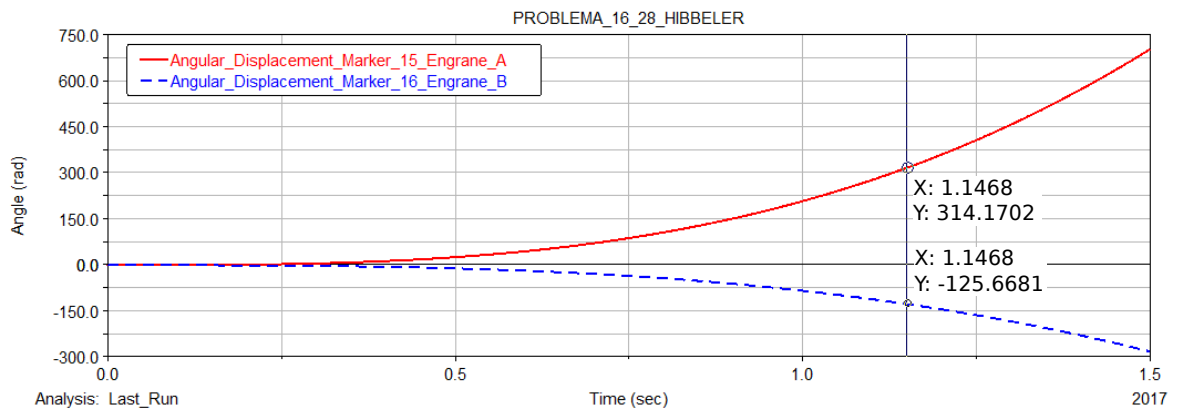


Figura 6.88: Resultado del desplazamiento angular de los engranes *A* y *B*.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Los resultados obtenidos por medio de la simulación, tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 6.4 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 6.4: Comparación de resultados. 4.º problema de engranes y cremalleras

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
α_A	$1433.420847 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$	$1433.4375 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright$
α_B	$573.3683388 \text{ rad/s}^2 \curvearrowleft$	$573.375 \text{ rad/s}^2 \curvearrowleft$
ω_A	$821.8781299, \text{ rad/s} \curvearrowright$	$821.897 \text{ rad/s} \curvearrowright$
ω_B	$328.751252 \text{ rad/s} \curvearrowleft$	$328.7588 \text{ rad/s} \curvearrowleft$
θ_A	$314.1592654 \text{ rad}', \curvearrowright$	$314.1702 \text{ rad/s} \curvearrowright$
θ_B	$125.6637061 \text{ rad} \curvearrowleft$	$125.6681 \text{ rad/s} \curvearrowleft$

6.5. Quinto problema de sistemas de engranes y cremalleras.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 16-54 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 346.

Problema 5: El piñón dentado A , con un radio de 0.3 ft , rueda sobre la cremallera fija B , con una velocidad angular $\omega = 4 \text{ rad/s}$ en sentido antihorario. Determine la velocidad de la cremallera C .

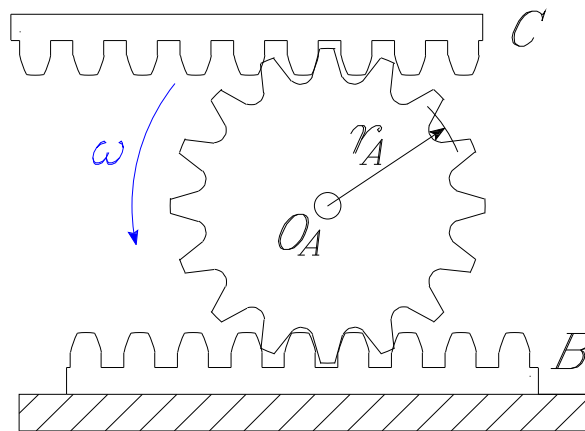


Figura 6.89: Modelo del problema 16-54 Hibbeler [18].

6.5.1. Solución analítica.

Puesto que no existe deslizamiento entre el engrane y las cremalleras C y B , se concluye que el sistema está sujeto a movimiento de rodadura, que es un caso especial de movimiento plano general; por lo que, la velocidad y la componente tangencial de la aceleración en el punto P_1 como parte de la cremallera B , y el punto P_1 como parte del engrane A , son iguales; lo mismo ocurre con la velocidad y la componente tangencial de la aceleración en el punto P_2 como parte de A y C , vea las ecuaciones (6.20), (6.21) y la figura 6.90.

De manera que:

$$\vec{v}_{P_1A} = \vec{v}_{P_1B} \quad \vec{a}_{tP_1A} = \vec{a}_{tP_1B} \quad (6.20)$$

$$\vec{v}_{P_2A} = \vec{v}_{P_2C} \quad \vec{a}_{tP_2A} = \vec{a}_{tP_2C} \quad (6.21)$$

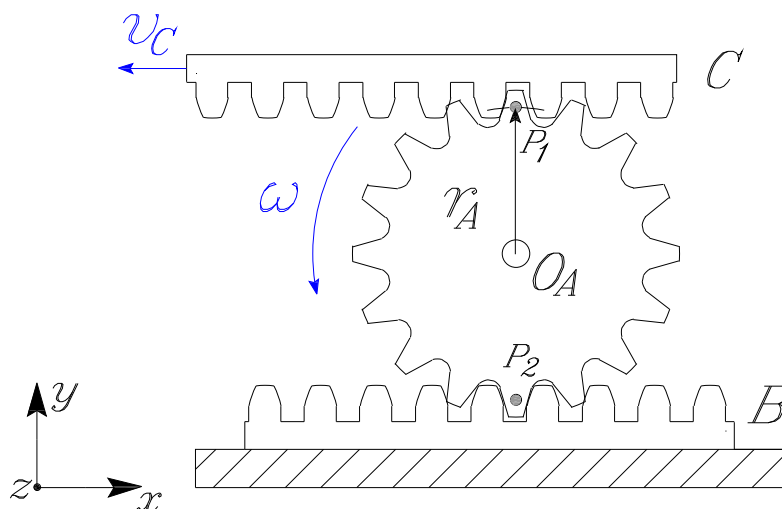


Figura 6.90: Diagrama cinemático del problema.

Puesto que la cremallera B se encuentra fija, la velocidad y la componente tangencial de la aceleración del punto P_1 como parte de B es igual a cero y de acuerdo con la ecuación (6.20), la velocidad y aceleración tangencial del punto P_1 con respecto al engrane es igual a cero.

$$\vec{v}_{P_1A} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \vec{a}_{tP_1A} = \vec{0}$$

Análisis de velocidad.

Se sabe que el centro del engrane, se mueve a lo largo de una línea recta horizontal, de manera que:

$$\vec{v}_{O_A} = -v_{O_A} \hat{i} \quad (6.22)$$

Por lo tanto:

$$\vec{v}_{O_A} = \vec{v}_{P_1A} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O_A/P_1A} = \omega \hat{k} \times r_{O/B_2} \hat{j} \quad \text{donde} \quad \vec{v}_{O_A} = -\omega (r_{O/B_1}) \hat{i} \quad (6.23)$$

Mientras que la velocidad del punto P_2 como parte de C en el instante mostrado en la figura 6.90, está dada por:

$$\vec{v}_{P_2A} = \vec{v}_{P_2C} = \vec{v}_{O_A} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P_2A/O_A}$$

sustituyendo la ecuación (6.23) en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\vec{v}_{P_2A} = -\omega (r_{O/B_1}) \hat{i} + \omega \hat{k} \times r_{P_2A} \hat{j} \quad \text{De manera que} \quad \vec{v}_{P_2A} = -\omega (r_{O/B_1}) \hat{i} - \omega_A (r_{P_2A}) \hat{i} \quad (6.24)$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (6.23), se obtiene el valor de la velocidad del punto O_A , o lo que es igual, la velocidad en el centro del engrane A . De manera que:

$$\vec{v}_{O_A} = - (4 \text{ rad/s}) (0.3 \text{ ft}) \hat{i} = -1.2 \hat{i} \text{ m/s}$$

Ahora bien, sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (6.24), se obtiene el valor de la velocidad de la cremallera C o la velocidad en el punto P_2 como parte de A y C .

$$\vec{v}_{P_2A} = -1.2 \hat{i} \text{ ft/s} - (4 \text{ rad/s}) (0.3 \text{ ft}) \hat{i} = -2.4 \hat{i} \text{ ft/s}$$

Análisis de aceleración.

Como el problema no menciona que exista aceleración angular alguna sobre el engrane A , se supone que la velocidad angular del mismo es constante, por lo que la aceleración angular del engrane es igual a cero. Debido a esto, las aceleraciones tangenciales de los puntos P_1 y P_2 son iguales a cero.

$$\vec{a}_{O_A} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \vec{a}_{tP_1A} = \vec{a}_{tP_1C} = \vec{0}$$

6.5.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá simulando el sistema empleando las herramientas de engranes dentro del módulo **Machinery** del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de los engranes y cremalleras. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.4, en la página 22 de este trabajo. Es necesario destacar que Adams[©]/Machinery, sólo puede crear un par de engrane y cremallera a la vez.

El modelo Adams[©] que representa el sistema del problema 16-54 se muestra en la figura 6.91.

Ahora bien, la figura 6.92 muestra el tipo de sistema de engranaje. Como se puede apreciar, se seleccionó un engranaje del tipo engrane-cremallera o “rack”.

Por otra parte, la figura 6.93 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema, que debe ser el mismo para todo par de engrane dentro del modelo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de engranes, se emplea una opción de suma importancia denominada “**Simplified**”. Esta opción permite calcular las fuerzas en el engranaje, la holgura o backlash entre el par de engranes, y la transmisión, reducción o amplificación, de las velocidades de interés.

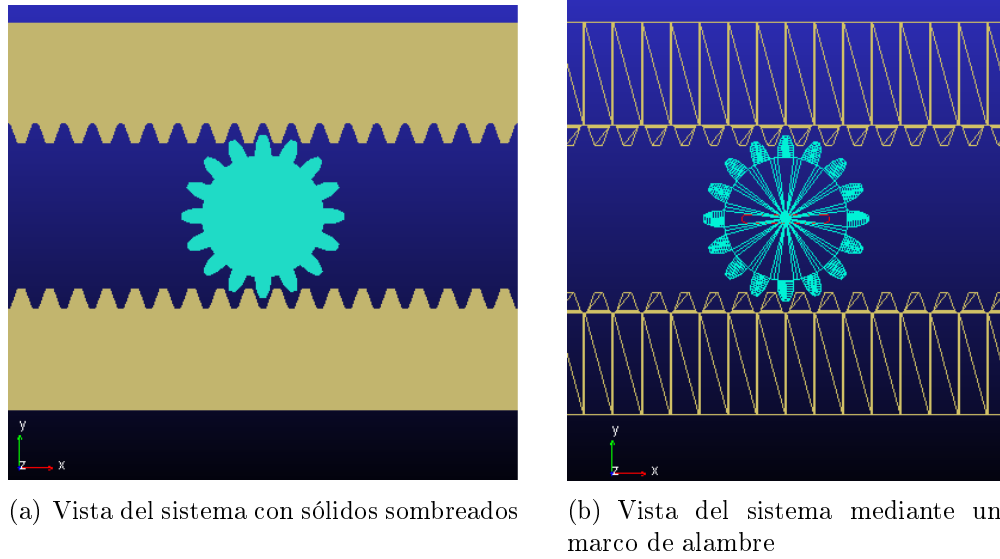


Figura 6.91: Modelo del problema en Adams[©].

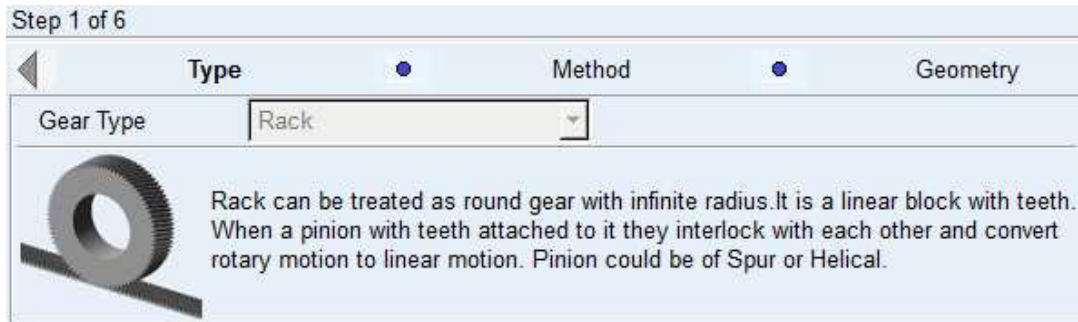


Figura 6.92: Tipos de engranes empleados por Adams[©], engrane y cremallera.

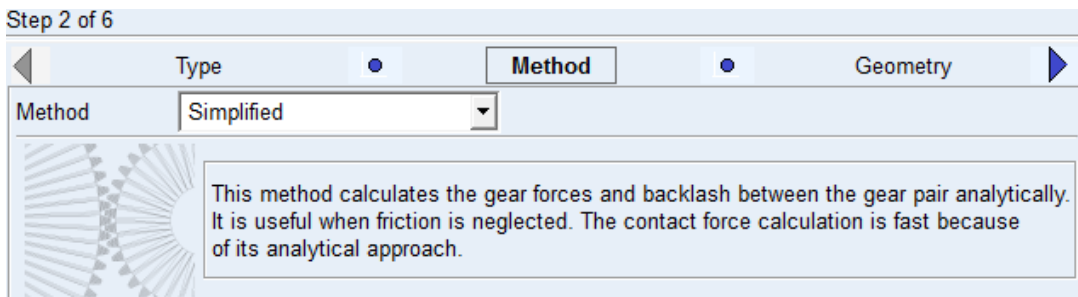


Figura 6.93: Método de análisis empleado por Adams[©], para el par de engranes *A* y *C*.

El usuario debe prestar atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 6.94.

Length	Foot
Mass	Slug
Force	Pound Force
Time	Second
Angle	Radian
Frequency	Hertz

Figura 6.94: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Los parámetros geométricos del engrane y cremallera A , B y A , C se muestran en las figuras 6.95 y 6.96. El usuario debe tener cuidado en seleccionar el mismo radio de paso al indicado en el enunciado del problema.

Los parámetros de mayor importancia para un usuario experimentado al momento de diseñar algún sistema de engrane y cremallera, es el módulo entre ambos, este dependerá del número de dientes y el diámetro de los engranes. El módulo del engrane debe ser el mismo para el engrane y la cremallera, el ángulo de presión de 20° que aparece por defecto, se deja sin cambio; a no ser, que el usuario empleara otras unidades angulares. En este caso, el usuario debe modificar el valor a sus correspondientes unidades. Las coordenadas de los centros de los engranes y el número de dientes de ambos engranes, son de suma importancia; no así, el espesor de los dientes. De manera que, los demás parámetros se dejan intactos.

Step 3 of 6

Method Geometry Material

Module (3 / 8) Pressure Angle 0.349 Helix Angle 0.0

Pinion		Rack	
Name	Driver_1	Name	Driven_1
<input checked="" type="radio"/> New <input type="radio"/> Existing		<input checked="" type="radio"/> New <input type="radio"/> Existing	
Axis of Rotation	Global Z 0.0,0.0,0.0	Axis of Translation	Global Z 0.0,0.0,0.0
Center Location	0.0, 0.0, 0.0	Center Location	0.0, -0.3, 0.0
No. of Teeth	16	No. of Teeth	108
Face Width	0.08333333333	Face Width	0.08333333333
Bore Radius	0.0	Base Thickness	0.4166666667
Hand of Helix	<input checked="" type="radio"/> LH <input type="radio"/> RH	Hand of Helix	<input type="radio"/> LH <input checked="" type="radio"/> RH
		Root Fillet Rad Coeff.	0.38

Geometry Settings: Profile points 10 Layers 5 Fillet points 3

Figura 6.95: Propiedades geométricas del engrane A y la cremallera B .

El usuario debe saber que para la creación de la cremallera C , se seleccionó el engrane A como el engrane motriz o “Gear 1”, para este segundo par de engrane y cremallera, vea la figura 6.96. Otro punto importante a aclarar es que para generar la segunda cremallera, esta tiene que rotar sobre el eje absoluto z un total de 180° , lo que es igual a π radianes, esto se logra modificando la orientación del los ejes coordenados de la cremallera C , para mayor detalle revisar el apéndice D.

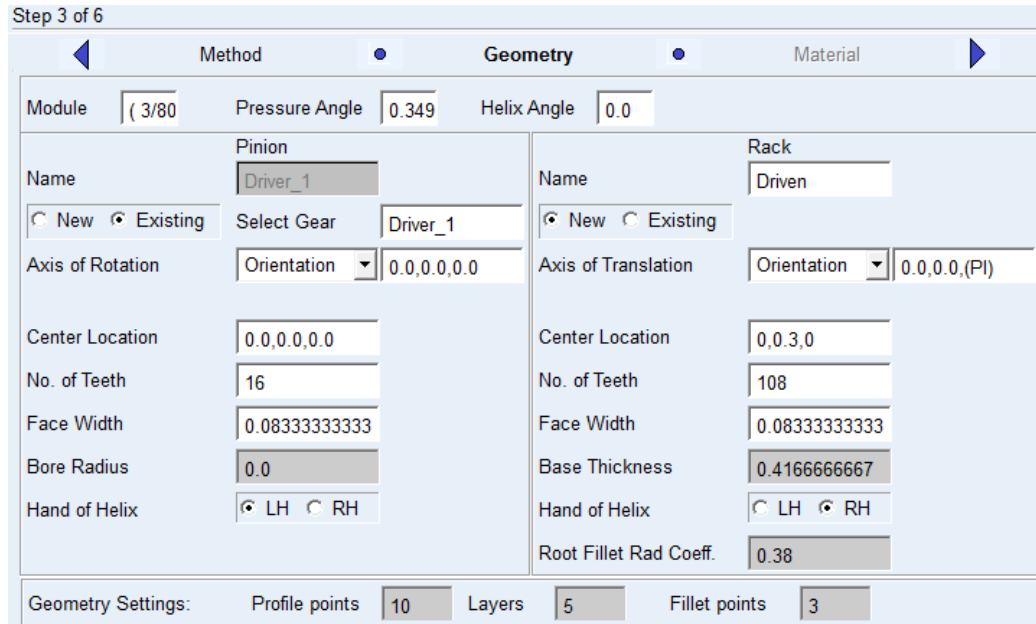


Figura 6.96: Propiedades geométricas del engrane A y cremallera C .

Los parámetros inerciales del sistema engrane A y las cremalleras B y C , se presentan en la figuras 6.97 y 6.98. Debe notarse que al ser un problema de cinemática del cuerpo rígido, los datos como la masa del engrane y las cremalleras, no son de interés. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y no son de importancia en este análisis; sin embargo, es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .

Las propiedades inerciales de la cremallera C , son las mismas de la cremallera B ; por lo que, sólo se muestran las propiedades de la cremallera B , vea la figura 6.98. Mientras que las propiedades inerciales del engrane A que se muestran en la figura 6.97, perteneciente al par de engrane-cremallera, $A-B$ y $A-C$. El usuario no debe preocuparse en ingresar nuevamente los valores inerciales al momento de crear el par engrane-cremallera A y C , esto debido a que Adams[®] ingresa de forma automática dichos valores; esto ocurre, al momento en el que el usuario selecciona la opción “Existing”. Esta función permite seleccionar un cuerpo ya existente dentro del modelo, que para este caso, es el engrane A , vea la figura 6.96.

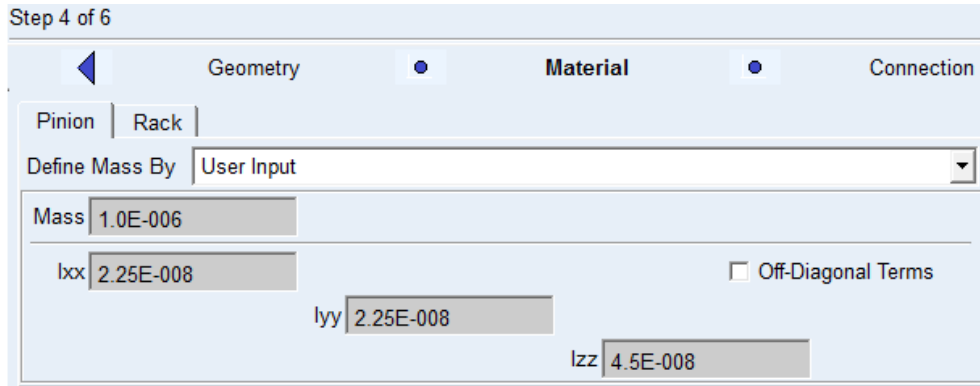


Figura 6.97: Propiedades inerciales del engrane *A* dentro del par de engrane-cremallera *A-B*.

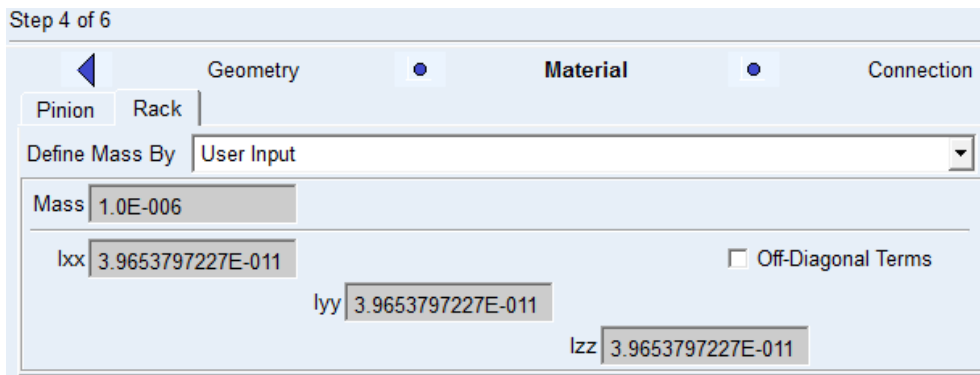


Figura 6.98: Propiedades inerciales de la cremallera *B* dentro del par de engrane-cremallera *A-B*.

La figura 6.99 muestra los parámetros de contacto para el par de engranes *A, B* y *A, C*. Los valores de contacto que aparecen por defecto se dejan intactos.

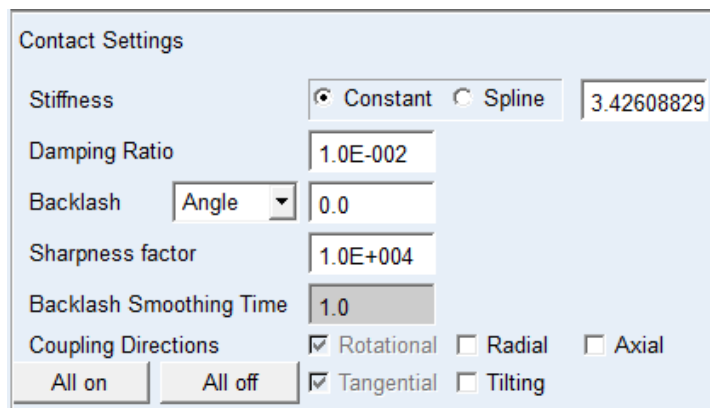
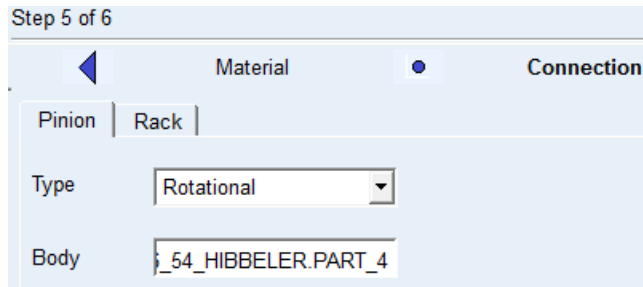
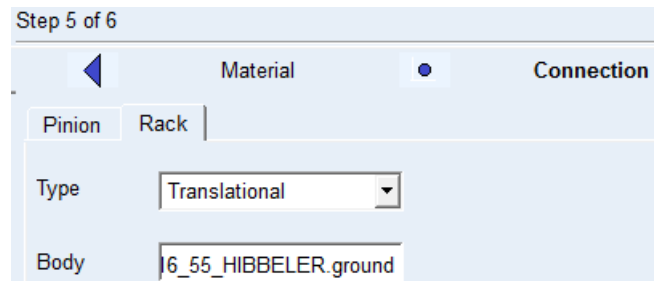


Figura 6.99: Parámetros de contacto para el par de engranes *A, B* y *A, C*.

Las figuras en 6.100 muestra los parámetros de conexión del engrane A y las cremalleras B y C , Esto para ambos pares de engranes-cremalleras A y B ; y A y C , vea también 6.101. Como se observa en la figura 6.100, el tipo de conexión del engrane A es de revoluta, este par prismático está unido con respecto a un cuerpo o parte llamado “Part_4”. Es importante aclarar, que el nombre de este cuerpo cambia, ya que Adams[©] nombra los cuerpos dependiendo su orden de aparición dentro del modelo.



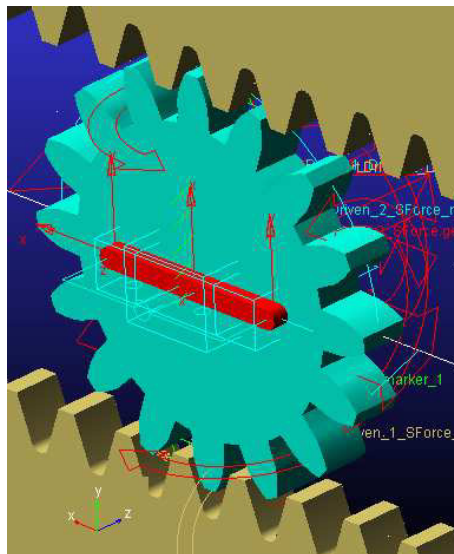
(a) Parámetros de conexión para el engrane A



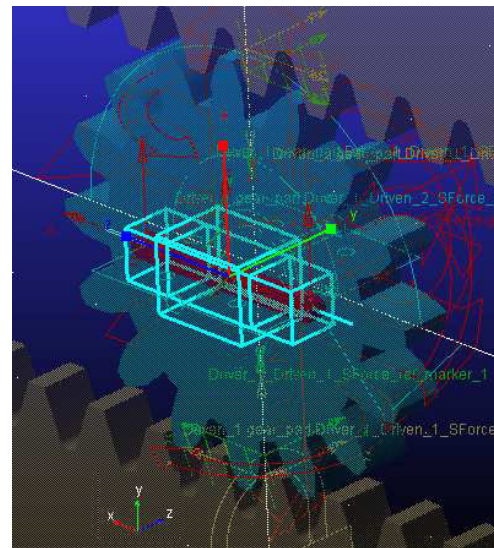
(b) Parámetros de conexión de la cremallera B

Figura 6.100: Parámetros de conexión del par engrane-cremallera A y B .

La función del cuerpo “Part_4”, es otorgarle al engrane A no sólo movimiento de rotación baricentrica sobre un eje perpendicular al plano xy del modelo, sino también otorgarle movimiento de traslación horizontal; por lo que, dicho cuerpo posee un par prismático a lo largo del eje y del modelo, vea la figura 6.101.



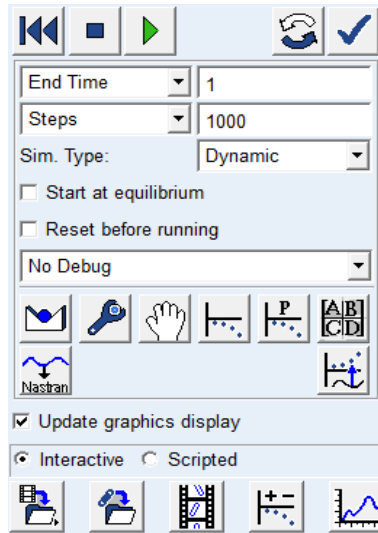
(a) Cuerpo auxiliar “Part_4”



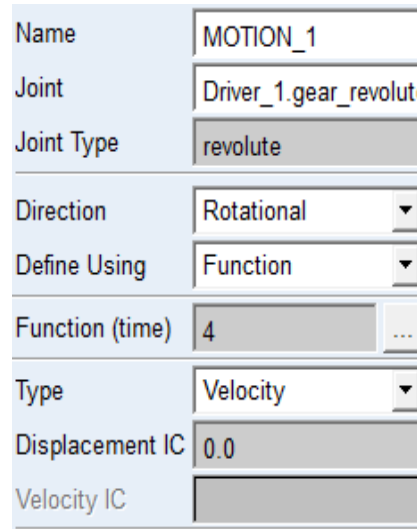
(b) Par prismático del cuerpo auxiliar

Figura 6.101: Par prismático del cuerpo auxiliar.

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 1.0 segundo, un número de pasos de 1000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 6.102(a). La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay, mientras que la figura 6.102(b) muestra el parámetro *Motion* o lo que es igual, la función que rige el comportamiento de la velocidad angular del engrane *A*.



(a) Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.



(b) Función de la velocidad angular del engrane.

Figura 6.102: Parámetros de simulación y función de la velocidad angular.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 6.103, 6.104, 6.105 y 6.106.

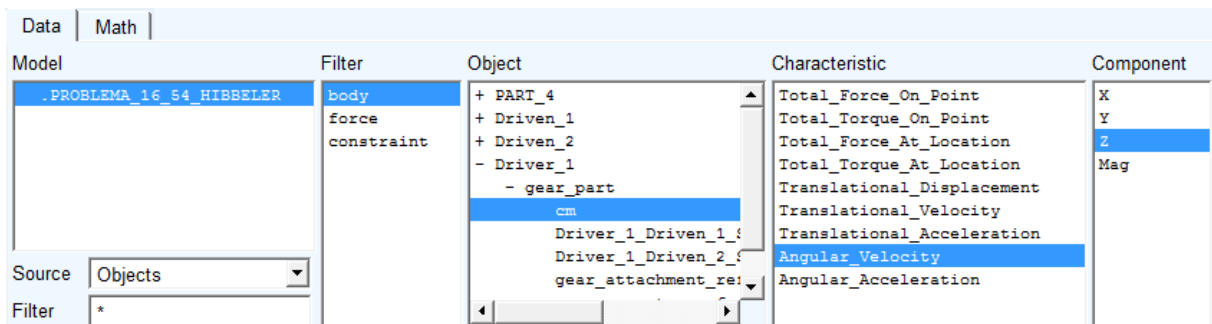


Figura 6.103: Solicitud de la velocidad angular del engrane *A*.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_16_54_HIBBELER	body	+ PART_4	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- Driven_2	Total_Force_At_Location	Z
		- gear_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		Driver_1_Driven_2_9	Translational_Velocity	
		gear_attachment_ref	Translational_Acceleration	
		gear_geometry_ref	Angular_Velocity	
		+ Driven_1	Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

Figura 6.104: Solicitud de la velocidad de la cremallera *C*.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_16_54_HIBBELER	body	+ PART_4	Total_Force_On_Point	X
	force	- Driven_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- gear_part	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		Driver_1_Driven_1_9	Translational_Displacement	
		gear_attachment_ref	Translational_Velocity	
		gear_geometry_ref	Translational_Acceleration	
		+ Driven_2	Angular_Velocity	
		+ Driven_1	Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

Figura 6.105: Solicitud de la velocidad de la cremallera *B*.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_16_54_HIBBELER	body	+ PART_4	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ Driven_2	Total_Force_At_Location	Z
		- Driver_1	Total_Torque_At_Location	Mag
		- gear_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		Driver_1_Driven_1_9	Translational_Acceleration	
		Driver_1_Driven_2_9	Angular_Velocity	
		gear_attachment_ref	Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

Figura 6.106: Solicitud de la aceleración angular del engrane *A*.

Los resultados obtenidos por Adams[©] se muestran en las figuras 6.107, 6.108 y 6.109

Como se puede observar en la figura 6.109, el valor de la aceleración angular del engrane *A* contiene cierto ruido, por lo que su valor no es totalmente cero, pero al tener valores sumamente bajos pueden ser ignorados por el usuario.

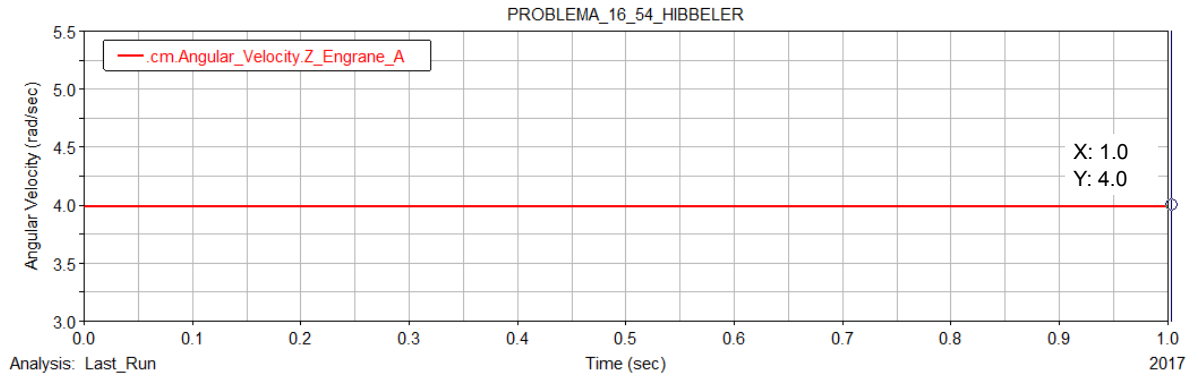


Figura 6.107: Resultado de la velocidad angular del engrane A.

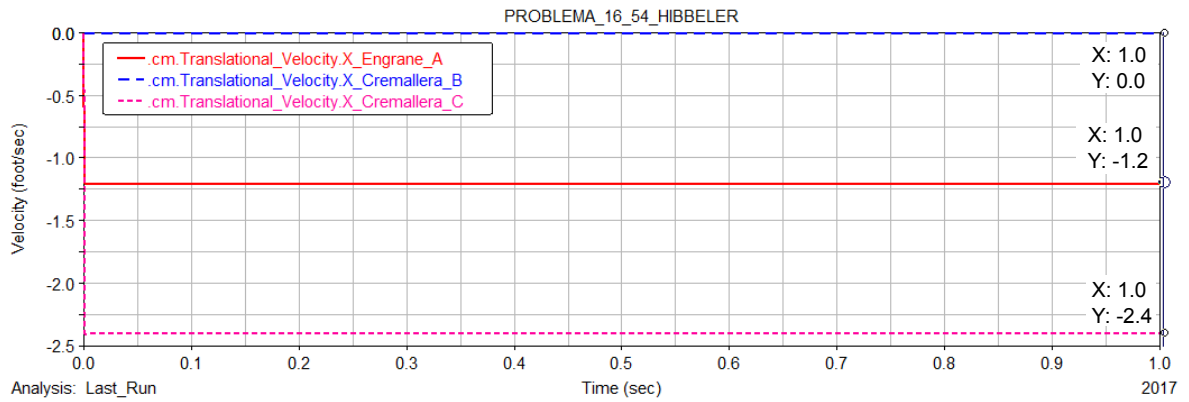


Figura 6.108: Resultado de la velocidad del engrane A y las cremalleras B y C.

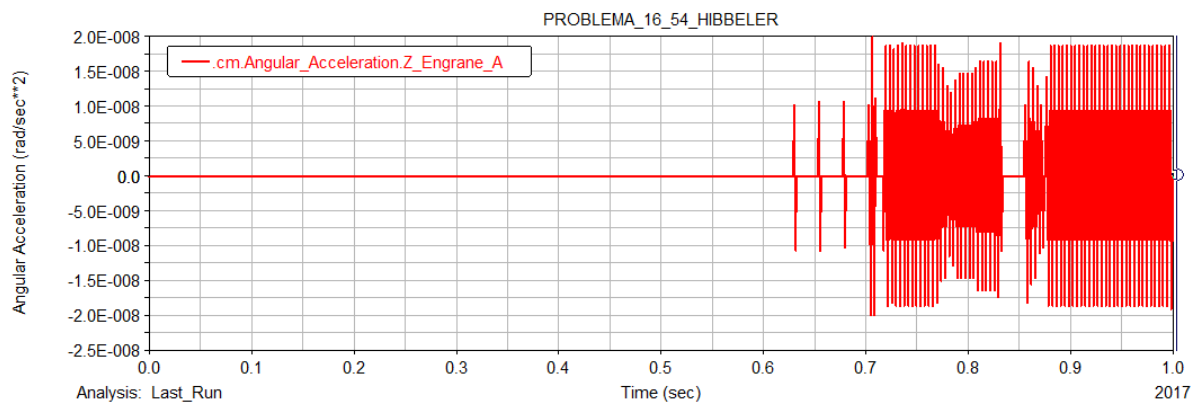


Figura 6.109: Resultado de la aceleración angular del engrane A.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Los resultados obtenidos por medio de la simulación, tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 6.5 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 6.5: Comparación de resultados. 5.º problema de engranes y cremalleras

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
ω	$4 \text{ rad/s } \curvearrowright$	$4 \text{ rad/s } \curvearrowright$
α	0 rad/s^2	$-1.4831 \times 10^{-19} \text{ rad/s}^2$
v_{O_A}	$1.2 \text{ ft/s } \leftarrow$	$1.2 \text{ ft/s } \leftarrow$
v_C	$2.4 \text{ ft/s } \leftarrow$	$2.4 \text{ ft/s } \leftarrow$
v_B	0.0 ft/s	0.0 ft/s

6.6. Sexto problema de sistemas de engranes y cremalleras.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 16-55 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 346.

Problema 6: El piñón dentado A rueda sobre las cremalleras B y C . Si B se desplaza a la derecha a 8 ft/s y C lo hace a la izquierda a 4 ft/s , determine la velocidad angular del piñón dentado y la velocidad de su centro A . Donde: $r_A = 0.3 \text{ ft}$, $v_B = 8 \text{ ft/s}$ y $v_C = 4 \text{ ft/s}$.

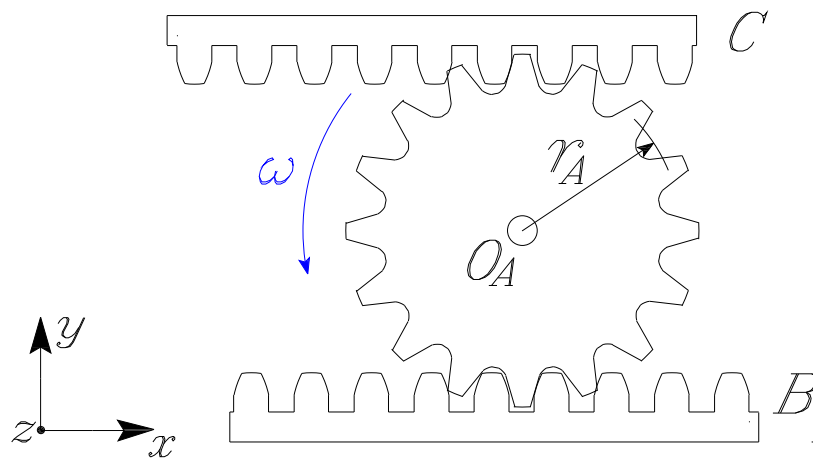


Figura 6.110: Modelo del problema 16-55 Hibbeler [18].

6.6.1. Solución analítica.

Puesto que no existe deslizamiento entre el engrane A y las cremalleras C y B , se concluye que el sistema está sujeto a un movimiento de rodadura, que es un caso especial de movimiento plano general; por lo que, la velocidad y la componente tangencial de la aceleración en el punto P_1 como parte de la cremallera B , y como parte del engrane A , son iguales; lo mismo ocurre con la velocidad y la componente tangencial de la aceleración en el punto P_2 como parte de A y C , vea las ecuaciones (6.25), (6.26) y la figura 6.111.

De manera que:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{P_1A} = \vec{v}_{P_1B} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_{tP_1A} = \vec{a}_{tP_1B} \quad (6.25)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{P_2A} = \vec{v}_{P_2C} \quad \vec{a}_C = \vec{a}_{tP_2A} = \vec{a}_{tP_2C} \quad (6.26)$$

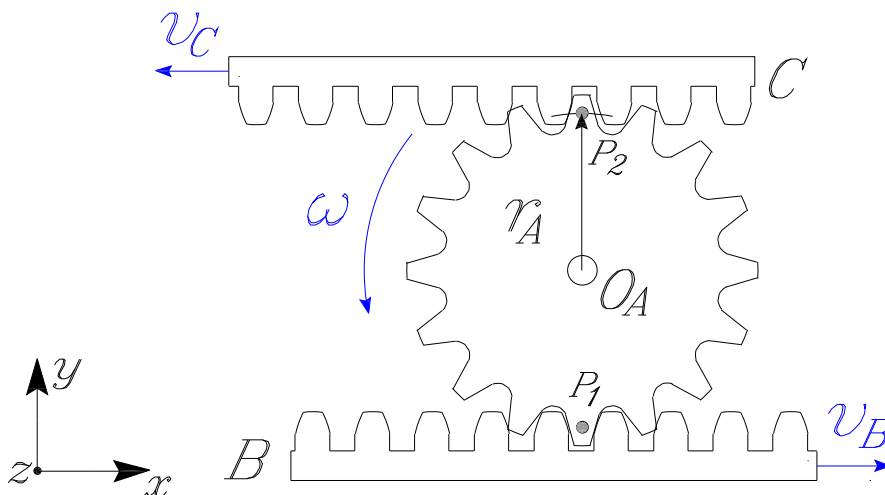


Figura 6.111: Diagrama cinemático del problema.

Puesto que la cremallera B se mueve a la derecha y la cremallera C a la izquierda y de acuerdo con las ecuaciones (6.25) y (6.26), la velocidad en el punto P_1 como parte de B y la velocidad de P_2 como parte de C , resulta:

$$\vec{v}_B = v_{P_1A} \hat{i} \text{ ft/s}$$

$$\vec{v}_C = -v_{P_2A} \hat{i} \text{ ft/s}$$

Análisis de velocidad

Se sabe que el centro del engrane, se mueve a lo largo de una línea recta horizontal, de manera que :

$$\vec{v}_{O_A} = \vec{v}_{P_1A} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{O_A/P_1A}) = v_{P_1A} \hat{i} + \omega \hat{k} \times (r_{O_A/P_1A}) \hat{j}$$

Desarrollando la ecuación, se obtiene:

$$\vec{v}_{O_A} = v_{P_{1A}} \hat{i} - \omega (r_A) \hat{i} \quad (6.27)$$

Mientras que la velocidad del punto P_2 como parte de C , en el instante mostrado en la figura 6.111, está dada por:

$$\vec{v}_{P_{2A}} = \vec{v}_{P_{2C}} = \vec{v}_{O_A} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P_{2A}/O_A}$$

Al desarrollar la ecuación anterior, se consigue:

$$\vec{v}_{P_{2A}} = \vec{v}_{O_A} + \omega \hat{k} \times (r_{P_{2A}/O_A}) \hat{j} \quad \text{donde} \quad \vec{v}_{P_{2A}} = \vec{v}_{O_A} - \omega (r_{P_{2A}/O_A}) \hat{i}$$

Despejando \vec{v}_{O_A} de la ecuación anterior, da como resultado:

$$\vec{v}_{O_A} = -v_{P_{2A}} \hat{i} + \omega (r_A) \hat{i} \quad (6.28)$$

Igualando las ecuaciones (6.27) y (6.28), se obtiene:

$$[v_{P_{1A}} - \omega (r_A)] \hat{i} = [-v_{P_{2A}} + \omega (r_A)] \hat{i}$$

Tomando las componentes en \hat{i} y despejando la velocidad angular ω del engrane A , resulta:

$$\omega = \frac{v_{P_{1A}} + v_{P_{2A}}}{2r_A} = \frac{v_B + v_C}{2r_A} \quad (6.29)$$

Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones (6.29) y (6.27), resulta:

$$\omega = \frac{12 \text{ ft/s}}{0.6 \text{ ft}} = 20 \text{ rad/s} \quad \text{tal que} \quad \vec{\omega} = 20 \hat{k} \text{ rad/s}$$

$$\vec{v}_A = 8 \text{ ft/s} \hat{i} - (20 \text{ rad/s}) (0.3 \text{ ft}) \hat{i} = 2 \text{ ft/s} \hat{i}$$

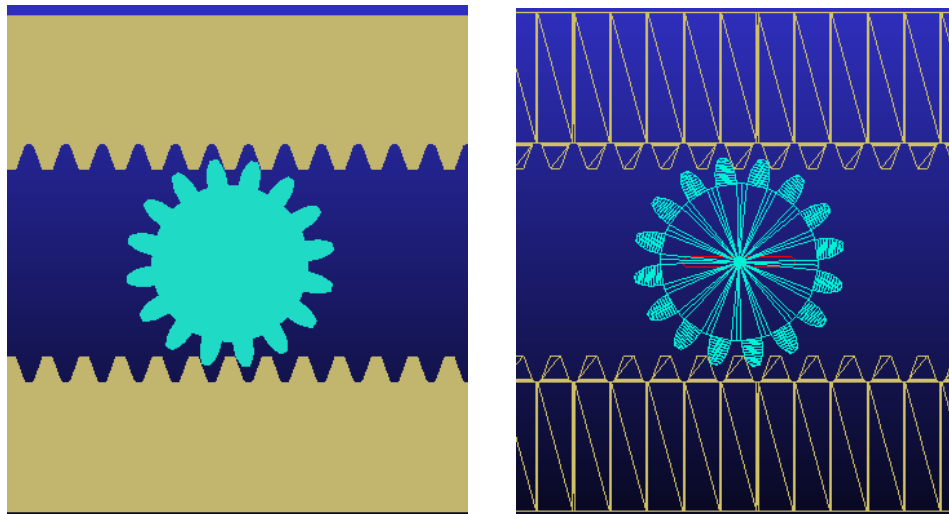
Análisis de aceleración

Como el problema no menciona que exista aceleración angular sobre el engrane A , se concluye que la velocidad angular del engrane es constante, por lo que su aceleración angular es igual a cero. Debido a esto, las componentes tangenciales de las aceleraciones en los puntos P_1 y P_2 son iguales a cero.

$$\vec{a}_{O_A} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \vec{a}_{tP_{1B}} = \vec{a}_{tP_{2C}} = \vec{0}$$

6.6.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá simulando el sistema empleando las herramientas de engranes dentro del módulo **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección, no se discute la selección de los parámetros geométricos de los engranes y cremalleras. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.4, en la página 22 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de engranes, se emplea una opción de suma importancia denominada “Simplified”. Esta opción permite calcular las fuerzas en el engranaje, la holgura o backlash entre el par de engranes. El cual, permite analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante. Es importante aclarar que Adams/Machinery[©] sólo puede crear un par de engrane y cremallera a la vez.



(a) Vista del sistema con sólidos sombreados

(b) Vista del sistema mediante un marco de alambre

Figura 6.112: Modelo del problema en Adams[©].

Ahora bien, la figura 6.113 muestra el tipo de sistema de engranajes. Como se puede apreciar, se seleccionó del tipo engrane-cremallera o “rack”.

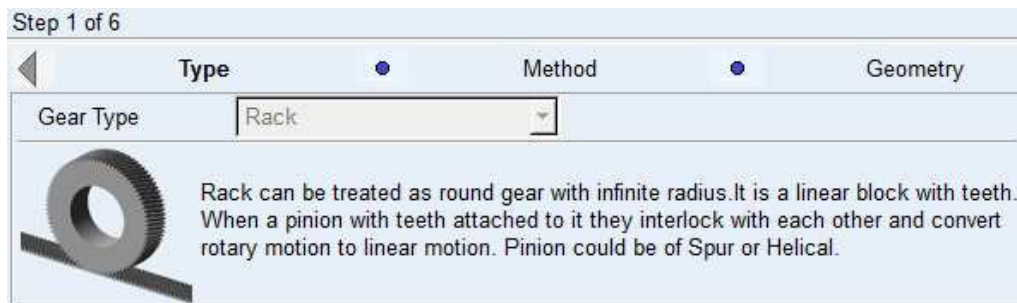


Figura 6.113: Tipos de engranes empleados por Adams[©], engrane y cremallera.

La figura 6.114 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema, el cual debe ser el mismo para todos los pares de engranes dentro del modelo. Es importante mencionar que el método de análisis es el denominado “Simplified”.

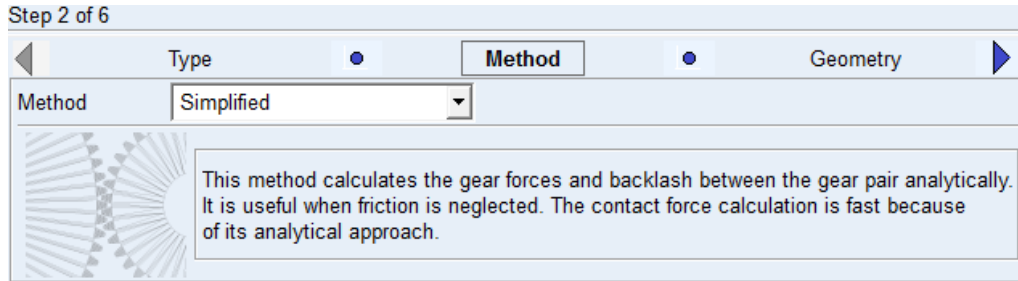


Figura 6.114: Método de análisis empleado para los pares de engranes A, B y A, C .

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 6.115.

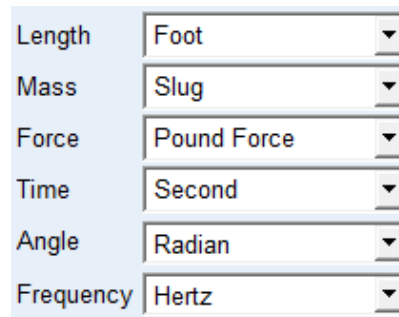


Figura 6.115: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Los parámetros geométricos del engrane y cremallera A, B y A, C se muestran en las figuras 6.116 y 6.117. El usuario debe tener cuidado en seleccionar el mismo radio primitivo o de paso al indicado en el enunciado del problema.

Los parámetros de mayor importancia para un usuario no experimentado al momento de diseñar algún sistema de engrane y cremallera, es el módulo del engrane y las cremalleras, este dependerá del número de dientes y el diámetro de los engranes. El módulo del engrane debe ser el mismo para el engrane y las cremalleras, el ángulo de presión de 20° que aparece por defecto se deja intacto; a no ser, que el usuario empleara otras unidades angulares como son los radianes, en este caso el usuario debe modificar el valor a sus correspondientes unidades. Las coordenadas de los centros del engrane y de la cremallera y el número de dientes de ambos cuerpos, son de suma importancia; no así, el ancho del engrane y la anchura de la cremallera. De manera que, los demás parámetros se dejan intactos.

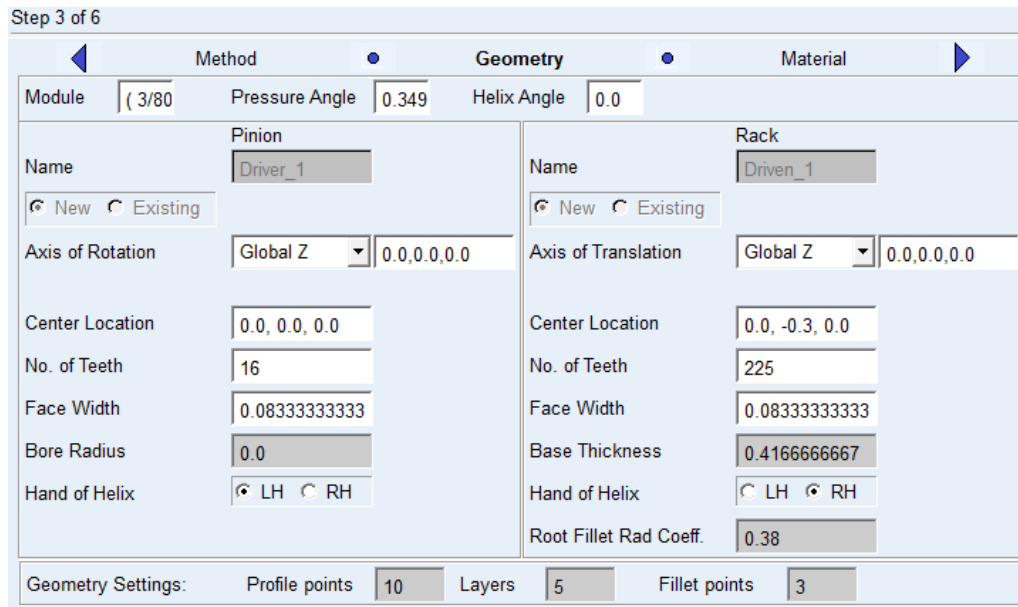


Figura 6.116: Propiedades geométricas del engrane *A* y la cremallera *B*.

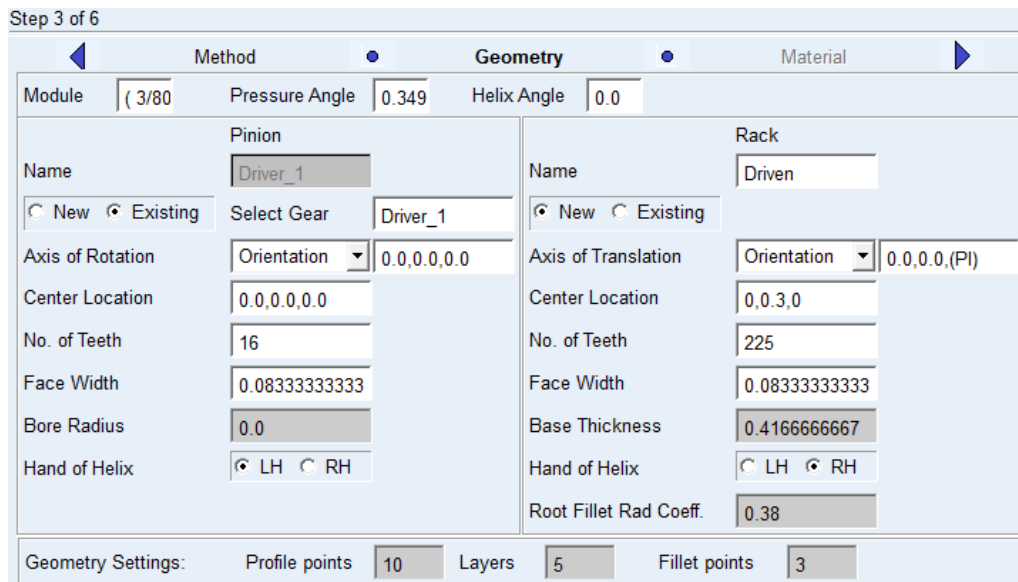


Figura 6.117: Propiedades geométricas del engrane *A* y cremallera *C*.

El usuario debe saber que para la creación de la cremallera *C*, se seleccionó el engrane *A* como el engrane motriz o “Gear 1”, para este segundo par de engrane y cremallera, vea la figura 6.117. Otro punto importante a aclarar, es que la cremallera *C* rota sobre el eje absoluto z un total de 180° , lo que es igual a π radianes, esto se logra modificando la orientación del los ejes coordenados de la cremallera *C*, para mayor detalle revisar el apéndice D.

Los parámetros inerciales del sistema engrane A y las cremalleras B y C , se presentan en la figura 6.118. Debe notarse que al ser un problema de cinemática del cuerpo rígido, los datos como la masa del engrane y las cremalleras, no son de interés. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y no son de importancia en este análisis; sin embargo es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z , para el engrane A .

Las propiedades inerciales de la cremallera C son las mismas que el de la cremallera B , por lo que sólo es necesario mostrar las propiedades de una cremallera, en este caso la cremallera B , vea la figura 6.118(b). De manera que, las propiedades inerciales del engrane A que se muestran en la figura 6.118, perteneciente al par de engrane-cremallera A y B , resulta ser el mismo para el engrane perteneciente al par engrane-cremallera A y C . El usuario no debe preocuparse en ingresar nuevamente los valores inerciales al momento de crear el par engrane-cremallera A y C , esto debido a que Adams[©] ingresa de forma automática dichos valores, esto al momento en el que el usuario selecciona la opción “Existing”. Esta función permite seleccionar un cuerpo ya existente dentro del modelo, para este caso el engrane A , vea la figura 6.117.

Step 4 of 6

Geometry **Material** Connection

Pinion | Rack

Define Mass By: User Input

Mass: 1.0E-006

lxx: 2.25E-008 Off-Diagonal Terms

lyy: 2.25E-008

lzz: 4.5E-008

(a) Propiedades inerciales del engrane A dentro del par de engrane-cremallera A - B

Step 4 of 6

Geometry **Material** Connection

Pinion | Rack

Define Mass By: User Input

Mass: 1.0E-006

lxx: 3.9653797227E-011 Off-Diagonal Terms

lyy: 3.9653797227E-011

lzz: 3.9653797227E-011

(b) Propiedades inerciales de la cremallera B

Figura 6.118: Propiedades inerciales del engrane A y la cremallera B .

La figura 6.119 muestra los parámetros de contacto para el par de engranes A, B y A, C . Los valores de contacto que aparecen por defecto se dejan intactos.

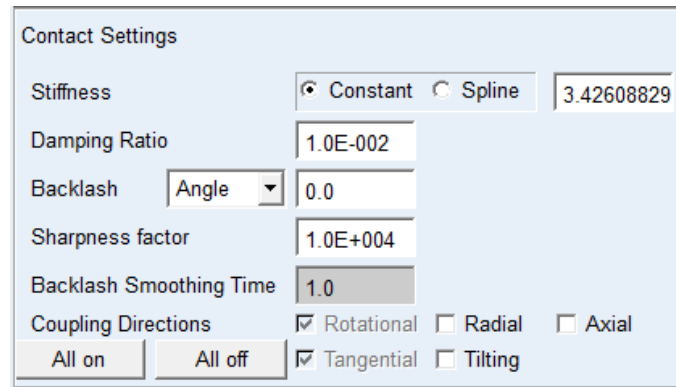
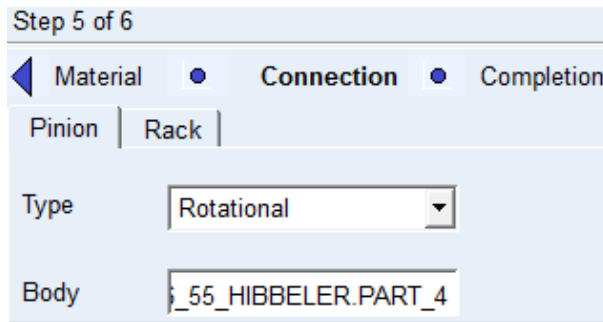
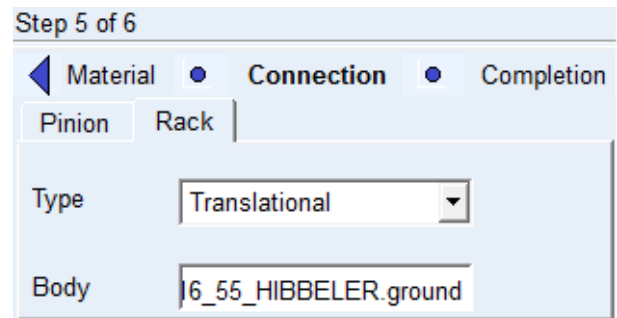


Figura 6.119: Parámetros de contacto para los pares de engranes A, B y A, C .

Las figuras 6.120(a) y 6.120(b) muestran los parámetros de conexión del engrane A y las cremalleras B y C para ambos pares de engranes-cremalleras A, B y A, C .



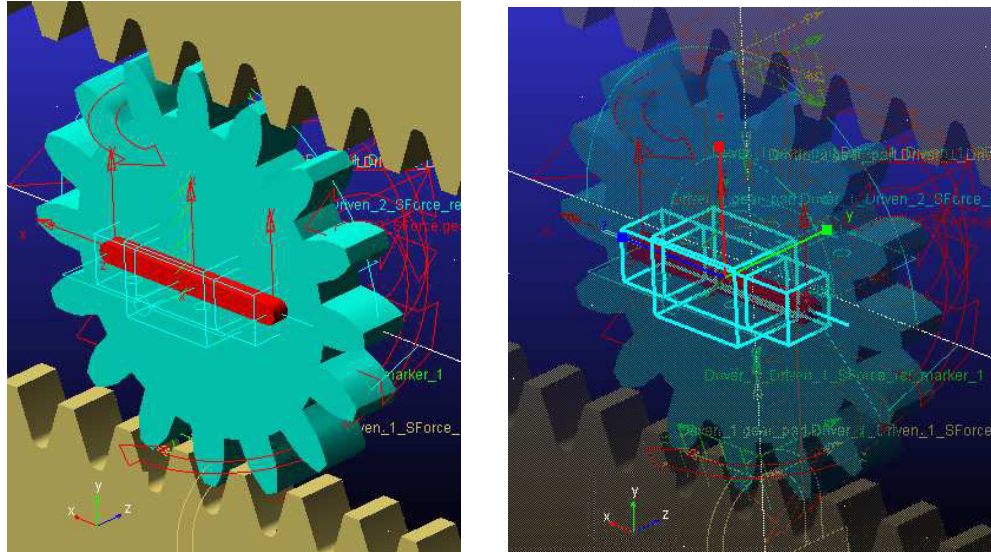
(a) Parámetros de conexión del engrane A



(b) Parámetros de conexión de la cremallera B

Figura 6.120: Parámetros de conexión del engrane A y la cremallera B .

Como se observa en la figura 6.120(a), el tipo de conexión del engrane A es de revoluta y está con respecto a un cuerpo o parte llamado “Part_4”. Es importante aclarar que el nombre de este cuerpo cambia, ya que Adams[©] nombra los cuerpos dependiendo de su orden de aparición en el modelo. La función del cuerpo “Part_4”, es otorgarle al engrane A no sólo movimiento de rotación baricéntrica sobre un eje perpendicular al plano xy del modelo, sino también otorgarle movimiento de traslación horizontal; por lo que, dicho cuerpo posee un par prismático a lo largo del eje y del modelo, vea la figura 6.121.



(a) Cuerpo auxiliar "Part_4"

(b) Par prismático sobre el cuerpo auxiliar

Figura 6.121: Par prismático del cuerpo auxiliar.

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 1.0 segundos, con un número de pasos de 1000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 6.122. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se desee y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

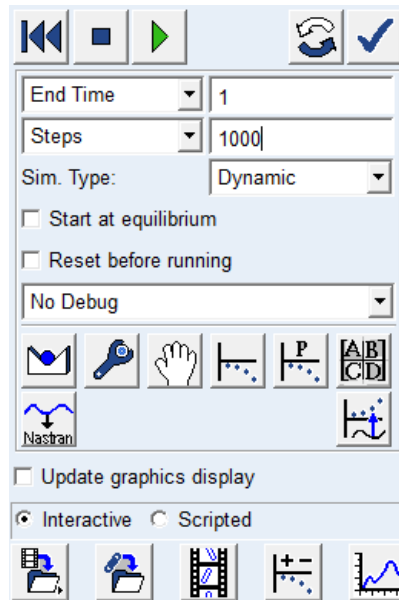


Figura 6.122: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

La figura 6.123 muestra la función que rige el comportamiento de la velocidad de la cremallera

B y C . Como se puede observar en la figura 6.123, tanto el valor de la velocidad de la cremallera B como el de la cremallera C , poseen valores positivos. A simple vista, parecen que ambas cremalleras se dirigen a la derecha, pero el problema requiere que la cremallera C se dirija a la izquierda o en dirección del eje global y negativo, esto se resolvería simplemente agregando un signo negativo al valor de la velocidad de la cremallera C , pero para este problema resultaría perjudicial. Se sabe que Adams[®] asigna de forma automática un desplazamiento en sentido positivo, pero al momento en el que la cremallera C rotó 180 grados sobre el eje global z positivo, los ejes relativos de la cremallera cambiaron de orientación y por consecuencia su sentido, por esta razón ambos valores de velocidad son positivos, vea la figura 6.124.

Name	MOTION_1	Name	MOTION_2
Joint	Driven_1.gear_revolut	Joint	Driven_2.gear_revolut
Joint Type	translational	Joint Type	translational
Direction	Translational	Direction	Translational
Define Using	Function	Define Using	Function
Function (time)	8	Function (time)	4
Type	Velocity	Type	Velocity
Displacement IC	0.0	Displacement IC	0.0
Velocity IC		Velocity IC	

(a) Velocidad de la cremallera B (b) Velocidad de la cremallera C

Figura 6.123: Funciones que rigen la velocidad lineal de las cremalleras B y C .

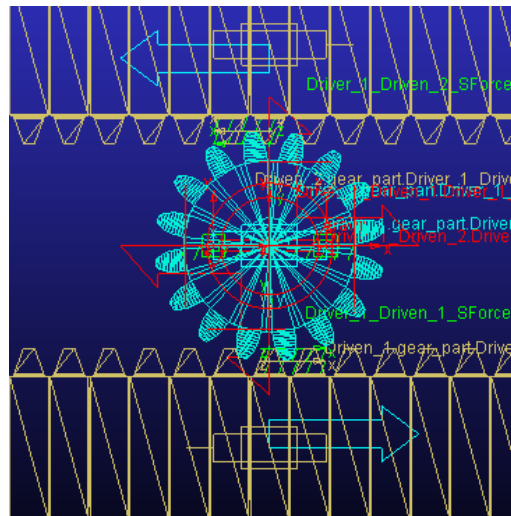


Figura 6.124: Sentido del desplazamiento de las cremalleras B y C .

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 6.125, 6.126, 6.127, 6.128, 6.129, 6.130 y 6.131.

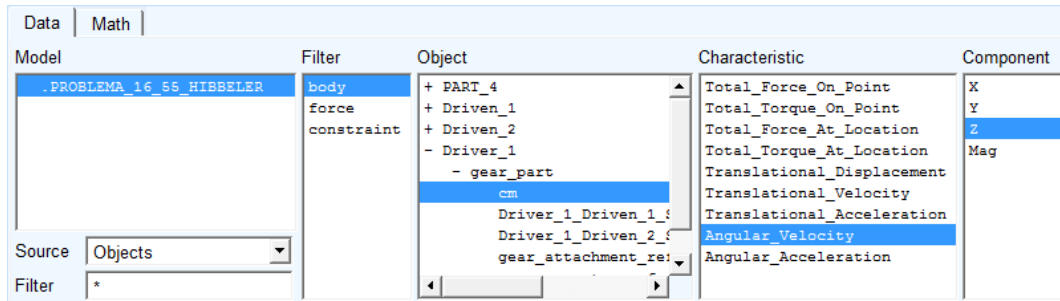


Figura 6.125: Solicitud de la velocidad angular del engrane A.

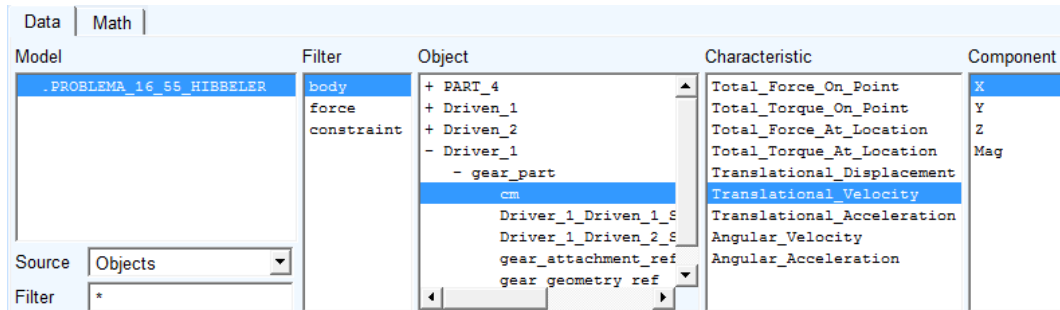


Figura 6.126: Solicitud de la velocidad de traslación del centro del engrane A.

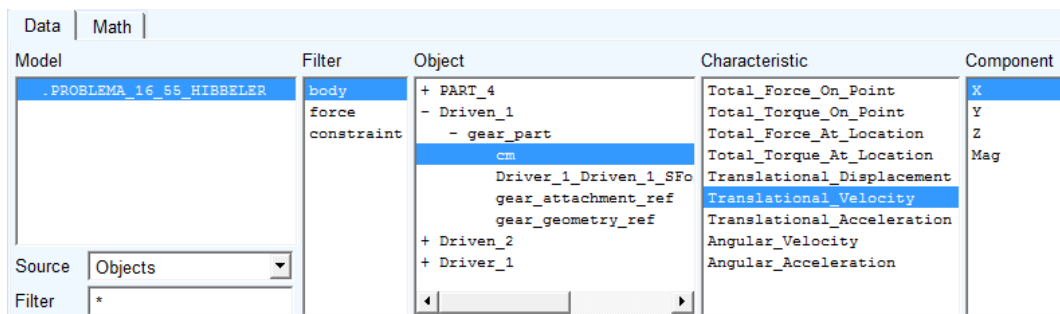


Figura 6.127: Solicitud de la velocidad de traslación de la cremallera B.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_16_55_HIBBELER	body	+ PART_4	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- Driven_2	Total_Force_At_Location	Z
		- gear_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		Driver_1_Driven_2_SFo	Translational_Velocity	
		gear_attachment_ref	Translational_Acceleration	
		gear_geometry_ref	Angular_Velocity	
		+ Driver_1	Angular_Acceleration	

Figura 6.128: Solicitud de la velocidad de traslación de la cremallera *C*.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_16_55_HIBBELER	body	+ PART_4	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ Driven_2	Total_Force_At_Location	Z
		- Driven_1	Total_Torque_At_Location	Mag
		- gear_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		Driver_1_Driven_1_f	Translational_Acceleration	
		Driver_1_Driven_2_f	Angular_Velocity	
		gear_attachment_ref	Angular_Acceleration	

Figura 6.129: Solicitud de la aceleración de traslación para el engrane *A*.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_16_55_HIBBELER	body	+ PART_4	Total_Force_On_Point	X
	force	- Driven_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- gear_part	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		Driver_1_Driven_1_f	Translational_Displacement	
		gear_attachment_ref	Translational_Velocity	
		gear_geometry_ref	Translational_Acceleration	
		+ Driven_2	Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Figura 6.130: Solicitud de la aceleración de traslación para la cremallera *B*.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_16_55_HIBBELER	body	+ PART_4	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- Driven_2	Total_Force_At_Location	Z
		- gear_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		Driver_1_Driven_2_f	Translational_Velocity	
		gear_attachment_ref	Translational_Acceleration	
		gear_geometry_ref	Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Figura 6.131: Solicitud de la aceleración de traslación para la cremallera *C*.

Los resultados obtenidos por Adams[©] se muestran en las figuras 6.132, 6.133 y 6.134.

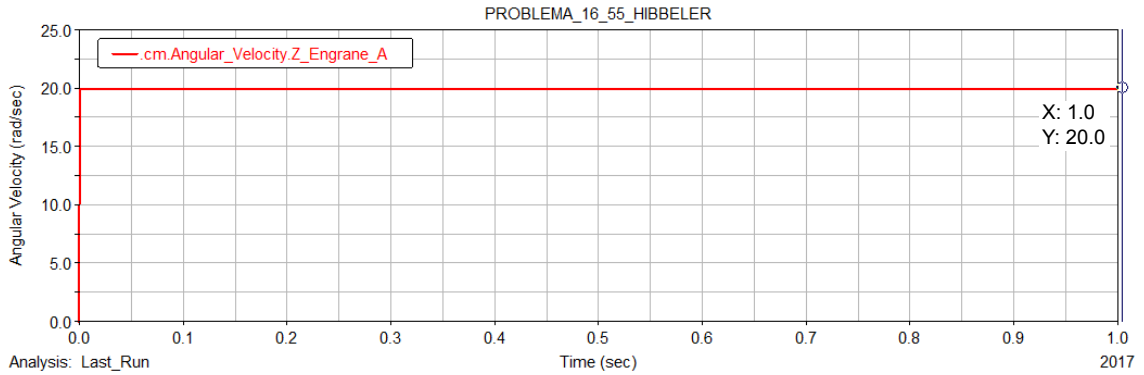


Figura 6.132: Resultado de la velocidad angular del engrane *A*.

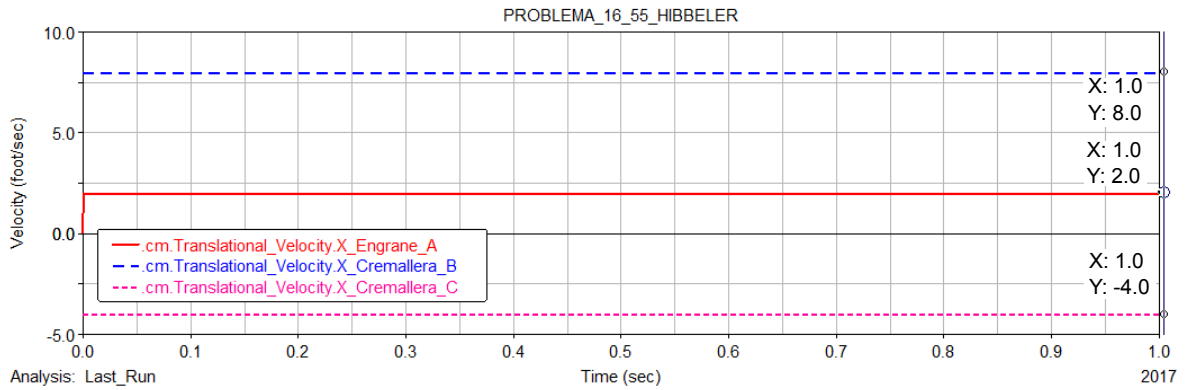


Figura 6.133: Resultado de la velocidad de traslación del engrane *A* y las cremalleras *B* y *C*.

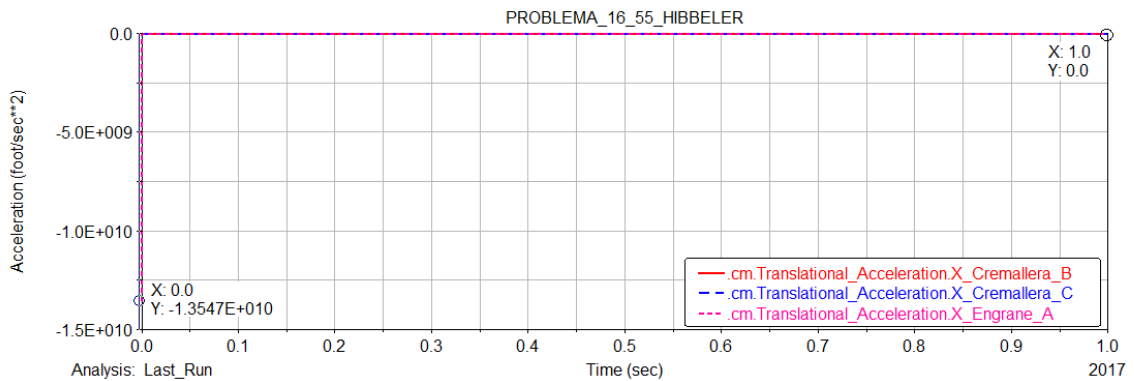


Figura 6.134: Resultado de la aceleración de traslación del engrane *A* y las cremalleras *B* y *C*.

Como se puede observar en la figura 6.134, el valor de la aceleración traslacional de la cremallera B y C son iguales a cero, mientras que la aceleración traslacional del engrane A contiene un periodo transitorio, con un tiempo de duración de 0.032 segundos y con una amplitud mínima de $-1.3547E+010$, por lo que el usuario puede ignorar los valores presentados en el periodo transitorio, pero a sabiendas que en un modelo real estas perturbaciones siempre van a existir y tienen que ser tomadas en cuenta.

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Los resultados obtenidos por medio de la simulación, tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 6.6 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 6.6: Comparación de resultados. 6.º problema de engranes y cremalleras

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
ω	$20 \text{ rad/s } \curvearrowright$	$20.0 \text{ rad/s } \curvearrowright$
v_{O_A}	$2 \text{ ft/s } \rightarrow$	$2.0 \text{ ft/s } \rightarrow$
v_C	$4 \text{ ft/s } \leftarrow$	$4.0 \text{ ft/s } \leftarrow$
v_B	$8 \text{ ft/s } \rightarrow$	$8.0 \text{ ft/s } \rightarrow$
a_C	0 ft/s	0.0 ft/s
a_B	0 ft/s	0.0 ft/s
a_A	0 ft/s	0.0 ft/s

6.7. Séptimo problema de sistemas de engranes y cremalleras.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 19-4 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 509.

Problema 7: Los engranes A y B de 10 kg y 50 kg de masa tienen radios de giro con respecto a sus respectivos centros de masa de $k_A = 80 \text{ mm}$ y $k_B = 150 \text{ mm}$. Si el engrane A se somete a un momento de par $M = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$, determine la velocidad angular del engrane B cinco segundos después de que comienza a girar del reposo. Las dimensiones de los engranes están dadas por $r_A = 0.1 \text{ m}$ y $r_B = 0.2 \text{ m}$

6.7.1. Solución analítica.

Puesto que no existe deslizamiento entre el engrane A y el engrane B , la velocidad y las componentes tangenciales de la aceleración en el punto P_1 entre los engranes A y B son iguales. A partir de este resultado se obtienen dos relaciones, la primera entre las velocidades angulares de los engranes A y B en función de sus radios y la segunda entre las aceleraciones angulares de los engranes A y B en función de sus radios, vea la figura 6.135 y las ecuaciones (6.30) y (6.31).

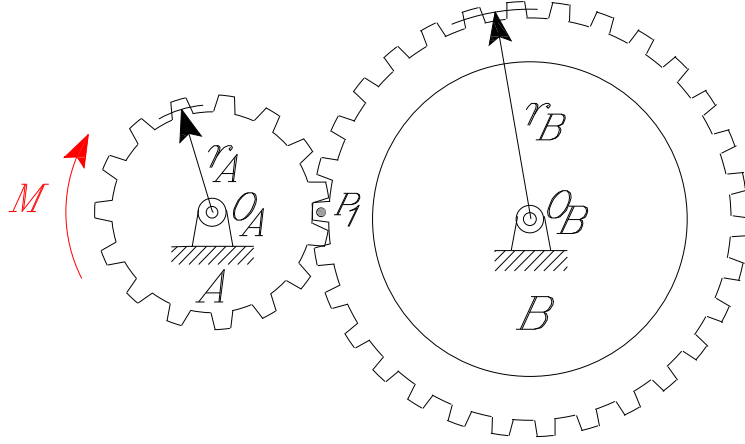


Figura 6.135: Modelo del problema fundamental 19-4 Hibbeler[18].

Análisis de velocidad.

$$\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\omega_A \hat{k} \times r_A \hat{i} = -\omega_A r_A \hat{j} = v_{A_{P_1}} = v_{B_{P_1}} = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_1/O_B} = \omega_B \hat{k} \times -r_B \hat{i} = \omega_B r_B \hat{j}$$

Por consiguiente:

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \text{donde} \quad \omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A \quad (6.30)$$

Análisis de aceleración.

$$\vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\alpha_A \hat{k} \times r_A \hat{i} = -\alpha_A r_A \hat{j} = a_{tA_{P_1}} = a_{tB_{P_1}} = \vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_1/O_B} = \alpha_B \hat{k} \times -r_B \hat{i} = \alpha_B r_B \hat{j}$$

De manera que:

$$r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{donde} \quad \alpha_A = \frac{r_B}{r_A} \alpha_B \quad (6.31)$$

Con estos resultados termina la parte cinemática del problema.

Para la cinética del sistema es necesario analizar los diagramas de cuerpo libre, tanto del engrane A como del B. Aplicando el principio de impulso e ímpetu se obtiene una expresión de la velocidad angular ω_A , vea la figura 6.136 y la ecuación(6.32)

Ecuación de impulso angular para un cuerpo rígido E con movimiento alrededor de un eje fijo, respecto a un punto arbitrario O.

$$I_E (\vec{\omega}_E)_1 + \sum_{F_{ext}}^E \left(\int_0^t M_E dt \right) = I_E (\vec{\omega}_E)_2 + \sum_{F_{ext}}^E \left(\int_0^t \vec{r}_{P/O} \times \vec{F}_{ext} dt \right) = I_E (\vec{\omega}_E)_2 \quad (6.32)$$

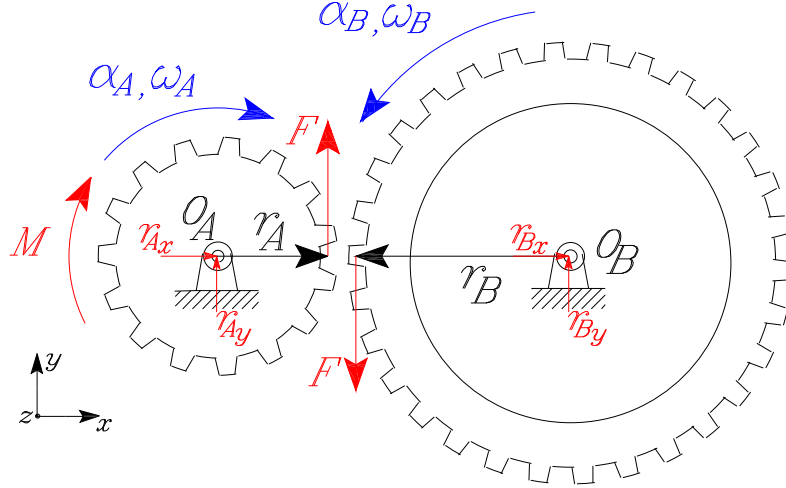


Figura 6.136: Diagramas de cuerpo libre del problema.

Analizando el diagrama de cuerpo libre del engrane A .

Como el engrane A parte del reposo, la velocidad angular inicial del engrane A es igual a cero, de manera que $I_{O_A}(\omega_A)_1 = 0$. Por lo que:

$$-\int_0^t M dt + \int_0^t F(r_A) dt = -I_{O_A}(\omega_A)_2$$

Despejando la fuerza F , se obtiene:

$$\int_0^t F dt = \left[-I_{O_A}(\omega_A) + \int_0^t M dt \right] \left(\frac{1}{r_A} \right) \quad (6.33)$$

Analizando el diagrama de cuerpo libre del engrane B .

Como el disco B parte del reposo, la velocidad angular inicial del disco B es igual a cero, de manera que $I_{O_B}(\omega_B)_1 = 0$. De modo que:

$$\int_0^t F(r_B) dt = I_{O_B}(\omega_B)_2$$

Despejando la fuerza F , resulta:

$$\int_0^t F dt = \left(\frac{1}{r_B} \right) I_{O_B} \omega_B \quad (6.34)$$

Igualando la ecuación (6.33) con la ecuación (6.34) y sustituyendo la ecuación (6.30), se obtiene:

$$\left(-I_{O_A} \omega_A + \int_0^t M dt \right) \left(\frac{1}{r_A} \right) = \left(\frac{1}{r_B} \right) I_{O_B} \left(\frac{r_A}{r_B} \omega_A \right)$$

Despejando ω_A de la ecuación anterior, da como resultado

$$\omega_A = \frac{(M) t}{\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 I_{O_B} + I_{O_A}} \text{ rad/s} \quad (6.35)$$

Se sabe que los momentos de inercia de ambos engranes están definidos como:

$$I_{O_A} = m_A k_A^2 = (10 \text{ kg}) (0.08 \text{ m})^2 = 0.064 \text{ kg-m}^2$$

$$I_{O_B} = m_B k_B^2 = (50 \text{ kg}) (0.15 \text{ m})^2 = 1.125 \text{ kg-m}^2$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (6.35), resulta

$$\omega_A = \frac{10(5)}{\left(\frac{0.1}{0.2}\right)^2 (1.125) + 0.064} \frac{N - m - s}{\text{kg} - \text{m}^2} = 144.8225923 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

De acuerdo con la ecuación (6.30) y sustituyendo los valores numéricos, el valor de la velocidad angular del engrane B , se obtiene:

$$\omega_B = \left(\frac{0.1}{0.2}\right) (144.8225923 \text{ rad/s}) = 72.41129615 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

Ahora aplicando la ecuación de Euler a cada uno de los engranes se obtiene una expresión para la aceleración angular α_A .

De manera que, de la suma de momentos con respecto al punto O_A del engrane A , da como resultado:

$$\Sigma M_{O_A} = -I_{O_A} \alpha_A \quad F r_A - M = -I_{O_A} \alpha_A \quad (6.36)$$

Ahora bien, de la suma de momentos con respecto al punto O_B del engrane B , se deduce:

$$\Sigma M_{O_B} = I_{O_B} \alpha_B \quad F r_B = I_{O_B} \alpha_B$$

Por lo que:

$$F = \left(\frac{1}{r_B}\right) I_{O_B} \alpha_B \quad (6.37)$$

Sustituyendo la ecuación (6.37) y (6.31) en la ecuación (6.36), resulta:

$$I_{O_B} \alpha_B \left(\frac{r_A}{r_B}\right) - M = -I_{O_A} \left(\frac{r_B}{r_A}\right) \alpha_B$$

Despejando la aceleración angular α_B , se llega a:

$$\alpha_B = \frac{M}{I_{O_B} \left(\frac{r_A}{r_B}\right) + I_{O_A} \left(\frac{r_B}{r_A}\right)} \quad (6.38)$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación anterior, se obtiene:

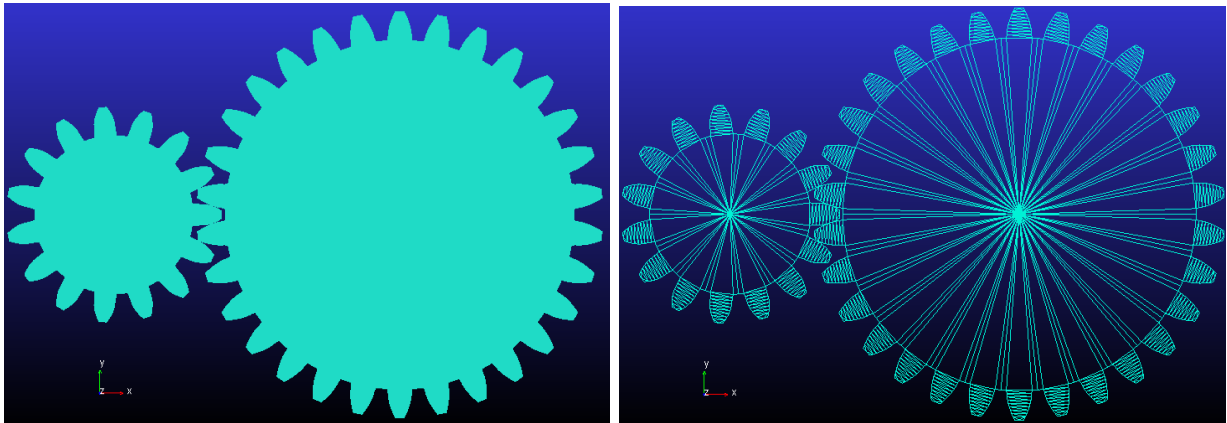
$$\alpha_B = \frac{10}{\left(\frac{0.1}{0.2}\right) (1.125) + 0.064 \left(\frac{0.2}{0.1}\right)} \frac{N - m}{\text{kg} - \text{m}^2} = 14.48225923 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (6.31), el valor de la aceleración angular del engrane A es igual a:

$$\alpha_A = \left(\frac{0.2}{0.1}\right) (14.48225923 \text{ rad/s}^2) = 28.96451846 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

6.7.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá simulando el sistema empleando las herramientas de engranes dentro del módulo **Machinery** del programa Adams[©], es importante señalar que en esta sección no se discute la selección de los parámetros geométricos de los engranes y cremalleras. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.4, en la página 22 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de engranes se emplea una opción de suma importancia denominada **“Simplified”**.



(a) Vista del sistema con sólidos sombreados (b) Vista del sistema mediante un marco de alambre

Figura 6.137: Modelo del problema en Adams[©].

El tipo de engrane es el mismo para todos los engranes del modelo, vea la figura 6.138. Como puede observarse se seleccionó un engrane tipo recto o “spur”.

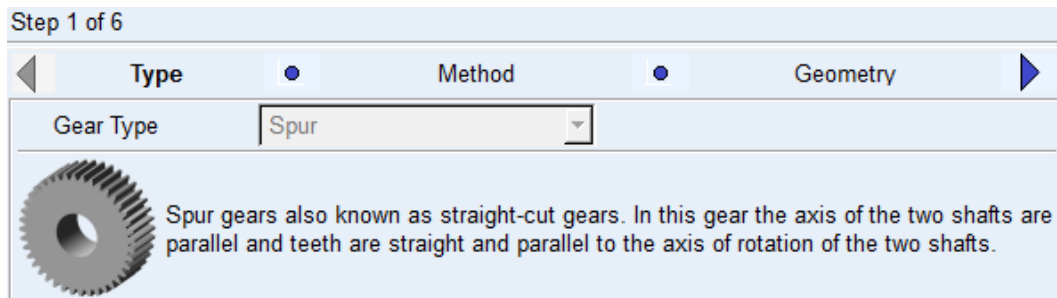


Figura 6.138: Tipos de engranes empleados por Adams[©] para los engranes *A* y *B*.

La figura 6.139 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema que debe ser el mismo para todo par de engrane dentro del modelo. Es importante mencionar que el método de análisis es el denominado **“Simplified”**.

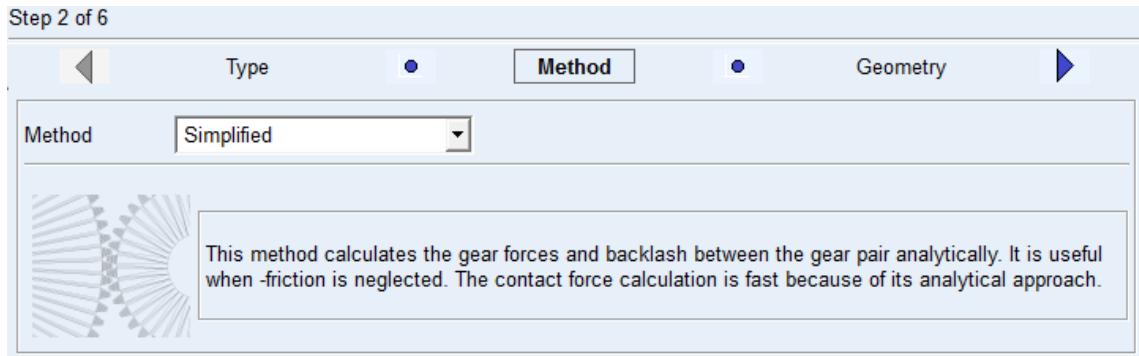


Figura 6.139: Método de análisis empleado por Adams[©] para los engranes *A* y *B*.

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 6.140.

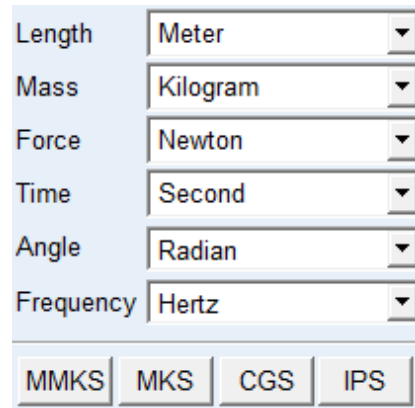


Figura 6.140: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Los parámetros geométricos para el par de engrane *A* y *B* se presentan en la figura 6.141. El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios primitivos o de paso iguales a los indicados en el enunciado del problema, además de seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de los engranes. En este caso, debe notarse que la distancia entre centros de los engranes *A* y *B* debe ser igual a la suma de los radios de paso de ambos engranes.

Los parámetros de mayor importancia para un usuario no experimentado al momento de diseñar algún sistema con engranes, es el módulo del par de engranes. Este dependerá del número de dientes y el diámetro de paso de los engranes; para ello el usuario debe recordar que el paso circular y el módulo deben ser iguales para ambos engranes. El ángulo de presión de 20° que aparece por defecto se deja intacto, a no ser, que el usuario empleara otras unidades angulares, como son los radianes; en este caso el usuario debe modificar el valor a sus correspondientes unidades. Las coordenadas de los centros de los engranes y el número de dientes de ambos engranes son de suma importancia, no así el espesor de los dientes. De manera que, los demás parámetros se dejan intactos.

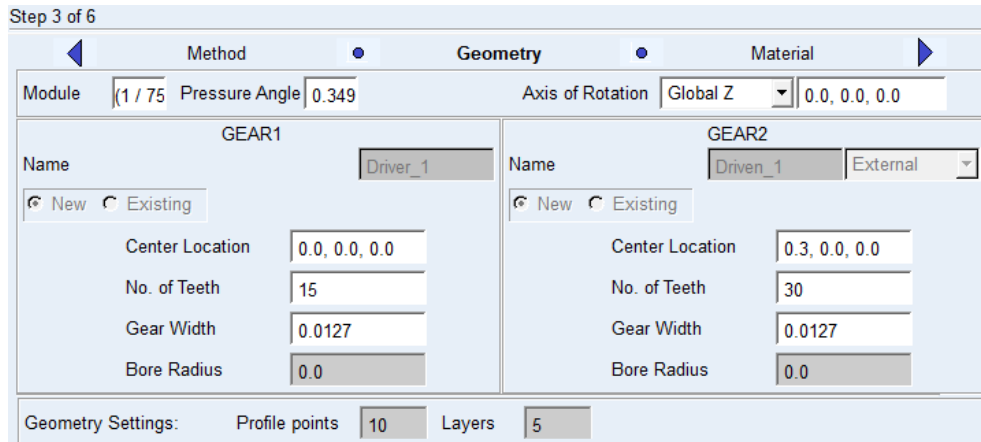
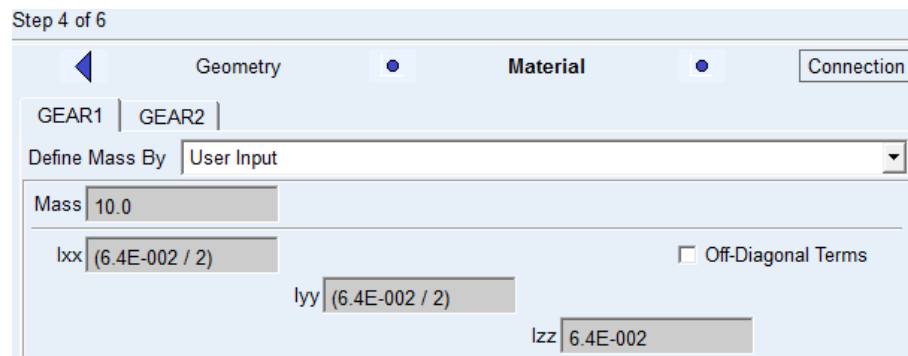
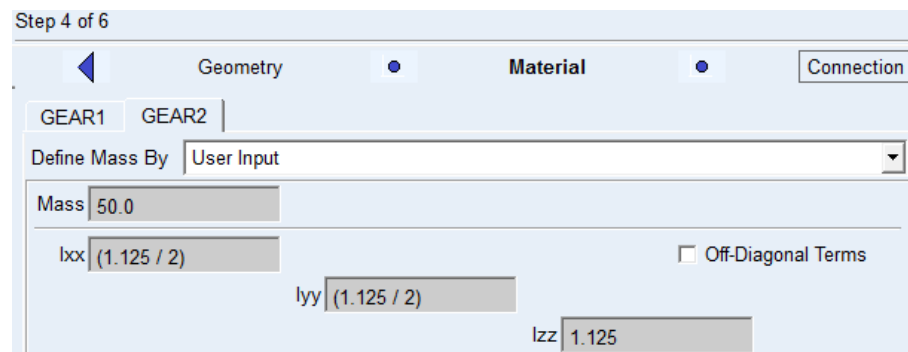


Figura 6.141: Propiedades geométricas del par de engranes *A* y *C*.

Los parámetros inerciales de los pares de engraneajes, *A* y *B* se presentan en la figura 6.142. Los momentos de inercia con respecto a los ejes *x* y *y* no son de importancia en este análisis; sin embargo es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje *z*.



(a) Propiedades inerciales del engrane *A*



(b) Propiedades inerciales del engrane *B*

Figura 6.142: Propiedades inerciales de los engranes *A* y *B*.

La figura 6.143 muestra los parámetros de contacto para el par de engranes *A* y *B*. Los valores de contacto que aparecen por defecto se dejan intactos.

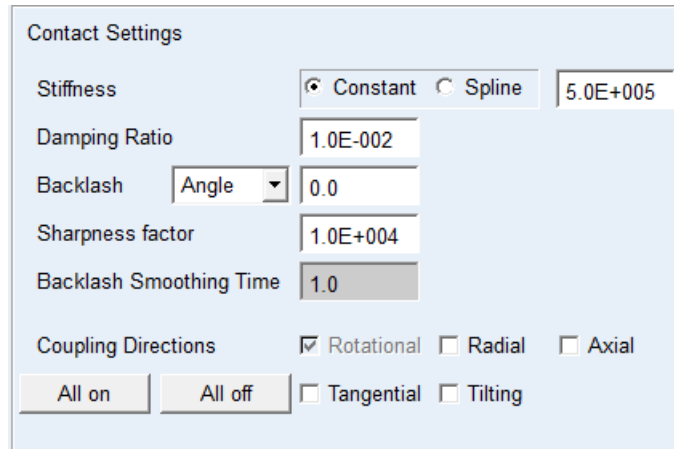
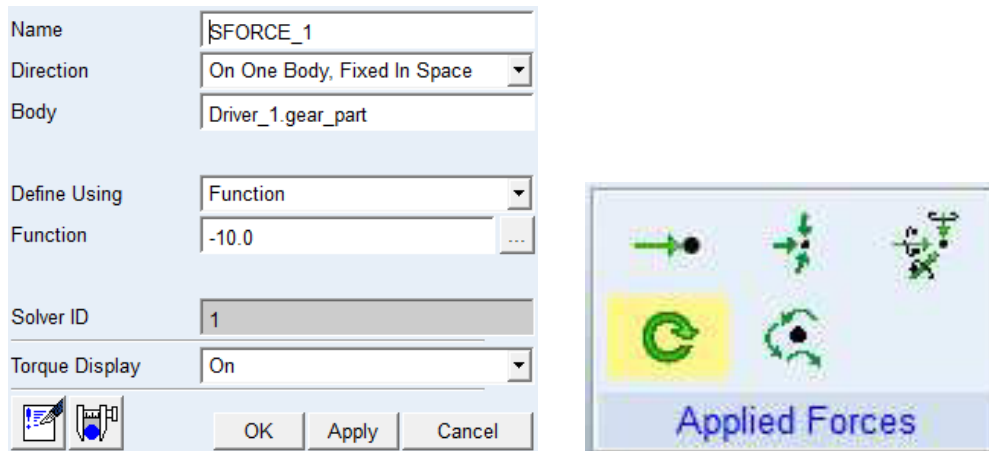


Figura 6.143: Parámetros de contacto para el par de engranes *A* y *B*.

La figura 6.144 muestra la función del torque sobre el engrane *A*.



(a) Parámetros del torque

(b) Creación de un torque

Figura 6.144: Creación y parámetros de un torque sobre el engrane *A*.

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 5 segundos, con un número de pasos de 2000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 6.145. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se deseé y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

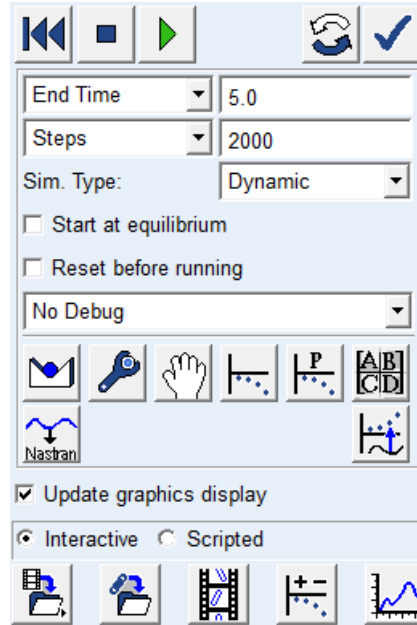


Figura 6.145: Tiempo, número de pasos y tipo de análisis de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 6.146 y 6.147.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_19_4_HIBBELER	body	+ Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- Driver_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- gear_part	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		Driver_1_Driven_1_SFo	Translational_Displacement	
		gear_attachment_ref	Translational_Velocity	
		gear_geometry_ref	Translational_Acceleration	
		MARKER_1	Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

(a) Solicitud de la aceleración angular del engrane A

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_19_4_HIBBELER	body	- Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- gear_part	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	cm	Total_Force_At_Location	Z
		Driver_1_Driven_1_SFo	Total_Torque_At_Location	Mag
		gear_attachment_ref	Translational_Displacement	
		gear_geometry_ref	Translational_Velocity	
		+ Driver_1	Translational_Acceleration	
			Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

(b) Solicitud de la aceleración angular del engrane B

Figura 6.146: Solicitud de la aceleración angular de los engranes A y B.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_19_4_HIBBELER	body	+ Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- Driver_1	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- gear_part	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		Driver_1_Driven_1_SFo	Translational_Displacement	
		gear_attachment_ref	Translational_Velocity	
		gear_geometry_ref	Translational_Acceleration	
		MARKER_1	Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

(a) Solicitud de la velocidad angular del engrane A

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.PROBLEMA_19_4_HIBBELER	body	- Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- gear_part	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	cm	Total_Force_At_Location	Z
		Driver_1_Driven_1_SFo	Total_Torque_At_Location	Mag
		gear_attachment_ref	Translational_Displacement	
		gear_geometry_ref	Translational_Velocity	
		+ Driver_1	Translational_Acceleration	
			Angular_Velocity	
			Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

(b) Solicitud de la velocidad angular del engrane B

Figura 6.147: Solicitud de la velocidad angular de los engranes A y B.

Los resultados obtenidos por Adams[®] se muestran en las figuras 6.148 y 6.149.

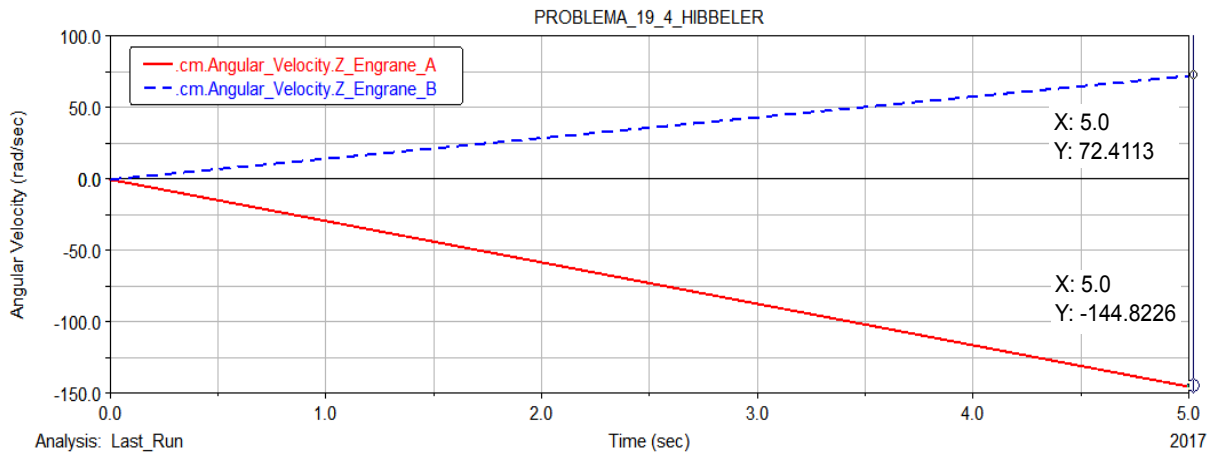


Figura 6.148: Resultados de las aceleraciones angulares de los engranes A y B.

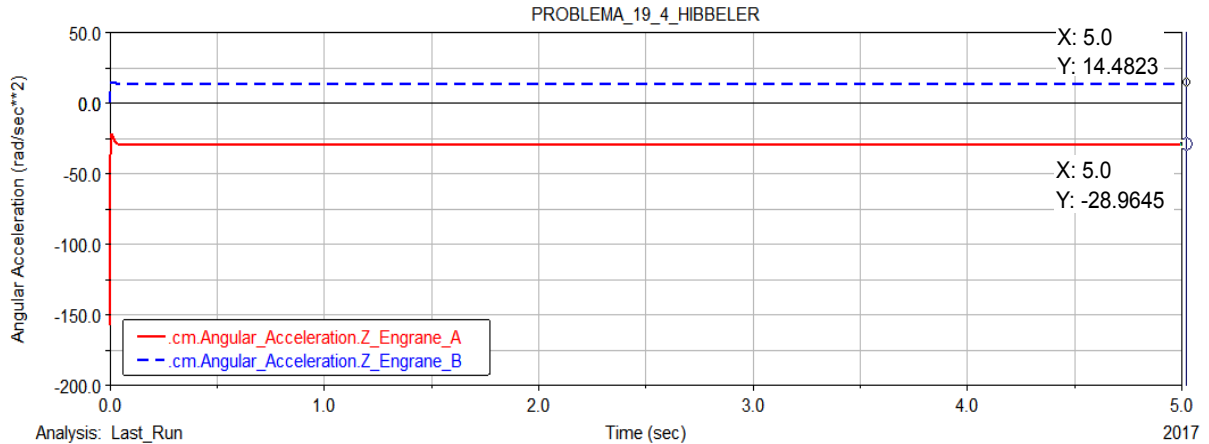


Figura 6.149: Resultados de las velocidades angulares de los engranes A y B .

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Los resultados obtenidos mediante la simulación, tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 6.7 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 6.7: Comparación de resultados. 7.º problema de engranes y cremalleras

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
α_A	$28.96451846 \text{ rad/s}^2 \odot$	$28.9645 \text{ rad/s}^2 \odot$
α_B	$14.48225923 \text{ rad/s}^2 \odot$	$14.4823 \text{ rad/s}^2 \odot$
ω_A	$144.8225923 \text{ rad/s} \odot$	$144.8226 \text{ rad/s} \odot$
ω_B	$72.41129615 \text{ rad/s} \odot$	$72.4113 \text{ rad/s} \odot$

6.8. Octavo problema de sistemas de engranes y cremalleras.

En esta sección se presenta la solución y simulación detallada del problema 19-11 del libro de Hibbeler [18], incluido en la página 512.

Problema 8: Un motor transmite un par de torsión $M = 0.05 \text{ N}\cdot\text{m}$ al engrane A . Determine la velocidad angular de cada uno de los tres engranes pequeños (iguales) 2 s después de que comienza a girar desde el reposo. Los engranes pequeños B están montados por medio de un pasador en sus centros. Donde los radios, las masas y los radios de giro de las poleas están dadas por: $r_A = 40 \text{ mm}$, $r_B = 20 \text{ mm}$, $m_A = 0.8 \text{ kg}$, $m_B = 0.3 \text{ kg}$, $k_A = 31 \text{ mm}$ y $k_B = 15 \text{ mm}$.

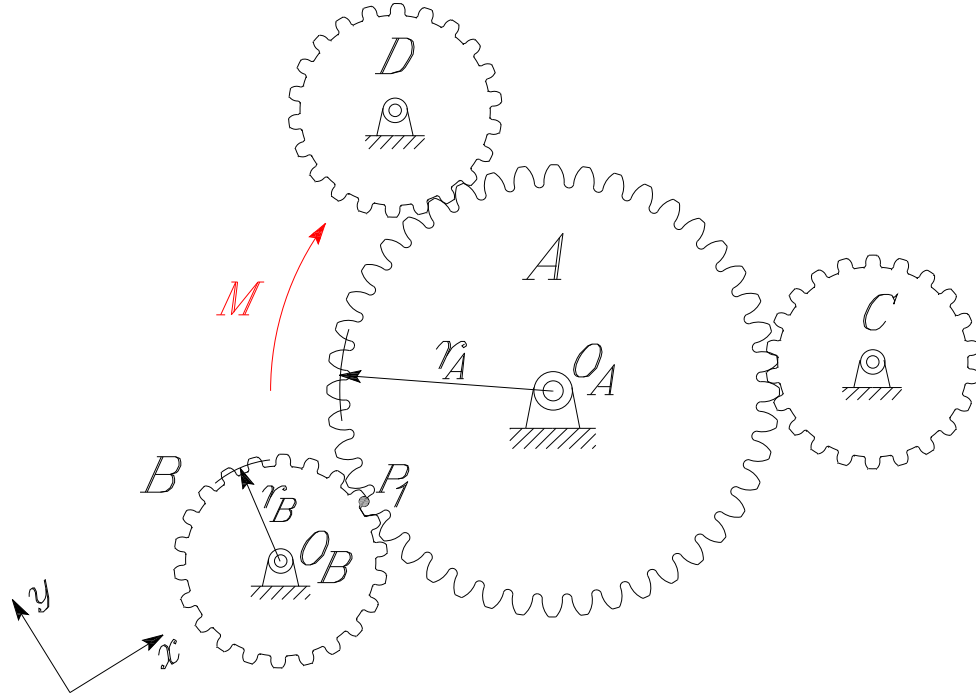


Figura 6.150: Modelo del problema 19-11 Hibbeler [18].

6.8.1. Solución analítica.

Puesto no existe deslizamiento entre el engrane A y el engrane B , la velocidad y las componentes tangenciales de la aceleración del punto P_1 entre los engranes A y B son iguales. A partir de esto se obtienen dos relaciones, la primera entre las velocidades angulares de los engranes A y B en función de sus radios y la segunda entre las aceleraciones angulares de los engranes A y B en función de sus radios, vea la figura 6.151 y las ecuaciones (6.39) y (6.40).

Análisis de velocidad.

$$\vec{\omega}_B \times \vec{r}_{P_1/O_B} = \omega_B \hat{k} \times r_B \hat{i} = \omega_B r_B \hat{j} = v_{B_{P_1}} = v_{A_{P_1}} = \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\omega_A \hat{k} \times -r_A \hat{i} = \omega_A r_A \hat{j}$$

De manera que:

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \text{donde} \quad \omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A \quad (6.39)$$

Análisis de aceleración.

$$\vec{\alpha}_B \times \vec{r}_{P_1/O_B} = \alpha_B \hat{k} \times r_B \hat{i} = \alpha_B r_B \hat{j} = a_{tB_{P_1}} = a_{tA_{P_1}} = \vec{\alpha}_A \times \vec{r}_{P_1/O_A} = -\alpha_A \hat{k} \times -r_A \hat{i} = \alpha_A r_A \hat{j}$$

De aquí que:

$$r_A \alpha_A = r_B \alpha_B \quad \text{donde} \quad \alpha_A = \frac{r_B}{r_A} \alpha_B \quad (6.40)$$

Debido a que los tres engranes poseen las mismas características geométricas e inerciales, tanto la velocidad angular ω_B como el de la aceleración angular α_B son iguales para los engranes C y D , por esto mismo sólo fué necesario hacer una análisis de velocidad y aceleración entre el engrane A y B ; no obstante para el análisis cinético si hay que considerar la contribución no sólo del engrane B si no también del engrane C y D , vea la figura 6.150.

Con estos resultados termina la parte cinemática del problema.

Para la cinética del sistema es necesario analizar los diagramas de cuerpo libre, tanto del engrane A como del B . Aplicando el principio de impulso y momentum (cantidad de movimiento angular) se obtiene una expresión de la velocidad angular ω_A , vea la figura 6.151 y la ecuación (6.41).

Ecuación de impulso angular para un cuerpo rígido E con movimiento alrededor de un eje fijo, respecto a un punto arbitrario O , vea [38].

$$I_E (\vec{\omega}_E)_1 + \sum_{F_{ext}}^E \left(\int_0^t M_E dt \right) = I_E (\vec{\omega}_E)_2 + \sum_{F_{ext}}^E \left(\int_0^t \vec{r}_{P/O} \times \vec{F}_{ext} dt \right) = I_E (\vec{\omega}_E)_2 \quad (6.41)$$

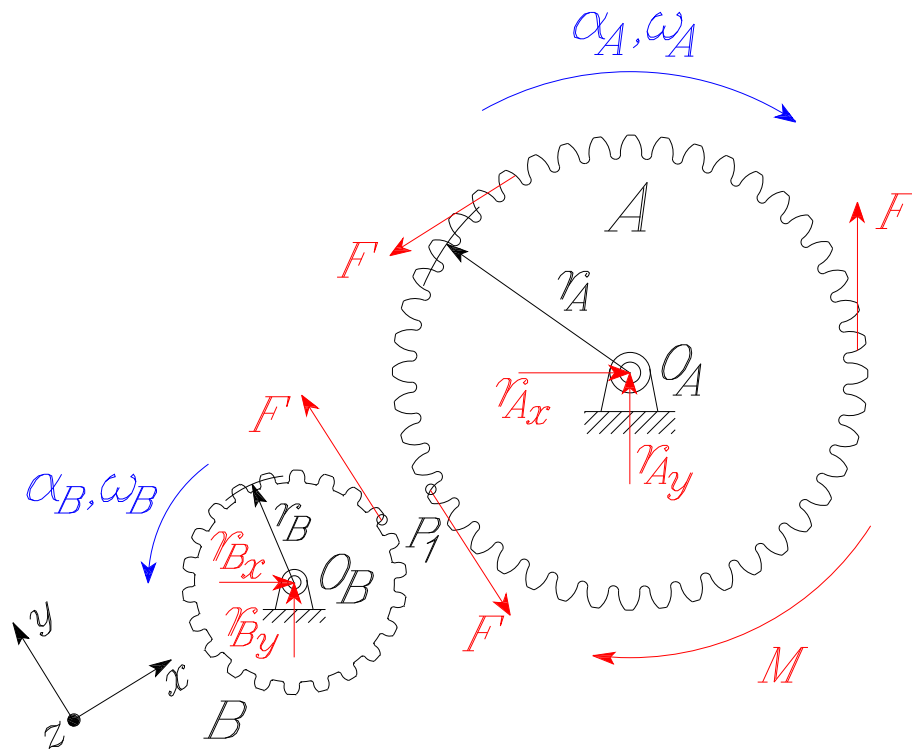


Figura 6.151: Diagrama de cuerpo libre del problema.

Analizando el diagrama de cuerpo libre del engrane A .

Como el engrane A parte del reposo, la velocidad angular inicial del engrane A es igual a cero, de manera que $I_{O_A} (\omega_A)_1 = 0$. Por lo que:

$$-\int_0^t M dt + 3 \int_0^t F (r_A) dt = -I_{O_A} (\omega_A)_2$$

Despejando la fuerza F , se obtiene:

$$3 \int_0^t F dt = \left(\frac{1}{r_A} \right) \left(\int_0^t M dt - I_{O_A} \omega_A \right) \quad (6.42)$$

Analizando el diagrama de cuerpo libre del engrane B .

Como el disco B parte del reposo, la velocidad angular inicial del disco B es igual a cero, de manera que $I_{O_B} (\omega_B)_1 = 0$. De manera que:

$$\int_0^t F (r_B) dt = I_{O_B} (\omega_B)_2$$

Despejando la fuerza F , se obtiene:

$$\int_0^t F dt = \left(\frac{1}{r_B} \right) I_{O_B} \omega_B \quad (6.43)$$

Sustituyendo la ecuación (6.43) y (6.39) en la ecuación (6.42), de modo que:

$$\left(-I_{O_A} \omega_A + \int_0^t M dt \right) \left(\frac{1}{r_A} \right) = \left(\frac{1}{r_B} \right) I_{O_B} \left(\frac{r_A}{r_B} \right) \omega_A$$

Despejando la velocidad angular ω_A , resulta:

$$\omega_A = \frac{(M) t}{3 \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 + I_{O_A}} \quad (6.44)$$

Se sabe que los momentos de inercia de ambos engranes están definidos como:

$$I_{O_A} = m_A k_A^2 = (0.8 \text{ kg}) (0.031 \text{ m})^2 = 7.688 \times 10^{-4} \text{ kg} - \text{m}^2$$

$$I_{O_B} = m_B k_B^2 = (0.3 \text{ kg}) (0.015 \text{ m})^2 = 6.75 \times 10^{-5} \text{ kg} - \text{m}^2$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (6.44), resulta:

$$\omega_A = \frac{(0.05) (2)}{3 (2)^2 (6.75 \times 10^{-5}) + (7.688 \times 10^{-4})} \frac{N - m}{\text{kg} - \text{m}^2} = 63.339245 \text{ rad/s} \quad \circlearrowright$$

De acuerdo con la ecuación (6.39) y sustituyendo los valores numéricos, el valor de la velocidad angular del engrane B , se obtiene:

$$\omega_B = \left(\frac{40}{20}\right) (63.339245 \text{ rad/s}) = 126.67849 \text{ rad/s} \quad \circlearrowleft$$

Ahora aplicando la ecuación de Euler a cada uno de los engranes se obtiene una expresión para la aceleración angular α_A .

De la suma de momentos con respecto al punto O_A del engrane A , se obtiene:

$$\Sigma M_{O_A} = -I_{O_A} \alpha_A \quad \text{tal que} \quad 3F r_A - M = -I_{O_A} \alpha_A \quad (6.45)$$

De la suma de momentos con respecto al punto O_B del engrane B , se obtiene:

$$\Sigma M_{O_B} = I_{O_B} \alpha_B \quad \text{tal que} \quad F r_B = I_{O_B} \alpha_B$$

De manera que:

$$F = \left(\frac{1}{r_B}\right) I_{O_B} \alpha_B \quad (6.46)$$

Sustituyendo la ecuación (6.46) y la ecuación (6.40) en la ecuación (6.45), y despejando la aceleración angular α_B , resulta:

$$\alpha_B = \frac{M}{3 \left(\frac{r_A}{r_B}\right) I_{O_B} + I_{O_A} \left(\frac{r_B}{r_A}\right)} \quad (6.47)$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación anterior, resulta:

$$\alpha_B = \frac{0.05}{3 (6.75 \times 10^{-5}) \left(\frac{40}{20}\right) + (7.688 \times 10^{-4}) \left(\frac{20}{40}\right)} \frac{N - m}{kg - m^2} = 63.339245 \text{ rad/s}^2 \quad \circlearrowleft$$

De acuerdo con la ecuación (6.40) y sustituyendo los valores numéricos, el valor de la aceleración angular del engrane A , resulta:

$$\alpha_A = \left(\frac{20}{40}\right) (63.339245 \text{ rad/s}^2) = 31.6696225 \text{ rad/s}^2 \quad \circlearrowleft$$

6.8.2. Simulación mediante Adams[©]/Machinery.

A continuación, el problema se resolverá simulando el sistema empleando las herramientas de engranes dentro del módulo **Machinery**, del programa Adams[©]. Es importante señalar que en esta sección no se discute la selección de los parámetros geométricos de los engranes y cremalleras. Estos importantes detalles ya se analizaron previamente en la sección 2.4, en la página 22 de este trabajo. Es necesario mencionar que dentro del módulo de engranes se emplea una opción de suma importancia denominada “**Simplified**”.

El modelo en Adams[©] que representa el sistema del problema 19-11 se muestra en la figura 6.152.

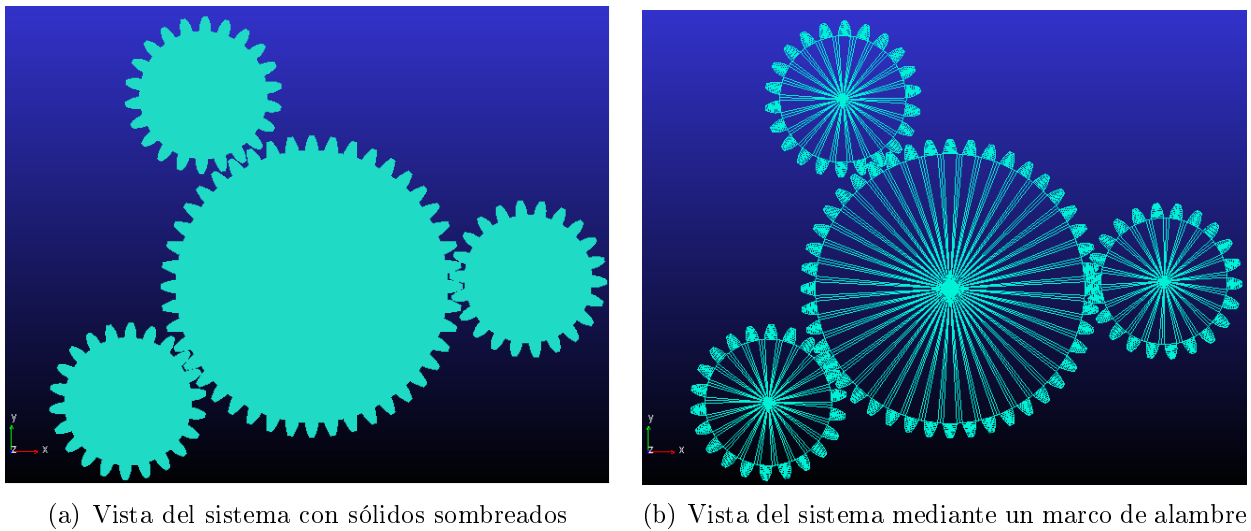


Figura 6.152: Modelo del problema en Adams[©].

El tipo de engrane es el mismo para todos los engranes del modelo, vea la figura 6.153. Como puede observarse se seleccionó un engrane tipo recto o “spur”. Es importante aclarar que Adams[©]/Machinery sólo puede crear un par de engrane.

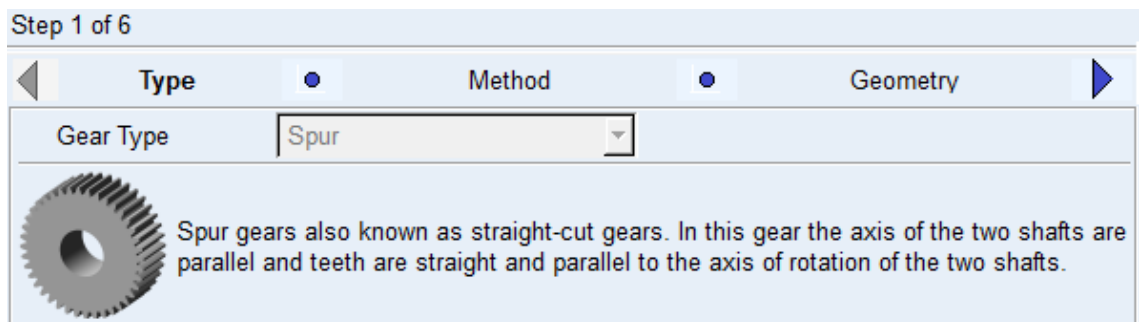


Figura 6.153: Tipos de engranes empleados por Adams[©] para los engranes *A*, *B*, *C* y *D*.

La figura 6.154 muestra el tipo de análisis empleado en la simulación del sistema, dicho método debe ser el empleado para todo par de engrane dentro del modelo.

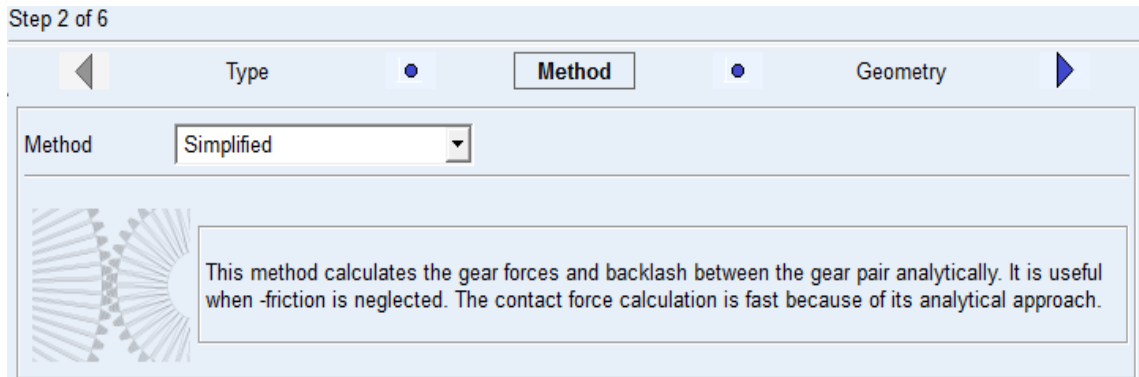


Figura 6.154: Método de análisis empleado por Adams[©] para el par de engranes *A* y *B*.

El usuario debe prestar mucha atención en las unidades a utilizar en el modelo, para este problema se utilizaron las unidades mostradas en la figura 6.155.

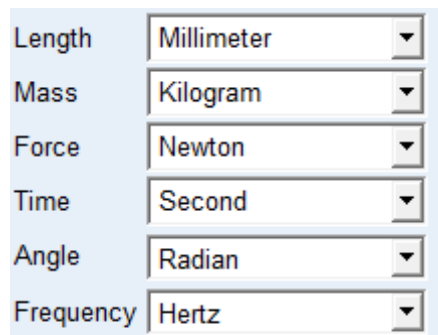


Figura 6.155: Unidades empleadas en el modelo de Adams[©].

Los parámetros geométricos para el par de engrane *A-B*, *A-C* y *A-D* se presentan en las figuras 6.156 y 6.157. El usuario debe tener cuidado en seleccionar los radios primitivos o de paso iguales a los indicados en el enunciado del problema y seleccionar una distancia entre centros acorde con los radios de los engranes.

El usuario debe saber que para la creación del par de engranes *A-C* y *A-D*, se seleccionó un engrane ya existente dentro del modelo, en este caso se seleccionó el engrane *A* como el engrane uno o "Gear 1" para los pares de engranes *A-C* y *A-D*, vea la figura 6.157. La única diferencia para estos pares de engranes y el par de engranes *A-B*, son las coordenadas de sus centros. vea la figura 6.158. Para el engrane *B* las coordenadas de su centro está definido por el punto 3, para el engrane *C* el punto uno y para el engrane *D* el punto 2.

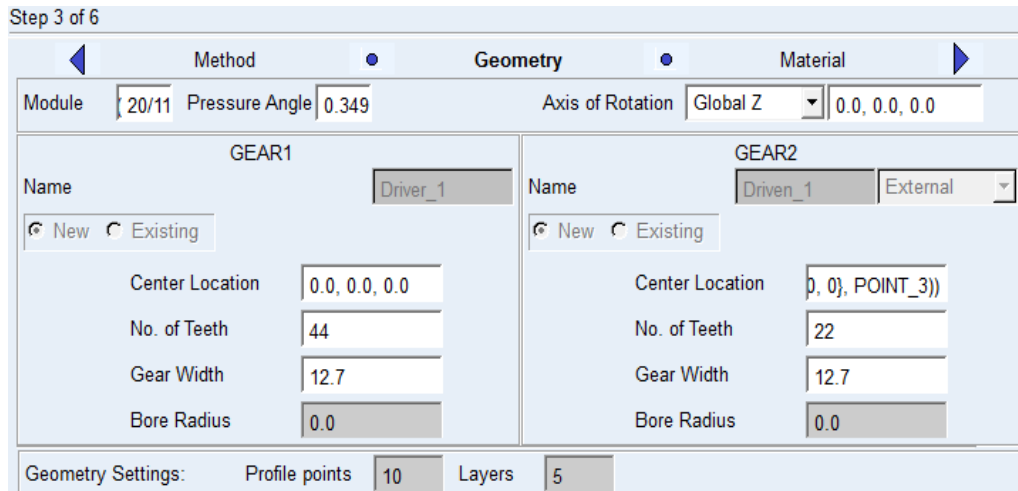


Figura 6.156: Propiedades geométricas del par de engranes *A* y *C*.

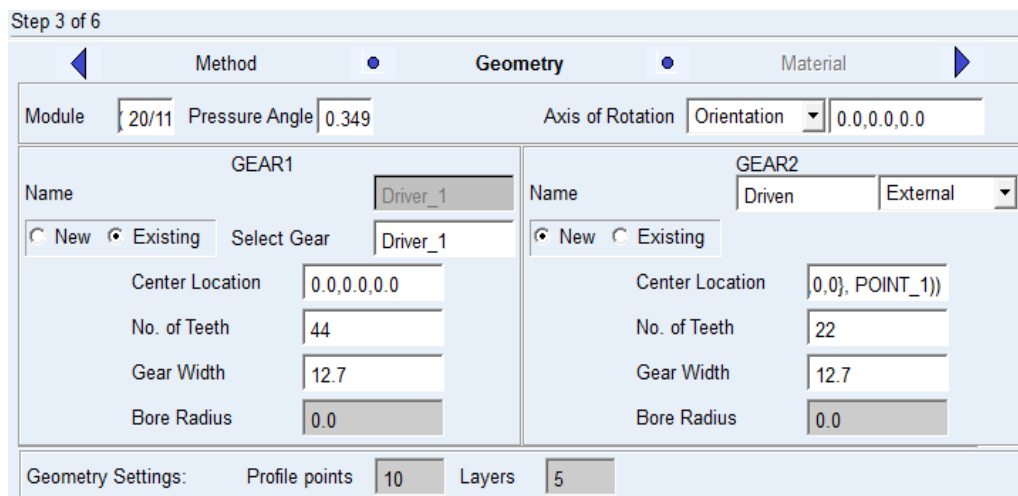


Figura 6.157: Propiedades geométricas del par de engranes *C* y *B*.

	Loc_X	Loc_Y	Loc_Z
POINT_1	59.96344962	2.093969802	0.0
POINT_2	-30.0	52.97685557	0.0
POINT_3	-50.88288577	-31.79515585	0.0

Figura 6.158: Tabla de puntos en Adams[©].

Los parámetros inerciales de los pares de engranajes, $A-B$, $A-C$ y $A-D$, se presentan en las figuras 6.159 y 6.160. Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y no son de importancia en este análisis; sin embargo es deseable que de acuerdo con las propiedades inerciales de un disco sean iguales a la mitad del momento de inercia con respecto al eje z .

Property	Value
Mass	0.8
I_{xx}	384.4
I_{yy}	384.4
I_{zz}	768.8

Figura 6.159: Propiedades inerciales del engrane A dentro del par de engranes A y B .

Property	Value
Mass	0.3
I_{xx}	33.75
I_{yy}	33.75
I_{zz}	67.5

Figura 6.160: Propiedades inerciales del engrane B dentro del par de engranes A y B .

Las propiedades inerciales del engrane A y B dentro del par de engranes $A-B$ son iguales para todos los demás pares de engranes, por lo que únicamente se muestra las propiedades inerciales del engrane A y B del par $A-B$, vea las figuras 6.159 y 6.160, esto se debe a que los engranes B , C y D tienen las mismas propiedades geométricas e inerciales.

La figura 6.161 muestra las propiedades de contacto entre los pares de engranes, para este problema, dichas propiedades se dejan iguales a las que aparecen por defecto y son las mismas para el par de engranajes A y B .

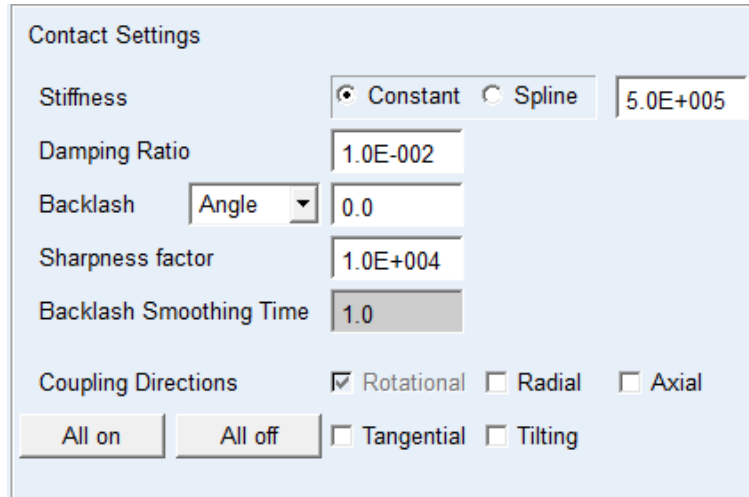
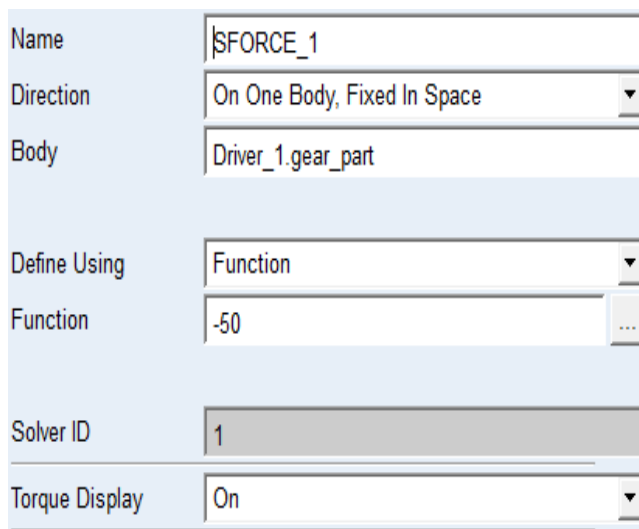
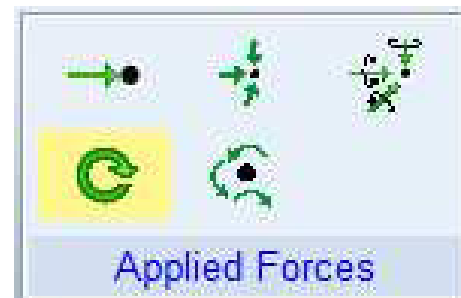


Figura 6.161: Parámetros de contactos para el par de engranes *A* y *B*.

Para aplicar torque al engrane *A* es necesario emplear un actuador en Adams[®], vea las figuras en 6.162. El actuador aplica un torque cuya magnitud es de $0.05 \text{ N} - \text{m}$, debe recordarse que la unidad de longitud seleccionada es milímetros y la unidad de fuerza es Newton de modo que el torque aplicado es $50 \text{ N} - \text{mm}$.



(a) Parámetros del torque



(b) Creación de un torque

Figura 6.162: Creación y parámetros de un torque sobre el engrane *A*.

Para la simulación del modelo, basta con ingresar un tiempo de 2 segundos, con un número de pasos de 2000 y seleccionar el tipo de simulación dinámica, vea la figura 6.163. La selección de los pasos depende, en ocasiones, de la precisión que se deseé y las restricciones en el tiempo de cómputo, si las hay.

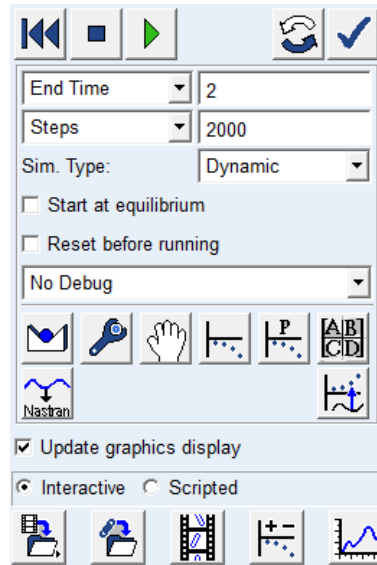


Figura 6.163: Parámetros de la simulación.

Para solicitar los resultados deseados, el usuario debe dirigirse a post procesamiento después de la simulación y seleccionar los parámetros mostrados en las figuras 6.164, 6.165, 6.166, 6.167, 6.168, 6.169 y 6.170.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_11_HIBBELER	body	+ Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_2	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ Driven_3	Total_Force_At_Location	Z
		- Driver_1	Total_Torque_At_Location	Mag
		- gear_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		Driver_1_Driven_1_Sf	Translational_Acceleration	
		Driver_1_Driven_2_Sf	Angular_Velocity	
		Driver_1_Driven_3_Sf	Angular_Acceleration	

(a) Solicitud de la velocidad angular del engrane A

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_11_HIBBELER	body	- Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- gear_part	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	cm	Total_Force_At_Location	Z
		Driver_1_Driven_1_Sf	Total_Torque_At_Location	Mag
		gear_attachment_ref	Translational_Displacement	
		gear_geometry_ref	Translational_Velocity	
		+ Driven_2	Translational_Acceleration	
		+ Driven_3	Angular_Velocity	
		+ Driver_1	Angular_Acceleration	

(b) Solicitud de la velocidad angular del engrane B

Figura 6.164: Solicitud de las velocidades angulares de los engranes A y B.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_11_HIBBELER	body	+ Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- Driven_2	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- gear_part	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		Driver_1_Driven_2_SFo	Translational_Displacement	
		gear_attachment_ref	Translational_Velocity	
		gear_geometry_ref	Translational_Acceleration	
		+ Driven_3	Angular_Velocity	
		+ Driver_1	Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

Figura 6.165: Solicitud de la velocidad angular del engrane *C*.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_11_HIBBELER	body	+ Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_2	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- Driven_3	Total_Force_At_Location	Z
		- gear_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		Driver_1_Driven_3_SFo	Translational_Velocity	
		gear_attachment_ref	Translational_Acceleration	
		gear_geometry_ref	Angular_Velocity	
		+ Driver_1	Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

Figura 6.166: Solicitud de la velocidad angular del engrane *D*.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_11_HIBBELER	body	+ Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_2	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	+ Driven_3	Total_Force_At_Location	Z
		- Driver_1	Total_Torque_At_Location	Mag
		- gear_part	Translational_Displacement	
		cm	Translational_Velocity	
		Driver_1_Driven_1_SFo	Translational_Acceleration	
		Driver_1_Driven_2_SFo	Angular_Velocity	
		Driver_1_Driven_3_SFo	Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

Figura 6.167: Solicitud de la aceleración angular del engrane *A*.

Data		Math		
Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_11_HIBBELER	body	+ Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	+ Driven_2	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- Driven_3	Total_Force_At_Location	Z
		- gear_part	Total_Torque_At_Location	Mag
		cm	Translational_Displacement	
		Driver_1_Driven_3_SFo	Translational_Velocity	
		gear_attachment_ref	Translational_Acceleration	
		gear_geometry_ref	Angular_Velocity	
		+ Driver_1	Angular_Acceleration	

Source: Objects
Filter: *

Figura 6.170: Solicitud de la aceleración angular del engrane *D*.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_11_HIBBELER	body	- Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- gear_part	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	cm	Total_Force_At_Location	Z
		Driver_1_Driven_1_SFo	Total_Torque_At_Location	Mag
		gear_attachment_ref	Translational_Displacement	
		gear_geometry_ref	Translational_Velocity	
		+ Driven_2	Translational_Acceleration	
		+ Driven_3	Angular_Velocity	
		+ Driver_1	Angular_Acceleration	

Figura 6.168: Solicitud de la aceleración angular del engrane *B*.

Model	Filter	Object	Characteristic	Component
.P19_11_HIBBELER	body	+ Driven_1	Total_Force_On_Point	X
	force	- Driven_2	Total_Torque_On_Point	Y
	constraint	- gear_part	Total_Force_At_Location	Z
		cm	Total_Torque_At_Location	Mag
		Driver_1_Driven_2_SFo	Translational_Displacement	
		gear_attachment_ref	Translational_Velocity	
		gear_geometry_ref	Translational_Acceleration	
		+ Driven_3	Angular_Velocity	
		+ Driver_1	Angular_Acceleration	

Figura 6.169: Solicitud de la aceleración angular del engrane *C*.

Los resultados obtenidos por Adams[©] se muestran en las figuras 6.171 y 6.172.

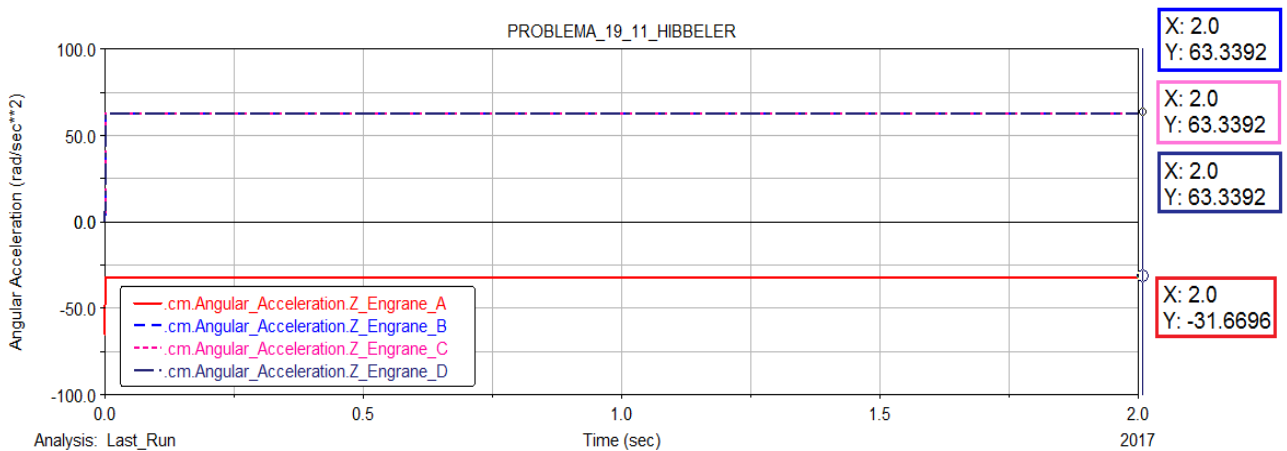


Figura 6.171: Resultados de las aceleraciones angulares de los engranes *A*, *B*, *C* y *D*.

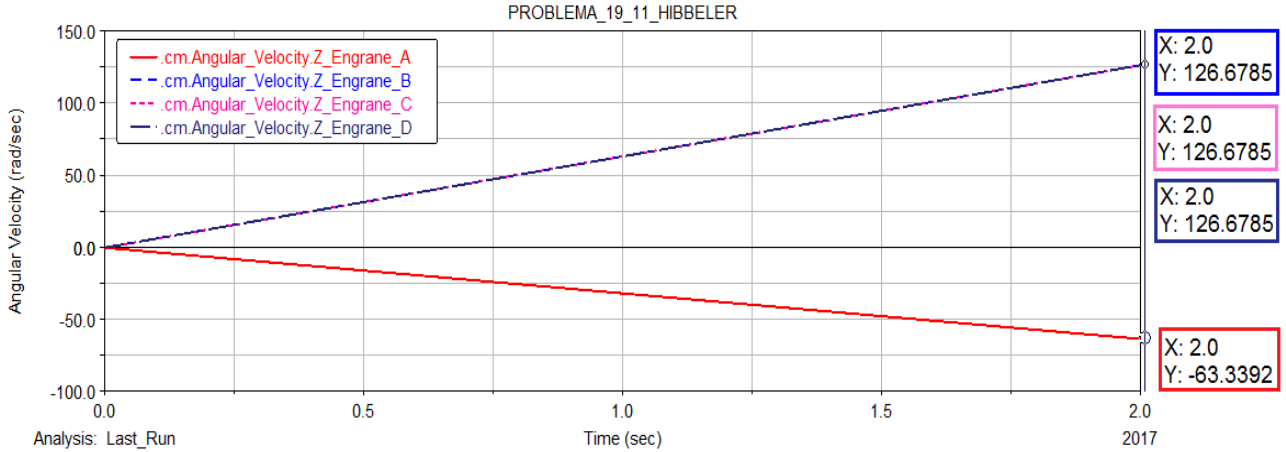


Figura 6.172: Resultados de las velocidades angulares de los engranes A , B , C y D .

El usuario debe tener cuidado en usar las unidades adecuadas al problema. La selección de unidades se realiza dentro del menú **Settings** del programa Adams[©].

Estos resultados tienen errores despreciables cuando se comparan con los resultados obtenidos analíticamente. La Tabla 6.8 muestra una comparación más detallada de los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación.

Tabla 6.8: Comparación de resultados. 8.º problema de engranes y cremalleras

Variable	Resultados analítico	Resultados Adams [©]
α_A	$31.6696 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$	$31.6696 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$
α_B	$63.3392 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright$	$63.3392 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright$
α_C	$63.3392 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright$	$63.3392 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright$
α_D	$63.3392 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright$	$63.3392 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright$
ω_A	$63.3392 \text{ rad/s} \circlearrowleft$	$63.3392 \text{ rad/s} \circlearrowleft$
ω_B	$126.67849 \text{ rad/s} \circlearrowright$	$126.6785 \text{ rad/s} \circlearrowright$
ω_C	$126.67849 \text{ rad/s} \circlearrowright$	$126.6785 \text{ rad/s} \circlearrowright$
ω_D	$126.67849 \text{ rad/s} \circlearrowright$	$126.6785 \text{ rad/s} \circlearrowright$

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros.

En este trabajo de tesis se analizaron y modelaron, empleando un programa de simulación de sistemas mecánicos, un conjunto de problemas de distintas fuentes bibliográficas con el fin de comparar los resultados obtenidos de forma analítica y por medio de la simulación, de esta manera el estudiante podrá darse cuenta que en la realidad, los sistemas mecánicos no responden de manera inmediata debido a muchos factores, como pueden ser la inercia del mecanismo, las propiedades elásticas y de contacto. Sin embargo y de acuerdo con este trabajo, dichos valores corresponden casi correctamente a los resultados obtenidos por los métodos tradicionales contenidos en las Unidades de Aprendizaje de Dinámica de la Partícula y la Dinámica del Cuerpo Rígido.

Conforme se desarrollaron los modelados, se percató de que el programa de simulación Adams[©] / Machinery no permite importar modelos desarrollados por algún otro programa CAD, como lo es SolidWorks[©], Catia[©], Inventor[©] y FreeCad. De manera que no es posible representar fielmente las características de los cuerpos de los problemas desarrollados en este trabajo. Esto posiblemente, porque el módulo Machinery es relativamente nuevo y aun falta desarrollarlo mas por parte de la empresa MSC Software.

Para tener una mejor aproximación en los resultados es obligatorio emplear el método de análisis denominado Constraint en el caso de los sistemas de poleas con bandas y los sistemas de cadenas y catarinas. Mientras que en el caso de engranes es obligatorio usar el método “**Simplified**”.

El método “**Constraint**” se emplea cuando la fuerza y los componentes no son de importancia, donde únicamente la reducción o multiplicación de velocidad es de interés. Mientras que el método “**Simplified**” permite calcular las fuerzas en el engranaje, la holgura o backlash entre el par de engranes, además de analizar la transmisión de velocidades por medio de una relación constante.

Existen otros métodos de análisis mas completos y complejos, como lo es el método “**2D links**” y “**3D links**”, en el caso de sistemas de poleas y bandas y el método “**Detailed**” y “**3D Contact**” para los sistemas de engranes y cremalleras. Estos métodos requieren un dominio mas completo en el diseño mecánico, además de que ambos métodos requieren un equipo de cómputo más poderoso.

Este trabajo incluye una descripción detallada de como modelar estos sistemas mecánicos y como variar sus parámetros, con el fin de que el usuario pueda recrear dichos problemas sin dificul-

tad. Este nivel de detalle se escogió debido a la escasa información acerca del empleo del módulo de Adams[®]/Machinery y de esa manera cumplir con el objetivo de proporcionar al estudiante una guía más detallada del módulo; el autor espera que este objetivo se haya cumplido de manera exitosa.

Las posibles extensiones de este trabajo son muy variadas y van desde:

- Expandir el número de problemas analizados de la manera mostrada en este trabajo de tesis.
- En espera de una mayor información del módulo analizar los problemas que involucran engranes mediante el método “**Constraint**”.
- Emplear el módulo de levas, cojinetes y motores en la solución de problemas que involucren este tipo de elementos de máquinas.

Bibliografía

- [1] Allais, S. [2014], *Selling out education: National qualifications frameworks and the neglect of knowledge*, Rotterdam: Sense Publishers.
- [2] Altbach P. [2003], Evaluating and Rewarding Professors: Mexican Style, *International Higher Education*, Vol. 32, Spring, pp. 12-14.
- [3] American Chain Association [2006], *Standard Handbook of Chains. Chains for Power Transmission and Material Handling*, Boca Raton: CRC.
- [4] Aziz, E. S., Chang, Y., Esche, S. K. y Chassapi C. [2014], A multi-user virtual laboratory environment for gear train design. *Computer Applications in Engineering Education*, Vol 22, No. 4, pp. 788-802.
- [5] Beer, F., Johnston, E. R. Jr, Cornwell, P. J. [2007], *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Dinámica, Novena Edición*, Ciudad de México: McGraw-Hill.
- [6] Bernasconi, A. [2008], Is there a Latin American model of the university?, *Comparative Education Review*, Vol 52, No. 1, pp. 15-31.
- [7] Bernhard, J. [2000], Teaching engineering mechanics courses using active engagement methods, *Physics Teaching in Engineering Education (PTEE 2000)*, Budapest, Hungary, June 13-17, 2000.
- [8] Budynas, R. G. y Nisbett, J. K. [2008], *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley, Octava Edición*, Ciudad de México: Mc Graw-Hill.
- [9] Carabaña-Morales, J. [2011], Competencias y universidad, o un desajuste por mutua ignorancia, *Bordón. Revista de pedagogía*, Bordón, Vol. 63, No. 1, pp. 15-31.
- [10] Carron, G. y Châu, T. N. [1996], *The Quality of Primary Schools in Different Development Contexts*, Paris: UNESCO Publishing.
- [11] CODELCO-Chile [2005], Manejo de Cargas con Cables de Acero, Eslingas/Estrobo, Norma Estándar Operacional, Dirección Riesgo y Salud Ocupacional, Gerencia Riesgo, Ambiente y Calidad, 2005.
- [12] Deliktas, B. [2011], Computer technology for enhancing teaching and learning modules of engineering mechanics, *Computer Applications in Engineering Education*, Vol. 19, No. 3, pp. 1-14.

- [13] Fenner Power Transmission [2018], Section 2: Chain Drives. *Fenner Chain Drives*, obtenido de http://www.fptgroup.com/dss/docs/679_02_Fenner_Chain_Drives.pdf.
- [14] Giesbers, J. [2012], *Contact Mechanics in MSC Adams: A technical evaluation of the contact models in multibody dynamics software MSC Adams*, B. Sc. Thesis, University of Twente.
- [15] Gil-Antón, M. [2003], Big city love: The academic workplace in Mexico, In *The Decline of the Guru*, Altbach P. Ed., pp. 23-50, New York: Palgrave-Macmillan.
- [16] Ha, O. [2015] *The effects of interactive computer simulation and animation on student learning of rigid body dynamics: A mixed method study*, Ph.D. Dissertation, Utah State University.
- [17] Hallak, J. y Poisson, M. [2010], *Escuelas corruptas, universidades corruptas: ¿Qué hacer?*, Paris: UNESCO.
- [18] Hibbeler, R. C. [2010], *Ingeniería Mecánica: Dinámica, Décima segunda Edición*, Ciudad de México: Prentice-Hall.
- [19] Hyland, T. [1997], Reconsidering competence, *Journal of Philosophy of Education*, Vol. 31, No. 3, pp. 497-503.
- [20] Jayaram, N. [2003], The decline of the guru: The academic profession in developing and middle-income countries, In *The Decline of the Guru*, Altbach P. Ed., pp. 199-230, New York: Palgrave-Macmillan.
- [21] Jiménez-Bascones, J. M. [2006], *Elementos de Máquinas y Vibraciones: Teoría de Contacto Mecanismos de Fricción y Adherencia*. Departamento de Ingeniería Mecánica, Energética y de Materiales, Campus de Arrosadía, Universidad Pública de Navarra.
- [22] Johnson, K.L.[1985], Normal contact of elastic solids-Hertz theory. In *Contact Mechanics*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 84-106.
- [23] Kent. R. [1993], Higher education in Mexico: From unregulated expansion to evaluation, *Higher Education*, Vol. 25, No. 1, pp. 73-83.
- [24] Lee, W.P. y Hwan, C.L. [2015], A computer simulation in mechanics teaching and learning: A case study in circular motions, *Computer Applications in Engineering Education*, Vol. 23, No. 6, pp. 875-881.
- [25] Linares, A. [2017], El dinero se iba a un agujero negro: El esquema de corrupción que compromete al gobierno de México., *The New York Times Esp.*, obtenido de <https://nyti.ms/2xMJZUh> el 5 de Marzo del 2018.
- [26] Lum, G. [1999], Where's the Competence in Competence-based Education and Training?, *Journal of Philosophy of Education*, Vol. 33, No. 3, pp. 403-418.
- [27] Martínez Rizo, F. [1999], *Nueve retos para la educación superior: Funciones, actores y estructuras*, Aguascalientes: Universidad Autónoma de Aguascalientes.

- [28] Meriam, J.L. y Kraige, L.G. [2000], *Mecánica para Ingenieros: Dinámica, Tercera Edición*, Barcelona: Editorial Reverté S.A.
- [29] MSC Software Corporation [2016], *Idealized Joints: Adding Friction to Idealized Joints*, Help Manual, retribuido del programa el 8 de Septiembre del 2016.
- [30] Oberg, E., Jones, F. D. y Ryffel, H. H. [2004], *Machinery's Handbook, 27th Edition*, New York: Industrial Press Inc.
- [31] OECD [2013], *Education Policy Outlook: Mexico, Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico*, Paris: OECD Publishing.
- [32] Castañeda Valle, R. y Rebolledo Gómez, C. [2013] Education at a Glance 2013: OECD Indicators, *Country Note*, Paris: OECD Publishing.
- [33] Pérez-Soto, G.I., Crane, C., Rico, J.M, Cervantes-Sánchez, J.J., González-Palacios, M.A., Gallardo-Mosqueda, L.A., López-Custodio, P.C., Sánchez-Ruenes, M.A. y Tadeo-Chávez, A., [2015], On the computer solutions of kinematics analysis of linkages, *Engineering with Computers*, Vol. 31, No. 1, pp. 11-28.
- [34] Renold Power Transmission Limited [2010] Transmission chain. *Installation, maintenance and designer guide*, retribuido de <http://www.renold.com/media/165418/Transmission-I-and-M-REN12-ENG-10-10.pdf>.
- [35] Santos-Benito, J. V., Gras-Marli, A. y Soler-Selva, V.F. [2005], Recursos para la enseñanza del péndulo simple: imágenes, mediciones, simulaciones y guías didácticas, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, Vol 22, No. 2, pp. 165-189.
- [36] Servicio Nacional de Aprendizaje (SENA). *Metalmecánica. Elementos de Máquinas: Montaje de poleas y correas en V*, Vol. 6, retribuido de http://repositorio.sena.edu.co/sitios/elementos_maquinas/vol6/volumen06.html. Bogotá: Servicio Nacional de Aprendizaje.
- [37] Slocum, A. [2008], Fundamentals of Design, Topic 5: Power Transmission Elements I. Technical report, Massachusetts Institute of Technology.
- [38] Tadeo-Chávez A. y Rico-Martínez, J.M. [2015], Cinética de Cuerpos Rígidos: Método de Impulso e Ímpetu, Notas de clase, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato.
- [39] Wilson, C. E y Deutschman, A. D. [1975], *Diseño de Máquinas Teoría y Práctica*, Ciudad de México: Compañía Editorial Continental S.A. de C.V.

Apéndice

Apéndice A

Teoría de contacto de Hertz.

En la teoría de contacto mecánico existen diferentes modelos que predicen las fuerzas de contacto y las deformaciones geométricas entre superficies de sólidos, vea la figura A.1.

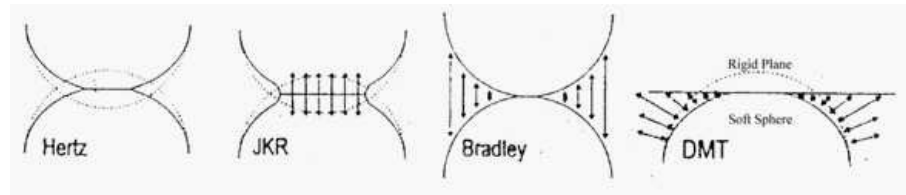


Figura A.1: Modelos de contactos en la mecánica de contactos [22]

Entre los modelos están, vea Johnson [22].

- Hertz: Modelo que analiza únicamente deformaciones elásticas
- JKR (Johnson, Kendall, y Roberts): Modelo que analiza el contacto con deformaciones elásticas y considera la adhesión en la zona de contacto.
- Bradley: Modelo que analiza el contacto con las interacciones de Van der Waals en esferas rígidas.
- DMT (Derjaguin-Muller-Toporov): Modelo completamente elástico donde considera los efectos de adherencia y las interacciones de Van der Waals.

De acuerdo con Jiménez [21] la teoría de contacto estudia dos problemas fundamentales, el estudio geométrico, cinemático, del contacto y el estudio de las fuerzas presentes en el contacto.

Las fuerzas de contacto se pueden clasificar como:

1. Fuerzas normales: Las deformaciones en los materiales se deben a fuerzas normales. El estudio de estas fuerzas se conocen también como teoría de contacto de Hertz, vea la figura A.2.
2. Fuerzas tangenciales (Problemas no lineales): donde las deformaciones en los materiales son debido a fuerzas tangenciales, en estos casos se debe considerar rozamiento, vea la figura A.2

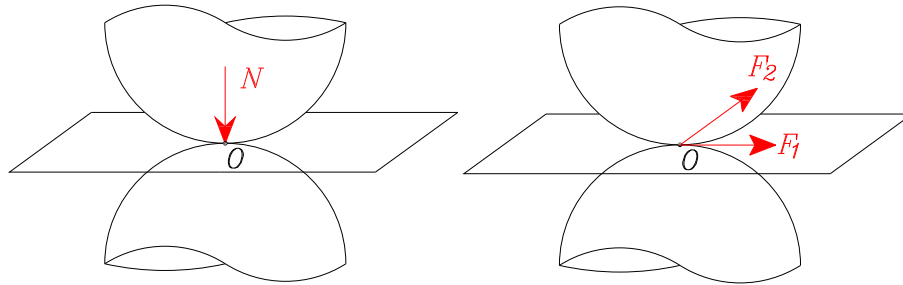


Figura A.2: Fuerza de contacto normal y fuerza de contacto tangencial. ©

La teoría de contacto de Hertz trata el caso donde el contacto generado es entre dos cuerpos esféricos, el área de contacto es circular, donde se presentan esfuerzos de compresión y donde existen únicamente deformaciones elásticas.

Esta teoría asume que:

1. Las interacciones de Van der Waals no existen y no se toman en cuenta.
2. No existe ningún tipo de adherencia, esto quiere decir que los cuerpos pueden separarse sin ninguna fuerza de adhesión.
3. Los cuerpos sufren únicamente deformaciones elásticas, lo que implica que las fuerzas de presión son pequeñas.
4. Las superficies de contacto entre los cuerpos son perfectamente lisas.
5. Las fuerzas de contacto entre los cuerpos en contacto son puramente fuerzas normales.
6. En el momento cuando dos cuerpos hacen contacto debido a la acción de fuerzas se genera un área de contacto, esta área dependerá de la geometría de los cuerpos en contacto, de las propiedades de los materiales en contacto y de la carga.

Tipo de áreas de contacto en la teoría de Hertz.

- El área de contacto generado por el contacto entre dos cilindros cuyos ejes son paralelos es un rectángulo delgado.
- Dos cilindros que se encuentran en contacto cuyos ejes no son paralelos generan un área de contacto elíptica.
- El caso donde hacen contacto entre dos cilindros cuyos ejes son perpendiculares; es decir cruzados con un ángulo de 90° , forma un área de contacto circular.
- Al momento en que dos cuerpos esféricos hagan contacto entre si, estos generarán un área de contacto elíptica. En este caso la distribución de esfuerzos es semi elipsoidal, vea la figura A.4.

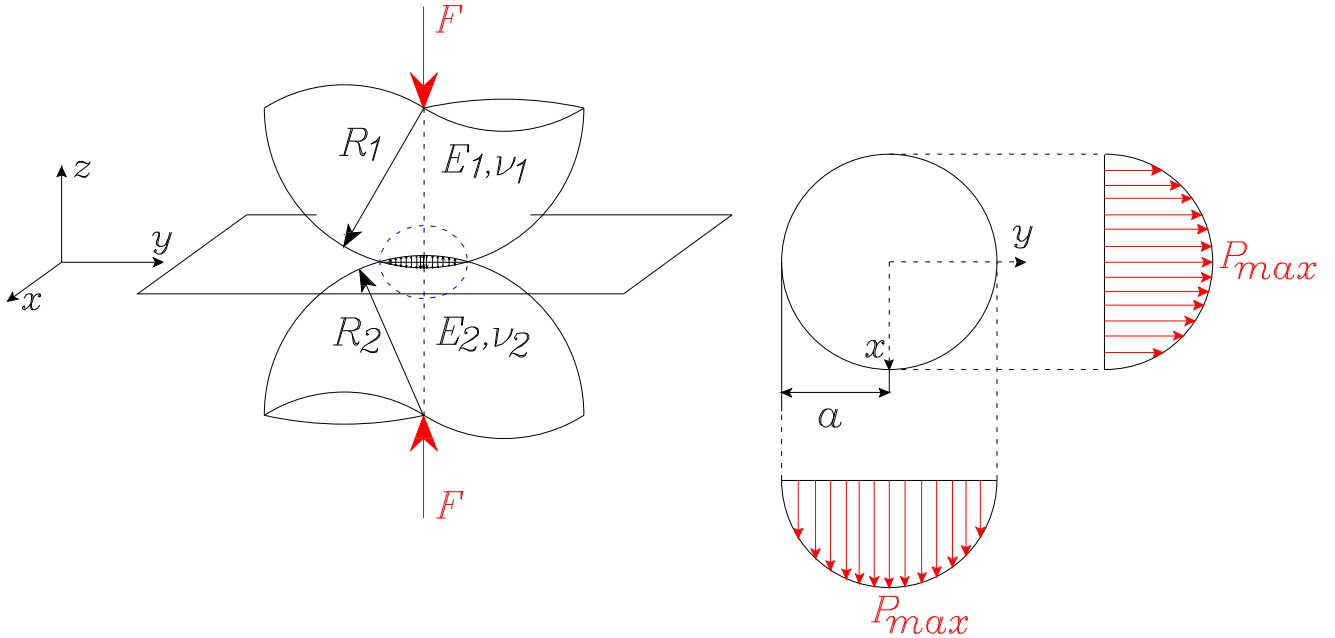


Figura A.3: Contacto entre dos esferas.

La figura A.4 muestra una en diferentes planos del área de contacto circular donde se muestra la distribución de esfuerzos de compresión.

Ecuaciones de contacto entre una esfera un semi-espacio elástico, en la cual, también válidas para el contacto entre dos esferas, vea Giesbers [14], vea la figura A.4.

Coefficiente de rigidez.

$$K_c = 2aE^*$$

Radio del contacto de Hertz.

$$a = \left(\frac{3LR}{4E^*} \right)^{1/3}$$

Módulo de Young combinado.

$$E^* = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1}$$

Donde E_1 y E_2 son el módulo de Young y ν_1 y ν_2 son la relación de Poisson asociado a cada uno de los cuerpos.

Radio de curvatura efectivo

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

Fuerza normal aplicada

$$F$$

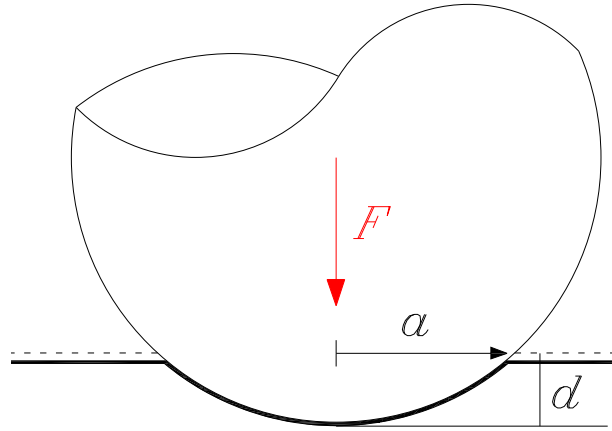


Figura A.4: Contacto entre una esfera y un semi espacio elástico.

Apéndice B

Teoría de contacto de Hertz en relación con la función IMPACT.

Uno de los métodos que utiliza Adams para el análisis de contacto es la función IMPACT, este apéndice describe la relación que existe entre la función IMPACT y la teoría de contacto de Hertz.

De acuerdo con las ecuaciones de contacto presentadas en el apéndice A, la fuerza normal de contacto está dada como:

$$F = K_c (x_1 - x) \quad (\text{B.1})$$

Sustituyendo cada una de las ecuaciones de contacto descritas en el apéndice A, se obtiene:

$$F = 2aE^* (x_1 - x) = 2 \left[\frac{3L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}}{4 \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1}} \right]^{1/3} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) (x_1 - x) \quad (\text{B.2})$$

De acuerdo con Giesbers [14], la fuerza normal puede reconocerse como una fuerza elástica lineal, ley de Hook, siempre y cuando la constante de rigidez K_c sea constante. El valor de la fuerza normal dependerá de su parámetro de rigidez K_c como de la profundidad de penetración $x_1 - x_2$, mientras que la constante de rigidez dependerá tanto de los módulos de Young, las relaciones de Poisson y los radios, para cada uno de los cuerpos.

Dentro de la función IMPACT existe un parámetro de rigidez que está relacionado con la constante de rigidez de contacto de Hertz y que se considera como un parámetro de rigidez estático. Sin embargo, de acuerdo con Giesbers [14], la carga parece variar conforme la profundidad de penetración varía, es decir, conforme la profundidad de penetración aumenta, la fuerza normal de restauración (L) aumenta. Por lo que se concluye que la constante de rigidez del contacto (K_c) no es constante, haciendo que la fuerza no sea lineal.

Debido a esta no linealidad y a que la función IMPACT considera la constante de rigidez como un parámetro de rigidez estático, se considera un exponente de fuerza adicional (e).

$$F = K (x_1 - x)^e$$

Donde $e > 1$ para poder aumentar la rigidez de contacto y la profundidad de penetración. Debido a que K es una constante, la no linealidad se modelará por medio de un exponente (e), gracias a este parámetro, la rigidez de contacto efectiva K dejará de ser constante y de esta manera logramos apegarnos mejor a la teoría de contacto de Hertz.

De acuerdo con la teoría de contactos de Hertz, los cuerpos que entran en contacto tienden a sufrir deformaciones elásticas, esta deformación elástica disipa energía del sistema, debido a esto la función IMPACT tiene que considerar esta disipación de energía y para ello utiliza un parámetro de amortiguación (C_{max}) encargado de disipar dicha energía del sistema.

Esta disipación de energía dependerá del área de contacto y del coeficiente de rigidez del contacto, de acuerdo con Giesbers [14], este valor de amortiguamiento tiene que ser una pequeña fracción de la constante de rigidez.

$$C_{max} < 0.001 k$$

Apéndice C

Función IMPACT.

$$IMPACT(x, \dot{x}, x_1, k, e, c_{max}, d)$$

La función IMPACT consta de siete argumentos, tal y como se describen en la Tabla C.1 .

Tabla C.1: Argumentos de la función IMPACT.

x	Este argumento especifica una variable de distancia que se utiliza para calcular la función IMPACT.
\dot{x}	Este argumento especifica la derivada temporal de x .
x_1	Este argumento es una variable real positiva que especifica la longitud libre de x . De acuerdo con Adams [©] si $x < x_1$ Adams [©] Solver calcula un valor positivo de la fuerza. De lo contrario, el valor de la fuerza es cero.
k	Este argumento es una variable real no negativa que especifica la rigidez de la interacción de la superficie límite.
e	Este argumento es una variable real positiva que especifica el exponente de la característica de deformación debida a la fuerza. Para considerar una característica de resorte de rigidez (stiffening spring characteristic), se selecciona un valor de $e > 1.0$. mientras que para una característica de resorte de reblandecimiento (softening spring characteristic), se selecciona un valor de, $0 < e < 1.0$.
c_{max}	Este argumento es una variable real no negativa que especifica el coeficiente de amortiguamiento máxima.
d_y	Este argumento representa una variable que especifica la penetración límite en la que Adams [©] aplica la amortiguación completa.

Los primeros tres argumentos se determina en cada paso de la simulación y están relacionados directamente con la geometría, mientras que los otros parámetros se especifican por el usuario.

De acuerdo con la figura C.1 la función IMPACT se activa cuando la distancia entre los marcadores M y N caen por debajo de la longitud nominal x_1 en el momento del impacto.

En otras palabras, mientras que el valor entre los marcadores x sea mayor que x_1 , la fuerza será cero. Al momento de que el valor x sea menor que el valor de x_1 , la función IMPACT se activa.

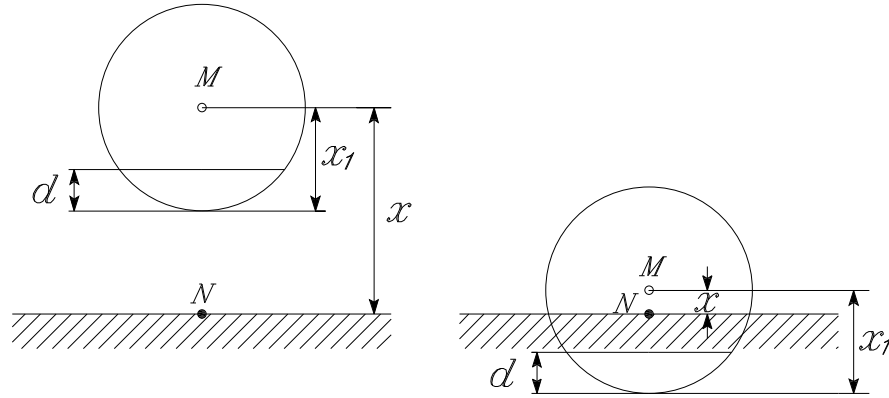


Figura C.1: Valor de la longitud libre x_1 para activar la función IMPACT

La fuerza tiene dos componentes, un componente de resorte o de rigidez, además de un componente de amortiguamiento. La componente de rigidez está en función de la penetración del marcador M con respecto al marcador N y se opone a la penetración, mientras que el componente de amortiguación de la fuerza está en función de la velocidad de penetración y se opone al movimiento relativo. Cuando la profundidad de penetración supera el valor d , el coeficiente de amortiguación toma el valor de C_{max} , de lo contrario el coeficiente de amortiguamiento es una función de paso o STEP cúbica de la penetración.

Definición de la función IMPACT [14].

$$IMPACT = \begin{cases} Max(0, k(x_1 - x)^e - STEP(x, x_1 - d, c_{max}, x_1, 0) * \dot{x}), & x < x_1 \\ 0, & x \geq x_1 \end{cases}$$

Analizando la parte de la función IMPACT asociado a la deformación, vea la figura C.2.

$$F = K(x_1 - x)^e$$

Se tiene que a medida que el valor x va disminuyendo la fuerza de resorte va aumentando. De acuerdo con la figura C.2, cuando el exponente e toma valores entre $0 < e < 1$, la fuerza es cóncava hacia abajo, cuando el exponente toma el valor de uno la fuerza tiene un comportamiento lineal, mientras que cuando toma valores mayores a uno $e > 1$, la fuerza se vuelve cóncava hacia arriba.

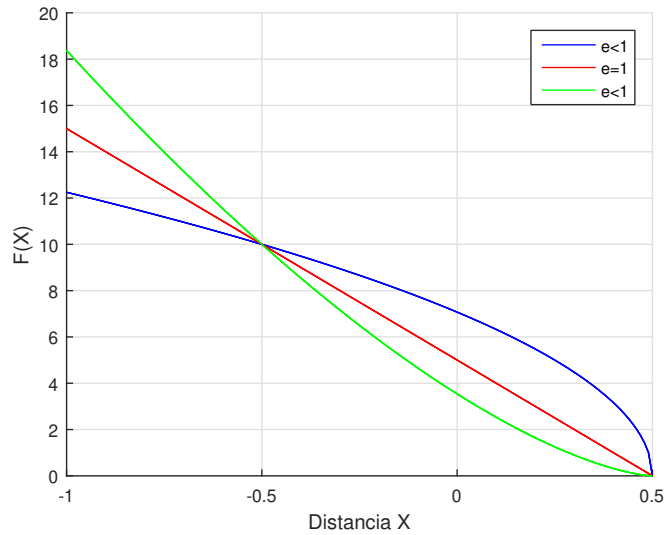


Figura C.2: Primera componente de la función IMPACT, fuerza puramente de compresión

Analizando la segunda componente de la función IMPACT o fuerza de amortiguación.

$$f = -c_{max} \dot{x} * STEP(x, x_1, -d, 1, x_1, 0)$$

Cuando el valor de x es menor que x_1 , la velocidad relativa tendrá un valor distinto de cero, por lo que modela un amortiguador lineal, vea la ecuación (C.1) e inducirá una discontinuidad en la fuerza de amortiguación. Para solucionar este problema, la función IMPACT utiliza una función de paso cúbico y de esta manera aumentar la fuerza de amortiguación desde cero a $c_{max} \dot{x}$ dentro del intervalo de penetración, vea la ecuación (C.2).

$$f = -c\dot{x} \tag{C.1}$$

$$0 < Penetración \leq d \tag{C.2}$$

Cabe remarcar que el valor de penetración “ d ”, no es necesariamente el valor de la profundidad de penetración máxima durante una colisión, sino mas bien la profundidad de penetración en la que el coeficiente de amortiguamiento toma un valor máximo y se mantiene ahí, vea la figura C.3.

Giesbers [14] recomienda utilizar los siguientes valores para el exponente de acuerdo con el material a utilizar.

- Para metales duros: $e \approx 2.2$
- Para metales suaves: $e \approx 1.5$
- Para materiales suaves como el caucho: $e \approx 1.1$

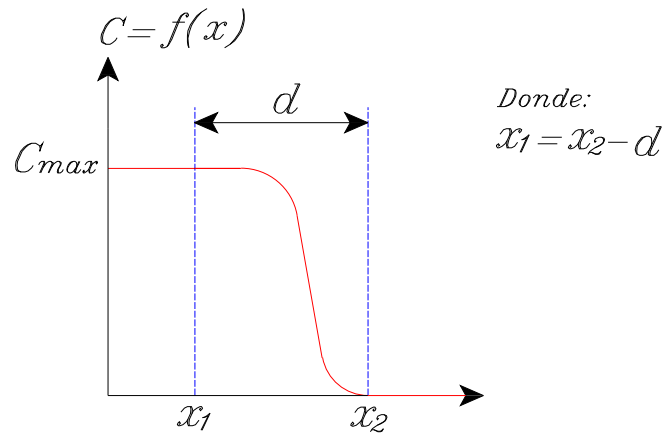


Figura C.3: Segunda componente de la función IMPACT

Apéndice D

Operación de Orientación.

La opción orientación empleada en el módulo de cables, captura la orientación del eje de rotación de la polea con respecto a otro sistema de referencia. En este caso el sistema de referencia que se maneja es el sistema de referencia global dentro del modelado en Adams[®]. La operación Orientation maneja los ángulos de Euler “Yaw-Pitch-Roll”, vea la figura D.1.

Orientation : (Yaw, Pitch, Roll)

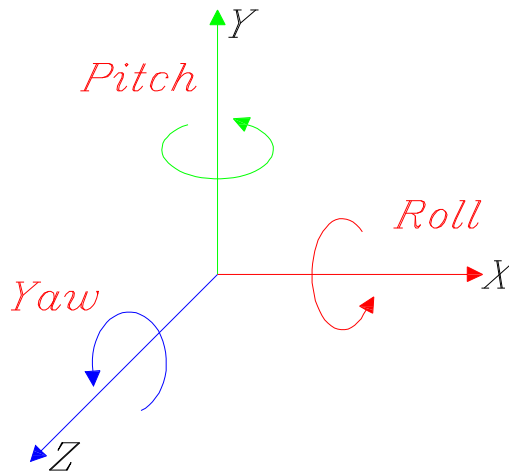


Figura D.1: Ángulos de Euler-Sistema de referencia global en MSC Adams

Se desea encontrar la localización de un sistema de referencia $x'y'z'$ que se obtiene a partir del sistema de referencia global empleando los ángulos de Euler (90° , 90° , 90°). El punto de partida supone que los sistemas de referencia XYZ y $x'y'z'$ son coincidentes, vea la figura D.2.

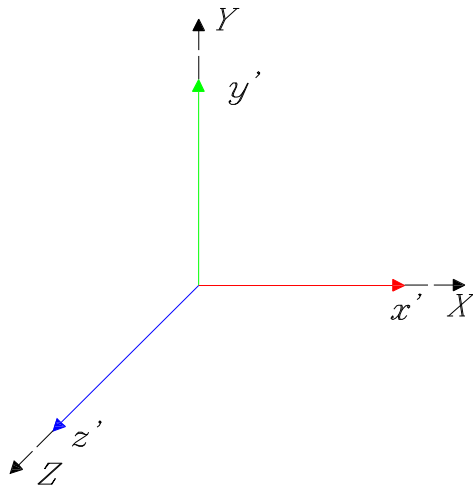


Figura D.2: El sistema de referencia $x'y'z'$ en la posición inicial respecto al sistema de referencia global XYZ

La rotación del sistema de referencia $x'y'z'$ alrededor del eje Z un ángulo de 90° , ángulo Yaw, se muestra en la figura D.3, junto con el resultado final del sistema de referencia $x'y'z'$.

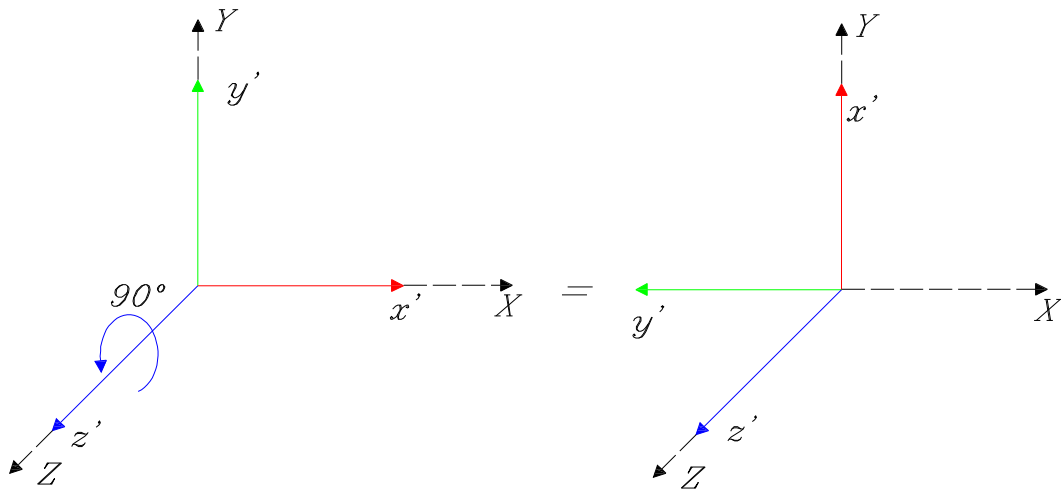


Figura D.3: Rotación de 90° del ángulo Yaw

La rotación del sistema de referencia $x'y'z'$ alrededor del eje Y un ángulo de 90° , ángulo Pitch, se muestra en la figura D.4, junto con el resultado final del sistema de referencia $x'y'z'$.

Finalmente, la rotación del sistema de referencia $x'y'z'$ alrededor del eje X un ángulo de 90° , ángulo Roll, se muestra en la figura D.5, junto con el resultado final del sistema de referencia $x'y'z'$.

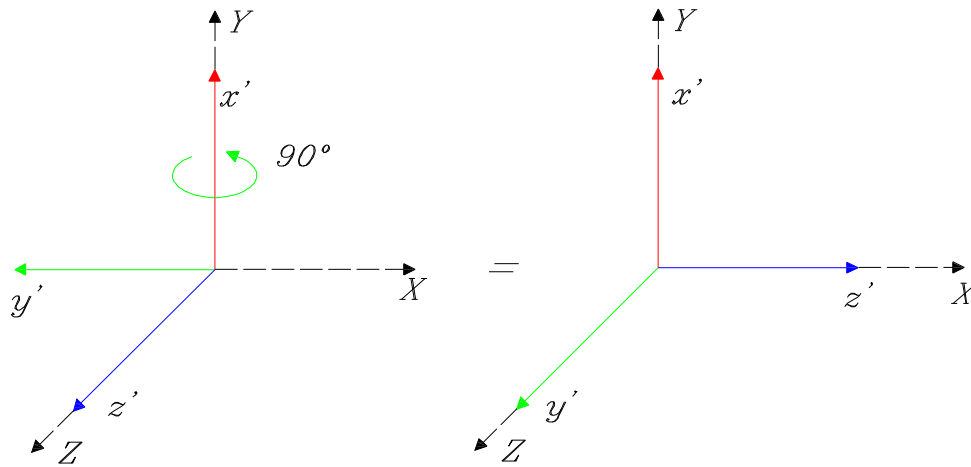


Figura D.4: Rotación de 90° del ángulo Pitch

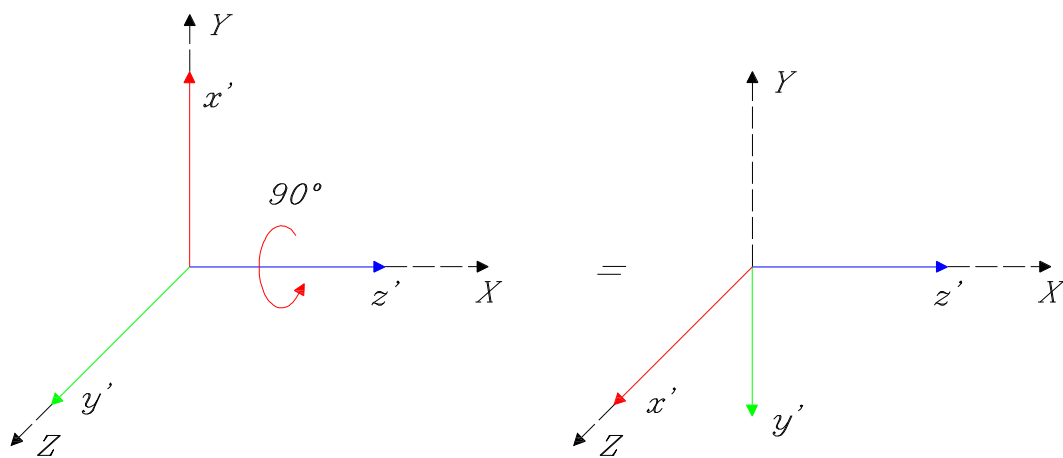


Figura D.5: Rotación de 90° del ángulo Roll

Apéndice E

Creación de una fuerza de fricción en un par prismático.

Esta sección explica la manera de crear una fuerza de fricción en un par prismático, vea la figura E.1.

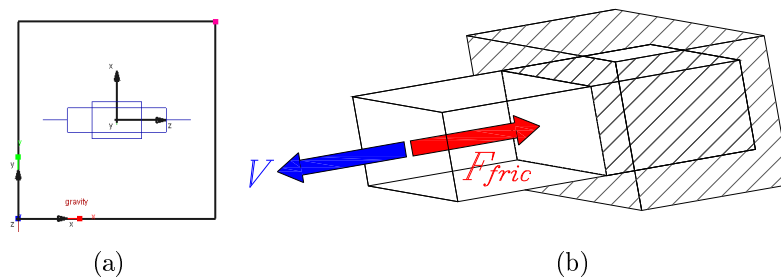


Figura E.1: Fuerza de fricción en un par prismático

Se posiciona el cursor sobre el par cinemático para después hacer clic derecho sobre el mismo, aparecerá una caja de propiedades donde se selecciona la propiedad vista en la figura E.2.

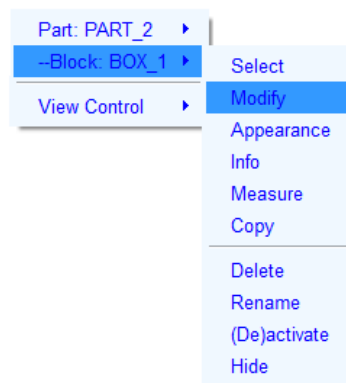


Figura E.2: Opción *Modify* del par prismático

Una vez seleccionada la opción modify aparecerá una ventana de propiedades del par cinemático. Para crear una fuerza de fricción se hace clic sobre el icono llamado Joint friction, vea la figura E.3.

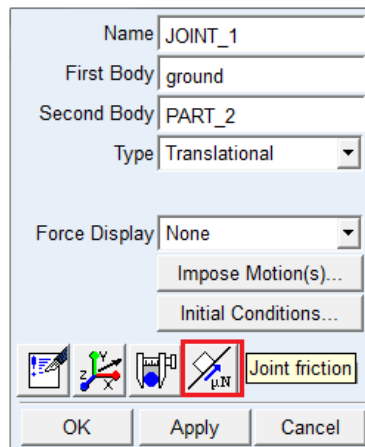


Figura E.3: Ventana para seleccionar la fricción del par prismático

Inmediatamente se desplegará la ventana de propiedades para la fuerza de fricción como puede verse en la figura E.4.

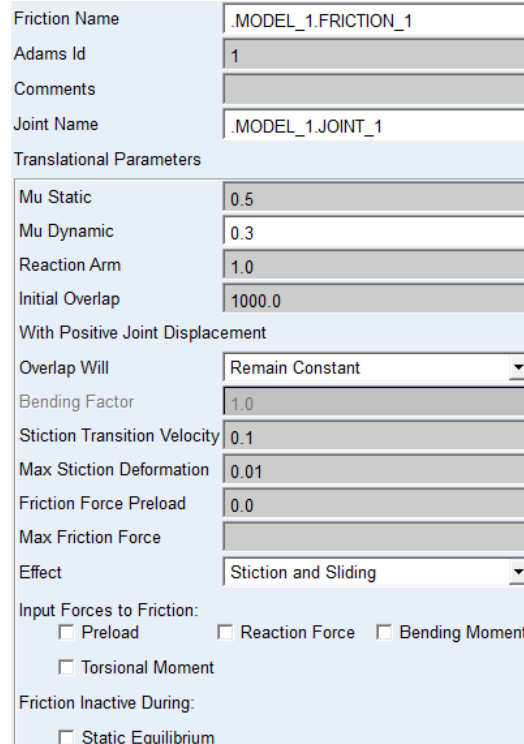


Figura E.4: Parámetros de la fuerza de fricción del par prismático

Donde:

Nombre de la fricción (Friction name): Se ingresa el nombre que tendrá la fuerza de fricción.

Adams ID: se ingresa el número de identificación que tendrá la fuerza de fricción con el que será reconocido por Adams[©].

Comentarios (Comments): se ingresa cualquier comentario por el usuario.

Nombre del par cinemático (Joint Name): Por default aparecerá el nombre del par cinemático que se seleccionó previamente, pero también esta opción permitirá cambiar el par cinemático donde aparece la fuerza de fricción. Para cambiar el par cinemático sobre el cual actuará la fuerza de fricción hay que hacer clic derecho sobre la caja de texto, se desplegará una caja de configuraciones, donde hay que dirigirse a Joint/Guesses, esta opción proporciona una lista donde aparecerán todos los pares cinemáticos dentro de nuestro modelo, basta con seleccionar el par cinemático donde queremos que actúe la fuerza de fricción, vea la figura E.5.

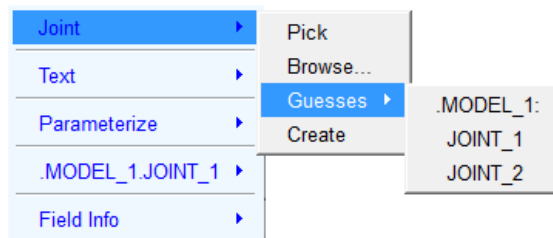


Figura E.5: Selección del par cinemático donde actuará la fuerza de fricción

Parámetros de la fricción para un par prismático:

Coefficiente de fricción estático [μ_s] (Mu Static): Se ingresa el valor de coeficiente de fricción estático en el par prismático. De acuerdo con Adams[©] la fuerza de fricción estática actúa para oponerse a la fuerza neta o torque a lo largo de los grados de libertad del par prismático. El rango del coeficiente de fricción estática es $\mu_s \geq 0$.

Coefficiente de fricción cinemático [μ_k] (Mu Dynamic): Se ingresa el coeficiente de fricción dinámico en el par prismático. La fuerza de fricción dinámica actúa de manera opuesta a la dirección de la velocidad del par prismático. El rango del coeficiente de fricción dinámica es $\mu_k \geq 0$.

Brazo de reacción (Reaction Arm): Se ingresa el valor del brazo de momento efectivo del torque de reacción del par sobre el eje axial del par prismático. Este valor es utilizado por Adams[©] para calcular la contribución del momento de torsión a la fuerza neta de fricción. El valor por defecto es de 1.0 pero el rango puede ser mayor a cero.

Traslape inicial (Initial Overlap): se ingresa el valor inicial del traslape que tendrá inicialmente entre los cuerpos que deslizan por medio de una par prismático o cilíndrico, vea la figura E.6.

Valor predeterminado es de 1000.0 y el rango es mayor a cero. $Traslape > 0$.

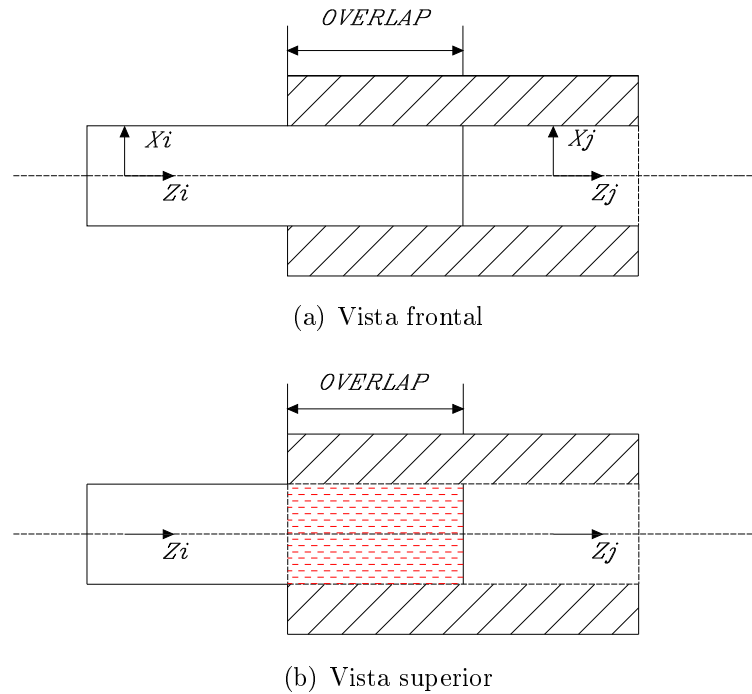


Figura E.6: Traslamiento, overlap, entre dos cuerpos en un par prismático

Parámetros de un par con un desplazamiento positivo (with positive joint displacement): Podemos encontrar las siguientes configuraciones del traslape, es decir, el área de contacto entre los materiales en contacto.

Traslape (Overlap will): De acuerdo con Adams[©] conforme la junta deslizante o par prismático se desliza, el traslape puede aumentar, disminuir o mantenerse constante, por lo tanto, se puede encontrar las siguientes configuraciones para el solapamiento.

- El traslape se mantendrá constante (remain constant): Esta opción indica que la cantidad de solapamiento no cambia cuando el par prismático se desliza.
- El traslape aumentará (increase): El traslape aumenta cuando el marcador i se mueve en dirección positiva a lo largo del marcador j , vea la figura E.7.
- El traslape disminuirá (decrease): Esta opción indica que el traslape irá disminuyendo conforme se desplaza la junta en dirección positiva. Cuando la distancia entre el marcador i y el marcador j disminuye, esto quiere decir que la corredera se desliza fuera de la junta, vea la figura E.8.

Factor de amortiguamiento $[C_m]$ (Damping factor): Es un factor que sirve de amortiguamiento para el cálculo de la fuerza de fricción. Para más información revisar el manual de pares cinemáticos idealizados [29]. El valor por defecto es de 1, pero puede tomar valores mayores a cero. $C_m > 0$.

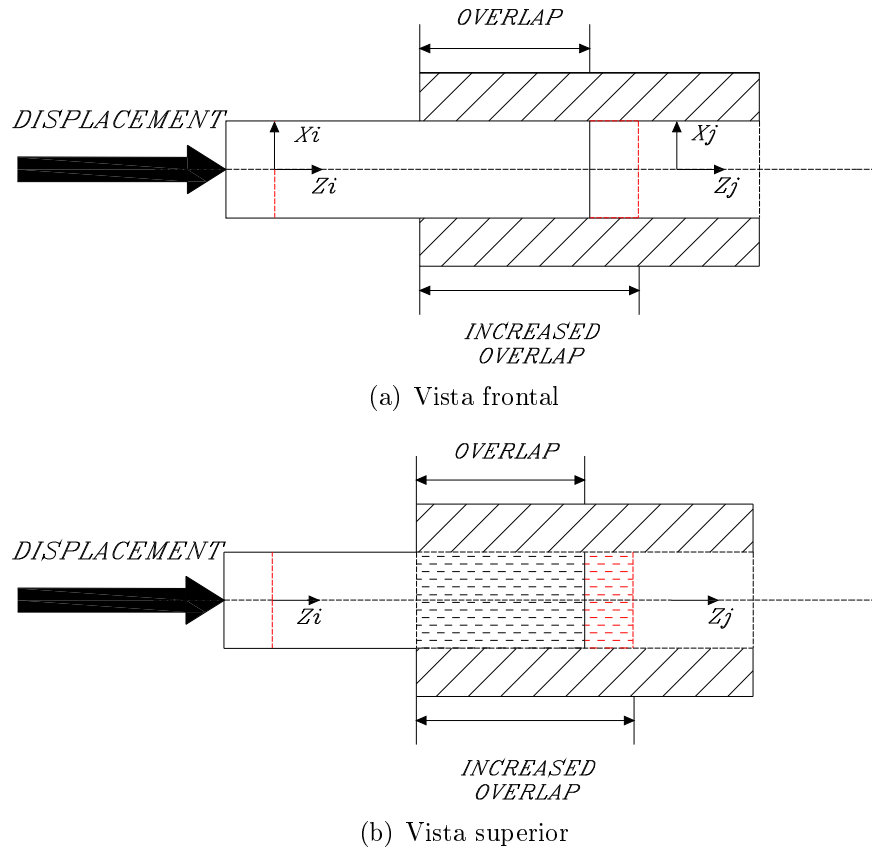


Figura E.7: Traslapo, overlap, entre dos cuerpos en un par prismático en aumento

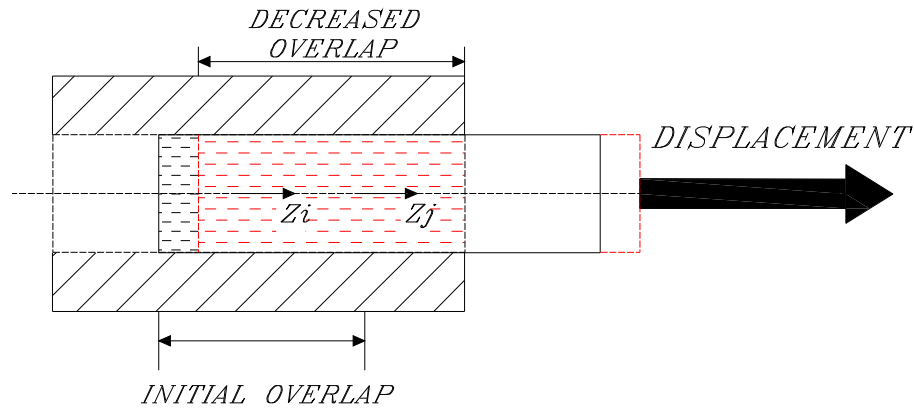
Velocidad de transición de la fricción estática (*Stiction transition velocity*): Define el umbral de velocidad absoluta de la junta para la transición de fricción dinámica a fricción estática. Cuando la velocidad relativa-absoluta del marcador de la junta está por debajo del valor, entonces la fuerza de fricción estática actúa para hacer que la junta no sufra desplazamiento, de lo contrario la fuerza de fricción dinámica actuará, generando el desplazamiento de la junta. El valor por defecto está dado por 0.1, pero el rango puede ser mayor a cero.

Deformación máxima debida a la fricción estática (*Max Stiction Deformation*): Ingresar el valor del desplazamiento máximo que puede ocurrir en un par prismático una vez que la fuerza de fricción en el par entre en el régimen de deformación. Esto quiere decir que existirá una pequeña deformación lo que generará que la magnitud de la fuerza de fricción estática sea diferente a la fuerza de fricción estática de la multiplicación del coeficiente de fricción estático y la fuerza normal.

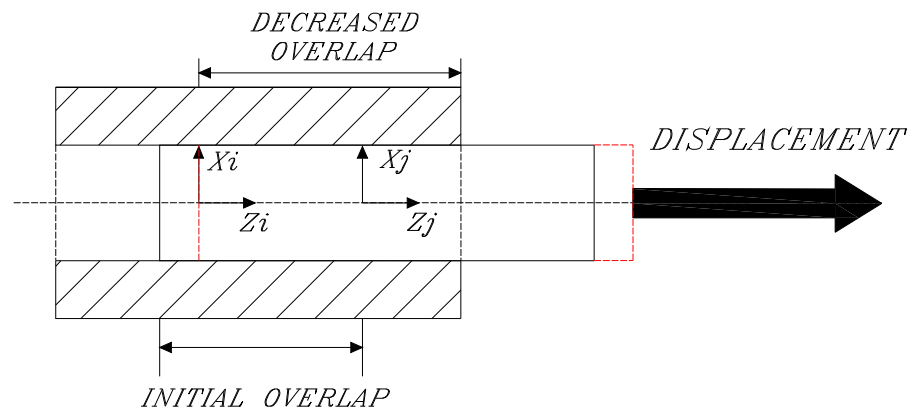
$$F_{stic} < M_s * F_n$$

El valor por defecto es de 0.01 unidades de longitud y su rango es mayor que cero.

Fuerza de fricción precargada (*Friction Force Preload*): Ingresar el valor de la fuerza de fricción de pre carga. Esto puede causarse por interferencia mecánica en el montaje de la junta. El valor por default es 0, pero el rango puede ser mayor o igual a cero.



(a) Vista frontal



(b) Vista superior

Figura E.8: Traslape, overlap, entre dos cuerpos en un par prismático decreciendo

Fuerza de fricción máxima (Max Friction Force): Ingresar el valor de la fuerza de fricción máxima que tendrá la junta. Este valor fija un límite superior en cuanto a la fuerza de fricción que se aplicará en la junta, independientemente del valor de la fuerza de fricción real calculado a partir de la carga aplicada y el coeficiente de fricción. Si el usuario deja el campo en blanco, Adams[©] tomará por defecto el valor de 1.0×10^{25} .

Efecto (Effect): Este campo describe que tipo de efecto generará la fuerza de fricción creada. Podemos encontrar las siguientes configuraciones.

- Fricción estática y dinámico, Stiction and Sliding.
- Únicamente la fricción estática, Stiction Only.
- Únicamente la fricción dinámica, Sliding Only.

Fuerza de entrada para la fricción: Son las reacciones que estarán involucradas directamente con la fricción creada en el par prismático.

- Precarga, Preload.

- Fuerza de reacción, Reaction force.
- Momento de flexión, Bending Moment.
- Momento torsional, Torsional Moment.

Fricción inactiva durante (Friction Inactive During): Hay que especificar si se calculan o no las fuerzas de fricción durante el equilibrio estático.