UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO & CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

Retos y juegos para pensar dentro del salón de clases

Manual para el docente

Mariana Carnalla Cortés
mariana@cimat.mx

1 Índice

Introducción

A nivel mundial se enfrenta el problema de la escasa aceptación de la matemática por parte de los estudiantes de diferentes niveles educativos. En este sentido, en el presente manual se propone una alternativa encaminada a la construcción de una solución viable y práctica que tiene como público objetivo a los estudiantes mexicanos de nivel secundaria.

La propuesta consiste en una selección de Actividades Matemáticas que incorporan el juego o bien un fuerte componente lúdico. El principal objetivo es propiciar afectos conducentes hacia una mejor aceptación de la matemática. Es decir, se pretende con este manual mostrar actividades de matemáticas con potencial para propiciar un impacto en el dominio afectivo y, en consecuencia, una mejor aceptación de la matemática por parte de los estudiantes de secundaria.

En la primera sección, se aborda la concepción de las matemáticas que será adoptada, se expone una guía general para la resolución de problemas y se revisa el modelo pedagógico en el cual se puede apoyar la discusión matemática dentro de un salón de clases. En la última parte de la primera sección, se da una propuesta de la estructura general para las actividades, tanto para el contenido como para el desarrollo.

En la segunda sección, se exponen actividades concretas, con los ingredientes suficientes para que cualquier docente interesado o comunicador de la ciencia pueda ajustar las actividades para adecuarlas y adaptarlas a su propio contexto.

A. ¿Qué son las matemáticas?

Dentro del contexto mexicano, empezamos a familiarizarnos con las matemáticas escolares desde los cuatro o cinco años, dedicamos al menos una hora diaria de nuestro horario escolar a esta materia. Para cuando llegamos a la secundaria, ya hemos dedicado más de 1000 horas al estudio de las matemáticas en clase. Pero ¿nuestra concepción de hacer matemáticas es la misma que la de las personas que se dedican profesionalmente a ello?

Dentro de mi ejercicio profesional como comunicadora de las matemáticas, he conocido muchas personas, que al escuchar la palabra matemáticas, empieza a hablar sobre su importancia, pero que, en algún momento de su vida, perdieron el interés y no sólo eso, que empezaron a desarrollar emociones, actitudes y creencias poco favorables. He oído testimonios que hablan de sentimientos que experimentan al enfrentar tareas matemáticas como: desagrado, miedo, nervios, poco interés, fracaso, entre otros. Además de lo difícil que resulta enfrentar tareas del área.

En este orden de ideas, surge de manera natural la pregunta ¿por qué es tan importante que aprendamos matemáticas? Una posible respuesta es que las matemáticas nos ayudan a desarrollar diferentes estructuras para pensar de formas diferentes, y como consecuencia, desarrollamos habilidades para: la resolución de problemas, el desarrollo de pensamiento crítico y creativo, y la toma de decisiones.

Por otra parte, en el plano emocional, al igual que en el entrenamiento de cualquier otra disciplina, se requiere persistencia y de trabajo arduo para ser cada vez mejores en la matemática. En este proceso, también es necesario experimentar la frustración, aunque suele verse como un sentimiento negativo cuando se realizan prácticas matemáticas, éste es de naturaleza ambivalente y su importancia radica en la forma en que se canaliza para el manejo de la situación en juego.

A continuación, me aproximo a una definición de hacer matemáticas, que no es la única y pueden o no estar de acuerdo con ella, pero por mi experiencia trabajando con público de todo tipo, ésta da una idea general del comportamiento de una persona que disfruta al hacer matemáticas:

La palabra matemáticas deriva de las palabras griegas *máthema* que significa **lo que hay que saber** y *mathein* que significa **saber pensar**. Por lo que una forma de interpretar su significado desde la etimología es **saber pensar sobre lo que hay que saber.** Y pensar, lo vamos a entender como lo que hacemos cuando no sabemos qué hacer.

Con esta concepción bastante amplia y sin meternos en los detalles filosóficos, podemos decir que hacer matemáticas es nuestra capacidad de resolver los problemas, de los cuales no conocemos un camino predeterminado para ello.

En armonía con lo anterior, lo que buscamos con este manual, es crear un espacio donde los estudiantes puedan realizar actividades de matemáticas, con una estructura estable que les permita desarrollar confianza y seguridad en su quehacer matemático, por lo que tendremos en cuenta para todas las actividades lo siguiente:

- Hacer matemáticas y resolver problemas, serán utilizados como sinónimos. Los problemas pueden ser retos, acertijos, desafíos, juegos, problemas reales, problemas hipotéticos, es decir, lo que sea que no conozcamos o sepamos cómo resolver, puede ser catalogado como un problema.
- El proceso de resolución de problemas es algo iterativo y dinámico.
- Es necesario proporcionar a los estudiantes autonomía y flexibilidad en las tareas, para que sean capaces de explorar sus propias ideas, encontrar sus propios caminos y soluciones.
- Hay que hacer lo posible por fomentar la creatividad y las diversas formas de pensamiento de nuestros estudiantes.
- Para poder resolver problemas cada vez más complejos, será importante que los estudiantes tengan un buen dominio y manejo de las herramientas (aritmética, álgebra, geometría, etc.) matemáticas, pues son de gran utilidad para el proceso de resolución de problemas. Y mientras más problemas resuelvan, su dominio y manejo irá mejorando, aprenderán al reflexionar sobre sus aciertos y errores.
- Tanto el dominio cognitivo como el afectivo son componentes clave para la resolución de problemas. Éstos están intrínsecamente relacionados y no es deseable un tratamiento independiente.

Puede ser abrumador pensar en todo esto, pero el secreto está en la práctica. Al igual que hacer matemáticas, probablemente no les va a salir a la primera, ni a la segunda, ni a la tercera, pero como instructores o guías, siguiendo su propio ritmo, encontrarán cómo lograr encender la chispa necesaria para involucrar a sus estudiantes, cada vez notarán que son mejores en el manejo del grupo, al crear discusiones sobre una idea matemática, cuando argumentan por qué puede o no funcionar determinada idea. También, de manera paulatina entrenarán su capacidad de respuesta a la contingencia, adaptando e improvisando a partir de las ideas de sus estudiantes y logrando mantener la motivación y frustración en los niveles adecuados. Es un largo camino, pero vale la pena cada paso. Al principio, será necesario invertir mucho tiempo preparando cada sesión, y con el tiempo, será más fácil. Así que, ¡no cunda el pánico!, lo primero será ver una idea muy general de cómo se puede resolver problemas.

B. Una guía general para resolver problemas

Hasta ahora, no existe una receta de cómo resolver problemas, pero existen o han existido personas que se han vuelto expertas en hacerlo, y no sólo eso, sino que han encontrado pautas o pasos que pueden ayudar con estrategias y heurísticas para lograr encontrar caminos posibles. Una de estas personas fue George Polya, un matemático húngaro que se preocupó por encontrar estas generalidades de cómo se resuelven problemas, y escribió el magnífico libro "Cómo resolverlo" (1945). Aquí se exponen muy brevemente los cuatro pasos que Polya sugiere seguir para enfrentar un problema:

Paso 1. Entender el problema.
No serán capaces de resolver algo que no han entendido. Estas son algunas preguntas que se pueden hacer para saber si han logrado entender de qué va el problema:

- ¿Qué nos piden encontrar o mostrar?
- ¿Podemos reformular el problema en nuestras propias palabras?
- ¿Podemos pensar en un dibujo o un diagrama que nos ayude a entender el problema?
- ¿Tenemos la información suficiente que nos permita encontrar la solución?
- ¿Sabemos qué quieren decir todas las palabras que usan para plantear el problema?
- ¿Necesitamos hacer otras preguntas para obtener la respuesta?

Paso 2. Crear un plan.
Es importante ver cómo, desde sus ideas es posible encontrar un camino para lograr llegar a una respuesta a su problema. Aquí algunas estrategias que pueden ser útiles, pueden usar más de una en un mismo plan:

- Prueba y error
- Hacer una lista
- Eliminar posibilidades
- Usa simetría
- Explorar todos los casos
- Plantear una ecuación
- Encontrar un patrón
- Hacer un dibujo
- Resolver un caso más simple
- Usar un modelo
- Hacerlo de atrás para delante
- Usar una fórmula

- Ser creativo
- Dar un contra ejemplo

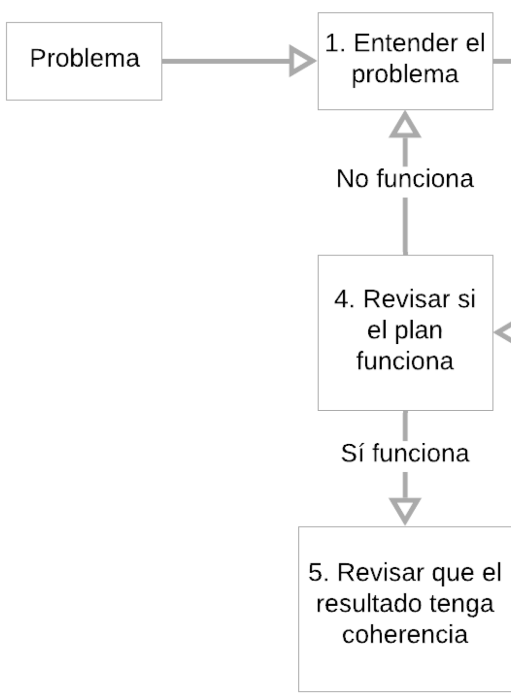
Paso 3. Llevar a cabo el plan.
Intenten seguir el plan en el que han pensado, para esto es importante lo siguiente:

- Tener paciencia, pues la mayoría de las veces, la respuesta no es inmediata.
- Ser persistente, que no les salga a la primera, no significa que el plan no está funcionando, o reajusten el plan.
- Si no funciona el plan, deséchalo y creen uno nuevo.

Paso 4. Revisar e interpretar el resultado.
Cuando tengan una posible respuesta, tienen que regresar a la pregunta original y ver si tiene sentido.

- Revisen el proceso que realizaron.
- Asegúrense de estar respondiendo la pregunta correcta.

Estos pasos, los pueden ver en el siguiente diagrama:



C. Prácticas para orquestar una buena discusión matemática

En esta sección, se va a revisar un modelo pedagógico que específica cinco prácticas claves que pueden aprender a usar para llevar a cabo las actividades que se proponen, el discurso propuesto en este manual está basado en estas prácticas. Este modelo, lo integraron Stein, Engle, Smith, y Hughes (2008) para lograr guiar a una clase diversa a una comprensión más profunda de ideas significativas de matemáticas.

C.1. Anticipación

Preparar el problema o reto que van a proponer a sus estudiantes, para esto, tienen que intentar imaginar las posibles maneras en que los estudiantes pueden aproximarse al problema. Elementos para considerar:

- Hacer el problema accesible para todos los estudiantes, es decir, que todos poseen las herramientas necesarias para poder resolverlo.
- Un nivel de dificultad adecuado.
- Suficientemente interesante para que quieran resolverlo.
- Hay que imaginar, cómo creen que los estudiantes interpretarán el problema y qué estrategias podrían desarrollar (correctas e incorrectas).
- Cómo estas estrategias pueden relacionarse a conceptos, ideas, representaciones, procedimientos o prácticas matemáticas que quieran que sus estudiantes aprendan.
- Cómo hacer que el pensamiento de los estudiantes sea visible. Es decir, qué preguntas pueden hacerle para saber qué está pensando.

C.2. Monitoreo

Durante la actividad, una pieza clave para el desarrollo de la discusión, es poner atención a cómo los estudiantes están entendiendo el problema y desarrollando estrategias para llegar a la solución de forma individual o en pequeños grupos (máximo 3). Esto se puede lograr, recorriendo el salón, mientras los estudiantes trabajan. Uno de los principales objetivos de realizar esto, es identificar cuáles estrategias tienen un potencial aprendizaje matemático de su interés. Es decir, poder vislumbrar, cuales estrategias quieren que se compartan con el resto de la clase y quienes podrán exponerlas.

Otro objetivo importante, es que se puede identificar si alguno de los estudiantes está perdiendo el interés o se está frustrando porque no ha logrado encontrar un camino por el cual empezar. Para esto, cada una de las actividades que aquí propongo, tienen preguntas de monitoreo y consejos de implementación. Que ayudarán a guiar a sus estudiantes a perseguir o desechar ideas que estén intentando. Esto será más fácil, entre mejor hayan desarrollado la fase de anticipación.

C.3. Selección

En esta fase, es importante llevar un registro de todas las estrategias que van emergiendo, así, cada vez que implementen un problema, estarán mejor preparados. Para esto, se recomienda que cada estudiante tenga una hoja de trabajo, donde vaya registrando su proceso.
El propósito de esta práctica consiste en elegir las estrategias que consideren pueden aportar más a la discusión que quieren que se desarrolle, entre mejor haya sido el monitoreo, mejor podrán hacer la selección. Es importante discutir tanto lo que no salió, como lo que salió. En esta fase, hay que cuidar que no siempre pasen los mismos estudiantes, y dar oportunidad a todos de exponer sus formas de pensar. No tiene que ser en la misma sesión, pero cuidar que todos se sientan escuchados y que su forma de pensar sea considerada. Pues recordemos que también estamos construyendo confianza en su quehacer matemático y es nuestra tarea motivarlos para que sigan intentando.

C.4. Secuenciación

Una vez que seleccionaron las estrategias que les gustaría que se compartieran en la sesión, hay que decidir en qué orden presentarlas. Pues es importante, que tengan el objetivo claro de cada sesión. En particular, las actividades que aquí se proponen, su único objetivo es que los estudiantes empiecen a trabajar de esta forma, por lo que la secuencia será de la solución menos a más sofisticada en cuanto a herramientas matemáticas o de la estrategia que la mayoría de la clase siguió a la menos común entre los estudiantes. En caso de que decidan implementar estas prácticas en sus clases, tendrán que pensar en lo que quieren lograr con un problema y discusión específica. Entre más veces implementen cada problema, la secuencia irá emergiendo naturalmente.

C.5. Conexión

Hay que lograr conectar cada una de las respuestas de los estudiantes, es decir, tienen que ser capaces de señalar cómo sus procesos son o no equivalentes y por qué. Para que se pueda discutir; cuáles caminos son más intuitivos; cómo lograr un mejor entendimiento y manejo de las herramientas matemáticas; cuáles ideas son más poderosas que otras en cuanto a optimización del proceso; cuándo se basaron en la misma idea, pero lo ejecutaron de forma diferente; cuándo se vio desde diferentes ángulos; y, cuáles estrategias funcionan mejor para cierto tipo de problemas, es decir, encontrar contrastes y similitudes de cada una de las estrategias y soluciones que se presentaron.

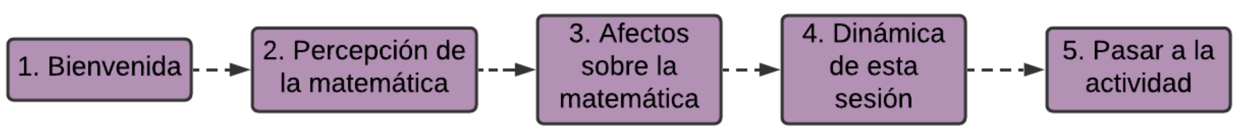
Ahora, que se ha revisado lo que se va a entender por hacer matemáticas, las pautas generales para resolver problemas y cómo pueden implementar prácticas para una mejor discusión matemática, están listos para revisar las actividades que se proponen para el salón de clases. Es muy importante, que primero ustedes intenten resolver cada uno de los problemas y reflexionen sobre el proceso por el que pasaron. Así, podrán entender mejor, por lo que pasarán sus estudiantes cuando les presenten el problema y puedan guiarlos para que encuentren sus propios caminos.

D. Propuesta estructura general de las actividades

Esta distribución en la estructura es una propuesta, que pueden modificar, los tiempos son aproximados, se tendrán que ir adaptando según el desarrollo de la actividad.

D.1. Introducción

Se recomienda ampliamente, que, dentro de la introducción de cada una de las actividades, se realice el siguiente discurso, para poder ir monitoreando como va evolucionando la concepción de las matemáticas en los estudiantes. El tiempo aproximado para exponer esta sección es de 10 minutos.



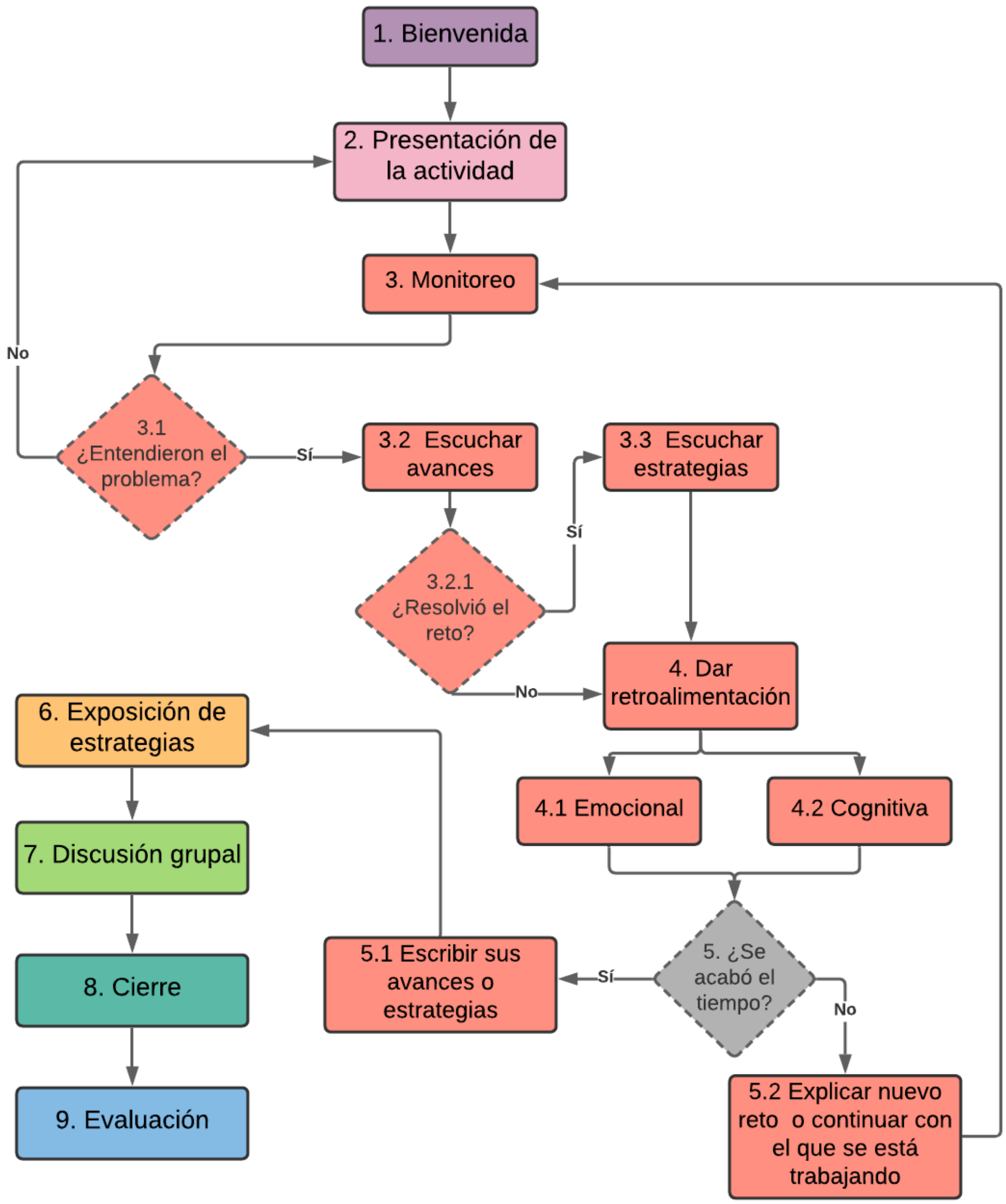
1. Bienvenida. Explicar a los estudiantes que esta experiencia probablemente será distinta a las que usualmente tienen dentro de sus clases de matemáticas. Lo ideal es que la participación sea voluntaria y pueda darse la oportunidad a los estudiantes de decidir si quieren o no participar. Una manera de manejarlo es proveer una opción donde se mantengan dentro del salón, pero que sea posible que no participen, como leer en algún espacio que no interfiera con la actividad.
2. Percepción de la matemática. Se empieza con una pregunta que muchas veces no nos hacemos, se pregunta a los estudiantes: ¿qué piensan cuando escuchan la palabra matemáticas? Aquí recuperamos las respuestas y de ser posible, llevamos un registro,

ya sea en el pizarrón o en alguna hoja. Inclusive, se podría pedir que cada uno escriba en una hoja su respuesta. Una vez, realizado el registro, se pasa al siguiente punto.

3. Afectos sobre la matemática. Ahora, se pregunta a los estudiantes: ¿qué sienten cuando escuchan la palabra matemáticas? De la misma forma, se recuperan las respuestas y se guarda un registro. Se pasa al siguiente punto.
4. Dinámica de la sesión. Esta sesión se trata de que se experimente de primera mano el quehacer matemático, a través de un juego, un reto o un problema que, quizás no sea fácil, pero el propósito es no rendirse e intentar hasta que logremos resolverlo. A veces será divertido, otras no tanto, pero hay que tener paciencia e intentar trabajar en equipo.
5. Una vez, que toda la clase esté enterado de lo que se espera de esta sesión, se pasa a la presentación de la actividad.

D.2. Desarrollo

Cada una de las actividades está pensada para llevarse a cabo en 90 minutos, pero cada uno podrá distribuir el tiempo y el contenido según sus intereses.



1. Bienvenida (10 minutos). Ver la sección de introducción sección D.1

2. Organizar grupos de trabajo. Presentar la actividad (5 minutos). Se expone a los estudiantes como funciona, como se describe en las secciones “Cómo se juega”.

3. Trabajo de los estudiantes (40 minutos) De los puntos 3 al 5, será la fase donde nuestro trabajo será realizar el monitoreo (C.2), para realizar esto, algunas preguntas que se pueden hacer son las propuestas en la sección de “Preguntas de monitoreo”

de cada actividad. De igual forma, hay que ir realizando las prácticas selección (C.3) y secuencia (C.4), para las futuras fases.

3.1. ¿Entendieron el problema? Una manera de hacerlo es explicar el reto un par de veces frente a toda la clase. Una vez hecho esto, se recomienda ir pasando con cada uno de los equipos y preguntar: ¿pueden explicar en qué consiste el reto? Si se logró que se entendiera el problema, se pasa al punto 3.2.

3.2. Escuchar avances.

3.2.1. ¿Resolvió el reto? Si ya resolvió el reto, pasamos al punto 3.3. En caso de que no, pasamos al punto 4.

3.3. Escuchar estrategias. Cuando ya se tiene una solución, invitar a los estudiantes a explicar su estrategia y cómo fue que la desarrollaron.

4. Dar retroalimentación. En cualquiera de los escenarios donde ya se tenga una posible respuesta o aún se este desarrollando, será importante escuchar que se ha trabajado hasta el momento y dar retroalimentación.

4.1. Emocional. Se monitorea los niveles de interés/motivación de continuar en la tarea y los niveles de frustración. Se deben tener en niveles adecuados para asegurarnos de que no se abandone el problema o el juego, para ello se sugiere realizar las preguntas de monitoreo de cada una de las actividades y a partir de las respuestas, escuchar y si es necesario, tomarse un tiempo para regular sus emociones, de tal forma que les permita continuar intentando.

4.2. Cognitivo. Se monitorea el avance, viendo cuales estrategias están desarrollando, en caso de que ya no encuentren como seguir avanzando, escuchar lo que han hecho para clarificar ideas, ayudar con preguntas que les puedan ayudar a pensar en algo que les permita ayudar o simplemente alentarlos a no darse por vencidos y darles seguridad sobre su quehacer matemático.

5. ¿Se acabó el tiempo?

5.1. Sí ya se acabó el tiempo, pedir a los estudiantes que escriban sus avances o estrategias para discutirlas en plenaria.

5.2. En caso de que no se haya acabado el tiempo, continuar trabajando en el problema que se tiene o presentarles un nuevo reto.

6. Exposición de estrategias. (15 minutos) Como se menciona al inicio de la fase de trabajo de los estudiantes, mediante el monitoreo, selección y secuenciación, podrán escoger cuales estudiantes y con cuales estrategias empezar la exposición. Pueden pedir voluntarios, y dentro de este conjunto, elegir a alguien que tenga la estrategia que queremos que se exponga. Si no hay voluntarios, pueden pedir a estudiantes específicos compartan su estrategia.

7. Discusión grupal (10 minutos). Aquí se van a analizar las estrategias que surgieron dentro del trabajo de los estudiantes. Nos podemos guiar por las preguntas propuestas en la sección de preguntas "Discusión grupal" de cada actividad. Realizar la

secuenciación a partir de cuales estrategias nos ayudan a empezar, cuales dan intuición, cuales son mejores para ciertos objetivos.

8. Cierre (5 minutos). Agradecer la participación de todos. Y resaltar que estuvieron haciendo matemáticas durante 80 minutos. Es un ejemplo de cómo las personas que se dedican a hacer matemáticas trabajan, les dan un problema nuevo, les explican lo que se busca y luego, cada uno hace uso de lo que sabe, para crear un plan y llevarlo a cabo. Nadie da una receta de cómo hacerlo, es mucha creatividad, paciencia y persistencia. Una cuestión de actitud y poner a prueba tu pensamiento.

9. Evaluación (5 minutos). Aquí, para las primeras implementaciones, es importante recabar información si la actividad funciona o no. Para esto, se propone volver a realizar las preguntas que se hicieron durante la introducción: ¿Qué piensas cuándo escuchas la palabra matemáticas? ¿Qué sientes cuándo escuchas la palabra matemáticas? Tomar un registro y empezar a comparar, si va cambiando y cómo va cambiando antes y después de una sesión de este tipo de actividades.

1. Resolución de problemas - Arreglo de 10 cartas

1.1. Para qué sirve

Hacer uso de una serie numérica compleja pero lógica para resolver un problema.

1.2. Lo que se necesita

Por cada participante

- Cartas de 8 cm x 6 cm aproximadamente (o las cartas de un palo de baraja inglesa). Planilla en la sección 1.12.1
- 1 plumón
- Lápiz y papel
- Tabla registro (opcional). Planilla en la sección 1.12.2

1.3. Preparación

- Impriman o fabriquen las cartas en cartulina o cartoncillo (1.12.1). También pueden conseguir suficientes mazos de barajas.
- *Opcional.* Pueden laminar las cartas para que duren más.
- Si consideran necesario impriman la tabla de registro (1.12.2), esta tabla ayudará a los estudiantes que tengan dificultad para encontrar una estrategia para resolver el problema.
- Dediquen tiempo a resolver las diferentes versiones del reto, para familiarizarte con las restricciones de cada versión y las posibles estrategias de solución.
- No vean las estrategias hasta que logren resolver el reto y hagan consciencia sobre lo que sienten durante el proceso de solución, eso les ayudará a entender por lo que pasarán los estudiantes durante la actividad.

1.4. Cómo se juega

Esta actividad tiene diversas versiones, a continuación, vamos a numerar algunas de ellas, y se espera que los estudiantes puedan proponer sus propios retos. Se sugiere organizar grupos de trabajo de tres integrantes, para que el monitoreo (C.2) sea más fácil de llevar a cabo.

1.4.1. Arreglo de 10 cartas

Tomen las 10 cartas enumeradas del 1 al 10 y el reto consiste en que encuentren una manera de acomodarlas como les describen a continuación (Stenmark, Thompson, y Cossey 1986).

Ordenen las cartas de manera que cuando las coloquen con los números hacia abajo y volteen cada carta desde arriba, una a una, ocurre lo siguiente:

a. La primera carta (la de arriba), se voltea y es el 1. Colocas esta carta sobre la mesa y te quedas con lo que queda del paquete.

b. La segunda carta, se coloca abajo del paquete de cartas que te quedan sin voltearse.
c. La tercera carta, se voltea o destapa con el número hacia arriba, y se coloca junto al 1 que ya está fuera del paquete, esta carta tiene que ser el 2.
d. La cuarta carta se mueve a la parte inferior del paquete sin voltearse.
e. La quinta carta se voltea con el número hacia arriba y se coloca a un lado de la carta con el dos. El número observado debe de ser el 3.
f. La sexta carta se mueve a la parte inferior del paquete sin voltearse.
g. La séptima carta se voltea con el número hacia arriba y se coloca a un lado de la carta con el número 3. El número observado debe de ser un 4.
h. La octava carta...

   …y así sucesivamente, hasta que todas las cartas estén sobre la mesa volteadas y los números vayan apareciendo en orden de menor a mayor.

Si el grado de complejidad del reto es muy elevado para el entrenamiento de los estudiantes, se recomienda la siguiente versión antes del problema con 10 cartas:

1.4.2. Arreglo de cartas

Tomen 3 cartas enumeradas del 1 al 3 y el reto consiste en que encuentren una manera de acomodarlas como les describen a continuación (Stenmark et al. 1986).

Ordenen las cartas de manera que cuando las coloquen con los números hacia abajo y volteen cada carta desde arriba, una a una, ocurre lo siguiente:

a. La primera carta (la de arriba), se voltea y es el 1. Colocas esta carta sobre la mesa y te quedas con lo que queda del paquete.
b. La segunda carta, se coloca abajo del paquete de cartas que te quedan sin voltearse.
c. La tercera carta, se voltea o destapa con el número hacia arriba, y se coloca junto al 1 que ya está fuera del paquete, esta carta tiene que ser el 2.
d. Y la única carta que te queda en la mano tiene que ser el tres, y se coloca sobre la mesa.

Ahora pida a los estudiantes que repitan ese proceso, una vez que lo logren, se irá incrementando de una carta en una carta hasta que logren resolver el problema con 10 cartas. Es decir, después se resuelve para cuatro cartas, luego para cinco y así sucesivamente hasta que se logre resolver para 10,

1.4.3. Invertido, arreglo de 10 cartas

Es la misma idea que el reto anterior, sólo que ahora, en lugar de que vayan saliendo de menor a mayor, se quiere que salgan de mayor a menor.

Tomen las 10 cartas enumeradas del 1 al 10 y el reto consiste en que encuentren una manera de acomodarlas como te describen a continuación.

Ordenen las cartas de manera que cuando las coloquen con los números hacia abajo y volteen cada carta desde arriba, una a una, ocurre lo siguiente:

a. La primera carta (la de arriba), se voltea y es el 10. Colocas esta carta sobre la mesa y te quedas con lo que queda del paquete.
b. La segunda carta, se coloca abajo del paquete de cartas que te quedan sin voltearse.
c. La tercera carta, se voltea o destapa con el número hacia arriba, y se coloca junto al 10 que ya está fuera del paquete, esta carta tiene que ser el 9.
d. La cuarta carta se mueve a la parte inferior del paquete sin voltearse.
e. La quinta carta se voltea con el número hacia arriba y se coloca a un lado de la carta con el 9. El número observado debe de ser el 8.
f. La sexta carta se mueve a la parte inferior del paquete sin voltearse.
g. La séptima carta se voltea con el número hacia arriba y se coloca a un lado de la carta con el número 8. El número observado debe de ser un 7.
h. La octava carta...

   …y así sucesivamente, hasta que todas las cartas estén sobre la mesa volteadas y los números vayan apareciendo en orden de mayor a menor.

1.4.4. Arreglo de 9 cartas

Es la misma idea que el primer reto, sólo que ahora, en lugar de que sean 10 tarjetas, son 9.

Tomen las 9 cartas enumeradas del 1 al 9 y el reto consiste en que encuentren una manera de acomodarlas como les describen a continuación.

Ordenen las cartas de manera que cuando las coloquen con los números hacia abajo y volteen cada carta desde arriba, una a una, ocurre lo siguiente:

a. La primera carta (la de arriba), se voltea y es el 1. Se coloca esta carta sobre la mesa y se quedan con lo que queda del paquete.
b. La segunda carta, se coloca abajo del paquete de cartas que quedan sin voltearse.
c. La tercera carta, se voltea o destapa con el número hacia arriba, y se coloca junto al 1 que ya está fuera del paquete, esta carta tiene que ser el 2.
d. La cuarta carta se mueve a la parte inferior del paquete sin voltearse.
e. La quinta carta se voltea con el número hacia arriba y se coloca a un lado de la carta con el 2. El número observado debe de ser el 3.
f. La sexta carta se mueve a la parte inferior del paquete sin voltearse.
g. La séptima carta se voltea con el número hacia arriba y se coloca a un lado de la tarjeta con el número 3. El número observado debe de ser un 4.

h. La octava carta...

…y así sucesivamente, hasta que todas las cartas estén sobre la mesa volteadas y los números vayan apareciendo en orden de menor a mayor.

1.4.5. Saltos dobles, arreglo de 10 cartas

Es la misma idea que el primer reto, sólo que ahora, en lugar de voltear una carta y mover una a la parte inferior; volteas una carta y mueves una carta a la parte inferior y luego otra a la parte inferior.

Tomen las 10 cartas enumeradas del 1 al 10 y el reto consiste en que encuentren una manera de acomodarlas como se describe a continuación.

Ordena las cartas de manera que cuando las coloquen con los números hacia abajo y volteen cada carta desde arriba, una a una, ocurre lo siguiente:

a. La primera tarjeta (la de arriba), se voltea y es el 1. Colocas esta carta sobre la mesa y se quedan con lo que queda del paquete.
b. La segunda carta, se coloca abajo del paquete de cartas que te quedan sin voltearse.
c. La tercera carta, se coloca abajo del paquete de cartas que te quedan sin voltearse.
d. La cuarta carta, se voltea o destapa con el número hacia arriba, y se coloca junto al 1 que ya está fuera del paquete, esta carta tiene que ser el 2.
e. La quinta carta se mueve a la parte inferior del paquete sin voltearse.
f. La sexta carta se mueve a la parte inferior del paquete sin voltearse
g. La séptima carta se voltea con el número hacia arriba y se coloca a un lado de la carta con el 2. El número observado debe de ser el 3.
h. La octava carta se mueve a la parte inferior del paquete sin voltearse.
i. La novena carta se mueve a la parte inferior del paquete sin voltearse.
j. La décima carta se voltea con el número hacia arriba y se coloca a un lado de la carta con el número 3. El número observado debe de ser un 4.
k. La octava carta...

…y así sucesivamente, hasta que todas las cartas estén sobre la mesa volteadas y los números vayan apareciendo en orden de menor a mayor.

1.4.6. Versión 5. Generalización

Ahora, cuando se resuelven problemas o retos en matemáticas, después de resolver varios ejemplos, nos gusta saber si existe una idea que nos ayude a resolver todos los retos que son de este tipo o se parecen mucho.

La pregunta es:

Si se proporcionan cualquier número de cartas (n) cartas, ¿es siempre posible arreglarlas de tal forma que se pueda realizar la versión 1 del reto?

1.5. Preguntas

1.5.1. Monitoreo

- ¿Puedes explicar en qué consiste el reto?
- ¿Cómo te sientes con respecto al reto?
- ¿Qué has intentado?
- ¿Se te ocurre alguna forma para recordar lo que has intentado?
- ¿Qué crees que deberías hacer para que te salga la carta que quieres en lugar de la que te salió?
- ¿Qué te salió? Y, ¿qué quieres que te salga?
- Agrega otras preguntas que consideres útiles en esta etapa:
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____

1.5.2. Discusión grupal

- ¿Cómo resolvieron el reto 1? Selección, secuenciación y exposición de soluciones.
- ¿Cómo se sintieron en el proceso?
- ¿Fue desafiante para ustedes?
- ¿Encontraron algún patrón para resolver los retos?
- ¿Creen que se pueda hacer con cualquier número de tarjetas?
- Discutir una manera que pueda resolver todos los retos de este tipo.
- ¿Qué opinan de la actividad?
- Agrega otras preguntas que consideres útiles en esta etapa:
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____

1.6. Estrategias de solución

Esta actividad no tiene una única estrategia para resolverse, a continuación, se exponen 4 estrategias para resolver el reto uno, y de forma análoga funcionan para los demás retos. Si encuentran otra estrategia, por favor, compartan al correo: mariana@cimat.mx

1.6.1. Estrategia 1

- Tomar cualquier arreglo inicial, por ejemplo:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

- Realizar la serie de pasos hasta que salga un error, saldrá el 3 después del 1, entonces intercambiar lo que salió (3), por lo que se quiere que salga (2).

1 3 2 4 5 6 7 8 9 10 (2↔3)

- Realizar la serie de pasos hasta que salga un error, saldrá el 5 después del 2, intercambiar lo que salió (5) por lo que se quiere que salga (3).

1 5 2 4 3 6 7 8 9 10 (3↔5)

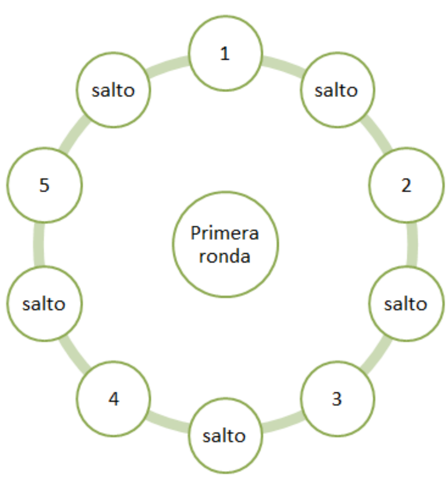
- Y así sucesivamente hasta que no haya más errores.

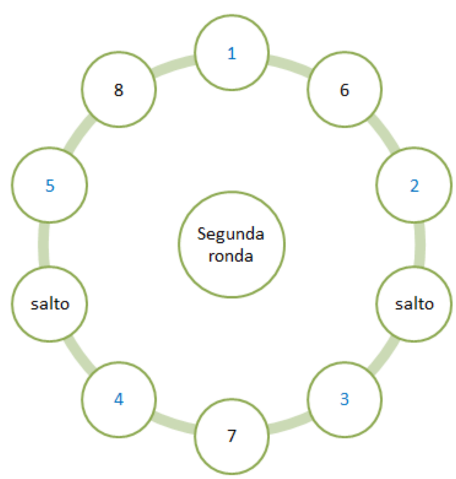
1 5 2 7 3 6 4 8 9 10 (4↔7)

1 9 2 7 3 6 4 8 5 10 (5↔9) .

1.6.2. Estrategia 2

- Coloca las cartas en un círculo con 10 espacios.
- Salta un espacio cada vez.
- Continúa colocando una carta, dejando un espacio vacío y colocándola en el siguiente espacio vacío hasta que el círculo esté completo.





1.6.3. Estrategia 3

- Genera una fila con 10 espacios. Coloca una carta en un espacio sí y uno no.

- ➢ Después de la quinta carta colocada, solo observa los espacios sobrantes y vuelve a hacer lo mismo, colocando una carta en un espacio sí y en otra no.
- ➢ Continúa hasta que todos los espacios queden llenos.

A	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___
B	1	___	2	___	3	___	4	___	5	___
C	X	6	X	___	X	7	X	___	X	8

1.6.4. Estrategia 4

- ➢ Piensa el problema de atrás para delante
- ➢ Arregla las cartas como quieres que te salgan e invierte los pasos
- ➢ Ve tomando las cartas y haciendo los pasos a la inversa.

1.7. Consejos para la implementación

- Hay que ser muy claros con las palabras que se usan para exponer el reto. Se recomienda pedir la atención de todos los estudiantes y realizar lo que se pide al menos dos veces.
- Para saber que alguien no entendió el reto, sólo falta ver quien no ha tocado las cartas, se recomienda acercarse a esos participantes y asegurarnos que entiendan en qué consiste la actividad.
- Si los participantes se observan perplejos, una manera de ayudar a empezar es con la hoja de registro o intentar con menos cartas.
- Es recomendable pedir que lleven un registro, para saber dónde están experimentando dificultades.
- Es importante observar a los participantes y detectar si su nivel de frustración está en un alto nivel. En ese caso, es recomendable ofrecer ayuda o pedir que expliquen lo que han hecho. A partir de lo que digan, dar una pista para que continúen su estrategia o pedir que quizás quieran reconsiderar su propuesta.
- Es importante recordar que no es una competencia.

1.8. Contenido matemático

Razonamiento lógico. Resolución de problemas. Introducción a los algoritmos.

1.9. Si quieres entrenar más:

Otros acertijos, donde los conocimientos previos son mínimos y tienen que ver con sólo el razonamiento lógico están:

- Acertijo del lobo, la cabra y la col
- Misioneros y caníbales
- Acertijo del “puente y la antorcha” o “el tren de media noche”
- Problema de las 12 monedas
- Sudokus

1.10. Soluciones

Hay que recordar que lo menos importante en estas actividades es la solución, lo que importa es el proceso para llegar a ella.

Solución 1.4.1 Arreglo de 10 cartas.

$$1, 6, 2, 10, 3, 7, 4, 9, 5, 8$$

Solución 1.4.3 Invertido, arreglo de 10 cartas.

$$10, 5, 9, 1, 8, 4, 7, 2, 6, 3$$

Solución 1.4.4 Arreglo de 9 cartas.

$$1, 9, 2, 6, 3, 8, 4, 7, 5$$

Solución 1.4.5 Saltos dobles.

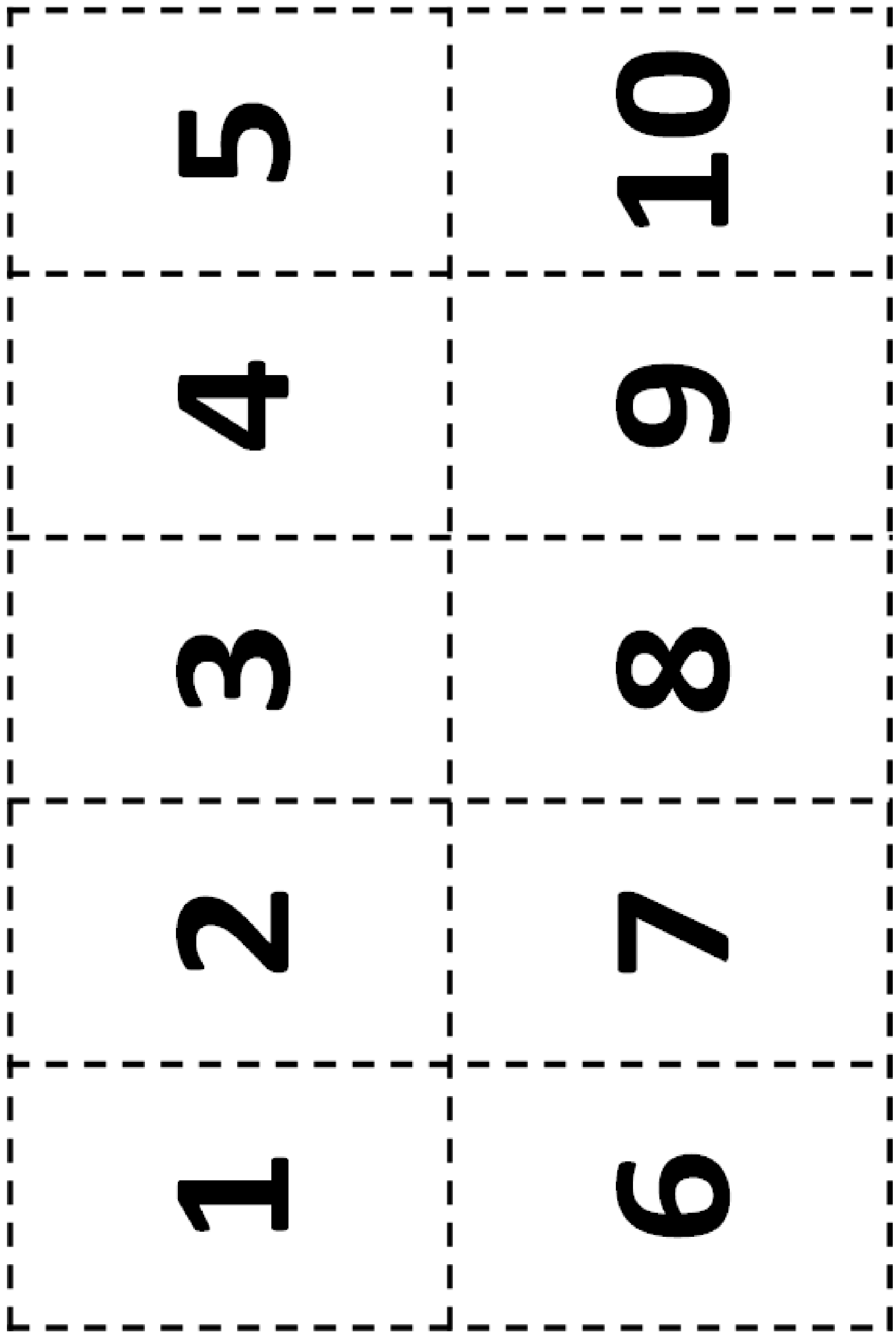
$$1, 10, 8, 2, 5, 7, 3, 9, 6, 4$$

Solución 1.4.6 Generalización.

$$Sí, hacer\ el\ procedimiento\ al\ inverso.$$

1.11. Imprimibles

1.11.1. Arreglo 10 cartas



1.11.2. Hoja de registro – Arreglo de 10 cartas

Número de Arreglo	Arreglo de cartas									
I										
II										
III										
IIII										
V										
VI										
VII										
VIII										
VIIII										
X										
XI										
XII										
XIII										
XIIII										

2. Geometría - Rectángulos

2.1. Para qué sirve

Desarrollar y entrenar habilidades de pensamiento espacial, a través de la resolución de rompecabezas geométricos, con estrategias que requieren de reconocimiento de figuras; razonamiento secuencial; y, movimientos sobre el plano: traslación, rotación y reflexión. Además de fortalecer la confianza matemática y el manejo de la frustración a través de retos con nivel de dificultad regulada y creciente.

2.2. Lo que se necesita

Por cada participante

- Un kit de cuadrados o dulces cuadrados.
- Una hoja cuadriculada
- Un lápiz
- Un kit de piezas (2.12.1)
- Un kit de retos (2.12.2)

2.3. Preparación

- Imprime una planilla de cuadrados, piezas y retos para cada participante.
- *Opcional.* Puedes laminar las piezas y retos para que duren más.
- Dedica tiempo a resolver la pregunta de la primera parte de la actividad, que consiste en buscar todos los pentaminós distintos que existen, para familiarizarte con el problema y buscar posibles estrategias que tus estudiantes vayan a encontrar.
- Dedica tiempo para resolver al menos los primeros 20 retos de la segunda parte de la actividad, de igual forma, para poder prever a lo que se enfrentaran tus estudiantes, y poder hacer la parte de anticipación (C.1) lo mejor posible.
- No veas las soluciones hasta que logres resolverlo y haz consciencia sobre lo que sientes durante el proceso de solución, eso te ayudará a entender por lo que pasarán los estudiantes durante la actividad.

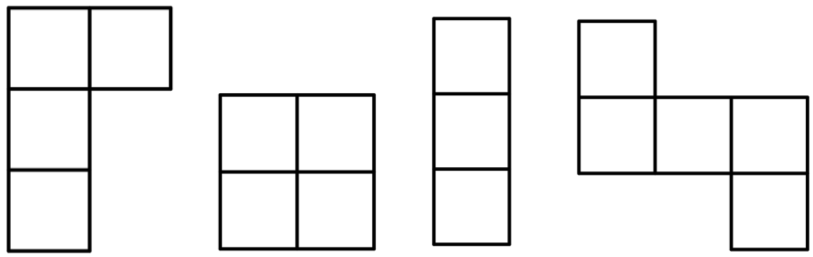
2.4. Cómo se juega

Esta actividad consta de dos partes, en la primera se presentan las figuras con las que se va a trabajar durante la sesión. En la segunda parte, con 9 de las figuras vistas en la primera parte, se forma un rompecabezas, cuyo objetivo es resolver retos. Se sugiere organizar grupos de trabajo de tres integrantes, para que el monitoreo (C.2) sea más fácil de llevar a cabo.
A continuación, se explica en que consiste cada una de las partes:

2.4.1. Poliminós

Definición de polisminó

Los poliminós son figuras que están formadas por la unión de cuadrados del mismo tamaño. Los cuadrados deben de unirse por un lado completo, es decir, no pueden unirse por un vértice o por pedazos de lado. Los siguientes son ejemplos de poliminós:



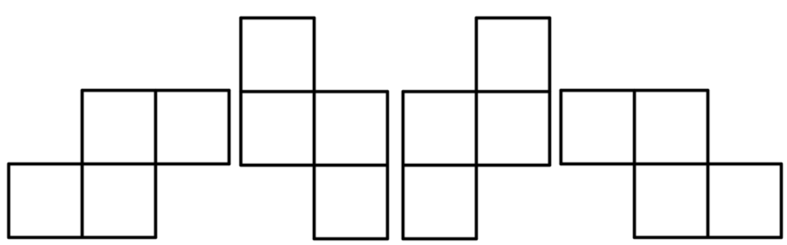
Los siguientes **no** son poliminós:

Familias de poliminós

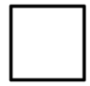
Los poliminós se pueden clasificar por el número de cuadrados que los conforman. Para darle su nombre, ponemos el prefijo griego que indica la cantidad de cuadrados que lo conforman y agregamos el sufijo –minó.

Número de cuadrados	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prefijo	mono	do	tri	tetra	penta	hexa	septa	octa	nona

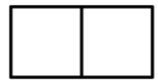
Cada poliminó, será considerado el mismo bajo movimientos de rotación, reflexión y traslación. Es decir que, si los recortamos y podemos encontrar una manera que quede exactamente uno sobre el otro, serán considerados iguales. Por ejemplo, los siguientes poliminós, serán considerados el mismo:



- ¿Cuántos monominós diferentes existen?
  R. Sólo uno.

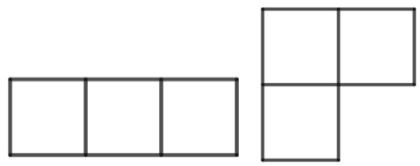


- ¿Cuántos dominós diferentes existen?



  R. Sólo uno.

- ¿Cuántos triminós?
  R. Dos.



El problema
Una vez que los estudiantes han entendido como se construyen los poliminós, se le reparte a cada estudiante un set de cuadrados y una hoja cuadriculada.

Las reglas son:
- Para unir dos cuadrados, tiene que ser uniéndo un lado completo.
- Si tienes dos poliminós, que puedes recortar y poner perfectamente uno sobre otro, son considerados equivalentes, para fines prácticos, el mismo.

El problema es el siguiente:
- ¿Cuántos y cuáles tetraminós distintos existen?

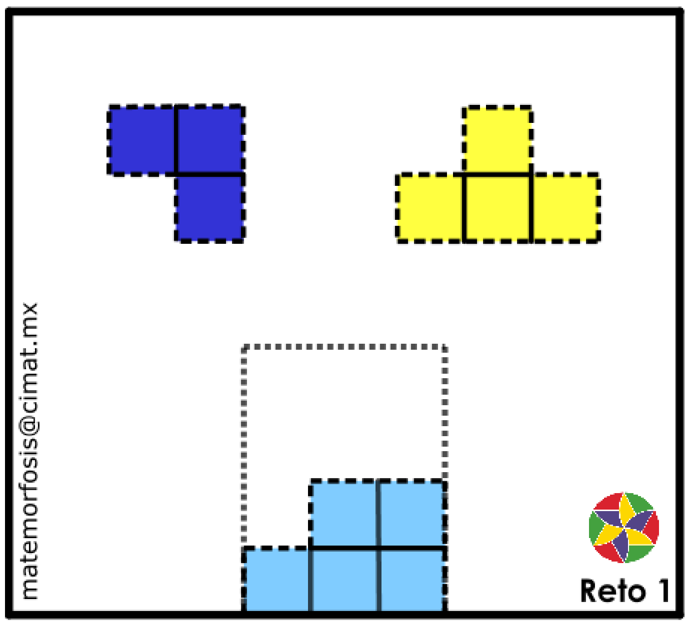
- ¿Cuántos y cuáles pentáminos distintos existen?

Se pide a los estudiantes que dibujen su solución en la hoja cuadriculada.

Después de revisar las soluciones, una forma pasar de la sección uno a la dos de la actividad es con el siguiente vídeo:
https://www.youtube.com/watch?v=LCAXPod6FCM&t=14s

2.4.2. Rompecabezas rectángulos
Cada participante tiene 9 piezas y un set de retos numerados. Se recomienda empezar en el reto 1 e ir avanzando en orden, pues están ordenados más o menos por grado de complejidad.

- Selecciona un reto. Cada reto tiene un rectángulo en la parte central inferior de la tarjeta.
- Dentro del rectángulo, hay unas piezas colocadas de cierta forma. Toma las piezas de tu paquete y haz una copia tal y como se muestra en el desafío. Estas piezas una vez colocadas, no se pueden volver a mover.
- Fuera del rectángulo hay otras piezas, selecciónalas de tu paquete de piezas, Estas piezas serán las que vas a manipular para formar un rectángulo con las piezas fijas. Recuerda que los lados tienen que ser rectos, no puedes dejar hoyos y tienes que usar TODAS las piezas que indica cada tarjeta.



Y así sucesivamente, con cada uno de los retos.

2.5. Preguntas

2.5.1. Monitoreo

- ¿Me puedes explicar cuál es el reto?
- ¿Cómo te sientes?
- ¿Qué has intentado?
- ¿Cuáles piezas crees que son más difíciles de acomodar?
- ¿Cuáles piezas crees que son más fáciles de acomodar?
- Agrega otras preguntas que consideres útiles en esta etapa:
- ____
- ____
- ____
- ____

- ____

2.5.2. Discusión grupal

- ¿Cómo se sintieron en el proceso?
- ¿Fue desafiante para ustedes?
- ¿Encontraron algún patrón para resolver los retos?
- Discutir una manera que pueda resolver todos los retos de este tipo.
- ¿Qué les pareció la actividad?
- Agrega otras preguntas que consideres útiles en esta etapa:
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____

2.6. Estrategias de solución

2.6.1. Parte 1

Hasta ahora no se ha encontrado un patrón que te diga cuantos poliminós distintos se pueden construir con un número de cuadrados dado. Pero una posible estrategia que se pueden seguir para encontrar para *n's* pequeños como 4 y 5, es la siguiente:

Usar la solución del caso anterior como base, de tal forma que vayas pegando un cuadrado en todas las posibles posiciones para formar los poliminós que buscas.

Por ejemplo, para encontrar tetraminós, puedes usar los dos triminós de base, y agregando uno más en todas las posibles posiciones, tendrás una producción de tetraminós, y el reto se transformará en saber cuáles son iguales y cuáles distintos.

Si encuentran otra estrategia, por favor, compártela a: mariana@cimat.mx

2.6.2. Parte 2

No hay una estrategia que te ayude a resolver todos los retos, pero se puede considerar lo siguiente:

- Nos tenemos que asegurar que entendemos lo que es un rectángulo
- Revisar que hemos colocado las piezas fijas tal y como se muestra en el reto.
- Primero intentar colocar las piezas que son más complejas o irregulares, y luego rellenar con las menos complejas.

Si encuentran otra estrategia, por favor, compártela a: mariana@cimat.mx

2.7. Consejos para la implementación

- Hay que ser muy claros con las palabras que usamos para exponer el reto. Se recomienda pedir la atención de todos los estudiantes y realizar uno o dos retos juntos.
- Para saber que alguien no entendió el reto, sólo falta ver quien no ha tocado las piezas, se recomienda acercarse a esos participantes y asegurarnos que entiendan en que consiste la actividad.
- Si los participantes se observan perplejos, una manera de ayudar es colocando una pieza.
- Es importante pedir que, si su nivel de frustración está llegando a niveles altos, que pidan ayuda y poder escuchar que han hecho. A partir de lo que digan, dar una pista para que continúen su estrategia o sugerir que reconsideren su propuesta.
- Es importante recordar que no es una competencia.
- En el quehacer matemático, un punto clave es desarrollar confianza en sí mismo sobre su capacidad para hacer matemáticas, por lo que este rompecabezas, al tener diferentes niveles de complejidad, ayuda a que, con los primeros retos, vaya construyéndose esta confianza.

2.8. Contenido matemático

Poliminós. Movimientos sobre el plano. Pensamiento espacial.

2.9. Si quieres entrenar más

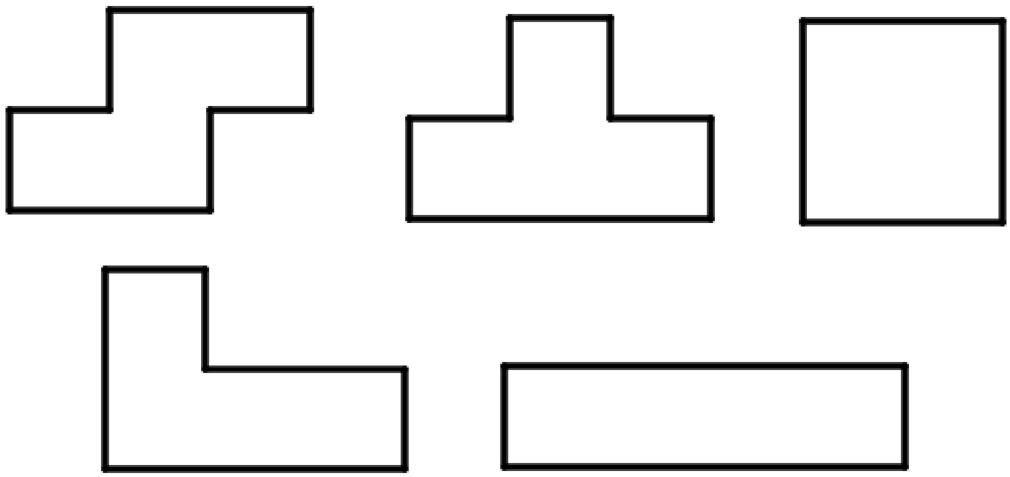
Existen varios rompecabezas cuya base son las piezas en forma de poliminós, uno de los más famosos de la historia es el "tetris" que se llama de esa forma, pues sólo se usan tetraminós en este juego. Si te interesa incrementar el nivel, un camino es pasar a tercera dimensión con policubos, donde uno de los rompecabezas famosos es el "Cubo Soma".

2.10. Soluciones

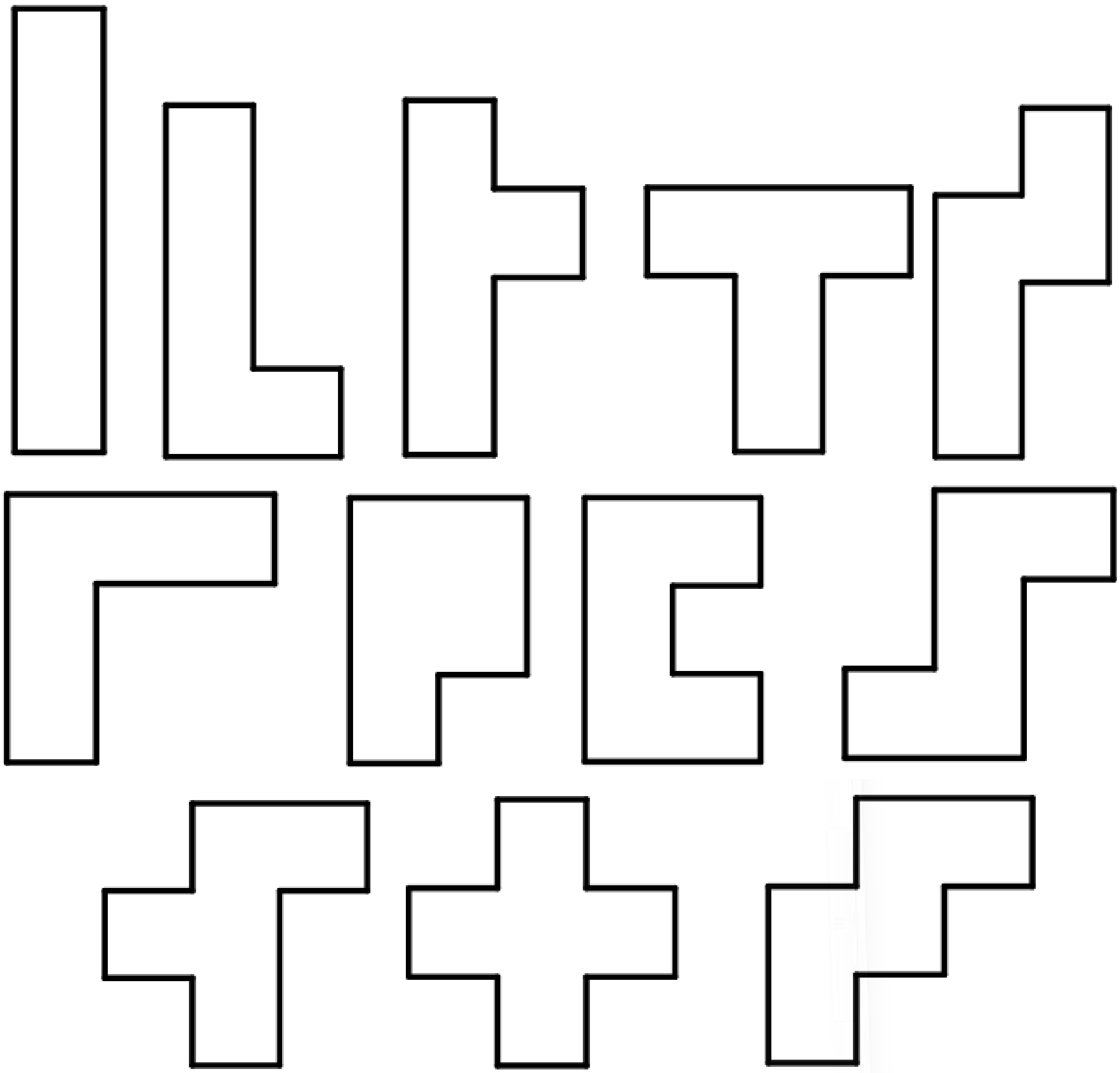
Es importante no dar respuestas, parte del entrenamiento que se busca en esta actividad es entrenar la paciencia y la persistencia de cada uno de los estudiantes.

2.10.1. Parte 1

Tetraminós:

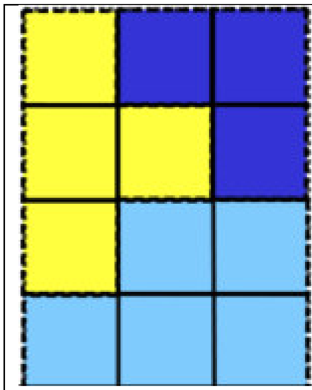
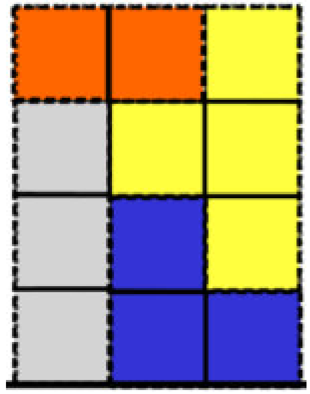
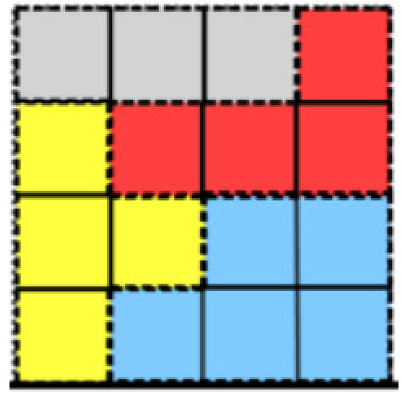
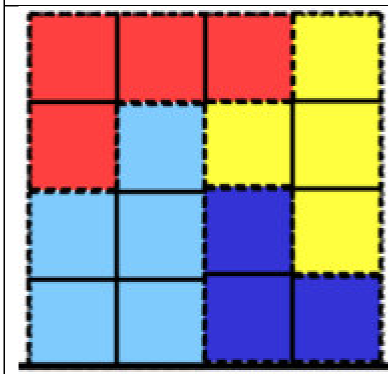
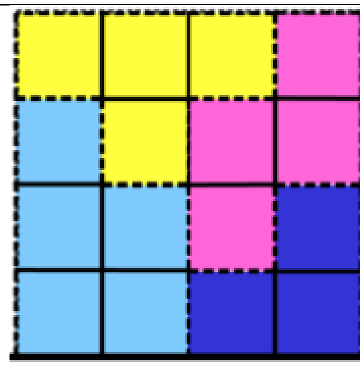
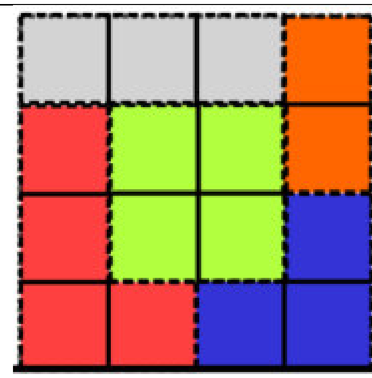
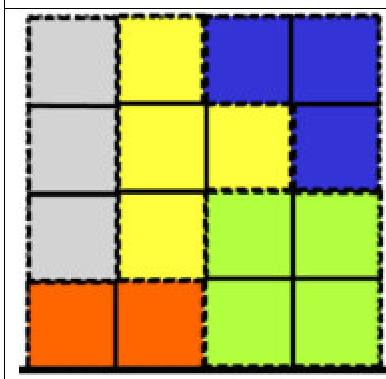
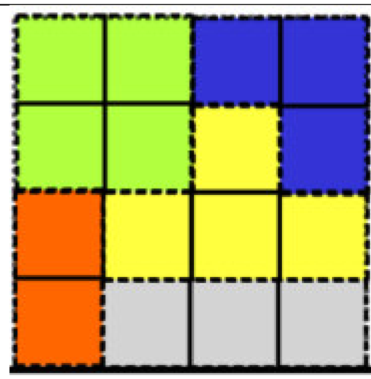
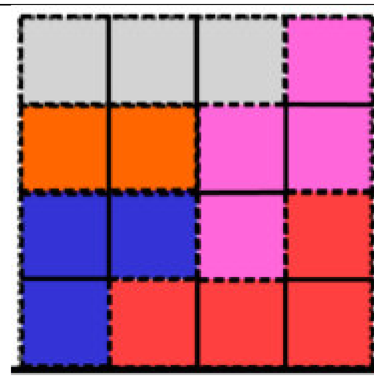
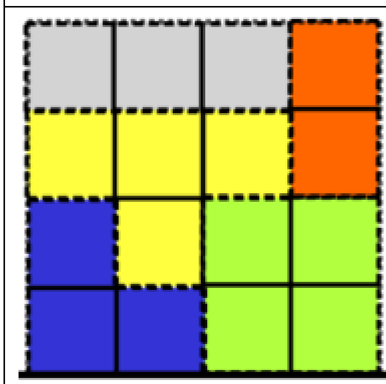
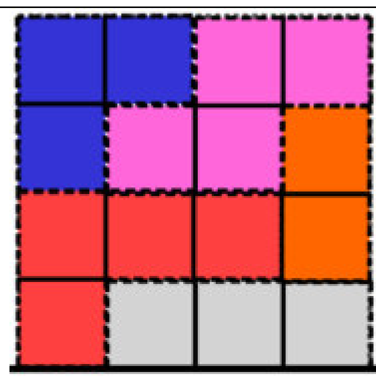
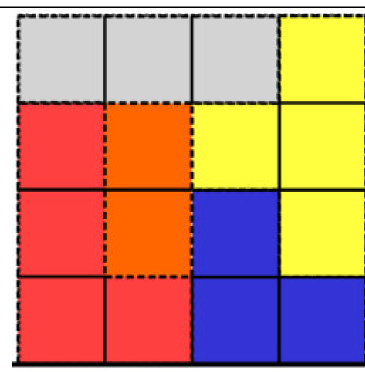


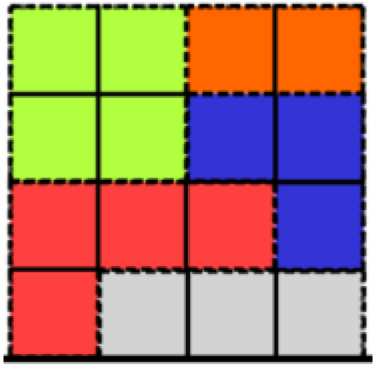
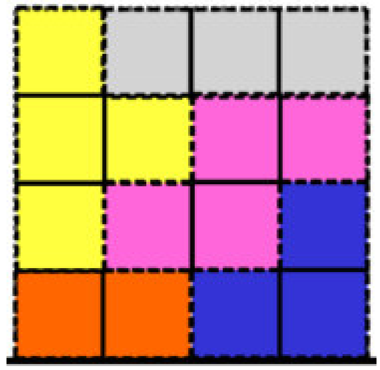
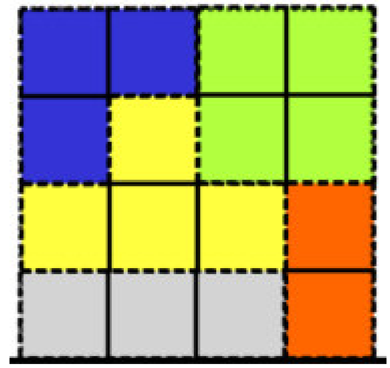
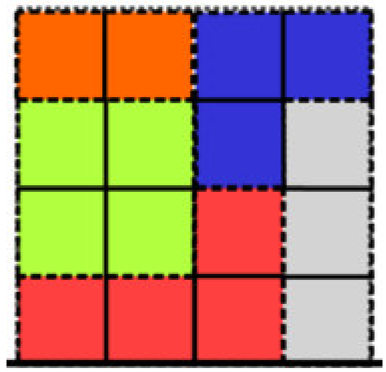
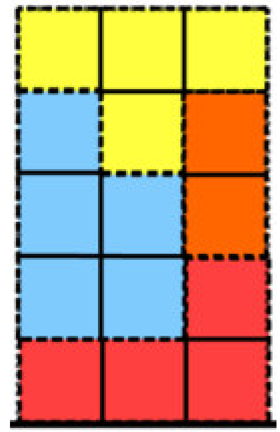
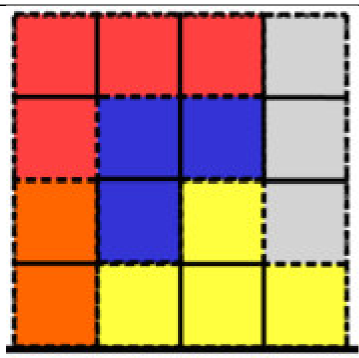
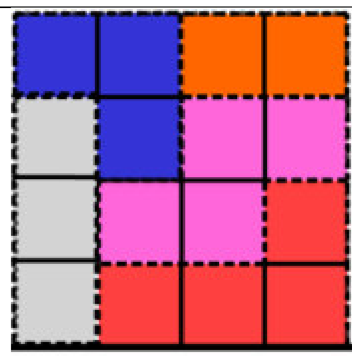
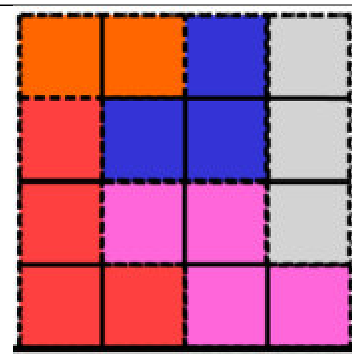
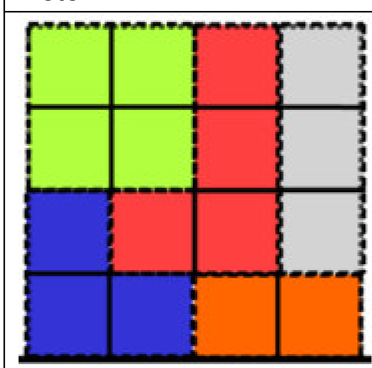
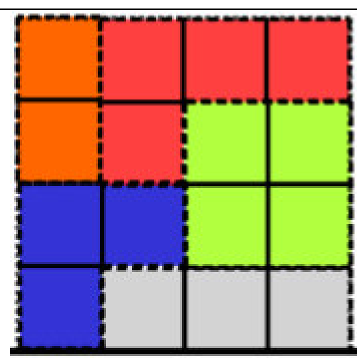
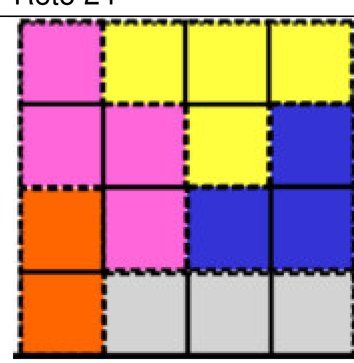
Pentominós:

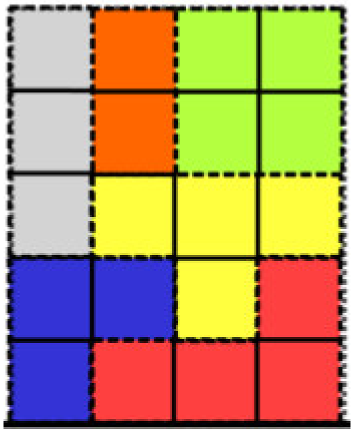
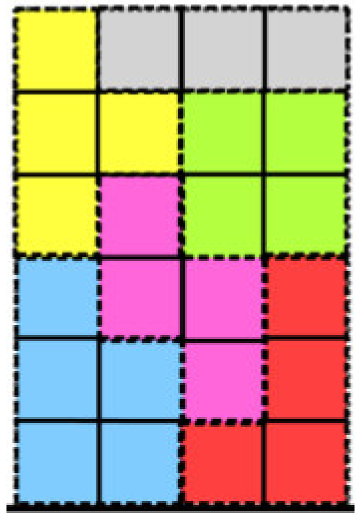
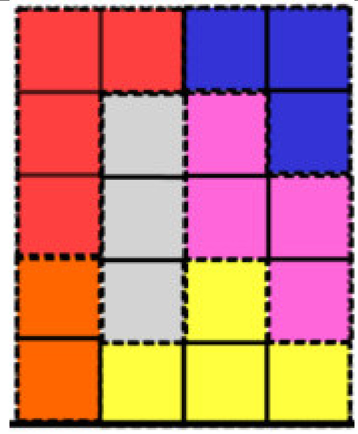
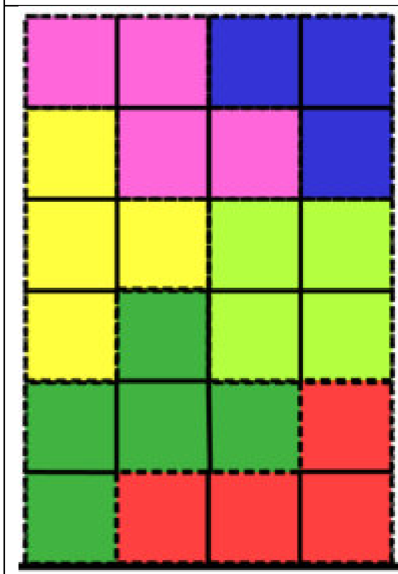
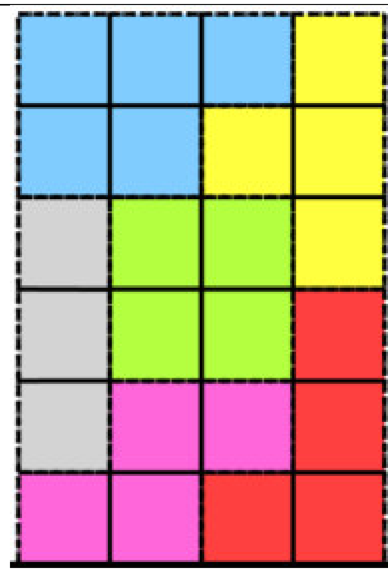
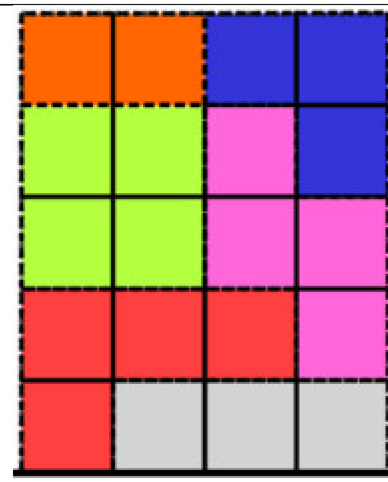


2.10.2. Parte 2

Reto 1	Reto 2	Reto 3

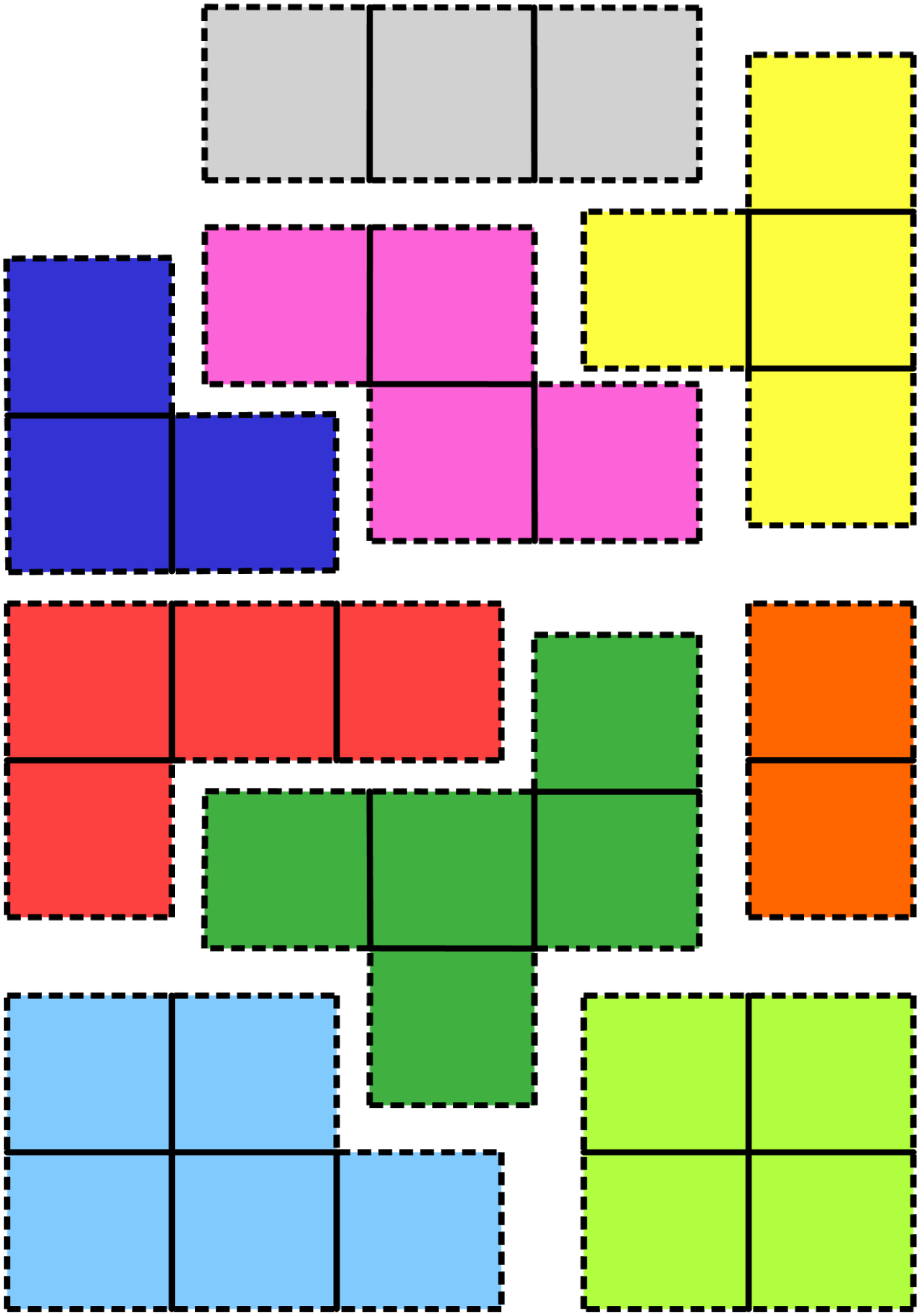
		
Reto 4	Reto 5	Reto 6
		
Reto 7	Reto 8	Reto 9
		
Reto 10	Reto 11	Reto 12
		
Reto 13	Reto 14	Reto 15

		
Reto 16	Reto 17	Reto 18
		
Reto 19	Reto 20	Reto 21
		
Reto 22	Reto 23	Reto 24
		
Reto 25	Reto 26	Reto 27

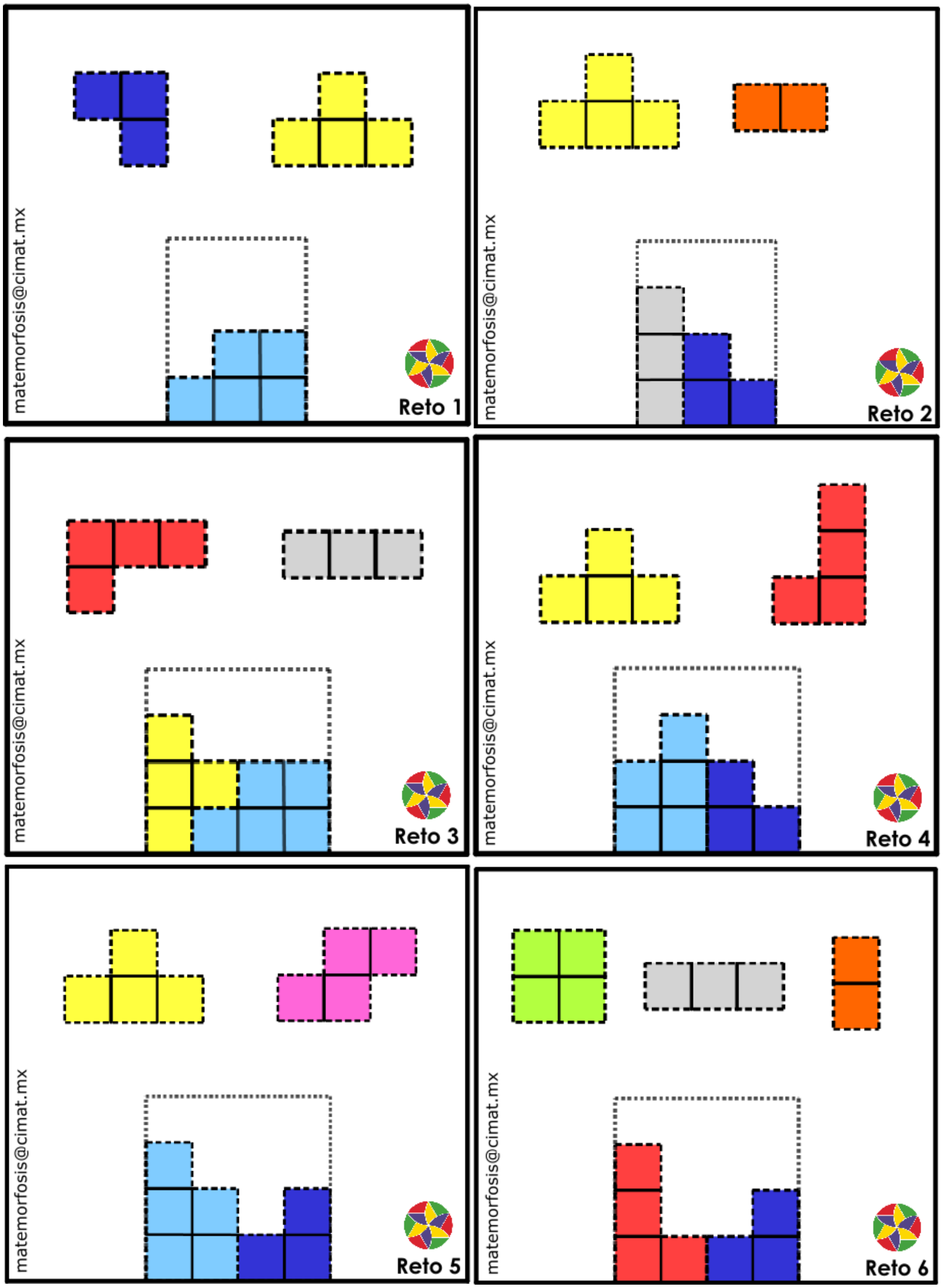
		
Reto 28	Reto 29	Reto 30
		

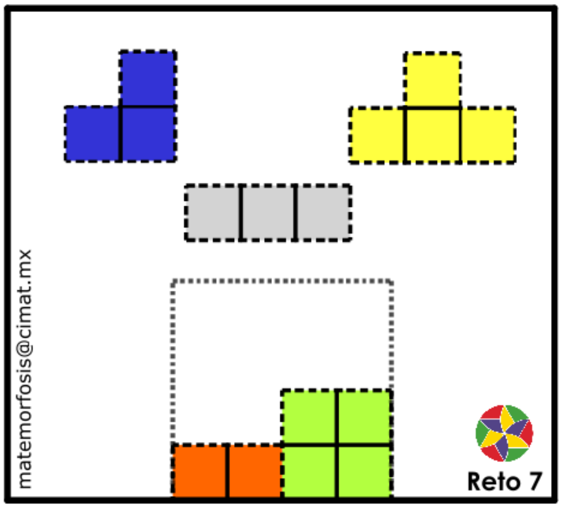
2.11. Imprimibles

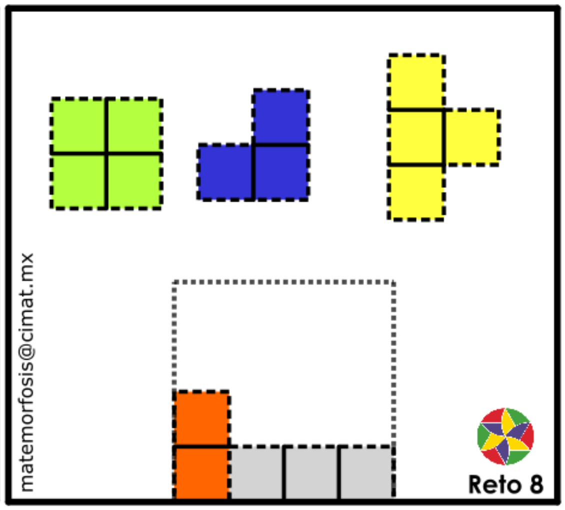
2.11.1. Kit de piezas

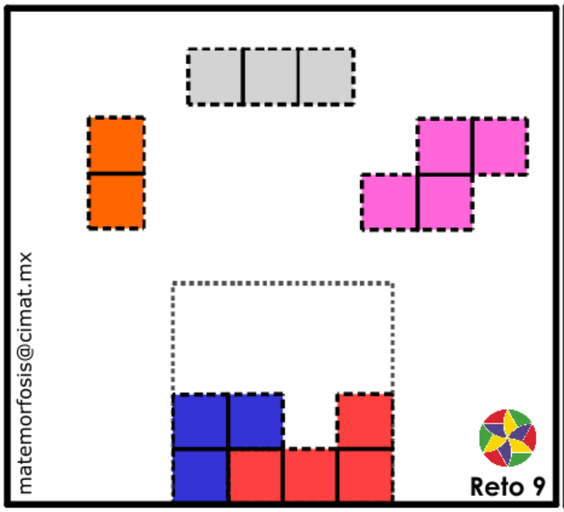


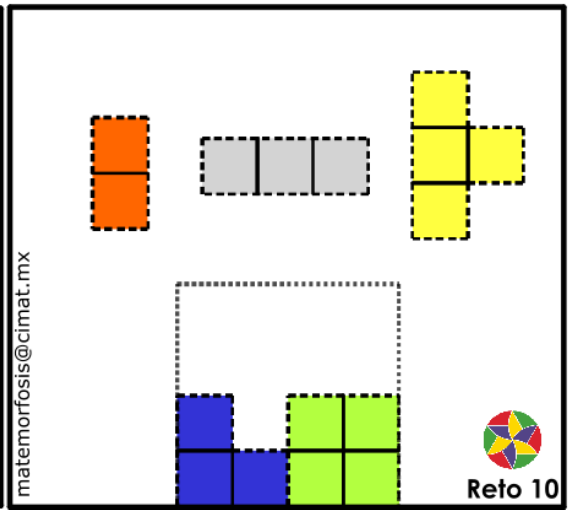
2.11.2. Kit de retos

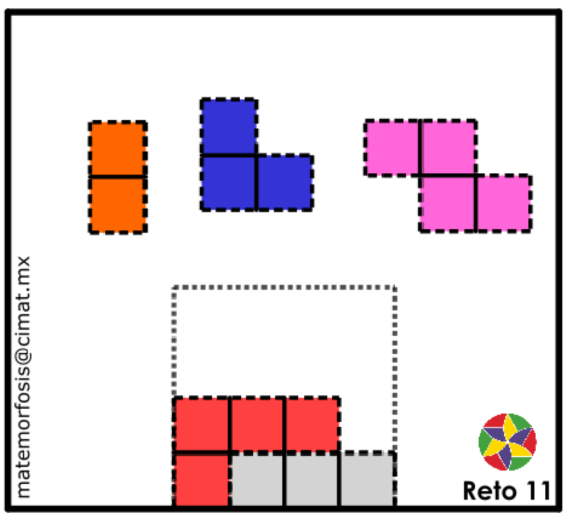


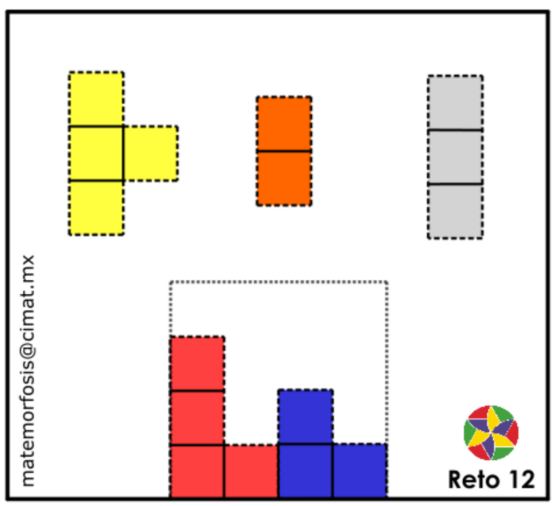

matemorfosis@cimat.mx
Reto 7

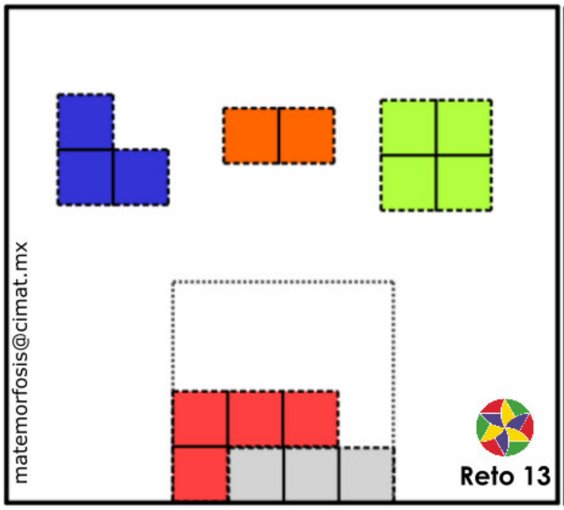

matemorfosis@cimat.mx
Reto 8

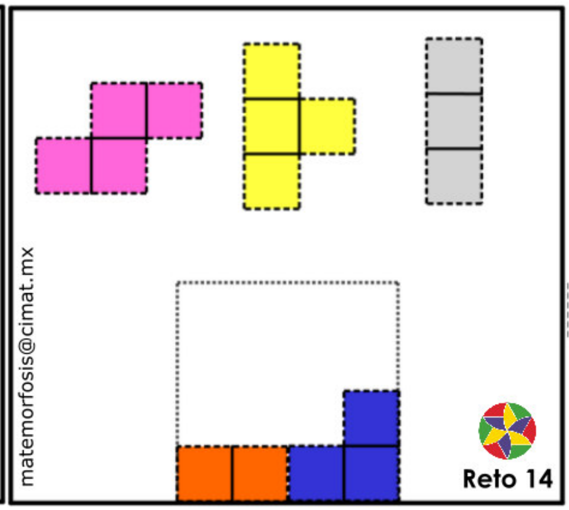

matemorfosis@cimat.mx
Reto 9

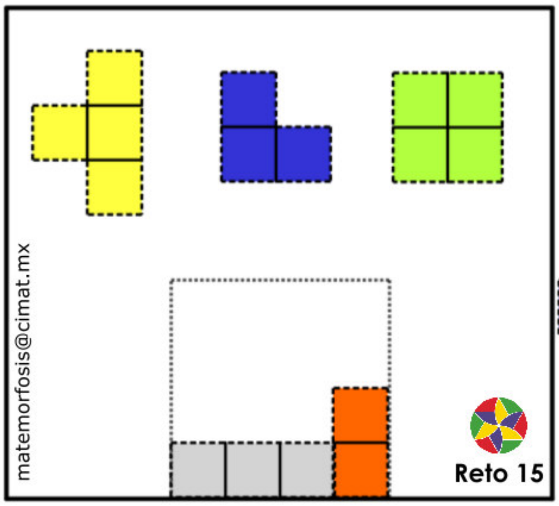

matemorfosis@cimat.mx
Reto 10

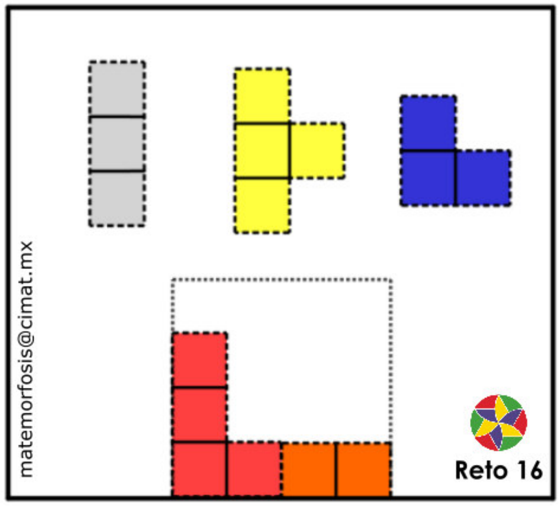

matemorfosis@cimat.mx
Reto 11

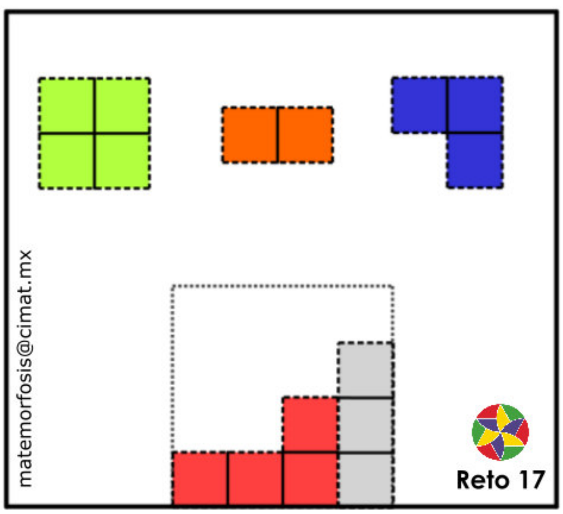

matemorfosis@cimat.mx
Reto 12

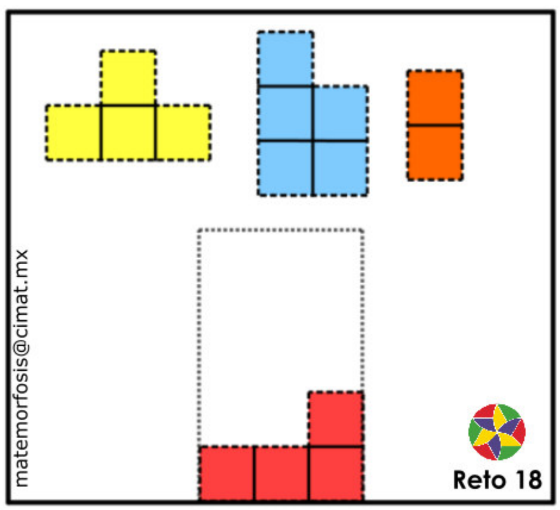

matemorfosis@cimat.mx
Reto 13

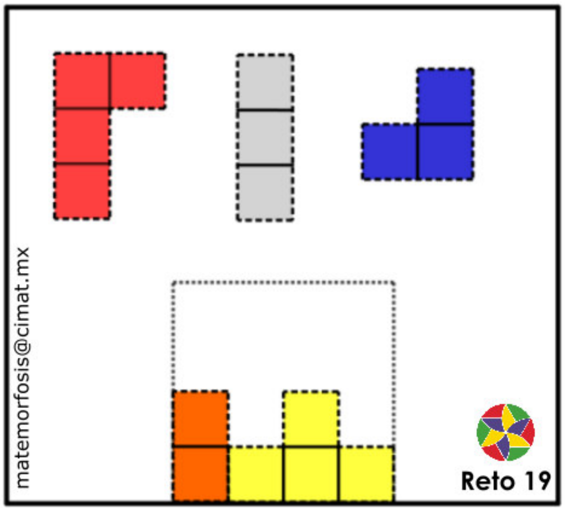

matemorfosis@cimat.mx
Reto 14

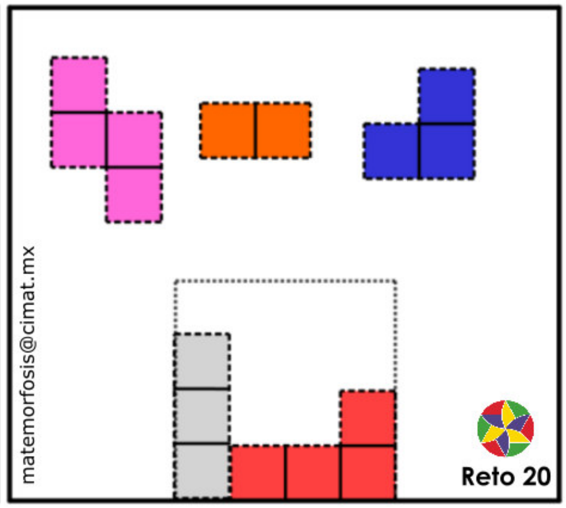

matemorfosis@cimat.mx
Reto 15

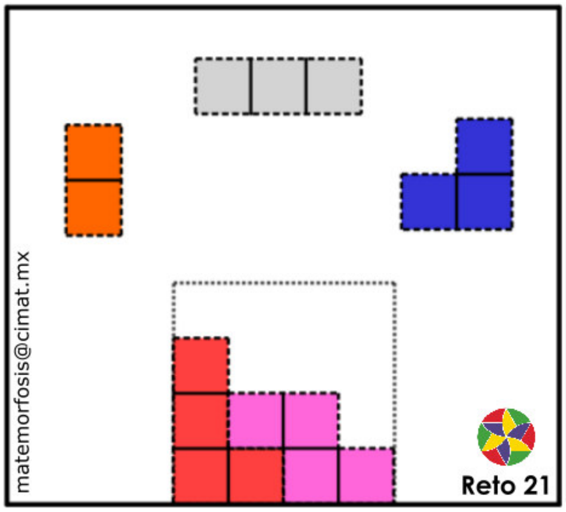

matemorfosis@cimat.mx
Reto 16

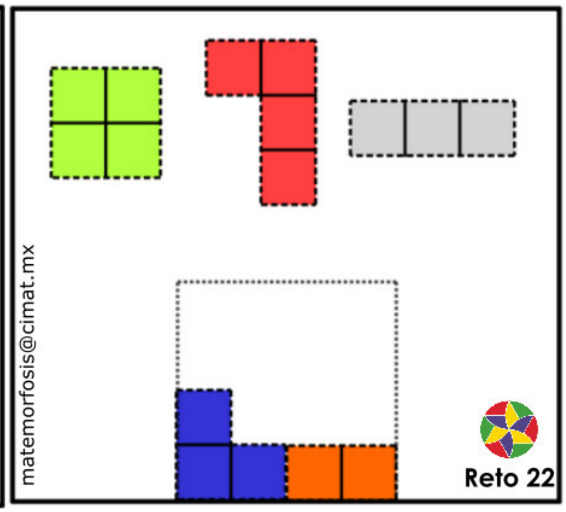

matemorfosis@cimat.mx
Reto 17

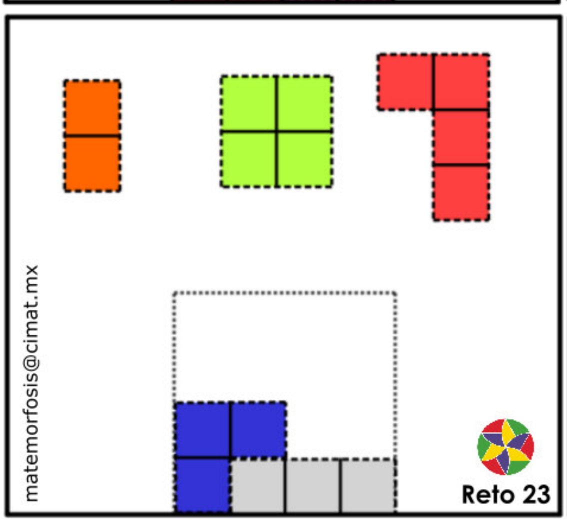

matemorfosis@cimat.mx
Reto 18

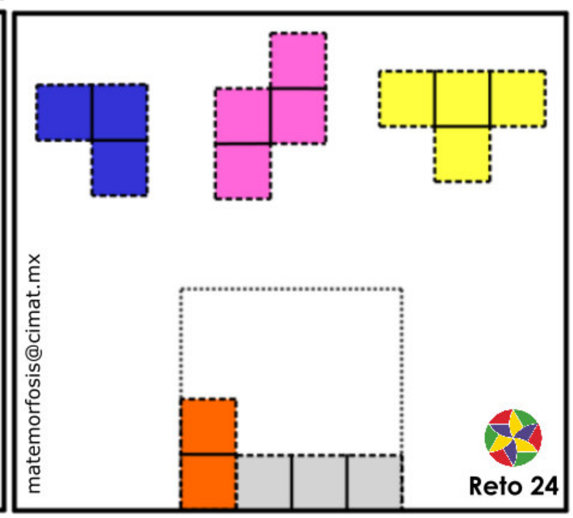

matemorfosis@cimat.mx
Reto 19

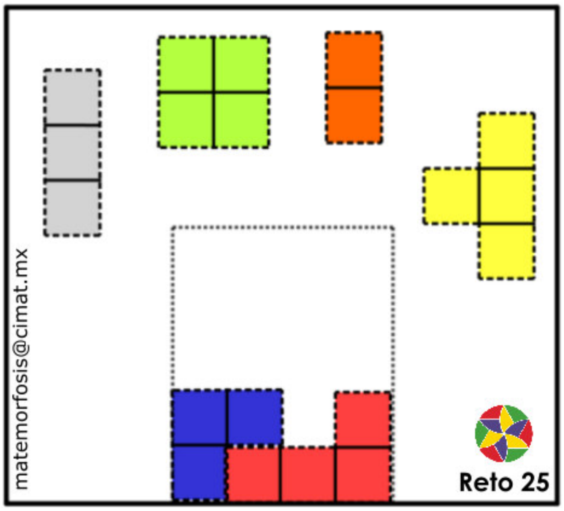

matemorfosis@cimat.mx
Reto 20

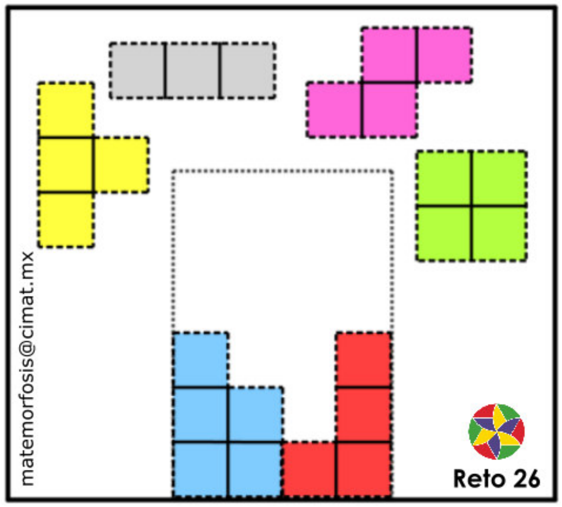

matemorfosis@cimat.mx
Reto 21

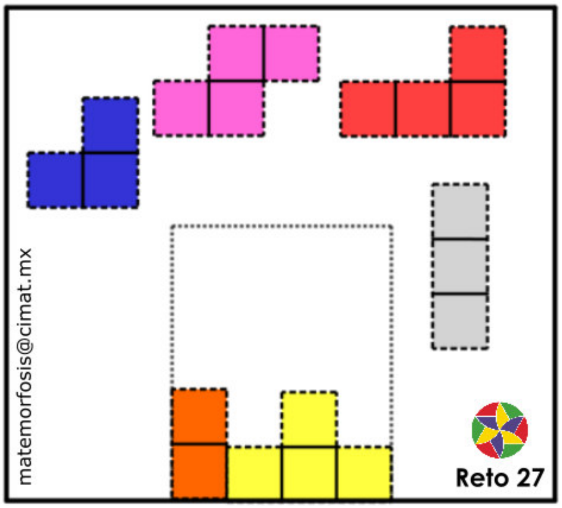

matemorfosis@cimat.mx
Reto 22

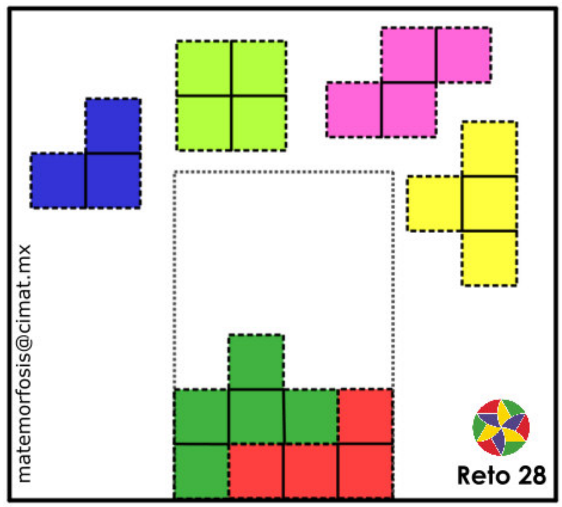

matemorfosis@cimat.mx
Reto 23

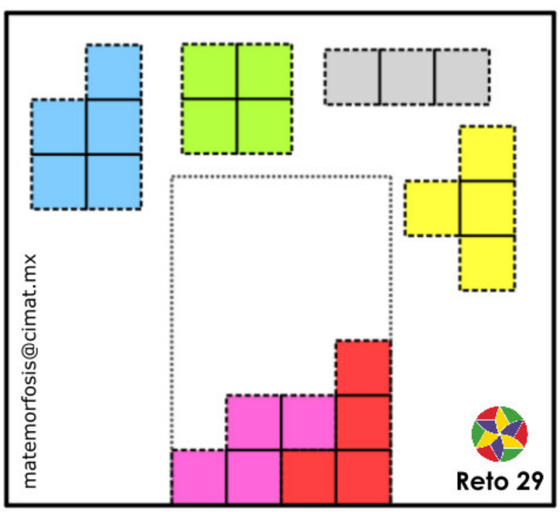

matemorfosis@cimat.mx
Reto 24

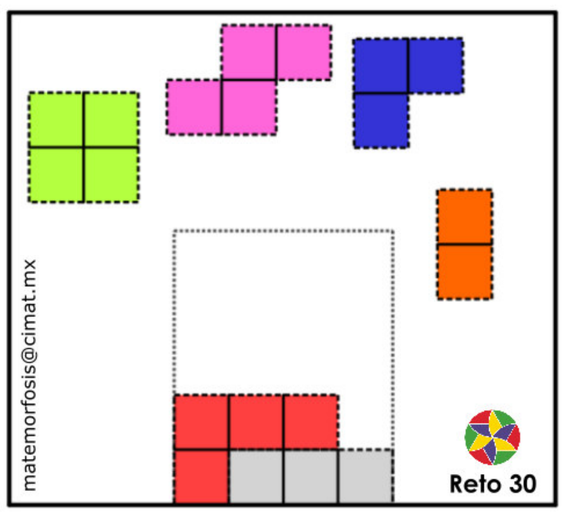

matemorfosis@cimat.mx
Reto 25


matemorfosis@cimat.mx
Reto 26


matemorfosis@cimat.mx
Reto 27


matemorfosis@cimat.mx
Reto 28


matemorfosis@cimat.mx
Reto 29


matemorfosis@cimat.mx
Reto 30

3. Probabilidad y Estadística– Carrera de caballos

3.1. Para qué sirve

Realizar y explorar experimentos físicos para desarrollar nociones de la teoría de la probabilidad. A través de experimentos con dados, entender eventos equiprobables y no equiprobables. Conocer ejemplos donde las matemáticas dan respuestas contraintuitivas.

3.2. Lo que se necesita

Organizar al grupo en equipos de 5 estudiantes y proporcionar el material siguiente:

- Tableros 1, 2 y 3.
- Dos dados cúbicos
- 11 fichas

3.3. Preparación

- Imprime cada uno de los tableros para el número de equipos que vayas a tener.
- Consigue o fabrica dos dados cúbicos por equipo.
- Cada equipo debe tener 11 fichas o cuentas, de preferencia que sean distintas entre sí.
- *Opcional.* Puedes laminar los tableros para que duren más.
- Dedica tiempo a jugar cada una de las versiones que se proponen y ver qué posibles preguntas pueden surgir dentro de la actividad.
- Dedica tiempo a pensar en la información que estás recolectando y cómo puedes hacer preguntas a tus estudiantes, para ayudarlos a descubrirla y de esta manera, poder prever a lo que se enfrentarán tus estudiantes y, hacer la parte de anticipación (C.1) lo mejor posible.
- No veas las soluciones hasta que logres resolverlo y haz consciencia sobre lo que sientes durante el proceso de solución, eso te ayudará a entender por lo que pasarán los estudiantes durante la actividad.
- Para la versión 3 del juego que se propone en este manual, se sugiere una versión en el pizarrón o proyectado, dado que al realizarse con cada equipo y con su propio tablero, es posible que hagan trampa, por lo que se pensó en una versión en el pizarrón o proyectado.

3.4. Cómo se juega

El juego consiste en simular una carrera de caballos. Hay tres variantes del juego, y en cada uno las reglas son ligeramente diferentes. El plan es analizar de qué depende el escoger al caballo que tenga más posibilidades de ganar.

3.4.1. Versión 1

En esta carrera participan 6 caballos numerados del 1 al 6, se usará el tablero 1. Ver la hoja de trabajo 1 (3.12.4)

Reglas

- Lanzar un dado a la vez
- Avanza una casilla el caballo que corresponde al número que salió en el dado.
- Gana el caballo que llegue primero a la meta.

3.4.2. Versión 2

En esta carrera participan 6 caballos numerados del 0 al 5, se usará el tablero 2. Ver la hoja de trabajo 2 (3.12.2)

Reglas

- Lanzar dos dados a la vez
- Avanza una casilla el caballo que corresponde a la diferencia o resta de los números que salieron en los dados, es decir, hay que restar el menor número al mayor número.
- Gana el caballo que llegue primero a la meta.

3.4.3. Versión 3

En esta carrera participan 11 caballos numerados del 2 al 12, se usará el tablero 3.

Reglas

- Lanzar dos dados a la vez.
- Avanza una casilla el caballo que corresponde a la suma de los números que salieron en los dados.
- Gana el caballo que llegue primero a la meta.

3.5. Preguntas

3.5.1. Monitoreo

- ¿Me puedes explicar en qué consiste el juego?
- ¿Cómo te sientes?
- ¿Por qué elegiste ese caballo?
- ¿Crees que todos los caballos tienen la misma posibilidad de ganar?

- Si jugamos de nuevo, ¿escogerías el mismo caballo? ¿por qué?
- Agrega otras preguntas que consideres útiles en esta etapa:
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____

3.5.2. Discusión grupal

- ¿Cuántos lanzamientos hicieron?
- ¿Cuál número ganó?
- ¿Creen que fue pura suerte?
- ¿Creen que haya un número más probable que otro? Es decir, ¿tiene la misma posibilidad que salga un dos a un cinco?
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____

3.6. Estrategias de solución

Esta actividad es en realidad un juego, donde el objetivo es ir encontrando los patrones en los experimentos aleatorios. La estrategia para ganar en este juego es la solución de esta actividad. Por lo que, se recomienda permitir a los estudiantes jugar suficientes veces, para que logren desarrollar intuición y nociones sobre la probabilidad experimental. Una vez que vayan encontrando las estrategias de forma empírica, se puede aterrizar y formalizar los conceptos de interés para los objetivos que se apeguen al plan de estudios de cada docente.

.

Si encuentran otra estrategia, por favor, compártela a: mariana@cimat.mx

3.7. Consejos de implementación

- Hay que ser muy claros con las palabras que usamos para exponer el juego. Se recomienda pedir la atención de todos los estudiantes y dar un par de ejemplo concretos, para ilustrar esto, en la versión 1, se puede decir: si lanzamos el dado y sale un seis, el caballo seis avanza una casilla; si realizamos otro lanzamiento del dado y sale un dos, el caballo dos avanza una casilla.

- Para saber que alguien no entendió las reglas del juego, sólo falta ver cuál equipo no ha empezado a lanzar los dados, se recomienda acercarse a esos participantes y asegurarnos que entiendan en que consiste la actividad.
- Si los participantes se observan perplejos, una manera de ayudarlos es observar cómo empiezan a jugar.
- Es importante pedir que, si su nivel de frustración está llegando a niveles altos, que pidan ayuda y poder escuchar cual es la causa de su frustración. A partir de lo que digan, desarrollar una estrategia de auto control. Por ejemplo, salir a caminar un momento en lo que la intensidad del momento disminuye.
- Es importante recordar que es un juego cuyo objetivo es buscar patrones que nos permitan ganar un mayor número de veces y pasarla bien.
- Lo central de esta actividad es empezar a desarrollar noción de cuando algo es más probable que otro, y mantener interesados a los estudiantes a través del juego, y poco a poco empezar a introducir actividades matemáticas centradas en ellos, que nos permitan tener espacios de enseñanza-aprendizaje propicios para el quehacer matemático.

3.8. Contenido matemático

Experimentos aleatorios. Espacio muestral. Probabilidad teórica. Frecuencia. Histograma.

3.9. Si quieres saber más

3.10. Soluciones

3.10.1. Solución versión 1

Los posibles resultados del primer experimento son: {1, 2, 3, 4, 5, 6}, donde cada número representa el número de puntos que muestra la cara superior del dado.

Si lanzamos un solo dado, la probabilidad de que salga cualquier número es la misma, es decir, es igual de probable que salga el 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Esta probabilidad es igual a

$$\frac{\#\ \boldsymbol{de\ resultados\ que\ nos\ interesan}}{\#\ \boldsymbol{de\ resultados\ posibles}}$$

Por ejemplo, si queremos saber cuál es la probabilidad de que salga el 4,

$$\frac{\#\ de\ resultados\ que\ nos\ interesan}{\#\ de\ resultados\ posibles} = \frac{\#\ de\ formas\ que\ nos\ salga\ 4}{\#\ de\ formas\ que\ puede\ caer\ el\ dado} = \frac{1}{6}$$

Y lo mismo ocurre para cualquier número del dado. Este es un ejemplo de modelo de probabilidad uniforme.

En este juego, el caballo ganador es pura suerte. Todos tienen la misma probabilidad de ganar. Cada lanzamiento es independiente del anterior, es decir, lo que sale en un lanzamiento, no influye en el siguiente.

3.10.2. Solución versión 2.

Los posibles resultados en este experimento son {0, 1, 2, 3, 4, 5}, donde cada número representa la diferencia de los dos números de los dados.

En este caso, a diferencia de la versión 1, no todos los números tienen la misma probabilidad de salir. Hay que analizar que números son los que pueden salir y de cuántas formas se puede obtener cada uno. Para no confundirnos en lo que sale en cada dado, vamos a decir que un dado es rojo y otro azul. Ver la siguiente tabla.

Posibles resultados (diferencia entre los dos dados)	¿De cuáles formas se puede obtener este resultado? (dado 1, dado2)	¿De cuántas formas se puede obtener este resultado?
0	(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)	6
1	(1, 2) (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)	10
2	(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)	8
3	(1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3)	6
4	(1, 5), (5, 1), (2, 6), (6, 2)	4
5	(1, 6), (6, 1)	2
	TOTAL	36

Ahora, para calcular la probabilidad de que un caballo avance. Tenemos que ver cuál es la probabilidad de que nos salga cada resultado que nos interesa. Como recordarán, la probabilidad será:

$$\frac{\#\ \boldsymbol{de\ resultados\ que\ nos\ interesan}}{\#\ \boldsymbol{de\ resultados\ posibles}}$$

Por ejemplo, si queremos saber cuál es la probabilidad de que salga el 5,

$$\frac{\#\, formas\ de\ que\ nos\ salga\ cinco}{\#\ de\ formas\ de\ que\ pueden\ caer\ los\ dados} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Y de la misma manera hay que calcular la probabilidad de todos los resultados de interés.

Posibles resultados (diferencia entre los dos dados)	¿De cuántas formas se puede obtener este resultado?	Probabilidad de que nos salga el resultado $\frac{\#formas\ que\ se\ puede\ obtener}{\#\ todos\ los\ posibles\ resultados}$
0	6	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
1	10	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
2	8	$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$
3	6	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
4	4	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
5	2	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
TOTAL	36	1

Entonces, en este juego, el caballo que tiene más probabilidad de ganar es el 1, pero no significa que vaya a ser el ganador. Todos pueden ganar, pero si jugamos suficientes veces (un gran número), los caballos que más van a ganar son el 1 y el 2.

3.10.3. Solución versión 3.

Los posibles resultados de este experimento son {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, donde cada número representa la suma de los dos números de los dados.

En este caso, al igual que en la versión 2, no todos los números tienen la misma probabilidad de salir. Hay que analizar que números son los que pueden salir y de cuántas formas se puede obtener cada uno. Para no confundirnos en lo que sale en cada dado, vamos a decir que un dado es rojo y otro azul. Ver la siguiente tabla

Posibles resultados (suma de los dos dados)	¿De cuáles formas se puede obtener este resultado? (dado 1, dado2)	¿De cuántas formas se puede obtener este resultado?
2	(1, 1)	1
3	(1, 2), (2, 1)	2
4	(1, 3), (3, 1), (2, 2)	3
5	(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)	4
6	(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)	5
7	(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)	6
8	(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)	5
9	(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)	4
10	(4, 6), (6, 4), (5, 5)	3
11	(5, 6), (6, 5)	2
12	(6, 6)	1
	TOTAL	36

Ahora, para calcular la probabilidad de que un caballo avance. Tenemos que ver cuál es la probabilidad de que nos salga cada resultado que nos interesa. Como recordarán, la probabilidad será:

$$\frac{\boldsymbol{\#\ de\ resultados\ que\ nos\ interesan}}{\boldsymbol{\#\ de\ resultados\ posibles}}$$

Por ejemplo, si queremos saber cuál es la probabilidad de que salga el 10,

$$\frac{\#\ formas\ de\ que\ nos\ salga\ diez}{\#\ de\ formas\ de\ que\ pueden\ caer\ los\ dados} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Y de la misma manera hay que calcular la probabilidad de todos los resultados de interés.

Posibles resultados (diferencia entre los dos dados)	¿De cuántas formas se puede obtener este resultado?	Probabilidad de que nos salga el resultado $\frac{\#formas\ que\ se\ puede\ obtener}{\#\ todos\ los\ posibles\ resultados}$

2	1	$\frac{1}{36}$
3	2	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
4	3	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
5	4	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
6	5	$\frac{5}{36}$
7	6	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
8	5	$\frac{5}{36}$
9	4	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
10	3	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
11	2	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
12	1	$\frac{1}{36}$
TOTAL	36	1

Entonces en este juego, el caballo que tiene más probabilidad de ganar es el 7, pero no significa que vaya a ser el ganador. Todos pueden ganar, pero si jugamos suficientes veces (un gran número), los caballos que más van a ganar son el 7, el 6 y el 8. Los que menos veces van a ganar serán el 2 y el 12.

3.11. Imprimibles

3.11.1. Tablero 1

		META			
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

3.11.2. Tablero 2

META					
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

3.11.3. Tablero 3

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
META										

3.11.4. Hoja de trabajo 1

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál caballo crees que va a ganar?
- ¿Por qué crees que va a ganar?
- ¿La suerte tendrá algo que ver?

¡A jugar! Vamos a registrar la carrera llenando la siguiente tabla:

Caballo	Pon una marca si sale el número	Número de veces que salió
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

Para finalizar, contesta las siguientes preguntas:

- ¿Alguien le atinó al caballo ganador?
- ¿Te sorprendió el resultado? ¿Por qué?

3.11.5. Hoja de trabajo 2

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál caballo crees que va a ganar?
- ¿Por qué crees que va a ganar? ¿Es igual que el juego anterior? ¿Por qué?

¡A jugar! Vamos a registrar la carrera llenando la siguiente tabla:

Caballo	Pon una marca si sale el número	Número de veces que salió
0		
1		
2		
3		
4		
5		
Total		

Para finalizar, contesta las siguientes preguntas:

- ¿Alguien le atinó al caballo ganador?

- ¿Hay caballos más rápidos qué otros? En caso de que sí, ¿sabes por qué pasa?
- ¿Cuáles fueron los 3 caballos más veloces?
- ¿Crees que todos los caballos tuvieron la misma probabilidad de ganar? ¿Por qué?

3.11.6. Hoja de trabajo 3

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál caballo crees que va a ganar?
- ¿Por qué crees que va a ganar?

¡A jugar! Vamos a registrar la carrera llenando la siguiente tabla:

Caballo	Pon una marca si sale el número	Número de veces que salió
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
Total		

Para finalizar, contesta las siguientes preguntas:

- ¿Alguien le atinó al caballo ganador?
- ¿Hay caballos más rápidos qué otros? En caso de que sí, ¿sabes por qué ocurre esto?
- ¿Cuáles fueron los 3 caballos más veloces y cuáles los 3 más lentos?
- ¿Crees que todos los caballos tuvieron la misma probabilidad de ganar? ¿Por qué?

Referencias

Polya, G. 1945. *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. New Prince. editado por P. U. Press. New Jersey.

Stein, Mary Kay, Randi A. Engle, Margaret S. Smith, y Elizabeth K. Hughes. 2008. “Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell”. *Mathematical Thinking and Learning*. doi: 10.1080/10986060802229675.

Stenmark, Jean Kerr, Virginia Thompson, y Ruth Cossey. 1986. *Family Math*. California, USA: University of California.