



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CAMPUS LEÓN

DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

TESIS QUE PRESENTA: EDSON OSWALDO RAMÍREZ ESQUEDA

PARA OBTENER EL GRADO DE: LICENCIATURA EN FÍSICA

ASESOR: DR. LUIS ARTURO UREÑA LÓPEZ

Estructuras autogravitantes de materia oscura ultraligera.

5 de marzo de 2021

Agradecimientos

A mi mamá y a mi papá por apoyarme a lo largo de mi vida y con mis estudios hasta la actualidad. A mi hermana, a mi abuelo y a mi abuela que en paz descansen, quienes siempre me han apoyado en muchos aspectos. A Paloma, mi novia, por motivarme a ser mejor cada día y ser mi inspiración.

Al Dr. Luis Arturo Ureña López, por asesorarme y apoyarme en mi trabajo de mi tesis, además por la beca que por medio de Conacyt me otorgó para la realización de la tesis a través de la beca de Ayudante de Investigador de SNI III.

Resumen

En este trabajo estudiamos de forma analítica y numérica estructuras autogravitantes de campo escalar ultraligero. Se estudiaron halos solitónicos, compuestos únicamente por materia oscura escalar empleando el código PyUltraLight [1]. Realizamos diversas simulaciones, en un marco de trabajo sin expansión, con diferentes configuraciones para verificar resultados y propiedades encontradas en diversos trabajos. Finalmente, exploramos la posibilidad de materia oscura conformada por múltiples campos escalares ultraligeros y proponemos una modificación al código PyUltraLight.

Índice general

	Página
1. Introducción	6
2. Modelo ΛCDM	13
2.1. Parámetros del modelo y observaciones	13
2.1.1. Expansión y edad del universo	13
2.1.2. Componentes y estructuras del universo	15
2.1.3. Densidad del universo	15
2.1.4. Geometría del universo	16
2.1.5. Anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas	17
2.2. Modelo CDM	20
2.2.1. Materia oscura	20
2.2.2. Modelo Estándar de Partículas Elementales	20
2.2.3. Candidatos de materia oscura	21
2.2.4. Características del Modelo CDM	22
2.2.5. Evidencias y problemas el modelo CDM	22
2.3. Breve resumen del modelo Λ CDM	23
3. Materia Oscura como campos escalares	24
3.1. Sistema Einstein-Klein-Gordon	25
3.2. Reducción del sistema Einstein-Klein-Gordon a un sistema Schrödinger-Newton	27
3.3. Sistema Schrödinger-Poisson	30
3.4. Propiedades del sistema Schrödinger-Newton	30
3.5. Representación hidrodinámica del sistema Schrödinger-Poisson	33
4. El código PyUltraLight	35
4.1. Descripción del código	36
4.1.1. Adimensionalización	36
4.1.2. Resolución del código y convergencia de las energías	37
4.1.3. Dinámica de solitones y aspectos importantes en las simulaciones	38
4.2. Configuraciones de halos solitónicos	39
4.2.1. Interacciones entre un solitón y una masa central	39
4.2.2. Colisión frontal binaria	44
4.2.3. Dos solitones sobre una misma órbita	51

4.2.4.	Dos solitones orbitando una masa central	55
4.2.5.	Fusiones de múltiples halos	56
4.3.	Limitantes de resolución	62
4.3.1.	Problema en las fronteras	62
4.3.2.	Problema de resolución con masas de los solitones muy grandes	64
4.3.3.	Análisis de virialización	66
4.4.	Conclusiones sobre la resolución y limitantes del código	66
4.5.	Perspectiva de un código para Multicampos escalares	68
4.5.1.	Modificaciones a las ecuaciones del sistema Schrödinger - Poisson para múltiples masas de axión	69
5.	Conclusiones	72
A.	El Problema de N-cuerpos	74
A.1.	El problema de dos cuerpos	74
A.2.	El problema de tres cuerpos	75
B.	Tensor de energía momento	77

Capítulo 1

Introducción

La cosmología es una ciencia observacional de alta precisión que estudia el universo como un todo, entre sus principales objetivos está entender la evolución del universo. Desde la antigüedad las civilizaciones han buscado entender el cosmos y su evolución, a partir de observaciones comenzaron a construir conocimiento sobre el universo. El siglo XVI fue marcado por una evolución en la forma de concebir el Universo, Nicolás Copérnico (Niklas Koppernigk) propuso un universo en el cual los cuerpos celestes orbitaban el Sol, en esa misma época Galileo Galilei estudió el movimiento de los cuerpos y con la creación de un telescopio pudo observar el universo y se dio cuenta de que la Tierra no era el centro del universo; Johannes Kepler partiendo de observaciones estableció sus tres leyes de la mecánica celeste [2].

Años después Isaac Newton con la invención del cálculo, sus tres leyes de la mecánica y la ley de gravitación universal comenzó una revolución en la concepción de la mecánica. De ahí en adelante comenzó a formalizarse la teoría de la mecánica newtoniana. La ley de gravitación universal dicta que dos cuerpos con masas M y m , separados por una distancia r se atraen con una fuerza:

$$\mathbf{F} = -\frac{G m M}{|r - r'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal; la fuerza gravitacional descrita por (1.1) es un tipo de fuerza central (la fuerza está dirigida en dirección radial), como la fuerza es conservativa se tiene que $\mathbf{F} = m \vec{\nabla} \Phi$, y para alguna distribución de materia dada se tiene que

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (1.2)$$

donde ρ es la densidad en cualquier punto dentro del objeto, el cual puede ser una estrella, un planeta o algún otro cuerpo celeste. Kepler estudió las órbitas planetarias y postuló sus tres leyes, posteriormente con la física newtoniana se dio una interpretación matemática a estas leyes. En el Apéndice A se muestra un resumen de estos resultados.

Con el paso del tiempo la tecnología evolucionó y permitió mejorar las observaciones del universo con mejores telescopios, permitiendo encontrar una gran variedad de objetos celestes.

En 1915 Albert Einstein propuso, después de una serie de trabajos al respecto desde 1907, una nueva concepción de la gravedad, en la cual la gravedad se debe a la relación entre la geometría del sistema y la materia y energía de este. Einstein consideró dos principios esenciales en su teoría: el **principio de equivalencia** [3] y el **principio de covarianza** [4].

El principio de equivalencia establece que:

Todo sistema de referencia en caída libre en un campo gravitacional equivale localmente a un sistema de referencia inercial.

Por su parte el principio de covarianza dicta que:

Las leyes de la física deben ser las mismas en todos los sistemas de referencia.

Para describir la dinámica, Einstein propuso un conjunto de ecuaciones acopladas de campo gravitacional tomando consideraciones como la correspondencia con el límite clásico [5, 6, 7, 8].

Estas ecuaciones de campo están dadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, R es el escalar de Ricci, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento. Para más detalles del tensor de energía momento revisar el Apéndice B. Las ecuaciones de campo de Einstein describen la interacción fundamental de la gravitación, donde la gravitación se debe a que el espacio - tiempo se curva por la materia y la energía.

Einstein propuso que el universo a grandes escalas es homogéneo e isotrópico, en un principio aproximado, denominado **principio cosmológico**, el cual establece que:

"Para un tiempo particular dado, todas las posiciones en el espacio son equivalentes y en una posición dada, todas las direcciones espaciales de observación son equivalentes".

Dicho de otro modo, el principio cosmológico enuncia que el universo a grandes escalas satisface las propiedades de isotropía y homogeneidad. La **isotropía** es una propiedad física que implica que la medición de las magnitudes físicas no depende de la posición, es decir, que las propiedades físicas son las mismas en todas partes; mientras que la **homogeneidad** implica que las propiedades físicas no cambian al realizar cambio de sistema de referencia (por ejemplo, rotaciones). Esto implica que a grandes escalas debería existir la misma densidad de materia en un mismo tiempo. El principio cosmológico implica una suavidad a gran escala, la cual se observa a escalas de 100 Mpc o mayores.

En el año 1922, Alexander Friedmann (Aleksandr Aleksándrovich Fridman) resolvió las ecuaciones de Einstein (1.3) considerando un universo homogéneo e isotrópico, y obtuvo una métrica como solución exacta a las ecuaciones [9]. Esta métrica se conoce como métrica FLRW (Friedmann - Lemaître - Robertson - Walker), bajo estas suposiciones, el tensor de energía - momento

debe ser diagonal y por simplicidad se supone que está compuesto por un fluido perfecto, es decir, que no hay viscosidad ni flujo de calor, este tensor se escribe como

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho c^2, P g_{\mu\nu}, P g_{\mu\nu}, P g_{\mu\nu}), \quad (1.4)$$

donde ρ representa la densidad de materia interestelar y P es la presión. Ya que el tensor de energía momento es diagonal, la métrica también debe serlo, por lo tanto el elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (1.5)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala, k es un parámetro libre, conocido como constante de curvatura. Nótese que si $k = 0$, tenemos la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas.

De las ecuaciones de Einstein se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (1.6)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi G\rho, \quad (1.7)$$

Las ecuaciones (1.6) y (1.7) describen la expansión del universo, son ecuaciones que muestran el equilibrio de energía y pueden ser derivadas de a partir de la conservación de la energía total a partir de la mecánica newtoniana. La ecuación de Friedmann (1.6), se puede reescribir definiendo $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$, el cual se conoce como parámetro de Hubble. Por otro lado, la ecuación (1.7) se conoce como ecuación de aceleración, la cual puede derivarse a partir de manipulaciones algebraicas de la ecuación de Friedmann. A las ecuaciones anteriores se les suma la ecuación del fluido

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0, \quad (1.8)$$

y una ecuación de estado $p = p(\rho)$. Y así se puede modelar la evolución de la materia en el universo. Este modelo es una primera aproximación al modelo del Big Bang, del cual se hablará en el siguiente capítulo. En 1929, Edwin Hubble observó la velocidad de las galaxias por medio de su corrimiento al rojo, con las líneas de absorción y emisión identificables de estrellas variables cefeidas en nebulosas espirales. Hubble encontró que *el corrimiento al rojo de una galaxia es proporcional a la distancia a la que está, más rápidamente aparenta alejarse con respecto a ella* [10]. A esta se le conoce como la ley de Hubble, la cual es válida a grandes escalas. En términos matemáticos, la relación velocidad - distancia que encontró Hubble está dada por:

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}, \quad (1.9)$$

donde H_0 se conoce como constante de Hubble aunque, en realidad es un parámetro.

La relatividad general permite introducir otro término en sus ecuaciones, este término se conoce como constante cosmológica, de modo que las ecuaciones de Einstein se reescriben como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

y por lo tanto, la ecuación de Friedmann en unidades donde $c = 1$ se puede reescribir como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.11)$$

Con la constante cosmológica se describe la expansión acelerada del Universo, la cual fue observada por primera vez en 1998. La expansión acelerada del universo se atribuye comúnmente a la Energía oscura.

Durante las últimas décadas se ha tenido como objetivo resolver grandes misterios del universo. Los cosmólogos están interesados entre otras cosas en conocer detalladamente la composición del universo, la formación de estructuras, el universo temprano, entre otros.

En el universo se observan diferentes estructuras a diferentes escalas, el objeto básico cosmológico son las galaxias, las cuales contienen alrededor de 10^{11} estrellas y otros cuerpos celestes. Las galaxias más comunes son las espirales, las cuales tienen una protuberancia central y luego la materia se distribuye en un disco de radio de aproximadamente 12.5 kpc. Alrededor del disco se observan cúmulos globulares distribuidos con alguna simetría a distancias de entre 5 y 30 kpc. Las galaxias por su parte se encuentran distribuidas dentro de cúmulos de galaxias, los cuales son los objetos unidos gravitacionalmente más grandes del Universo. Los cúmulos por su parte se agrupan en supercúmulos unidos por filamentos.

Las diferentes estructuras del universo están compuestas de materia y energía, por ejemplo, las galaxias contienen estrellas y planetas. Tanto las estrellas como los planetas están formados por grandes cantidades de átomos y estos a su vez están formados por partículas elementales. La cosmología requiere de la física cuántica para explicar algunos fenómenos como en el espectro de cuerpo negro del fondo cósmico de microondas; los procesos del universo temprano como la nucleosíntesis, el desacoplamiento y la recombinación. Por otro lado, algunos procesos como la formación del fondo cósmico de microondas requieren de algunos resultados de la física de altas energías.

Uno de los temas de mayor interés en cosmología es la materia oscura, cuyo nombre se debe a que este tipo de materia desconocida sólo interactúa gravitacionalmente con el resto de la materia; y por lo tanto no es posible observarse utilizando el espectro electromagnético. A inicios del siglo XX se sabía que el universo estaba formado por diversas estructuras, las cuales se sabía que estaban conformadas por materia bariónica observada por telescopios. Aunque, al poco tiempo empezaron a aparecer indicios de que podía existir materia además de la materia que se observaba utilizando el espectro electromagnético. Las masas de los cuerpos de materia bariónica en el Universo se medían utilizando la ley de cuadrado inverso para calcular la luminosidad del

flujo observado y a partir de una relación masa - luz (la cual es aproximada y difiere para diferentes tipos de estrellas)[11]. Y así sumando las masas de las estrellas dentro de una galaxia estimar la cantidad de materia en el Universo.

Para los años 1930 se había encontrado que las velocidades de dispersión de cúmulos densos, como el cúmulo Coma eran muy altas y no había un modelo cosmológico que explicara tal fenómeno. En 1933 Fritz Zwicky estudió el cúmulo Coma, en su análisis primero supuso que tal sistema era mecánicamente estacionario y la materia se distribuye de manera uniforme en el cúmulo. Y aplicando el teorema Virial encontró que la densidad promedio en el sistema Coma debería ser al menos 400 veces mayor que la obtenida por las observaciones de la materia luminosa. Luego consideró que aun asumiendo que el sistema no está en equilibrio persiste el problema de falta de materia, al menos debería haber 200 veces más materia de la que se observaba por medio de telescopios. En ambos casos, la velocidad orbital de las galaxias visibles en el cúmulo era muy grande para la masa observada. Basándose en esto Zwicky propuso la existencia de materia oscura, la cual proporcionaría la masa faltante, por primera vez [12]. Posteriormente Vera Rubin estudió las curvas de rotación de galaxias espiral [13]. La curva de rotación está dada por la velocidad de la materia que gira alrededor de un disco espiral como función del radio al centro de la galaxia. Las estrellas individuales están en órbitas keplerianas, dado que los campos gravitacionales son tan débiles que no es necesario emplear Relatividad General, donde para una masa $M(R)$ con radio R y habiendo un equilibrio entre la aceleración centrípeta y la atracción gravitacional la velocidad está dada por

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (1.12)$$

A partir de la relación (1.12) se puede estimar la masa de una galaxia, con un objeto del cual se conoce su distancia a la galaxia y la velocidad a la que se mueve. Utilizando varios objetos a diferentes radios y velocidades de rotación se puede estimar la distribución de masa. Los valores obtenidos para las masas son mucho más altos que los valores obtenidos por estimaciones empleando la relación luz - masa. Las curvas de rotación observadas se aplanan, cuando se esperaría que decayeran. Por ejemplo, las observaciones de la línea de emisión del hidrógeno atómico, muestran que la curva de rotación de muchas galaxias espirales sigue siendo plana más allá de la ubicación de la materia visible. La diferencia se incrementa al ir aumentando la escala, eso sugiere que existe materia, que no puede ser observada a partir del espectro electromagnético, que rodea las galaxias. Se han propuesto varias soluciones al problema, entre ellas que la teoría de la relatividad general es incorrecta, pero hay varias pruebas que confirman la teoría de la Relatividad General. Hasta ahora, la hipótesis más convincente es la existencia de materia oscura, la cual es mucho más abundante que la materia ordinaria. Es importante mencionar que tanto los resultados de Zwicky como las curvas de rotación de Rubin se mantienen actualmente.

De las observaciones se sabe que la mayoría de las estrellas dentro de una galaxia espiral se encuentran en el disco galáctico y tienen órbitas aproximadamente circulares en torno al centro de la galaxia. Aunque algunas estrellas no se encuentran dentro del disco galáctico, sino que se encuentran en una región describiendo órbitas extrañas; estas estrellas se encuentran dentro de

una región esferoidal que rodea el disco galáctico, conocida como halo galáctico. El halo galáctico está compuesto principalmente por materia oscura, pero también contiene gas interestelar poco denso y algunas estrellas viejas (enanas marrones o enanas rojas).

La hipótesis de la existencia de materia oscura comenzó a tomarse en serio, después de los trabajos de Vera Rubin y se mantiene actualmente, aunque aún se desconoce la composición y naturaleza de esta, se han realizado experimentos y se han propuesto una gran cantidad de modelos para intentar explicar la existencia de las estructuras del universo.

La materia oscura se incluye en muchos modelos cosmológicos, principalmente por las evidencias observacionales y porque con la materia bariónica no sería posible generar la suficiente fuerza gravitacional como para formar las estructuras observada actualmente. Aunque, en la actualidad hay algunos modelos que rechazan la hipótesis, por ejemplo [14].

Hoy en día no se ha logrado detectar directamente materia oscura, pero se han realizado y se encuentran en marcha una gran cantidad de experimentos de detección directa de los diferentes candidatos de materia oscura. Por ejemplo, el experimento XENON 1T [15], del laboratorio Gran Sasso en Italia, es una colaboración internacional que busca detectar axiones, los cuales son de los principales candidatos de materia oscura en la actualidad.

Desde que se planteó la hipótesis de la materia oscura se han propuesto varios modelos para describir la materia oscura y los problemas de evolución del cosmos, como las anisotropías del fondo cósmico de microondas y la formación de estructuras. A principios del siglo XX, se sabía que el universo se encontraba en expansión, pero hasta 1998 se descubrió que el universo se expande aceleradamente, para tratar de explicar este problema se propuso la existencia de una energía que tuviera un efecto opuesto a la gravedad, esta energía, hoy en día conocida como energía oscura, debería cubrir la mayor parte de la densidad del universo. Actualmente se sabe que el universo está compuesto por aproximadamente un 69 % de energía oscura, un 26 % de materia oscura y tan solo un 5 % de materia bariónica.

El conocimiento actual de la cosmología se encuentra dentro del modelo Λ CDM, el cual asume que el modelo cosmológico del Big Bang como verdadero, la necesidad de que existan materia oscura y la energía oscura. Este modelo logra explicar la existencia del fondo cósmico de microondas, la estructura a gran escala de la distribución de galaxias, la abundancia de elementos ligeros en el universo, entre otros. En el modelo Λ CDM los WIMP's son la partícula con la cual está constituida la materia oscura, de estos modelos se hablará en el siguiente capítulo. Aunque el modelo Λ CDM en general concuerda con las observaciones, en la década de los años 1990's se propuso un modelo de materia oscura escalar. El modelo de materia oscura como campos escalares se ha ido desarrollando desde entonces y actualmente predice mejor las estructuras a escalas galácticas y de cúmulos de galaxias que el modelo CDM.

El presente trabajo tiene como principal objetivo estudiar numéricamente la dinámica de diversas estructuras autogravitantes conformadas por materia oscura, la cual está compuesta por campos escalares ultraligeros.

En el segundo capítulo se describe de forma concisa el modelo Λ CDM, al cual nos referimos previamente. En el capítulo tercero se expone el modelo de materia oscura como campos escalares, este modelo postula la existencia de los axiones, que son partículas elementales más

allá del Modelo Estándar de Partículas Elementales, luego se presenta el sistema de Schrödinger-Poisson, con este sistema se describe la materia oscura como campos escalares, se revisan sus propiedades matemáticas y sus características. En el cuarto capítulo se describen algunas de las características del código PyUltraLight [1] y su funcionamiento, pero también se estudian diversas estructuras gravitacionales de halos solitónicos; a través de simulaciones. Al final del cuarto capítulo se propone una modificación a PyUltraLight [1], considerando múltiples campos escalares con diferentes masas de axiones.

Para no perder generalidad en el texto, se tienen anexos referentes al problema de N -cuerpos y la construcción del tensor de energía momento.

Capítulo 2

Modelo Λ CDM

En este capítulo presentamos el modelo Λ CDM, también conocido como modelo cosmológico estándar, el cual es el modelo más aceptado en la actualidad. Se discute brevemente el Big Bang, el universo temprano, las estructuras del universo; así como la importancia de los fenómenos cuánticos en el universo, la materia oscura y la energía oscura.

El modelo Λ CDM asume que la descripción correcta de la gravedad es la Relatividad General, se auxilia de la Física de Altas Energías y de la Mecánica Estadística para describir algunos de sus procesos y parte de su evolución. Este modelo es la versión actual del modelo cosmológico estándar del Hot Big Bang y establece que el Universo inició hace aproximadamente 13800 millones de años. Inicialmente la materia estaba concentrada en un punto y sufrió una gran explosión, el Universo comenzó a expandirse, en este momento la materia del universo era dominada por partículas en un estado aleatorio viajando a velocidades relativistas, las cuales formaban un plasma denso y caliente. A los pocos minutos de vida, el universo se encontraba a una temperatura de 10^{10} K, hasta este punto los fotones y electrones permanecen libres; los fotones interactúan de forma continua con los núcleos y electrones. Comienzan procesos complejos en los cuales se comienzan a formar los elementos ligeros como el hidrógeno y Helio-4. A esta etapa del universo se le conoce como **nucleosíntesis**.

2.1. Parámetros del modelo y observaciones

En esta sección se describen brevemente las características y diferentes parámetros del Universo, considerados en el modelo Λ CDM.

2.1.1. Expansión y edad del universo

El modelo cosmológico estándar predice un Universo con 13.81 Gyr de edad [16], esta edad es bastante consistente con las edades calculadas de los objetos más antiguos en el Universo.

Se sabe que el Universo se expande, esto se observó a través de observaciones del corrimiento al rojo. La constante de Hubble, que en realidad es el valor del parámetro de Hubble en el tiempo actual, H_0 se expresa como $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Actualmente con las diferentes

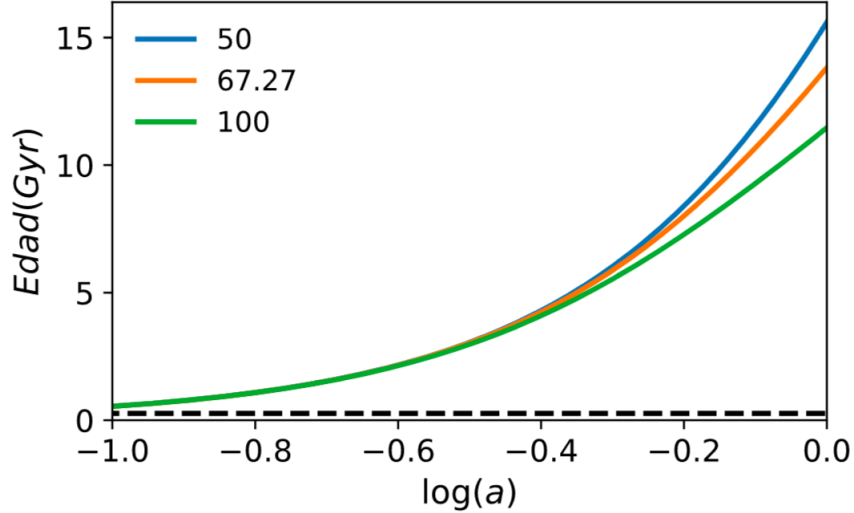


Figura 2.1: Evolución de la edad del universo respecto a la expansión de este. La gráfica muestra para los valores del parámetro de Hubble $H_0 = 50, 67.27$ y $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

observaciones indican que $h \approx 0.67$. Aunque la expansión del Universo es conocida desde hace casi un siglo, a finales de los años 1990's los estudios de supernovas distantes del tipo Ia, revelaron que actualmente el universo se expande en forma acelerada. La mayoría de modelos atribuyen esta expansión acelerada a la Energía Oscura.

La última actualización de datos del satélite Planck [17] da un valor del parámetro de Planck $H_0 = (67.27 \pm 0.60) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Si se suman las mediciones de las lentes del Fondo Cósmico a los datos de Planck se obtiene un valor aún más preciso, con una restricción del 0.8%, $H_0 = (67.36 \pm 0.54) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. El valor actual del parámetro de Hubble influye considerablemente en la edad del universo. En la figura 2.1 mostramos una gráfica realizada con el código CLASS [18], esta gráfica muestra la evolución de la edad del universo respecto a su expansión para tres valores del parámetro de Hubble. El código CLASS calcula la edad del universo, en nuestro caso variamos el parámetro de Hubble y obtuvimos que para un valor $H_0 = 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ se simula un universo con una edad de 15.6073 Gyr, mientras que para un valor $H_0 = 67.27 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ se obtiene un universo con una edad de 13.8188 Gyr y finalmente, cuando $H_0 = 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ se modela un universo de 11.4671 Gyr. Por convención, se fija $a(t_0) = 1$, para un tiempo actual.

También nos interesó revisar la evolución del parámetro de Hubble respecto a la expansión del universo para los mismos tres valores del parámetro de Hubble en tiempo actual. En la figura 2.2 mostramos la evolución del parámetro de Hubble respecto al corrimiento al rojo (esta gráfica también la hicimos empleando el código CLASS). Esta figura muestra la relación entre la expansión del universo y el corrimiento al rojo.

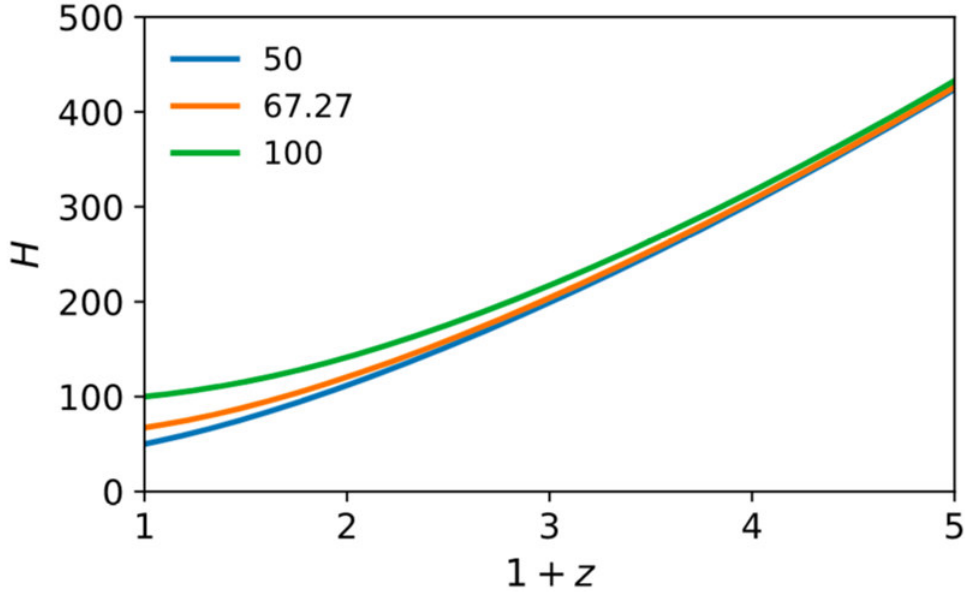


Figura 2.2: Evolución del parámetro de Hubble respecto al corrimiento al rojo, en el tiempo actual $a(t_0) = 1$, para los valores del parámetro de Hubble $H_0 = 50, 67.27$ y $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

2.1.2. Componentes y estructuras del universo

En el capítulo anterior describimos brevemente las estructuras del universo, las observaciones sugieren que el universo actúa jerárquicamente, las estructuras más pequeñas se unen hasta formar galaxias y después cúmulos de galaxias, por ejemplo, las observaciones del bosque Lyman-Alfa [19].

Con el colapso gravitacional de la materia se forman estructuras pequeñas como estrellas, las cuales comienzan a brillar, debido a que la materia bariónica se calienta y los objetos se aproximan al equilibrio hidrostático; esto se da por la inestabilidad de Jeans [20].

Los modelos que proponían que el universo estaba compuesto por materia ordinaria no predicen las estructuras observadas, además de que la cantidad de materia ordinaria es muy baja. Como se mencionó en el capítulo anterior, la materia oscura se infiere a partir de los efectos gravitacionales que causa sobre la materia visible, tales como estrellas y galaxias. Aún no se ha podido detectar directamente y su composición es desconocida, hasta el momento sólo se sabe que no interactúa de ninguna forma con la radiación electromagnética; pero es una componente importante de los modelos de formación de estructuras y en las anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas.

2.1.3. Densidad del universo

La densidad total del universo es un parámetro adimensional que lo denotamos con Ω , éste parámetro está compuesto por los diferentes tipos de materia en el presente universo, donde

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (2.1)$$

donde ρ es la densidad física del universo estimada, y ρ_c es la densidad crítica del universo, es decir, la densidad si el universo tiene geometría plana. Si el universo tiene geometría plana $\Omega = 1$, actualmente se sabe que $\Omega \approx 1$, el parámetro de densidad se puede separar en sus componentes de materia y energía oscura (debida a una constante cosmológica), entonces se escribe como

$$\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda \approx 1 \quad (2.2)$$

La materia se puede separar en sus diferentes componentes: materia bariónica, radiación, neutrinos y materia oscura

$$\Omega_M = \Omega_{CDM} + \Omega_b + \Omega_\nu + \Omega_\gamma + \dots \quad (2.3)$$

La nucleosíntesis propone que $\Omega_b \approx 0.05$, aunque se ha encontrado que la densidad de bariones visibles de estrellas y gas de galaxias y cúmulos es $\Omega_b \approx 0.003$, este valor es menor del 10% del valor predicho por la nucleosíntesis [21]. A esta discrepancia se le conoce como el **Problema de los bariones perdidos**. Se propuso que esta materia bariónica difícil de detectar debía distribuirse en filamentos gaseosos de baja densidad, conectando los cúmulos de galaxias y formando una enorme red en el Universo. En 2008, el telescopio XMN - Newton encontró evidencias de la existencia de esta red de filamentos de gas caliente conectando los cúmulos de galaxias Abell 222 y Abell 223 [22].

Por su parte, el parámetro de densidad de la materia oscura, se infiere de las observaciones mencionadas previamente, su valor medido es aproximadamente $\Omega_{CDM} = 0.26$; mientras que la densidad de neutrinos Ω_ν y la densidad de radiación Ω_γ son del orden de $\sim 10^{-5}$.

2.1.4. Geometría del universo

Se plantean tres tipos de universos de acuerdo con su geometría, la geometría del universo se describe matemáticamente por una constante k que aparece en la ecuación de Friedmann. Cuando $k < 0$ la geometría del universo es esférica y se tiene un universo cerrado; por otro lado, cuando $k = 0$ el universo posee geometría plana y finalmente, cuando $k > 0$ el universo presenta geometría hiperbólica y es abierto. Se puede definir un parámetro de densidad de la curvatura del universo a través de (2.4)

$$\Omega_k = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.4)$$

Aunque normalmente el parámetro Ω_k se fija a cero ya que las observaciones del Fondo Cósmico de Microondas apuntan que el Universo posee geometría plana, dado que $\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda \approx 1$, lo que implica que $\Omega_k \approx 0$. Desafortunadamente no es posible probar que el Universo posee

geometría plana dado que sólo podemos observar una fracción del universo, conocida como universo observable.

2.1.5. Anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas

Se sabe que el Fondo Cósmico de Microondas es bastante isotrópico, pero posee ciertas variaciones, conocidas como anisotropías. Las anisotropías fueron detectadas por el espectrofotómetro FIRAS en el satélite COBE en los años 1990's. El FIRAS obtuvo desviaciones del espectro del fondo cósmico con respecto a un cuerpo negro de referencia, tales desviaciones fueron del orden de 10^{-5} o menores. El espectro del Fondo Cósmico es descrito con mucha precisión por la función del espectro de cuerpo negro a una temperatura $T = 2.7255$ K [23].

Posterior a esa primera detección se realizaron mejores experimentos de detección con una mejor resolución angular y mayor sensibilidad, en 2003 la NASA empleando el satélite WMAP obtuvo datos más precisos de las anisotropías [24], y continuó mejorando los datos durante nueve años de resultados [25]. Posteriormente la misión Planck de ESA comenzó a operar en 2013, como una nueva generación de observaciones de Fondo Cósmico de Microondas [26]. Estos datos fueron mejorándose hasta 2018 [16].

También se han tomado mediciones desde la Tierra, a escalas angulares más pequeñas, como el ATC [27] y SPT [28].

El espectro del Fondo Cósmico da soporte al modelo Hot Big Bang, sus pequeñas anisotropías sirven para restringir los valores de varios parámetros cosmológicos. Con los datos de WMAP en 2003 revelaron que el Universo está formado por un 74% de energía oscura, un 22% de materia oscura y un 4% de materia bariónica. Las anisotropías se expresan en una expansión en armónicos esféricos del cielo CMB:

$$\frac{\delta T(\theta, \phi)}{T(\theta, \phi)} = \sum_{l,m=0} a_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (2.5)$$

Estas anisotropías de temperatura se detectan midiendo las temperaturas en dos puntos separados por un ángulo θ .

En la figura 2.3 mostramos dos gráficas del espectro de multipolos del Fondo Cósmico de Microondas, estas gráficas las generamos empleando el código CLASS. En ambas gráficas aparecen los puntos medidos por el satélite Planck en 2018 [16] aunque en la gráfica del lado izquierdo se muestra el espectro fijando los parámetros con los valores de la tabla 2.1.5, pero se muestran las curvas para $\Omega_b h^2 = 0.03$, $\Omega_b h^2 = 0.011$ y $\Omega_b h^2 = 0.022383$; mientras que del lado derecho se muestra el mismo espectro fijando los parámetros cosmológicos con los valores de la tabla 2.1.5, excepto que en este caso se fija $\Omega_b h^2 = 0.022383$ y se muestran las curvas para tres valores el parámetro $\Omega_{CDM} h^2$ (0.14, 0.1 y 0.12011). Del lado izquierdo los puntos se ajustan mejor a un valor $\Omega_b h^2 = 0.022383$ y del lado derecho notamos que se ajustan mejor para un valor $\Omega_{CDM} h^2 = 0.12011$.

En la tabla 2.1.5 se muestran los parámetros del modelo Λ CDM. H_0 es el parámetro de Hubble; T_{cmb} es la temperatura del fondo cósmico de microondas; Ω_{CDM} es la densidad de bariones

Parámetro	Valor
H_0	$67.556 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
T_{cmb}	2.7225 K
$\Omega_{CDM} h^2$	0.12011
n_s	0.96605
$\ln 10^{10} A_s$	3.0448
N_{ur}	3.046
τ_{reio}	0.0543
k	0

Cuadro 2.1: Algunos parámetros del modelo Λ CDM, estos valores se emplean para generar la gráfica de la izquierda de la figura 2.3.

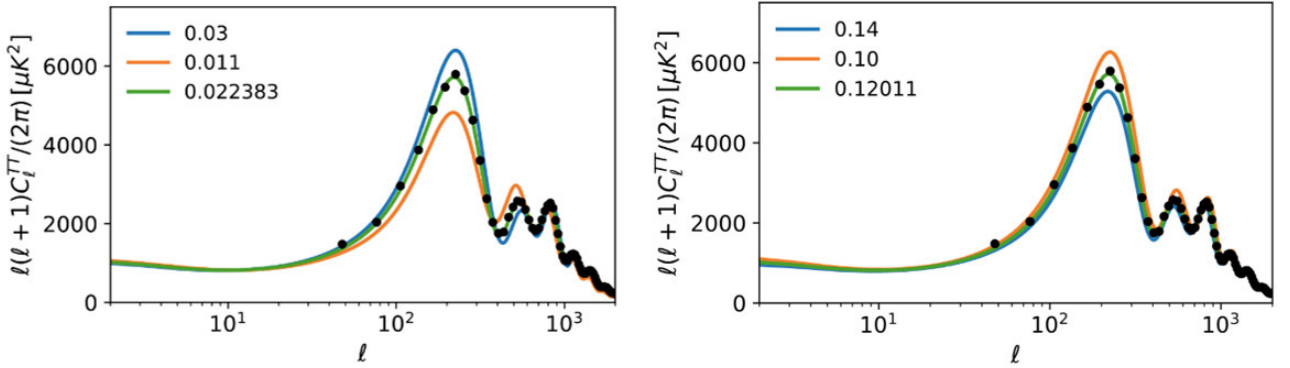


Figura 2.3: Espectro de multipolos del Fondo C3smico de Microondas. A la izquierda se muestra el espectro de multipolos variando 3nicamente la densidad de materia bari3nica, mientras que a la derecha se muestra el espectro para diferentes valores de densidad de materia oscura fr3a; los puntos son datos experimentales son tomados de Planck 2018 [16].

multiplicado por h^2 (donde h es el valor del par3metro sin dimensiones, empleado para expresar el par3metro de Hubble como $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; n_s es el 3ndice espectral escalar; N_{ur} es la densidad de neutrinos ultrarelativistas; τ_{reio} es el camino 3ptico hasta la reionizaci3n, A_s es la amplitud de fluctuaci3n escalar y k es la constante de curvatura.

Previamente mencionamos que el universo parece ser plano, si el universo no fuera plano las curvas del espectro de multipolos no se ajustar3an a los datos observacionales, consideramos tres valores de Ω_k , -0.1 , 0 , 0.1 y con el resto de par3metros fijados con los valores obtenidos en [16], la figura 2.4 nos muestra que el valor $\Omega_k = 0$ y por consiguiente $k = 0$ es el valor que se ajusta para los datos.

Con los datos del sat3lite Planck es posible imponer restricciones en los valores de los diferentes par3metros del modelo, por ejemplo, en la figura 2.5 se presentan las regiones de confianza de los diferentes par3metros del modelo Λ CDM, esta imagen se tom3 del art3culo [16].

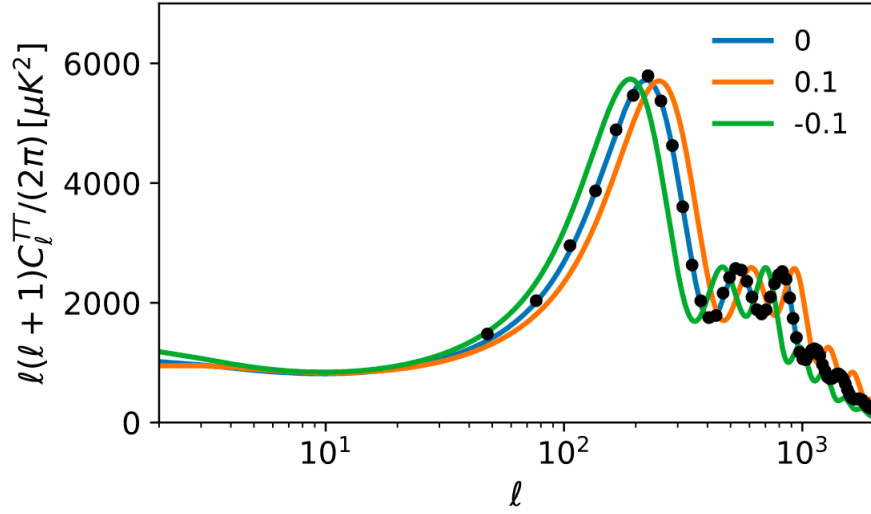


Figura 2.4: Espectro de multipolos del Fondo C3smico de Microondas para $\Omega_k = 0, -0.1$ y 0.1 ; los puntos son datos experimentales tomados de Planck 2018 [16].

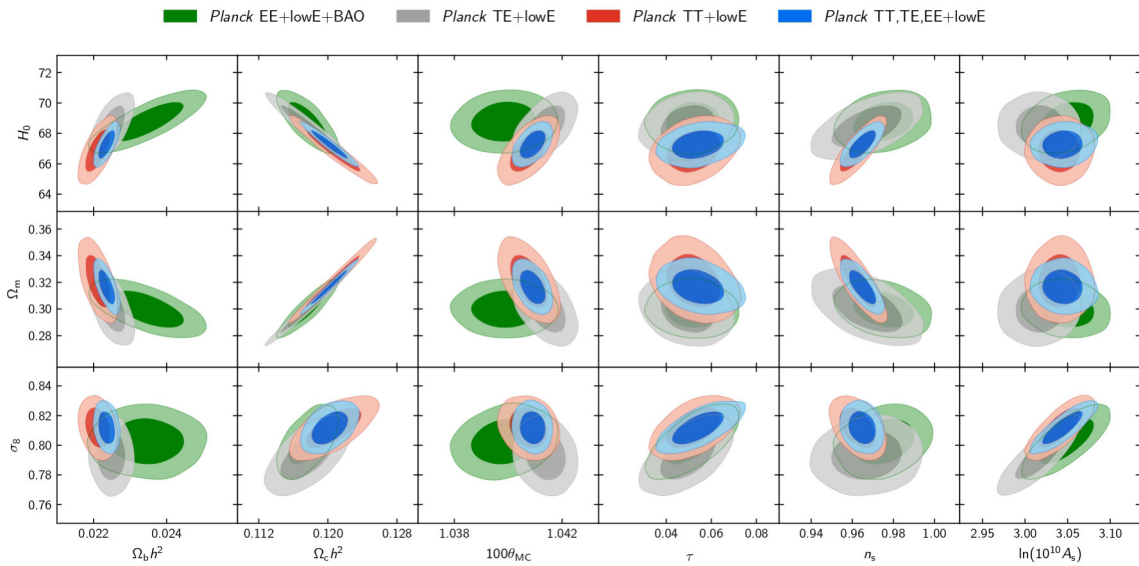


Figura 2.5: Regiones de confiianza que contienen 68 % y 95 % de probabilidad, de los espectros, imponen restricciones sobre los par3metros del modelo Λ CDM; en color verde se muestran las regiones considerando los espectros separados Planck EE de alta polarizaci3n combinados con los espectros de baja polarizaci3n (low-E), as3 como las oscilaciones ac3sticas de bariones (BAO); por su parte en color gris se consideran los espectros TE y low-E; luego en color rojo los espectros TT y low-E; finalmente en azul se tienen los espectros TT, TE, EE y low-E. Esta figura fue tomada del art3culo [16].

2.2. Modelo CDM

Como mencionamos previamente, la materia oscura es una hipótesis congruente, que resuelve problemas como el de las curvas de rotación planas, aunque realmente se desconoce su composición. El modelo CDM se refiere a la materia oscura fría, en inglés «cold dark matter»; este modelo es el modelo más aceptado de materia oscura, propone que la materia oscura se mueve a velocidades no relativistas, por eso se denomina «fría». En esta sección se tratan las características principales del modelo CDM, así como las evidencias y problemas de este modelo.

2.2.1. Materia oscura

En el capítulo anterior se habló de las primeras evidencias de materia oscura. Primero Zwicky al estudiar el cúmulo Coma aplicó el teorema virial y encontró que la respuesta más sencilla al problema era que la materia visible era tan solo una pequeña fracción de la materia total del Universo, posteriormente con las observaciones de Vera Rubin se estableció el problema de la materia oscura. Actualmente hay más pruebas indirectas de la existencia de materia oscura como son las anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas y las lentes gravitacionales en cúmulos de galaxias, como el Cúmulo Bala (1E 0657-56) [29].

2.2.2. Modelo Estándar de Partículas Elementales

El modelo estándar de partículas elementales es la teoría a nivel subatómico aceptada en la actualidad. Este modelo describe las diferentes partículas elementales y sus interacciones con mucha precisión.

Las partículas elementales se clasifican en bosones y fermiones, de acuerdo a la distribución estadística que satisfacen. Los bosones cumplen la función de mediar las «fuerzas»; estos son: el fotón, el gluón, el gravitón (partícula a la que se debe la fuerza gravitatoria, pero aún no se ha detectado), bosones W y Z, el Higgs, y otras partículas hipotéticas, como axiones, bosones neutrales, bosones ligeros y bosones pesados. Estas partículas y sus interacciones son importantes para describir diferentes procesos astrofísicos y cosmológicos en diferentes etapas del universo. Los fermiones se caracterizan por tener espín $1/2$ y se dividen en leptones y quarks. Los quarks son partículas masivas que forman bariones y mesones, los bariones son partículas formadas por tres quarks, protones y neutrones, es por esta razón que la materia visible se denomina bariónica. Por otro lado, están los leptones, como son el electrón, el muón, tau, los neutrinos y sus antipartículas.

En cosmología los neutrinos son importantes dado que son candidatos a materia oscura, además de que se supone que debe existir un fondo de neutrinos, el cual no se ha podido detectar. Los neutrinos son fermiones sin carga y espín $\frac{1}{2}$, poseen una sección eficaz muy baja, lo que les permite pasar a través de la materia ordinaria sin perturbarla. Existen tres especies de neutrinos, cada uno asociado al electrón, fermión y al muón. Las cotas experimentales para sus masas son $m_{\nu_e} < 1.1 \text{ eV}$, $m_{\nu_\tau} < 0.19 \text{ MeV}$ y $m_{\nu_\mu} < 18.2 \text{ MeV}$ [30].

2.2.3. Candidatos de materia oscura

Existen varios candidatos de materia oscura como son partículas elementales como son los neutrinos, así como partículas hipotéticas como los WIMP's y los axiones, los cuales no pertenecen al Modelo Estándar; aunque también se han propuesto objetos masivos compactos de halo conocidos como MACHOs (por sus siglas en inglés, MAssive Compact Halo Object). A continuación, revisamos brevemente estos candidatos. Dado que se desconoce la naturaleza de la materia oscura, se ha planteado que la materia oscura está formada por partículas elementales individuales que interactúan entre sí y con la materia bariónica de forma gravitacional. Los neutrinos por ejemplo son partículas tan abundantes como los fotones, pero tienen una interacción muy débil; los neutrinos pueden ser de dos tipos: neutrinos ligeros y neutrinos pesados. Los neutrinos pesados son aquellos con masas que exceden 1 MeV, su densidad es $\Omega \sim 1$, $m_\nu c^2 \approx 1 \text{ GeV}$, y con estas masas tan grandes los neutrinos se volvieron no relativistas en tiempos tempranos del universo, lo que permite que sea candidatos a CDM. Pero como se habló anteriormente, las cotas experimentales de los neutrinos indican que de tener masa, esta sería mucho más baja que 1 GeV. Por esta razón, los neutrinos no son los principales candidatos. Los neutrinos ligeros podrían explicar la densidad de materia oscura observada, $\Omega_{DM} \approx 0.26$, pero son partículas relativistas, y esto evita que se formen las estructuras galácticas. En su momento se planteó la posibilidad de materia oscura caliente, la cual consistía en partículas no bariónicas que viajan a velocidades relativistas, pero no puede explicar la formación de galaxias desde el Big Bang. Las observaciones muestran que la materia se ha agrupado en escalas muy pequeñas, y las partículas relativistas o cercanas a ser relativistas no se agrupan a esas escalas. No se descarta esta posibilidad, pero en caso de existir, no sería la principal forma de materia oscura. Continuamos con los MACHOs, los cuales están formados por materia bariónica, como son las estrellas marrones, que están conformadas por densos pedazos de elementos pesados y se hallan fuera del disco galáctico. Actualmente los modelos que suponen que la materia oscura está conformada por MACHOs se han descartado, pues a partir de estudios de la nucleosíntesis del Big Bang, las estrellas enanas café y estrellas tenues no contribuyen más del 1% de la densidad de masa de sus halos [31]. El principal candidato del modelo Λ CDM son las WIMP's (Weakly Interacting Massive Particles), las cuales son partículas elementales que posiblemente no forman parte del Modelo Estándar de Partículas Elementales e interactúan gravitacionalmente y a través de alguna otra interacción. Según algunos modelos, se espera que muchos candidatos WIMP's se hayan formado en el universo temprano, ya que la materia oscura fría es necesaria para que se formaran las estructuras gravitacionales observadas en la actualidad. Los modelos sobre partículas WIMP consideran partículas con masas grandes comparadas con las partículas del Modelo Estándar, normalmente del orden de GeV. Algunos candidatos WIMP eran las partículas supersimétricas, pero los diversos experimentos de búsqueda de partículas supersimétricas no han detectado tales partículas.

Finalmente, tenemos los axiones, que son partículas teóricas elementales postuladas para resolver el problema CP fuerte en QCD [32], aunque aún no se ha demostrado su existencia experimentalmente. La teoría estipula que la partícula debería tener una masa muy pequeña y sin carga eléctrica. Se ha planteado que la materia oscura se encuentra en objetos astrofísicos compactos que contienen muchas partículas.

2.2.4. Características del Modelo CDM

Para detectar la materia oscura se han empleado diversas técnicas, por ejemplo, a través del análisis estadístico de las distorsiones de galaxias a una microescala, debidas a las lentes débiles (lentes gravitacionales débiles). En estos análisis encuentran las relaciones masa - luminosidad correspondientes con las densidades de materia oscura predichas por otras técnicas [33]. En la actualidad existen varios experimentos como son: DAMA/Nal, Egret, Cryogenic Dark Matter Search en la Mina de Soudan, XENON en Gran Sasso, ArDM, que buscan detectar a estos candidatos de materia oscura, pero hasta el momento ninguno ha tenido éxito. En la actualidad, la hipótesis más aceptada es que la materia oscura se compone por partículas elementales que no forman parte del modelo estándar, entre las partículas propuestas están: axiones, WIMPs y neutrinos estériles. Con los resultados de los experimentos y las observaciones cosmológicas se han descartado o modificado los modelos de axiones y WIMPs.

Se sabe que la materia oscura compacta las estructuras visibles. Para explicar la formación de estructuras en el modelo del Big Bang se propuso que la materia oscura se mueve a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz, por esto se le conoce como materia oscura fría, esto implica que su dinámica no es relativista. Esta materia no es bariónica, cuya partícula principal del modelo son los WIMP's. Se han hecho diversas simulaciones computacionales de N - partículas, para tratar de predecir las estructuras cosmológicas observadas. Las simulaciones muestran procesos de formación de estructura que concuerdan con las estructuras a grandes escalas (del orden de megapársecs), así como en diversas explicaciones sobre las propiedades de las galaxias y cúmulos de galaxias.

2.2.5. Evidencias y problemas el modelo CDM

Las simulaciones computacionales de miles de millones de partículas de materia oscura fría predicen estructuras consistentes con las observaciones de galaxias, como son el Bosque de Lyman - alfa [19], la 2dF Galaxy Redshift Survey [34] y Sloan Digital Sky Survey [35] han mostrado que el modelo Λ CDM es apropiado para describir la formación de galaxias, además de que permiten refinarlo.

El modelo CDM es el modelo más aceptado para describir materia oscura, pero desde los años 1990s se han propuesto modelos de materia oscura como un campo escalar, los cuales predicen de forma más adecuada las estructuras a escalas del orden de kilo pársecs. Se ha encontrado que el modelo de materia oscura fría CDM, en sus diferentes variaciones, presenta discrepancias en escalas del orden de kpc. Una de ellas se debe a que los perfiles de densidad predichos por CDM tienen un aumento abrupto en la densidad central, en contraste con las curvas de rotación observadas en galaxias pequeñas, en otras palabras, predice erróneamente la estructura a pequeña escala, dado que predice una abundancia de galaxias enanas y da excesos de materia en los núcleos (core - cusp problem), contrario a lo que se obtiene en las observaciones [36]. En las simulaciones de N cuerpos se obtienen más subestructura (escalas galácticas) que la que se ha observado, tales simulaciones predicen la existencia de un número muy elevado de halos pequeños orbitando alrededor de estructuras mayores, por ejemplo, La Vía Láctea, contrariamente al número de galaxias satélites observadas localmente. Aunque esto no necesariamente indica que el modelo sea erróneo, ya que puede ser un problema observacional [37].

2.3. Breve resumen del modelo Λ CDM

Con los datos de las variaciones de la temperatura del CMB tomados por el satélite Planck, las mediciones de polarización del satélite WMAP y de los experimentos terrestres ACT y SPT, se obtienen los valores de los parámetros relevantes del modelo Λ CDM.

Los parámetros libres del modelo son el parámetro de densidad de bariones Ω_b , el parámetro de densidad de la constante cosmológica (energía oscura) Ω_Λ , el parámetro de densidad de materia oscura fría Ω_{CDM} , el índice espectral escalar n_s , la medida del tamaño del horizonte de sonido en la última dispersión $100\theta_{MC}$, el camino óptico hasta la reionización τ_{reio} , el parámetro de Hubble H_0 y la edad del universo. Comúnmente se asume un universo plano, pero cuando en algún modelo se supone una geometría diferente, se tiene una curvatura espacial y un parámetro de densidad de curvatura Ω_k . Los valores de los parámetros del modelo no se distribuyen de forma gaussiana, estos son obtenidos con códigos numéricos analizando las cadenas de Markov Monte Carlo.

Los parámetros obtenidos por el satélite Planck [17], dan valores de los parámetros de densidad de materia y energía oscura $\Omega_M h^2 = 0.1430 \pm 0.0011$ y $\Omega_{CDM} h^2 = 0.1200 \pm 0.0012$, para un valor de $h = 0.672$ se tiene que $\Omega_M = 0.3166 \pm 0.0084$ y $\Omega_\Lambda = 0.73$. Estos valores son importantes, ya que al variar alguno cambian drásticamente las propiedades del universo.

La existencia del fondo cósmico de microondas, así como la abundancia de elementos ligeros (predicción de la nucleosíntesis) proporcionan un soporte al modelo del Big Bang.

Capítulo 3

Materia Oscura como campos escalares

Previamente hablamos de varias evidencias de materia oscura y como es que tales observaciones sirven para proponer y probar modelos. El modelo principal de materia oscura es el modelo CDM, y a pesar del éxito predictivo a escalas de megapársecs presenta algunos problemas a escala de kilopársecs. El modelo CDM no predice correctamente la formación de estructuras a un orden de kilopársecs, ya que la enorme longitud de onda de Compton de las partículas candidatas impide la formación de estructuras en escalas galácticas y subgalácticas.

En los años 1990's se buscó resolver las discrepancias de este modelo, suponiendo que la materia oscura debía ser un campo escalar, tomando como referencia el Modelo Estándar de Partículas Elementales, se propuso que la materia oscura debía estar compuesta por bosones. Ji y Sin propusieron un bosón ultraligero pseudo Nambu - Goldstone como un candidato a materia oscura; en este modelo la materia oscura se describe por una función de onda macroscópica [38, 39], estos bosones se condensan en objetos como estrellas de bosones y estrellas de solitones oscilantes [40]. Posteriormente se realizaron muchos trabajos desarrollando el modelo, ver por ejemplo [41, 42, 43, 44, 45].

En este capítulo se expone brevemente una introducción al modelo de materia oscura como campos escalares. los modelos de materia oscura escalar también se conocen como wave dark matter y BECDM. El modelo de materia oscura escalar se conoce como SFDM, debido a sus siglas en inglés, Scalar Field Dark Matter (SFDM) y supone la materia oscura y la energía oscura como campos escalares.

Siguiendo las observaciones de las curvas de rotación, se infiere que los halos galácticos contienen materia oscura.

El modelo SFDM propone que la materia oscura se comporta más como una onda que como una partícula. Los campos escalares ultraligeros se condensan a bajas temperaturas y forman condensados Bose-Einstein, describiendo así los halos galácticos. A escalas cosmológicas tales condensados se comportan como materia oscura fría, pero poseen un comportamiento diferente a escalas galácticas. Este modelo logra reproducir los resultados del modelo CDM a grandes escalas y parece ser un mejor modelo para la formación de estructuras observadas en el Universo a escalas galácticas. Tales modelos han evolucionado a lo largo de casi tres décadas.

Actualmente se postula que la materia oscura es un campo escalar bosónico ultraligero frío con autointeracciones, cuyos únicos parámetros libres son su masa y su autointeracción.

Cuando surgieron estas teorías, se preguntaron por qué la materia en los halos no cae hacia el centro de la galaxia y forma agujeros negros [46], este hecho sirvió como guía para construir modelos que describieran la materia oscura. Se sabe que los halos galácticos son del orden de kilopársecs y por lo tanto su longitud de onda debe ser de este orden. Para poder lograr que la materia oscura tuviera implicaciones relevantes a escalas galácticas y tomando en cuenta la hipótesis de materia oscura fría se propuso una partícula de masa del orden de 10^{-22} eV/ c^2 . Con una partícula de este orden, tenemos una longitud de onda de de Broglie del orden de kilopársecs; esto implica que los halos galácticos no se colapsen a escalas menores. Nótese que, si se tomara el caso relativista, la longitud de onda de Compton asociada sería del orden de 1 pársec, pero para velocidades del orden de km/s es más apropiada la longitud de onda de de Broglie. Es importante mencionar que cuando hay una autointeracción se permite una masa más grande.

De forma resumida, el modelo SFDM conserva la hipótesis central de CDM de que la materia oscura debe ser no relativista, proponiendo describir la materia oscura acoplando mínimamente un campo escalar con gravedad. SFDM propone la existencia de una partícula que no forma parte del modelo estándar de partículas elementales y que en conjunto se comporta como un condensado Bosé-Einstein. Este condensado describe el halo galáctico y es descrito por una función de onda macroscópica que es solución al sistema de ecuaciones acopladas Schrödinger-Newton, sistema en el límite clásico del sistema Einstein-Klein-Gordon.

Específicamente, en este trabajo se toma como marco de trabajo que la partícula de materia oscura es un axión que posee una masa $m = 10^{-22}$ eV/ c^2 .

3.1. Sistema Einstein-Klein-Gordon

Para describir la materia oscura se consideran campos escalares clásicos, tanto complejos como reales, en el marco de la Relatividad General. Partiendo de la hipótesis de materia oscura escalar, se tiene un campo escalar asociado, el cual se describe por la ecuación de Klein-Gordon

$$\square\phi = m^2\phi, \quad (3.1)$$

donde $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu]$ es el operador d'Alambertiano covariante. Como se busca un modelo que describa partículas escalares con interacciones gravitacionales, se acopla el sistema (3.1) con las ecuaciones de campo de Einstein, el sistema acoplado se describe por:

$$\begin{aligned} \square\phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi &= 0, \\ G_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

La ecuación de Klein-Gordon puede obtenerse partiendo de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} \phi^2 \right], \quad (3.3)$$

si el campo es real o a partir de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi^* - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} |\phi|^2 \right], \quad (3.4)$$

si el campo es complejo, en ambos casos se sustituye tal densidad lagrangiana en las ecuaciones de Euler Lagrange. Por simplicidad conviene realizar el análisis en unidades naturales, es decir, unidades en las cuales, $c = \hbar = 1$, así (3.2) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \square \phi - m^2 \phi &= 0, \\ G_{\mu\nu} &= 8\pi G T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

también se utilizará la siguiente notación: $\phi_{,\mu} = \partial_{\mu} \phi$, $\phi^{,\mu} = \partial^{\mu} \phi$, $\nabla_{\rho} T^{\mu\nu} = T_{;\rho}^{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}^{;\sigma} = \nabla^{\sigma} T_{\mu\nu}$

Para este sistema el tensor de energía - momento para el campo escalar complejo $\Phi^{(c)}$ se escribe como:

$$T_{\mu\nu}^{(c)} = \frac{1}{2} \left[\phi_{,\mu}^{(c)} \phi_{,\nu}^{(c)*} + \phi_{,\mu}^{(c)*} \phi_{,\nu}^{(c)} - g_{\mu\nu} (\phi^{(c),\sigma} \phi_{,\sigma}^{(c)*}) + m^2 |\phi^{(c)}|^2 \right], \quad (3.6)$$

y el tensor de energía - momento para un campo escalar real $\Phi^{(r)}$ se escribe como:

$$T_{\mu\nu}^{(r)} = \phi_{,\mu}^{(r)} \phi_{,\nu}^{(r)} - g_{\mu\nu} (\phi^{(r),\sigma} \phi_{,\sigma}^{(r)} + m^2 \phi^{(r)2}), \quad (3.7)$$

En ambos casos m representa la masa de las partículas escalares. También es posible derivar la ecuación de Klein-Gordon de la conservación del tensor de energía - momento $T^{(c,r)\mu\nu}_{;\nu} = 0$, como se muestra en el apéndice B. En estos casos se tiene un potencial de la forma $V = m^2 |\phi|^2$, aunque en muchos trabajos se emplea un potencial $V = m^2 \phi^2 + \lambda |\phi|^4$, por ejemplo ver [47], pero aquí consideraremos un potencial sin un término de autointeracción.

El sistema admite soluciones no topológicas, que tienen masas finitas y diferentes de cero, situadas en un espacio finito todo el tiempo y son libres de singularidad; estas soluciones se conocen como solitones. Existen diferentes tipos de configuraciones de solitones como son las estrellas de solitones escalares [40] y las estrellas de bosones [46], las cuales ha sido estudiadas en una gran cantidad de trabajos.

A partir del sistema EKG se puede describir la materia desde un punto de vista fenomenológico, por ejemplo, en [48] encontraron soluciones analíticas del sistema EKG en el límite débil gravitacional, las cuales emplearon para obtener los perfiles de densidad del modelo SFDM

y compararlos con los perfiles de las curvas de rotación de galaxias, el campo escalar posee presiones efectivas naturales no triviales que no permiten que en los centros de tales objetos se formen los perfiles de densidad en forma de cúspide; además este modelo concuerda con el modelo CDM.

El sistema EKG se ha estudiado rigurosamente, por ejemplo se han estudiado casos de simetría esférica llamados \mathcal{L} -boson stars [49, 50, 51].

3.2. Reducción del sistema Einstein-Klein-Gordon a un sistema Schrödinger-Newton

Para estudiar la materia oscura con el sistema Einstein-Klein-Gordon es posible resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (3.5), en la literatura se pueden encontrar varios trabajos donde se resuelven [49, 50, 51, 52]; pero dada la hipótesis de que la materia oscura es fría, es decir, se mueve a velocidades sub-relativistas, entonces es más apropiado considerar el límite débil de este sistema, en este caso el sistema Einstein-Klein-Gordon se reduce a un sistema Schrödinger-Newton, dicho de otro modo, la ecuación de Klein-Gordon en el límite no relativista se reduce a la ecuación de Schrödinger, mientras que las ecuaciones de Einstein se reducen a la ecuación de Poisson para un potencial newtoniano.

Para obtener límite débil, consideramos una métrica que se aproxima lo suficiente a la métrica de Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$) (ver por ejemplo [53]), entonces la métrica $g_{\mu\nu}$ con una perturbación:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

donde $h_{\mu\nu}$ es una perturbación, tal que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Dada la escala, se supone que la métrica es estática

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial \tau} = 0, \quad (3.9)$$

donde

$$\left| \frac{\partial h_{aa}}{\partial x^a} \right| \ll 1, \quad (3.10)$$

con estas suposiciones se tiene que

$$g_{ab}g^{ac} = \delta_b^c - h_b^c + h_b^c - h_{ab}h^{ac} \approx \delta_b^c, \quad (3.11)$$

Para la dinámica del sistema se emplea la ecuación de geodésicas, se toma el cuadrivector de posición y la cuadrivelocidad:

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}), \quad u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}), \quad (3.12)$$

En coordenadas comóviles, la cuadrivelocidad se puede definir como:

$$u^{\mu'} = (c, 0, 0, 0), \quad (3.13)$$

Empleando las coordenadas comóviles en ese marco de referencia se tiene:

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^a \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0, \quad (3.14)$$

Entonces,

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} = -\Gamma_{00}^a c^2, \quad (3.15)$$

donde

$$\Gamma_{00}^a = -\frac{1}{2} \eta^{a\alpha} \left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^a} \right), \quad (3.16)$$

se obtiene

$$\frac{\partial^2 x^a}{d\tau^2} = \frac{c^2}{2} \eta^{a\alpha} \left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x_\alpha} \right), \quad (3.17)$$

lo que puede ser reescrito como

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \tau^2} = \frac{c^2}{2} \nabla h_{00}, \quad (3.18)$$

Tomando el hecho de que

$$\mathbf{F} = -m \nabla \Phi, \quad (3.19)$$

así obtenemos $h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2}$, entonces $g_{00} = -c^2 - \frac{2\Phi}{c^2}$, a esto se le conoce como la norma de Newton (newtonian gauge). En este caso, el potencial es el potencial gravitacional $\Phi = -\frac{GM}{r}$. Con las ecuaciones de Einstein

$$R_{ab} = \kappa \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right). \quad (3.20)$$

Del tensor de energía - momento, $T_{ab} = \rho u^a u^b + p$, se anulan todas las componentes, excepto la componente $\{0,0\}$:

$$T_{00} = \rho c^2. \quad (3.21)$$

Entonces, $T = -\rho c^2$, así por un lado se obtiene que

$$\kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) \approx \frac{\kappa \rho c^2}{2}. \quad (3.22)$$

Luego se calcula el tensor de Ricci perturbado y se tiene

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) h_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 \left(\frac{2\Phi}{c^2} \right). \quad (3.23)$$

Finalmente, sustituyendo estos resultados en (3.20) y dado que $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, se tiene

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (3.24)$$

Del otro lado tenemos la ecuación de Klein-Gordon para partículas libres, la cual describe partículas relativistas, se construye a partir de la energía relativista $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ y los operadores $\hat{E} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ y $\hat{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$, pero para partículas no relativistas se emplea la ecuación de Schrödinger [54], la cual se puede obtener escribiendo

$$\phi = e^{-\frac{i m c^2}{\hbar} t} \psi, \quad (3.25)$$

donde la energía cinética se escribe en términos de la energía relativista como $K = E - mc^2$, considerando que $(\dot{\psi}) \ll 1$ obtenemos

$$-\hbar^2 \left(-\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi - \frac{2i m c^2}{\hbar} \dot{\psi} \right) = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi + m^2 c^4 \psi, \quad (3.26)$$

con un poco de álgebra tenemos que

$$i\hbar^2 \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi, \quad (3.27)$$

donde (3.27) es la ecuación de Schrödinger para una partícula libre.

En varios trabajos se realizan reducciones al sistema Einstein - Klein - Gordon, estableciendo algunas condiciones de acuerdo a los casos en particular que se desean estudiar, por ejemplo [55] y [56] plantean una métrica asumiendo simetría esférica en términos de dos funciones dependientes de la distancia radial y del tiempo, en ese caso la métrica se escribe como:

$$ds^2 = -\alpha(r, t)^2 dt^2 + a(r, t)^2 dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.28)$$

escriben la ecuación de Klein - Gordon para esta métrica y luego pasan al límite no relativista, descrito por la ecuación de Poisson y la ecuación de Schrödinger.

3.3. Sistema Schrödinger-Poisson

El sistema Schrödinger-Poisson es un sistema derivado del límite débil del sistema Einstein-Klein-Gordon, por lo tanto permite estudiar la mecánica cuántica no relativista acoplada a la gravedad, el sistema se representa por el sistema (3.29), en donde ψ es la función de onda del sistema y V es el potencial.

$$\begin{aligned} i \hbar \partial_t \psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi, \\ \nabla^2 V &= f, \end{aligned} \quad (3.29)$$

Cuando la ecuación de Poisson describe un potencial gravitatorio, el sistema Schrödinger-Poisson se conoce como Schrödinger-Newton, en ese caso, el sistema se reescribe como

$$\begin{aligned} i \hbar \partial_t \psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + m \Phi \psi, \\ \nabla^2 \Phi &= 4\pi G |\psi|^2, \end{aligned} \quad (3.30)$$

El sistema Schrödinger-Newton fue propuesto por primera vez en [57], donde utilizan este sistema para describir configuraciones de equilibrio de bosones en el caso no relativista. Posteriormente se ha utilizado en una gran variedad de trabajos para describir la materia oscura escalar.

En muchos trabajos se propone una simetría esférica, tomando como argumento que los halos se suponen esféricos. El sistema Schrödinger-Newton tiene dos tipos de soluciones: las estrellas de bosones newtonianas y las oscilaciones newtonianas, las estrellas de bosones son campos complejos, mientras que las oscilaciones newtonianas son campos reales.

Las estrellas de bosones son cuerpos astrofísicos exóticos formados por bosones, en este caso la propuesta es que tales bosones son axiones con masas ultraligeras, del orden de $10^{-22} \text{eV}/c^2$.

3.4. Propiedades del sistema Schrödinger-Newton

En esta sección presentamos algunas propiedades del sistema, aunque detalles más concretos se pueden encontrar en revisiones del modelo como [58, 59, 60].

En [55] estudian las configuraciones de equilibrio del sistema Schrödinger-Newton imponiendo condiciones esféricas. Ellos emplean un parámetro arbitrario λ , el cual sirve para escalar las cantidades en las que se resuelve el sistema numérico a las cantidades de interés físico. Ellos obtienen que para el estado fundamental (nodo 0), el 95 % de la masa se distribuye en un radio $x_{95} = \hat{r} = 3.93$ y el parámetro escalado de la masa es $\hat{M} = 2.0622$. Aquí el parámetro λ relaciona las cantidades con sus escalamientos

$$\lambda = \frac{M}{\hat{M}} = \frac{\hat{r}}{r}. \quad (3.31)$$

Este parámetro de escalamiento es usado en diversos trabajos y expresa el límite débil del sistema Einstein-Klein-Gordon, se tiene que $\lambda^2 \leq 10^{-3}$. Al tomar el límite no relativista del sistema Einstein-Klein-Gordon, en el cual las partículas tienen una longitud de onda de Compton (caso relativista) denotada por L_C asociada, pero al pasar al límite no relativista es más adecuado utilizar una longitud de onda de de Broglie; estas longitudes de onda se relacionan entre sí por medio del parámetro λ de la siguiente forma:

$$\frac{L_C}{\lambda} = \frac{\hbar}{\lambda m c} = \frac{\hbar}{m v} = L_B, \quad (3.32)$$

El parámetro λ es un parámetro que relaciona las propiedades de escala del sistema Schrödinger-Poisson. Existen algunas cantidades definidas a partir de la teoría cuántica y la teoría de campos que sirven para obtener información del sistema

La densidad de masa está dada por

$$\rho = \psi\psi^*. \quad (3.33)$$

La masa numérica o masa integrada del sistema está dada por

$$M = \mathcal{M} \int_{\mathbb{R}^3} \rho d^3x. \quad (3.34)$$

La energía total del sistema está dada por $E_{tot} = E_K + E_Q + W$, donde E_k es la energía cinética y E_Q la energía cuántica del sistema (aunque usualmente se refieren a la energía cinética como la energía cinética más la energía cuántica), estas están dadas por 3.35; mientras que W denota la energía potencial dada por 3.36

$$E_K + E_Q = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \psi^* \nabla^2 \psi d^3x, \quad (3.35)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \Phi d^3x, \quad (3.36)$$

La corriente de partículas está dada por

$$\mathbf{J} = \frac{i}{2}[\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi]. \quad (3.37)$$

Para el cálculo de energías en el sistema Schrödinger-Newton se considera una densidad lagrangiana que depende de la función de onda ψ , su conjugado y sus primeras derivadas, así como del potencial gravitacional Φ y sus primeras derivadas, explícitamente:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \Phi, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*, \partial_\mu \Phi). \quad (3.38)$$

Explícitamente el lagrangiano del sistema Schrödinger-Poisson se escribe como

$$\mathcal{L} = - \left[\frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{2} \Phi |\psi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{i}{2} (\psi \dot{\psi}^* - \psi^* \dot{\psi}) \right]. \quad (3.39)$$

La energía total del sistema está dada por el hamiltoniano canónico

$$E = H_C = \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 \mathcal{H}_C = \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 [\pi_\psi \dot{\psi} + \pi_{\psi^*} \dot{\psi}^* + \pi_\Phi \dot{\Phi} - \mathcal{L}], \quad (3.40)$$

donde los respectivos momentos conjugados son

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}, \quad \pi_{\psi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*}, \quad \pi_\Phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}}, \quad (3.41)$$

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} dx^3 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} \dot{\psi}^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \dot{\Phi} - \mathcal{L} \right], \quad (3.42)$$

$$\pi_\psi = -\frac{i\psi^*}{2}, \quad \pi_{\psi^*} = \frac{i\psi}{2}, \quad \pi_\Phi = 0. \quad (3.43)$$

Finalmente se obtiene la energía total del sistema como

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [-\psi^* \nabla^2 \psi + \rho \Phi] d^3x, \quad (3.44)$$

la cual es la suma de las energías potencial gravitacional y cinética dadas por (3.35) y (3.36).

3.5. Representación hidrodinámica del sistema Schrödinger-Poisson

El modelo de materia oscura escalar propone que los halos galácticos se forman debido a que las partículas de materia oscura forman un condensado Bose - Einstein. Matemáticamente esta relación entre el campo y el condensado se expresa empleando la representación hidrodinámica del sistema a través de las ecuaciones de Madelung [59], las cuales se obtienen de la ecuación de Schrödinger definiendo:

$$\psi = \sqrt{\frac{\hat{\rho}}{m}} e^{i\theta}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{m} \nabla \theta, \quad (3.45)$$

donde $\hat{\rho} = m \rho = m |\psi|^2$ y \mathbf{v} representa la velocidad del fluido; sustituyendo las relaciones de la ecuación (3.45) en la ecuación de Schrödinger tenemos

$$i\hbar \left[\dot{\hat{\rho}} + \frac{2i\hat{\rho}}{\hbar} \dot{\theta} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla^2 \hat{\rho} - \frac{(\nabla \hat{\rho})^2}{2\hat{\rho}} + \frac{2i(\nabla \hat{\rho} \cdot \nabla \theta)}{\hbar} + 2i\frac{\hat{\rho}}{\hbar} \nabla^2 \theta - \frac{2}{\hbar^2} \hat{\rho} (\nabla \theta)^2 \right] + 2\hat{\rho} \Phi, \quad (3.46)$$

el primer y segundo término de la ecuación de un fluido se pueden reescribir como:

$$\nabla^2 \hat{\rho} - \frac{(\nabla \hat{\rho})^2}{2\hat{\rho}} = 2\hat{\rho} \frac{\nabla^2(\sqrt{\hat{\rho}})}{\sqrt{\hat{\rho}}},$$

entonces tenemos

$$i\hbar \dot{\hat{\rho}} - 2\hat{\rho} \dot{\theta} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(2\hat{\rho} \frac{\nabla^2(\sqrt{\hat{\rho}})}{\sqrt{\hat{\rho}}} \right) - i\hbar(\nabla \hat{\rho} \cdot \mathbf{v}) - \frac{i\hbar \rho}{m} \nabla^2 \theta + m\hat{\rho} \mathbf{v}^2 + 2\hat{\rho} \Phi, \quad (3.47)$$

separando la ecuación en términos reales e imaginarios, obtenemos las ecuaciones:

$$\dot{\hat{\rho}} = -(\nabla \hat{\rho} \cdot \mathbf{v}) - \hat{\rho}(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (3.48)$$

$$-\dot{\theta} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\hat{\rho}}}{\sqrt{\hat{\rho}}} + \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + \Phi, \quad (3.49)$$

La ecuación (3.48) se puede reescribir como

$$\dot{\hat{\rho}} + \nabla \cdot (\hat{\rho} \mathbf{v}) = 0. \quad (3.50)$$

Para la segunda se utiliza el potencial de Bohm [61, 62]:

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\hat{\rho}}}{\sqrt{\hat{\rho}}}. \quad (3.51)$$

$$-\dot{\theta} = Q + \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \Phi. \quad (3.52)$$

Aplicando el operador gradiente a la ecuación (3.52), además dado que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

Obtenemos la segunda ecuación

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{m} \nabla(Q + \Phi). \quad (3.53)$$

Las ecuaciones (3.50) y (3.53) se conocen como ecuaciones de Madelung, a partir de las cuales se representa el sistema en su forma hidrodinámica, la cual funciona como una buena aproximación [59].

Capítulo 4

El código PyUltraLight

Actualmente existen simulaciones muy detalladas de formación de galaxias, en las cuales se consideran las diversas componentes del universo, así como interacciones y procesos astrofísicos. Algunas simulaciones consideran materia oscura, bariónica y energía oscura; así como interacciones electromagnéticas y procesos astrofísicos como la formación de estrellas, los agujeros negros, el gas cósmico [63]. Estas simulaciones son muy complejas e implican un gran costo computacional. Una componente importante en las simulaciones cosmológicas es la materia oscura. Se han propuesto una gran variedad de modelos para describir la materia oscura aunque, el modelo CDM es el más aceptado en la actualidad [64]. Una alternativa a CDM es el modelo SFDM, del cual hablamos en el capítulo anterior.

En el presente trabajo buscamos estudiar estructuras de halos galácticos, descritos por solitones; consideramos únicamente materia oscura en el límite no relativista, dado que las observaciones muestran que los halos están formados principalmente por materia oscura. Emplearemos el sistema Schrödinger-Newton, sin restricciones de simetría esférica (como lo hacen en diferentes trabajos, por ejemplo [55, 56]) y condiciones iniciales generales, para ello empleamos el código libre PyUltraLight [1]. PyUltraLight emplea métodos pseudoespectrales para obtener una solución numérica del sistema Schrödinger - Newton:

$$\begin{aligned}i \hbar \partial_t \psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + m \Phi \psi, \\ \nabla^2 \Phi &= 4\pi G |\psi|^2.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Con este código se pueden estudiar diversas configuraciones, en las cuales una función de onda macroscópica describe varias configuraciones gravitacionales.

El proceso de formación de estructuras se da a través de interacciones de halos galácticos, como primera aproximación se modela la colisión de un sistema binario, como un sistema aislado, luego se extiende a la fusión de varios halos. Para estudiar la dinámica gravitacional es de interés estudiar las colisiones y mezclas de los solitones, así como órbitas que describen, por ello se evoluciona el sistema de Schrödinger - Poisson con diversas condiciones iniciales.

4.1. Descripción del código

Para modelar halos galácticos se emplean solitones formados por un varios axiones, todos con una masa $m = 10^{-22} \text{ eV}/c^2$. Y para describir la dinámica de tales objetos se emplea el sistema Schrödinger-Newton, el cual se obtiene en el límite no relativista del sistema Einstein-Klein-Gordon.

Para poder resolver numéricamente el sistema Schrödinger-Newton es necesario considerar dos aspectos muy importantes: el sistema debe adimensionalizarse y se debe tener muy en cuenta la resolución del sistema para poder lograr la convergencia deseada. A continuación, se describen brevemente estos aspectos.

4.1.1. Adimensionalización

Para resolver numéricamente el sistema Schrödinger - Poisson, se emplean las siguientes relaciones

$$t' = \frac{t}{\mathcal{T}}, \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{\mathcal{L}}, \quad \Phi' = \frac{\mathcal{T}}{\hbar} \Phi \quad \psi' = \mathcal{T} \sqrt{mG} \psi, \quad (4.2)$$

sustituyendo los términos primados en las ecuaciones del sistema se obtiene un sistema adimensional y se obtiene la siguiente relación entre la longitud y el tiempo del sistema:

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{L}^2 m}{\hbar}, \quad (4.3)$$

Para obtener un sistema con unidades físicas, tenemos los siguientes valores de los parámetros:

$$\mathcal{T} = \left(\frac{8\pi}{3H_0^2 \Omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} = 75.134 \text{ Gyr}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L} = \left(\frac{8\pi \hbar^2}{3m^2 H_0^2 \Omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} = 38.3648 \text{ kpc}, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{G} \left(\frac{8\pi}{3H_0^2 \Omega_0} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\hbar}{m} \right)^{\frac{3}{2}} = 2.22752 \times 10^6 M_\odot. \quad (4.6)$$

Estas unidades implican que por ejemplo para una rejilla de simulación de $10 \times 10 \times 10$ tenemos en unidades físicas una rejilla de $383.648 \text{ kpc} \times 383.648 \text{ kpc} \times 383.648 \text{ kpc}$. Por ejemplo, la velocidad en unidades físicas está dada por

$$v = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{T}} v_{\text{code}} = 0.49962 \text{ km/s } v_{\text{code}} \approx 0.499 v_{\text{code}}, \quad (4.7)$$

donde v_{code} es la velocidad en unidades del código. Es fácil notar que mientras se escojan velocidades $v_{code} \leq 100$, se cumple que el sistema está en el límite no relativista; aquí nunca se emplean velocidades de máximo $v_{code} = 20$.

4.1.2. Resolución del código y convergencia de las energías

Como mencionamos previamente, el código PyUltraLight [1] resuelve el sistema Schrödinger-Newton en una geometría cartesiana, sobre una rejilla $N \times N \times N$ con condiciones espaciales periódicas en la frontera. PyUltraLight consiste en un código principal y un código auxiliar que resuelve las ecuaciones por medio de un Runge - Kutta de cuarto orden. En un notebook de Python se emplean los códigos, en el se establecen las condiciones iniciales de la simulación y fija algunos parámetros de la simulación como es la resolución, es decir, la cantidad de segmentos en los cuales se divide la rejilla del sistema, el cual es un parámetro de mucha relevancia. En muchas simulaciones utilizamos una resolución de 128, esto quiere decir, que cada eje de la rejilla tridimensional se dividió en 128 segmentos. Aumentar la resolución aumenta la convergencia de las soluciones del código.

Los solitones en el sistema se sitúan en una rejilla tridimensional, la cual se divide en R intervalos por lado, donde R es la resolución numérica impuesta en el código. La resolución real del código está dada por

$$R' = \frac{N}{R}, \quad (4.8)$$

donde R es la resolución que se impone en el código y N es la longitud de la rejilla en unidades del código. Aumentar el tamaño de la rejilla implica que si se aumenta la longitud de la rejilla es necesario aumentar la resolución numérica del sistema para conservar la resolución real; por ejemplo, tomando las unidades del código se tiene que para una división de la rejilla de 128 y una caja de 10 unidades del código:

$$R' = \frac{10}{128} = 0.078125. \quad (4.9)$$

Si se quiere conservar $R' = 0.078125$ para una caja de 20 unidades, entonces se debe duplicar la resolución R . En muchos de los sistemas estudiados utilizando una resolución de 128 y una caja de $10 \times 10 \times 10$ es suficiente, en algunos casos no sirve de nada aumentar la resolución a 256, ya que se obtiene el mismo resultado, es decir, que los valores convergen rápidamente con una resolución de 128. Emplearemos M_s para denotar la masa de un solitón y M_c para referirnos a la masa central. Por ejemplo, consideremos la fusión de dos solitones en caída libre ubicados en las posiciones $(0, 2, 0)$ y $(0, -2, 0)$, ambos con masas $M_s = 20$; al aumentar la resolución a 256 no se obtiene ninguna mejoría con respecto a una resolución de 128. En el lado izquierdo de la figura 4.1 se muestra la evolución temporal de las energías durante un intervalo de tiempo $T = 2.5$, donde la energía total parece conservarse; aunque del lado derecho se muestra únicamente la energía total, ahí se muestra la variación de la energía total. La energía total se conserva a un orden de 2×10^{-3} , a grandes rasgos la energía se conserva bien en el sistema; las gráficas de

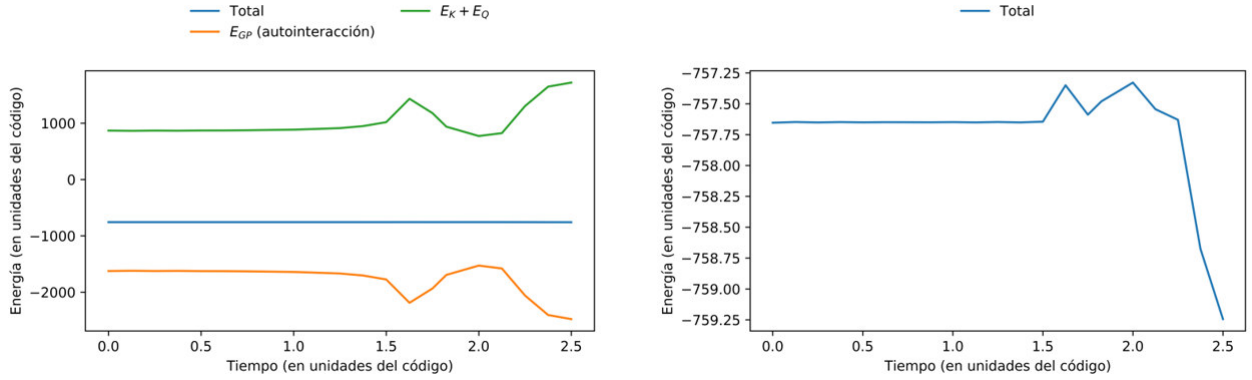


Figura 4.1: Sistema de prueba: dos solitones, de masas $M_s = 20$, ubicados en las posiciones $(0, 2, 0)$ y $(0, -2, 0)$ que están en caída libre. A la izquierda se muestra la gráfica de la evolución de las energías en el tiempo y a la derecha la gráfica de la evolución de la energía total en el tiempo, para una resolución de 128.

la figura 4.2 muestran la evolución de las energías para una resolución $R = 256$, a la izquierda tenemos la gráfica de evolución de las energías, no se observaron diferencias en las gráficas a la izquierda en las figuras 4.1 y 4.2; mientras que a la derecha únicamente está graficada la energía total, ahí se observa una variación menos que en el caso de $R = 128$, aquí es del orden de 10^{-4} . En muchos casos es importante aumentar el tamaño del espacio de solución y la resolución R para obtener mejores resultados.

4.1.3. Dinámica de solitones y aspectos importantes en las simulaciones

PyUltraLight [1] permite diversas configuraciones de halos de solitones descritos por su posición $\mathbf{x} = (x, y, z)$, su velocidad $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, su masa y su fase, iniciales. Al definir las condiciones iniciales el código emplea la función de onda

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \lambda^2 f(\lambda|\mathbf{x} - \mathbf{v}t|) e^{i(\lambda^2 \hat{M}t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 t)}, \quad (4.10)$$

donde λ es el parámetro arbitrario de escala que aparece en la ecuación (3.31), al igual que \hat{M} . Además de fijar las condiciones iniciales es necesario especificar la duración de la simulación, la resolución, el tiempo de inicio, la longitud de la rejilla y en caso de ser necesario incluir una masa central que genera un potencial central. Si se especifica un tipo de unidades físicas (que sean aceptadas en el código) el código hace la conversión a unidades del código, resuelve el sistema y luego regresa a unidades físicas. Aunque en nuestro caso, realizamos las simulaciones en unidades del código y al final los valores obtenidos los escribimos en términos de los parámetros de adimensionalización de longitud, tiempo y masa; respectivamente (4.5), (4.4) y (4.6).

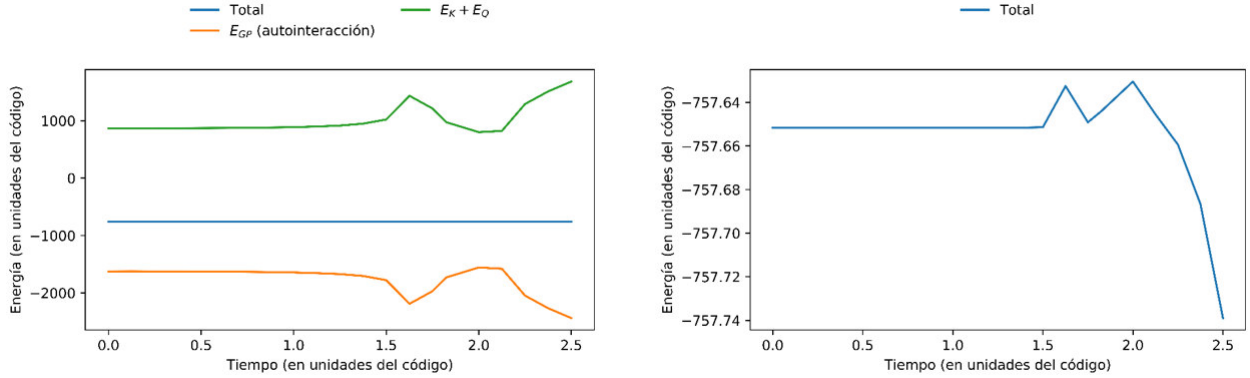


Figura 4.2: Sistema de prueba: dos solitones, de masas $M_s = 20$, ubicados en las posiciones $(0, 2, 0)$ y $(0, -2, 0)$ que están en caída libre. A la izquierda se muestra la gráfica de la evolución de las energías en el tiempo y a la derecha la gráfica de la evolución de la energía total en el tiempo, para una resolución de 256.

4.2. Configuraciones de halos solitónicos

En esta sección se presentan algunos casos estudiados, para revisar algunas propiedades de estos sistemas, así como algunos casos controlados, cuyos resultados clásicos son bien conocidos. Cada uno de estos sistemas se caracterizan por las condiciones iniciales fijadas. Se realizaron simulaciones para estudiar el comportamiento de los solitones, así como verificar diversos fenómenos como: la disrupción de mareas, las fuerzas repulsivas efectivas, los patrones de interferencia, la fusión de varios solitones y las diferentes órbitas que se observan al poner a interactuar a los solitones.

4.2.1. Interacciones entre un solitón y una masa central

Es de interés estudiar la interacción del solitón con un potencial central y observar diversos fenómenos como son: órbitas del solitón sobre el potencial central, choques entre el solitón y el potencial central, así como, la disrupción de mareas en los halos solitónicos y su capacidad para regenerarse. En el código PyUltraLight se incluye un potencial externo en forma de masa central, el cual puede representar a un agujero negro supermasivo, la masa central se empleó para estudiar los efectos disruptivos de los halos solitónicos al estar orbitando un agujero negro supermasivo, así como su capacidad para regenerarse; esto dado que las galaxias satélites pueden presentar gran longevidad, y este hecho puede ser utilizado para establecer cotas sobre la masa del bosón ultraligero por medio de la evolución numérica del sistema con las condiciones iniciales de tales casos. De forma más concreta, los efectos de disrupción de mareas se presentan, cuando una estrella se acerca lo suficientemente cerca al horizonte de sucesos de un agujero negro supermasivo las fuerzas de marea del agujero negro destruyen la estrella, en algunos casos experimentando un estiramiento del objeto en formas delgadas (espaguetización).

En 1971, John Wheeler propuso que una estrella en la vecindad de un agujero negro rotante sería destrozada por las mareas y liberar una pequeña cantidad de gas a velocidades relativistas, y que

es una consecuencia inevitable de los agujeros negros en los núcleos galácticos. Posteriormente Wheeler aplicó tal fenómeno al problema clásico en un agujero negro de Schwarzschild o Kerr [65]. Después, Luminet y Carter realizaron varios trabajos en los cuales estudiaron los fenómenos de disrupción de mareas de forma general [66]. Los eventos de disrupción de mareas y candidatos posibles se encuentran en The Open TDE Catalog <https://tde.space/bibliography/>.

Para comenzar a simular el fenómeno de la disrupción de mareas se tiene un sistema que consiste en un solitón y una masa central, la cual genera un potencial central sobre el solitón, el potencial central es externo al sistema por lo que el solitón no ejerce un potencial sobre la masa central y por lo tanto esta se mantiene estática. Comenzaremos con buscando órbitas circulares, por ello tomando como referencia la teoría newtoniana, para que un solitón describa una órbita circular alrededor de la masa central se requiere que la velocidad (siempre perpendicular al vector que une al solitón con la masa central), en unidades del código sea:

$$v = \sqrt{\frac{M_c}{r}} \quad (4.11)$$

donde M_c es la masa central y r es la distancia que separa al solitón de la masa central.

La primera simulación se realizó con una resolución $R = 128$ y se consideraron las siguientes condiciones iniciales en unidades del código: un solitón con masa $M_s = 10$ situado a en la posición $\mathbf{x} = (0, 2, 0)$ y una masa central (ubicada la posición $(0, 0, 0)$) $M_c = 10$, el solitón tenía una velocidad $\mathbf{v} = (\sqrt{M_c/r}, 0, 0)$, en este caso se observó que el solitón realizaba una órbita circular alrededor de la masa central, en la Figura 4.3 se muestran los contornos de densidad del solitón en diferentes tiempos, estos muestran que el solitón mantiene una distancia radial $r = 2$ del potencial central.

Con esto se verifica que el solitón orbita alrededor de la masa central describiendo una trayectoria central, en estos casos el solitón poseía una velocidad inicial $\mathbf{v} = (2.236, 0, 0)$ (en unidades del código), donde la magnitud de la velocidad del solitón en todo momento está dada por la ecuación (4.11), esto prueba que el código simula correctamente un caso bien estudiado.

De la gráfica de energías del sistema 4.4 se extrae que dado que la energía total $E_{total} < 0$, lo que implica que el sistema es ligado. La gráfica también muestra que la energía se conserva en todo el tiempo, al menos a un orden de 10^{-4} . De esta misma gráfica se observa que el resto de las energías varían muy poco y podemos decir que este sistema está en equilibrio gravitacional.

Luego se estudió el mismo sistema incrementando la masa central M_c a 50, 100, 250, 1000 y 2000 en unidades del código y fijando el resto de parámetros. Al aumentar a $M_c = 50$, sí se observa una disrupción, aquí las energías oscilan aumentando y disminuyendo. La figura 4.5 nos muestra los contornos de densidad del solitón en diferentes tiempos, se observa como las fuerzas de marea del potencial central destruyen al solitón. En estos casos se observa la disrupción del solitón al orbitar la masa central, se observó que la interacción es muy fuerte, y en ningún caso se observó que el solitón se regenerara.

También observó que para una masa central $M_c = 100$, las energías fluctúan bastante. A partir de un tiempo $t = 0.6$ en unidades del código la energía potencial gravitacional de autointeracción

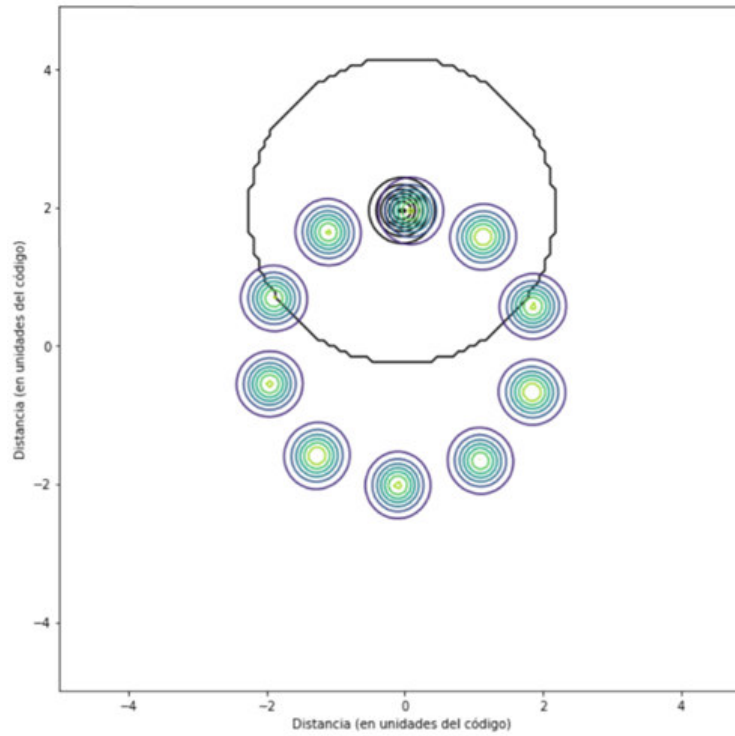


Figura 4.3: Contornos de densidad del solitón de masa $M_s = 10$, ubicado en una posición $\mathbf{x} = (0, 2, 0)$, orbitando un potencial central de masa $M_c = 10$, a una velocidad $\mathbf{v} = (\sqrt{M_c/r}, 0, 0)$, estos se deben observar en sentido del reloj.

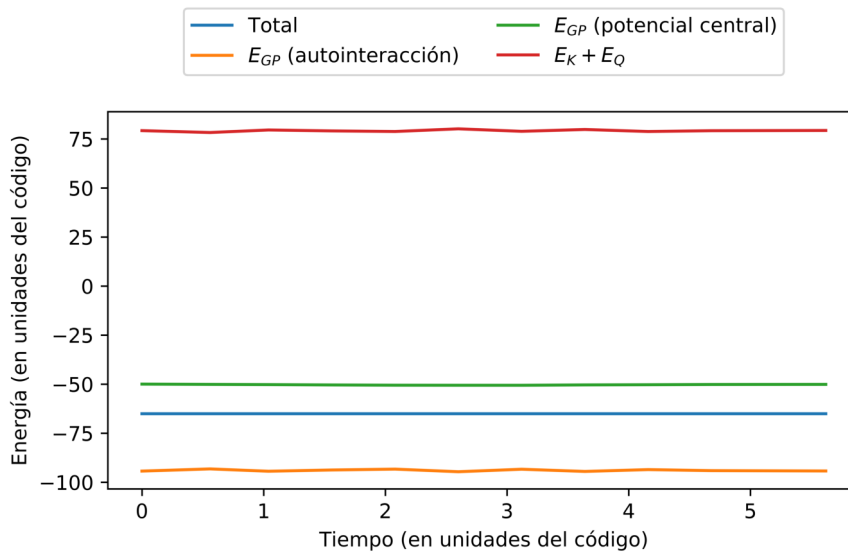


Figura 4.4: Evolución temporal de las energías del sistema solitón - masa central, donde $M_s = 10$, ubicado en una posición $\mathbf{x} = (0, 2, 0)$, orbitando un potencial central de masa $M_c = 10$, a una velocidad $\mathbf{v} = (\sqrt{M_c/r}, 0, 0)$.

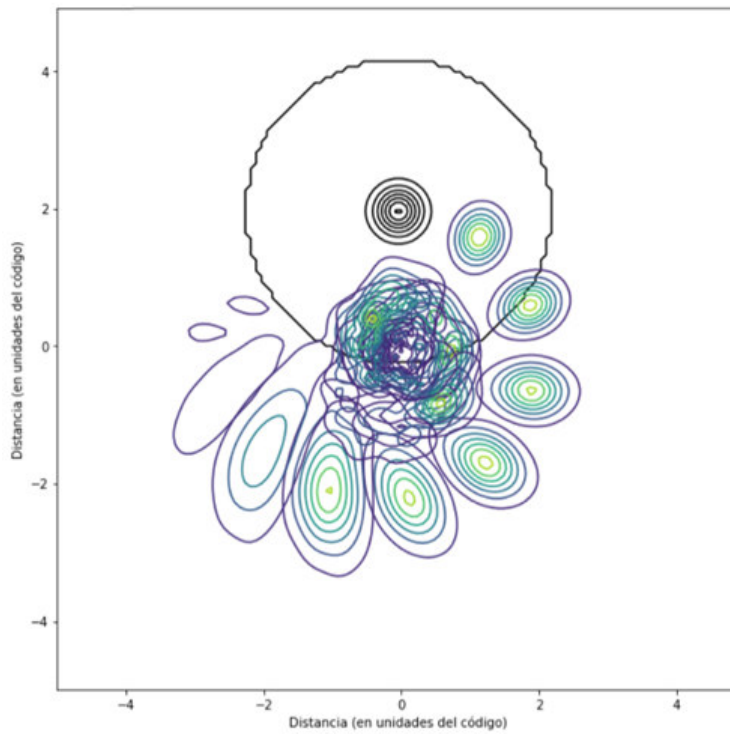


Figura 4.5: Contornos de densidad del solitón de masa $M_s = 10$, ubicado en una posición $\mathbf{x} = (0, 2, 0)$, orbitando un potencial central de masa $M_c = 50$, a una velocidad $\mathbf{v} = (\sqrt{M_c/r}, 0, 0)$, los contornos de densidad muestran que el solitón mantiene una distancia radial $r = 2$ del potencial central, estos evolucionan en sentido de las manecillas del reloj y muestran el fenómeno de disrupción.

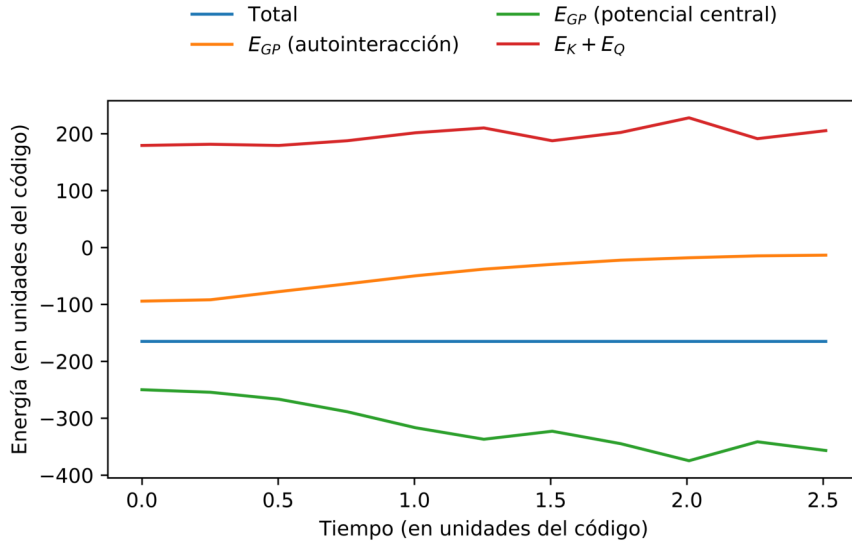


Figura 4.6: Evolución temporal de las energías del sistema solitón - masa central, donde $M_s = 10$, ubicado en una posición $\mathbf{x} = (0, 2, 0)$, orbitando un potencial central de masa $M_c = 50$, a una velocidad $\mathbf{v} = (\sqrt{M_c/r}, 0, 0)$.

del solitón adquiere un valor constante, ver la figura 4.7. Nuevamente se observó la disrupción.

Al aumentar la masa central a 250, la energía potencial gravitacional adquiere un valor constante más rápidamente, las fluctuaciones son menores que en la simulación anterior, la energía gravitacional de autointeracción del solitón aumenta y posteriormente adquiere un valor constante a partir de $t = 0.3$, también se observa la disrupción, la cual es más marcada que en los casos anteriores. En la figura 4.8 mostramos la destrucción del solitón en tiempos diferentes. Encontramos que la destrucción del solitón se lleva a cabo más rápido al aumentar la masa central. También encontramos que al ir aumentando la masa central la energía potencial gravitacional de autointeracción del solitón se vuelve despreciable comparada con el resto de las energías. Por ejemplo, para una masa central $M_c = 250$ la energía gravitacional de autointeracción se vuelve constante más rápido que en los casos con $M_c < 250$, esto se muestra en la figura 4.9. Numéricamente se obtuvieron sistemas que tienen una energía total $E_{tot} < 0$, es decir, son ligados; y al aumentar la masa central M_s aumenta $|E|$, como esperábamos.

También se revisaron sistemas en los cuales un solitón chocaba con una masa central, para estudiar los casos en los cuales el solitón se destruye y la no se regenera, así como buscar cuando el solitón logra escapar y regenerarse. Se espera que cuando $E_{tot} > 0$ el solitón lograría escapar. Comenzamos con una simulación, durante un intervalo $T = 0.2$ y una resolución $R = 256$ sobre una rejilla $20 \times 20 \times 20$, de un solitón con masa $M_s = 10$ que colisiona con una masa central $M_c = 10$, el solitón está ubicado inicialmente en la posición $\mathbf{x} = (-2, 0, 0)$ y tiene una velocidad inicial $\mathbf{v} = (30, 0, 0)$, en este caso el solitón choca con la masa central y continúa su trayectoria sufriendo ligeras deformaciones, aquí la energía total $E_{tot} = 8078$; mientras que para una velocidad inicial $\mathbf{v} = (10, 0, 0)$, a pesar de que $E_{tot} > 0$, parte del solitón logra escapar y otra termina quedándose en el punto de la masa central, como lo muestran los contornos de

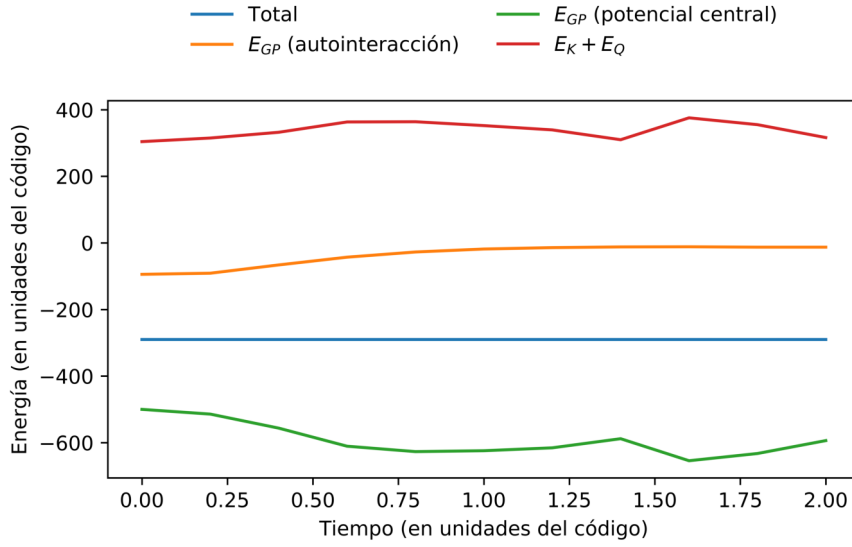


Figura 4.7: Evolución temporal de las energías del sistema solitón - masa central, donde $M_s = 10$, ubicado en una posición $\mathbf{x} = (0, 2, 0)$, orbitando un potencial central de masa $M_c = 100$, a una velocidad $\mathbf{v} = (\sqrt{M_c/r}, 0, 0)$.

densidad de la figura 4.10.

4.2.2. Colisión frontal binaria

En esta parte, es en la única en la cual empleamos unidades físicas, ya que buscamos estudiar las colisiones y fusiones entre dos halos, se realizaron varias simulaciones con diferentes condiciones iniciales, para estudiar la evolución del sistema, en todas se consideró una masa de un axiÓN de $10^{-22} \text{eV}/c^2$. En este caso se inició con el estudio de dos solitones en caída libre ($\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = (0, 0, 0)$), ambos con masa $M_s = 4.455 \times 10^7 M_\odot$ en caída libre, con la misma fase $\delta = 0$ y separados por una distancia de 153.4592 kpc. Después únicamente se varió la fase de los solitones, con desfases $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ y 2π . Cada halo tiene un radio $r = 12.64 \text{kpc}$ (la mayoría de galaxias espiral tienen un radio de entre 10 y 20 kpc, la Vía Láctea tiene un radio de aproximadamente 16.2 kpc, esto se sabe a través de la relación 3.31, en este caso $\hat{M} = 2.454$ y $\hat{r} = x_{90} = 3.883$).

La figura 4.11 muestra los contornos de densidad de los solitones en 4 tiempos diferentes, en la primera fila se muestran el caso de una diferencia de fase $\delta = 0$ y se observa como los dos solitones se fusionan en el centro de masa, después del choque estos forman un objeto, el cual pulsa continuamente; en la segunda fila se muestran los contornos para $\delta = \pi/2$, en este caso la interacción es similar al caso anterior, aunque el desfase hace que formen un objeto fuera del centro de masa inicial; la tercera fila muestra los contornos para un valor $\delta = \pi$, se observan fuerzas repulsivas efectivas, este fenómeno ha sido observado en diversas simulaciones numéricas, aunque al final sí se fusionan los solitones; en la tercera fila están los contornos de densidad para una diferencia de fase $\delta = 3\pi/2$, en este caso los solitones se fusionan fuera del centro de masa, en los casos para un desfase $\pi/2$ y $3\pi/2$ los solitones se fusionan fuera del centro de masa, pero en direcciones opuestas (ver el cuarto panel para las filas 2 y 4; finalmente en la



Figura 4.8: Contornos de densidad de un solitón con masa $M_s = 10$ orbitando una masa central $M_c = 250$, a una velocidad $v = \sqrt{\frac{M_c}{r}}$. Los diferentes paneles muestran el sistema en diferentes tiempos, leyéndose de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. El solitón experimenta las fuerzas de marea de la masa central y se destruye rápidamente.

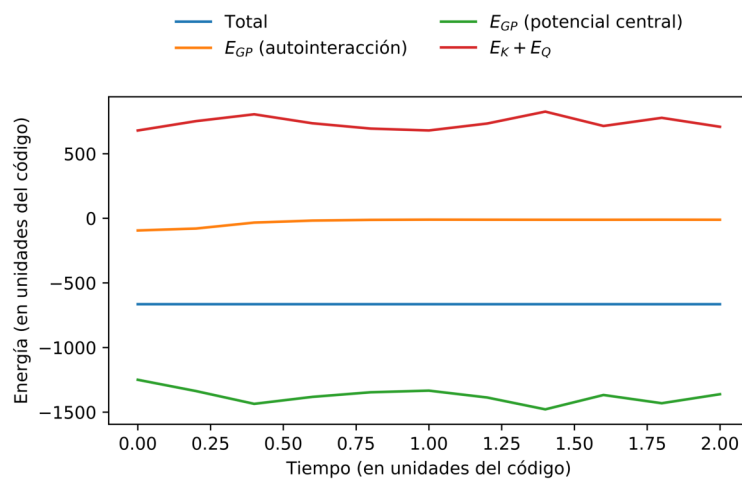


Figura 4.9: Evolución temporal de las energías del sistema solitón - masa central, donde $M_s = 10$ orbitando una masa central $M_c = 250$ a una magnitud de la velocidad $v = \sqrt{M_c/r}$, la cual siempre es tangente a la trayectoria.

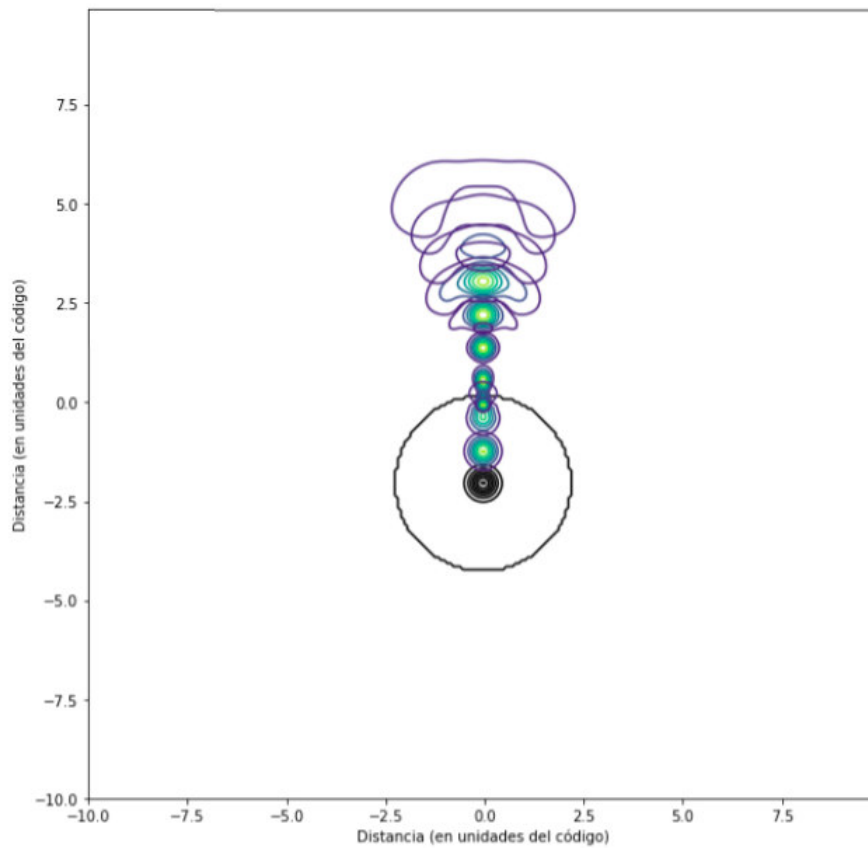


Figura 4.10: Contornos de densidad de un solitón con masa $M_s = 10$, al chocar con la masa central $M_c = 10$ en diferentes tiempos, se observa que parte del solitón no logra escapar de la masa central.

quinta fila se muestra el caso de un desfase $\delta = 2\pi$, los contornos de densidad muestran que la dinámica y fusión que siguen los solitones es similar al caso con $\delta = 0$.

En este sistema era de interés verificar si se satisface el teorema virial, el cual establece que para fuerzas que derivan de un potencial de ley cuadrado inverso y no hay fuerzas de fricción, se cumple que:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle .$$

La demostración del teorema puede consultarse en libros de texto, como en [67]. Se intentó analizar la virialización del sistema, pero el código no mostraba valores que indiquen virialización del sistema, esto se muestra claramente en la gráfica de la figura 4.12, donde la cantidad $2K + W$ está bastante alejado de cero, previamente encontramos que el código no permite estudiar la virialización de los sistemas.

Posterior a esto realizamos simulaciones de fusiones de dos solitones con relaciones de sus masas $\mu = 1.5$, $\mu = 2$ y $\mu = 3$, en caída libre, con $\delta = \pi$ y no se observaron fuerzas repulsivas.

Hasta el momento se ha revisado únicamente el caso de caída libre, posteriormente se realizaron simulaciones en las cuales los solitones tenían una velocidad inicial y colisionaban, ahora buscamos numéricamente la velocidad a la que los dos solitones chocan y se traspasan sin colapsar. Consideramos un sistema con dos solitones separados a una distancia de 153.2 kpc, y se mueven en direcciones opuestas a una velocidad relativa de 3.99 km/s, ambos colisionan y se luego ambos comienzan a moverse rápidamente en direcciones opuestas. La simulación se realizó en una caja de $767.29 \text{ kpc} \times 767.29 \text{ kpc} \times 767.29 \text{ kpc}$, con una resolución de 256, para mantener la misma resolución real de $R' = 0.078125$ y evitar el problema con las fronteras, el cual trataremos con detalle más adelante. La figura 4.15 muestra los contornos de densidad de este sistema en diferentes tiempos, este sistema tiene una energía total $E > 0$, esto se muestra en la figura 4.13; en cambio, escogiendo una velocidad relativa más baja 2.99772 km/s la energía total es negativa ($E_{tot} < 0$), ver la gráfica de la figura 4.14, los contornos de densidad de este sistema, que aparecen en la figura 4.16, muestran que el sistema termina colapsándose después de un tiempo.

En la teoría newtoniana la velocidad de escape está dada por

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_s}{r}}. \quad (4.12)$$

Eso implica que la velocidad de escape está entre 2.99 km/s y 3.99 km/s, aunque según la ecuación (4.12) debió tener una magnitud de 1.58 km/s, lo cual difiere en buena medida con lo que observamos. Después realizamos el mismo análisis del caso anterior, sólo que con $\delta = \pi$. Ahí se observa claramente que los solitones antes de chocar y fusionarse se repelen levemente, realizan una interacción intermedia y ambos continúan su movimiento. Este efecto se observó en caída libre, sólo que en caída libre los solitones siguen tratando de colapsarse y aquí después de colapsar se mueven rápidamente conservan su movimiento en la misma dirección de su velocidad inicial.

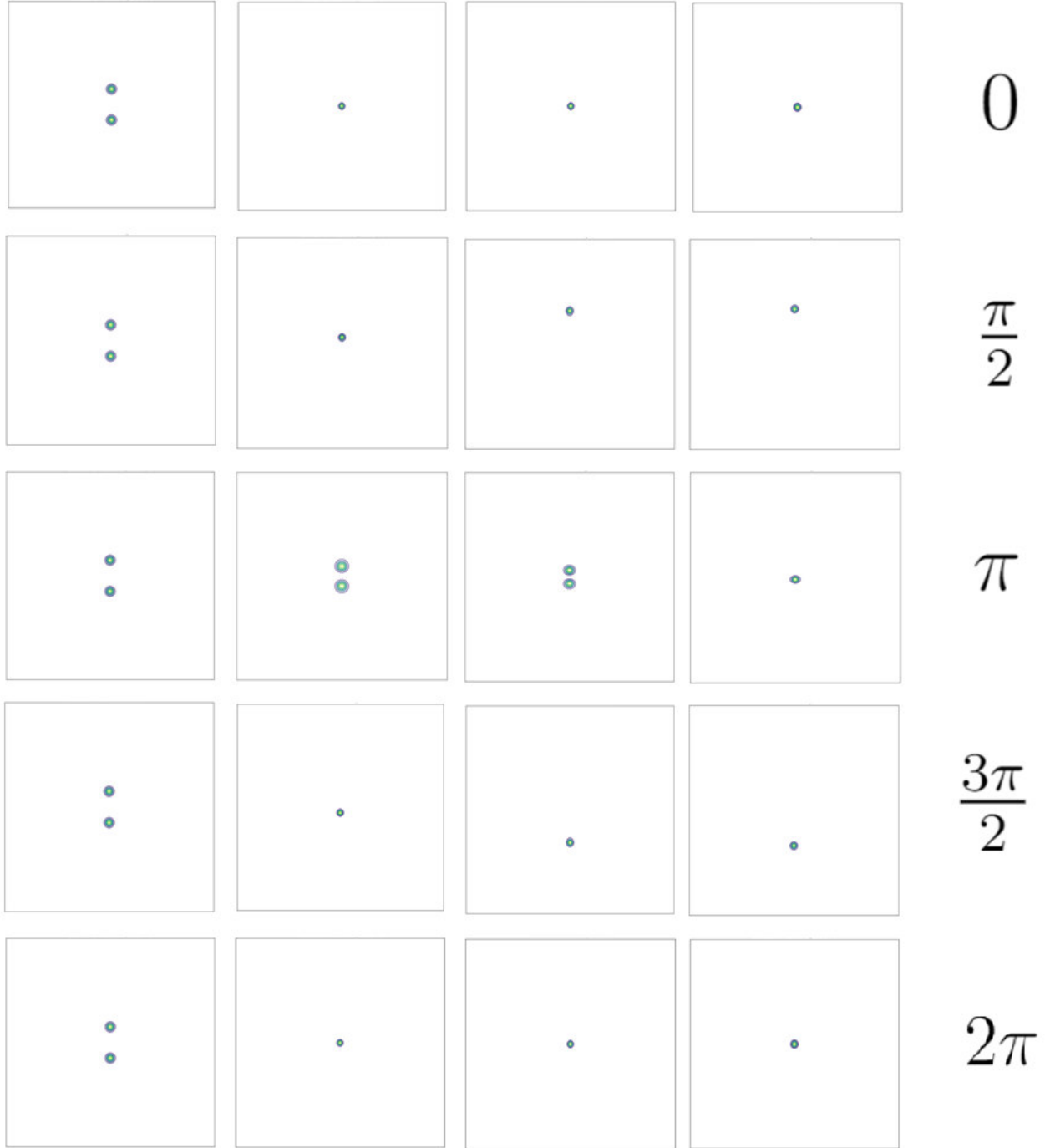


Figura 4.11: Contornos de densidad del sistema de colisión frontal entre dos solitones, ambos con masa $M_s = 4.455 \times 10^7 M_\odot$, con posiciones iniciales $\mathbf{x}_1 = (0, 76.7296 \text{ kpc}, 0)$ y $\mathbf{x}_2 = (0, -76.7296 \text{ kpc}, 0)$, en caída libre, en diferentes tiempos; se muestran 5 filas, cada fila con un desfase δ , cada fila tiene 4 paneles y cada panel muestra los contornos de densidad de los solitones en tiempos T_1, T_2, T_3 y T_4 , donde T_1 es un tiempo antes de la colisión y el resto son después de la colisión, se leen de izquierda a derecha.

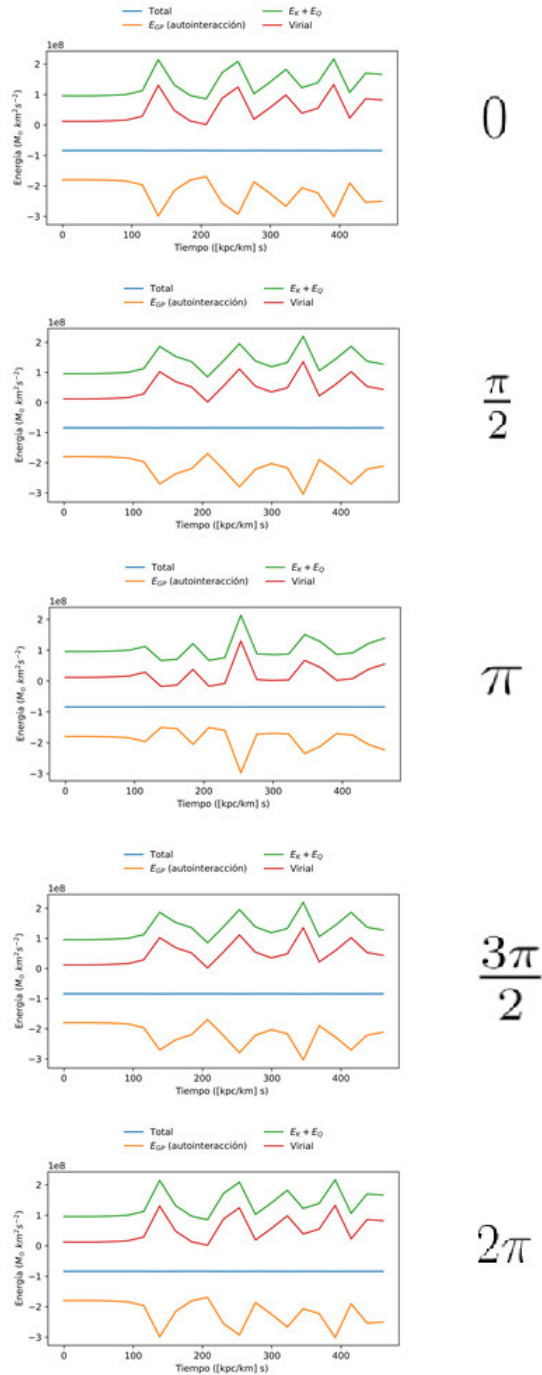


Figura 4.12: Evolución temporal de las energías de la colisión de dos halos, ambos con masa $M_s = 2.2275 \times 10^7 M_{\odot}$, en cada fila se muestran cuatro paneles, los cuales se leen de izquierda a derecha, mostrando los contornos de densidad para diferentes tiempos; en cada fila se considera una fase δ distinta.

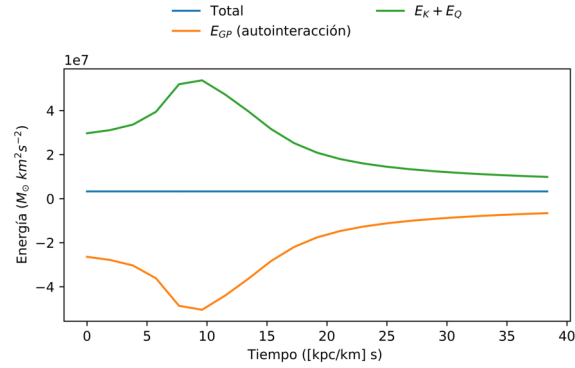


Figura 4.13: Evolución de las energías del sistema de dos solitones con masa $M_s = 2.2275 \times 10^7 M_\odot$, que se mueven en direcciones opuestas con una velocidad inicial relativa $v = 3.9969$ km/s.

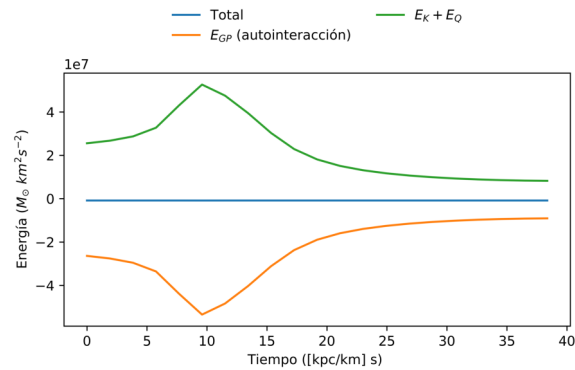


Figura 4.14: Evolución de las energías del sistema de dos solitones con masa $M_s = 2.2275 \times 10^7 M_\odot$, que se mueven en direcciones opuestas con una velocidad inicial relativa $v = 2.99772$ km/s.

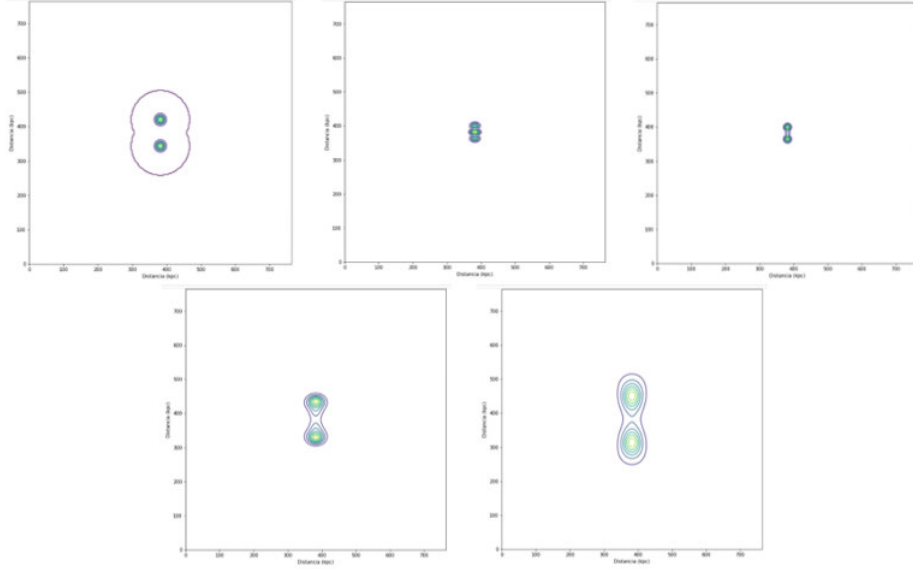


Figura 4.15: Contornos de densidad del sistema de dos solitones con masa $M_s = 2.2275 \times 10^7 M_\odot$, que se mueven en direcciones opuestas con una velocidad inicial relativa $v = 3.99696$ km/s, en diferentes tiempos. Cada panel muestra los contornos de densidad en un tiempo diferente la figura se lee de izquierda a derecha y de arriba abajo.

4.2.3. Dos solitones sobre una misma órbita

En orden de estudiar la dinámica de los solitones buscamos además de colisiones y fusiones, estudiar casos en los que los solitones describen diferentes órbitas (circulares, elípticas e hiperbólicas). A continuación, se presentan algunos resultados destacables. Los cuales son obtenidos en simulaciones con una resolución de $R = 128$ en una rejilla de $10 \times 10 \times 10$, en unidades del código, como sólo nos interesaba observar las diferentes órbitas y probar los resultados newtonianos, empleamos unidades del código.

En el caso de una órbita circular se esperaba que los solitones se movieran a una velocidad dada por la ecuación (4.11), pero no se logró simular órbitas circulares con esa velocidad.

Comenzamos con dos solitones los dos con masa $M_s = 25$, ubicados en las posiciones $\mathbf{x}_1 = (0, 2, 0)$ y $\mathbf{x}_2 = (0, -2, 0)$, con velocidades iniciales $\mathbf{v}_1 = (1.51, 0, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (-1.51, 0, 0)$, estos completaron una órbita circular alrededor del centro de masas durante un período aproximado $T = 4.5$, aunque según la teoría newtoniana su período de órbita debería ser de $T = 3.554$, y sus velocidades $v = 1.7677$. En la figura 4.17, en este caso, como el radio al centro de masa se mantiene fijo en todo momento, la energía cinética se conserva y todas las energías se mantienen cercanas a permanecer constantes, como se muestra en la figura 4.18.

Al disminuir las velocidades iniciales, por ejemplo a $v = 1$, conservando el resto de condiciones iniciales, entonces los solitones comienzan a describir una trayectorias elípticas, ver la figura 4.19.

Por otro lado también se observaron órbitas hiperbólicas, las cuales se logran con una energía

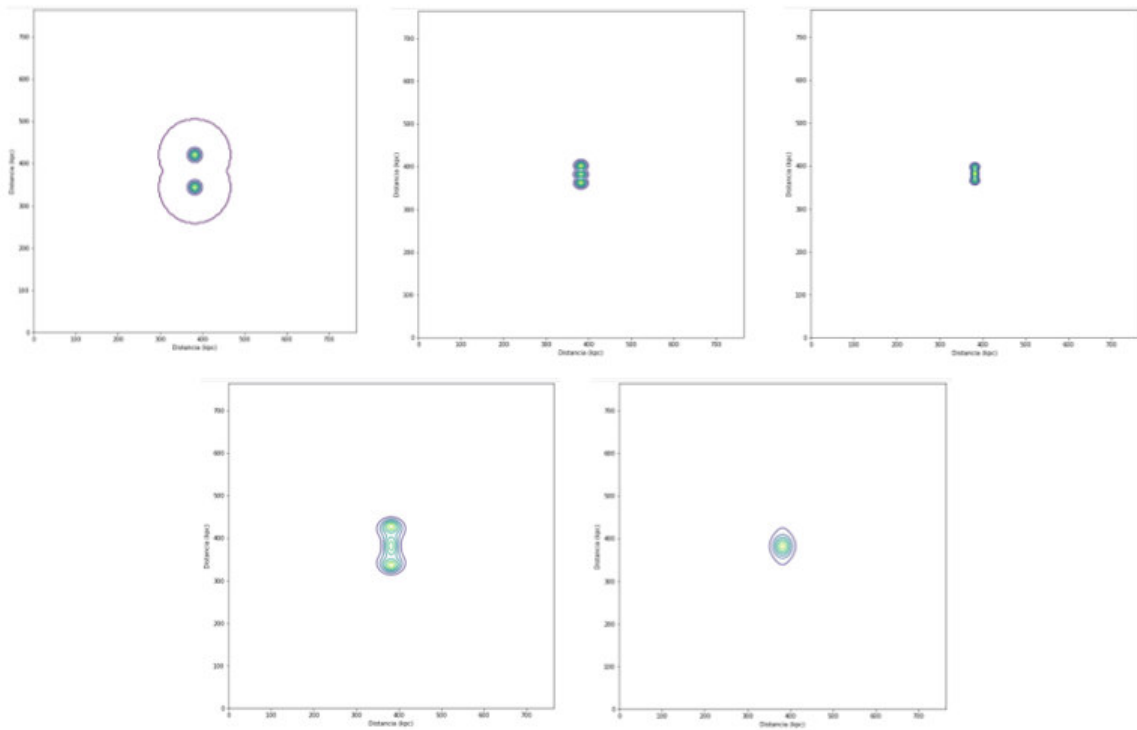


Figura 4.16: Contornos de densidad del sistema de dos solitones con masa $M_s = 2.23 \times 10^7 M_\odot$, que se mueven en direcciones opuestas con una velocidad inicial relativa $v = 2.99 \text{ km/s}$, en diferentes tiempos. Cada panel muestra los contornos de densidad en un tiempo diferente, la figura se lee de izquierda a derecha y de arriba abajo.

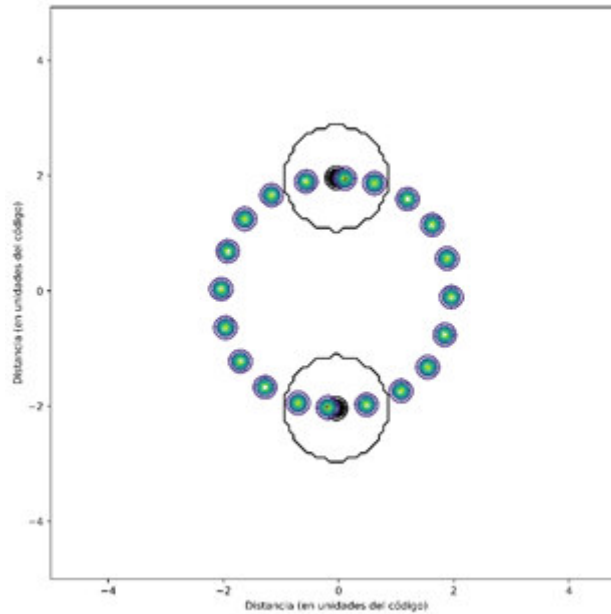


Figura 4.17: Contornos de densidad de dos solitones con masas iguales $M_s = 25$ moviéndose con velocidades $\mathbf{v}_1 = (0, 1.51, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, -1.51, 0)$, los solitones describen una órbita circular alrededor de su centro de masa. En color negro se muestran las posiciones iniciales de los solitones.

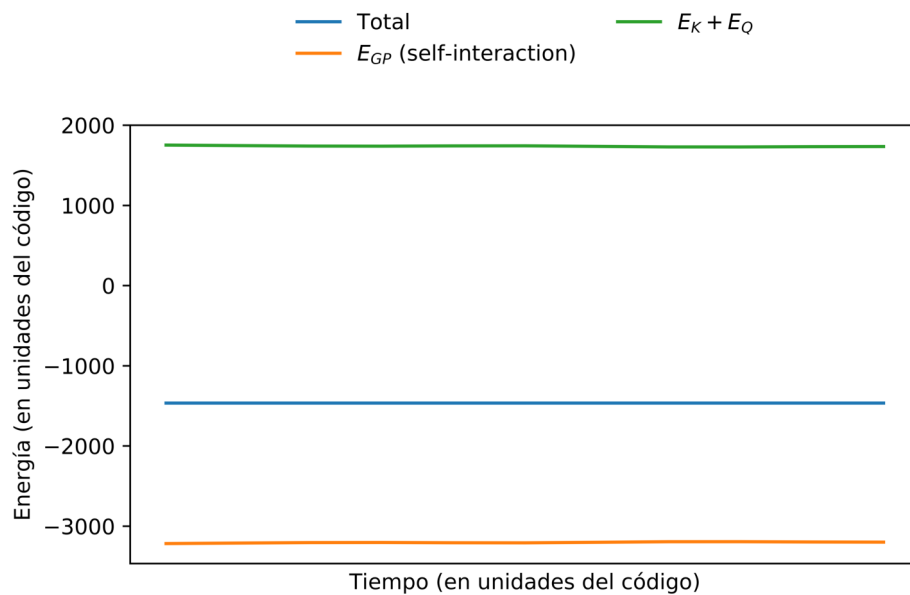


Figura 4.18: Evolución de las energías de un sistema de dos solitones con masas iguales $M_s = 25$ moviéndose con velocidades $\mathbf{v}_1 = (0, 1.51, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, -1.51, 0)$.



Figura 4.19: Contornos de densidad, en diferentes momentos, de dos solitones con masas $M_s = 25$, moviéndose con velocidades $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 0)$.

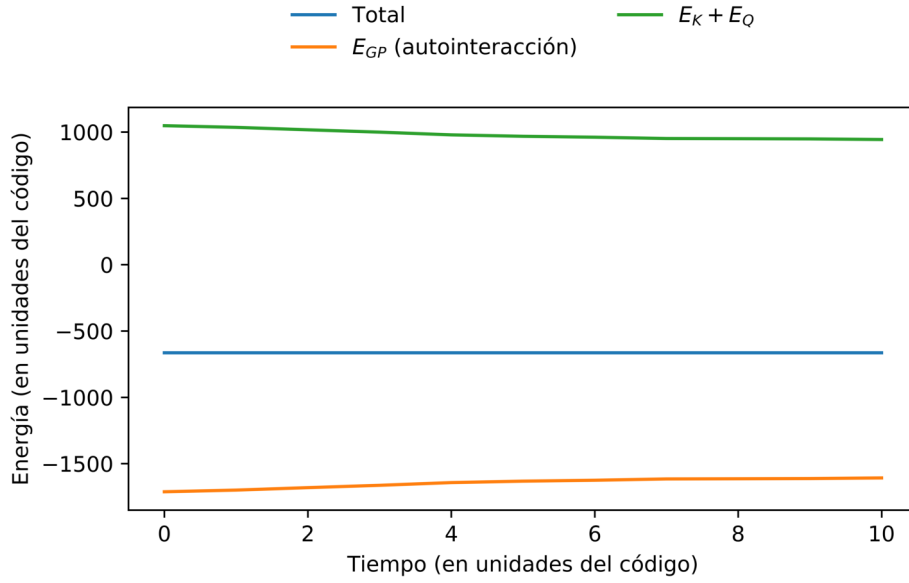


Figura 4.20: Evolución temporal de las energías del sistema de dos solitones, ambos con masa $M_s = 20$, con posiciones $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{x}_2 = (-1, 0, 0)$ y velocidades $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, -3, 0)$ en diferentes tiempos. La simulación se hizo con una resolución de 128, en una rejilla de $10 \times 10 \times 10$.

cinética lo suficientemente alta como para superar la energía potencial, para verificar estas trayectorias, consideramos dos solitones, nuevamente de masas iguales $M_s = 20$, ambos separados a una distancia de 2 unidades, con velocidades perpendiculares a la línea de separación, de $v = 3$, en una rejilla de $10 \times 10 \times 10$ unidades de longitud por lado, con una resolución de 128, durante un período $T = 1.5$. En la teoría newtoniana, se obtienen trayectorias hiperbólicas cuando $E_{tot} > 0$, pero la gráfica obtenida, ver figura 4.20, mostraba $E_{tot} < 0$. Esta misma simulación realizó la misma simulación por un período mayor, pero aparecía el problema de las fronteras. Entonces, se eligió aumentar el tamaño de la rejilla a $20 \times 20 \times 20$ unidades del código, y una resolución de 256 y aumentando el período de $T = 5$, en este caso se obtiene nuevamente una trayectoria hiperbólica, y la evolución de energías muestra que $E < 0$, ver figura 4.21.

4.2.4. Dos solitones orbitando una masa central

Posteriormente buscamos estudiar un sistema de tres cuerpos que consistía en dos solitones y una masa central. En esta sección manejamos a la totalidad unidades del código. Se consideraron las siguientes condiciones iniciales en unidades del código: dos solitones con masa $M_s = 10$ situados a una distancia $r = 2$ de una masa central $M_c = 25$, con posiciones $\mathbf{x}_1 = (0, 2, 0)$ y $\mathbf{x}_2 = (0, -2, 0)$, donde cada solitón tenía una velocidad inicial perpendicular $v = \sqrt{(M_c + 0.25M_s)/r}$, la cual mantuvo durante toda la simulación; en este caso se observó que los dos solitones seguían una misma órbita circular alrededor de la masa central, en posiciones opuestas; en la figura 4.22 se muestran los contornos de densidad de ambos solitones en diferentes tiempos, en color negro se muestran las posiciones iniciales de los solitones. En este caso el período de revolución esperado

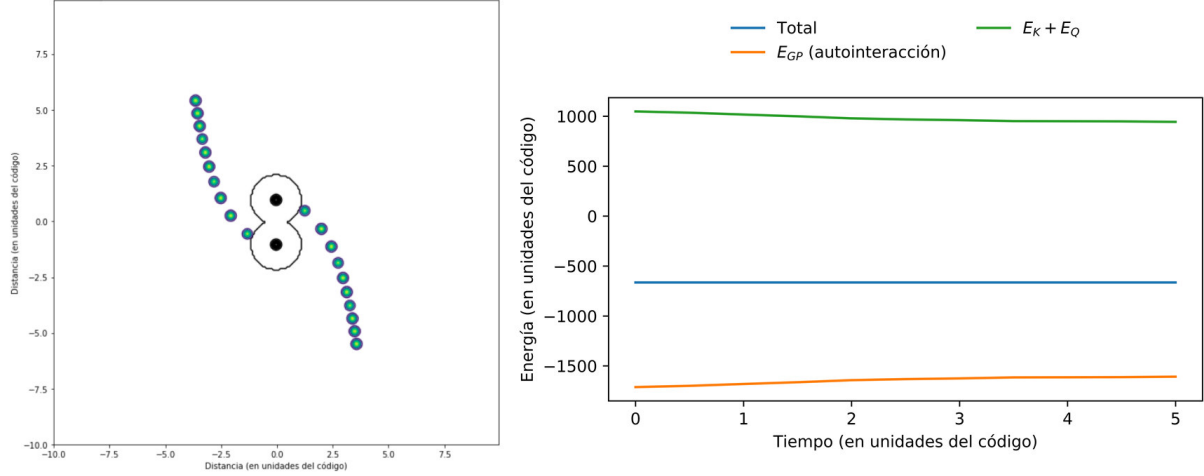


Figura 4.21: A la izquierda se muestran los contornos de densidad de dos solitones con masa $M_s = 20$, con posiciones $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{x}_2 = (-1, 0, 0)$ y velocidades $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, -3, 0)$ en diferentes tiempos; se muestra como cada uno va describiendo una trayectoria hiperbólica. Mientras que a la derecha se muestra la evolución temporal de las energías. La simulación se hizo con una resolución de 128, en una rejilla de $20 \times 20 \times 20$.

es de $T_{rev} = 1.694449$ (según la teoría newtoniana), mientras que el período de la simulación es $T_{rev} = 1.75$. Por otro lado tenemos la evolución temporal de las energías del sistema, las cuales se muestran en la figura 4.23, es notable que las energías cinética y potencial varían muy poco. En este caso se probó que se satisface una solución analítica del problema de tres cuerpos clásico como se esperaba, ver el Apéndice A.

Al igual que en el caso de un solitón orbitando una masa central, se observa el que al aumentar la masa central se comienza a observar la destrucción de los solitones debida a la disrupción de mareas. También encontramos que es posible poner dos solitones orbitando la misma órbita circular, cada solitón se mueve con una velocidad $v = \sqrt{GM/r}$.

4.2.5. Fusiones de múltiples halos

En las secciones anteriores se han estudiado diversos sistemas con alta simetría, la mayoría de ellos son sistemas en equilibrio dinámico. Para estudiar estructuras de no equilibrio consideraremos configuraciones iniciales de solitones con posiciones y velocidades aleatorias, en un espacio tridimensional; en la literatura se presentan diversas investigaciones con múltiples halos solitónicos, por ejemplo en [68].

Primero se estudió el caso de cuatro solitones, todos con masa $M_s = 10$ en caída libre y con posiciones aleatorias, descartando posiciones que puedan generar una superposición de solitones; se realizaron cinco corridas y en cada una se variaron las posiciones aleatorias. Se observó que en cada una de las corridas los solitones se fusionaban por pares. En la figura 4.24 se muestran los contornos de densidad de los solitones en diferentes tiempos, en una de las corridas.

Luego se consideró nuevamente un sistema con cuatro solitones, pero se incluyeron fases alea-

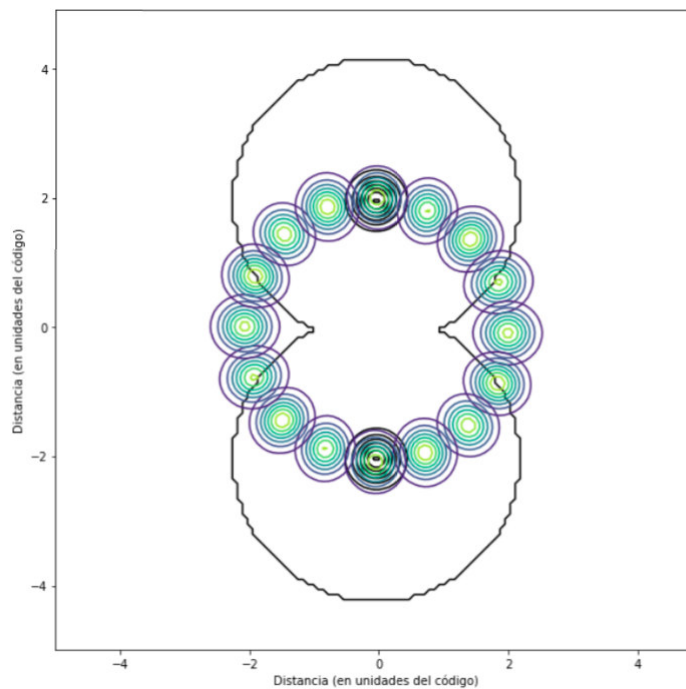


Figura 4.22: Contornos de densidad de dos solitones, ambos con masas $M_s = 10$ orbitando una masa central de masa $M_c = 25$, ubicados en las posiciones $\mathbf{x}_1 = (-2.0, 0)$ y $\mathbf{x}_2 = (2, 0, 0)$, con velocidades iniciales dadas por $\mathbf{v}_1 = (0, \sqrt{(M_c + 0.25M_s)/r}, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, -\sqrt{(M_c + 0.25M_s)/r}, 0)$. Los dos solitones orbitan la masa central describiendo una trayectoria circular en el plano.

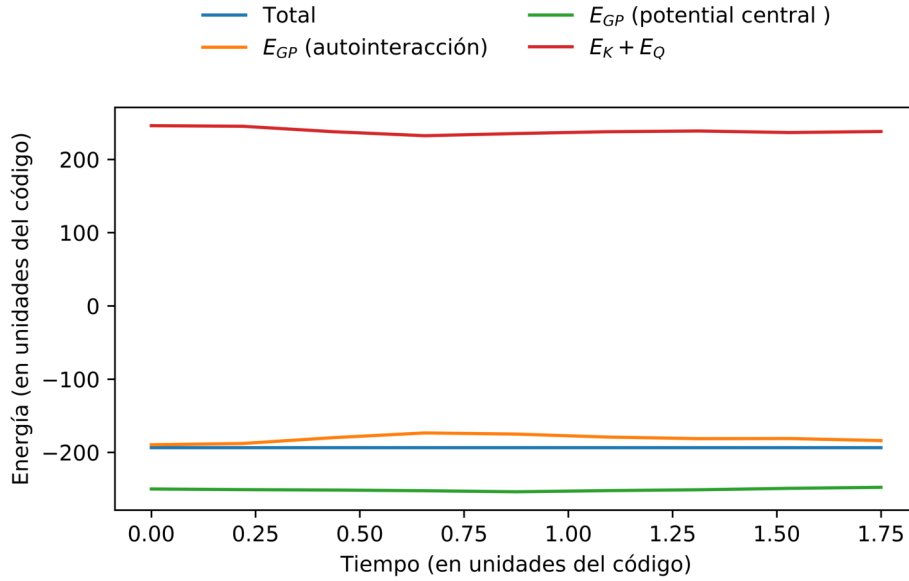


Figura 4.23: Evolución temporal de las energías del sistema de dos solitones, ambos con masas $M_s = 10$ y una masa central $M_c = 25$, separados a una distancia radial $r = 2$. Los dos solitones orbitan la masa central.

torias; de igual forma se realizaron cuatro corridas y en cada una se variaron las condiciones iniciales aleatorias, igual que en el caso anterior, se descartaron los casos en los cuales los halos se superpusieran. En la figura 4.25 se muestran los contornos de densidad de los solitones en diferentes tiempos, en una de las corridas.

Finalmente se estudiaron sistemas de 7 y 9 halos de solitones. Buscando configuraciones más complejas, consideramos dos sistemas en los cuales se consideraron 7 halos con diferentes masas, con la única condición de que todas sean masas $M_s \sim 10$, esto para evitar los problemas con el código; y del mismo modo que en los casos anteriores se realizaron cinco corridas y en cada una se escogieron posiciones y velocidades iniciales aleatorias, con las condiciones de que estuvieran lo suficientemente alejados de las fronteras, también debían moverse a velocidades bajas, para evitar problemas con la frontera. Estas simulaciones fueron realizadas en una rejilla de $20 \times 20 \times 20$ en unidades del código; a una resolución de 256. En la figura 4.26 se muestra la animación de los contornos de densidad de 7 solitones moviéndose en el plano $z = 0$, en este caso las posiciones y velocidades en la dirección z fueron fijadas a 0, para mostrar la animación en el plano.

En las configuraciones de 9 solitones los colocamos de forma similar que en el caso anterior, con masas diferentes, todas del orden $M_s \sim 10$; también se realizaron las corridas con las mismas características del caso anterior. Un ejemplo de simulación se muestra en la figura 4.27, donde se muestran los contornos de densidad de nueve solitones con las características mencionadas.

En las simulaciones de múltiples halos solitónicos principalmente en caída libre con posiciones aleatorias, se observa que en la mayoría de casos los halos se fusionan en pares, aunque en algunos casos en tercias; esto es un buen indicativo de que la interacción entre dos solitones

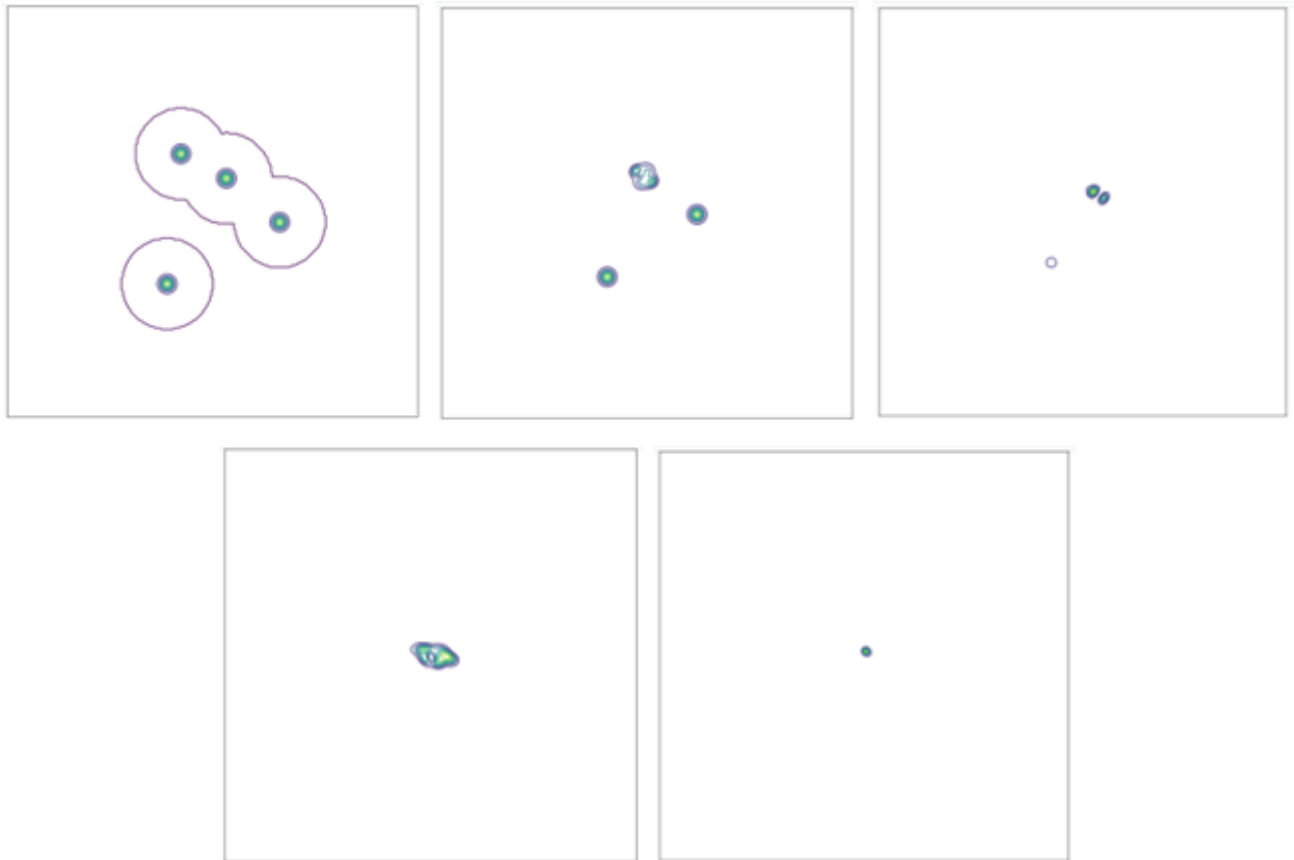


Figura 4.24: Contornos de densidad de cuatro solitones, todos con masa $M_s = 10$ que están ubicados inicialmente en posiciones aleatorias y están en caída libre. Se muestran los contornos en 6 tiempos diferentes.

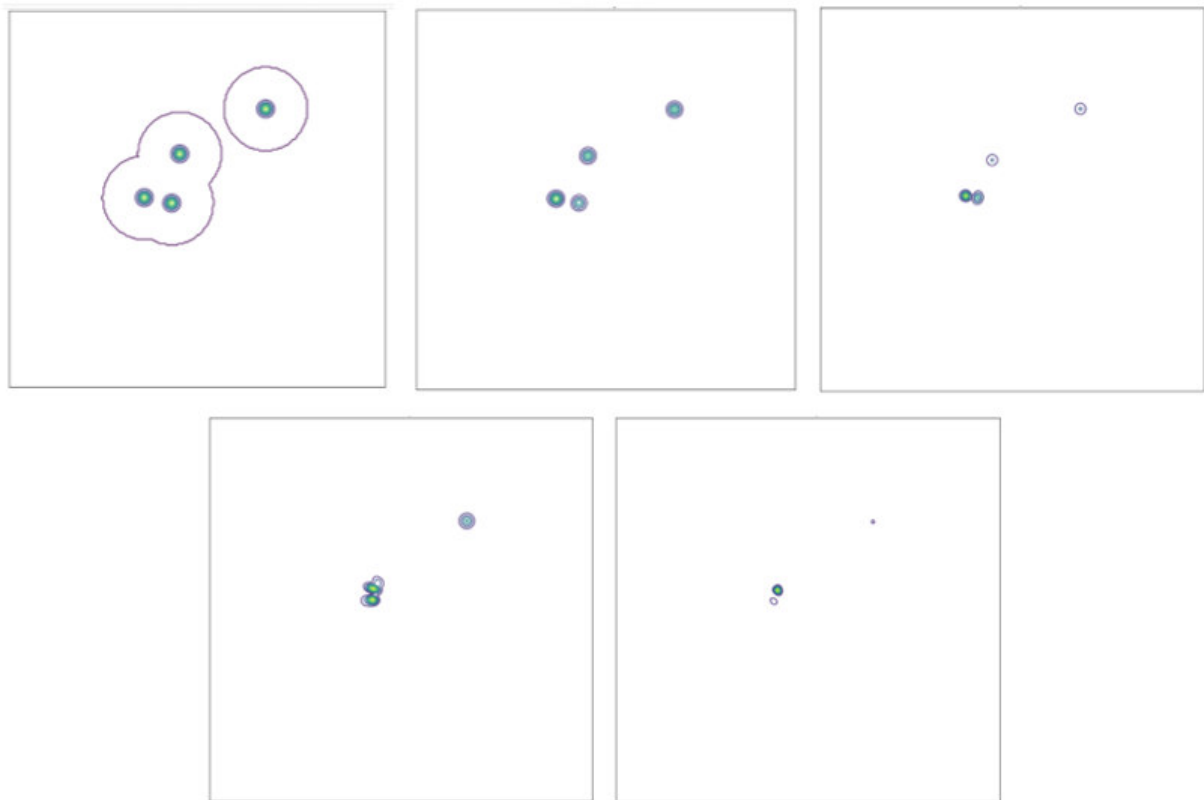


Figura 4.25: Contornos de densidad de cuatro solitones, todos con masa $M_s = 10$ que están ubicados inicialmente en posiciones aleatorias, en caída libre, con fases iniciales aleatorias. Se muestran los contornos en 5 tiempos diferentes.

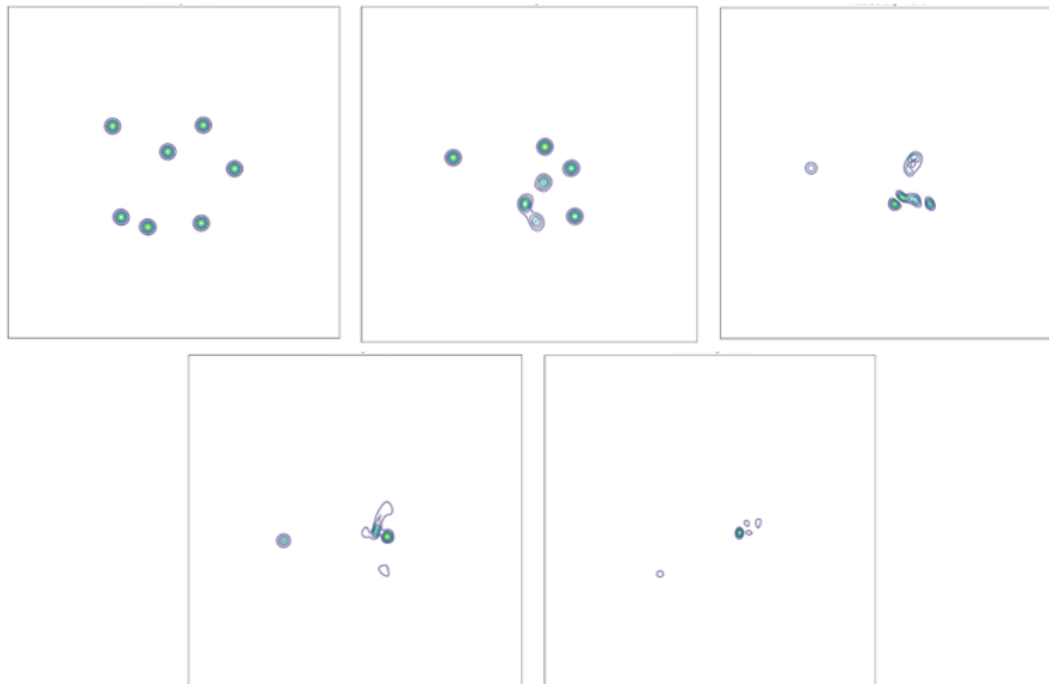


Figura 4.26: Fusión de siete solitones, todos con masas cercanas a $M_s = 10$ y velocidades y posiciones aleatorias, en tiempos diferentes. Los contornos de densidad muestran la evolución temporal de la densidad de cada solitón.



Figura 4.27: Fusión de nueve solitones de masas del orden $M_s \sim 10$, todos tienen posiciones iniciales aleatorias y están en caída libre. Los contornos de densidad muestran la evolución temporal de la densidad de cada solitón.

despreciando interacciones externas en un breve periodo de tiempo es una buena aproximación a la evolución de estructuras conformadas por diversos halos solitónicos. En los casos donde se impusieron velocidades aleatorias se observó que los solitones comienzan describiendo trayectorias complejas, debidas tanto a la velocidad con la que se mueven, como a la atracción gravitacional entre ellos; para después irse fusionando.

4.3. Limitantes de resolución

Al estudiar diversas configuraciones de solitones con el código PyUltraLight se encontraron algunas limitantes y problemas con el código, como son: el problema de solitones cercanos a las fronteras y el problema de resolución con masas de los solitones muy grandes. En toda esta sección se emplean únicamente unidades del código.

4.3.1. Problema en las fronteras

El primer problema se presenta cuando los solitones se encuentran cercanos a la frontera, por ejemplo, mostramos un caso con dos solitones en caída libre, con masas iguales colocados en las posiciones $(0, 3, 0)$ y $(0, -3, 0)$, en la malla tridimensional con 10 unidades por lado, con una resolución de 128, los contornos de densidad y la animación muestran a los solitones intectúando con una aparente fuerza repulsiva; aunque en realidad los solitones comienzan a atraerse por las fronteras ya que, el código resuelve el sistema con condiciones periódicas en la frontera. Al generar la simulación con un tiempo mayor, la animación muestra como los solitones al cruzar la frontera parcialmente y se observan pulsaciones en sus contornos de densidad 4.28, por otro lado se observa que la energía total (la cual se conserva) es negativa, lo que implica que efectivamente los solitones ejercen una fuerza uno sobre el otro por ambas fronteras; si la energía total fuera positiva, entonces tendríamos fuerzas repulsivas.

Para entender con más detalle el error en la misma simulación se colocaron los solitones en caída libre en posiciones $(0, 2.5, 0)$ y $(0, -2.5, 0)$, la figura 4.29 muestra en el lado izquierdo los contornos de densidad en diferentes tiempos de los solitones, como se observa los solitones nunca se mueven, los contornos de densidad en el plano permanecen siempre iguales; en el lado derecho de tenemos el diagrama de energías, el cual también nos confirma el problema, dado que las energías se mantienen constantes y el sistema sigue siendo ligado ($E_{tot} < 0$).

Otro caso observado de este tipo se presentó cuando en la malla de $10 \times 10 \times 10$ se colocaba una masa central y un soliton a una distancia de 3, moviéndose en dirección a la frontera con una velocidad de 10. El solitón cruza la frontera aparece en el otro lado de la malla continuando su movimiento, los contornos de densidad se observan en 4.30, un efecto igual se observa al colocar un único solitón en el centro y darle una velocidad, se observa que el solitón cruza la frontera y aparece del otro lado.

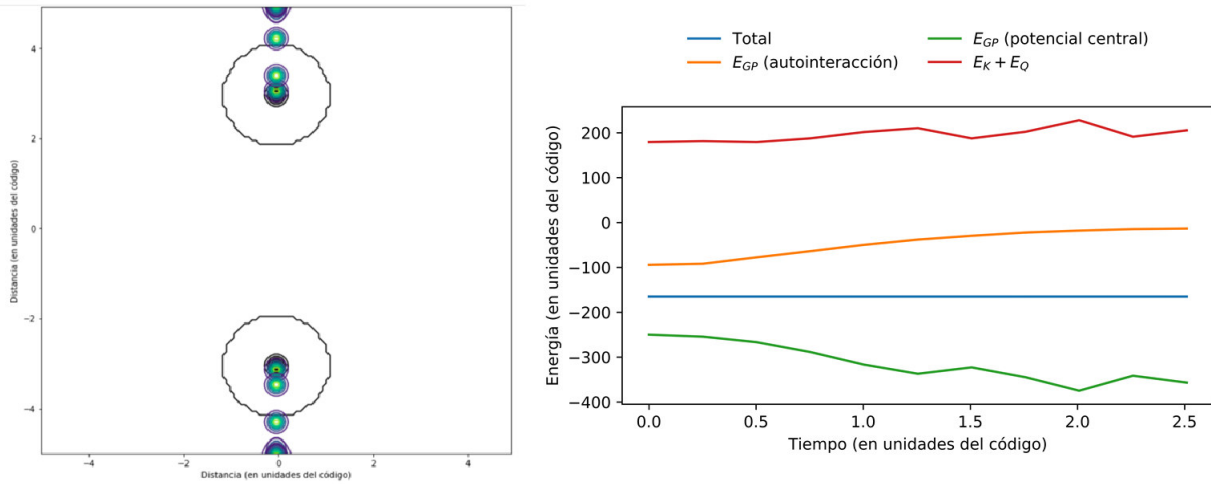


Figura 4.28: Dos solitones, con masas $M_s = 20$ y con posiciones $(0, 3, 0)$ y $(0, -3, 0)$, en caída libre. Al lado izquierdo se muestran los contornos de densidad en el plano $z = 0$, en color negro se muestran las posiciones iniciales de los dos solitones, al final de la simulación los solitones permanecen pulsando en las fronteras. En el lado derecho se muestra la gráfica de evolución temporal de las energías del sistema durante el período de la simulación $T = 5$ en unidades del código, la energía total es negativa.

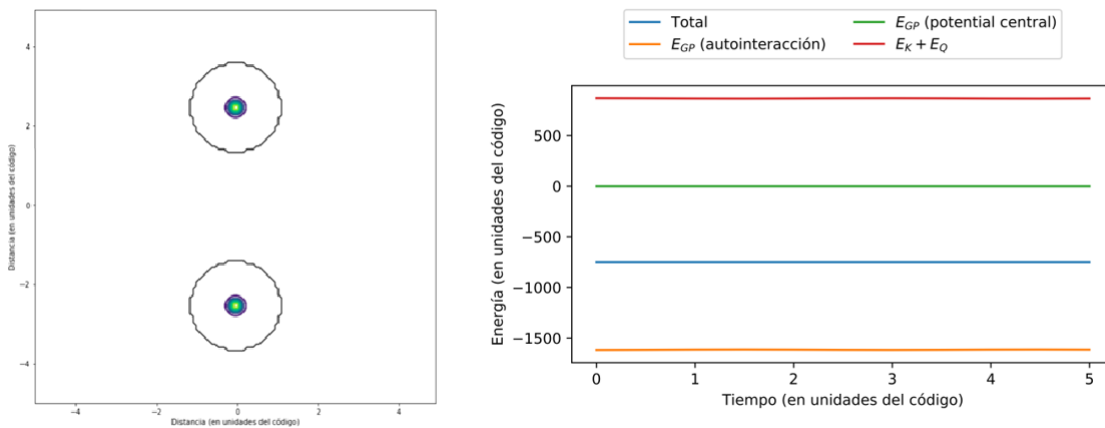


Figura 4.29: Dos solitones, con masas $M_s = 20$ y con posiciones $(0, 2.5, 0)$ y $(0, -2.5, 0)$, en caída libre. Al lado izquierdo se muestran los contornos de densidad en el plano $z = 0$, en este caso los solitones no se mueven en lo absoluto. En el lado derecho se muestra la gráfica de evolución temporal de las energías del sistema durante el período de la simulación $T = 5$ en unidades del código, la energía total es negativa.

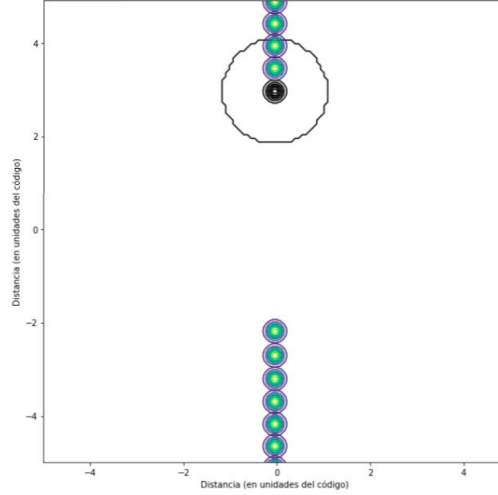


Figura 4.30: Contornos de densidad en diferentes tiempos del sistema solitón - masa central, donde el solitón tiene una masa $M_s = 10$ y está ubicado en $(0, 3, 0)$, y la masa central (ubicada en $(0, 0, 0)$) con masa $M_c = 50$, la simulación se realizó durante un intervalo de tiempo $T = 0.5$. En color negro se muestra la posición inicial del solitón, el solitón comienza a moverse en dirección a la frontera superior, la cruza y aparece en la frontera inferior, en dirección a la masa central.

4.3.2. Problema de resolución con masas de los solitones muy grandes

Al estudiar sistemas con varios halos solitónicos se observó un problema muy particular con la conservación de la energía, cuando se tenían halos con masas muy grandes, por ejemplo en una configuración de tres solitones, ambos con masas iguales $M_s = 100$.

Posterior a esto se evolucionó un sistema con 9 halos, todos con masa $M_s = 40$ (en unidades del código), con velocidades y posiciones aleatorias, en una caja $20 \times 20 \times 20$ y una resolución de 256; los contornos de densidad inicial y final (figura 4.31) no muestran ningún movimiento de los solitones además, la evolución de las energías del sistema mostrado en la figura 4.32, muestra una violación en la conservación en la energía. Se realizaron diversas corridas del mismo sistema variando únicamente las posiciones y velocidades aleatorias, en todos se observó el mismo efecto.

Se consideraron las mismas posiciones y velocidades aleatorias de los halos, disminuyendo las masas de los solitones, para casos con $M_s = 40$ y $M_s = 30$ la gráfica comienza a mostrar una energía total cercana a ser constante, el problema se solucionó al disminuir a $m = 20$, donde sí se conserva la energía. Al ir disminuyendo la masa en este sistema se observó una disminución en el problema. Incluso el mismo problema sucedió en simulaciones con 7 solitones.

Para trabajar con masas muy grandes (en unidades del código) en principio sería necesario aumentar la resolución, pero por ejemplo cuando se tiene un sistema de tres solitones, todos con masas $M_s = 100$, con velocidades (pequeñas) y posiciones iniciales aleatorias. Cuando se realiza la simulación con una resolución de 128, la energía total no se conserva (ver la figura



Figura 4.31: Contornos de densidad inicial y final de la simulación de 9 halos solitónicos, todos con masa $M_s = 50$, con posiciones y velocidades aleatorias. La simulación se realizó con una resolución $R = 128$.

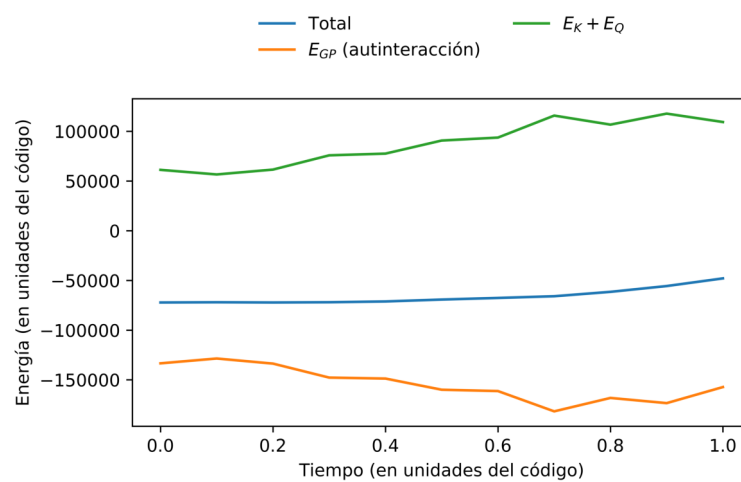


Figura 4.32: Evolución temporal de las energías. La energía total no se conserva

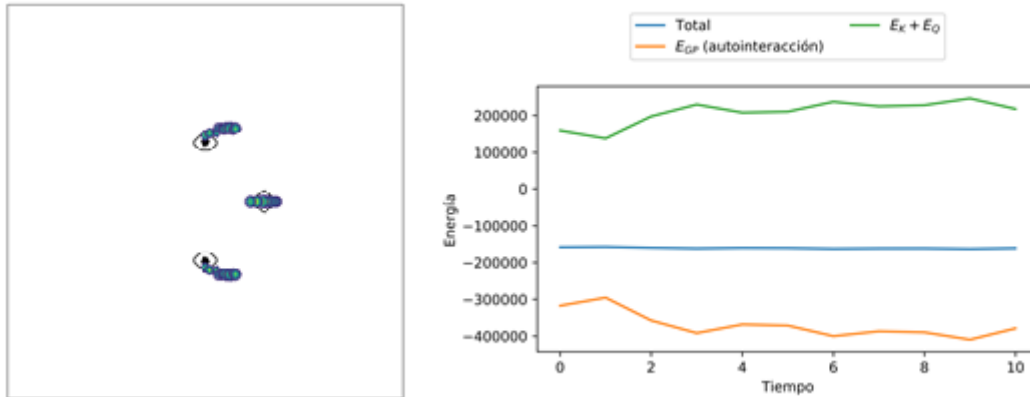


Figura 4.33: A la izquierda se muestran los contornos de densidad en diferentes tiempos del sistema conformado por tres solitones con masas $M_s = 100$, se mueven con velocidades aleatorias pequeñas y tienen posiciones aleatorias; a la derecha la gráfica de evolución temporal de las energías del sistema. La simulación se realizó con una resolución $R = 128$.

4.33); al aumentar la resolución a 256 se soluciona el problema de la conservación de la energía, pero en la simulación no se observa más que leves pulsaciones de los solitones, que permanecen estáticos (ver la figura 4.34). Esto nos limita a no realizar simulaciones con solitones tan masivos.

4.3.3. Análisis de virialización

Al estudiar la virialización de varios sistemas encontramos que las energías parecían no satisfacer el teorema virial, para verificar si había algún problema con el código simulamos un solitón de masa 2 en una caja $10 \times 10 \times 10$, con una resolución de $R = 128$ (la resolución es de 12.8 por cada unidad del código), esto debido a que la masa del solitón es inversamente proporcional al radio del solitón, y al aumentar el tamaño de este requiere menor resolución; el solitón se encuentra situado en el centro de la caja sin velocidad inicial. La figura 4.35, muestran la evolución temporal de las energías, la línea azul denota el virial, y se observa que el sistema no está virializado, pero está cercano a estarlo; además, esta misma gráfica se obtuvo para resoluciones de 192 y 256.

4.4. Conclusiones sobre la resolución y limitantes del código

Todo código numérico, posee límites numéricos para realizar su función, el código PyUltraLight presenta el problema al colocar los solitones cerca de sus fronteras, esto puede verse como un tipo de «apantallamiento», este problema disminuye aumentando el tamaño de la caja, por ejemplo, duplicando o triplicando el tamaño de la caja; pero aumentar el tamaño de la caja es necesario aumentar la resolución espacial, lo cual implica un mayor gasto computacional. De hecho, todos los resultados se ven influenciados por el problema con las fronteras, la forma de disminuir el problema es alejarlos lo suficiente de las fronteras y aumentar el tamaño de la

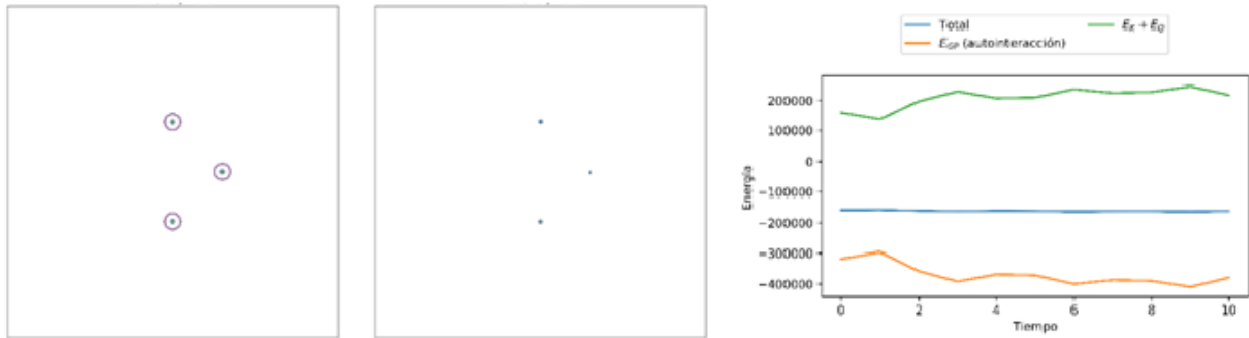


Figura 4.34: A la izquierda se muestran los contornos de densidad en diferentes tiempos del sistema conformado por tres solitones con masas $M_s = 100$, se mueven con velocidades aleatorias pequeñas y tienen posiciones aleatorias; a la derecha la gráfica de evolución temporal de las energías del sistema. La simulación se realizó con una resolución $R = 256$.

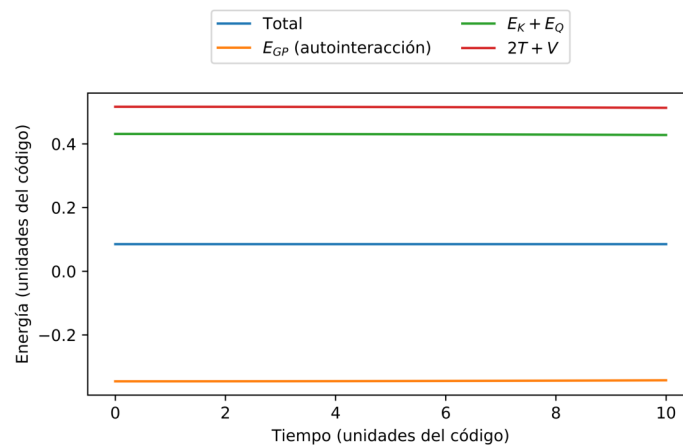


Figura 4.35: Evolución de las energías en el tiempo, de un solitón con condiciones iniciales $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$, masa $M_s = 2$, se calcularon numéricamente con una resolución $R = 128$.

mallas tridimensionales en la que se evoluciona el sistema.

La otra limitante aparece al escoger masas muy grandes para los solitones, porque la masa es inversamente proporcional al radio del solitón, si el radio es mucho menor que la resolución del código, entonces no podrá realizar el cálculo de forma correcta.

4.5. Perspectiva de un código para Multicampos escalares

El modelo de materia oscura como campo escalar es un modelo que describe de mejor manera las estructuras a escalas de kilopársecs que el modelo CDM. En varios trabajos se ha explorado la posibilidad de que la materia oscura esté formada por varias componentes, recientemente se ha planteado que la materia oscura está conformada con varios campos escalares con diferentes masas. En los modelos más simples consideran campos escalares que no interactúan entre ellos.

Para poder estudiar sistemas gravitacionales con bosones distintos, en los cuales se consideran múltiples campos acoplados, es decir, bosones de diferentes masas, planteamos una extensión al código PyUltraLight, comenzamos modificando la acción que describe el campo escalar, para que describa dos campos escalares, obtenemos:

$$S = \int \frac{d^4x}{\hbar} \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{m_1^2}{2\hbar^2} \phi_1^2 - \frac{m_2^2}{2\hbar^2} \phi_2^2 \right\}, \quad (4.13)$$

y aplicando el mismo procedimiento que en [1], obtenemos una ecuación de Schrödinger para cada ecuación de onda

$$\begin{aligned} i \hbar \dot{\psi}_1 &= -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla^2 \psi_1 + m_1 \Phi \psi_1, \\ i \hbar \dot{\psi}_2 &= -\frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla^2 \psi_2 + m_2 \Phi \psi_2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

por su parte el potencial gravitacional está dado por

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G (m_1 |\psi_1|^2 + m_2 |\psi_2|^2), \quad (4.15)$$

Esto puede generalizarse para N campos, donde cada uno puede representarse por una función de onda distinta ψ_1, ψ_2, \dots . De forma general, utilizando $c = 1$, el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} i \hbar \partial_t \psi_k &= -\frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla^2 \psi_k + m_k \Phi \psi_k, \\ \nabla^2 \Phi &= 4\pi G \sum_{k=0}^N m_k |\psi_k|^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde $k = 1, 2, \dots, N$ etiqueta cada uno de los N campos presentes.

4.5.1. Modificaciones a las ecuaciones del sistema Schrödinger - Poisson para múltiples masas de axión

En este trabajo estudiamos el caso de dos axiones, para modificar el código tenemos que redefinir las unidades para adimensionalizar el sistema, de forma similar a como lo hacen en [1], primero definimos

$$\vec{x}' = \frac{\vec{x}}{\mathcal{L}}, \quad t' = \frac{t}{T} \quad \Phi' = A\Phi, \quad \psi'_1 = B\psi_1, \quad \psi'_2 = C\psi_2. \quad (4.17)$$

Sustituyendo en (4.14) y (4.15) obtenemos

$$t' = \frac{t}{\mathcal{L}}, \quad \mathbf{x}' = \frac{\vec{x}}{\mathcal{L}}, \quad \Phi' = \frac{\mathcal{T}^2}{\mathcal{L}^2}\Phi, \quad \psi'_1 = \mathcal{T}\sqrt{m_1 G}, \quad \psi'_2 = \mathcal{T}\sqrt{m_2 G}\psi_2, \quad (4.18)$$

definimos los parámetros adimensionales

$$\gamma_1 = \frac{m_1 \mathcal{L}^2}{\mathcal{T} \hbar}, \quad (4.19)$$

y

$$\gamma_2 = \frac{m_2 \mathcal{L}^2}{\mathcal{T} \hbar}, \quad (4.20)$$

Fijamos $\gamma_1 = 1$, no podemos fijar $\gamma_2 = 1$, ya que implicaría que $m_1 = m_2$, por lo tanto,

$$\gamma_2 = \frac{m_2}{m_1}, \quad (4.21)$$

Y por lo tanto tenemos el sistema reescrito de forma adimensional, para poder manipularlo numéricamente.

$$\nabla'^2 \Phi' = 4\pi(|\psi'_1|^2 + |\psi'_2|^2), \quad (4.22)$$

$$i \psi'_1 = -\frac{1}{2} \nabla'^2 \psi'_1 + \Phi \psi'_1, \quad (4.23)$$

$$i \psi'_2 = -\frac{1}{\gamma_2} \nabla'^2 \psi'_2 + \gamma_2 \Phi \psi'_2, \quad (4.24)$$

podemos reescribir el sistema bajo condiciones de frontera periódicas como:

Entonces, (4.23) y (4.24) se mantienen igual, mientras que (4.22) se reescribe como

$$\nabla'^2 \Phi' = 4\pi[|\psi'_1|^2 + |\psi'_2|^2 - \langle |\psi'_1|^2 \rangle - \langle |\psi'_2|^2 \rangle], \quad (4.25)$$

La masa integrada del sistema está dada por:

$$M_{tot} = \int d^3x [|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2], \quad (4.26)$$

por lo tanto,

$$M_{tot} = \int d^3x' [\mathcal{M}_1 |\psi'_1|^2 + \mathcal{M}_2 |\psi'_2|^2], \quad (4.27)$$

y así, obtenemos la densidad en un punto

$$\rho = \mathcal{M}_1 \mathcal{L}^{-3} |\psi'_1|^2 + \mathcal{M}_2 \mathcal{L}^{-3} |\psi'_2|^2, \quad (4.28)$$

donde tenemos que

$$\mathcal{L} = \left(\frac{8\pi \hbar^2}{3m_1^2 H_0^2 \Omega_{m_0}} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{T} = \left(\frac{8\pi}{3H_0^2 \Omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} = 75.134 \text{ Gyr}, \quad (4.30)$$

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{G} \left(\frac{8\pi}{3H_0^2 \Omega_{m_0}} \right)^{-1/4} \left(\frac{\hbar}{m_1} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.31)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{\mathcal{M}_1}{\gamma_2^3}, \quad (4.32)$$

Por su parte, la energía del sistema se calcula como

$$E = E_1 + E_2 = (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-2} E_{code}, \quad (4.33)$$

y la velocidad está dada por

$$v = \mathcal{L} \mathcal{T}^{-1} v_{code}, \quad (4.34)$$

Este nuevo sistema se puede obtener a partir de una acción adimensional, dada por 4.35 y nótese que se omitieron las cantidades primadas, a partir de la cual se derivan las ecuaciones del sistema Schrödinger Poisson para dos masas de axión:

$$S = \int_{\mathbb{R}^3} - \left[\Phi |\psi_1|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \psi_1|^2 + \frac{m_1}{2m_2} |\nabla \psi_2|^2 + \frac{i}{2} (\psi_1 \dot{\psi}_1^* - \dot{\psi}_1 \psi_1^*) + \frac{im_1}{2m_2} (\psi_2 \dot{\psi}_2^* - \dot{\psi}_2 \psi_2^*) \right], \quad (4.35)$$

Por lo tanto, la evolución de las energías está dada por:

$$E_{tot} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_1} \dot{\psi}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_1^*} \dot{\psi}_1^* + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_2} \dot{\psi}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_2^*} \dot{\psi}_2^* + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \dot{\Phi} - L \right\}, \quad (4.36)$$

Explícitamente se tiene que

$$E_{tot} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left\{ \Phi [|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2] + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \psi_1|^2 + \frac{m_1}{2m_2} |\nabla \psi_2|^2 \right\}, \quad (4.37)$$

$$E_{tot} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\frac{1}{2} \nabla (\Phi \nabla \Phi) - \frac{1}{2} \Phi \nabla^2 \Phi + \Phi (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{1}{2} \nabla (\psi_1^* \nabla \psi_1) \right. \\ \left. - \frac{1}{2\gamma_2} \nabla (\psi_2^* \nabla \psi_2) - \frac{1}{2} \psi_1^* \nabla^2 \psi_1 - \frac{1}{2\gamma_2} (\psi_2^* \nabla^2 \psi_2) \right], \quad (4.38)$$

Aplicando el teorema de Stokes obtenemos la expresión para la energía total a integrarse numéricamente.

$$E_{tot} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left\{ \frac{1}{2} \Phi (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) - \frac{1}{2} \psi_1^* \nabla^2 \psi_1 - \frac{m_1}{2m_2} \psi_2^* \nabla^2 \psi_2 \right\}, \quad (4.39)$$

La integral (4.39) se calculará numéricamente en el código. Con esto terminamos de presentar las modificaciones necesarias al sistema, las cuales deberán ser implementadas en el código para simular materia oscura con multicampos; la adimensionalización general para N - campos se obtiene de forma muy similar al proceso descrito.

Capítulo 5

Conclusiones

El modelo CDM es el modelo más aceptado actualmente, pero el modelo SFDM es un modelo que permite explicar mejor la formación de estructuras. En el presente trabajo se realizó una breve revisión del modelo ΛCDM , donde se presentaron sus características y sus parámetros, mostrando las implicaciones de variar algunos parámetros a través de simulaciones realizadas con el código numérico CLASS [18]; posteriormente se expusieron algunas características del modelo SFDM, el cual postula que la materia oscura está compuesta por bosones ultraligeros descritos por el sistema Schrödinger-Newton.

Los halos galácticos están conformados principalmente por materia oscura, así que bajo ésta suposición no se tomó en cuenta otros tipos de materia y se estudiaron varias interacciones entre halos, a través de diversas simulaciones utilizando el código PyUltraLight [1] para estudiar diversas configuraciones de halos solitónicos, verificando efectos como la disrupción de mareas, la fusión de varios halos solitónicos, observando diferentes órbitas de solitones (hiperbólicas, elípticas, circulares y algunas más complejas), además de encontrar interacciones repulsivas cuando hay un desfase de π en las condiciones iniciales de dos solitones; incluso observamos que cuando la velocidad relativa entre dos solitones era lo suficientemente grande no se fusionaban, sino que seguían trayectorias opuestas a su dirección de movimiento inicial. Para estudiar estructuras de no equilibrio se consideraron solitones con posiciones aleatorias, observando la fusión de varios solitones hasta formar uno solo. Al agregar pequeñas velocidades aleatorias se observaron órbitas, pero los halos solitónicos terminaron fusionándose en uno solo después de un tiempo. También se exploraron las diferentes limitantes numéricas, se encontró que el código presenta algunos problemas cuando los solitones se encuentran cercanos a la frontera, debido a las condiciones periódicas en las fronteras; así como cuando se utilizaron masas muy grandes para interacciones de varios solitones, por ejemplo el caso con tres solitones de masas $M_s = 100$ en el cual la animación de los contornos de densidad evolucionando en el tiempo no se pudo generar correctamente; cuando los solitones son demasiado masivos, sus contornos de densidad se hacen tan pequeños que con los valores de resolución del código numérico no es posible resolver el sistema correctamente, en esos casos es necesario aumentar la resolución de la malla tridimensional utilizada para resolver el sistema, aunque esto implica un mayor gasto computacional.

Finalmente, con intención de explorar la posibilidad de que la materia oscura esté compuesta por múltiples especies de axiones, cada una con masa diferente, aquí planteamos la posibilidad de modificar el código PyUltraLight para un sistema que considere múltiples diferentes masas de axiones. Además, como vistazo al futuro, es de interés buscar una solución a los problemas encontrados en el código.

Apéndice A

El Problema de N-cuerpos

Cuando se consideran N cuerpos, los cuales interactúan entre sí, se busca conocer la evolución futura, es decir, los movimientos de orbitales de cada uno de estos cuerpos, conociendo las masas, la posición y la velocidad de los cuerpos en un instante de tiempo. De forma general, el problema para N -cuerpos se resuelve de forma numérica y las simulaciones numéricas son de utilidad en una gran cantidad de áreas en la física. Aquí se plantean brevemente los problemas de dos y tres cuerpos, para encontrar más detalles sobre los problemas de dos y tres cuerpos revisar [69] y [67].

A.1. El problema de dos cuerpos

Sean dos objetos, los cuales se suponen como partículas puntuales, en un sistema aislado del resto del universo. Considerando una fuerza central que deriva de un potencial central $V(\mathbf{r})$, así nuestro lagrangiano está dado por:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}). \quad (\text{A.1})$$

Si definimos que en el centro de masa $\mathbf{R} \equiv \mathbf{0}$, tenemos:

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}). \quad (\text{A.2})$$

El problema de dos cuerpos se ha reducido a un problema de un cuerpo, en el que debe determinarse el movimiento de una partícula con masa μ en el campo central descrito por el potencial $V(\mathbf{r})$, como solo depende de la distancia de la partícula al centro de fuerzas, esto debido a que en los sistemas inerciales el espacio es isótropo (las propiedades mecánicas del sistema no dependen de la orientación del sistema), entonces el sistema posee simetría esférica.

Además, dado que se conserva el momento cinético del sistema, el movimiento se da en un plano. Usando coordenadas polares (r, ϕ) en ese plano, el lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r). \quad (\text{A.3})$$

De ahí se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema. Y se obtiene que la energía total del sistema está dada por:

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2) + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + V(r). \quad (\text{A.4})$$

Donde $V(r)$ es el potencial gravitacional. Algunos resultados importantes se presentan a continuación.

La energía necesaria para que el cuerpo salga de la órbita implica que la energía mecánica total sea nula, es decir $E = T + V = 0$. Explícitamente:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = 0. \quad (\text{A.5})$$

De ahí se deduce que la velocidad mínima con la cual el objeto en órbita escapa, de ahí el nombre de velocidad de escape, es:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (\text{A.6})$$

La velocidad de un objeto que está en órbita circular está dada por la ecuación (A.7):

$$v = v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (\text{A.7})$$

y tomando en cuenta que $T = 2\pi/\omega$, el tiempo que tarda en dar una vuelta completa es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}. \quad (\text{A.8})$$

A.2. El problema de tres cuerpos

De forma general, el problema de tres cuerpos no tiene solución exacta, pero hay algunos casos particulares donde se tienen soluciones analíticas. Una solución analítica de tres cuerpos se presenta en el caso de tres es cuando se tiene un sistema formado por 3 objetos, de los cuales uno se encuentra estático (en el marco de referencia fijado), y alrededor de este orbitan otros dos objetos con masas iguales. Entonces, en este sistema para cualquiera de los objetos en órbita tiene una fuerza centrípeta y ejerce fuerza sobre los otros dos objetos. En este caso la fuerza que ejerce sobre los dos objetos genera la fuerza centrípeta, así $F_G = F_c$ donde

$$F_G = \frac{GmM}{r^2} + \frac{Gm^2}{(2r)^2}, \quad y \quad F_c = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r}{r^2}. \quad (\text{A.9})$$

Al igualar estas expresiones y con un poco de álgebra se obtiene la velocidad relativa con la que se mueve cada uno de los objetos con la misma masa.

$$v = \sqrt{\frac{G}{r} \left(M + \frac{m}{4} \right)}. \quad (\text{A.10})$$

y tomando en cuenta que $T = \frac{2\pi}{\omega}$, el tiempo que tarda en dar una vuelta completa es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(4M + m)}}. \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Tensor de energía momento

De la teoría clásica de campos sabemos que las partículas escalares se describen con la ecuación de Klein Gordon, la cual se obtiene aplicando las ecuaciones de Euler - Lagrange para la densidad lagrangiana real dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (\text{B.1})$$

la densidad lagrangiana para un espacio de Minkowski se puede escribir como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2. \quad (\text{B.2})$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos se escriben como:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Así se obtiene la ecuación de Klein-Gordon para campos reales (B.4)

$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2 = \square\phi - m^2\phi^2 = 0, \quad (\text{B.4})$$

a partir de la densidad lagrangiana podemos calcular el tensor de energía momento, el cual se define como

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (\text{B.5})$$

siguiendo la definición de la ecuación (B.5) tenemos:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right), \quad (\text{B.6})$$

El tensor de energía momento del sistema de Klein Gordon real tiene la propiedad de ser simétrico ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$). Por otro lado, el momento conjugado canónico del campo ϕ se define como

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (\text{B.7})$$

El momento se define como:

$$P^\mu = \int d^3x (T^{0\mu}), \quad (\text{B.8})$$

y particularmente

$$P^0 = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \right] = \int [\pi \dot{\phi} - \mathcal{L}], \quad (\text{B.9})$$

$$P^0 = \int d^3x \mathcal{H} \equiv H, \quad (\text{B.10})$$

donde la ecuación (B.10) es el hamiltoniano del sistema, representa la energía total del sistema, para este caso particular se tiene que:

$$E = H = \int d^3x \left[\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [(\dot{\phi})^2 - (\nabla\phi)^2 + m^2 \phi^2] \right]. \quad (\text{B.11})$$

Para un campo de Klein Gordon complejo tenemos la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \frac{1}{2} m^2 \phi^* \phi, \quad (\text{B.12})$$

siguiendo el mismo proceso que en el caso real, donde la definición del tensor de energía momento es

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial^\nu \phi^* - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (\text{B.13})$$

Se obtiene la ecuación de Klein Gordon para campos complejos

$$\square \phi - m^2 \phi = 0. \quad (\text{B.14})$$

también se puede obtener el tensor de energía momento respectivo

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi^*\partial^\nu\phi + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi^* - g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi^* - \frac{1}{2}m^2\phi^*\phi\right), \quad (\text{B.15})$$

lo que se puede reescribir como:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi^*\partial^\nu\phi + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi^* - g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi^* - \frac{1}{2}m^2|\phi|^2\right). \quad (\text{B.16})$$

También de esa forma se puede obtener el momento generalizado y la energía.

Nótese que se utiliza la signatura de la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, si se utilizara la signatura $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ la ecuación de Klein - Gordon se escribiría como

$$\square\phi + m^2\phi = 0. \quad (\text{B.17})$$

Bibliografía

- [1] Faber Edwards, Emily Kendall, Shaun Hotchkiss, and Richard Easther. Pyultralight: a pseudo-spectral solver for ultralight dark matter dynamics. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(10):027–027, Oct 2018.
- [2] José Antonio García Barreto. *Astronomía básica*. Fondo de Cultura Económica., Carretera Pichacho - Ajusco 227, 14200 México D.F., 2000.
- [3] Albert Einstein. Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen (On the Relativity Principle and the Conclusions Drawn from It). *Annalen der Physik*, 2:411–462, 1907.
- [4] Albert Einstein. Kovarianzeigenschaften der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie (Covariance Properties of the Field Equations of the Theory of Gravitation Based on the Generalized Theory of Relativity). *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 63:215–225, 1914.
- [5] Albert Einstein. Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie (Fundamental Ideas of the General Theory of Relativity and the Application of this Theory in Astronomy). *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, page 315, 1915.
- [6] Albert Einstein. Zur allgemeinen Relativitätstheorie (On the General Theory of Relativity). *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, pages 778–786, 799–801, 1915.
- [7] Albert Einstein. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie (Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity). *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, pages 831 – 839, 1915.
- [8] Albert Einstein. Feldgleichungen der Gravitation (The Field Equations of Gravitation). *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, pages 844 – 847, 1915.
- [9] Alexander Friedmann. On the curvature of space. *Zeitschrift für Physik*, 10:377, 1922.
- [10] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15:168–173, 1929.

- [11] Linda. S. Sparke and J. S. Gallagher III. *Galaxies in the universe An Introduction Second Edition*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 2010.
- [12] Heinz Andernach and Fritz Zwicky. English and spanish translation of zwicky's (1933) the redshift of extragalactic nebulae, 2017.
- [13] V. C. Rubin, Jr. Ford, W. K., and N. Thonnard. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 (R=4kpc) to UGC 2885 (R=122kpc). , 238:471–487, June 1980.
- [14] J. R. Brownstein and J. W. Moffat. The bullet cluster 1e0657-558 evidence shows modified gravity in the absence of dark matter. 382:29–47, Nov 2007.
- [15] Junjie Cao, Yangle He, Liangliang Shang, Yang Zhang, and Pengxuan Zhu. Current status of a natural nmssm in light of lhc 13 tev data and xenon-1t results. *Physical Review D*, 99(7), Apr 2019.
- [16] Planck Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, R. Battye, K. Benabed, J. P. Bernard, M. Bersanelli, P. Bielewicz, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, F. R. Bouchet, F. Boulanger, M. Bucher, C. Burigana, R. C. Butler, E. Calabrese, J. F. Cardoso, J. Carron, A. Challinor, H. C. Chiang, J. Chluba, L. P. L. Colombo, C. Combet, D. Contreras, B. P. Crill, F. Cuttaia, P. de Bernardis, G. de Zotti, J. Delabrouille, J. M. Delouis, E. Di Valentino, J. M. Diego, O. Doré, M. Douspis, A. Ducout, X. Dupac, S. Dusini, G. Efstathiou, F. Elsner, T. A. Enßlin, H. K. Eriksen, Y. Fantaye, M. Farhang, J. Fergusson, R. Fernandez-Cobos, F. Finelli, F. Forastieri, M. Frailis, A. A. Fraisse, E. Franceschi, A. Frolov, S. Galeotta, S. Galli, K. Ganga, R. T. Génova-Santos, M. Gerbino, T. Ghosh, J. González-Nuevo, K. M. Górski, S. Gratton, A. Gruppuso, J. E. Gudmundsson, J. Hamann, W. Handley, F. K. Hansen, D. Herranz, S. R. Hildebrandt, E. Hivon, Z. Huang, A. H. Jaffe, W. C. Jones, A. Karacki, E. Keihänen, R. Keskitalo, K. Kiiveri, J. Kim, T. S. Kisner, L. Knox, N. Krachmalnicoff, M. Kunz, H. Kurki-Suonio, G. Lagache, J. M. Lamarre, A. Lasenby, M. Lattanzi, C. R. Lawrence, M. Le Jeune, P. Lemos, J. Lesgourgues, F. Levrier, A. Lewis, M. Liguori, P. B. Lilje, M. Lilley, V. Lindholm, M. López-Cañiego, P. M. Lubin, Y. Z. Ma, J. F. Macías-Pérez, G. Maggio, D. Maino, N. Mandolesi, A. Mangilli, A. Marcos-Caballero, M. Maris, P. G. Martín, M. Martinelli, E. Martínez-González, S. Matarrese, N. Mauri, J. D. McEwen, P. R. Meinhold, A. Melchiorri, A. Mennella, M. Migliaccio, M. Millea, S. Mitra, M. A. Miville-Deschênes, D. Molinari, L. Montier, G. Morgante, A. Moss, P. Natoli, H. U. Nørgaard-Nielsen, L. Pagano, D. Paoletti, B. Partridge, G. Patanchon, H. V. Peiris, F. Perrotta, V. Pettorino, F. Piacentini, L. Polastri, G. Polenta, J. L. Puget, J. P. Rachen, M. Reinecke, M. Remazeilles, A. Renzi, G. Rocha, C. Rosset, G. Roudier, J. A. Rubiño-Martín, B. Ruiz-Granados, L. Salvati, M. Sandri, M. Savelainen, D. Scott, E. P. S. Shellard, C. Sirignano, G. Sirri, L. D. Spencer, R. Sunyaev, A. S. Suur-Uski, J. A. Tauber, D. Tavagnacco, M. Tenti, L. Toffolatti, M. Tomasi, T. Trombetti, L. Valenziano, J. Valiviita, B. Van Tent, L. Vibert, P. Vielva, F. Villa, N. Vittorio, B. D. Wandelt, I. K. Wehus, M. White, S. D. M. White, A. Zacchei, and A. Zonca. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters, 2018.

- [17] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, and et al. Planck 2018 results. *Astronomy Astrophysics*, 641:A6, Sep 2020.
- [18] Julien Lesgourgues. The cosmic linear anisotropy solving system (class) i: Overview, 2011.
- [19] Patrick McDonald, Uroš Seljak, Scott Burles, David J. Schlegel, David H. Weinberg, Renyue Cen, David Shih, Joop Schaye, Donald P. Schneider, Neta A. Bahcall, and et al. The ly forest power spectrum from the sloan digital sky survey. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 163(1):80–109, Mar 2006.
- [20] J. Jeans. The newtonian theory of gravitational instability in nonexpanding media is developed. *Cambridge University Press*, 129(44), 1902.
- [21] M. Persic and P. Salucci. The baryon content of the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 258(1):14P–18P, Sep 1992.
- [22] N. Werner, A. Finoguenov, J. S. Kaastra, A. Simionescu, J. P. Dietrich, J. Vink, and H. Böhringer. Detection of hot gas in the filament connecting the clusters of galaxies abell 222 and abell 223. *Astronomy Astrophysics*, 482(3):L29–L33, Apr 2008.
- [23] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, D. A. Cottingham, Jr. Eplee, R. E., R. B. Isaacman, J. C. Mather, S. S. Meyer, P. D. Noerdlinger, R. A. Shafer, R. Weiss, E. L. Wright, C. L. Bennett, N. W. Boggess, T. Kelsall, S. H. Moseley, R. F. Silverberg, G. F. Smoot, and D. T. Wilkinson. Cosmic Microwave Background Dipole Spectrum Measured by the COBE FIRAS Instrument. , 420:445, January 1994.
- [24] C. L. Bennett, D. Larson, J. L. Weiland, N. Jarosik, G. Hinshaw, N. Odegard, K. M. Smith, R. S. Hill, B. Gold, M. Halpern, and et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Final maps and results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):20, Sep 2013.
- [25] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel, C. L. Bennett, J. Dunkley, M. R. Nolta, M. Halpern, R. S. Hill, N. Odegard, and et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological parameter results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):19, Sep 2013.
- [26] P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. I. R. Alves, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela, J. Aumont, H. Aussel, and et al. Planck2013 results. i. overview of products and scientific results. *Astronomy Astrophysics*, 571:A1, Oct 2014.
- [27] D. S. Swetz, P. A. R. Ade, M. Amiri, J. W. Appel, E. S. Battistelli, B. Burger, J. Chervenak, M. J. Devlin, S. R. Dicker, W. B. Doriese, and et al. Overview of the atacama cosmology telescope: Receiver, instrumentation, and telescope systems. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 194(2):41, Jun 2011.
- [28] J. E. Carlstrom, P. A. R. Ade, K. A. Aird, B. A. Benson, L. E. Bleem, S. Busetti, C. L. Chang, E. Chauvin, H.-M. Cho, T. M. Crawford, and et al. The 10 meter south pole

- telescope. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 123(903):568–581, May 2011.
- [29] Douglas Clowe, Maruša Bradač, Anthony H. Gonzalez, Maxim Markevitch, Scott W. Randall, Christine Jones, and Dennis Zaritsky. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *The Astrophysical Journal*, 648(2):L109–L113, aug 2006.
- [30] Particle Data Group, P A Zyla, R M Barnett, J Beringer, O Dahl, D A Dwyer, D E Groom, C J Lin, K S Lugovsky, E Pianori, D J Robinson, C G Wohl, W M Yao, K Agashe, G Aielli, B C Allanach, C Amsler, M Antonelli, E C Aschenauer, D M Asner, H Baer, Sw Banerjee, L Baudis, C W Bauer, J J Beatty, V I Belousov, S Bethke, A Bettini, O Biebel, K M Black, E Blucher, O Buchmuller, V Burkert, M A Bychkov, R N Cahn, M Carena, A Ceccucci, A Cerri, D Chakraborty, R Sekhar Chivukula, G Cowan, G D’Ambrosio, T Damour, D de Florian, A de Gouvêa, T DeGrand, P de Jong, G Dissertori, B A Dobrescu, M D’Onofrio, M Doser, M Drees, H K Dreiner, P Eerola, U Egede, S Eidelman, J Ellis, J Erler, V V Ezhela, W Fetscher, B D Fields, B Foster, A Freitas, H Gallagher, L Garren, H J Gerber, G Gerbier, T Gershon, Y Gershtein, T Gherghetta, A A Godizov, M C Gonzalez-Garcia, M Goodman, C Grab, A V Gribsan, C Grojean, M Grünewald, A Gurtu, T Gutsche, H E Haber, C Hanhart, S Hashimoto, Y Hayato, A Hebecker, S Heinemeyer, B Heltsley, J J Hernández-Rey, K Hikasa, J Hisano, A Höcker, J Holder, A Holtkamp, J Huston, T Hyodo, K F Johnson, M Kado, M Karliner, U F Katz, M Kenzie, V A Khoze, S R Klein, E Klempt, R V Kowalewski, F Krauss, M Kreps, B Krusche, Y Kwon, O Lahav, J Laiho, L P Lellouch, J Lesgourgues, A R Liddle, Z Ligeti, C Lippmann, T M Liss, L Littenberg, C Lourenço, S B Lugovsky, A Lusiani, Y Makida, F Maltoni, T Mannel, A V Manohar, W J Marciano, A Masoni, J Matthews, U G Meißner, M Mikhasenko, D J Miller, D Milstead, R E Mitchell, K Mönig, P Molaro, F Moortgat, M Moskvic, K Nakamura, M Narain, P Nason, S Navas, M Neubert, P Nevski, Y Nir, K A Olive, C Patrignani, J A Peacock, S T Petcov, V A Petrov, A Pich, A Piepke, A Pomarol, S Profumo, A Quadt, K Rabbertz, J Rademacker, G Raffelt, H Ramani, M Ramsey-Musolf, B N Ratcliff, P Richardson, A Ringwald, S Roesler, S Rolli, A Romaniouk, L J Rosenberg, J L Rosner, G Rybka, M Ryskin, R A Ryutin, Y Sakai, G P Salam, S Sarkar, F Sauli, O Schneider, K Scholberg, A J Schwartz, J Schwiening, D Scott, V Sharma, S R Sharpe, T Shutt, M Silari, T Sjöstrand, P Skands, T Skwarnicki, G F Smoot, A Soffer, M S Sozzi, S Spanier, C Spiering, A Stahl, S L Stone, Y Sumino, T Sumiyoshi, M J Syphers, F Takahashi, M Tanabashi, J Tanaka, M Taševský, K Terashi, J Terning, U Thoma, R S Thorne, L Tiator, M Titov, N P Tkachenko, D R Tovey, K Trabelsi, P Urquijo, G Valencia, R Van de Water, N Varelas, G Venanzoni, L Verde, M G Vincter, P Vogel, W Vogelsang, A Vogt, V Vorobyev, S P Wakely, W Walkowiak, C W Walter, D Wands, M O Wascko, D H Weinberg, E J Weinberg, M White, L R Wiencke, S Willocq, C L Woody, R L Workman, M Yokoyama, R Yoshida, G Zanderighi, G P Zeller, O V Zenin, R Y Zhu, S L Zhu, F Zimmermann, J Anderson, T Basaglia, V S Lugovsky, P Schaffner, and W Zheng. Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020(8), 08 2020. 083C01.
- [31] Katherine Freese, Brian Fields, and David Graff. Death of stellar baryonic dark matter candidates. 08 2000.

- [32] R. D. Peccei and Helen R. Quinn. Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles. , 16(6):1791–1797, September 1977.
- [33] Kim Griest. Galactic Microlensing as a Method of Detecting Massive Compact Halo Objects. , 366:412, January 1991.
- [34] J. A. Peacock. Implications of 2d fgrs results on cosmic structure. *AIP Conference Proceedings*, 2003.
- [35] Donald G. York, J. Adelman, Jr. John E. Anderson, Scott F. Anderson, James Annis, Neta A. Bahcall, J. A. Bakken, Robert Barkhouser, Steven Bastian, Eileen Berman, William N. Boroski, Steve Bracker, Charlie Briegel, John W. Briggs, J. Brinkmann, Robert Brunner, Scott Burles, Larry Carey, Michael A. Carr, Francisco J. Castander, Bing Chen, Patrick L. Colestock, A. J. Connolly, J. H. Crocker, István Csabai, Paul C. Czarapata, John Eric Davis, Mamoru Doi, Tom Dombeck, Daniel Eisenstein, Nancy Ellman, Brian R. Elms, Michael L. Evans, Xiaohui Fan, Glenn R. Federwitz, Larry Fiscelli, Scott Friedman, Joshua A. Frieman, Masataka Fukugita, Bruce Gillespie, James E. Gunn, Vijay K. Gurbani, Ernst de Haas, Merle Haldeman, Frederick H. Harris, J. Hayes, Timothy M. Heckman, G. S. Hennessy, Robert B. Hindsley, Scott Holm, Donald J. Holmgren, Chi hao Huang, Charles Hull, Don Husby, Shin-Ichi Ichikawa, Takashi Ichikawa, Željko Ivezić, Stephen Kent, Rita S. J. Kim, E. Kinney, Mark Klaene, A. N. Kleinman, S. Kleinman, G. R. Knapp, John Korienek, Richard G. Kron, Peter Z. Kunszt, D. Q. Lamb, B. Lee, R. French Leger, Siriluk Limmongkol, Carl Lindenmeyer, Daniel C. Long, Craig Loomis, Jon Loveday, Rich Lucinio, Robert H. Lupton, Bryan MacKinnon, Edward J. Mannery, P. M. Mantsch, Bruce Margon, Peregrine McGehee, Timothy A. McKay, Avery Meiksin, Aronne Merelli, David G. Monet, Jeffrey A. Munn, Vijay K. Narayanan, Thomas Nash, Eric Neilsen, Rich Neswold, Heidi Jo Newberg, R. C. Nichol, Tom Nicinski, Mario Nonino, Norio Okada, Sadanori Okamura, Jeremiah P. Ostriker, Russell Owen, A. George Pauls, John Peoples, R. L. Peterson, Donald Petravick, Jeffrey R. Pier, Adrian Pope, Ruth Pordes, Angela Prossapio, Ron Rechenmacher, Thomas R. Quinn, Gordon T. Richards, Michael W. Richmond, Claudio H. Rivetta, Constance M. Rockosi, Kurt Ruthmansdorfer, Dale Sandford, David J. Schlegel, Donald P. Schneider, Maki Sekiguchi, Gary Sergey, Kazuhiro Shimasaku, Walter A. Siegmund, Stephen Smee, J. Allyn Smith, S. Snedden, R. Stone, Chris Stoughton, Michael A. Strauss, Christopher Stubbs, Mark SubbaRao, Alexander S. Szalay, Istvan Szapudi, Gyula P. Szokoly, Anirudda R. Thakar, Christy Tremonti, Douglas L. Tucker, Alan Uomoto, Dan Vanden Berk, Michael S. Vogeley, Patrick Waddell, Shu i Wang, Masaru Watanabe, David H. Weinberg, Brian Yanny, and Naoki Yasuda. The sloan digital sky survey: Technical summary. *The Astronomical Journal*, 120(3):1579–1587, sep 2000.
- [36] Antonino Del Popolo and Morgan Le Delliou. Small scale problems of the cdm model: A short review. *Galaxies*, 5(1):17, Feb 2017.
- [37] Till Sawala, Carlos S. Frenk, Azadeh Fattahi, Julio F. Navarro, Richard G. Bower, Robert A. Crain, Claudio Dalla Vecchia, Michelle Furlong, John. C. Helly, Adrian Jenkins, and et al. The apostle simulations: solutions to the local group’s cosmic puzzles. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457(2):1931–1943, Feb 2016.

- [38] S. U. Ji and S. J. Sin. Late-time phase transition and the galactic halo as a bose liquid. ii. the effect of visible matter. *Physical Review D*, 50(6):3655–3659, Sep 1994.
- [39] Sang-Jin Sin. Late-time phase transition and the galactic halo as a bose liquid. *Physical Review D*, 50(6):3650–3654, Sep 1994.
- [40] E. Seidel and W.M. Suen. Oscillating soliton stars. *Phys. Rev. Lett.*, 66:1659–1662, 1991.
- [41] Varun Sahni and Limin Wang. New cosmological model of quintessence and dark matter. *Phys. Rev. D*, 62:103517, Oct 2000.
- [42] Tonatiuh Matos and L Arturo Ureña-López. Quintessence and scalar dark matter in the universe. *Classical and Quantum Gravity*, 17(13):L75–L81, jun 2000.
- [43] Tonatiuh Matos, F Siddhartha Guzmán, and L Arturo Ureña-López. Scalar field as dark matter in the universe. *Classical and Quantum Gravity*, 17(7):1707–1712, mar 2000.
- [44] Tonatiuh Matos and L. Arturo Ureña-López. Further analysis of a cosmological model with quintessence and scalar dark matter. *Physical Review D*, 63(6), Feb 2001.
- [45] Tonatiuh Matos and L. Arturo Ureña López. Further analysis of a cosmological model with quintessence and scalar dark matter. *Phys. Rev. D*, 63:063506, Feb 2001.
- [46] Jae-weon Lee and In-gyu Koh. Galactic halos as boson stars. *Physical Review D*, 53(4):2236–2239, Feb 1996.
- [47] Jayashree Balakrishna, Edward Seidel, and Wai-Mo Suen. Dynamical evolution of boson stars. ii. excited states and self-interacting fields. *Physical Review D*, 58(10), Sep 1998.
- [48] Argelia Bernal and F. Siddhartha Guzmán. Scalar field dark matter: Nonspherical collapse and late-time behavior. *Physical Review D*, 74(6), Sep 2006.
- [49] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Darío Núñez, and Olivier Sarbach. ℓ -boson stars. *Classical and Quantum Gravity*, 35(19):19LT01, Sep 2018.
- [50] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Darío Núñez, and Olivier Sarbach. Dynamical evolutions of ℓ -boson stars in spherical symmetry. *Classical and Quantum Gravity*, 36(21):215013, Oct 2019.
- [51] Víctor Jaramillo, Nicolas Sanchis-Gual, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Carlos Herdeiro, and Darío Núñez. Dynamical ℓ -boson stars: Generic stability and evidence for nonspherical solutions. *Physical Review D*, 101(12), Jun 2020.
- [52] R. Sharma, S. Karmakar, and S. Mukherjee. Boson star and dark matter, 2008.
- [53] Steven. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley Sons, Inc., Massachusetts Institute of Technology, 1972.

- [54] Luis. De la Peña. *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura Económica., UNAM, 2006.
- [55] F. Siddhartha Guzmán and L. Arturo Ureña López. Evolution of the schrödinger-newton system for a self-gravitating scalar field. *Phys. Rev. D*, 69:124033, Jun 2004.
- [56] F. Siddhartha Guzmán and L. Arturo Ureña-López. Newtonian collapse of scalar field dark matter. *Physical Review D*, 68(2), Jul 2003.
- [57] REMO RUFFINI and SILVANO BONAZZOLA. Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783, Nov 1969.
- [58] Abril Suárez, Victor Robles, and Tonatiuh Matos. A review on the scalar field/ bose-einstein condensate dark matter model. *Astrophysics and Space Science Proceedings 38, Chapter 9 (2013)*, 02 2013.
- [59] Juan Magaña and Tonatiuh Matos. A brief review of the scalar field dark matter model. *Journal of Physics: Conference Series*, 378:012012, Aug 2012.
- [60] Jae-Weon Lee. Brief history of ultra-light scalar dark matter models. *EPJ Web of Conferences*, 168:06005, 2018.
- [61] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952.
- [62] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. ii. *Phys. Rev.*, 85:180–193, Jan 1952.
- [63] Mark Vogelsberger, Federico Marinacci, Paul Torrey, and Ewald Puchwein. Cosmological simulations of galaxy formation, 2019.
- [64] Gianfranco Bertone and Dan Hooper. History of dark matter. *Reviews of Modern Physics*, 90(4), Oct 2018.
- [65] J.A. Wheeler. Mechanisms for jets' in study week on nuclei of galaxies. *Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia*, no. 25:539–567, 1971.
- [66] J. P. Luminet and B. Carter. Dynamics of an Affine Star Model in a Black Hole Tidal Field. , 61:219, June 1986.
- [67] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical Mechanics (3rd Edition)*. Adisson Wesley, 06 2001.
- [68] Bodo Schwabe, Jens C. Niemeyer, and Jan F. Engels. Simulations of solitonic core mergers in ultralight axion dark matter cosmologies. *Physical Review D*, 94(4), Aug 2016.
- [69] J. Goicolea Ruigómez. *Curso de Mecánica 2nd ed.* Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 2010.



Asunto: Revisión de Tesis
León, Guanajuato, Febrero de 2021

Dr. David Y. G. Delepine
Director
División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Universidad de Guanajuato
PRESENTE

Estimado Dr. Delepine:

Por medio de la presente le informo que he revisado la tesis "Estructuras autogravitantes de materia oscura ultraligera" escrita por el estudiante de la Licenciatura en Física de la DCI, Edson Oswaldo Ramírez Esqueda. En mi opinión la tesis esta lista para ser presentada y estoy de acuerdo que se proceda al examen recepcional, una vez que se cumplan los procedimientos administrativos correspondientes.

Sin más por el momento, le envío saludos cordiales.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

Una firma manuscrita en tinta negra, que parece ser "Argelia Bernal Bautista".

DRA. ARGELIA BERNAL BAUTISTA



León Gto. A 19 de febrero de 2021

Dr. David Delepine
Director de la División de Ciencias e Ingenierías
Campus León
Universidad de Guanajuato
PRESENTE

Estimado Dr. Delepine,

En mi calidad de miembro del comité de sinodales del alumno de Licenciatura en Física Edson Oswaldo Ramírez Esqueda, por este medio informo a usted que he revisado su tesis titulada "*Estructuras autogravitantes de materia oscura ultraligera*" que desarrolló Edson Ramírez con el fin de obtener el grado de Licenciado en Física.

El trabajo de Edson es novedoso y posee el contenido y relevancia necesaria como trabajo de investigación. Edson ha tomado en cuenta mis observaciones en la versión final de la tesis y considero que dicho trabajo está listo para ser defendido públicamente.

Sin más por el momento, me despido con un cordial saludo

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"

Una firma manuscrita en tinta azul, que parece ser la del Dr. José Luis López Picón, escrita sobre una línea horizontal.

Dr. José Luis López Picón
Departamento de Física, DCI.



León, Gto., a 15 de febrero de 2021
Asunto: **Revisión de Tesis**

DR. DAVID YVES GHISLAIN DELEPINE
DIRECTOR
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERIAS
CL -UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

A través de la presente constato que he revisado la tesis del C. **Edson Oswaldo Ramírez Esqueda** con el fin de obtener el grado de Licenciatura en Física. El trabajo de tesis se titula “**Estructuras autogravitantes de materia oscura ultraligera.**”. En este estudio realizado por Edson desarrolla analítica y numéricamente las soluciones de estructuras de halos galácticos formados por condensados de Bose-Einstein de bosones tipos axiones (como posibles tipo de materia oscura), que siguen soluciones tipo solitónicas de la ecuación de Schrödinger no lineal. El trabajo de titulación satisface con la completitud y solidez de un proyecto de titulación a nivel licenciatura. También se han hecho las correcciones pertinentes al documento de la tesis. Además, he cuestionado a Edson en los temas relacionados a su trabajo de tesis, demostrando su amplio dominio en los temas abordados en su trabajo de tesis. Por lo que considero que ya se puede proceder con la disertación de tesis.

Sin más por el momento le envío saludos cordiales.

Atentamente

Una firma manuscrita en tinta azul que parece decir 'C. Wiechers'.

Dr. Carlos Herman Wiechers Medina
Profesor-Investigador

Tel. +52 (477) 7885100 Ext. 8467
Cel. +52 (477) 1080605
e-mail 1: carherwm@fisica.ugto.mx
e-mail 2: ch.wiechers@ugto.mx