



UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

UN ESQUEMA NUMÉRICO CENTRADO PARA LAS ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS CON GRADIENTES HORIZONTALES DE DENSIDAD

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

GUILLERMO ALBERTO JIMÉNEZ FRÍAS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

REALIZADO EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD
DE GUANAJUATO

GUANAJUATO, GTO., JUNIO 2023

A mamá y papá

Agradecimientos

A mi mamá y mi papá que gracias a su esfuerzo y motivación me inspiraron a estudiar. Sin importar el tiempo y la distancia me brindaron su apoyo, consejos y que, con el ejemplo, constituyen gran parte de quien soy. Son la parte más importante de mi vida. Gracias por creer en mi.

A una gran persona que me acompañó durante gran parte de mi carrera y me ayudó a crecer como persona.

A mi asesor, quien fue parte importante del desarrollo de este trabajo, por su paciencia, dedicación y enseñanza.

Al Centro de Investigación en Matemáticas A.C. y a la Universidad de Guanajuato por los profesores de estas instituciones con los que compartimos espacio y tiempo y con quienes aprendí el encanto de las matemáticas.

Agradezco el apoyo recibido por los proyectos UNAM-DGAPA-PAPIIT IN112222 & Conacyt A1-S-17634.

Índice general

Introducción	1
1. Clasificación de Ecuaciones Diferenciales Parciales	3
1.1. Clasificación de Ecuaciones	4
1.2. Clasificación de Problemas Físicos	7
1.2.1. Ecuaciones Hiperbólicas	9
2. Leyes de Conservación Hiperbólicas	13
2.1. Leyes de Conservación	14
2.1.1. Problema de la onda de choque en un tubo	15
2.1.2. Consideraciones en las Leyes de Conservación	16
2.1.3. Derivación de las Leyes de Conservación	19
2.1.4. Ejemplos	20
2.1.5. Ecuación Lineal de Advección	23
2.2. Leyes de Conservación Escalares	25
2.2.1. Soluciones Clásicas	25

2.2.2.	Soluciones Débiles	33
2.2.3.	Soluciones clase C^1 a tramos y condición de choque	34
2.2.4.	Soluciones de Entropía	39
2.2.5.	Existencia y unicidad de la solución entrópica	46
2.2.6.	El Problema de Riemann	47
2.3.	Sistemas Hiperbólicos de Leyes de Conservación	55
2.3.1.	Sistemas Hiperbólicos Lineales	55
2.3.2.	Sistemas Hiperbólicos No Lineales	64
2.3.3.	Ondas Simples e Invariantes de Riemann	70
2.3.4.	Ondas de Choque y Discontinuidades de Contacto	74
2.3.5.	Curvas Características y Condiciones de Entropía	77
2.3.6.	Solución General del Problema de Riemann	81
3.	Métodos Numéricos	83
3.1.	Error Global y Convergencia	85
3.2.	Error Local de Truncamiento	86
3.3.	La Condición CFL	88
3.4.	Análisis de Estabilidad de Von Neumann	89
3.4.1.	Métodos Numéricos para la ecuación lineal de transporte	89
3.5.	Métodos Upwind	93
3.6.	Métodos de Alta Resolución	95
3.7.	Métodos Semi-Discretos	98

4. Modelo de Aguas Someras	101
4.1. El Modelo Uno Dimensional	103
4.2. Estados Estacionarios	104
4.3. Funciones de Entropía	106
4.4. Invariantes de Riemann a través de Ondas	107
4.5. Esquema Numérico	108
4.5.1. El Esquema Central-Upwind Semi-Discreto	108
4.5.2. Reconstrucción no Oscilatoria que Preserva la Positividad	110
4.5.3. Propiedad de buen balance	112
4.5.4. Evolución	113
5. Resultados Numéricos	115
5.1. Problema de Riemann	115
5.2. Perturbación a un estado estacionario	118
5.3. Positividad	120
6. Conclusiones	123

Introducción

Las ecuaciones de aguas someras han sido utilizadas para analizar una gran variedad de fenómenos geofísicos y atmosféricos. La derivación de estas ecuaciones se basan en la integración vertical de las ecuaciones de Euler, suponiendo que la escala de longitud horizontal es mucho más grande que la escala vertical. Como consecuencia, es natural suponer que la densidad sea constante en todo el dominio. Sin embargo, cuando se quiere modelar por ejemplo, el transporte de sedimentos, es necesario considerar variaciones horizontales de la densidad. En esta tesis, analizamos un modelo existente en la literatura que considera a las ecuaciones de aguas someras con gradientes horizontales de densidad. Analizamos también un método numérico de tipo central-upwind y lo aplicamos en dicho modelo. Aunque el método numérico es bastante conocido en la literatura, hasta donde tenemos conocimiento, no se ha aplicado a este modelo. El método numérico elegido cuenta con propiedades importantes como la preservación de la positividad de la profundidad de la capa. Esto nos permite considerar situaciones en donde existen estados secos y mojados, con potenciales aplicaciones a, por ejemplo, modelación de inundaciones. Para proporcionar al lector con el contexto necesario, empezamos con una discusión de la literatura existente. En el presente capítulo, hablamos sobre los modelos basados en Ecuaciones Diferenciales Parciales y su clasificación. El capítulo 2 se enfoca en la descripción de leyes de conservación y sus propiedades. En el capítulo 3, presentamos aspectos básicos teóricos para construir métodos numéricos robustos y eficientes. En todo momento se proporcionan las referencias de donde extrajo la información anterior y en donde el lector puede encontrar mayores detalles. En el capítulo 4 presentamos el modelo a considerar, discutiendo las propiedades hiperbólicas que éste satisface. Las propiedades del método numérico se demuestran en las pruebas numéricas del capítulo 5, dejando las conclusiones y anexos a los capítulos 6 y 7 respectivamente.

Capítulo 1

Clasificación de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Existe una cierta variedad de fenómenos naturales con un impacto significativo en la humanidad, como pueden ser tsunamies, huracanes, avalanchas, entre muchos otros. Por consiguiente, ha sido de mucho interés en la comunidad científica el analizar y predecir su evolución. En relación a esto último, se ha podido constatar que los modelos matemáticos basados en Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) han sido cruciales en la predicción de estos fenómenos y en el entendimiento de los procesos involucrados en su evolución. La soluciones a estas EDPs que dictan la evolución (aproximada) de los fenómenos muestran ciertos comportamientos cualitativos dependiendo del tipo de EDP con la que estamos trabajando. Por ejemplo, algunas EDPs podrían tener soluciones con ondas de choque (discontinuidades) que aparecen en tiempo finito aún si las condiciones iniciales fueron suaves. Conocer el comportamiento cualitativo nos ayuda a construir métodos numéricos apropiados, robustos y precisos para cada tipo de EDP. Por ello esta sección se presenta una breve introducción de los diferentes tipos de EDPs que nos podemos encontrar.

Como veremos más adelante, el tipo de ecuaciones diferenciales que estudiaremos en esta tesis es de tipo hiperbólico. El comportamiento de sus soluciones se puede identificar de manera cualitativa. En particular, se pueden generar ondas de choque en tiempo finito aún cuando las condiciones iniciales son suaves. Es por ende necesario considerar aspectos teóricos que permitan garantizar unicidad de soluciones débiles. Teniendo esto en mente, es también posible generar métodos numéricos eficientes que sean estables cerca de las discontinuidades. En este capítulo veremos en detalle la clasificación de cierto tipo de Ecuaciones Diferenciales Parciales.

La información de este capítulo se basa en el libro [Ames(1977)] y se presenta aquí como referencia para el lector.

1.1. Clasificación de Ecuaciones

Los problemas físicos son gobernados por una gran variedad de ecuaciones diferenciales parciales. Es por ello que presentamos la clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales debido a que dependiendo al tipo de problema físico, será necesario considerar un método numérico especial en relación al tipo de ecuación. Para ello, se requiere desarrollar el concepto de **características**.

Sean $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, f_2$ funciones de $x, y, u(x, y)$ y $v(x, y)$ y consideremos el siguiente sistema simultáneo de primer orden cuasi-lineal.

$$\begin{aligned}a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_x + d_1 v_y &= f_1, \\a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y &= f_2.\end{aligned}$$

Nota: Un sistema de ecuaciones cuasi-lineal es aquel en el que las derivadas de orden más alto ocurren de manera lineal.

El sistema de ecuaciones de arriba es lo suficientemente general para representar muchos de los problemas científicos en donde los modelos matemáticos son de segundo orden y cuya aproximación es cuasi-lineal.

Supongamos que la solución para u y v es conocida del estado inicial en alguna curva Γ . Por ahora nos limitamos a considerar un dominio en el cual las discontinuidades en Γ no ocurren. Para algún punto P en la curva Γ nosotros conocemos las derivadas de u y v y sus derivadas direccionales en las direcciones bajo la curva. Véase Figura 1.1 para una ilustración.

En general, si la solución existe en todos los puntos, la derivada direccional de u en la dirección w sería $\nabla u \cdot w$. Ahora, queremos saber si el comportamiento de la solución arriba de P está unívocamente determinado por la información debajo y sobre la curva. Esto es, nos preguntamos si los datos son suficientes para determinar la derivada direccional en P en direcciones que se encuentran por encima de la curva.

Para ello, sea θ el ángulo con la horizontal que especifica una dirección en la cual σ mide

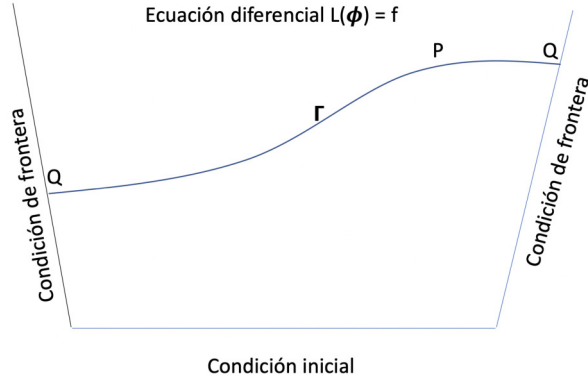


Figura 1.1: Representación general de un problema de propagación.

la distancia. Si u_x y u_y son conocidas en P , la derivada direccional es

$$\begin{aligned} u_{\sigma|\theta} &= \nabla u \cdot (\cos \theta, \sin \theta) \\ &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta = u_x \frac{dx}{d\sigma} + u_y \frac{dy}{d\sigma}, \end{aligned}$$

por lo que debemos preguntarnos bajo qué condiciones las derivadas u_x, u_y, v_x , y v_y son determinadas de forma única en P por los valores de u y v en Γ . En P se satisface

$$\begin{aligned} du &= u_\sigma d\sigma = u_x dx + u_y dy, \\ dv &= v_\sigma d\sigma = v_x dx + v_y dy, \end{aligned}$$

y junto con el sistema de ecuaciones para u y v , tenemos el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ du \\ dv \end{bmatrix}.$$

Con u y v conocidos en P las funciones coeficiente $a_1, a_2, \dots, f_1, f_2$ son conocidas. Con las direcciones de Γ conocidas, dx, dy son conocidas; y si u y v son conocidas a lo largo de Γ , du, dv son también conocidas. Por lo tanto, una solución única para u_x, u_y, v_x, v_y existe si la matriz tiene determinante distinto de cero.

El caso donde el determinante es cero, implica que una multiplicidad de soluciones es posible. Por tanto, las derivadas parciales no se determinan de manera única. En consecuencia, discontinuidades en las derivadas parciales pueden ocurrir al cruzar Γ .

De aquí surge la motivación de extender la teoría para poder considerar soluciones en donde tengamos estas situaciones, pues si hay discontinuidades la derivada no existe. Al igualar el determinante a cero obtenemos la *ecuación característica*

$$(a_1c_1 - a_2c_1)(dy)^2 - (a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1) dx dy + (b_1d_2 - b_2 - d_1)(dx)^2 = 0,$$

la cual es una ecuación cuadrática en dy/dx .

En resumen, si la curva Γ en P tiene una pendiente que satisface la ecuación característica, entonces las derivadas parciales u_x, u_y, v_x, v_y no se determinan de manera única por los valores de u y v en Γ .

Las direcciones dadas por la ecuación característica son conocidas como **direcciones características**. Las direcciones características pueden ser reales y distintas de cero, reales e idénticas, o imaginarias dependiendo de si el discriminante

$$(a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)^2 - 4(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1d_2 - b_2d_1)$$

es positivo, cero ó negativo. Este también es un criterio para clasificar el sistema de ecuaciones como **hiperbólico, parabólico ó elíptico**, respectivamente.

El sistema es *hiperbólico* si el discriminante es positivo, es decir, si hay dos direcciones reales características, es *parabólico* si el discriminante es cero, y *elíptico* si no tiene direcciones características reales.

Ahora, consideremos una ecuación cuasi-lineal de segundo orden no homogénea

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} = f,$$

donde a, b, c, f pueden ser funciones de x, y, u_x, u_y y u .

Podemos obtener una clasificación de esta ecuación al transformarla a un sistema de ecuaciones de primer orden. También se puede hacer de manera directa. Para ello, vamos a pedir la condición de que los valores de u, u_x y u_y en Γ sea suficientes para determinar u_{xx}, u_{xy} y u_{yy} de manera única de tal forma que la ecuación de arriba se satisfaga. Nos podemos convencer de esto último al pasar al sistema lineal.

Si tales derivadas existen, debemos tener que

$$\begin{aligned} d(u_x) &= u_{xx} dx + u_{xy} dy, \\ d(u_y) &= u_{xy} dx + u_{yy} dy. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ d(u_x) \\ d(u_y) \end{bmatrix}.$$

Por tal motivo, la solución para u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} existe y es única a menos de que el determinante de la matriz sea cero, esto es

$$a(dy)^2 - b(dy)(dx) + c(dx)^2 = 0,$$

En este caso, la ecuación $a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} = f$ es **hiperbólica** si $b^2 - 4ac > 0$, **parabólica** si $b^2 - 4ac = 0$ y **elíptica** si $b^2 - 4ac < 0$.

Hay que notar que a, b, c son funciones de x, y, u, u_x, u_y , por lo que una ecuación puede cambiar su tipo dependiendo de la región donde se evalúen.

En el caso hiperbólico, existen dos curvas características reales. Dado que las derivadas de orden alto están indeterminadas a lo largo de esas curvas, ellas proveen caminos para la propagación de discontinuidades. Las ondas de choque y otras discontinuidades se puede propagar por las características.

Ejemplo. Considere la ecuación de onda

$$u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Las curvas características son $y \pm \alpha x = \beta$, pues al considerar la ecuación de onda tenemos que

$$(dy)^2 - \alpha^2(dx)^2 = 0.$$

Esto implica que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \alpha^2.$$

Entonces las curvas características de la ecuación de onda son líneas rectas.

1.2. Clasificación de Problemas Físicos

Los problemas en física e ingeniería se clasifican en general en tres categorías: **problemas de equilibrio, problemas de valores propios y problemas de propagación**. Esta clasificación es importante debido a que cada problema tiene sus propias características, su propio tipo particular de ecuación diferencial parcial que la gobierna y su propio método especial de solución numérica. Así, entender estos conceptos es esencial para obtener soluciones numéricas significativas.

Los *problemas de equilibrio* son problemas de estado estacionario en dominios cerrados en los cuales la solución es gobernada por una EDP elíptica sujeta a condiciones de frontera especificadas en cada punto de la frontera del dominio.

Entre los ejemplos se incluyen flujos estacionarios viscosos, distribuciones de temperatura estacionaria, equilibrio de tensión en estructuras elásticas. En gran medida las ecuaciones que gobiernan problemas de equilibrio son de tipo *elípticas*.

Los *problemas de valores propios* pueden ser pensados como extensiones de problemas de equilibrio en los que se deben determinar los valores críticos de ciertos parámetros además de las configuraciones de estado estacionario correspondientes.

Ejemplos típicos incluyen pandeo y estabilidad de estructuras, resonancia en circuitos eléctricos y acústicos, problemas de frecuencia natural en vibraciones, entre otros.

Los *problemas de propagación* son problemas de valores iniciales en dominios abiertos, abiertos con respecto a una de las variables independientes, en los que la solución en el dominio de interés avanza desde el estado inicial, guiada y modificada por condiciones de contorno. Los problemas de propagación se rigen por EDP parabólicas o hiperbólicas.

Ejemplos típicos incluyen la propagación de ondas de presión en un fluido, propagación de calor, y el desarrollo de vibraciones auto-excitadas. Todos estos problemas son de tipo *parabólico* o *hiperbólico*.

Los problemas gobernados por EDP parabólicas e hiperbólicas se resuelven numéricamente mediante métodos de marcha. Sin embargo, existen diferencias significativas en los problemas de propagación gobernados por EDP parabólicas y EDP hiperbólicas, debido a la velocidad infinita de propagación de la información asociada a las EDP parabólicas y a la velocidad finita de propagación de la información asociada a las EDP hiperbólicas. Estas diferencias deben tenerse en cuenta al aplicar los métodos de marcha a estos dos tipos de ecuaciones diferenciales parciales.

Los métodos de marcha son métodos donde la solución en un punto particular es considerada para puntos en regiones de influencia y dependencia específicos. Además, la parte del dominio de la solución situada fuera del dominio de dependencia y de la zona de influencia del punto no influye en la solución del punto ni depende de la solución del punto.

1.2.1. Ecuaciones Hiperbólicas

Muchos problemas de valor inicial que consisten en propagaciones se pueden describir por *ecuaciones hiperbólicas*. Estas surgen en problemas de transporte como mecánica de ondas, dinámica de gases, vibraciones, entre otras áreas. A continuación, se presenta una aproximación para resolver un cierto tipo de ecuaciones diferenciales. Esta aproximación se generalizará para resolver sistemas de ecuaciones complejos, el cual, nos dará más información de la estructura y propiedades de las soluciones.

Para iniciar el análisis de éstas ecuaciones, consideremos la ecuación de onda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

con condiciones iniciales $u(x, 0) = F(x)$ y $u_t(x, 0) = G(x)$, donde $F, G \in \mathcal{C}^2$.

La solución se puede calcular directamente a través de la *formula de D'Alembert*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[F(x + ct) + F(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(\nu) d\nu \right].$$

Curvas características

Ahora describiremos el método de las curvas características. Para ello presentamos la ecuación de transporte

$$u_t + a u_x = 0,$$

con $a \in \mathbb{R}$. Esta ecuación cumple con ser solución de la ecuación de onda $u_{tt} - a^2 u_{xx}$, ya que

$$u_{tt} = \partial_t(-a u_x) = -a \partial_x(u_t) = a^2 u_{xx}.$$

También, notemos que la ecuación de onda es hiperbólica para cualquier valor de a debido a que $4a^2 > 0$. Analicemos el problema de valor inicial con la ecuación de transporte

$$\begin{cases} u_t + a u_x = 0, \\ u(x, t) = u_0(x), \end{cases}$$

donde la solución es $u(x, t) = u_0(x - a t)$.

Ahora planteemos el problema de considerar un coeficiente variable $a = a(x)$ y con de encontrar solución a la nueva ecuación, si es que la tiene. Para ello desarrollaremos y aplicaremos un procedimiento muy usado para intentar resolver muchos problemas de éste tipo y más generales, el *método de las características*.

Busquemos una curva $(x(t), t)$ en el espacio fase en donde $u(x, t)$ es constante, esto es

$$0 = \frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t.$$

Al comparar con nuestro problema de coeficiente variable, la ecuación para la curva característica resulta ser

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t)),$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria. Observemos que si a es constante entonces $x(t) = x_0 + at$. Por lo que si $u(x, t)$ es constante sobre la curva, en particular $u(x, t) = u_0(x_0)$ y por lo tanto $u(x, t) = u_0(x - at)$ pues $x_0 = x - at$.

Consideremos otro caso, $a(x) = x$. La ecuación característica es

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = a(x(t)) = x(t),$$

con lo que la curva característica resulta ser $x(t) = x_0 e^t$. La solución general del problema de valor inicial resulta ser $u(x, t) = u_0(x e^{-t})$.

En general, $\frac{dx}{dt} = a(x(t))$ se puede resolver por separación de variables por lo que resulta una forma sencilla de resolver nuestro problema original. Por otro lado, por el teorema de existencia y unicidad de EDO's podemos ver que dos curvas características con condiciones iniciales distintas nunca se intersecan. Sin embargo, esto no se garantiza con ecuaciones no lineales. Cuando dos curvas características chocan, podemos tener la formación de discontinuidades.

En la siguiente sección veremos que la información se propaga a velocidad finita en ecuaciones hiperbólicas y que, además, esta información viaja a distintas velocidades en distintas partes del dominio en ecuaciones no lineales.

Lo sistemas no lineales hiperbólicos surgen en el contexto de la física en las llamadas leyes de conservación escalares. Por ejemplo, consideremos un ducto con sección transversal suficientemente pequeña con respecto a la longitud del ducto modelada con el intervalo $[x_0, x_1]$, de tal forma que el material que está pasando con densidad $u(x, t)$ no varía mucho en la sección transversal. De ésta manera, el ducto se puede considerar unidimensional, de modo que la variable $x \in [x_0, x_1]$ representa la posición dentro del ducto y t el tiempo.

Supongamos que el fluido que está pasando por el ducto está sujeto a una dinámica con un flujo expresado en masa por unidad de área por unidad de tiempo dado por la función f . Así, $u = u(x, t)$ es la densidad en x a tiempo t , con lo que la masa en $[x_0, x_1]$ es

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx$$

y

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx$$

es la razón de cambio de masa. Por otro lado, si $f = f(u)$ es el flujo diremos que el flujo se mueve a la derecha si $f > 0$; respectivamente si $f < 0$ el flujo se mueve a la izquierda.

Vamos a considerar la ley de conservación de masa: *La razón de cambio de masa resulta del material que entra y sale de acuerdo al flujo por las fronteras.* En el modelo, el flujo que entra y sale por las fronteras, x_0 en dirección a x_1 , es $f(u(x_0, t))$ y $-f(u(x_1, t))$, respectivamente. Matemáticamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx &= -f(u(x_1, t)) + f(u(x_0, t)) \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} \partial_x f(u(x, t)) dx, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\int_{x_0}^{x_1} [\partial_t u + \partial_x (f(u(x, t)))] dx = 0.$$

Además, si suponemos que u y f son suaves y al recordar que $[x_0, x_1]$ fue arbitrario, se concluye la *ley de conservación escalar*

$$\partial_t u + (f(u(x, t)))_x = 0.$$

Las ecuaciones de tipo hiperbólico a menudo corresponden a funciones f que dependen explícitamente de u , osea $f = f(u)$. Por mencionar, $f(u) = a u$, que es lineal y nos produce la ecuación de transporte. La ecuación no lineal más sencilla es cuando $f(u) = \frac{1}{2} u^2$, que es llamada *ecuación de Burgers*

$$u_t + u u_x = 0.$$

Por lo anterior, nuestro enfoque será estudiar las leyes de conservación hiperbólicas. En el siguiente capítulo se darán propiedades específicas y mejores definiciones. Véase [LeVeque(1992)] para más detalles.

Capítulo 2

Leyes de Conservación Hiperbólicas

Una ley de conservación es la formulación matemática de un principio de conservación derivado físicamente. Este modelo permite describir la evolución temporal de una cantidad de interés como la temperatura, la presión de un fluido o la concentración de una sustancia química.

Para una presentación clara de las ideas que involucran los conceptos, consideraremos primero una ecuación escalar, esto es, con una dimensión espacial. Analizaremos sus propiedades para luego introducirnos a la teoría de sistemas generales.

Gran parte de la teoría sobre leyes de conservación fue desarrollada con las ecuaciones de Euler en mente y muchos métodos numéricos fueron desarrollados específicamente para este sistema, por lo que serán un ejemplo recurrente.

La teoría expuesta en este capítulo es estándar y se puede encontrar en muchas referencias. No pretendemos presentar información nueva aquí. Sin embargo, en [Godlewski(2021), Vázquez(2007)] encontramos ejemplos interesantes de soluciones exactas a problemas de Riemann y es por ello que la mayor parte de la información de este capítulo proviene de las referencias arriba descritas. Al Autor de esta tesis le pareció que el contenido fue muy ilustrativo y útil para entender los conceptos fundamentales de leyes de conservación hiperbólicas y se presenta aquí para facilitar el contexto al lector.

2.1. Leyes de Conservación

Un **sistema de leyes de conservación hiperbólico** (SHLC) es un sistema de EDP hiperbólico -usualmente no lineal-, con dependencia temporal de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)) = 0. \quad (2.1)$$

Aquí $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un vector de dimensión m de variables conservadas -o variables de estado-, como ejemplo están la masa, el momento, y energía -en un problema de dinámica de fluidos. Específicamente, cada componente u_j de \mathbf{u} es la función de densidad de la j -ésima variable de estado. Tenemos la interpretación de que $\int_{x_1}^{x_2} u_j(x, t) dx$ es la cantidad total de la variable de estado u_j en el intervalo $[x_0, x_1]$ al tiempo t .

El hecho de que estas variables sean conservadas significa que $\int_{-\infty}^{\infty} u_j(x, t) dx$ debe permanecer constante al tiempo t , por lo que u_j representa la distribución espacial de la variable de estado al tiempo t la cual generalmente cambia respecto al tiempo.

El flujo de la j -ésima componente esta dado por alguna función $f_j(u(x, t))$ y, la función vector valuada $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ -con componente $f_j(u)$ - es llamada la **función de flujo** para el sistema de leyes de conservación, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definición: Se dice que la ecuación (2.1) está en su forma **conservativa**.

Definición: Cuando \mathbf{f} es una función diferenciable, la ley de conservación (2.1) admite también la forma **no conservativa**

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, t) + \mathbf{c}(\mathbf{u}(x, t)) \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{u}(x, t)) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{c}(\mathbf{u}) = D\mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}))$.

A la ecuación planteada deben proporcionársele condiciones iniciales y, posiblemente también, condiciones de frontera en un dominio espacial acotado. El problema más simple que involucra al sistema es el **problema de Cauchy**

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Se dice que el sistema es **hiperbólico** cuando la matriz Jacobiana de dimensión $m \times m$ formada por las derivadas de la función de flujo, $\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}) / \partial \mathbf{u}$, cumple para cada valor de \mathbf{u} , los valores propios de $\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}) / \partial \mathbf{u}$ son reales y la matriz es diagonalizable, es decir, existe un conjunto completo de m vectores propios linealmente independientes.

Más adelante se mostrará el interés y la importancia de la propiedad de hiperbolicidad. Por ahora, un sistema de leyes de conservación en dos dimensiones espaciales toma la forma

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x + \mathbf{g}(\mathbf{u})_y = 0$$

donde $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ y con funciones de flujo $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Sin embargo, la hiperbolicidad requiere, en este caso, que cualquier combinación lineal real $\alpha f'(u) + \beta g'(u)$ de los Jacobianos de los flujos deba ser diagonalizable con valores reales.

En general, no es posible derivar soluciones exactas para éste tipo de soluciones y de ahí la necesidad de idear y estudiar métodos numéricos para su solución aproximada. Las excepciones son para el problema de Riemann, donde se puede calcular soluciones exactas, por lo que son de gran utilidad para verificar la efectividad de métodos numéricos.

En la realidad, la mayoría de los problemas prácticos, el flujo $\mathbf{f}(x, t)$ depende también del gradiente de \mathbf{u} . Cuando dicha dependencia es lineal, el problema de Cauchy se convierte en la ecuación parabólica

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Es importante destacar que, a diferencia del problema de Cauchy, el problema de Cauchy parabólico (2.4) tiene una única solución regular. El término de difusión -o viscosidad- $-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u}$ esta casi siempre presente en la práctica aunque el coeficiente $\varepsilon > 0$ suele ser muy pequeño. La ecuación (2.3) es entonces el límite de (2.4) cuando el parámetro de viscosidad ε tiene a cero. Este hecho nos ayudará más adelante a seleccionar la única solución débil de (2.3) que tiene un sentido físico.

2.1.1. Problema de la onda de choque en un tubo

Las leyes de conservación tienen soluciones con comportamientos interesantes. Como ejemplo veamos la onda de choque en un tubo. Consideremos un tubo lleno de un gas que inicialmente esta dividido por una membrana en dos secciones iguales. Supongamos que el gas en la primer sección tiene una mayor presión y densidad que en la segunda sección. Inicialmente el gas esta en reposo, es decir, la velocidad del gas es cero en todo el tubo. A un tiempo $t = 0$, la membrana se remueve súbitamente dando lugar a un flujo del fluido en el ducto. Suponiendo que el flujo es uniforme a través del tubo, se tiene una

variación en solo una dirección; por lo que podemos aplicar las ecuaciones de Euler de una dimensión.

La dinámica del flujo involucra tres ondas que separan al tubo en regiones donde las variables de estado son constantes

1. Una **onda de choque** podría aparecer, produciendo un salto en los valores de la densidad y presión y todas las variables de estado son discontinuas.
2. Le podría seguir una **discontinuidad de contacto** donde la densidad es discontinua pero la velocidad y la presión son constantes.
3. Una tercer onda podría aparecer con una naturaleza distinta. En este caso, todas las variables de estado son continuas y tienen una transición suave. Ésta onda es llamada **onda de rarefacción** debido a que la densidad del gas decrece (se enrarece) a medida que viaja ésta onda.

En un experimento real las variables de estado no son discontinuas a través de la onda de choque o discontinuidad de contacto debido a los efectos de la viscosidad y conducción de calor. Estos son ignorados en las ecuaciones de Euler. Si incluimos estos efectos, usando las ecuaciones de Navier-Stokes completas, entonces la solución de la EDP sería suave, aunque con posibles gradientes pronunciados. Es decir, estas soluciones suaves serían casi discontinuas, en el sentido de que el aumento en la densidad se produciría en una distancia microscópica en comparación con la escala de la longitud del tubo.

Si comparamos las soluciones suaves con las gráficas discontinuas parecerían indistinguibles. Por ésta razón se ignoran éstos términos viscosos y se trabaja con las -más simples- ecuaciones de Euler. Éstas ecuaciones son de gran importancia para la aerodinámica, por ejemplo para modelar el flujo de aire alrededor de una aeronave.

2.1.2. Consideraciones en las Leyes de Conservación

Consideraciones Matemáticas

Esta sección se basa en el libro [LeVeque(1992)].

En el sentido clásico, soluciones discontinuas no satisfacen una EDP en todo punto debido a que las derivadas no están definidas en las discontinuidades. Sin embargo, "soluciones" de este tipo se presentan en el estudio de leyes de conservación, en este contexto será necesario definir a que cosa nos referimos por solución de las leyes de conservación.

Presentaremos la formulación integral de leyes de conservación a partir de principios físicos, con lo que llegaremos a una definición aceptable para este contexto, el concepto será el de **soluciones débiles**. El hecho crucial es que la forma integral continua siendo válida incluso para soluciones discontinuas.

Sin embargo, trabajar con la forma integral es más difícil que con la ecuación diferencial -especialmente cuando se trata de la discretización-. Otra aproximación es proveerle a la ecuación diferencial “condiciones de salto” que satisfagan en las discontinuidades ya que la EDP continúa siendo válida excepto en discontinuidades. Esta condición -llamada de *Rankine-Hugoniot*- puede ser derivada a través de la forma integral.

La posible no unicidad de soluciones es otra dificultad. Usualmente hay más de una solución débil a la ley de conservación con los mismos datos iniciales debido a que nuestras ecuaciones son solo un modelo. En particular, las leyes de conservación hiperbólicas no incluyen efectos viscosos o difusivos, por lo que claramente algunos efectos físicos son ignorados.

Como nuestras leyes de conservación pretenden modelar el mundo real, entonces solo una de las soluciones puede ser la físicamente relevante. Por lo mismo, es posible y necesario imponer condiciones relacionadas a la naturaleza del fenómeno. Por ejemplo, en dinámica de gases se apela a la segunda ley de la termodinámica, la cual establece que la entropía es no decreciente. En particular, cuando moléculas de gas pasan a través de una choque su entropía debe aumentar. En sistemas de leyes de conservación es posible derivar condiciones similares y, en analogía a dinámica de gases, son llamadas **condiciones de entropía**. Resulta que esta condición es suficiente para reconocer precisamente aquellas discontinuidades que son físicamente correctas y especificar una única solución. Armados con esta noción de soluciones débiles y una apropiada condiciones de entropía, podemos definir matemáticamente una solución única a los sistemas de leyes de conservación que es el límite no viscoso físicamente correcto.

Consideraciones Numéricas

Al intentar calcular soluciones numéricas nos enfrentamos a problemas con la estabilidad y precisión de los métodos cerca de las discontinuidades. Una posible solución es la técnica llamada **rastreo de choque** [Cockburn(2001)]. Consiste en combinar un método estándar de diferencias finitas en regiones derivables -esto debido a que las EDPs aún se satisfacen lejos de discontinuidades- con un procedimiento explícito para localizar discontinuidades. Éste es el análogo numérico del acercamiento matemático en las cuales las EDPs son dotadas de condiciones de salto a través de discontinuidades. Por otro lado, los métodos de **captura de choques** son aquellos que intentan producir aproximaciones

nítidas a soluciones discontinuas automáticamente, sin seguimiento explícito ni uso de condiciones de salto [Chern and Colella(1987)].

Además, existen los llamados **métodos de alta resolución** con propiedades de precisión y resolución como

- Exactitud de al menos segundo orden en soluciones suaves, y además en regiones suaves de una solución incluso cuando las discontinuidades están presentes en todas partes.
- Resolución nítida de discontinuidades sin exceso de viscosidad.
- La ausencia de oscilaciones espurias en la solución calculada.
- Una forma apropiada de consistencia con la forma débil de la ley de conservación -requerida si esperamos converger a soluciones débiles.
- Límites de estabilidad no lineal que, junto con las consistencia, nos permitirán probar convergencia a medida que se refine la malla.
- Una forma discreta de la condición de entropía, que nos permita concluir que las aproximaciones convergen a la solución débil físicamente correcta.

Para sistemas lineales hiperbólicos, las **características** juegan un papel muy importante. Para sistemas no lineales, la generalización de ésta teoría que es mayormente usada en el desarrollo de métodos numéricos es la solución de un **problema de Riemann**. Éste consiste en la ley de conservación con la siguiente condición inicial

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_l & x < 0, \\ \mathbf{u}_r & x > 0. \end{cases}$$

En el caso de las ecuaciones de Euler, éste es el problema de ondas de choque de un tubo -que se planteó anteriormente. La solución a este problema tiene una estructura relativamente simple y en muchos casos se puede calcular explícitamente. Mediante un método numérico podemos estimar un conjunto de valores discretos $\mathbf{U}_j^{(n)}$ que aproxime a $\mathbf{u}(x_j, t_n)$ en un conjunto de puntos (x_j, t_n) . Podemos obtener una gran cantidad de información de la estructura local de la solución cerca de (x_j, t_n) mediante la resolución del problema de Riemann con datos $\mathbf{u}_l = \mathbf{U}_j^{(n)}$ y $\mathbf{u}_r = \mathbf{U}_{j+1}^{(n)}$.

En la mayoría de los métodos numéricos aplicables a sistemas de EPDs no es posible obtener los resultados de estabilidad no lineal para probar su convergencia. Se requiere más análisis que en el caso sencillo de una ecuación escalar. En particular, es posible

demostrar que en muchos métodos numéricos la variación total de la solución decrece en el tiempo. Esto es suficiente para obtener algunos resultados de convergencia y garantiza que no se generen oscilaciones espurias. Aquellos métodos que cumplen con esta propiedad se conocen como métodos de **Disminución de Variación Total (TVD)**, veremos detalladamente estos esquemas más adelante.

2.1.3. Derivación de las Leyes de Conservación

Para saber como las leyes de conservación surgen de principios físicos, empezaremos derivando una ecuación de balance en una dinámica de fluidos uno dimensional -como es el caso del problema de la onda de choque en un tubo.

Sea x la variable que representa la distancia a lo largo una dirección. Sea $u(x, t)$ una variable conservada -densidad de masa, momento, energía, temperatura, etc-, al punto x y tiempo t . Ésta cantidad es definida de tal forma que la cantidad total de esta variable en el intervalo $[x_1, x_2]$ al tiempo t es

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx.$$

Notemos que la cantidad anterior solo depende del tiempo t . En general, también conocemos una función fuente escalar $g = g(x, t), g : [x_1, x_2] \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ y una función de flujo, $f(x, t), f : [x_1, x_2] \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$.

La ley básica de balance establece que el cambio total de la cantidad u contenida en $[x_1, x_2]$ entre los tiempos t_1 y t_2 debe igualar el flujo total a través de los extremos $x = x_1$ y $x = x_2$ entre los tiempos t_1 y t_2 y el incremento o decremento de la cantidad u producido por la fuente g dentro de $[x_1, x_2]$ en el mismo intervalo de tiempo

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx = - \int_{t_1}^{t_2} [f(x_2, t) - f(x_1, t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} g(x, t) dx dt$$

Si se supone que u tiene primera derivada continua respecto de t , por medio del teorema fundamental del cálculo y del teorema de Fubini se obtiene

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx = - \int_{t_1}^{t_2} [f(x_2, t) - f(x_1, t)] dt + \int_{x_1}^{x_2} g(x, t) dx.$$

Equivalentemente se tiene que

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) - g(x, t) \right) dx = 0. \quad (2.5)$$

Lo anterior es la *forma global o integral de la ley de conservación*. Si se supone la continuidad del integrando, dado que la región $[x_1, x_2]$ fue arbitraria, se obtiene la *forma local o diferencial de la ley de conservación*

$$u_t(x, t) + f_x(x, t) - g(x, t) = 0.$$

En modelación, la ecuación se puede interpretar de manera distinta dependiendo del término fuente g :

$$\begin{aligned} g = g(u) & \quad \text{ley de balance.} \\ g = g(x, t) & \quad \text{forzamiento externo.} \\ g \equiv 0 & \quad \text{ley de conservación.} \end{aligned}$$

Consulta [Godlewski(2021)] para una formulación de leyes de conservación en dominios más generales.

Por ejemplo, si u representa la temperatura, g podría representar una fuente interna de calor, por ejemplo, una corriente eléctrica en el alambre y f representa una ley física que determina la manera como cambia u , por ejemplo, la ley de calor de Fourier.

2.1.4. Ejemplos

Ecuación de transporte lineal

Supongamos que una sustancia química de concentración u se vierte en un río rectilíneo cuya velocidad de corriente viene dada por la función $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, el producto contaminante se desplaza río abajo con un flujo

$$f(x, t) = a(x)u(x, t)$$

La ley de conservación que describe este problema modelo viene dada por

$$u_t(x, t) + (a(x)u(x, t))_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Se trata de una ecuación hiperbólica escalar y lineal y su estudio matemático -y numérico- es relativamente sencillo en comparación con los modelos no lineales que pueden generar discontinuidades (ondas de choque).

La ecuación del transporte lineal tridimensional

$$u_t(x, t) + \operatorname{div}(a(x)u(x, t)) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0$$

es evidentemente un modelo más realista y también más complejo de estudiar. En este caso la velocidad de la corriente es una función vectorial $a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Ecuación de Burgers

La ecuación de Burgers es el problema modelo por excelencia en el estudio de las leyes de conservación escalares. Es una ecuación no lineal sencilla que refleja muchas de las características básicas de los problemas hiperbólicos no lineales que estudiaremos en este trabajo. Se trata de una ley de conservación con un flujo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \frac{u^2}{2}.$$

Por lo tanto, la forma conservativa de la ecuación de Burgers es

$$u_t(x, t) + \left(\frac{u^2(x, t)}{2} \right)_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

y la forma no conservativa (cuasi-lineal) viene dada por

$$u_t(x, t) + u(x, t)u(x, t)_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

El modelo del flujo del tráfico

Nos interesamos por modelar el flujo del tráfico de coches en una autopista. Sea u la densidad de coches, en vehículos por kilómetro, y v la velocidad media de circulación. Por lo tanto el flujo de coches es $f = vu$.

Es evidente que existe un valor máximo u_{max} de la densidad, a partir del cual el tráfico colapsa en un embotellamiento. Para relacionar la velocidad v con u notamos que, en una autopista en la existe un límite de velocidad v_{max} , la velocidad de circulación debe decrecer cuando la densidad de coches crece. Basados en estas observaciones, vemos que la relación

$$v(u) = v_{max}(1 - u/u_{max})$$

es un modelo razonable para este fenómeno.

Por lo tanto, la ley de la conservación del flujo del tráfico consiste en la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x} \left(u(v_{max} - u \frac{v_{max}}{u_{max}}) \right) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Ecuaciones de Euler para Dinámica de Gases

Las ecuaciones de Euler describen el movimiento de un fluido compresible no viscoso. Intervienen en el estudio de una amplia variedad de problemas relacionados con la ae-

ronáutica. Por ejemplo, los vuelos supersónicos, la balística o la simulación numérica de túneles de viento.

Consideremos una dimensión, lo cual correspondería al caso en el que el gas se encuentra dentro de un tubo rectilíneo y largo. Supongamos que ρ es la densidad, v es la velocidad, ρv es la densidad de momento lineal, E es la energía y p es la presión -en este caso solo dependen de una variable espacial-. Las ecuaciones de Euler consisten en una ley de conservación con vector de variables conservadas $\mathbf{u}(x, t)$ y flujo $\mathbf{f}(x, t)$ con

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{f}(x, t) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2^2/u_1 + p(u) \\ u_2(u_3 + p(u))/u_1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, consisten en el sistema hiperbólico no lineal

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix} = 0.$$

o simplemente

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0.$$

Las tres ecuaciones anteriores representan respectivamente la *conservación de masa*, la *conservación de momento*, y la *conservación de energía*.

Además, tenemos que añadir la *ecuación de estado*

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$$

donde γ es la relación entre calores específicos.

La ecuación de estado depende de las propiedades del fluido que se estudie y se añade para eliminar a la presión como variable conservada, i.e. para que los flujos sean funciones bien definidas solo de las cantidades conservadas.

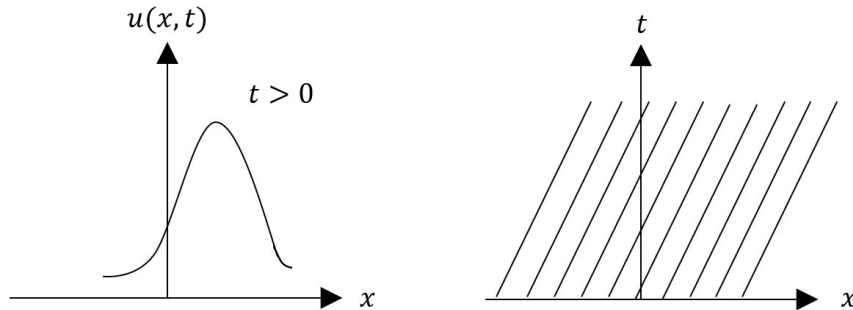
Las ecuaciones de Euler son versiones simplificadas de las ecuaciones de Navier-Stokes al despreciar los términos viscosos y la conducción del calor.

2.1.5. Ecuación Lineal de Advección

Primero consideremos el problema de Cauchy con la ecuación lineal de advección

$$\begin{cases} u_t + a u_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La solución es simplemente $u(x, t) = u_0(x - at)$ para $t \geq 0$. El comportamiento de la solución es la propagación o *transporte* de los datos iniciales a la derecha -si $a > 0$ - o a la izquierda -si $a < 0$ - con velocidad a . La solución $u(x, t)$ permanece constante a lo largo de los rayos $x - at = x_0$, los cuales son conocidas como las **características** de la ecuación.



Ecuación de transporte

Figura 2.1: Solución y curvas características de la ecuación de transporte con condición inicial la curva normal. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

Las características, en este caso, son curvas en el plano $x - t$ que satisfacen $x'(t) = a, x(0) = x_0$. Si calculamos la derivada total de $u(x, t)$ a lo largo de estas curvas para encontrar encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)x'(t) \\ &= u_t + a u_x = 0, \end{aligned}$$

lo que confirma que u es constante a lo largo de estas características.

En general, podemos considerar un coeficiente de advección en función de la posición

$$u_t + (a(x)u)_x = 0.$$

con $a(x)$ una función suave.

La ecuación anterior se puede reescribir como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = -a'(x)u(x, t).$$

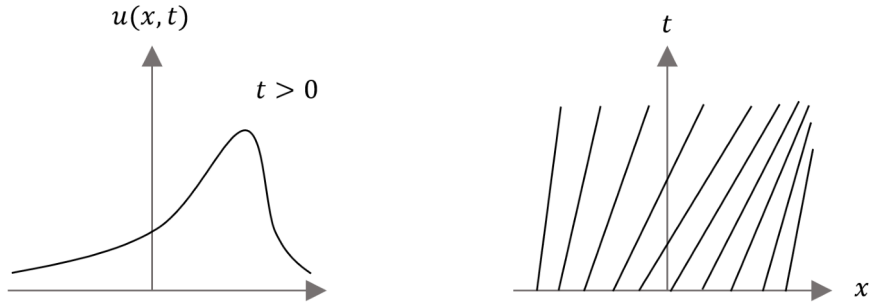
De lo anterior se sigue que la evolución de u a lo largo de cualquier curva característica $x(t)$ definida por

$$x'(t) = a(x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

es solución de la EDO

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = -a'(x(t))u(x(t), t).$$

Las curvas determinadas por la ecuación anterior son las características. En este caso la solución $u(x, t)$ no es constante a lo largo de dichas curvas, pero se puede determinar al resolver dos conjuntos de ODEs.



Ecuación de Burgers

Figura 2.2: Solución y curvas características de la ecuación de Burgers con condición inicial la curva normal. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

Datos no suaves

Recordemos que para llevar a cabo las manipulaciones anteriores hicimos la suposición de que $u(x, t)$ es diferenciable. Sin embargo, la solución a lo largo de las características depende solo de un valor $u_0(x_0)$. Entonces no se requiere suavidad espacial para la construcción de la solución $u(x, t)$ a partir de $u_0(x)$. Podemos definir una “solución” para la EDP incluso si $u_0(x)$ no es función suave.

Notemos que si $u_0(x)$ tiene una singularidad en algún punto x_0 -una discontinuidad en u_0 o en alguna derivada-, entonces la resultante $u(x, t)$ tendrá una singularidad del mismo orden a lo largo de la característica que cruza a x_0 . Pero aún habrá suavidad a lo largo de características a través de porciones de datos suaves. Ésta propiedad es fundamental de *ecuaciones hiperbólicas lineales*: las singularidades se propagan solo a lo largo de características.

Por otro lado, si u_0 no diferenciable en algún punto entonces $u(x, t)$ ya no es solución clásica de la ecuación diferencial. Sin embargo, esta función satisface la forma integral de la ley de conservación, que sigue teniendo sentido para u no suave. Más aún, es más fundamental físicamente que la ecuación diferencial debido a que se derivó con la suposición adicional de suavidad. Por lo tanto, tiene sentido aceptar esta solución generaliza como la solución de la ley de conservación.

2.2. Leyes de Conservación Escalares

Comenzaremos el estudio de leyes de conservación partiendo del caso escalar debido a que dificultades que se encuentran en los sistemas de ecuaciones también son encontrados en este caso, por ello entender sus propiedades es fundamental.

Así, estamos interesados en el estudio de buscar $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ solución de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (2.6)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

donde supondremos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es función de clase \mathcal{C}^2 y denotaremos su derivada por $c(u) = f'(u)$. La regularidad de la condición inicial, o datos iniciales, u_0 se definirá según el contexto.

2.2.1. Soluciones Clásicas

Supongamos que $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es función de clase \mathcal{C}^1 . Damos la siguiente definición

Definición. (Solución Clásica) Diremos que u es *solución clásica* de la ecuación (2.6) en un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$, si u es de clase \mathcal{C}^1 en Ω y satisface (2.6) en todo punto de Ω .

La técnica de las rectas características que vamos a desarrollar a continuación permite demostrar que el problema (2.6) admite una solución clásica $u(x, t)$ para $0 < t < T$. Cuando $T < \infty$ se dice que la solución clásica es *local*.

Si u es una solución clásica de la ecuación (2.6) entonces u satisface la forma no conservativa de la ecuación, es decir,

$$u_t + c(u)u_x = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad (2.8)$$

donde $c(u) = f'(u)$.

Consideremos la curva $(x(t), t)$ del semiplano $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ definida por el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c(u(x(t), t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

donde $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ es un punto arbitrario. En virtud de (2.8) y (2.9), la derivada de u , respecto a t , a lo largo de esta curva es idénticamente nula,

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) = 0.$$

Esto significa que u es constante a lo largo de la curva (2.9), y entonces

$$u(x(t), t) = u(x_0, t_0), \quad t > 0.$$

Deducimos que la curva característica que pasa por el punto (x_0, t_0) es una recta del plano (x, t) cuya ecuación es

$$x = x_0 + c(u(x_0, t_0))(t - t_0). \quad (2.10)$$

Definición (Rectas Características) Sea u una solución clásica de la ecuación (2.6). Las rectas de la forma (2.10) se llaman *rectas características* de la ecuación (2.6) y u es constante a lo largo de cada una de estas rectas.

Supongamos que u es una solución clásica del problema (2.6) al menos hasta un tiempo $T > 0$. La ecuación de la recta característica que pasa por $(\xi, 0)$ es

$$x = \xi + c(u_0(\xi))t \quad (2.11)$$

y para todo punto (x, t) de esta recta tenemos que

$$u(x, t) = u_0(\xi). \quad (2.12)$$

Este procedimiento nos permite calcular el valor de u en cualquier punto (x, t) del semiplano $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ por el que pasa una única recta característica.

En el caso de la ecuación de transporte lineal -con una velocidad de propagación $c > 0$ constante-

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.13)$$

las rectas características $x = \xi + ct$ son todas paralelas. Tienen una pendiente igual a $1/c$. Por lo tanto, en virtud de (2.12), podemos afirmar que en este caso, la función mediante la fórmula

$$u(x, t) = u_0(x - ct), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

es una solución clásica global del problema. Representa una onda que se desplaza de izquierda a derecha sin deformarse y a una velocidad constante igual a c . Podemos anticipar que estas propiedades no son ciertas en el caso no lineal. En general, los valores u_0 no se propagan a la misma velocidad y por lo tanto la solución ha de deformarse a lo largo del tiempo.

Nota: Las rectas características se representan siempre en el plano (x, t) y no en el plano (t, x) . Esto significa que la pendiente de la recta (2.11) es $\frac{1}{c(u_0(\xi))}$. En particular, si $c(u_0(\xi)) = 0$, a recta característica que nace del punto $(\xi, 0)$ es vertical.

El siguiente resultado nos da una condición suficiente para la existencia de una solución clásica global del problema de Cauchy no lineal (2.6).

Teorema 1. (*Existencia de una solución clásica global*). *Supongamos que $c_0(x) = c(u_0(x))$ es una función creciente en \mathbb{R} . Entonces el problema de Cauchy (2.6) tiene una única solución clásica.*

Demostración. Fijemos $t \in (0, \infty)$. Como c_0 es creciente, la función continua

$$\xi \longrightarrow F(\xi) = \xi + c_0(\xi)t$$

define una biyección de \mathbb{R} en \mathbb{R} . en efecto, F es una función estrictamente creciente

$$\frac{dF}{d\xi}(\xi) = 1 + c'_0(\xi)t > 0 \quad (2.14)$$

y

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} F(\xi) = \pm\infty,$$

puesto que $c_0(\xi) \geq c_0(0)$ para $\xi > 0$ y $c_0(\xi) \leq c_0(0)$ para $\xi < 0$.

Podemos entonces afirmar que, para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, existe un único $\xi(x, t)$ tal que

$$x = \xi(x, t) + c_0(\xi(x, t))t. \quad (2.15)$$

Introducimos la función,

$$u(x, t) = u_0(\xi(x, t)).$$

Aplicando la regla de la cadena resulta que

$$u_t(x, t) + c(u(x, t))u_x(x, t) = (u_0)'(\xi(x, t)) [\xi_t(x, t) + c_0(\xi(x, t))\xi_x(x, t)]. \quad (2.16)$$

Por otra parte, derivando (2.15) respecto a x y a t obtenemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)[1 + c_0'(\xi)t] = 1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t)[1 + c_0'(\xi)t] = -c_0(\xi(x, t)). \end{cases} \quad (2.17)$$

Dado que $1 + c_0'(\xi)t > 0$ ($c_0'(\xi(x, t)) \geq 0$ por hipótesis), podemos combinar (2.17) con (2.16) para deducir que $u(x, t) = u_0(\xi(x, t))$ es una solución clásica de (2.8) en todo tiempo $t > 0$. \square

Nota: (Caso convexo). Si f es una función convexa, c es creciente. En este caso, podemos sustituir en el teorema la hipótesis “ c_0 es creciente” por “ u_0 es creciente”.

Ejemplo 1: Consideremos la función

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha, \end{cases}$$

donde α es un número real positivo. Queremos resolver el problema de Cauchy (2.6) para las ecuaciones de Burgers 2.1.4 con el dato inicial u_0 . Notar que ésta función es solamente de clase \mathcal{C}^1 a trozos, por tanto, el método de las características se debe de utilizar localmente, en cada uno de los subintervalos donde u_0 es regular. Deducimos de (2.11) que la recta característica que pasa por el punto $(\xi, 0)$ tiene por ecuación

$$x = \begin{cases} \xi & \text{si } \xi \leq 0 \\ \xi + \frac{\xi}{\alpha}t & \text{si } 0 \leq \xi \leq \alpha \\ \xi + t & \text{si } \xi \geq \alpha, \end{cases}$$

Por consiguiente, la función

$$u(x, t) = u_0(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha+t} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha + t \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha + t, \end{cases}$$

es una solución del problema. Notar que para t fijo, la función u es creciente.

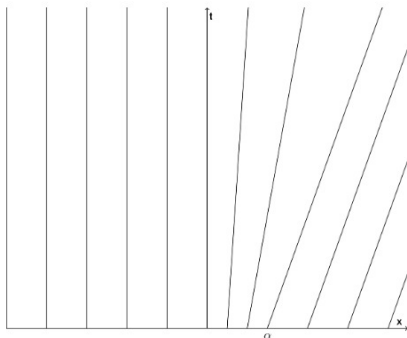


Figura 2.3: Rectas características del ejemplo 1. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

Soluciones Clásicas Locales y Nacimiento de un Choque

Asumiremos siempre que la condición inicial u_0 del problema de Cauchy es una función acotada en \mathbb{R} . Consecuentemente, velocidad inicial $c_0(x) = f'(u_0(x))$ será también acotada. A partir de ahora la velocidad inicial c_0 ya no será necesariamente creciente en todo \mathbb{R} .

Teorema 2. (*Tiempo de aparición de un choque*). Si c'_0 toma valores estrictamente negativos, entonces ya no puede existir una solución clásica del problema de Cauchy (2.6) que sea válida para todo tiempo $t > 0$. El método de las rectas características proporciona una solución clásica para todo $0 \leq t < t^*$, donde

$$0 < t^* = \frac{1}{\sup_{\xi \in \mathbb{R}} -c'_0(\xi)} = -\inf_{\xi \in \mathbb{R}} c'_0(\xi)^{-1} < \infty.$$

Demostración. Probemos primero la existencia de una única solución clásica para $0 < t < t^*$. Si $0 < t < t^*$, podemos razonar como en la demostración del teorema 1 para

deducir que la función $\xi \rightarrow F(\xi) = \xi + c_0(\xi)t$ es estrictamente creciente (su derivada es mayor que $1 - \frac{t}{t^*}$) y tiende a $\pm\infty$ cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$. Por lo tanto, para todo $0 < t < t^*$ fijo, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define una biyección y la ecuación (2.15) admite aquí también una única solución $\xi(x, t)$. Esto prueba la existencia de una solución clásica $u(x, t)$ para todo $t \in (0, t^*)$.

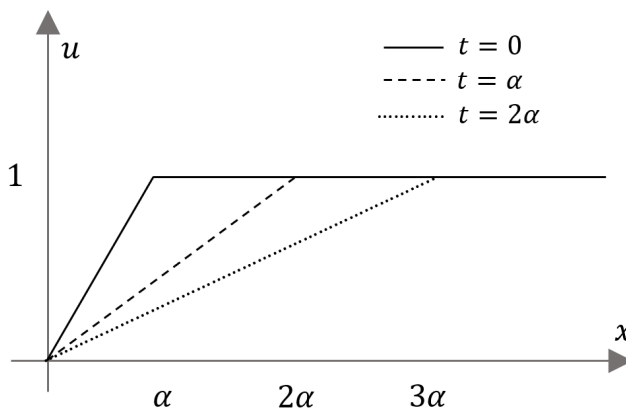


Figura 2.4: Solución del ejemplo 1 en los tiempos $t = 0, t = \alpha, t = 2\alpha$. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

Notamos que, debido a (2.17), las derivadas de la solución clásica tienden a infinito cuando t tiende a t^* . De hecho, demostraremos enseguida que la solución clásica no puede existir más allá del tiempo t^* .

Sea t_{\max} , el tiempo máximo de existencia de una solución clásica, es decir,

$$t_{\max} = \sup\{t > 0 : \text{Existe una solución clásica en } \mathbb{R} \times [0, t)\}.$$

Sabemos que $t_{\max} \geq t^*$. Por hipótesis, existen $\xi_1 < \xi_2$ tales que $c_0(\xi_1) > c_0(\xi_2)$. Las rectas características que nacen en los puntos $(\xi_1, 0)$ y $(\xi_2, 0)$ se cortan entonces en el punto (x_0, t_0) , definido por 2.5

$$\begin{cases} t_0 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{c_0(\xi_1) - c_0(\xi_2)}, \\ x_0 = \xi_1 + c_0(\xi_1)t_0 = \xi_2 + c_0(\xi_2)t_0. \end{cases}$$

Una solución clásica u definida en (x_0, t_0) debe satisfacer simultáneamente $u(x_0, t_0) = u_0(\xi_1)$ y $u(x_0, t_0) = u_0(\xi_2)$, lo cual es imposible ya que la condición $c_0(\xi_1) > c_0(\xi_2)$ impide que $u_0(\xi_1)$ sea igual a $u_0(\xi_2)$. Esto nos asegura entonces que $t_0 > t_{\max}$.

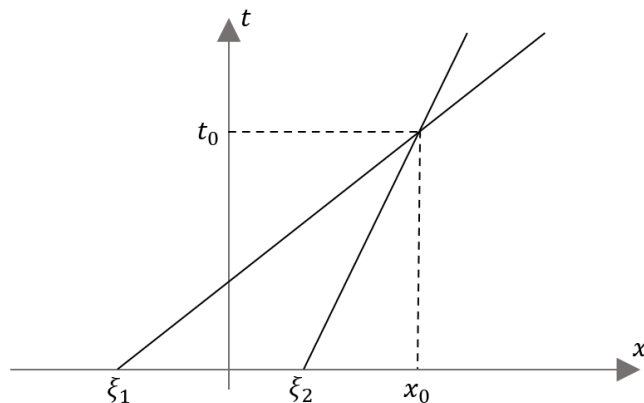


Figura 2.5: Punto de corte de dos rectas características. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

Sea ξ tal que $c_0(\xi) < 0$. Entonces, para $h > 0$ suficientemente pequeño, $c_0(\xi + h) < c_0(\xi)$ y podemos tomar como antes $\xi_1 = \xi$ y $\xi_2 = \xi + h$ para deducir que

$$t_{\max} < t_0 = \frac{h}{c_0(\xi) - c_0(\xi + h)}.$$

Haciendo tender h a cero en la desigualdad anterior obtendremos

$$t_{\max} \leq -\frac{1}{c'_0(\xi)},$$

lo que prueba que $t_{\max} \leq t^*$. □

Notemos que la aparición de una discontinuidad es un fenómeno no lineal de la misma ecuación diferencial, ocurre incluso si dato inicial u_0 es suave.

Ejemplo 2. Consideramos la ecuación de Burgers 2.1.4 con la condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{x}{\alpha} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases} \quad (2.18)$$

donde α es un valor positivo.

La recta característica que nace en $(\xi, 0)$ es

$$x = \begin{cases} \xi + t & \text{si } \xi \leq 0 \\ \xi + (1 - \frac{\xi}{\alpha})t & \text{si } 0 \leq \xi \leq \alpha \\ \xi & \text{si } \xi \geq \alpha \end{cases}$$

y el tiempo máximo para el que existe una solución clásica es $t^* = \alpha$.

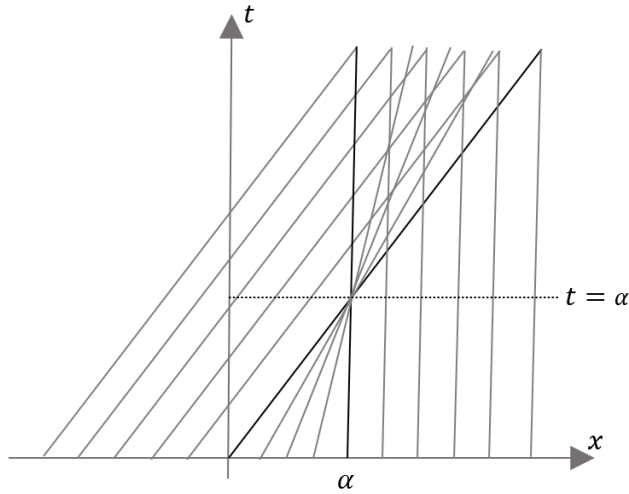


Figura 2.6: Curvas características del ejemplo 2. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

La solución clásica local del problema es

$$u(x, t) = u_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq t, \\ \frac{x-\alpha}{t-\alpha} & \text{si } t \leq x \leq \alpha, \\ 0 & \text{si } x \geq \alpha. \end{cases}$$

En el tiempo $t = \alpha$, la derivada de u respecto a x es infinito cuando $x = \alpha$. La solución u es discontinua en ese punto.

2.2.2. Soluciones Débiles

Sabemos Sabemos ahora que existen condiciones bajo las cuales el problema de Cauchy (2.6) no puede admitir soluciones clásicas globales incluso si la condición inicial es suave. En este caso, esa solución se hace discontinua a partir de un tiempo $t^* > 0$. En este capítulo se introducirá un concepto que nos permitirá extender la solución más allá del tiempo crítico t^* .

Recordemos que (2.6) se dedujo a partir de la ley de conservación integral (2.5). Notemos que la ecuación (2.5) tiene sentido incluso cuando la solución es discontinua. La clave entonces para ampliar el concepto de solución es volver a formular el problema de Cauchy en términos de una ecuación integral para relajar las exigencias de regularidad. Utilizaremos para ello funciones prueba $\varphi \in \mathcal{C}_{\text{comp}}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, donde $\mathcal{C}_{\text{comp}}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ es el espacio de las funciones de clase $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ que tienen soporte compacto.

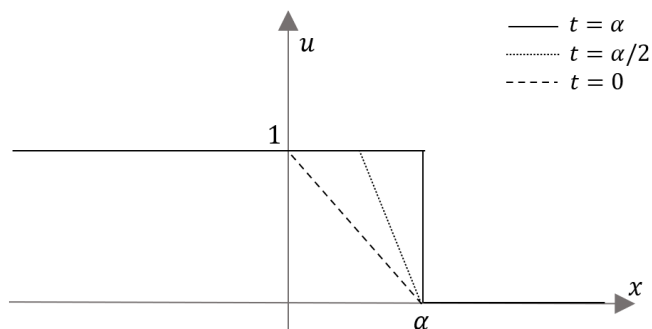


Figura 2.7: Solución del ejemplo 2 en tiempos $t = \alpha, t = \alpha/2, t = 0$. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

Sea función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se define el soporte de f como

$$\text{supp}(f) = \{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}.$$

Se dice que f tiene soporte compacto cuando este conjunto es compacto.

Sea u una solución clásica de (2.6). Multiplicando la ecuación (2.6) por una función prueba φ e integrando sobre $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ obtenemos

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \right) \varphi dt dx.$$

Integrando por partes obtenemos

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \left(-u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt dx = - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx.$$

Notar que la identidad anterior tiene sentido incluso cuando u es solamente una función localmente integrable en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

Definición. (Solución Débil) Dada la función $u_0 \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$. Se dice que una función $u \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ es una solución débil del problema de Cauchy (2.6) si satisface

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (2.19)$$

para toda función prueba $\varphi \in \mathcal{C}_{comp}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

El siguiente lema nos da una relación entre solución débil y solución clásica del problema de Cauchy, para una demostración consulte [Vázquez(2007)].

Lema. Si u es una solución clásica del problema de Cauchy (2.6), entonces es una solución débil. Si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ es una solución débil del problema de Cauchy (2.6), entonces es una solución clásica.

2.2.3. Soluciones clase \mathcal{C}^1 a tramos y condición de choque

Nos interesamos ahora por un tipo particular de soluciones débiles: las soluciones de clase \mathcal{C}^1 a tramos.

Definición. (Función de clase \mathcal{C}^1 a trozos) Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$ un abierto acotado. Se dice que una función $v(x, t)$ es de clase \mathcal{C}^1 a trozos en Ω si existe un número finito de curvas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p$ de la forma

$$\Sigma_i : \begin{cases} x = \xi_i(t), & t \in [t_i^{(1)}, t_i^{(2)}], \\ \text{donde } \xi_i \text{ es una función de clase } \mathcal{C}^1, \end{cases}$$

tales que v sea igual a la restricción de una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ en cada componente conexa de $\Omega \setminus (\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_p)$. La curva $\Sigma := \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_p$ es llamada curva de discontinuidad, esta curva describe como se mueve una discontinuidad de u .

Una función $v(x, t)$ es de clase \mathcal{C}^1 a trozos en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ si lo es para todo abierto acotado de $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

Notar que si una función u es de clase \mathcal{C}^1 a trozos entonces las funciones u , $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial u}{\partial x}$ admiten valores por ambos lados de una curva de discontinuidad Σ . El vector unitario \mathbf{n} , normal a una curva de discontinuidad $\Sigma = \{(\xi(t), t)\}$ y orientado según la dirección positiva del eje x viene dado por

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -s \end{pmatrix} \quad \text{donde } s = \xi'(t). \quad (2.20)$$

Los valores $u^-(x, t)$ y $u^+(x, t)$ de u por la izquierda y por la derecha de un punto $(x, t) = (\xi(t), t) \in \Sigma$ son

$$\begin{cases} u^-(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u((x, t) - \varepsilon \mathbf{n}), \\ u^+(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u((x, t) + \varepsilon \mathbf{n}), \end{cases}$$

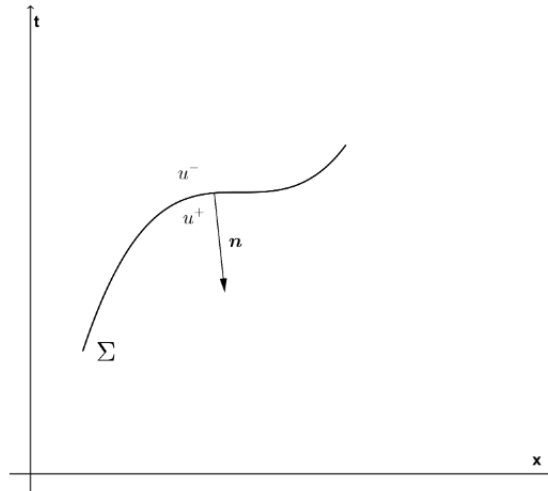


Figura 2.8: Curva Σ con su vector normal, u^+ y u^- . Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

El siguiente resultado caracteriza las soluciones débiles de clase \mathcal{C}^1 a trozos del problema de Cauchy (2.6).

Teorema 3. *Sea u una función de clase \mathcal{C}^1 a trozos en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Entonces u es una solución débil del problema de Cauchy (2.6) si y sólo si*

1. *La función u es solución clásica de (2.6) en todo dominio donde es de clase \mathcal{C}^1 .*

2. La función u satisface la condición

$$\xi'(t)(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-) \quad (2.21)$$

a lo largo de toda curva de discontinuidad Σ .

Demostración. Sea u una función de clase \mathcal{C}^1 a trozos en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ y $\Sigma = \{(\xi(t), t)\}$ una curva de discontinuidad de u . Consideremos un abierto acotado $K \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ dividido por Σ en dos componentes conexas K^- y K^+ y suponemos que u es de clase \mathcal{C}^1 en K^- y K^+ .

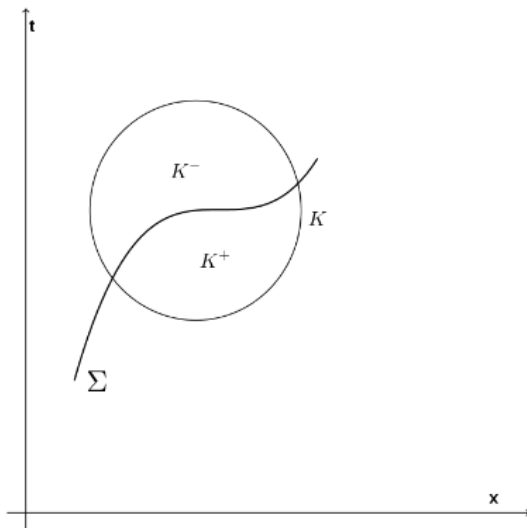


Figura 2.9: El abierto acotado K dividido por Σ . Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

Sea $\varphi \in \mathcal{C}^1(K)$ con soporte compacto en K . Como u es regular en K^- y K^+ podemos aplicar el teorema de Green para deducir que

$$\begin{aligned} \int_{K^-} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt &= - \int_{K^-} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \right) \varphi dx dt \\ &\quad + \int_{\Sigma} (u^- n_t + f(u^-) n_x) \varphi d\gamma, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{K^+} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt &= - \int_{K^+} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \right) \varphi dx dt \\ &\quad - \int_{\Sigma} (u^+ n_t + f(u^+) n_x) \varphi d\gamma. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_K \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = - \int_{K^- \cup K^+} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \right) \varphi dx dt \quad (2.22)$$

$$- \int_{\Sigma} \left[((u^+ - u^-) n_t + (f(u^+) - f(u^-)) n_x) \right] \varphi d\gamma. \quad (2.23)$$

Ahora, es fácil deducir a partir de (2.22) que u es solución débil del problema (2.6) si y sólo si u satisface la ecuación (2.6) en K^- y K^+ , satisface la identidad

$$\int_{\Sigma} \left[((u^+ - u^-) n_t + (f(u^+) - f(u^-)) n_x) \right] \varphi d\gamma = 0$$

para toda función $\varphi \in \mathcal{C}^1(K)$ con soporte compacto. Teniendo en cuenta (2.20), ésta penúltima condición se traduce en

$$(u^+ - u^-) (-\xi'(t)) + (f(u^+) - f(u^-)) = 0$$

a lo largo de $\Sigma \cap K$, donde obtenemos el resultado. \square

Denotando por $[u] = u^+ - u^-$ y $[f(u)] = f(u^+) - f(u^-)$ los saltos de las funciones u y $f(u)$ a través de Σ , la identidad (2.21) se convierte en

$$[f(u)] = s[u] \quad \text{con } s = \xi'(t). \quad (2.24)$$

Se le llama la **condición de Rankine-Hugoniot** e indica que la velocidad correcta de propagación de una discontinuidad a lo largo de Σ es s .

Notas.

- En el caso particular de la ecuación de transporte, $f(u) = cu$, la velocidad de propagación de la discontinuidad es $s = c$. Es decir, en el caso lineal, las discontinuidades se propagan a lo largo de las rectas características.
- En el caso de la ecuación de Burgers (2.1.4), la condición de Rankine-Hugoniot se escribe

$$s = \frac{u^+ - u^-}{2}.$$

Es decir, que la velocidad de propagación de un choque es igual a la media de los valores de u por ambos lados de la curva de discontinuidad.

El siguiente resultado es una consecuencia importante del Teorema 3, [Vázquez(2007)].

Corolario 4. (Caso de funciones \mathcal{C}^1 a trozos y continuas). Sea u una función clase \mathcal{C}^1 a trozos y globalmente continua en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Si u es una solución clásica del problema (2.6) en todo el dominio donde es de clase \mathcal{C}^1 , entonces es una solución débil del problema (2.6).

Ejemplo 3. Consideremos de nuevo el problema de Cauchy constituido por la ecuación de Burgers (2.1.4) y la condición inicial (2.18). Hemos visto que existe una solución clásica $u(x, t)$ válida hasta el tiempo $t = \alpha$. Notar que en $t = \alpha$ la solución

$$u(x, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \alpha \\ 0 & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

es discontinua en $x = \alpha$.

Nuestro propósito ahora es calcular la solución débil global del problema. Según (2.21), la velocidad de propagación de esta discontinuidad viene dada por $\xi'(t) = \frac{1}{2}$. La función

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \alpha + \frac{t-\alpha}{2}, \\ 0 & \text{si } x > \alpha + \frac{t-\alpha}{2}, \end{cases}$$

es entonces solución del problema para $t > \alpha$, ve figura 2.10.

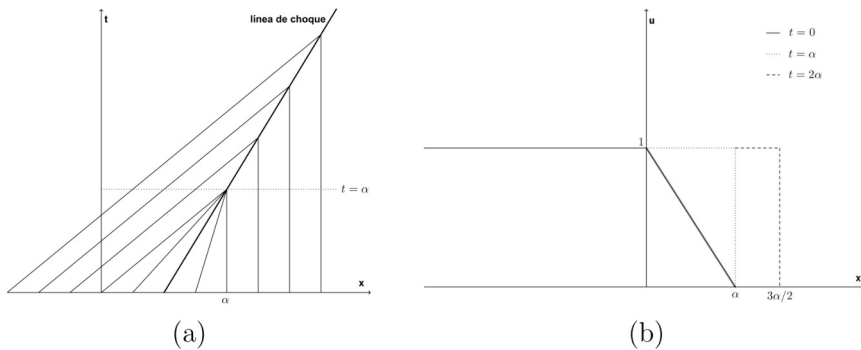


Figura 2.10: Características (a) y solución del ejemplo 3 (b). Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

2.2.4. Soluciones de Entropía

Gracias al concepto de solución débil hemos podido calcular una solución global del problema de Cauchy (2.6) en situaciones en las que el problema no puede tener soluciones clásicas. Desafortunadamente, la unicidad de la solución débil no está garantizada.

Ejemplo 4. Consideramos la ecuación de Burgers (2.1.4) con la condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Al aproximar α a 0 en el ejemplo 1 obtenemos la siguiente solución global del problema de Cauchy

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{t} & \text{si } 0 \leq x \leq t, \\ 1 & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

En efecto, u es una solución continua y es una solución clásica de la ecuación de Burgers (2.1.4) donde es de clase \mathcal{C}^1 . Por lo tanto, gracias al Corolario 4 podemos afirmar que u es solución débil del problema, ver Figura 2.11.

Por otra parte, razonando igual que en el ejemplo 3, podemos calcular una solución discontinua. La velocidad de propagación de su choque sería $\xi'(t) = \frac{1}{2}$ y por tanto

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{t}{2}, \\ 1 & \text{si } x > \frac{t}{2}, \end{cases}$$

es otra solución débil del problema, ver Figura 2.11.

Notemos que hemos construido una solución continua a partir de una condición inicial discontinua. Veremos más adelante que es precisamente la solución que hay que considerar ya que es la que tiene un sentido físico.

El concepto de entropía nos permitirá establecer un criterio para seleccionar la única solución físicamente relevante.

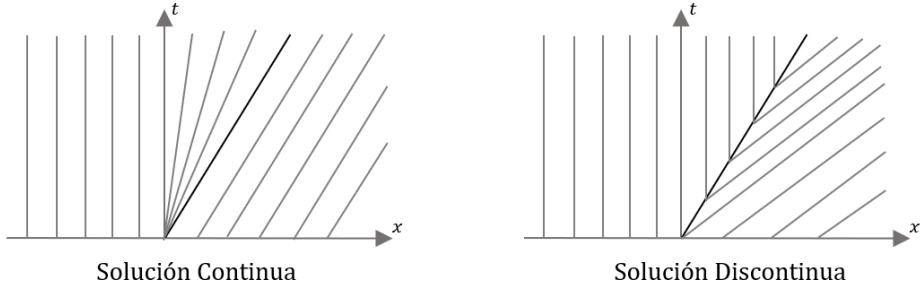


Figura 2.11: Rectas características de las dos soluciones posibles del ejemplo 3. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

Como ya hemos comentado, la ecuación del problema de Cauchy

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (2.25a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.25b)$$

se obtiene como simplificación de la ecuación viscosa o disipativa

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} f(u_\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\varepsilon = 0, \quad (2.26)$$

donde ε es pequeño y estrictamente positivo. El término $-\varepsilon (u_\varepsilon)_{xx}$ puede ser visto como un término viscoso.

Ahora, el problema de Cauchy constituido por la ecuación (2.26) y la condición inicial

$$u_\varepsilon(x, 0) =: u_{0\varepsilon} \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad (2.27)$$

tal que $u_{0\varepsilon} \rightarrow u_0(x)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, tiene solución única y suficientemente suave $u_\varepsilon \in L^\infty \times [0, \infty]$, para cada ε (vea [Godlewski(2021)] para una prueba así como la existencia de u_ε).

Queremos recuperar soluciones de (2.25a) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en las soluciones de (2.26). En esa dirección, podemos enunciar el siguiente teorema que caracteriza la solución física del problema de Cauchy (2.25) con el problema de Cauchy de (2.26)-(2.27).

Teorema 5. *Sea $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ una sucesión de soluciones suficientemente suaves de (2.26) tales que*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))} \leq C \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (2.28)$$

$$u_\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ para casi todo } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (2.29)$$

donde C es una constante independiente de ε . Entonces u es una solución débil de (2.25a).

Demostración. Multiplicando (2.26) por una función prueba $\varphi \in \mathcal{C}_{comp}^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ e integrando por partes obtenemos

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(-u_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f(u_\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon u_\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dx dt = 0.$$

Teniendo en cuenta (2.28) y (2.29) y el hecho de que el soporte de φ es compacto, podemos utilizar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, para pasar al límite en la identidad anterior y obtener

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(-u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = 0,$$

siendo φ una función arbitraria en $\mathcal{C}_{comp}^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$. El resultado sigue de la definición misma de solución débil. \square

Para caracterizar el límite u de las soluciones de la ecuación parabólica (2.26) utilizamos la noción matemática de entropía. Consulte [Godlewski(2021)] para una descripción de entropía para sistemas de leyes de conservación no escalares.

Definición. (Entropía) Una pareja (U, F) de funciones de clase \mathcal{C}^1 en \mathbb{R} constituye una entropía para la ecuación (2.25a) si

1. la función U es estrictamente convexa,
2. se tiene que $F'(u) = U'(u)f'(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$.

Observemos que si $U(\cdot)$ y $F(\cdot)$ son dos funciones regulares relacionadas mediante la ecuación *ii*) anterior, y si u es una solución clásica de la ecuación (2.25a) entonces

$$U'(u) \frac{\partial u}{\partial t} + U'(u) f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0. \tag{2.30}$$

Sin embargo, si u es una solución débil de clase \mathcal{C}^1 a trozos de (2.25a), entonces la ecuación (2.30) no puede cumplirse en el sentido débil. En efecto, para que eso fuese cierto, es necesario que $s[U(u)] = [F(u)]$ a lo largo de toda curva de discontinuidad de u pero esta identidad no puede satisfacerse al mismo tiempo que la condición de Rankine-Hugoniot (2.21). En realidad, cuando u es una solución débil de clase \mathcal{C}^1 a trozos, (2.30) se convierte en una desigualdad.

Teorema 6. Sea $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ un conjunto de soluciones regulares de (2.26) verificando (2.28) y (2.29), y sea (U, F) una entropía para la ecuación (2.25a). Entonces u verifica la condición

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} U(u) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} F(u) \right) dx dt \geq 0 \quad (2.31)$$

para toda función prueba φ de $\mathcal{C}_{comp}^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ tal que $\varphi \geq 0$.

Demostración. Multiplicando la ecuación (2.26) por $U'(u_\varepsilon)$ obtenemos

$$U'(u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + U'(u_\varepsilon) f'(u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} - \varepsilon U'(u_\varepsilon) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} = 0.$$

Gracias a la propiedad $F'(u) = U'(u)f'(u)$, podemos transformar la identidad anterior en

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} F(u_\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(u_\varepsilon) = -\varepsilon U''(u_\varepsilon) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2.$$

Multiplicando el resultado por una función prueba $\varphi \in \mathcal{C}_{comp}^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ no negativa e integrando por partes obtenemos

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} U(u_\varepsilon) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} F(u_\varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} U(u_\varepsilon) \right) dx dt = \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} U''(u_\varepsilon) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 \varphi dx dt. \quad (2.32)$$

Notar que no podemos tomar directamente a límite en ε ya que la convergencia del lado derecho de la ecuación (2.32) no está garantizada. Sin embargo dado que U es convexa, tenemos que

$$\varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} U''(u_\varepsilon) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 dx dt \geq 0$$

para toda función prueba $\varphi \in \mathcal{C}_{comp}^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ no negativa. Por lo tanto,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} U(u_\varepsilon) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} F(u_\varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} U(u_\varepsilon) \right) dx dt \geq 0$$

y (2.31) se obtiene pasando al límite en la desigualdad anterior ayudándose del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. \square

La condición (2.31) se llama condición de entropía y se suele escribir (en el sentido de las distribuciones),

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \leq 0.$$

Definición. (Solución entrópica) Una solución débil del problema de Cauchy (2.25) y (2.26)-(2.27) se llama solución entrópica si satisface la condición de entropía (2.31) para toda entropía (U, F) de la ecuación (2.25a).

Teorema 7. (Entropía para las soluciones de clase \mathcal{C}^1 a trozos) Sea u una solución débil de clase \mathcal{C}^1 a trozos de (2.25), (2.26)-(2.27). Entonces u es una solución entrópica si y sólo si, para toda entropía (U, F) , se cumple la condición

$$\int_{\Sigma} \xi'(t) [U(u^+(t)) - U(u^-(t))] \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \xi'(t)^2}} d\gamma \geq \int_{\Sigma} [F(u^+(t)) - F(u^-(t))] \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \xi'(t)^2}} d\gamma \quad (2.33)$$

para toda función prueba no negativa $\varphi \in \mathcal{C}_{comp}^{\infty}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ y a lo largo de toda curva de discontinuidad $\Sigma = \{(\xi(t), t)\}$.

Demostración. Sea u una solución débil de clase \mathcal{C}^1 a trozos de (2.25),(2.26)-(2.27). Recordemos que esto significa que u es una solución clásica del problema de Cauchy (2.25)-(2.26)-(2.27) en cualquier abierto en el que es de clase \mathcal{C}^1 y que u verifica a lo largo de toda curva de discontinuidad Σ la condición de Rankine-Hugoniot

$$\xi'(t) (u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-).$$

Sea (U, F) una entropía para la ecuación (2.25a). Consideramos, como en la demostración del teorema 3, un abierto acotado $K \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ dividido por una curva de discontinuidad Σ en dos componentes conexas K^- y K^+ . Aplicando el teorema de la divergencia en K^- y K^+ deducimos la identidad

$$\int_K \left(U(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = - \int_{K^- \cup K^+} \left(\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \right) \varphi dx dt - \int_{\Sigma} [(U(u^+) - U(u^-)) n_t + (F(u^+) - F(u^-)) n_x] \varphi d\gamma, \quad (2.34)$$

para toda función prueba $\varphi \in \mathcal{C}_{comp}^{\infty}(K)$. Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0 \quad \text{en } K^- \cup K^+$$

para toda solución débil y de clase \mathcal{C}^1 a trozos, resulta inmediatamente de (2.34) que dicha solución es entrópica si y sólo si

$$- \int_{\Sigma} [(U(u^+) - U(u^-)) n_t + (F(u^+) - F(u^-)) n_x] \varphi d\gamma \geq 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_{comp}^\infty(K)$, $\varphi \geq 0$. Por último, teniendo en cuenta la definición (2.20) del vector unitario $\mathbf{n} = (n_x, n_t)^T$ en términos de la parametrización $\xi(\cdot)$ de Σ y usando también el hecho de que $K \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ es un abierto acotado arbitrario, resulta que la última desigualdad es equivalente a (2.33). \square

Notar que

$$\xi'(t) [(U(u^+) - U(u^-))] \geq [(F(u^+) - F(u^-))] \quad (2.35)$$

es una condición suficiente para el cumplimiento del criterio (2.33). Veremos en el siguiente teorema que en el caso de una función de flujo f convexa esta última condición se simplifica aún más.

Teorema 8. (*Choque entrópico, caso convexo*) *Supongamos que f es estrictamente convexa. Entonces, la condición suficiente (2.35) para un choque entrópico es equivalente a*

$$u^- > u^+ \quad \text{a lo largo de toda curva de discontinuidad } \Sigma. \quad (2.36)$$

Demostración. La función G definida por

$$u \mapsto G(u) = \frac{f(u) - f(u^-)}{u - u^-} (U(u) - U(u^-)) - (F(u) - F(u^-)),$$

es decreciente. En efecto,

$$\begin{aligned} G'(u) &= \frac{f'(u)(u - u^-) - (f(u) - f(u^-))}{(u - u^-)^2} (U(u) - U(u^-)) \\ &\quad + \frac{f(u) - f(u^-)}{u - u^-} U'(u) - F'(u) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la relación $F'(u) = U'(u)f'(u)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} G'(u) &= \frac{f'(u)(u - u^-) - (f(u) - f(u^-))}{(u - u^-)^2} (U(u) - U(u^-)) \\ &\quad + \frac{f(u) - f(u^-) - f'(u)(u - u^-)}{u - u^-} U'(u) \\ &= \frac{(f'(u)(u - u^-) - f(u) + f(u^-)) (U(u) - U(u^-) - U'(u)(u - u^-))}{(u - u^-)^2}. \end{aligned}$$

Por hipótesis, f y U son funciones convexas, lo que implica que

$$(f'(u)(u - u^-) - (f(u) - f(u^-))) < 0 \quad (2.37)$$

y

$$(U'(u)(u - u^-) - (U(u) - U(u^-))) < 0, \quad (2.38)$$

para toda $u \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $G'(u) < 0$ en todo \mathbb{R} .

Deducimos que (2.36) y (2.35) son equivalentes notando que $G(u^-) = 0$ y que (2.35) se escribe $G(u^+) \geq 0$. \square

El teorema anterior significa que, en el caso de una función convexa, las rectas características deben de converger hacia la curva que determina el choque (como en la primera gráfica de la figura 2.10) y nunca emerger de ella (como ocurre en la gráfica de la derecha de la figura 2.11). Veamos como se demuestra esta propiedad.

Lema 9. *Sea u una solución entrópica de clase C^1 a trozos del problema de Cauchy (2.25a), (2.26)-(2.27) con una función de flujo f estrictamente convexa. Entonces u satisface a lo largo de toda curva de discontinuidad Σ*

$$c(u^+) < \xi'(t) < c(u^-), \quad (2.39)$$

donde c designa a la derivada de f .

Demostración. Dado que f es estrictamente convexa, la función

$$u \mapsto \frac{f(u) - f(u^+)}{u - u^+}$$

es continua y estrictamente creciente en $[u^+, u^-]$, por tanto

$$c(u^+) < \frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+} = \xi'(t)$$

donde la última identidad es la condición de Rankine-Hugoniot. La otra desigualdad se demuestra de manera similar. \square

En el caso de la ecuación de Burgers (2.1.4), la condición (2.39) consiste en

$$u^+ < s = \frac{u^- + u^+}{2} < u^-.$$

Esta propiedad de entropía permite descartar la solución discontinua del ejemplo 4.

Tenemos la siguiente generalización del Teorema del choque entrópico (caso convexo), donde no es necesario que la función de flujo sea convexa ni cóncava.

Teorema 10. (*Choque entrópico, caso general*) La condición de choque entrópico (2.35) es equivalente a

$$\begin{cases} f(\alpha u^- + (1-\alpha)u^+) \geq \alpha f(u^-) + (1-\alpha)f(u^+) & \text{si } u^+ > u^- \\ f(\alpha u^- + (1-\alpha)u^+) \leq \alpha f(u^-) + (1-\alpha)f(u^+) & \text{si } u^+ < u^- \end{cases} \quad (2.40)$$

para toda $\alpha \in [0, 1]$.

Nota. (Interpretación geométrica) El teorema nos dice que un choque es entrópico si se cumple una de las siguientes condiciones

1. Que $u^+ > u^-$ y la gráfica de $u \mapsto f(u)$ está por encima del segmento $[u^-, u^+]$,
2. Que $u^+ < u^-$ y la gráfica de $u \mapsto f(u)$ está por debajo del segmento $[u^+, u^-]$.

Notar que en el caso de una f convexa, la condición $u^+ > u^-$ es suficiente por si sola (como ya lo probamos antes) para garantizar que un choque es entrópico. Del mismo modo, si f es cóncava, la condición $u^+ < u^-$ es suficiente ya que la condición sobre la gráfica de f se cumple por defecto.

2.2.5. Existencia y unicidad de la solución entrópica

El siguiente resultado garantiza que el problema de Cauchy (2.6) está bien planetado en el sentido de Hadamard. Es decir, que el problema tiene una única solución entrópica que además es continua respecto al dato inicial. La demostración de este resultado se puede ver [Godlewski(2021)], nosotros solo presentamos un bosquejo.

Teorema 11. (*Existencia y unicidad de la solución entrópica*). Supongamos que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Entonces, el problema de Cauchy (2.6) admite una única solución entrópica $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ que verifica

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \text{para casi todo } t \geq 0.$$

Si u y v son las soluciones entrópicas asociadas a las condiciones iniciales u_0 y v_0 , entonces

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u_0(x) - v_0(x)| dx \quad (2.41)$$

para casi todo $t \geq 0$, para toda $x_1 < x_2$, donde

$$A = \max \left\{ |f'(\xi)| : |\xi| \leq \max(\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) \right\}.$$

Nota. (Velocidad de Propagación). La desigualdad (2.41) significa que el valor de u en el punto (x, t) sólo depende de los valores de u_0 en el intervalo $[x - At, x + At]$. Es decir, la solución entrópica tiene una velocidad de propagación finita.

La demostración del Teorema sobre existencia y unicidad de la solución entrópica es compleja y utiliza herramientas y argumentos matemáticos sofisticados. Para una prueba consulte [Godlewski(2021)].

2.2.6. El Problema de Riemann

En esta sección, para simplificar, nos limitaremos al caso de una función flujo f estrictamente convexa. Vamos a poner en práctica las técnicas introducidas en éste capítulo para calcular explícitamente la solución entrópica del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.42)$$

donde u_L y u_R son dos constantes dadas.

Nota. (Relación con la dinámica de gases). Riemann estudió un problema de dinámica de gases en el que se considera un tubo que contiene dos gases separados por una membrana fina. Se trata de calcular la compresión (o la expansión) del gas después de la ruptura repentina de la membrana. Las condiciones iniciales de este problema son similares a las del problema (2.42), de allí que los problemas de Cauchy del tipo (2.42) se llamen problema de Riemann.

Ya hemos calculado la solución del problema (2.42) para la ecuación de Burgers (2.1.4) con los datos iniciales

- $u_L = 0$ y $u_R = 1$ (Ejemplo 1 (2.2.1))
- $u_L = 1$ y $u_R = 0$ (Ejemplo 3 (2.2.3))

y vimos que las soluciones obtenidas son muy diferentes. Para estudiar el problema general distinguiremos los casos, $u_L < u_R$ y $u_L > u_R$.

Lema. (Solución autosemejante) La solución u del problema de Riemann (2.42) es de la forma

$$u(x, t) = v(x/t).$$

Además, siempre que $f(u)_x = c(u)u$, se debe verificar que

$$v'(x/t) = 0 \quad \text{o} \quad c(v(x/t)) = x/t \quad (2.43)$$

en todo subdominio en el que v es de clase \mathcal{C}^1 . Se dice que u y v son soluciones de *similitud* o *autosemejantes*.

Demostración. Notemos que si $u(x, t)$ es solución de (2.42) entonces, para todo $\alpha > 0$, la función $u(\alpha x, \alpha t)$ es también solución del mismo problema. Esto significa que u es autosemejante. Además, si u es de clase \mathcal{C}^1 en $K \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{t^2} v'(x/t) + \frac{1}{t} c(v(x/t)) v'(x/t) = 0, \quad \forall (x, t) \in K$$

y por lo tanto,

$$v'(x/t) (c(v(x/t)) - x/t) = 0, \quad \forall (x, t) \in K.$$

□

Estamos ahora listos para resolver el problema (2.42) de forma explícita.

El caso de una onda de rarefacción: $u_L < u_R$

En primer lugar, el método de las características nos permite construir la solución en las regiones $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : x \leq c(u_L)t\}$ y $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : x \geq c(u_R)t\}$. Obtenemos,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } \frac{x}{t} \leq c(u_L) \\ u_R & \text{si } \frac{x}{t} \geq c(u_R). \end{cases}$$

Para calcular u en la zona central $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : c(u_L)t \leq x \leq c(u_R)t\}$, utilizamos la segunda ecuación de (2.43). En efecto, dado que $c = f'$ es estrictamente creciente, tiene inversa c^{-1} , podemos escribir que $v(x/t) = c^{-1}(x/t)$ y por tanto

$$u(x, t) = c^{-1}(x/t) \quad \text{cuando } c(u_L) \leq \frac{x}{t} \leq c(u_R).$$

La función u así obtenida es continua, se dice que es una onda de rarefacción o un abanico (debido a la forma de las rectas características), vea Figura 2.12

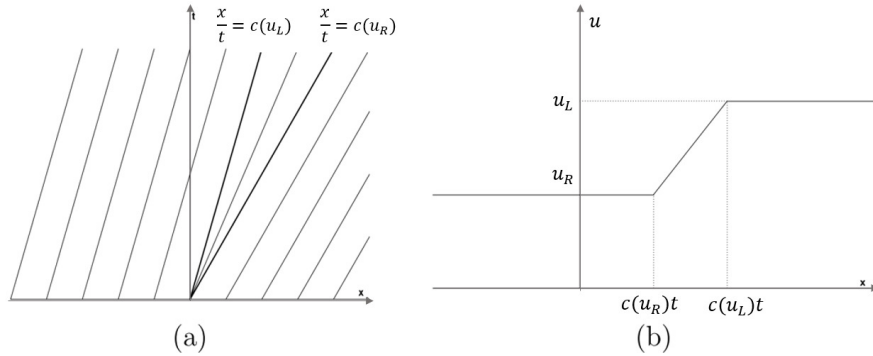


Figura 2.12: Ejemplo de una onda de rarefacción: (a) Rectas características. (b) Solución del problema de Riemann con dos estados iniciales: $u_L < u_R$. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

El caso de una onda de choque: $u_L > u_R$

En este caso, la solución es constante a cada lado de la curva $\Sigma = \{(\xi(t), t)\}$ a lo largo de la cual se produce el choque. La ecuación de dicha curva se determina utilizando la condición de Rankine-Hugoniot,

$$\xi'(t) = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R}.$$

El choque es entrópico ($u_L > u_R$) y la solución es

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < st, \\ u_R & \text{si } x > st. \end{cases}$$

En este caso, s es igual a la constante $\frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R}$.

En resumen, la solución entrópica $w(x/t; u_L, u_R)$ del problema de Riemann (2.42) con dos estados iniciales (u_L, u_R) viene dada por la función continua y de clase \mathcal{C}^1 a trozos

$$w(x/t; u_L, u_R) = \begin{cases} u_L & \text{si } x/t \leq c(u_L) \\ c^{-1}(x/t) & \text{si } c(u_L) \leq x/t \leq c(u_R) \\ u_R & \text{si } x/t \geq c(u_R) \end{cases} \quad (2.44)$$

cuando $u_L < u_R$ y por la función constante a trozos

$$w(x/t; u_L, u_R) = \begin{cases} u_L & \text{si } x/t < s, \\ u_R & \text{si } x/t > s, \end{cases} \quad \text{con } s = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R} \quad (2.45)$$

cuando $u_L > u_R$.

Solución del problema de Riemann con tres estados iniciales

Vamos a resolver explícitamente el problema de Cauchy de la ecuación de Burgers con tres estados iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < 0 \\ u_2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ u_3 & \text{si } x > 1, \end{cases} \end{cases}$$

donde u_1, u_2 y u_3 son tres constantes dadas. Supongamos que $u_1 < u_2 < u_3$. En este caso, existe una solución continua y creciente para todo tiempo $t > 0$. Las rectas características que emergen y (en forma de abanico) de los puntos $x = 0$ y $x = 1$ no interfieren nunca entre sí, y por lo tanto no se produce ninguna onda de choque, vea figura 2.13. Más concretamente, la solución es

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < u_1 t, \\ x/t & \text{si } u_1 t < x < u_2 t, \\ u_2 & \text{si } u_2 t < x < u_2 t + 1 \\ (x - 1)/t & \text{si } u_2 t + 1 < x < u_3 t + 1 \\ u_3 & \text{si } x > u_3 t + 1 \end{cases}$$

Supongamos ahora que $u_1 > u_2 > u_3$. En el tiempo $t = 0$ nacen dos choques entrópicos desde los puntos $x = 0$ y $x = 1$. Las dos curvas a lo largo de las cuales se propagan dichos choques se cruzan en un tiempo t^* que determinaremos más adelante. Para t suficientemente pequeño, la condición de Rankine-Hugoniot nos permite determinar la trayectoria $x = \xi_1(t)$ del primer choque

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)t$$

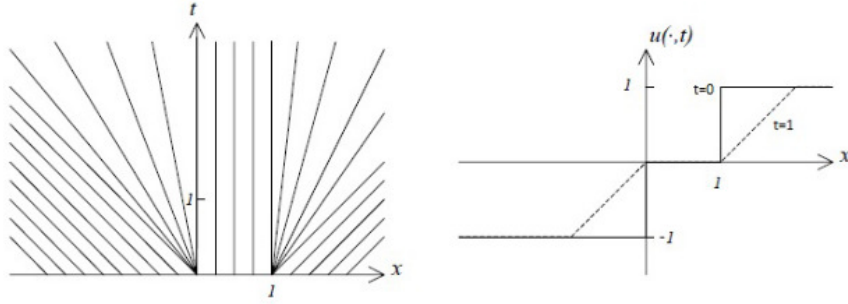


Figura 2.13: Rectas características y solución del problema de Riemann para la ecuación de Burgers con tres estados iniciales: $u_1 = -1$, $u_2 = 0$ y $u_3 = 1$. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

y la trayectoria $x = \xi_2(t)$ del segundo

$$\xi_2(t) = \frac{1}{2}(u_2 + u_3)t + 1.$$

El tiempo t^* se obtiene entonces resolviendo

$$\frac{1}{2}(u_1 + u_2)t^* = \frac{1}{2}(u_2 + u_3)t^* + 1$$

En ese tiempo $t^* = \frac{2}{u_1 - u_3}$ tenemos que

$$\xi_1(t^*) = \xi_2(t^*) = \frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_3}.$$

Más allá del tiempo t^* , solo hay un choque, vea la figura 2.14, cuya trayectoria es

$$x = \xi(t) = \frac{1}{2}(u_1 + u_3)t + \frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_3}, \quad t > t^*.$$

En definitiva, la solución viene dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < \xi_1(t), \\ u_2 & \text{si } \xi_1(t) < x < \xi_2(t), \\ u_3 & \text{si } x > \xi_2(t), \end{cases} \quad t < t^*$$

y

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < \xi(t), \\ u_3 & \text{si } x > \xi(t), \end{cases} \quad \text{si } t > t^*.$$

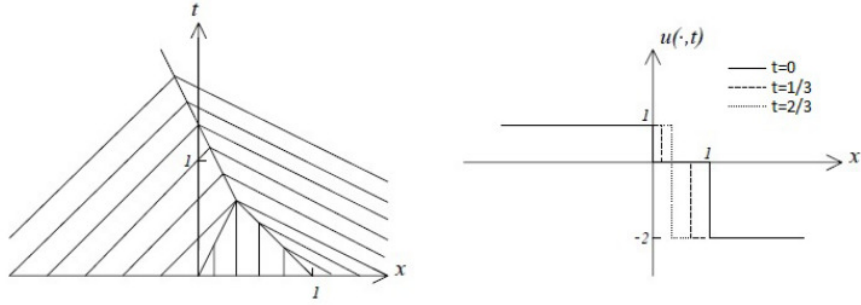


Figura 2.14: Rectas características y solución del problema de Riemann para la ecuación de Burgers con tres estados iniciales: $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ y $u_3 = -2$. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

Consideremos ahora un dato inicial no monótono. Supongamos por ejemplo que $u_1 < u_2$ y $u_2 > u_3$. En este caso tenemos un choque entrópico originado en el punto $x = 1$ y en una onda de rarefacción cuyo abanico se despliega a partir del punto $x = 0$. La onda de choque y la onda de rarefacción interferirán a partir de un tiempo t^* que determinaremos. Para $t < t^*$, la trayectoria del choque viene dada por

$$x = \xi(t) \quad \text{donde} \quad \xi(t) = \frac{1}{2}(u_2 + u_3)t + 1.$$

Por lo tanto, para $t < t^*$, tenemos que

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < u_1 t \\ x/t & \text{si } u_1 t < x < u_2 t, \\ u_2 & \text{si } u_2 t < x < \xi(t), \\ u_3 & \text{si } x > \xi(t). \end{cases}$$

El tiempo de corte t^* se obtiene resolviendo la ecuación

$$u_2 t = \xi(t).$$

Para $t > t^* = \frac{2}{u_2 - u_3}$, la trayectoria $x = \xi(t)$ del choque es influenciada por la onda de rarefacción. En efecto, el valor de la solución a la izquierda del choque es

$$u(\xi(t), t) = \frac{\xi(t)}{t},$$

y por la condición de Rankine-Hugoniot

$$\xi'(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi(t)}{t} + u_3 \right).$$

La solución general de esta ecuación diferencial es

$$\xi(t) = \alpha\sqrt{t} + u_3t.$$

El valor $\alpha = \sqrt{2(u_2 - u_3)}$ de la constante se determina utilizando que

$$\xi(t^*) = \frac{2u_2}{u_2 - u_3}.$$

Entonces, para $t > t^*$, la solución se prolonga de la siguiente forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < u_1t, \\ x/t & \text{si } u_1t < x < \xi(t), \\ u_3 & \text{si } x > \xi(t). \end{cases}$$

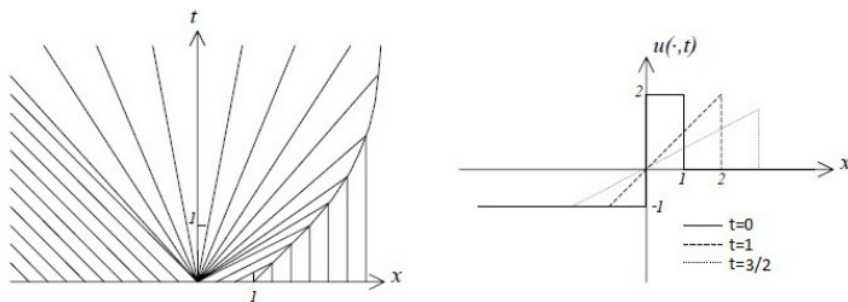


Figura 2.15: Rectas características y solución del problema de Riemann para la ecuación de Burgers con tres estados iniciales: $u_1 = -1$, $u_2 = 2$ y $u_3 = 0$. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

A continuación, o bien $u_1 < u_3$ y la expresión anterior de la solución es válida para todo tiempo $t > t^*$, o bien $u_1 > u_3$ y la expresión es válida mientras el tiempo t satisface la desigualdad

$$u_1t < \xi(t).$$

Es decir, siempre que $t < t^{**}$ donde $t^{**} = \frac{2(u_2 - u_3)}{(u_1 - u_3)^2}$ se obtiene resolviendo

$$u_1t^{**} = \sqrt{2(u_2 - u_3)t^{**}} + u_3t^{**}.$$

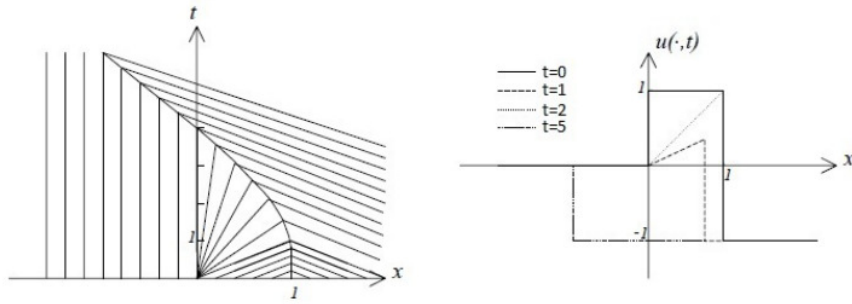


Figura 2.16: Rectas características y solución del problema de Riemann para la ecuación de Bürgers con tres estados iniciales: $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ y $u_3 = -1$. Figura tomada del libro [Vázquez(2007)].

Para $t > t^{**}$, la trayectoria del choque viene dada por

$$\xi(t) = \frac{1}{2}(u_1 + u_3)t + \frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_3}$$

y la solución es entonces

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x < \xi(t) \\ u_3 & \text{si } x > \xi(t). \end{cases}$$

Así concluimos esta sección al obtener varios resultados explícitos del problema de Riemann.

2.3. Sistemas Hiperbólicos de Leyes de Conservación

Los sistemas surgen en cuando son necesarias más de una variable conservada para describir un fenómeno. En la literatura científica llamamos **Sistemas Hiperbólicos de Leyes de Conservación** a sistemas de EDPs de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}^j(\mathbf{w}) = 0 \quad (2.46)$$

donde

$$(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty), \quad \mathbf{w} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}^j \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \quad \text{con } j = 1, \dots, d.$$

En este caso t es la *variable temporal* y \mathbf{x} *variable espacial*; $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de *variables conservadas o de estado*, Ω el conjunto de estados, y \mathbf{f}^j son las funciones de flujo de la j -ésima componente espacial x_j ; $n \geq 1$ representa el número de cantidades conservadas y $d \geq 1$ la dimensión del espacio físico. En aplicaciones $d = 1, 2, 3$.

Si expresamos a $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]^T$, el sistema (2.46) expresa la conservación de las cantidades w_k , $1 \leq k \leq n$, en dominios Ω del espacio físico; es por eso que decimos que el sistema (2.46) esta escrito en *forma conservativa*. Por último, el flujo a través de la frontera $\partial\Omega$ del dominio de las variables conservadas \mathbf{w} está determinado por las funciones de flujo $\mathbf{f}^j(\mathbf{w}) = (f_1^j(\mathbf{w}), \dots, f_n^j(\mathbf{w}))^T$.

2.3.1. Sistemas Hiperbólicos Lineales

En esta sección comenzaremos con el estudio de sistemas hiperbólicos lineales con coeficientes constantes. Aquí podemos resolver las ecuaciones explícitamente al transformar a variables características. Además, obtendremos soluciones explícitas para el problema de Riemann e introduciremos una interpretación del *espacio fase* que será muy útil para el estudio de sistemas no lineales.

Consideremos el caso unidimensional ($d = 1$) del sistema hiperbólico lineal con función de flujo $\mathbf{f}(\mathbf{w}) = A \mathbf{w}$, es decir A es independiente de \mathbf{w} ,

$$\mathbf{w}_t + A \mathbf{w}_x = 0, \quad \mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}_0(x), \quad (2.47)$$

donde $\mathbf{w} : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es constante.

La matriz A posee n valores propios reales $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Por lo que A posee n vectores propios a la derecha $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ tales que

$$A \mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Similarmente existen n vectores propios a la izquierda $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n$ tales que

$$\mathbf{l}_i A = \lambda_i \mathbf{l}_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

donde los vectores columna \mathbf{r}_m y los vectores fila \mathbf{l}_k son ortogonales para $m \neq k$

$$\lambda_m \mathbf{l}_k \mathbf{r}_m = \mathbf{l}_k (\lambda_m \mathbf{r}_m) = \mathbf{l}_k (A \mathbf{r}_m) = (\mathbf{l}_k A) \mathbf{r}_m = \lambda_k \mathbf{l}_k \mathbf{r}_m.$$

Se definen, además, las matrices

$$L := \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad R = [\mathbf{r}_1 \quad \dots \quad \mathbf{r}_n].$$

Suponiendo que los vectores propios son normalizados tales que $\mathbf{l}_k \mathbf{r}_i = \delta_{ki}$, es decir $L = R^{-1}$, tenemos

$$LAR = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Lambda$$

Podemos resolver el sistema (2.47) explícitamente pues podemos expresarlo de la siguiente forma

$$\partial_t \mathbf{v} + \Lambda \mathbf{v}_x = 0, \quad \text{con } \mathbf{v} = L \mathbf{w}, \quad (2.48)$$

pues

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_t + A \mathbf{w}_x = 0 &\implies \mathbf{w}_t + R \Lambda L \mathbf{w}_x = 0, \\ &\implies \mathbf{w}_t + R \Lambda L \mathbf{w}_x = 0, \\ &\implies L \mathbf{w}_t + \Lambda L \mathbf{w}_x = 0, \\ &\implies \partial_t (L \mathbf{w}) + \Lambda \partial_x (L \mathbf{w}) = 0, \\ &\implies \partial_t \mathbf{v} + \Lambda \mathbf{v}_x = 0. \end{aligned}$$

A la representación $\mathbf{v} = L \mathbf{w}$ de (2.48) se le conoce como *variables características*.

Observemos que al transformar los datos iniciales a las variables características $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_n]^T$, obtenemos que el sistema de primer orden (2.47) es equivalente a n ecuaciones independientes escalares de primer orden

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = 0, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.49)$$

Entonces podemos derivar la solución para el problema de Cauchy (2.47). Sea $\mathbf{v}_0 = L\mathbf{w}_0 = (\mathbf{l}_1\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{l}_n\mathbf{w}_0)^T$. Cada ecuación del sistema (2.49) tiene por solución

$$v_j(x, t) = \mathbf{l}_j\mathbf{w}_0(x - \lambda_j t), \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

y así

$$\mathbf{w}(x, t) = R\mathbf{v}(x, t) = \sum_{j=1}^n v_j(x, t)\mathbf{r}_j = \sum_{j=1}^n (\mathbf{l}_j\mathbf{w}_0(x - \lambda_j t))\mathbf{r}_j.$$

En resumen, la solución del sistema lineal (2.49) es

$$\mathbf{w}(x, t) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{l}_j\mathbf{w}_0(x - \lambda_j t))\mathbf{r}_j. \quad (2.50)$$

Notemos que $\mathbf{w}(x, t)$ depende solamente de la información inicial en los n puntos $x - \lambda_j t$, de manera que el dominio de dependencia está definido por $\mathcal{D} = \{(x \in \mathbb{R} : x = \hat{x} - \lambda_j \hat{t}, j = 1, 2, \dots, n)\}$.

Definición. Las curvas $x = x_0 + \lambda_j t$ que satisfacen $x'(t) = \lambda_j$ se llaman *características de la j -ésima familia*, o simplemente *j -ésimas características*.

Esas curvas son líneas rectas en el caso de un sistema con coeficientes constantes. Para un sistema estrictamente hiperbólico, n características distintas pasan a través de cada punto en el plano $x - t$. El coeficiente $v_j(x, t)$ del vector propio \mathbf{r}_j en (2.50) es constante a lo largo de cualquier j -característica.

Podemos ver a la solución como la superposición de n ondas, cada una de las cuales es advectada independientemente con ningún cambio en su forma. La j -ésima onda tiene la forma $v_j(x, 0)\mathbf{r}_j$ y se propaga con velocidad λ_j . Esta solución tiene una forma particularmente simple si $v_j(x, 0)$ es constante en x para todos los valores de j menos uno, digamos $v_j(x, 0) \equiv c_j$ para $j \neq i$. Entonces la solución tiene la forma

$$\mathbf{w}(x, t) = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{r}_j + v_i(x - \lambda_i t, 0)\mathbf{r}_i, \quad (2.51)$$

$$= \mathbf{w}_0(x - \lambda_i t) \quad (2.52)$$

y los datos iniciales simplemente se propagan con velocidad λ_i . Como $n-1$ de las variables características son constantes, la ecuación se reduce, en esencia, a $\mathbf{w}_t + \lambda_i \mathbf{w}_x = 0$, la cual gobierna el comportamiento de la i -ésima familia. Ecuaciones no lineales tienen soluciones análogas llamadas *ondas simples*, en que las variaciones ocurren solo en una familia característica, consulte [Whi(1974)].

Problema de Riemann para sistemas lineales.

Deseamos analizar el *problema de Riemann*

$$\begin{cases} \mathbf{w}_t + A\mathbf{w}_x = 0 \\ \mathbf{w}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{w}_R & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.53)$$

donde \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R son vectores constantes.

En este caso la solución consiste de estados intermedios conectados mediante ondas de choque asociadas a cada valor propio. Para el análisis consideraremos primero que el sistema es estrictamente hiperbólico, luego aclararemos que sucede en el caso no estricto.

Para una ecuación escalar ($n = 1$) sabemos que la solución esta dada por

$$w(x, t) = w_0(x - \lambda t) = \begin{cases} w_L & \text{si } x < \lambda t, \\ w_R & \text{si } x > \lambda t. \end{cases}$$

Debemos notar primero que u no es continua y segundo, u es la única solución de entropía de (2.47) con los datos iniciales de Riemann en el sentido de la definición (2.53).

Para dos variables de estado ($n = 2$) escribimos

$$\mathbf{w}_L = \sum_{j=1}^2 (\mathbf{l}_j \mathbf{w}_L) \mathbf{r}_j, \quad \mathbf{w}_R = \sum_{j=1}^2 (\mathbf{l}_j \mathbf{w}_R) \mathbf{r}_j,$$

Podemos hallar la solución de cada componente por separado. Utilizando (2.50) para los datos iniciales de (2.53) obtenemos

$$\mathbf{l}_1 \mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{l}_1 \mathbf{w}_L & \text{si } x < \lambda_1 t, \\ \mathbf{l}_1 \mathbf{w}_R & \text{si } x \geq \lambda_1 t, \end{cases} \quad \mathbf{l}_2 \mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{l}_2 \mathbf{w}_L & \text{si } x < \lambda_2 t, \\ \mathbf{l}_2 \mathbf{w}_R & \text{si } x \geq \lambda_2 t, \end{cases}$$

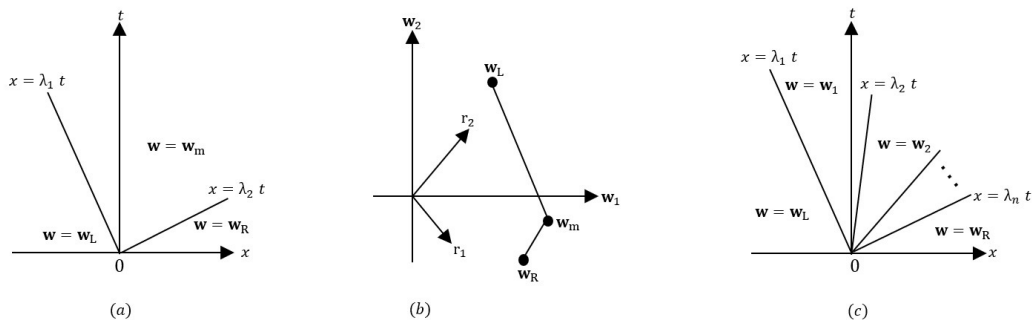


Figura 2.17: Solución del problema de Riemann para un sistema lineal: (a) solución (2.54) de un sistema de $n = 2$ ecuaciones, (b) construcción del estado intermedio \mathbf{w}_m en el espacio fase, (c) solución (2.57) para n general.

luego

$$\mathbf{w}(x, t) = (\mathbf{l}_1 \mathbf{w}(x, t)) \mathbf{r}_1 + (\mathbf{l}_2 \mathbf{w}(x, t)) \mathbf{r}_2 \quad (2.54)$$

$$= \begin{cases} (\mathbf{l}_1 \mathbf{w}_L) \mathbf{r}_1 + (\mathbf{l}_2 \mathbf{w}_L) \mathbf{r}_2 & \text{si } x < \lambda_1 t \\ (\mathbf{l}_1 \mathbf{w}_L) \mathbf{r}_1 + (\mathbf{l}_2 \mathbf{w}_R) \mathbf{r}_2 & \text{si } \lambda_1 t < x < \lambda_2 t \\ (\mathbf{l}_1 \mathbf{w}_R) \mathbf{r}_1 + (\mathbf{l}_2 \mathbf{w}_R) \mathbf{r}_2 & \text{si } x \geq \lambda_2 t \end{cases} \quad (2.55)$$

$$= \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{si } x < \lambda_1 t, \\ \mathbf{w}_m & \text{si } \lambda_1 t \leq x < \lambda_2 t \\ \mathbf{w}_R & \text{si } x \geq \lambda_2 t \end{cases} \quad (2.56)$$

para un estado intermedio

$$\mathbf{w}_m = (\mathbf{l}_1 \mathbf{w}_L) \mathbf{r}_1 + (\mathbf{l}_2 \mathbf{w}_R) \mathbf{r}_2.$$

También podemos visualizar la solución en el espacio fase. Observemos que para cada par de estados \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R , la solución es

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{si } x < \lambda_1 t, \\ \mathbf{w}_m & \text{si } \lambda_1 t \leq x < \lambda_2 t \\ \mathbf{w}_R & \text{si } x \geq \lambda_2 t \end{cases}$$

Así, para un problema de Riemann (2.53) ($n = 2$) con estados iniciales arbitrarios \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R , la solución consiste de dos discontinuidades que viajan a velocidades λ_1 y λ_2 , con un nuevo estado constante intermedio \mathbf{w}_m .

Para un número de ecuaciones n obtenemos la solución

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{si } x < \lambda_1 t, \\ \mathbf{w}_j & \text{si } \lambda_j t \leq x < \lambda_{j+1} t, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ \mathbf{w}_R & \text{si } x \geq \lambda_n t, \end{cases} \quad (2.57)$$

donde los estados intermedios $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$ son dados por

$$\mathbf{w}_j = \sum_{k=1}^j (\mathbf{l}_k \mathbf{w}_R) \mathbf{r}_k + \sum_{k=j+1}^n (\mathbf{l}_k \mathbf{w}_L) \mathbf{r}_k \quad \text{para } \lambda_j < x/t < \lambda_{j+1}.$$

O también

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_L, & \text{si } -\infty < x < \lambda_1 t, \\ \mathbf{w}_1, & \text{si } \lambda_1 t < x < \lambda_2 t, \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{w}_{n-1} & \text{si } \lambda_{n-1} t < x < \lambda_n t, \\ \mathbf{w}_n = \mathbf{w}_R & \text{si } \lambda_n t < x < \infty, \end{cases} \quad (2.58)$$

lo cual muestra, en general, que la condición inicial se quiebra en n ondas de discontinuidad, las cuales se propagan con velocidades características $\lambda_j, 1 \leq j \leq n$.

Definición. Para sistemas de dos ecuaciones ($n = 2$), el *plano fase* es el plano $w_1 w_2$, donde $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$. Cada vector $\mathbf{w}(x, t)$ es representado por un punto en el plano.

El uso del plano fase es esclarecedor para entender como se conectan los estados \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R . Observemos que una discontinuidad con los estados izquierdo \mathbf{w}_L y derecho \mathbf{w}_R puede propagarse como una sola discontinuidad solo si $\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L$ es un vector propio de A , lo cual significa que el segmento de línea de \mathbf{w}_L a \mathbf{w}_R debe ser paralela al vector propio \mathbf{r}_1 o \mathbf{r}_2 . Entonces, el significado que se tiene para un estado intermedio \mathbf{w}_m es que este marca la intersección de la recta que pasa por \mathbf{w}_L paralela a \mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2) con la recta que pasa por \mathbf{w}_R paralela a \mathbf{r}_2 (\mathbf{r}_1).

Otra interpretación nos dice como puede ser alcanzado un estado a partir del otro. Esta visión será más útil para resolver el problema de Riemann para un sistema no lineal (2.104) y donde las rectas que conectan \mathbf{w}_L , \mathbf{w}_m y \mathbf{w}_R serán reemplazadas por curvas.

Definición. El conjunto de estados que pueden ser alcanzados a partir de un estado dado $\hat{\mathbf{w}}$ mediante una j -característica (k -onda elemental) elemental es llamado el **lugar geométrico de Hugoniot** de $\hat{\mathbf{w}}$, más adelante daremos una generalización directa para sistemas no lineales.

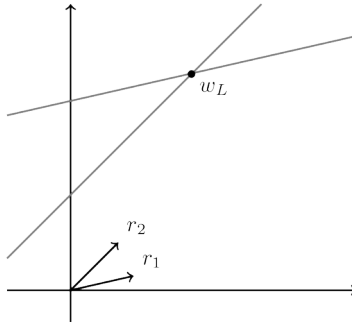


Figura 2.18: Lugar geométrico de Hugoniot del estado w_L que consiste de todos los estados que difieren de w_L por un múltiplo escalar de r_1 o r_2 . Figura tomada del libro [LeVeque(1992)].

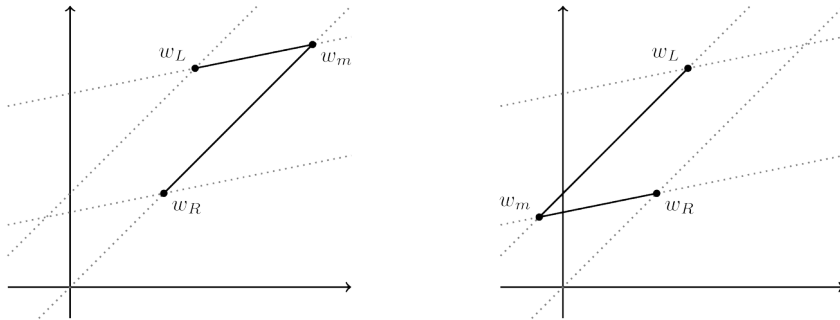


Figura 2.19: El nuevo estado w_m surge en la solución del problema de Riemann para dos elecciones de estados distintos w_L y w_R . Figura tomada del libro [LeVeque(1992)].

Nota que si intercambiamos w_R y w_L en esta imagen, la ubicación de w_m cambia, como se ilustra en (2.19), con lo que hay un lugar geométrico de Hugoniot para w_R y otro para w_L . Estas curvas son de nuevo en las direcciones r_1 y r_2 . Sin embargo, esto significa que tenemos dos formas de conectar los estados w_R y w_L o, dicho de otra forma, no tenemos unicidad en la solución. Por lo anterior, si $\lambda_1 < \lambda_2$ debe suceder el caso en el que viajamos de w_L a w_R yendo primero en dirección r_1 y luego en dirección r_2 pues el salto entre w_L y w_m debe viajar más lento que el salto entre w_m y w_R , análogamente si $\lambda_1 > \lambda_2$. De esta forma obtenemos una solución de un solo valor.

Para sistemas con más ecuaciones es posible la misma interpretación pero se vuelve más difícil de dibujar debido a que el espacio de fase ahora es n dimensional. Como los n vectores propios \mathbf{r}_j son linealmente independientes, podemos descomponer cualquier salto $\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L$ en la suma de saltos en estas direcciones, obteniendo un camino lineal por partes de \mathbf{w}_L a \mathbf{w}_R en un espacio n dimensional. También, notemos que el estado intermedio \mathbf{w}_k satisface

$$\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-1} = (\mathbf{l}_k \mathbf{w}_R - \mathbf{l}_k \mathbf{w}_L) \mathbf{r}_k$$

y por lo tanto

$$A(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-1}) = \lambda_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-1}),$$

con lo que, a través de la línea de discontinuidad $x = \lambda_m t$, la condición de salto de Rankine-Hugoniot (2.59) se satisface.

O bien, la solución para (2.53) puede ser entendida en el espacio fase como un camino desde $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_L$ a $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_R$ obtenido partiendo desde \mathbf{w}_{j-1} a \mathbf{w}_j sobre una recta paralela a \mathbf{r}_j para $j = 1, \dots, n$. Para el caso de sistemas no lineales, calcular los estados intermedios se puede lograr a través de invariantes de Riemann, pero su cálculo puede ser tedioso, ver 2.3.3.

Recordemos la suposición de que el sistema (2.53) es estrictamente hiperbólico, los valores propios son distintos, con el objetivo de simplificar la presentación. El resultado se puede extender fácilmente siempre que supongamos que la matriz A tiene n valores propios distintos y un sistema completo de vectores propios. Por ejemplo, si dos valores propios coinciden, $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n$, tenemos solo n estados constantes en la fórmula (2.58) y $n - 1$ ondas de discontinuidad. Entonces los estados intermedios corresponden a aquellos denotados como $\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$, y en las líneas que le siguen, el único cambio es en $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_L = (\mathbf{l}_1 \mathbf{w}_R - \mathbf{l}_1 \mathbf{w}_L) \mathbf{r}_1 + (\mathbf{l}_2 \mathbf{w}_R - \mathbf{l}_2 \mathbf{w}_L) \mathbf{r}_2$, y la condición de Rankine-Hugoniot aún se satisface. Algo parecido ocurre en sistemas no lineales, pero pueden surgir rarefacciones.

Propagación de Singularidades

Si consideramos el punto (\hat{x}, \hat{t}) para el cual los datos iniciales son suaves en el punto $x_0 = \hat{x} - \lambda_j \hat{t}$, $j = 1, 2, \dots, n$, entonces $\mathbf{v}(x - \lambda_j t, 0) = R^{-1} \mathbf{w}(x - \lambda_j t, 0)$ es también una función suave en cada uno de éstos puntos, y por lo tanto lo es $\mathbf{w}(x, t)$. Se sigue que cualquier singularidad en los datos iniciales solo puede propagarse a lo largo de características, justo como en el caso escalar. Más aún, datos iniciales suaves dan soluciones suaves.

La propagación de singularidades en sistemas lineales solo ocurre a lo largo de características. Para problemas no lineales este no es el caso, como ya hemos visto para ecuaciones

escalares no lineales. En su lugar, la condición de salto de Rankine-Hugoniot (2.59) debe ser satisfecha. Sin embargo, para discontinuidades muy “pequeñas” podemos relacionarlo con la teoría lineal. Supongamos que

$$\|\mathbf{w}_L - \mathbf{w}_R\| =: \epsilon \ll 1.$$

En este caso al expandir $\mathbf{f}(\mathbf{w}_L)$ alrededor de \mathbf{w}_R da

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}_L) = \mathbf{f}(\mathbf{w}_R) + \mathbf{f}'(\mathbf{w}_R)(\mathbf{w}_L - \mathbf{w}_R) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

lo que produce

$$\mathbf{f}'(\mathbf{w}_R)(\mathbf{w}_L - \mathbf{w}_R) = \mathbf{f}(\mathbf{w}_L) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_R) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

y al aplicar la condición de Rankine-Hugoniot tenemos que

$$\mathbf{f}'(\mathbf{w}_r)(\mathbf{w}_L - \mathbf{w}_R) = s(\mathbf{w}_L - \mathbf{w}_R) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

En el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, el vector normalizado $(\mathbf{w}_L - \mathbf{w}_R)/\epsilon$ debe aproximarse a un vector propio de $\mathbf{f}'(\mathbf{w}_R) = A(\mathbf{w}_R)$ con s aproximándose al correspondiente valor propio. Esta observación será muy útil al estudiar la estructura de soluciones no lineales más generales.

Problema de Riemann

En el problema de Riemann, vemos que para datos generales \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R la solución débil previamente construida no será la solución físicamente correcta si cualquiera de los choques resultantes viola la condición de entropía. En este caso necesitamos además usar ondas de rarefacción en nuestra construcción de la solución. Esto será hecho en el siguiente apartado.

2.3.2. Sistemas Hiperbólicos No Lineales

Para comenzar esta sección establezcamos, la siguiente definición

Definición. Sea $\mathbf{w} : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \Omega$ una función clase C^1 a trozos. Entonces, \mathbf{w} es una solución débil (2.46). en el sentido de distribuciones en $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ si y solo si se satisface que

1. \mathbf{w} es una solución clásica de (2.46) en los dominios donde \mathbf{w} es C^1 ;
2. \mathbf{w} satisface la condición de salto

$$[\mathbf{f}(\mathbf{w})] = s[\mathbf{w}] \quad (2.59)$$

a lo largo de las superficies de discontinuidad.

La relación de salto (2.59) es la ya conocida *condición de Rankine-Hugoniot* pero, en este caso, para sistemas hiperbólicos. Debemos notar que la (2.59) de hecho representa n ecuaciones

$$[\mathbf{f}_i(\mathbf{w})] = s[\mathbf{w}_i], \quad 1 \leq i \leq n$$

en la cual s siempre es la misma.

Consideremos por simplicidad el caso de una variable espacial, el sistema (2.46) es entonces

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (2.60)$$

donde para la i -ésima entrada de la función de flujo \mathbf{f}_i se tiene que

$$\partial_x (f_i(w_1(x, t), \dots, w_n(x, t))) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial x}.$$

Lo anterior nos hace definir la matriz $A(\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A(\mathbf{w}) := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial w_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial w_n} \end{pmatrix},$$

que es la matriz Jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{w})$, con lo que el sistema (2.60) se puede expresar como

$$\mathbf{w}_t + A(\mathbf{w}) \mathbf{w}_x = \mathbf{0}, \quad (2.61)$$

la cual es llamada forma cuasilineal o *no conservativa*.

Ahora, al igual que en el caso de sistemas lineales, daremos la definición de hiperbolicidad. Sin embargo, la definición cambia un poco debido a las matrices jacobianas de los flujos

Definición. (Hiperbolicidad) Se dice que el sistema (2.46) es hiperbólico en $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ si para cada vector unitario $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ no cero, la matriz

$$A(\mathbf{w}) := \sum_{j=1}^d A_j(\mathbf{w})\alpha_j \quad \text{donde } A_j(\mathbf{w}) = \frac{\partial \mathbf{f}^j}{\partial \mathbf{w}}$$

posee n valores propios reales

$$\lambda_1(\mathbf{w}) \leq \lambda_2(\mathbf{w}) \leq \dots \leq \lambda_n(\mathbf{w}). \quad (2.62)$$

Así, existen dos conjuntos de vectores propios laterales, uno derecho $\{\mathbf{r}_j\}_{j=1}^n$,

$$A(\mathbf{w})\mathbf{r}_j(\mathbf{w}) = \lambda_j(\mathbf{w})\mathbf{r}_j(\mathbf{w}), \quad (2.63)$$

y otro izquierdo $\{\mathbf{l}_j\}_{j=1}^n$,

$$\mathbf{l}_j(\mathbf{w})^T A(\mathbf{w}) = \lambda_j(\mathbf{w})\mathbf{l}_j(\mathbf{w})^T, \quad (2.64)$$

para $j = 1, \dots, n$.

Si, además, los valores propios son distintos a pares ($\lambda_i(\mathbf{w}) \neq \lambda_j(\mathbf{w})$ para $i \neq j$, con $i, j = 1, \dots, n$) o, equivalentemente, las desigualdades en la condición (2.62) son estrictas, entonces (2.46) es llamado *estrictamente hiperbólico* en \mathbf{w} .

Notemos que, a diferencia del caso lineal, los valores y vectores propios de la matriz $A(\mathbf{w})$ dependen del estado \mathbf{w} debido a que la misma matriz depende de \mathbf{w} por la no linealidad del sistema.

Para el desarrollo del trabajo supondremos siempre que el sistema es estrictamente hiperbólico a menos que se diga lo contrario. De hecho, en muchos de los resultados de las siguientes secciones se siguen satisfaciendo para un sistema hiperbólico siempre que los vectores propios sean completos y los valores propios tengan multiplicidad constante, consulte [Godlewski(2021)].

Notemos que si asumimos que \mathbf{f} es función de clase \mathcal{C}^n , obtenemos que λ_k , \mathbf{r}_k y \mathbf{l}_k son funciones de clase \mathcal{C}^{n-1} de \mathbf{w} (funciones de clase \mathcal{C}^1 al menos).

También, una definición que será fundamental en el estudio de éstos sistemas y que nos encontraremos en casi todas las fuentes relacionadas a sistemas de leyes de conservación es la siguiente

Definición. La pareja $(\lambda_k(\mathbf{w}), \mathbf{r}_k(\mathbf{w}))$ es llamado el *k-ésimo campo característico*.

Anteriormente, construimos una solución para el problema general de Riemann para un sistema hiperbólico lineal de leyes de conservación. Nuestra meta en las siguientes secciones es llevar a cabo una construcción similar para el problema de Riemann no lineal: encontrar una función $\mathbf{w} : (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ que sea solución de (2.46) y satisfaga la condición inicial

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{para } \mathbf{x} \in D \\ \mathbf{w}_R & \text{para } \mathbf{x} \in D^c \end{cases}$$

con $D \subseteq \mathbb{R}^d$ y una configuración dada de estados constantes $\mathbf{w}_L, \mathbf{w}_R : \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$.

En el caso lineal, la solución consiste de n ondas, que son discontinuidades viajando a las velocidades características del sistema lineal. En el caso no lineal nuestra experiencia con la ecuación escalar nos lleva a esperar más posibilidades. En particular, la solución físicamente relevante con viscosidad nula puede contener ondas de rarefacción así como discontinuidades. Primero ignoraremos la condición de entropía y nos preguntaremos una cuestión más simple ¿Es posible construir una solución débil del problema de Riemann que consista de solo n discontinuidades propagándose con velocidades constantes $s_1 < s_2 < \dots < s_n$? Veremos que la respuesta es afirmativa para saltos $\|\mathbf{w}_L - \mathbf{w}_R\|$ suficientemente pequeños.

El Lugar Geométrico de Hugoniot y Choques

Recordemos que si una discontinuidad se propaga con velocidad s tiene valores constantes $\widehat{\mathbf{w}}$ y $\widetilde{\mathbf{w}}$ a cada lado de la discontinuidad, entonces la condición de salto de Rankine-Hugoniot debe mantener que

$$\mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{w}}) - \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{w}}) = s(\widetilde{\mathbf{w}} - \widehat{\mathbf{w}}). \quad (2.65)$$

Ahora suponga que fijamos el punto $\widehat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^n$ e intentamos determinar el conjunto de todos los puntos $\widetilde{\mathbf{w}}$ que pueden ser conectados con $\widehat{\mathbf{w}}$ por una discontinuidad que satisfaga (2.65) para alguna s . Esto nos da un sistema de n ecuaciones con $n + 1$ incógnitas: las n componentes de $\widetilde{\mathbf{w}}$, y s . Esto nos lleva a esperar familias de soluciones de un solo parámetro.

Sabemos que en el caso lineal hay de hecho n tales familias para cualquier $\widehat{\mathbf{w}}$. En la k -ésima familia el salto $\widetilde{\mathbf{w}} - \widehat{\mathbf{w}}$ es un múltiplo escalar de \mathbf{r}_k , el k -ésimo vector propio de A .

Podemos parametrizar estas familias de soluciones usando éste múltiplo escalar, digamos ξ , y obtener las siguientes curvas solución

$$\tilde{\mathbf{w}}_k(\xi, \hat{\mathbf{w}}) = \hat{\mathbf{w}} + \xi \mathbf{r}_k \quad (2.66)$$

$$s_k(\xi, \hat{\mathbf{w}}) = \lambda_k \quad (2.67)$$

para $k = 1, 2, \dots, n$. Tenga en cuenta que $\tilde{\mathbf{w}}_k(0, \hat{\mathbf{w}}) = \hat{\mathbf{w}}$ para cada k y así a través del punto $\hat{\mathbf{w}}$ en el espacio de fase hay n curvas (líneas rectas de hecho) de posibles soluciones. Esto es ilustrado en la figura 2.19 para el caso $n = 2$. Las dos rectas que pasan por cada punto son los estados que pueden ser conectados por una discontinuidad con salto proporcional a \mathbf{r}_1 o \mathbf{r}_2 .

En el caso no lineal además se obtienen n curvas por cualquier punto $\hat{\mathbf{w}}$, una por cada familia característica. Parametrizamos de nuevo estas curvas por $\tilde{\mathbf{w}}_k(\xi, \hat{\mathbf{w}})$ con $\tilde{\mathbf{w}}_k(0, \hat{\mathbf{w}}) = \hat{\mathbf{w}}$ y denotemos como $s_k(\xi, \hat{\mathbf{w}})$ a la velocidad correspondiente. Para simplificar notación, escribiremos esto como simplemente $\tilde{\mathbf{w}}_k(\xi)$, $s_k(\xi)$ cuando el punto $\hat{\mathbf{w}}$ se entienda claramente.

La condición de Rankine-Hugoniot implica que

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{w}}_k(\xi)) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{w}}) = s_k(\xi)(\tilde{\mathbf{w}}_k(\xi) - \hat{\mathbf{w}}). \quad (2.68)$$

Diferenciando esta expresión con respecto de ξ y evaluando $\xi = 0$ tenemos

$$\mathbf{f}'(\hat{\mathbf{w}})\tilde{\mathbf{w}}_k'(0) = s_k(0)\tilde{\mathbf{w}}_k'(0) \quad (2.69)$$

de modo que $\tilde{\mathbf{w}}_k'(0)$ debe ser un múltiplo escalar del vector propio $\mathbf{r}_k(\hat{u})$ de $\mathbf{f}'(\hat{\mathbf{w}})$, mientras que $s_k(0) = \lambda_k(\hat{u})$. La curva $\tilde{w}_k(\xi)$ es entonces tangente a $\mathbf{r}_k(\hat{u})$ en el punto \hat{w} . Para un sistema de $n = 2$ ecuaciones, esto es fácilmente ilustrado en el plano fase.

Para flujos f suaves, se puede mostrar usando el teorema de la función implícita que estas curvas solución existen localmente en una vecindad de $\hat{\mathbf{w}}$, y que las funciones $\tilde{\mathbf{w}}_k$ y s_k son suaves, consulta [Lax(1972)] y [Smoller(1983)] para detalles. Estas curvas son llamadas *curvas de Hugoniot*. El conjunto de todos los puntos en estas curvas es con frecuencia llamado el **lugar geométrico de Hugoniot** para el punto $\hat{\mathbf{w}}$. Si $\tilde{\mathbf{w}}_k$ se encuentra en la k -ésima curva de Hugoniot a través de $\hat{\mathbf{w}}$, entonces decimos que $\hat{\mathbf{w}}$ y $\tilde{\mathbf{w}}_k$ están conectados por un *k-choque*.

Al definir el lugar geométrico de Hugoniot, ignoramos la cuestión de si una discontinuidad es físicamente relevante. Esto es, el estado $\tilde{\mathbf{w}}$ está en el lugar geométrico de Hugoniot de $\hat{\mathbf{w}}$ si el salto satisface la condición de Rankine-Hugoniot, sin importar si este salto pueda existir en una solución con viscosidad nula. Daremos ahora una condición de entropía

que pueda ser aplicada directamente a una solución débil para determinar si el salto se puede permitir. Para ello introducimos

Definición. El k -ésimo campo característico se dice que es *genuinamente no lineal* si

$$\nabla \lambda_k(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{w}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \Omega. \quad (2.70)$$

El k -ésimo campo característico se dice que es *linealmente degenerado* si

$$\nabla \lambda_k(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{w}) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \Omega. \quad (2.71)$$

En (2.70) y (2.71), $\nabla \lambda_k(\mathbf{w})$ denota al gradiente de $\lambda_k(\mathbf{w})$.

En el caso escalar convexo, la condición más simple es que las características deben “ir en dirección” hacia el choque conforme avanza el tiempo, lo que da como resultado el requisito $f'(\mathbf{w}_L) > s > f'(\mathbf{w}_R)$.

Peter Lax propuso la generalización de esta condición de entropía a sistemas de ecuaciones que cumplan con (2.70), consulte [Lax(1957)], pues implica que $\lambda_k(\mathbf{w})$ es estrictamente monótona cuando \mathbf{w} varia a lo largo de una curva integral del campo vectorial $\mathbf{r}_k(\mathbf{w})$. Describiremos éstas curvas integrales en la próxima sección. También veremos que a través de una onda de rarefacción, \mathbf{w} varia a lo largo de una curva integral.

Para un campo genuinamente no lineal, la condición de entropía de Lax dice que un salto en el k -ésimo campo (de \mathbf{w}_L a \mathbf{w}_R , por ejemplo) es admisible solo si

$$\lambda_k(\mathbf{w}_L) > s > \lambda_k(\mathbf{w}_R) \quad (2.72)$$

donde s es la velocidad de choque. Las características en la k -ésima familia desaparecen en el choque a medida que avanza el tiempo, al igual que en el caso escalar.

La definición (2.71) es necesaria ya que un sistema lineal viola condición (2.70) debido a que $\lambda_k(\mathbf{w})$ es constante y entonces $\nabla \lambda_k \equiv 0$. De hecho, la definición de degeneración lineal es más amplia pues considera a un campo característico de un sistema no lineal donde su valor propio $\lambda_k(\mathbf{w})$ es constante. Por supuesto, el valor de $\lambda_k(\mathbf{w})$ puede variar de una curva integral a la siguiente.

Ejemplo. Consideremos el caso $n = 1$, esto es (2.60) es una ecuación escalar. Entonces, tenemos

$$\lambda(w) = f'(w),$$

la cual denotaremos por $a(w)$. Así, estamos en el caso genuinamente no lineal si y solo si $a(w)$ no se anula, i.e. como ya se mencionó, si y solo si es una función estrictamente

cóncava o estrictamente convexa. Por otro lado, estamos en el caso linealmente degenerado si y solo si $a(w) = a$ no depende de w , lo cual corresponde al caso de una ecuación hiperbólica lineal.

Más adelante veremos que el modelo de aguas someras, derivado de la ecuaciones de Euler no viscosas, tiene la propiedad de que dos de sus campos son genuinamente no lineales mientras que el tercero es linealmente degenerado.

Definición. Una discontinuidad en un campo linealmente degenerado es llamada *discontinuidad de contacto*.

Este nombre proviene de nuevo de dinámica de gases. En un problema de choque en un tubo, el gas inicialmente en un lado de la membrana nunca se mezcla con el gas del otro lado (ecuaciones de Euler no viscosas). Conforme el tiempo avanza estos dos gases permanecen en contacto a lo largo de un rayo en el plano $x - t$ a lo largo del cual, en general, hay un salto en la densidad. Esta es la discontinuidad de contacto.

Para sistemas generales, si la k -ésima familia es linealmente degenerada y \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R están conectados por una discontinuidad en este campo, entonces se puede mostrar que \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R pertenecen a la misma curva integral de \mathbf{r}_k , de modo que $\lambda_k(\mathbf{w}_L) = \lambda_k(\mathbf{w}_R)$. Más aún, la velocidad de propagación s es igual a $\lambda_k(\mathbf{w}_L)$. En consecuencia, las k -ésima características son paralelas a la discontinuidad que se propaga en cada lado, como en el caso de un sistema lineal. Discontinuidades de contacto pueden ocurrir en soluciones con viscosidad que se desvanece, por lo que para sistemas con campos genuinamente no lineales y campos linealmente degenerados, debemos modificar la condición de entropía (2.72) a

$$\lambda_k(\mathbf{w}_L) \geq s \geq \lambda_k(\mathbf{w}_R). \quad (2.73)$$

Nota. Las nociones de campos característicos genuinamente no lineales o linealmente degenerados no dependen de la forma conservativa o no conservativa del sistema hiperbólico no lineal (2.60). Véase [Godlewski(2021)]. De hecho, en muchas aplicaciones puede resultar más sencillo trabajar con la forma no conservativa (2.61).

Si el k -ésimo campo característico es genuinamente no lineal (2.70), es conveniente normalizar los vectores propios por la derecha e izquierda \mathbf{r}_k y \mathbf{l}_k^T , respectivamente, de tal forma que

$$\begin{cases} \nabla \lambda_k(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{w}) = 1, \\ \mathbf{l}_k(\mathbf{w})^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{w}) = 1. \end{cases} \quad (2.74)$$

Similarmente, si el k -ésimo campo característico es linealmente degenerado (2.71) se normalizan los vectores $\mathbf{r}_k(\mathbf{w})$ y $\mathbf{l}_k(\mathbf{w})$ de tal forma que

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{w})^T \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{w}) = 1.$$

2.3.3. Ondas Simples e Invariantes de Riemann

Curvas Integrales

Una curva integral para $\mathbf{r}_k(\mathbf{w})$ es una curva que tiene la propiedad que la tangente a la curva en cualquier punto \mathbf{w} se encuentra en la dirección $\mathbf{r}_k(\mathbf{w})$. La existencia de curvas suaves de esta forma se deriva de la suavidad de \mathbf{f} y de la hiperbolicidad estricta, ya que $\mathbf{r}_k(\mathbf{w})$ es entonces una función suave de \mathbf{w} . Si $\mathbf{w}_k(\xi)$ es una parametrización (para $\xi \in \mathbb{R}$) de una curva integral en la k -ésima familia, entonces el vector tangente es proporcional a $\mathbf{r}_k(\mathbf{w}_k(\xi))$ en cada punto, esto es,

$$\mathbf{w}'_k(\xi) = \alpha(\xi)\mathbf{r}_k(\mathbf{w}_k(\xi)) \quad (2.75)$$

donde $\alpha(\xi)$ es un factor escalar.

Ondas de Rarefacción

Sean \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R dos estados de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, en esta sección estamos buscando funciones $\mathbf{w} : (x, t) \rightarrow \mathbf{w}(x, t)$ que sean continuas y suaves a trozos, soluciones de (2.60) que conectan \mathbf{w}_L , y \mathbf{w}_R

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w})}{\partial x} = 0, \\ \mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{w}_R, & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.76)$$

Primero, nos restringiremos a soluciones *autosimilares*, soluciones de la forma

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{v} \left(\frac{x}{t} \right), \quad (2.77)$$

debido a que cada solución de problemas de Riemann considerados anteriormente tienen la siguiente propiedad: la solución es constante a lo largo de todos los rayos de la forma $x = \xi t$.

Comenzamos considerando soluciones autosimilares clásicas de (2.76), las cuales satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + A(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{0}$$

en el sentido clásico. Al sustituir \mathbf{v} se tiene

$$-\left(\frac{x}{t^2}\right) \mathbf{v}'\left(\frac{x}{t}\right) + \left(\frac{1}{t}\right) A\left(\mathbf{v}\left(\frac{x}{t}\right)\right) \mathbf{v}'\left(\frac{x}{t}\right) = \mathbf{0},$$

al establecer $\xi = \frac{x}{t}$ obtenemos que $(A(\mathbf{v}(\xi)) - \xi \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}'(\xi) = \mathbf{0}$. Así que tenemos dos casos, u obtenemos que

$$\mathbf{v}'(\xi) = \mathbf{0} \tag{2.78}$$

o existe un índice $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\mathbf{v}'(\xi) = \alpha(\xi) \mathbf{r}_k(\mathbf{v}(\xi)), \quad \lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) = \xi.$$

Si $\mathbf{v}'(\xi)$ no es cero en un intervalo, y como los valores propios son distintos, el índice k no depende de ξ en ese intervalo. Si diferenciamos la segunda ecuación con respecto a ξ , obtenemos

$$\nabla \lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) \cdot \mathbf{v}'(\xi) = 1,$$

y usando la primer ecuación

$$\alpha(\xi) \nabla \lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{v}(\xi)) = 1. \tag{2.79}$$

Por un lado, la condición (2.78) implica que cualquier solución constante es una solución de similaridad de una ley de conservación. Por otro, la ecuación (2.79) no puede ser resuelta si el k -ésimo campo característico es linealmente degenerado. Pero si el k -ésimo campo es genuinamente no lineal obtenemos, con la normalización (2.74), que $\alpha = 1$.

En resumen, encontramos que $\mathbf{v}'(\xi) = \mathbf{0}$ o que

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(\xi) = \mathbf{r}_k(\mathbf{v}(\xi)), \\ \lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) = \xi, \end{cases} \tag{2.80}$$

y \mathbf{v} es por tanto una curva integral del campo \mathbf{r}_k . Entonces, supongamos que el k -ésimo campo característico es genuinamente no lineal y que la función \mathbf{v} es una solución de (2.79) con

$$\mathbf{v}(\lambda_k(\mathbf{w}_L)) = \mathbf{w}_L, \quad \mathbf{v}(\lambda_k(\mathbf{w}_R)) = \mathbf{w}_R$$

Lo anterior presupone que \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R están en la misma curva integral de \mathbf{r}_k y que λ_k aumenta de \mathbf{w}_L a \mathbf{w}_R a lo largo de la curva. Entonces, se sigue del análisis anterior que la función

$$\begin{cases} \mathbf{w}_L, & \text{si } \frac{x}{t} \leq \lambda_k(\mathbf{w}_L). \\ \mathbf{v}\left(\frac{x}{t}\right), & \text{si } \lambda_k(\mathbf{w}_L) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_k(\mathbf{w}_R), \\ \mathbf{w}_R, & \frac{x}{t} \geq \lambda_k(\mathbf{w}_R) \end{cases} \quad (2.81)$$

es una solución débil continua autosimilar de (2.60). Con ello

Definición. La solución débil autosimilar (2.81) de (2.60) se denomina *k-ésima onda (centrada) simple* u *k-ésima onda de rarefacción* que conecta los estados \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R .

Veremos en la siguiente sección que las líneas rectas que forman el abanico de rarefacción en la figura 2.20 son las curvas características del k -ésimo campo. Concerniente a la existencia de ondas k -simples que conectan dos estados, tenemos el siguiente resultado local

Teorema 12. *Supongamos que el k -ésimo campo característico es genuinamente no lineal con la normalización (2.74). Dado un estado $\mathbf{w}_L \in \Omega$, existe una curva $\mathcal{R}_k(\mathbf{w}_L)$ de estados de Ω que pueden ser conectados a \mathbf{w}_L por la derecha por una onda k -simple. Más aún, para toda k , existe una parametrización de $\mathcal{R}_k(\mathbf{w}_L) : \varepsilon \rightarrow \Phi_k(\varepsilon)$ definida para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, con ε_0 lo suficientemente pequeña, tal que*

$$\Phi_k(\varepsilon) = \mathbf{w}_L + \varepsilon \mathbf{r}_k(\mathbf{w}_L) + \frac{\varepsilon^2}{2} D\mathbf{r}_k(\mathbf{w}_L) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{w}_L) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (2.82)$$

Demostración. Sea $\mathbf{v} : \xi \mapsto \mathbf{v}(\xi)$ la solución del sistema diferencial

$$\mathbf{v}'(\xi) = \mathbf{r}_k(\mathbf{v}(\xi)), \quad \xi > \lambda_k(\mathbf{w}_L), \quad (2.83)$$

$$\mathbf{v}(\lambda_k(\mathbf{w}_L)) = \mathbf{w}_L. \quad (2.84)$$

La función \mathbf{v} existe para $\lambda_k(\mathbf{w}_L) \leq \xi \leq \lambda_k(\mathbf{w}_L) + \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño. Usando (2.83), tenemos

$$\frac{d}{d\xi} \lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) = \nabla \lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) \cdot \mathbf{v}'(\xi) = \nabla \lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{v}(\xi))$$

y por (2.74)

$$\frac{d}{d\xi} \lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) = 1.$$

Entonces, \mathbf{v} satisface

$$\lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) - \lambda_k(\mathbf{v}(\lambda_k(\mathbf{w}_L))) = \xi - \lambda_k(\mathbf{w}_L)$$

por (2.84)

$$\lambda_k(\mathbf{v}(\xi)) = \xi.$$

Por lo tanto, la función \mathbf{v} es de hecho la solución de (2.80) para la cual se cumple (2.84).

□

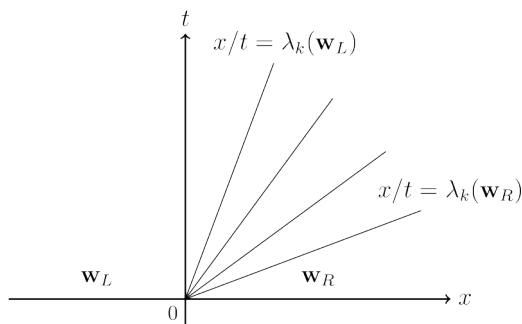


Figura 2.20: Abanico de rarefacción. Figura tomada del libro [LeVeque(1992)].

La curva $\mathcal{R}_k(\mathbf{w}_L)$ es llamada *curva k-ésima de rarefacción*, o simplemente *curva k-rarefacción*. La cual es una curva integral de \mathbf{r}_k , por lo cual es tangente a $\mathbf{r}_k(\mathbf{w}_L)$ en el punto \mathbf{w}_L .

Para continuar con nuestro estudio de curvas elementales asociadas con una familia característica específica, introduzcamos los invariantes de Riemann.

Invariantes de Riemann

Definición. Una función suave $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *k-invariante de Riemann* si satisface

$$\nabla z(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{w}) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \Omega. \quad (2.85)$$

Un k-invariante de Riemann z es constante en una curva $\mathbf{v} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{v}(\xi) \in \mathbb{R}^n$ si y solo si

$$\frac{d}{d\xi} z(\mathbf{v}(\xi)) = \nabla z(\mathbf{v}(\xi)) \cdot \mathbf{v}'(\xi) = 0,$$

lo cual se satisface si \mathbf{v} es una curva integral de \mathbf{r}_k

$$\mathbf{v}'(\xi) = \mathbf{r}_k(\mathbf{v}(\xi)). \quad (2.86)$$

Esto significa que un k -invariante de Riemann es constante a lo largo de las trayectorias del campo vectorial \mathbf{r}_k . Notemos que (2.85) es una ecuación diferencial lineal de primer orden en \mathbb{R}^n . Usualmente puede ser integrado explícitamente, como ya veremos.

Observemos que cuando el k -ésimo campo es linealmente degenerado, el valor propio λ_k es un k -invariante de Riemann, ve (2.71). También, tenemos la siguiente propiedad útil y simple de los invariantes de Riemann.

Teorema 13. *En una k -onda de rarefacción, todos los k -invariantes de Riemann son constantes.*

Demostración. Sea \mathbf{w} una k -onda de rarefacción de la forma (2.81), y sea z un k -invariante de Riemann. La función $z(\mathbf{w}) : (x, t) \mapsto z(\mathbf{w}(x, t))$ es continua para $t > 0$. Primero, $z(\mathbf{w})$ es constante para $\frac{x}{t} \leq \lambda_k(\mathbf{w}_L)$ y $\frac{x}{t} \geq \lambda_k(\mathbf{w}_R)$. Luego, para $\lambda_k(\mathbf{w}_L) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_k(\mathbf{w}_R)$, \mathbf{w} es una curva integral de \mathbf{r}_k , lo cual prueba el resultado. \square

Más generalmente, definamos una clase más amplia de k -ondas suaves.

Definición. Una solución suave $\mathbf{w}(x, t)$ de (2.60) definido en un dominio D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ es llamada una k -onda simple si $z(\mathbf{w}(x, t))$ es constante en D para cualquier k -invariante de Riemann z .

Teorema 14. *Sea \mathbf{w} una k -onda simple. Entonces, las características del k -ésimo campo son líneas rectas a lo largo de las cuales \mathbf{w} es constante.*

Podemos determinar algunas de las k -ondas simples cuando el k -ésimo campo es o genuinamente no lineal o linealmente degenerado.

2.3.4. Ondas de Choque y Discontinuidades de Contacto

Dados dos estados \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R en Ω , estamos buscando soluciones discontinuas constantes a trozos de (2.60) que conecten a \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R . Recordemos que a lo largo de la línea de discontinuidad $x = \xi(t)$ de la solución débil \mathbf{w} de (2.60), \mathbf{w} satisface las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot

$$\sigma[\mathbf{w}] = [\mathbf{f}(\mathbf{w})], \quad (2.87)$$

donde $\sigma = \xi'(t)$ es la velocidad de propagación de la discontinuidad. Por lo tanto, la función

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & \text{si } x < \sigma t \\ \mathbf{w}_R, & \text{si } x > \sigma t \end{cases} \quad (2.88)$$

es una solución débil de (2.60) siempre que el número real σ satisfaga la condición de Rankine-Hugoniot

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}_R) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_L) = \sigma (\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L). \quad (2.89)$$

Tal solución (2.88) del sistema hiperbólico no lineal (2.60) es llamada una *onda de discontinuidad*. Dado un estado $\mathbf{w}_L \in \Omega$, queremos determinar todos los estados $\mathbf{w}_R \in \Omega$ a los cuales se puede conectar \mathbf{w}_L por la derecha por una onda de discontinuidad. Entonces, introducimos la siguiente definición.

Definición. El conjunto de Rankine-Hugoniot de \mathbf{w}_0 es el conjunto de todos los estados $\mathbf{w} \in \Omega$ tales que existe $\sigma(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}$ con

$$\sigma(\mathbf{w}_0, \mathbf{w})(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{w}) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_0). \quad (2.90)$$

La estructura del conjunto de Rankine-Hugoniot de \mathbf{w}_0 es dado por el siguiente teorema

Teorema 15. *Sea \mathbf{w}_0 un estado en Ω . El conjunto de Rankine-Hugoniot de \mathbf{w}_0 esta localmente hecho de d curvas suaves $\mathcal{S}_k(\mathbf{w}_0)$, $1 \leq k \leq d$. Más aún, para toda k , existe una parametrización de $\mathcal{S}_k(\mathbf{w}_0) : \varepsilon \rightarrow \Psi_k(\varepsilon)$ definida para $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, con ε_1 lo suficientemente pequeña, tal que*

$$\Psi_k(\varepsilon) = \mathbf{w}_0 + \varepsilon \mathbf{r}_k(\mathbf{w}_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} D\mathbf{r}_k(\mathbf{w}_0) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{w}_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (2.91)$$

y

$$\sigma(\mathbf{w}_0, \Psi_k(\varepsilon)) = \lambda_k(\mathbf{w}_0) + \frac{\varepsilon}{2} D\lambda_k(\mathbf{w}_0) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{w}_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (2.92)$$

Para una demostración consulte [Godlewski(2021)].

Consideremos el caso donde el k -ésimo campo característico es *genuinamente no lineal*. La curva $\mathcal{S}_k(\mathbf{w}_0)$ es llamada una *curva de k -choque*.

Si \mathbf{w}_R pertenece a la curva de k -choque $\mathcal{S}_k(\mathbf{w}_L)$, o equivalentemente en este punto si \mathbf{w}_L pertenece a la curva de k -choque $\mathcal{S}_k(\mathbf{w}_R)$, una solución débil de (2.60) de la forma

(2.88), (2.89) es llamada una onda de k-choque. Veremos en la siguiente sección que no todos los estados \mathbf{w} de la curva de k-choque $\mathcal{S}_k(\mathbf{w}_0)$ son admisibles sino solo aquellos que corresponden a $\varepsilon < 0$ (por la normalización (2.74)).

De forma similar, establecemos el siguiente resultado para el caso donde el k-ésimo campo característico es linealmente degenerado.

Teorema 16. *Si el k-ésimo campo característico es linealmente degenerado, la curva $\mathcal{S}_k(\mathbf{w}_0)$ dada por el teorema 15 es una curva integral del campo vectorial \mathbf{r}_k , y tenemos que*

$$\sigma(\mathbf{w}_0, \Psi_k(\varepsilon)) = \lambda_k(\Psi_k(\varepsilon)) = \lambda_k(\mathbf{w}_0). \quad (2.93)$$

Más aún, tenemos que para cualquier invariante k-Riemann z

$$z(\Psi_k(\varepsilon)) = z(\mathbf{w}_0). \quad (2.94)$$

Así, asumamos que el k-ésimo campo característico es linealmente degenerado y que $\mathbf{w}_R \in \mathcal{S}_k(\mathbf{w}_L)$ o, equivalentemente, $\mathbf{w}_L \in \mathcal{S}_k(\mathbf{w}_R)$. Entonces, una solución débil \mathbf{w} de (2.60) de la forma (2.88), (2.89), donde

$$\sigma = \lambda_k(\mathbf{w}_L) = \lambda_k(\mathbf{w}_R) = \overline{\lambda}_k$$

esto es,

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & \text{para } x < \overline{\lambda}_k t, \\ \mathbf{w}_R, & \text{para } x > \overline{\lambda}_k t, \end{cases} \quad (2.95)$$

es llamada un *discontinuidad k-contacto*, vea 2.21.

Nota. Es de destacar que la función (2.95) es el límite de ondas (no centradas) k-simples. De hecho, sea φ_0^ε , con $\varepsilon > 0$, una función creciente suave tal que

$$\varphi_0^\varepsilon = \begin{cases} \xi_0, & \text{para } x \leq 0, \\ \xi_R, & \text{para } x > \varepsilon, \end{cases}$$

donde la solución de

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(\xi) = \mathbf{r}_k(\mathbf{v}(\xi)) \\ \mathbf{v}(\xi_0) = \mathbf{v}_0. \end{cases} \quad (2.96)$$

con $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_L$ satisface $\mathbf{v}(\xi_R) = \mathbf{w}_R$. La correspondiente onda k-simple es tal que

$$\mathbf{w}^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & \text{si } x \leq \overline{\lambda}_k t, \\ \mathbf{w}_R, & \text{si } x > \overline{\lambda}_k t + \varepsilon \end{cases}$$

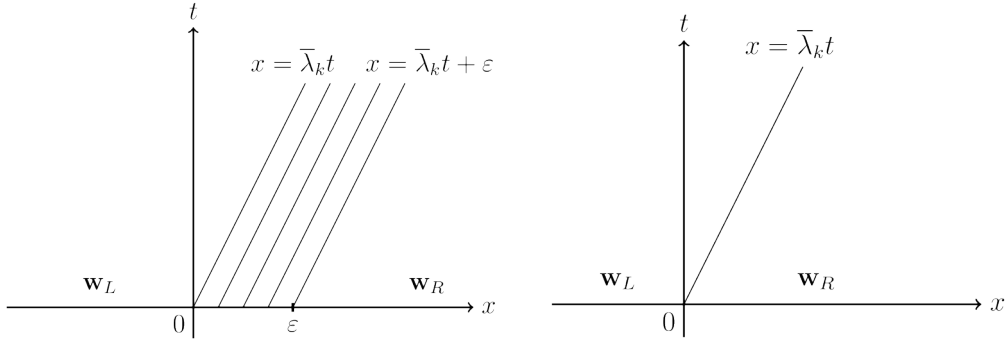


Figura 2.21: Discontinuidad de Contacto. Figura tomada del libro [LeVeque(1992)].

y por lo tanto se aproxima a (2.95) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Notemos que las características de la onda k -simple son líneas paralelas $x = \bar{\lambda}_k t + C$, con C constante. \square

2.3.5. Curvas Características y Condiciones de Entropía

Supongamos que \mathbf{w} es una solución clásica del sistema (2.60) en un dominio D tal que

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \text{en } D$$

o equivalentemente, por (2.64),

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{w})^T \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \lambda_k(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) = 0, \quad 1 \leq k \leq d. \quad (2.97)$$

Cada ecuación (2.97) involucra diferenciación en solo una dirección. Introduciendo las curvas características C_k como las curvas integrales del sistema diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_k(\mathbf{w}(x, t)), \quad (2.98)$$

y denotando por $s_k \rightarrow (x(s_k), t(s_k))$ a una representación paramétrica de C_k , cada ecuación (2.97) se convierte en

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{w})^T \frac{d\mathbf{w}}{ds_k} = 0, \quad 1 \leq k \leq d.$$

Las ecuaciones (2.97) son llamadas *ecuaciones características*. Tenemos el siguiente resultado

Teorema 17. *Supongamos que \mathbf{w} es una onda de k -rarefacción en un dominio D . Entonces las curvas características C_k son líneas rectas a lo largo de las cuales \mathbf{w} es constante.*

Demostración. Daremos una prueba directa. Sean $z_j, 1 \leq j \leq d-1$, $d-1$ k -invariantes de Riemann, con derivadas ∇z_j linealmente independientes en D . Por el teorema 13, $z_j(\mathbf{w})$ es constante en D y tenemos que

$$\nabla z_j(\mathbf{w})^T \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) = \frac{d}{ds_k} z_j(\mathbf{w}) = 0.$$

Junto con (2.97), esto da

$$\mathbf{N}_k(\mathbf{w}) \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{N}_k(\mathbf{w})$ es la matriz $d \times d$

$$\mathbf{N}_k(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \nabla z_1(\mathbf{w})^T \\ \vdots \\ \nabla z_{d-1}(\mathbf{w})^T \\ \mathbf{l}_k(\mathbf{w})^T \end{pmatrix}.$$

Ya que $\nabla z_j(\mathbf{w})^T \mathbf{r}_k(\mathbf{w}) = 0, 1 \leq j \leq d-1$, y $\mathbf{l}_k(\mathbf{w})^T \mathbf{r}_k(\mathbf{w}) = 1$, la matriz $\mathbf{N}_k(\mathbf{w})$ no es singular por lo que en D

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0.$$

Así, \mathbf{w} es constante a lo largo de cada C_k característica, y C_k es además una línea recta. □

Las Condiciones de Entropía de Lax

Consideramos una vez más el problema de determinar todos los estados $\mathbf{w}_R \in \Omega$ que pueden ser conectados a un estado dado $\mathbf{w}_L \in \Omega$. Ya hemos notado en el caso escalar que no era admisible ninguna discontinuidad de choque. En el caso de los sistemas, queremos mostrar cómo argumentos heurísticos basados en características nos llevan a excluir una parte de la curva de k -choque $\mathcal{S}_k(\mathbf{w}_L)$.

Observemos primero que en las regiones de suavidad de una solución débil \mathbf{w} de (2.60), las curvas características propagan la información de los datos de la frontera. En particular, si Σ es una curva $x = \xi(t)$ en el plano (x, t) con $\sigma = \xi'(t)$ y si

$$\lambda_1(\mathbf{w}) < \cdots < \lambda_k(\mathbf{w}) < \sigma < \lambda_{k+1}(\mathbf{w}) < \cdots < \lambda_d(\mathbf{w}) \text{ en } \Sigma$$

vea la figura 2.22, necesitamos dar $(d - k)$ condiciones de contorno en Σ (respectivamente k condiciones de frontera Σ) para especificar la solución \mathbf{w} en la región $\{(x, t), x > \sigma t\}$ (respectivamente $x \leq \sigma t$).

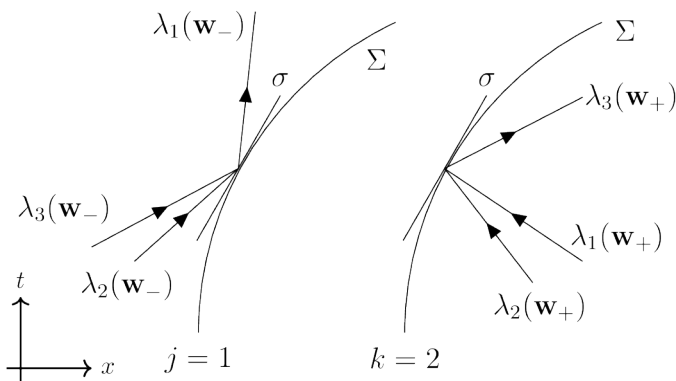


Figura 2.22: Características y curva de discontinuidad. Figura tomada del libro [LeVeque(1992)].

Ahora, si una solución débil clase \mathcal{C}^1 a trozos \mathbf{w} de (2.60) es discontinua a lo largo de curva Σ y satisface

$$\lambda_k(\mathbf{w}_+) < \sigma < \lambda_{k+1}(\mathbf{w}_+), \quad (2.99)$$

necesitamos especificar $(d - k)$ condiciones en la frontera derecha de la discontinuidad. Similarmente, si

$$\lambda_j(\mathbf{w}_-) < \sigma < \lambda_{j+1}(\mathbf{w}_-), \quad (2.100)$$

necesitamos dar j condiciones en la frontera izquierda de la discontinuidad, lo que produce un total de $d - k + j$ condiciones. Por el otro lado, eliminar α de las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot

$$\sigma(\mathbf{w}_+ - \mathbf{w}_-) = \mathbf{f}(\mathbf{w}_+) - \mathbf{f}(\mathbf{w}_-)$$

nos provee de $(d - 1)$ relaciones entre \mathbf{w}_+ y \mathbf{w}_- . Por lo tanto, suponiendo que (2.99) se cumple, parece natural exigir que (2.100) se cumpla con $j = k - 1$.

Si \mathbf{w} satisface que $\lambda_k(\mathbf{w}_+) = \sigma$, el mismo argumento requiere que $\lambda_k(\mathbf{w}_-) = \sigma$. Entonces, introducimos la siguiente definición

Definición. Diremos que la discontinuidad satisface las condiciones de entropía de Lax si existe un índice $k \in 1, 2, \dots, d$ tal que

$$\begin{cases} \lambda_k(\mathbf{w}_+) < \sigma < \lambda_{k+1}(\mathbf{w}_+), \\ \lambda_{k-1}(\mathbf{w}_+) < \sigma < \lambda_k(\mathbf{w}_-) \end{cases} \quad (2.101)$$

si el k -ésimo campo característico es genuinamente no lineal, o que

$$\lambda_k(\mathbf{w}_-) = \sigma = \lambda_k(\mathbf{w}_+) \quad (2.102)$$

si el k -ésimo campo característico es linealmente degenerado.

Entonces, usando la parametrización del teorema 15, definimos $\mathcal{S}_k^a(\mathbf{w}_L)$ como el conjunto de estados $\Psi_k(\varepsilon) \in \mathcal{S}_k(\mathbf{w}_L)$ que puede ser conectado a \mathbf{w}_L (por la derecha de \mathbf{w}_L) por una onda de k -discontinuidad que satisface las condiciones de entropía de Lax.

Teorema 18. *Si el k -ésimo campo característico es genuinamente no lineal, la curva $\mathcal{S}_k^a(\mathbf{w}_L)$ consiste de los estados $\Psi_k(\varepsilon) \in \mathcal{S}_k(\mathbf{w}_L)$ que satisfacen*

$$\varepsilon \leq 0, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_1 \quad (2.103)$$

donde ε_1 es lo suficientemente pequeña, (para la normalización (2.74)).

2.3.6. Solución General del Problema de Riemann

Ahora somos capaces de resolver el problema de Riemann para el sistema (2.60)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L, & x < 0 \\ \mathbf{w}_R, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.104)$$

cuando los datos \mathbf{w}_L y \mathbf{w}_R son suficientemente cercanos ($\mathbf{w}_L - \mathbf{w}_R$ es “pequeño”). Para hacerlo, comenzaremos por resumir algunos de los resultados de los apartados anteriores. Supongamos primero que el k -ésimo campo característico es genuinamente no lineal y normalizado por (2.74). Se sigue de los teoremas 12 y 15 que las curvas de rarefacción y choque $\mathcal{R}_k(\mathbf{w}_L)$ y $\mathcal{S}_k(\mathbf{w}_L)$ son osculatorias en $\varepsilon = 0$. Por lo que, la función $\chi_k : (\varepsilon, \mathbf{w}_L) \mapsto \chi_k(\varepsilon; \mathbf{w}_L)$ definida, para $|\varepsilon|$ lo suficientemente pequeña, como

$$\chi_k(\varepsilon, \mathbf{w}_L) = \begin{cases} \Phi_k(\varepsilon), & \text{si } \varepsilon \geq 0, \\ \Psi_k(\varepsilon), & \text{si } \varepsilon \leq 0 \end{cases} \quad (2.105)$$

es de clase C^2 . Más aún, usando los teoremas 12 y 18, obtenemos que el conjunto

$$\{\chi_k(\varepsilon, \mathbf{w}_L) : |\varepsilon| \text{ es lo suficientemente pequeño}\} \quad (2.106)$$

es exactamente el conjunto de todos los estados vecinos \mathbf{w} que pueden ser conectados a \mathbf{w}_L (por la derecha de \mathbf{w}_L) ya sea por una onda de k -rarefacción o por una onda de k -choque admisible.

Luego, cuando el k -ésimo campo característico es linealmente degenerado, estableciendo que

$$\chi_k(\varepsilon; \mathbf{w}_L) = \Psi_k(\varepsilon) \quad (2.107)$$

obtenemos que (2.106) es el conjunto de todos los estado vecinos \mathbf{w} que pueden ser conectados a \mathbf{w}_L por una discontinuidad de k -contacto.

Ahora, podemos establecer el resultado principal de este capítulo

Teorema 19. *Supongamos que para toda $k \in \{1, \dots, d\}$, el k -ésimo campo característico es genuinamente no lineal o linealmente degenerado. Entonces, para todo $\mathbf{w}_L \in \Omega$, existe una vecindad ϑ de \mathbf{w}_L en Ω con la siguiente propiedad: si \mathbf{w} pertenece a ϑ , el problema de Riemann (2.104) tiene una solución débil que consiste en a lo más $(p + 1)$ estados constantes separados por ondas de rarefacción, ondas de choque admisibles, o discontinuidades de contacto. Más aún, una solución de este tipo es única.*

Para una demostración del teorema anterior consulte [Godlewski(2021)]. Ahora, considere el caso de un sistema que no es estrictamente hiperbólico, en donde la matriz coeficiente tiene un sistema completo de vectores y valores propios con multiplicidad constante. De forma más precisa, supongamos que al menos un valor propio tiene multiplicidad mayor a uno, pero cada campo característico sigue siendo genuinamente no lineal o linealmente degenerado. Entonces el resultado del teorema (19) se extiende a este caso dado que los vectores $\mathbf{r}_k(\mathbf{w})$, $1 \leq k \leq p$, son linealmente independientes. Se puede probar que hay solo una posibilidad para la onda de choque o para la discontinuidad de contacto correspondiente.

El teorema (19) y la observación anterior dan una solución al problema de Riemann para estados cercanos cuando el sistema es “convexo”. Esto es, cuando cada campo característico es genuinamente no lineal o linealmente degenerado. Consulte [LeVeque(1992), Godlewski(2021)] para ejemplos de solución general del problema de Riemann para casos linealmente degenerados.

Gráficamente, resolver el problema de Riemann consiste en superponer los lugares geométricos de los j -choques que satisfacen la condición de entropía \mathcal{S}_j y de las j -rarefacciones \mathcal{R}_j que pueden ser conectados a un estado dado $\widehat{\mathbf{w}}$. Cabe mencionar que la naturaleza de esta gráfica depende en si $\widehat{\mathbf{w}}$ es el estado derecho o si es el estado izquierdo. También, las curvas de choque y rarefacción coinciden suavemente en el punto $\widehat{\mathbf{w}}$.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

En esta sección se presentan algoritmos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico, así como la discusión de algunas características que se consideran “apropiadas” para este tipo de ecuaciones. Primero consideraremos métodos de diferencias finitas para leyes de conservación hiperbólicas. Luego, se analizará la robustez de los distintos algoritmos tanto en sistemas de ecuaciones lineales y en sistemas de ecuaciones no lineales. Hablaremos de propiedades deseables en un método numérico para resolver flujos de aguas someras. En particular, al calcular soluciones discontinuas a leyes de conservación usando métodos estándares desarrollados bajo la hipótesis de soluciones suaves, típicamente se podrían obtener oscilaciones numéricas incorrectas alrededor de las discontinuidades en caso de no proceder de manera cuidadosa. Para mayores detalles, ver [LeVeque(1992)].

¿Qué es un método numérico?

Los métodos numéricos son procedimientos matemáticos cuyo objetivo es la resolución aproximada de problemas que pueden carecer de expresión analítica para su resolución exacta. En general, estos procedimientos se expresan mediante algoritmos que especifican la secuencia de operaciones lógicas y aritméticas que conducen a la solución, normalmente aproximada, del problema planteado.

Dado que los métodos numéricos se construyen a partir de los modelos matemáticos de los problemas que se pretende resolver, una fuente de error en la solución del problema depende de lo buena que sea la aproximación y calibración del modelo matemático empleado.

De lo continuo a lo discreto

Primero, daremos un repaso a conceptos básicos de teoría de métodos numéricos para la ecuación lineal de advección y sistemas hiperbólicos lineales.

Consideramos el problema de Cauchy dependiente del tiempo en una dimensión espacial

$$\begin{cases} u_t + Au_x = 0, & -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

Es decir, el flujo $f(u) = Au$ y donde la matriz A tenga un conjunto completo de vectores propios.

Discretizamos el dominio en celdas $I_j = [x_j - \Delta x/2, x_j + \Delta x/2]$, donde x_j es el centro de la celda j , y Δx es el tamaño de la celda que está relacionado con la resolución del método. El tiempo se discretiza como $t_n = n\Delta t$ y en donde Δt representa el tamaño del paso del tiempo y $n = 1, \dots, N$.

Los métodos de diferencias finitas que se presentan producen aproximaciones $U_j^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ a la solución $u(x_j, t_n)$ en los puntos de la malla discreta. Esta es una interpretación estándar de la solución aproximada, pero en el desarrollo de métodos para leyes de conservación es frecuente ver a $U_j^{(n)}$ como una aproximación a un *promedio de celda* de $u(x, t_n)$

$$\bar{u}_j^n := \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} u(x, t_n) dx, \quad (3.2)$$

la cual es una aproximación más natural ya que la forma integral de la ley de conservación describe la evolución temporal de integrales. Los datos iniciales se discretizarán de forma análoga, denotándolos por $U_j^{(0)}$ a $u(x_j, t_0)$, o preferiblemente por celdas promedio, $U_j^{(0)} = \bar{u}_j^0$.

Para construir la aproximación de U^{n+1} se usan procedimientos de *marcha en el tiempo* en el cual se usan las aproximaciones anteriores. En general, se construye $U_j^{(n+1)}$ de procedimientos a partir de $U^{(n)}, U^{(n-1)}, \dots, U^{(n-r)}$ llamados *métodos* de $(r+2)$ niveles. A continuación presentamos métodos de dos niveles, los cuales son los más usados debido a que no requieren almacenar mucha información, que se obtienen al reemplazar las derivadas que aparecen en (3.1)

Método lateral izquierdo (*one-sided left*)

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} A \left(U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right). \quad (3.3)$$

Método lateral derecho (*one-sided right*)

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} A \left(U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)} \right). \quad (3.4)$$

Método de Diferencias Centradas (*Backward Euler*)

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A \left(U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right). \quad (3.5)$$

Método Lax-Friedrichs

$$U_j^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left(U_{j-1}^{(n)} + U_{j+1}^{(n)} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A \left(U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right). \quad (3.6)$$

Método Lax-Wendroff

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A \left(U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} A^2 \left(U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)} \right). \quad (3.7)$$

En la siguiente sección analizaremos la precisión y estabilidad de algunos de ellos.

3.1. Error Global y Convergencia

Definimos el **error global** como la diferencia entre las soluciones verdadera y la calculada, esto para medir que tan bien $U_j^{(n)}$ aproxima la solución verdadera. Para leyes de conservación es a menudo preferible considerar el error relativo al promedio de celda de la solución verdadera,

$$\bar{E}_j^{(n)} = U_j^{(n)} - \bar{u}_j^{(n)} \quad (3.8)$$

Por otro lado, podemos consideremos una función constante a trozos $U_k(x, t)$ donde asignaremos el valor $U_j^{(n)}$ a los valores contenidos en la celda (j, n) , esto es, definimos $U_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma

$$U_k(x, t) = U_j^{(n)} \quad \text{para } (x, t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times [t_n, t_{n+1}),$$

donde $x_{j\pm 1/2} = x_j \pm \Delta x/2$ y el índice k simboliza el tamaño de paso temporal Δt .

Con la función anterior podemos introducir la siguiente función de error

$$E_k(x, t) = U_k(x, t) - u(x, t). \quad (3.9)$$

Notemos que $\overline{E}_j^{(n)}$ es el promedio de celda de E_K al tiempo t_n . Con esa definición, decimos que el método es **convergente** con alguna norma particular $\|\cdot\|$ si

$$\|E_k(\cdot, t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad k \rightarrow 0, \quad (3.10)$$

para cualquier $t \geq 0$ fijo, y para todo dato inicial u_0 .

Norma

Para leyes de conservación la norma natural de usar es la 1-norma. En este caso, la norma de la función error (3.9) se expresa como

$$\|E_k(\cdot, t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |E_k(x, t)| dx \quad (3.11)$$

en cada t fijo. Esta norma es “natural” debido a que solo requiere integrar la función, y la forma de la ley de conservación a menudo nos permite decir algo sobre estas integrales.

Aunque nuestro interés final es probar la convergencia y, mejor aún, obtener límites explícitos sobre el tamaño del error global (y, por lo tanto, las tasas de convergencia), esto es difícil de lograr directamente. En cambio, comenzamos examinando el error de truncamiento local y luego usamos la estabilidad del método para obtener estimaciones del error global a partir del error local.

3.2. Error Local de Truncamiento

El error local de truncamiento $L_k(x, t)$ es una medida de qué tan bien la ecuación en diferencias modela la ecuación diferencial localmente. Se define reemplazando la solución aproximada $U_j^{(n)}$ en las ecuaciones en diferencias por la solución verdadera $u(x_j, t_n)$.

Definición. Para un método general de dos niveles, el **error local de truncamiento**, para un tamaño de paso temporal $k = \Delta t$, se define por

$$L_k(x, t) = \frac{1}{k} [u(x, t+k) - \mathcal{H}_k(u(\cdot, t); x)],$$

donde \mathcal{H}_k se define como el operador que representa al método de diferencias finitas que se está analizando

$$U_j^{(n+1)} = \mathcal{H}_k \left(U^{(n)}; j \right). \quad (3.12)$$

Como ejemplo, consideremos el método de Lax-Friedrichs 3.6. Primero escribimos el método en la forma

$$\frac{1}{\Delta t} \left[U_j^{(n+1)} - \frac{1}{2}(U_{j-1}^{(n)} + U_{j+1}^{(n)}) \right] + \frac{1}{2\Delta x} A[U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)}] = 0,$$

Si ahora reemplazamos cada $U_j^{(n)}$ por la solución exacta en el punto correspondiente, obtendremos algo que no será exactamente cero. Lo que obtenemos es el error local de truncamiento

$$L_k(x, t) = \frac{1}{\Delta t} \left[u(x, t + \Delta t) - \frac{1}{2}(u(x - \Delta x, t) + u(x + \Delta x, t)) \right] \quad (3.13)$$

$$+ \frac{1}{2\Delta x} A[u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)]. \quad (3.14)$$

Al calcular el error local de truncamiento siempre suponemos soluciones suaves, por lo que expandimos cada término a la derecha de (3.13) por una serie de Taylor alrededor de $u(x, t)$. Simplificando y denotando por u a $u(x, t)$ obtenemos

$$L_k(x, t) = u_t + Au_x + \frac{1}{2} \left(ku_{tt} - \frac{\Delta x^2}{\Delta t} u_{xx} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.15)$$

Sabiendo que $u(x, t)$ satisface $u_t + Au_x = 0$, encontramos que

$$L_k(x, t) = \frac{1}{2}\Delta t \left(A^2 - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2 I} \right) u_{xx} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.16)$$

$$= \mathcal{O}(\Delta t) \quad \text{cuando} \quad \Delta t \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

Podemos suponer que Δt y Δx se van a cero a la misma tasa de tal forma que $\Delta t/\Delta x$ es (aproximadamente) contante. Siendo cuidadosos con el análisis, usando el teorema de Taylor con residuo y suponiendo cotas uniformes en derivadas apropiadas de $u(x, t)$ podemos mostrar un límite agudo de la forma

$$|L_k(x, t)| \leq C\Delta t \quad \text{para toda} \quad k < k_0 \quad (3.18)$$

donde la constante C depende solo de los datos iniciales u_0 debido a que para sistemas lineales, considerados aquí, podemos encontrar derivadas acotadas de $u(x, t)$ en términos de las derivadas de los datos iniciales.

Se dice que el método Lax-Friedrichs tiene una precisión de primer orden ya que el error local (3.18) depende linealmente de Δt .

Definición. El método se dice *consistente* si

$$\|L_k(\cdot, t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

Definición. Se dice que un esquema numérico esta escrito en forma conservativa si

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \lambda \left(F_{j+1}^{(n)} - F_{j-1}^{(n)} \right) \quad (3.20)$$

$$(3.21)$$

donde el flujo numérico F debe ser especificado para el problema particular.

El Teorema de Equivalencia de Lax. Es el teorema fundamental de convergencia para métodos de diferencias lineales, y dice que para un método lineal y *consistente*, la *estabilidad* es necesaria y suficiente para la convergencia. Consulte [R. D. Richtmyer(1967)].

3.3. La Condición CFL

Uno de los primeros artículos sobre métodos de diferencias finitas para EDPs fue escrito en 1928 por Courant, Friedrichs y Lewy [LeVeque(1992)] donde usaron estos métodos como una herramienta analítica para probar la existencia de soluciones de ciertas EDPs. Su idea fue definir una secuencia de soluciones aproximadas, a través de ecuaciones en diferencias, probando que convergen cuando la malla es refinada, y entonces mostrar que la función límite debe satisfacer la EDP, dando la existencia de la solución.

Para probar la convergencia de esta secuencia, ellos reconocieron una condición de estabilidad necesaria, más no suficiente, para cualquier método numérico. La condición es que el dominio de dependencia del método de diferencias finitas debe incluir el dominio de dependencia de la EDP, al menos en el límite cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Esta condición es conocida como la condición CFL debido a Courant, Friedrichs y Lewy.

3.4. Análisis de Estabilidad de Von Neumann

El análisis de estabilidad de von Neumann (también conocido como análisis de estabilidad de Fourier) es un procedimiento que se utiliza para comprobar la estabilidad de esquemas de diferencias finitas aplicados a ecuaciones diferenciales parciales lineales. El análisis se basa en la descomposición de Fourier del error numérico.

En una dimensión, consiste en buscar soluciones numéricas de la forma

$$U_j^{(n)} = \lambda^n e^{ikx_j} \quad (3.22)$$

cuya norma es simplemente $|U_j^{(n)}| = |\lambda|^n$. Dicha solución numérica crece o decrece bajo circunstancias específicas, lo cual indica la **condición de estabilidad** del método numérico aplicado al sistema,

$$U_j^{(n)} = \begin{cases} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty & \text{si } |\lambda| > 1 \quad (\text{inestable}), \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 & \text{si } |\lambda| < 1 \quad (\text{estable}), \\ \text{constante} & \text{si } |\lambda| = 1 \quad (\text{neutral}). \end{cases} \quad (3.23)$$

La estabilidad de los esquemas numéricos está estrechamente relacionada con el error numérico. Un esquema de diferencias finitas es estable si los errores cometidos en un paso de tiempo del cálculo no hacen que los errores se amplifiquen a medida que continúan los cálculos. Un esquema neutrálmente estable es aquel en el que los errores permanecen constantes a medida que se realizan los cálculos. Si los errores decaen y finalmente desaparecen, se dice que el esquema numérico es estable. Si, por el contrario, los errores aumentan con el tiempo, se dice que el esquema numérico es inestable.

La estabilidad, en general, puede ser difícil de investigar, especialmente cuando la ecuación bajo consideración no es lineal.

3.4.1. Métodos Numéricos para la ecuación lineal de transporte

A continuación, y como ejemplo, analizaremos la precisión de los métodos lateral izquierdo (one-sided), de diferencias centrales, Lax-Friedrichs y Lax-Wendroff. Tomaremos un problema de valor inicial con la ecuación de advección lineal

$$u_t + au_x = 0 \quad a = \text{constante}, \quad (3.24)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.25)$$

y, mediante el análisis de estabilidad von Neumann, encontraremos condiciones para garantizar la estabilidad.

Ahora bien, sabemos que la solución de (3.24) consiste en un desplazamiento espacial de los datos iniciales a velocidad a

$$u(x, t) = u_0(x - at). \quad (3.26)$$

Con esto, presentamos los análisis de estabilidad.

Métodos Laterales

El método lateral izquierdo se describe con la siguiente fórmula

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - C \left(U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right) \quad (3.27)$$

donde $C = a\Delta t/\Delta x$ es llamado el **número de Courant**. Este método tiene un error de truncamiento de primer orden en espacio y en el tiempo $\mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$.

Siguiendo con el análisis, sustituimos (3.22) en (3.27) para encontrar expresiones para $|\lambda|$

$$\lambda^{n+1} e^{ikx_j} = \lambda^n e^{ikx_j} - C \lambda^n \left(e^{ikx_j} - e^{ikx_{j-1}} \right),$$

dividiendo por $\lambda^n e^{ikx_j}$ tenemos

$$\lambda = 1 - C(1 - e^{ik(-\Delta x)}) = 1 - C + C e^{-ik\Delta x}.$$

La expresión anterior describe un círculo de radio $|C|$ con centro $(1 - C, 0)$. Por tanto, la condiciones de estabilidad para el método lateral izquierdo se reduce a

$$\text{Estable} \quad \text{si } 0 \leq C \leq 1, \quad (3.28)$$

$$\text{Inestable} \quad \text{si } 1 < C < 0. \quad (3.29)$$

Observemos que el valor de la función en el nodo $(j, n + 1)$ se representa como $U_j^{(n+1)}$ y se puede expresar, en principio, como una combinación lineal

$$U_j^{(n+1)} = (1 - C)U_j^{(n)} + CU_{j-1}^{(n)}, \quad (3.30)$$

con lo que si se cumple que $C \in [0, 1]$, la cual es la condición CFL, obtenemos que (3.30) también es combinación convexa por lo que no se generan nuevos máximos. Para un $a > 0$ y una resolución espacial dada, la restricción de estabilidad en el tamaño de paso temporal esta dada por

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a}. \quad (3.31)$$

Esta restricción es razonable en el sentido de que Δt decrece linealmente con respecto a la resolución espacial.

Notemos que, para cuales quiera $\Delta x, \Delta t$ el esquema lateral izquierdo nunca es estable en el caso $a < 0$. Para ello se considera el esquema lateral derecho

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - C \left(U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)} \right),$$

donde, por un análisis similar, la condición de estabilidad está dada por $-1 \leq C \leq 0$. Considerar este esquema tiene sentido debido a que en su formulación la información considerada es la de la derecha, la cual corresponde a la velocidad en la que la información es advectada $a < 0$.

En general, el esquema lateral de primer orden para la ecuación de advección lineal es

$$U_j^{(n+1)} = \begin{cases} U_j^{(n)} - C \left(U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right) & \text{si } a > 0 \\ U_j^{(n)} - C \left(U_{j+1}^{(n)} - U_j^{(n)} \right) & \text{si } a < 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

con la condición de CFL $|C| \leq 1$.

Método Lax-Wendroff

La precisión del método lateral izquierdo 3.3 se puede estimar al evaluar el error de truncamiento del desarrollo en serie de Taylor a primer orden de la siguiente expresión

$$\mathcal{E} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + a \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x}. \quad (3.33)$$

Como se mencionó anteriormente, el error de truncamiento es de orden $\mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$. La precisión de método se puede mejorar al considerar términos de orden superior en el desarrollo de la serie de Taylor. De esa forma, se obtiene el esquema numérico de Lax-Wendroff (3.7), el cual se puede volver a expresar como

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{C}{2} \left(U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right) + \frac{C^2}{2} \left(U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)} \right), \quad (3.34)$$

el cual es de segundo orden tanto en el espacio como en el tiempo, $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$.

Para poder relacionar esta extensión con el esquema numérico de primer orden, notemos que si $a > 0$

$$U_j^{(n+1)} = \underbrace{U_j^{(n)} - C \left(U_j^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right)}_{\text{one-sided}} - \underbrace{\frac{1}{2} C(1 - C) \left(U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)} \right)}_{\text{viscosidad decreciente}}. \quad (3.35)$$

Así, el método de Lax-Wendroff se puede ver como un esquema de diferencias finitas hacia la izquierda (o hacia la derecha) más un error que es llamado *término viscoso* pues se asocia a éste

$$-\frac{1}{2}C(1-C) \left(U_{j+1}^{(n)} - 2U_j^{(n)} + U_{j-1}^{(n)} \right) \approx -\frac{1}{2}C(1-C) u_{xx}(x_j, t_n) \Delta x^2.$$

Notemos que este error disminuye al aumentar la resolución espacial, $\Delta x \rightarrow 0$.

Ahora bien, implementemos un análisis de von Neumann para el esquema Lax-Wendroff. Al sustituir $U_j^{(n)} = \lambda^n e^{ikx_j}$ en el esquema obtenemos

$$\lambda = 1 - C^2(1 - \cos(k\Delta x)) + iC \sin(k\Delta x), \quad (3.36)$$

$$|\lambda|^2 = (1 - C^2(1 - \cos(k\Delta x)))^2 + C^2 \sin^2(k\Delta x). \quad (3.37)$$

Con lo que la condición de estabilidad CFL se satisface cuando $|C| \leq 1$ sin importar el signo de a .

Método de Diferencias Centradas (Euler hacia atrás)

Debido a que el método de diferencias centradas es de segundo orden en el espacio, es importante cuestionar cuando se puede usar el método

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \approx u_x + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Para responder a esta cuestión se usa la aproximación de Euler en el tiempo, obteniendo el siguiente esquema

$$U_j^{(n+1)} = U_j^{(n)} - \frac{C}{2} \left(U_{j+1}^{(n)} - U_{j-1}^{(n)} \right). \quad (3.38)$$

Repitiendo el análisis de estabilidad de von Neumann obtenemos que

$$|\lambda|^2 = 1 + C \sin^2(k\Delta x) \geq 1, \quad (3.39)$$

Lo que prueba que el método siempre es inestable.

Método Lax-Friedrichs

Una forma de resolver el problema de estabilidad de las diferencias centradas es mediante el método de Lax-Friedrichs 3.6, el cual puede ser reescrito de la siguiente manera

$$U_j^{(n+1)} = \frac{1}{2}(1+C)U_{j-1}^{(n)} + \frac{1}{2}(1-C)U_{j+1}^{(n)}, \quad (3.40)$$

donde C representa la viscosidad del sistema.

Como es de esperarse, el término regulador C tiene un efecto en la estabilidad. El análisis de von Neumann establece para λ que

$$\lambda^{n+1} e^{ikx_j} = \frac{1}{2} \lambda^n \left(e^{ikx_{j-1}} + e^{ikx_{j+1}} \right) - C \lambda^n \left(e^{ikx_{j-1}} + e^{ikx_{j+1}} \right),$$

con lo que

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(e^{-ik\Delta x_j} + e^{ik\Delta x} \right) - \frac{C}{2} \left(e^{ik\Delta x_j} - e^{-ik\Delta x} \right) \quad (3.41)$$

$$= \cos(k\Delta x) - iC \sin(k\Delta x). \quad (3.42)$$

Así, la condición de estabilidad CFL se reduce a que $|C| < 1$.

3.5. Métodos Upwind

Para resolver la ecuación lineal de advección $u_t + au_x = 0$ debemos considerar un esquema apropiado de acuerdo al signo de a . Concretamente, si $a > 0$ obtendremos que las características $x = x_0 + at$ propagarán la información en dirección positiva. Por ello, el esquema adecuado será el *método lateral izquierdo* (3.3). Análogamente, si $a < 0$, el esquema adecuado será el *método lateral derecho* (3.4). Estos esquemas son llamados *upwind de primer orden*.

Los métodos upwind se pueden utilizar para sistemas de ecuaciones al considerar apropiadamente el signo de los valores propios de la matriz A . Para ello requerimos de una descomposición de los campos característicos.

Así, consideremos el sistema lineal de leyes de conservación $\mathbf{w}_t + A\mathbf{w}_x$. Realizamos un cambio de variable para obtener $\mathbf{v}_t + \Lambda\mathbf{v}_x = 0$ donde Λ es la matriz diagonal de los valores propios. Entonces, cada uno de los problemas escalares resultantes puede ser resuelto con un esquema upwind apropiado, usando el punto a la izquierda cuando el valor propio $\lambda_p > 0$ o el derecho cuando $\lambda_p < 0$. Este método puede ser escrito en forma compacta si introducimos la notación

$$\lambda_p^+ = \max(\lambda_p, 0), \quad \Lambda^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+), \quad (3.43)$$

$$\lambda_p^- = \min(\lambda_p, 0), \quad \Lambda^- = \text{diag}(\lambda_1^-, \dots, \lambda_n^-). \quad (3.44)$$

Notemos que $\Lambda^+ + \Lambda^- = \Lambda$. Entonces, el método upwind para el sistema $\mathbf{v}_t + \Lambda\mathbf{v}_x = 0$

puede ser escrito como

$$V_j^{(n+1)} = V_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Lambda^+ \left(V_j^{(n)} - V_{j-1}^{(n)} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Lambda^- \left(V_{j+1}^{(n)} - V_j^{(n)} \right),$$

el cual podemos regresar a nuestras variables originales W multiplicando por R

$$W_j^{(n+1)} = W_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} A^+ \left(W_j^{(n)} - W_{j-1}^{(n)} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} A^- \left(W_{j+1}^{(n)} - W_j^{(n)} \right), \quad (3.45)$$

donde $A^+ = R\Lambda^+R^{-1}$ y $A^- = R\Lambda^-R^{-1}$.

Notemos que $A^+ + A^- = A$. Si todos los valores propios de A tiene el mismo signo, entonces A^+ o A^- es cero y el método (3.45) se reduce completamente a un solo método lateral.

Una forma alternativa de llegar a la misma solución es mediante la descomposición de los vectores propios. Calculemos

$$\Delta_+ W = W_{j+1}^{(n)} - W_j^{(n)}, \quad \Delta_- W = W_j^{(n)} - W_{j-1}^{(n)}, \quad (3.46)$$

y obtengamos su descomposición en los vectores propios $\mathbf{r}_m, m = 1, \dots, n$, asociados de los valores propios λ_m , esto es

$$\Delta_+ W = \sum_{m=1}^n \alpha_m^+ \mathbf{r}_m, \quad \Delta_- W = \sum_{m=1}^n \alpha_m^- \mathbf{r}_m, \quad (3.47)$$

donde $\alpha_m^+, \alpha_m^- \in \mathbb{R}$, para toda m . Entonces

$$A\Delta_+ W = \sum_{m=1}^n \alpha_m^+ \lambda_m \mathbf{r}_m, \quad A\Delta_- W = \sum_{m=1}^n \alpha_m^- \lambda_m \mathbf{r}_m. \quad (3.48)$$

Con esta descomposición se obtiene el método upwind para sistemas lineales y está dado por

$$W_j^{(n+1)} = W_j^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{\lambda_m < 0} \alpha_m^+ \lambda_m \mathbf{r}_m - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{\lambda_m > 0} \alpha_m^- \lambda_m \mathbf{r}_m \quad (3.49)$$

3.6. Métodos de Alta Resolución

El término “alta resolución” designa a métodos que tienen una precisión de, al menos, segundo orden en soluciones suaves y que, además, resuelven bien discontinuidades no oscilatorias (en donde se reducen a primer orden). La idea principal detrás de cualquier método de alta resolución es utilizar un método de alto orden y modificarlo al aumentar un término que considere la cantidad de disipación numérica en la vecindad de una discontinuidad.

Generalmente se busca que la viscosidad artificial, como comúnmente es conocido a éste término, dependa más del comportamiento de la solución cerca de discontinuidades que en regiones suaves. Por ejemplo, para ecuaciones escalares se considera la adición de un término difusivo proporcional a u_{xx} . Este término debe tener un coeficiente que se anula cuando $\delta x, \delta t \rightarrow 0$, de modo que permanece consistente con la ecuación hiperbólica. Más aún, queremos que este coeficiente se anule con tal rapidez que el orden de precisión del método de alto orden en soluciones suaves no sea afectado.

La razón de existir de estos métodos es hacer más con menos, es decir, desarrollar métodos más exactos que los métodos con exactitud de primer orden sin incrementar sustancialmente el costo computacional. El teorema de Godunov implica que no podemos desarrollar esquemas lineales con exactitud de alto orden para leyes de conservación, por lo que debemos usar esquemas no lineales.

Nos concentraremos en dos clases de métodos que son muy populares: *métodos limitadores de flujo* y *métodos limitadores de pendiente*.

Métodos Limitadores de Flujo

Este enfoque trata de tomar dos flujos, uno de alto orden $F_H(U, j)$ que trabaje bien en regiones suaves y uno de bajo orden $F_L(U, j)$ que se comporte bien cerca de discontinuidades. Luego, se intenta hibridizar estos dos en un solo flujo F tal que se reduzca al de alto orden en regiones suaves y el de bajo orden cerca de discontinuidades.

Podemos ver al flujo de alto orden como un flujo de bajo orden más una corrección

$$F_H(U, j) = F_L(U, j) + [F_H(U, j) - F_L(U, j)].$$

En un método limitador de flujo, la magnitud de esta corrección es limitada dependiendo de los datos, entonces el flujo se convierte en

$$F(U, j) = F_L(U, j) + \Phi(U, j) [F_H(U, j) - F_L(U, j)],$$

donde $\Phi(U, j)$ es el limitador.

Métodos Limitadores de Pendiente

Esta segunda aproximación tiene una naturaleza más geométrica. La idea básica se presenta en los siguientes pasos (sin embargo típicamente no son implementados de esta forma)

1. Dados los datos $\{U_j^n\}$, construimos una función lineal a tramos

$$\tilde{u}_n(x, t_n) = U_j^n + \sigma_j^n(x - x_j) \quad \text{en la celda } [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]. \quad (3.50)$$

2. Resolver la ley de conservación exactamente con éstos datos para obtener $\tilde{u}^n(x, t_{n+1})$.
3. Calcular los promedios de celda de a solución resultante para obtener U_j^{n+1} .

Aquí σ_j^n es una pendiente en la j -ésima celda que se basa en los datos U^n .

La celda promedio de $\tilde{u}^n(x, t_n)$, de (3.50), sobre $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ es igual a U_j^n para cualquier elección de σ_j^n . Desde que los pasos 2 y 3 son también conservativos, el método general es conservativo para cualquier elección de σ_j^n .

Para problemas no lineales generalmente no podremos llevar a cabo el paso 2 exactamente. La construcción de la solución exacta $\tilde{u}^n(x, t)$ basada en resolver problemas de Riemann ya no funciona cuando $\tilde{u}^n(x, t_n)$ es lineal a tramos. Sin embargo, es posible aproximar la solución de manera adecuada.

La cuestión más interesante surge en la elección de las pendientes σ_j^n . Si, para la ecuación lineal de advección con $a > 0$, consideramos

$$\sigma_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} \quad (3.51)$$

y resolvemos la ecuación de advección en el paso 2, entonces el método se simplifica al método de Lax-Wendroff. Esto muestra que es posible obtener precisión de segundo orden por este enfoque.

Las oscilaciones que surgen con Lax-Wendroff se pueden interpretar geoméricamente como causado por una mala elección de pendientes, lo que lleva a una reconstrucción lineal por tramos $\tilde{u}^n(x, t_n)$ con una variación total mucho mayor que los datos U^n . Observa la

figura 3.1 *Izquierda* para un ejemplo. Podemos mejorar esto al aplicar un limitador de pendiente a (3.51), lo cual reduce el valor de esta pendiente cerca de discontinuidades o puntos extremos, y normalmente esta diseñada para garantizar disminuir la variación total TVD

$$TV(U^n) := \sum_j |U_{j+1}^n - U_j^n|. \quad (3.52)$$

Este concepto fue introducido por Amiram Harten. Los métodos diseñados con éste esquema capturan predicciones de choque más precisas sin oscilaciones espurias cuando la variación de campo es discontinua. Por otro lado, el esquema TDV permite predicciones de choque más nítidas en mallas menos finas, lo que ahorra tiempo de cálculo y, dado que el esquema conserva la monotonicidad, no hay oscilaciones engañosas en la solución.

La reconstrucción mostrada en la figura 3.1 *Derecha*, por ejemplo, tiene esta propiedad. Desde que los pasos 2 y 3 son TDV , imponiendo (3.52) en el paso 1 resulta en un método que es TDV en general.

Una simple elección de pendientes que satisface (3.52) es la llamada *pendiente minmod*,

$$\sigma_j = \frac{1}{h} \minmod(U_{j+1} - U_j, U_j - U_{j-1}) \quad (3.53)$$

donde la función *minmod* se define como

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ si } ab > 0 \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ si } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab \leq 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

$$= \frac{1}{2} (\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)) \min(|a|, |b|), \quad (3.55)$$

y $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ es la función signo

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La figura 3.1 *Derecha* muestra las pendientes *minmod* para un conjunto de datos.

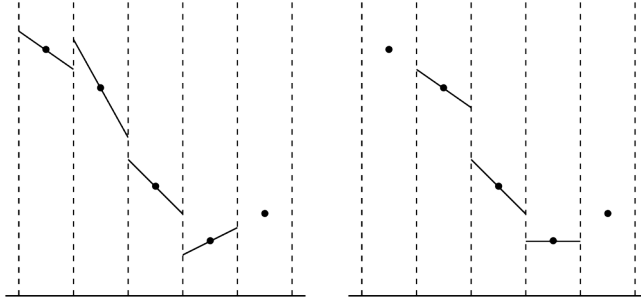


Figura 3.1: *Izquierda*: Reconstrucción lineal a tramos usando las pendientes de Lax-Wendroff 3.51. *Derecha*: Reconstrucción lineal a tramos usando las pendientes minmod 3.53.

3.7. Métodos Semi-Discretos

Los métodos anteriormente discutidos han sido completamente discretos pues ha sido discretizados en tiempo y espacio. En ocasiones es útil considerar el proceso de discretización en dos etapas, primero discretizando solo el espacio y dejando el problema continuo en el tiempo. Esto nos deja un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo, llamadas *semi-discretas*. Entonces cuando discretizamos en el espacio reducimos un sistema de EDPs a uno de EDOs, donde usamos un solucionador de EDO, los cuales son llamados *método de líneas*.

Este enfoque es útil para desarrollar métodos con orden de precisión mayor a dos debido a que esto nos permite desacoplar los problemas de precisión espacial y temporal. Podemos definir aproximaciones de alto orden al flujo en la frontera de una celda en un instante en el tiempo usando interpolación de alto orden en el espacio, y luego alcanzar una precisión temporal de alto orden aplicando un solucionador de ODEs de alto orden.

Ecuaciones de evolución para los promedios de celdas

Representemos la aproximación discreta del promedio de celda de \mathbf{u} sobre la j -ésima celda en el tiempo t de la siguiente forma

$$U_j(t) \approx \bar{u}_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbf{u}(x, t) dx.$$

Sabemos de la forma integral de la ley de conservación (2.5) que el promedio de celda

$\bar{u}_j(t)$ evoluciona de acuerdo a

$$\bar{u}'_j = -\frac{1}{\Delta x} \left[f(\mathbf{u}(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) - f(\mathbf{u}(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) \right]. \quad (3.56)$$

Representamos por $\mathcal{F}(U(t), j)$ a la aproximación de $f(\mathbf{u}(x_{j+\frac{1}{2}}, t))$, obtenida de los datos discretos $U(t) = U_j(t)$. Por ejemplo, si quisiéramos resolver el problema de Riemann con datos $U_j(t)$ y $U_{j+1}(t)$ para el estado intermedio $u^*(U_j(t), U_{j+1}(t))$ y luego establecer

$$\mathcal{F}(U(t), j) = f(u^*(U_j(t), U_{j+1}(t))).$$

Reemplazando los flujos verdaderos en (3.56) por \mathcal{F} y el promedio de celda $\bar{u}_j(t)$ por $U_j(t)$, obtenemos un sistema discreto de EDOs para $U_j(t)$,

$$U'_j(t) = -\frac{1}{\Delta x} [\mathcal{F}(U(t), j) - \mathcal{F}(U(t), j-1)]. \quad (3.57)$$

Notemos que éste es un sistema de ecuaciones acoplado desde que cada uno de los flujos \mathcal{F} depende de dos o más de los $U_i(t)$.

Podemos ahora discretizar en tiempo. Por ejemplo, si discretizamos (3.57) usando el método de Euler con paso temporal Δt , y representemos por U_j^n a nuestra aproximación completamente discreta de $U_j(t_n)$, entonces obtenemos

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathcal{F}(U^n, j) - \mathcal{F}(U^n, j-1)],$$

la cual está en la forma familiar de un método conservativo.

Para obtener un método con precisión de segundo orden tanto en el tiempo como en el espacio, podemos discretizar el sistema de EDOs (3.57) usando un método de EDOs con precisión de segundo orden. Tal es el caso de el método de Runge-Kutte de dos etapas

$$\begin{aligned} U_j^* &= U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathcal{F}(U^n, j) - \mathcal{F}(U^n, j-1)], \\ U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathcal{F}(U^*, j) - \mathcal{F}(U^*, j-1)]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Tenga en cuenta que esto requiere resolver dos problemas de Riemann en cada límite de celda en cada paso de tiempo.

Métodos de discretización temporal de alto orden que preservan la estabilidad fuerte

Como ya se mencionó, en la práctica al resolver problemas de EDPs que dependen del tiempo se suele primero discretizar las variables espaciales para obtener un esquema de método semi-discreto de líneas. Esto es entonces un sistema de EDOs en la variable temporal. En este punto nos interesa la estabilidad. El término *fuerte* hace referencia a que problemas que involucran soluciones discontinuas, como los hiperbólicos, requieren una medida de estabilidad más fuerte que los problemas que involucran soluciones suaves donde un análisis lineal de estabilidad es suficiente.

Así se introducen los métodos de discretización temporal de alto orden que conservan una fuerte estabilidad para el método semi-discreto de aproximaciones de líneas de EDPs. Estos métodos fueron primero desarrollados por Chi-Wang Shu [Shu(1988)] y posteriormente mejorados en [S. Gottlieb(1998)] eran llamados discretizaciones temporales que disminuyen la variación total **TVD** (*total-variation-diminishing*).

La idea es asumir que la discretización temporal de Euler de primer orden del método de las líneas ODE es fuertemente estable bajo una cierta norma, TVD en este caso, cuando el paso temporal Δt está adecuadamente restringido, y luego intentar encontrar una discretización temporal de orden superior, por ejemplo Runge-Kutta, que mantenga una fuerte estabilidad para la misma norma, quizás bajo una restricción diferente del paso temporal.

Así, considerando la notación U_j^n , de la sección anterior, para la solución discreta uno dimensional, la variación total no incrementa con el tiempo; i.e. la siguiente propiedad se satisface

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n), \quad TV(U^n) := \sum_j |U_{j+1}^n - U_j^n|. \quad (3.59)$$

La condición (3.59) es la llamada *condición TVD*.

El objetivo de un esquema SSP Runge-Kutta de alto orden es mantener la propiedad de mantener la propiedad de estabilidad fuerte (3.59) mientras que se consigue una precisión de orden superior en el tiempo, quizás con una restricción CFL modificada.

Capítulo 4

Modelo de Aguas Someras

El modelo para flujos de aguas someras en una y dos dimensiones ha sido ampliamente usado para probar una variedad de métodos numéricos. Aquí explicamos los efectos de los gradientes de densidad horizontales en la evolución temporal del fluido. La descripción del modelo y sus propiedades se basan en [Hernandez-Duenas(2017)]. En forma conservada, el modelo es

$$\begin{pmatrix} \rho h \\ \rho h u \\ \rho h v \\ h \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho h u \\ \rho h u^2 + \frac{g}{2} \rho h^2 \\ \rho h u v \\ h u \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho h v \\ \rho h u v \\ \rho h v^2 + \frac{g}{2} \rho h^2 \\ h v \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \rho h B_x \\ -g \rho h B_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde $h(x, y, t)$ denota la profundidad de la capa en una ubicación (x, y) , en el tiempo t ; $u(x, y, t)$ y $v(x, y, t)$ las velocidades en dirección x y y , respectivamente; $\rho(x, y, t)$ es la densidad promediada verticalmente, $B(x, y)$ es la topografía del fondo (también llamada *batimetría*); y g es la constante de la aceleración de la gravedad.

Para una notación más sencilla, denotaremos la presión por $p = \frac{g}{2} \rho h^2$. La densidad es adveccionada horizontalmente por el fluido. Esto puede se puede ver combinando la primer y última ecuación.

El sistema (4.1) consiste en la conservación de masa, balance en la cantidad de momento con términos fuente dado por la topografía y una presión hidrostática; y la advección de

la densidad promediada verticalmente. En forma cuasilineal, el sistema de lee

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \rho h \\ \rho h u \\ \rho h v \\ h \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{2}h - u^2 & 2u & 0 & \frac{g}{2}\rho h \\ -uv & v & u & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho h \\ \rho h u \\ \rho h v \\ h \end{pmatrix}_x \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{g}{2}h - v^2 & 0 & 2v & \frac{g}{2}\rho h \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho h \\ \rho h u \\ \rho h v \\ h \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -g\rho h B_x \\ -g\rho h B_y \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}
\end{aligned}$$

donde las matrices de coeficientes y sus correspondientes valores y vectores propios están dados por

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2} - u^2 & 2u & 0 & \frac{\rho c^2}{2} \\ -uv & v & u & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{c^2}{2} - v^2 & 0 & 2v & \frac{\rho c^2}{2} \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & v \end{pmatrix}, \\
\Lambda^A &= \begin{pmatrix} u - c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u + c \end{pmatrix}, \quad \Lambda^B = \begin{pmatrix} v - c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v + c \end{pmatrix}, \tag{4.3} \\
R^A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ u - c & u & 0 & u + c \\ v & 0 & 1 & v \\ 1/\rho & -1/\rho & 0 & 1/\rho \end{pmatrix}, \quad R^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ u & 0 & 1 & u \\ v - c & v & 0 & v + c \\ 1/\rho & -1/\rho & 0 & 1/\rho \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde $c = \sqrt{gh}$ es la velocidad del sonido.

Cada matriz de coeficientes tiene dos valores propios iguales. Sin embargo, cada matriz de coeficientes tiene un sistema completo de vectores propios siempre que $c > 0$. Formalmente, el sistema es hiperbólico para cada vector unitario (α, β) , la matriz

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha \left(\frac{c^2}{2} - u^2 \right) - \beta uv & 2\alpha u + \beta v & \beta u & \alpha \frac{\rho c^2}{2} \\ \beta \left(\frac{c^2}{2} - v^2 \right) - \alpha uv & \alpha v & \alpha u + 2\beta v & \beta \frac{\rho c^2}{2} \\ -(\alpha u + \beta v)/\rho & \alpha/\rho & \beta/\rho & \alpha u + \beta v \end{pmatrix}$$

tiene la estructura propia

$$\Lambda^{\alpha A + \beta B} = \begin{pmatrix} \alpha u + \beta v - c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha u + \beta v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha u + \beta v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha u + \beta v + c \end{pmatrix},$$

$$R^{\alpha A + \beta B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ u - \alpha c & u & \beta & u + \alpha c \\ v - \beta c & v & -\alpha & v + \beta c \\ 1/\rho & -1\rho & 0 & 1/\rho \end{pmatrix},$$

la cual forma un sistema completo de vectores propios siempre que $c > 0$. Esto es, la hiperbolicidad es perdida cuando $h = 0$, cuando los vectores propios coinciden, lo cual representa el denominado "estado-seco".

Notemos que el modelo se reduce a la forma estándar cuando ρ es uniforme en x y en y . En ese caso, recuperamos las ecuaciones familiares de aguas someras si removemos una de las ecuaciones redundantes para h , y combinamos la primera y última columna en las matrices de coeficientes

$$\begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghB_x \\ -ghB_y \end{pmatrix}.$$

El término $(c^2 - u^2)(\rho h)_x$ en la ecuación (4.3) que usualmente aparece en la ecuación de la conservación de momento en la dirección x se ha dividido en $(c^2/2 - u^2)(\rho h)_x + g\rho h/2h_x$.

4.1. El Modelo Uno Dimensional

Una versión de dimensión uno más sencilla del sistema anterior es obtenido al suponer que el flujo se mueve, por ejemplo, en la dirección x . En ese caso la velocidad $v = 0$ se anula en la dirección y .

El modelo para flujos de aguas someras unidimensional ha sido ampliamente usado para probar una variedad de modelos numéricos. La derivación del esquema numérico, así como propiedades importantes del modelo y del método numérico son más fáciles de analizar en una dimensión. Por ejemplo, los flujos estado estacionarios son sencillos de comprender.

El modelo esta descrito por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\partial_t(\rho h) + \partial_x(\rho hu) &= 0, \\
\partial_t(\rho hu) + \partial_x\left(\rho hu + \frac{g}{2}\rho h^2\right) &= -g\rho h B_x, \\
\partial_t(h) + \partial_x(hu) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

El sistema (4.4) es hiperbólico. La información espectral se sigue de las ecuaciones regulares de aguas someras. La matriz Jacobiana tiene tres valores propios, dos de los cuales se reducen a los valores propios estándar cuando ρ es constante. El tercero es una campo degenerado y esta asociado a las fluctuaciones horizontales de densidad.

La forma cuasilineal del sistema reducido se vuelve

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho h \\ \rho hu \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{c^2}{2} - u^2 & 2u & \rho \frac{c^2}{2} \\ -u/\rho & 1/\rho & u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \rho h \\ \rho hu \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g\rho h B_x \\ 0 \end{pmatrix},$$

con valores y vectores propios

$$R^c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u - c & u & u + c \\ 1/\rho & -1/\rho & 1/\rho \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} u - c & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u + c \end{pmatrix}.$$

La hiperbolicidad estricta se pierde cuando $h = 0$, esto es, cuando los vectores propios coinciden, representado el denominado “estado seco” debido a que h , la altura, se anula.

4.2. Estados Estacionarios

Flujos de estado estacionario surgen cuando ocurre un balance entre gradientes de flujo y términos fuente. Matemáticamente lo entendemos cuando la variación temporal del modelo es cero o es constante a lo largo de él. Esto es,

$$(\rho hu)_x = 0, \quad (hu)_x = 0, \quad (\rho hu + g\rho h^2/2)_x = -g\rho h B_x.$$

Aquí $Q = \rho hu$, conocida como la tasa de flujo o *descarga*, es constante. Concluimos que, o se trata de un estado en reposo $u = 0$, o la densidad ρ es constante. Soluciones suaves en estado estacionario en ausencia de gradientes de densidad son caracterizadas por dos invariantes, la tasa de flujo Q , y E la energía por unidad área de sección transversal

$$\rho = \text{Constante}, \quad Q \equiv \rho hu = \text{Constante}, \quad E \equiv \frac{1}{2}\rho u^2 + g\rho(h + B) = \text{Constante},$$

con los cuales es fácil reconocer los estados estacionarios en reposo

$$\rho = 0, \quad \text{Constante}, \quad u = 0, \quad h + B = \text{Constante}.$$

Después de algunas manipulaciones de las ecuaciones que son válidas para flujos suaves, obtenemos

$$\begin{aligned} Q_t + uQ_x + hE_x + -h \left(\frac{u^2}{2} + gB + \frac{c^2}{2} \right) \rho_x &= 0, \\ E_t + gQ_x + uE_x + \frac{uc^2}{2} \rho_x &= 0, \\ \rho_t + u\rho_x &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones (4.5) son válidas solo cuando el flujo es suave. Cerca de las discontinuidades de salto, las variables conservadas $(\rho h, \rho hu, h)^T$ deben estar incorporadas para resolver bien el flujo.

Otros estados estacionarios en reposo, debidos a un balance entre la topografía y la presión, están caracterizados por

$$u = 0, \quad \partial_x \left(\frac{g\rho h^2}{2} \right) = -g\rho h B_x.$$

Como se involucran tres variables y solo se imponen dos condiciones, la clase tiene un grado de libertad. Para cualquier función positiva $h(x)$ y topografía $B(x)$, la solución para ρ es

$$\frac{g\rho(x)h(x)^2}{2} = p_0 \exp \left(-2 \int_{x_0}^x \frac{B_x(x)}{h(x)} dx \right).$$

Para una topografía plana, se simplifica a

$$B = \text{Constante}, \quad u = 0, \quad \frac{g\rho h^2}{2} = p_0 = \text{Constante}. \tag{4.6}$$

Notemos que los estados estacionarios en reposo descritos en (4.6) no son estables a perturbaciones en el siguiente sentido. Dadas unas condiciones de frontera y cualquier estado estacionario en reposo de la forma (4.6), $g\rho(x)h(x)^2/2 = p_0$, hay una infinidad de estados arbitrariamente cercanos al estado inicial. Por ejemplo, cualquier perturbación en la profundidad del agua $h(x) + \epsilon(x)$ con ϵ apoyada en el interior del dominio, una correspondiente $\rho_\epsilon = 2p_0/(h(x) + \epsilon(x))^2/g$ define un nuevo estado estacionario. En el capítulo 5, se habla de una prueba numérica cuando una perturbación inicial es hecha en la profundidad del agua.

4.3. Funciones de Entropía

Para una ley de conservación dada, el encontrar funciones de entropía puede ayudar a escoger la solución débil correcta [LeVeque(1992), Oleinik(1957)]. La siguiente proposición muestra los detalles para el modelo (4.4)

Proposición 20. . *El sistema (4.4) esta dotado con una función de entropía*

$$\mathcal{E} = hE - p,$$

y desigualdad de entropía

$$\mathcal{E}_t + (u(\mathcal{E} + p))_x \leq 0.$$

Demostración. Consideremos la forma cuasilineal de sistema 4.4 mas un término de fricción en la ecuación de cantidad de momento

$$\begin{aligned} (\rho h)_t + (\rho h u)_x &= 0, \\ (\rho h u)_t + \left(\frac{c^2}{2} - u^2\right) (\rho h)_x + 2u (\rho h u)_x + \frac{g}{2} \rho h (h)_x &= -gh\rho B_x - \epsilon u, \\ h_t - \frac{u}{\rho} (\rho h)_x + \frac{1}{\rho} (\rho h u)_x + u (h)_x &= 0, \end{aligned}$$

donde ϵ es el coeficiente de fricción correspondiente. La parte cinética de la ecuación satisface $(\frac{1}{2}\rho h u^2)_t = u (\rho h u)_t - \frac{1}{2}u^2 (\rho h)_t$, implicando que

$$\left(\frac{1}{2}\rho h u^2\right)_t + \frac{3}{2}u^2 (\rho h u)_x - u^3 (\rho h)_x + u c^2 \left(\frac{1}{2} (\rho h)_x + \frac{\rho}{2} (h)_x + \rho B_x\right) = -\epsilon u^2. \quad (4.7)$$

Notamos que $\mathcal{E} = hE - p = \rho h u^2/2 + gBh\rho + p$. La presión $p = \frac{g}{2}\rho h^2$ satisface

$$p_t = -\frac{g}{2}h (\rho h u)_x - \frac{g}{2}\rho h (h u)_x.$$

Reescribiendo $hu = \rho h u h / (\rho h)$, obtenemos

$$p_t = -gh (\rho h u)_x - \frac{g}{2}\rho h u (h)_x + \frac{g}{2}h u (\rho h)_x. \quad (4.8)$$

Combinando las ecuaciones (4.7) y (4.8), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t &= -(ghQ)_x - (gQB)_x + u^3 (\rho h)_x - \frac{3}{2}u^2 Q_x - \epsilon u^2 \\ &= -(ghQ)_x - (gQB)_x - \frac{1}{2}(\rho h u^3)_x - \epsilon u^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

lo que concluye la demostración. \square

Notemos que la función de entropía se reduce a $\mathcal{E} = \rho h \frac{1}{2}u^2 + \frac{g}{2}\rho^{-1} (\rho h)^2 + c^2\rho B$. Es de hecho una función convexa de las variables $\rho h, u, \rho$.

4.4. Invariantes de Riemann a través de Ondas

Podemos obtener más información acerca del tipo de ondas para el modelo simplificado 1-D. Esto es crucial para el tipo de algoritmo numérico a ser considerado en este trabajo. Ahora procedemos a calcular los invariantes de Riemann a través de cada onda.

La primer familia tiene vectores propios $\mathbf{r}_1^c = (1, u - c, 1/\rho)^T$ con $\lambda_1 = u - c$. Los invariantes de Riemann en una solución de rarefacción son constantes por el teorema (13). Para calcularlos recordemos que una solución de rarefacción $\mathbf{w}(x, t)$ es similar a una función $\omega(x/t)$. Por lo mencionado en la subsección 2.3.3 tenemos que $\omega'(\xi) = \alpha(\xi)\mathbf{r}_1$ con $\xi = x/t$, de modo que los cambios a través de ésta onda satisfacen

$$\frac{\delta(\rho h)}{1} = \frac{\delta(\rho h u)}{u - c} = \rho \delta(h), \quad (4.10)$$

lo cual implica

$$\delta\rho = 0, \quad \delta u = -\frac{c}{\rho h} \delta(\rho h) = -\sqrt{g}h^{-1/2}\delta h = -\sqrt{g}2\delta h^{-1/2},$$

y nos da los dos invariantes de Riemann para la familia: $\rho, u + 2c$.

Análogamente, los invariantes de Riemann para la tercera familia son ρ y $u - 2c$.

La segunda familia esta asociada con las interfaces entre regiones de agua con saltos en la densidad. El vector propio para esta familia es $\mathbf{r}_2^c = (1, u, -1/\rho)^T$. Cambios a través de ésta onda satisfacen

$$\frac{\delta(\rho h)}{1} = \frac{\delta(\rho h u)}{u} = -\rho \delta(h).$$

Desde que $\delta(\rho h u) = u\delta(\rho h)$, entonces $\delta u = 0$, proporcionando el primer invariante de Riemann. Por otro lado,

$$\delta(\rho h) = -\rho \delta(h),$$

o $\delta \log(h) = -\delta \log(\rho)$. El segundo invariante de Riemann es la presión integrada verticalmente $p = \frac{g}{2}\rho h^2$. Esto indica que la segunda familia es una discontinuidad de contacto y un campo degenerado. Tenemos dos ondas de choque o rarefacción y una discontinuidad de contacto.

4.5. Esquema Numérico

Leyes de conservación hiperbólicas involucran varios problemas teóricos y dificultades numéricas. La más conocida de ellas siendo la formación de ondas de choque en tiempo finito. Numéricamente, los esquemas deben ser conservadores y precisos cerca de las ondas de choque. Por otro lado, un aspecto particular de flujos de aguas someras es la existencia de soluciones de estado estacionarios cuando ocurre un balance entre los gradientes de flujo y los correspondientes términos fuente. Esquemas numéricos que son capaces de capturar esas soluciones en equilibrio son conocidos como esquemas *bien balanceados* o con la propiedad de *buen balance*. Esta propiedad de buen balance es importante ya que permite que los esquemas sean precisos cerca de los estados estacionarios. Por otra parte, la preservación de la positividad es otra propiedad importante que mejora la estabilidad de un esquema numérico cuando se tratan estados húmedos-secos. Un esquema que goce de dicha propiedad garantiza que si la profundidad del agua es inicialmente no negativa, la aproximación numérica en los pasos posteriores preserva la no negatividad de dicha cantidad.

Diferentes ventajas pueden obtenerse en diferentes esquemas numéricos. Los esquemas centrales son ventajosos porque la propiedad de conservación de la positividad se puede incorporar con una reconstrucción polinomial especial de los datos y una restricción CFL modificada. Por otro lado, el esquema upwind tipo Roe es usualmente menos disipativo cerca de ondas de choque. En esta sección presentamos un esquema numérico tipo central-upwind para flujos de aguas someras con gradientes de densidad horizontales.

4.5.1. El Esquema Central-Upwind Semi-Discreto

A diferencia del trabajo en [Hernandez-Duenas(2017)] en donde se implementó un esquema numérico de tipo Roe, aquí implementaremos un esquema numérico central-upwind. Hasta donde tenemos conocimiento, este método no se ha aplicado a este modelo en particular. En esta sección describiremos dicho método numérico para resolver el sistema (4.4) de tipo central-upwind que es preciso, robusto, preserva la positividad y está bien balanceado. El esquema central-upwind es un esquema de volumen finito, referimos al lector a las referencias [Balbás and Karni(2013), Kurganov and Petrova(2007), Kurganov and Petrova(2009), Kurganov and Tadmor(2000)] para encontrar más detalles. El sistema (4.4) se puede escribir en forma general como

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{W}; B) = \mathbf{S}(\mathbf{W}; B), \quad (4.11)$$

con

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho h \\ \rho hu \\ h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{W}; B) = \begin{pmatrix} \rho hu \\ \rho hu^2 + \frac{g}{2} \rho h^2 \\ hu \end{pmatrix}, \quad y \quad \mathbf{S}(\mathbf{W}; B) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g\rho h B_x + S_f \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Para llegar al esquema de segundo orden para (4.4), abordaremos primero la discretización de la topografía del fondo del canal $B(x)$. Desde que nuestra aproximación a la solución del sistema (4.4) será realizado por medio de la celda promedio $\overline{\mathbf{W}}_j$ de las cantidades de flujo sobre la malla de celdas $I_j := [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$, donde Δx es la escala espacial en la dirección del flujo, $x_{j\pm\frac{1}{2}} = x_j \pm \frac{1}{2}$ y con x_j como el centro de la celda, comenzaremos muestreando la topografía del fondo del canal en los puntos $x_{j+\frac{1}{2}}$. Para ésta muestra definimos el promedio de la celda de la topografía del fondo como

$$\overline{B}_j := \frac{B_{j+\frac{1}{2}} + B_{j-\frac{1}{2}}}{2}. \quad (4.13)$$

Con la partición anterior de la malla solución, denotamos por $\overline{\mathbf{W}}_j(t)$ el promedio de celda de $\mathbf{w}(x, t)$ en la celda I_j ,

$$\overline{\mathbf{W}}_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{w}(x, t) dx. \quad (4.14)$$

Integrando la ecuación (4.11) en cada celda I_j , obtenemos la formulación semi-discreta

$$\frac{d}{dx} \overline{\mathbf{W}}_j(t) + \frac{1}{\Delta x} \left(\mathbf{F} \left(\mathbf{w} \left(x_{j+\frac{1}{2}}, t \right) \right) - \mathbf{F} \left(\mathbf{w} \left(x_{j-\frac{1}{2}}, t \right) \right) \right) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{s}(\mathbf{w}(x, t), x) dx, \quad (4.15)$$

el cual es aproximado por

$$\frac{d}{dx} \overline{\mathbf{W}}_j(t) = -\frac{\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{s}(\mathbf{w}, x) dx. \quad (4.16)$$

Para tomar en cuenta la propagación de discontinuidades en las interfaces de las celdas, el flujo $\mathbf{F} \left(\mathbf{w}(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t) \right)$ es aproximado por el flujo numérico $\mathbf{H}_{j\pm\frac{1}{2}}(t)$ en [Kurganov et al.(2001)Kurganov, Noelle, and Petrova]

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{j\pm\frac{1}{2}}(t) = & \frac{a_{j\pm\frac{1}{2}}^+ \mathbf{f}(\mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^-(t)) - a_{j\pm\frac{1}{2}}^- \mathbf{f}(\mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^+(t))}{a_{j\pm\frac{1}{2}}^+ - a_{j\pm\frac{1}{2}}^-} \\ & + \frac{a_{j\pm\frac{1}{2}}^+ a_{j\pm\frac{1}{2}}^-}{a_{j\pm\frac{1}{2}}^+ - a_{j\pm\frac{1}{2}}^-} \left(\mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^+(t) - \mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^-(t) \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

en este caso, $\mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm(t)$ se recupera de los promedios de las celdas a través de una reconstrucción no oscilatoria polinomial a tramos

$$\mathbf{W}_{j+\frac{1}{2}}^- := \mathbf{p}_j\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right), \quad \text{y} \quad \mathbf{W}_{j+\frac{1}{2}}^+ := \mathbf{p}_{j+1}\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right), \quad (4.18)$$

donde las velocidades locales unilaterales $\alpha_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm$ en este esquema se toman de la siguiente manera

$$a_{j\pm\frac{1}{2}}^+ = \text{máx}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0\}, \quad \text{y} \quad a_{j\pm\frac{1}{2}}^- = \text{mín}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0\}.$$

En en la siguiente subsección se describe la forma que tiene \mathbf{p}_j .

4.5.2. Reconstrucción no Oscilatoria que Preserva la Positividad

Para recuperar los valores de los puntos en la interfaz $\mathbf{W}_{j\pm\frac{1}{2}}^\mp(t)$ de los promedios de celdas $\overline{\mathbf{W}}_j(t)$, seguimos las ideas en [Kurganov et al.(2007)Kurganov, Petrova, et al.] y buscamos una reconstrucción polinomial a tramos en la celda j dada por

$$\mathbf{p}_j(x) = \overline{\mathbf{W}}_j + \mathbf{W}'_j(x - x_j), \quad (4.19)$$

Con las pendientes limitadas \mathbf{W}'_j calculadas como en [van Leer(1997)],

$$\mathbf{W}'_j = \frac{1}{\Delta x} \text{minmod}(\alpha\Delta_- \overline{\mathbf{W}}_j, \Delta_0 \overline{\mathbf{W}}_j, \alpha\Delta_+ \overline{\mathbf{W}}_j), \quad \text{donde } 1 \leq \alpha \leq 2, \quad (4.20)$$

donde $\Delta_0 \overline{\mathbf{W}}_j$ es la diferencia centrada $(\overline{\mathbf{W}}_{j+1} - \overline{\mathbf{W}}_{j-1})/2$ y

$$\text{minmod}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} \text{mín}_j(x_j) & \text{si } x_j > 0 \forall j, \\ \text{máx}_j(x_j) & \text{si } x_j < 0 \forall j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aquí tomamos $\alpha = 1,5$.

Esta reconstrucción no-oscilatoria se aplica directamente a la descarga Q . Sin embargo, para poder asegurar la positividad de la profundidad de la capa de agua y reconocer estados estacionarios en reposo, los valores de ρh y h se obtienen primero reconstruyendo la altura total de la capa $w = h + B$. De esta manera, w permanece constante para estados estacionarios en reposo y su reconstrucción es trivial permaneciendo constante en todas las celdas. Esto nos ayudará a conseguir la propiedad de buen balance y así evitar oscilaciones espurias.

La reconstrucción de la altura de la capa de agua mediante el proceso arriba indicado puede generar valores de h negativos debido a errores numéricos. Sin embargo, siguiendo [Kurganov et al.(2007)Kurganov, Petrova, et al.] podemos corregir esta reconstrucción mediante el siguiente proceso:

If $w_{j-\frac{1}{2}}^+ < B_{j-\frac{1}{2}}$, entonces elegimos

$$w_{j-\frac{1}{2}}^+ := B_{j-\frac{1}{2}} + \delta_B, \quad w'_j := 2(\bar{w}_j - B_{j-\frac{1}{2}} - \delta_B), \quad \text{y} \quad w_{j+\frac{1}{2}}^- := \bar{w}_j + \frac{1}{2}w'_j, \quad (4.21)$$

para algún valor pequeño de δ_B , o si $w_{j+\frac{1}{2}}^- < B_{j+\frac{1}{2}}$, entonces elegimos

$$w_{j+\frac{1}{2}}^- := B_{j+\frac{1}{2}} + \delta_B, \quad w'_j := 2(B_{j+\frac{1}{2}} + \delta_B - \bar{w}_j), \quad \text{y} \quad w_{j-\frac{1}{2}}^+ := \bar{w}_j - \frac{1}{2}w'_j. \quad (4.22)$$

Esto nos da

$$h_{j\mp\frac{1}{2}}^\pm := w_{j\mp\frac{1}{2}}^\pm - B_{j\mp\frac{1}{2}} > 0. \quad (4.23)$$

Véase [Kurganov and Petrova(2007), Balbás and Hernandez-Duenas(2014)] para más detalles. Para los resultados numéricos en el capítulo 5, usamos $\delta_B = 10^{-3}$.

Regularización de la velocidad

Aquí definiremos

$$A = \rho h, \quad Q = \rho h u.$$

Aunque la positividad de la capa de agua se preserva, los valores puntuales podrían todavía ser muy pequeños cerca de frentes de interfases seco-mojado. Como resultado, al recuperar la velocidad mediante la relación $u = Q/(\rho h)$, se podrían generar valores muy grandes. Podemos prevenir esta situación mediante la siguiente regularización sugerida en [Kurganov and Petrova(2007)]:

$$u_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm = \frac{\sqrt{2} Q_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm A_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm}{\sqrt{\left(A_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm\right)^4 + \max\left(\left(A_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm\right)^4, \delta_A\right)}} \quad (4.24)$$

Las descargas $Q_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm$ se recalculan de nuevo mediante la relación

$$Q_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm = A_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm u_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm \quad (4.25)$$

para asegurar conservación. Los valores de δ_A se determinan de manera empírica. En esta tesis, elegimos $\delta_A = 10^{-12}$.

4.5.3. Propiedad de buen balance

Los flujos descritos por el sistema de aguas someras en este trabajo admiten estados estacionarios en descanso en donde la velocidad se anula $u = 0$ y la altura total es plana $w = h + B = \text{const}$. Los esquemas numéricos para resolver dicho sistema se dicen que están bien balanceados si son capaces de capturar esas soluciones en equilibrio de manera exacta.

Los autores de [Kurganov and Levy(2002)] y [Kurganov and Petrova(2007)] en donde se analizan flujos de agua en canales, proponen la reconstrucción de la altura total w , la cual permanece constante en estados estacionarios. La reconstrucción directa de la variable h generaría errores numéricos importantes debido al hecho de que no permanece constante en el dominio aún en estados estacionarios, variando de celda en celda. Cabe mencionar que la reconstrucción minmod arriba descrita y que preserva la positividad reconocería los estados constantes en la variable $w = h + B$, no afectando la propiedad de buen balance.

El resto de las variables satisfacen $(\cdot)_{j\mp\frac{1}{2}}^+ = (\cdot)_{j\mp\frac{1}{2}}^-$ en el caso de estados estacionarios en reposo, en donde $h + B$ and ρ son constantes y $u = 0$. Para obtener tal discretización de los términos fuente, comenzamos por escribir el flujo numérico para el balance de momento en estas condiciones de reposo,

$$-\frac{1}{\Delta x} \left[H_{j+\frac{1}{2}}^Q - H_{j-\frac{1}{2}}^Q \right] = -\frac{1}{\Delta x} \left(g(\rho_{j+\frac{1}{2}}^- h_{j+\frac{1}{2}}^- - \rho_{j-\frac{1}{2}}^+ h_{j-\frac{1}{2}}^+) (h_{j+\frac{1}{2}}^- + h_{j-\frac{1}{2}}^+) / 2 \right) = g\rho h_j \Delta B_j, \quad (4.26)$$

dado que $h_{j+\frac{1}{2}}^- - h_{j-\frac{1}{2}}^+ = -\Delta B_j = -(B_{j+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}})$ para los estados en reposo. De esta manera se puede buscar una discretización del promedio de celda del término fuente correspondiente $S^Q = g\rho h B_x$ que coincida con este flujo numérico para estados en reposo. Una discretización consistente se da en la siguiente proposición.

Proposición 21. *Consideremos la siguiente discretización de los términos fuente en (4.12)*

$$\frac{g}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}^+}^{x_{j+\frac{1}{2}}^-} g\rho h B_x dx \approx g\rho_j h_j \frac{B_{j+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \quad (4.27)$$

Entonces el esquema numérico dado por al ecuación (4.16) satisface la propiedad de buen balance. Esto es, reconoce los estados estacionarios en reposo.

4.5.4. Evolución

Una vez que los valores de la interfaz, los flujos numéricos y el promedio de los términos fuente han sido calculados, procedemos a resolver el sistema de EDO's (4.16). Para ello, consideramos el esquema como en [Gottlieb et al.(2001)Gottlieb, Shu, and Tadmor], el cual es un esquema Runge-Kutta de dos pasos que es fuertemente estable (Strong Stability Preserving). Está dado por

$$\mathbf{W}^{(1)} = \overline{\mathbf{W}}(t) + \Delta t \mathbf{C}[\overline{\mathbf{W}}(t)] \quad (4.28a)$$

$$\mathbf{W}^{(2)} = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{W}}(t) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{W}^{(1)} + \Delta t \mathbf{C}[\mathbf{W}^{(1)}]\right) \quad (4.28b)$$

$$\overline{\mathbf{W}}(t + \Delta t) := \mathbf{W}^{(2)}, \quad (4.28c)$$

con flujos

$$\mathbf{C}[\mathbf{W}(t)]_j = -\frac{\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}(v(t)) - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}(v(t))}{\Delta x} + \overline{\mathbf{S}}_j(t), \quad (4.29)$$

donde como sabemos, $\overline{\mathbf{S}}_j(t)$ describe los términos fuente de la formulación conservativa. El tamaño del paso Δt se determina de tal forma que satisfaga la condición *CFL* dada por

$$\nu = \Delta t \max \left[\frac{a}{\Delta x} \max_{j=1:N} \frac{A_{j+\frac{1}{2}}^- + A_{j-\frac{1}{2}}^+}{2\overline{A}_j}, \frac{a}{\Delta x} \max_{j=1:N} \frac{h_{j+\frac{1}{2}}^- + h_{j-\frac{1}{2}}^+}{2\overline{h}_j} \right] \leq \frac{1}{2}, \quad (4.30)$$

Como se puede ver en la siguiente demostración, la condición CFL de arriba garantiza la positividad tanto de la profundidad como de la densidad. Esto agrega estabilidad al método.

Proposición 22. *Considérese el esquema descrito arriba con datos iniciales que satisfacen $\overline{A}(t), h > 0$ son positivos y además*

$$\overline{w}_{1,j}(t) \geq \frac{B_{j-\frac{1}{2}} + B_{j+\frac{1}{2}}}{2}, \quad \overline{w}_{2,j}(t) \geq \overline{w}_{1,j} \quad \forall j.$$

Entonces, la evolución de la profundidad y densidad $\overline{\rho}(t + \Delta t), h(t + \Delta t)$ dada por el esquema Runge-Kutta (4.28) y con condición inicial CFL dada por (4.30) satisface

$$\overline{\rho}_j(t + \Delta t), \overline{h}_j(t + \Delta t) \geq 0 \quad \forall j.$$

La demostración es estándar y se puede encontrar por ejemplo en [Kurganov et al.(2007)Kurganov, Petrova, et al.].

Capítulo 5

Resultados Numéricos

En este capítulo se presentan los resultados de las pruebas numéricas hechas del esquema Central Upwind descrito en la sección anterior al modelo de aguas someras presentados en el capítulo 4. Cada ejemplo numérico presentado trata de verificar las distintas propiedades del esquema y comprobar su robustez. En particular, en aquellos problemas donde podemos calcular la solución exacta podemos comparar las aproximaciones numéricas, tal es el caso del problema de Riemann. En el segundo caso, se analizan una perturbación a un estado estacionario que corresponde a modificar el dato inicial. Por último, se analiza la pérdida de positividad en la profundidad del agua. Es importante hacer notar que la conservación de masa (ρh) se hereda a nivel discreto debido al diseño del método numérico. La evolución de dicha variable está dada por diferencias finitas que al tomar la integral de volumen se vuelve en una suma telescópica. Esto implica que la masa se conserva y puede evolucionar solo debido al cruce de partículas de fluido a través de las frentes.

5.1. Problema de Riemann

El primer problema a considerar es el problema de Riemann. Es una prueba básica porque podemos encontrar soluciones exactas en este caso y hacer comparaciones con las aproximaciones numéricas. De esta manera, podemos verificar si nuestro esquema numérico es preciso, por ejemplo, cerca de ondas de choque. La solución exacta se puede calcular mediante las invariantes de Riemann, como se describen brevemente en la sección 4.4 para ondas de rarefacción, o calculando los brincos en las ondas de choque mediante las condiciones de salto Rankine-Hugoniot. Una manera sencilla de calcular

soluciones exactas para el problema de Riemann es ir construyendo la solución campo por campo, como se detalla a continuación. Se pueden encontrar también detalles en [Hernandez-Duenas(2017)].

Primero, elegimos el estado a la derecha $h_r = 4, u_r = 6.5, \rho_r = 4$. Vamos a considerar una onda de choque en la familia de la derecha que se conecta con un estado intermedio (ρ_r^*, h_r^*, h_r^*) . En ese caso, la densidad es una invariante, por lo que tenemos $\rho_r^* = \rho_r$. Vamos a considerar un cambio en ρh dado por $\xi_r^* = 3$. Por ello tenemos entonces

$$h_r^* = \frac{\rho_r h_r + \xi_r^*}{\rho_r^*}.$$

Las condiciones Rankine-Hugoniot implican que el salto en la solución es un eigenvector de la matriz de Roe. Para dicha matriz, la velocidad de la onda de sonido está dada por

$$\tilde{c} = \sqrt{g \frac{h_r + h_r^*}{2}}.$$

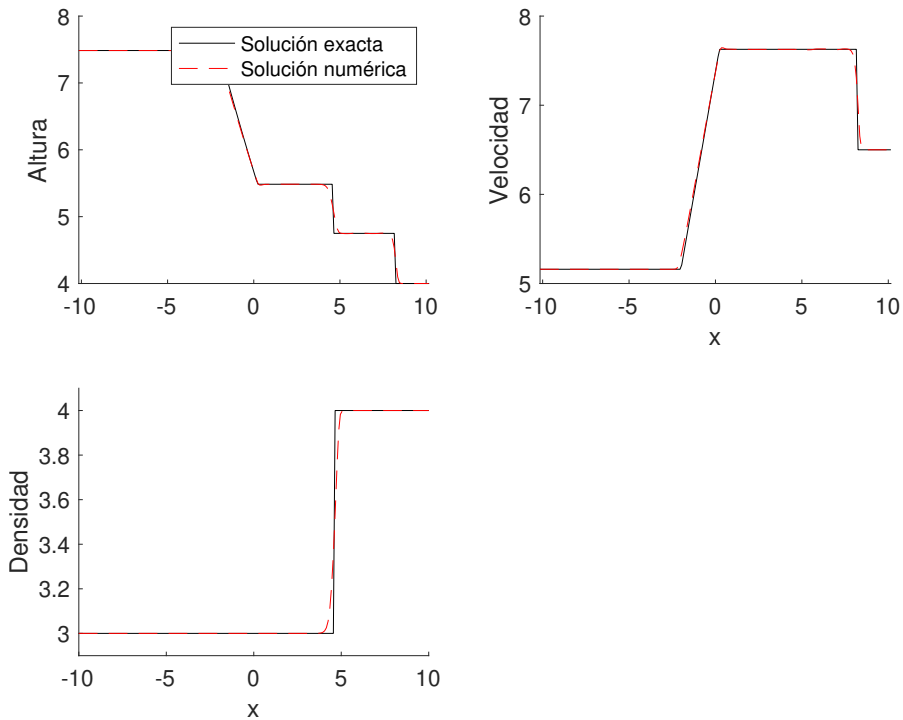


Figura 5.1: Problema de Riemann. Panel superior izquierdo: Altura $h+B$. Panel superior derecho: Velocidad. Panel inferior izquierdo: Densidad. La solución exacta se muestra en línea sólida mientras que la solución numérica en línea roja punteada.

Asimismo, la velocidad está dada por

$$u_r^* = u_r + \frac{\xi_r^* \tilde{c}}{\rho_r} \rho_r \sqrt{h_r h_r^*}.$$

Esto determina la onda de choque. El estado intermedio a la derecha está ahora conectado con un estado intermedio a la izquierda dado por una discontinuidad de contacto. En ese caso, tenemos un grado de libertad y elegimos entonces $\rho_\ell^* = 3$. La presión y la velocidad son las invariantes de Riemann en el caso de discontinuidades de contacto. Usando esta información, tenemos

$$u_\ell^* = u_r^*, p_r^* = g\rho_r^*(h_r^*)^2/2, p_\ell^* = p_r^*, h_\ell^* = \sqrt{2p_\ell^*/(g\rho_\ell^*)}, c_\ell^* = \sqrt{gh_\ell^*}.$$

Finalmente, elegimos una onda de choque en la familia de la izquierda. Dado que también tenemos un grado de libertad, elegimos $h_\ell = h_r + 2$. Utilizando la invariantes de Riemann para ondas de rarefacción explicadas en la sección 4.4, tenemos

$$\rho_\ell = \rho_\ell^*, c_\ell = \sqrt{gh_\ell}, u_\ell = u_\ell^* + 2(c_\ell^* - c_\ell).$$

Usando la notación $\lambda_1 = u - c, \lambda_2 u, \lambda_3 = u + c, c = \sqrt{gh}, \xi = x/t$, la solución exacta está entonces dada por

$$(h, u, \rho)(x, t) = \begin{cases} (h_\ell, u_\ell, \rho_\ell) & \text{si } x/t \leq \lambda_{1,\ell} \\ ((\sqrt{h_\ell} - (\xi - \lambda_{1,\ell})/(3\sqrt{g}))^2, \xi + c, \rho_\ell) & \text{si } \lambda_{1,\ell} \leq \xi \leq \lambda_{1,\ell}^* \\ (h_\ell^*, u_\ell^*, \rho_\ell^*) & \text{si } \lambda_{1,\ell}^* \leq x/t \leq \lambda_{2,\ell}^* \\ (h_r^*, u_r^*, \rho_r^*) & \text{si } \lambda_{2,\ell}^* = \lambda_{2,r}^* \leq x/t \leq s_{r,m} \\ (h_r, u_r, \rho_r) & \text{si } s_{r,m} \leq x/t, \end{cases}$$

donde $s_{r,m} = \hat{u}_{r,m} + \tilde{c}_{r,m}$, $\tilde{c}_{r,m} = \sqrt{g^*(h_r + h_r^*)/2}$, $\hat{u}_{r,m} = (\sqrt{h_r} * u_r + \sqrt{h_r^*} * u_r^*) / (\sqrt{h_r} + \sqrt{h_r^*})$.

Para los valores arriba descritos, la condición inicial está dadas por

$$(\rho, h, u)(x) = \begin{cases} (3,7.49,5.16) & \text{si } -10 \leq x < 0 \\ (4,4,6.5) & \text{si } 0 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

La solución a este problema de Riemann consiste de una onda de rarefacción en la primer familia (con eigenvalor $u - c$), una discontinuidad de contacto (eigenvalor u) y una onda

de choque en la tercer familia (eigenvalor $u+c$). Los dos estados intermedios se obtuvieron mediante el procedimiento en [Hernandez-Duenas(2017)]. Están dados por

$$(\rho_\ell^*, h_\ell^*, h_\ell^*) = (3,7.63,5.49), \quad (\rho_r^*, h_r^*, h_r^*) = (4,7.63,4.75).$$

La topografía en este caso es plana $B = 0$ y $g = 9,81$. La solución se calcula a tiempo $t = 0,6$ usando un número CFL de 0.45 y 200 puntos en la malla. Se usaron condiciones de frontera libres, de tipo Neumann cero en ambos extremos. Las condiciones de frontera se incorporan en el algoritmo numérico mediante el uso de las celdas fantasmas. La actualización de cada celda dentro del dominio requiere de los datos de las celdas a la izquierda y derecha. Es por ello que la primer y última celda requiere entonces de dichas celdas fantasmas. En ellas mismas que se incorporan las condiciones de frontera. Por ejemplo, si fueran condiciones de frontera Dirichlet, simplemente se fijan los valores elegidos en las celdas fantasma. En nuestro caso, estamos usando condiciones de frontera Neumann para mantener la frontera libre. Esto se traduce en extrapolar los valores de la primer y última celda hacia las celdas fantasmas. Mientras la propagación de ondas no lleguen a la frontera, no habrá cambios en ésta.

La solución se muestra en la figura 5.1. Como podemos observar, la solución numérica se aproxima bastante bien a la solución exacta. Se captura bastante bien la velocidad de propagación de la onda de choque. Esto es gracias a que el método numérico es conservativo y de alta resolución.

5.2. Perturbación a un estado estacionario

En esta prueba numérica verificaremos la propiedad de buen balance. La condición inicial está dada por:

$$(\rho, h, u)(x) = \begin{cases} (1, 1.5 - B(x) + 0.5, 0) & \text{si } -9 \leq x < -8 \\ (1, 1.5 - B(x), 0) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Es decir, la superficie total $h + B$ es constante, excepto en el intervalo $[-9, -8]$ en donde hay una perturbación de 0.5 unidades. La densidad es constante 1, por lo que es uniforme. La topografía está dada por

$$B(x) = 1.2 \max(1 - 1(x - 3)^2, 0),$$

la cual representa una bulto en el fondo del canal.

La solución numérica a distintos tiempos se puede encontrar en la figura 5.2. La altura total se muestra en la columna izquierda. La topografía se puede distinguir con la línea sólida gruesa. La velocidad se encuentra en la columna intermedia, mientras que la densidad se localiza a la derecha. De arriba hacia abajo, la solución se muestra a tiempos $t = 0, 0.2, 3, 10$. La perturbación inicial se rompe en dos componentes que se propagan en direcciones opuestas, como lo indica la velocidad. Por otro lado, la densidad permanece constante 1. Eso quiere decir que la uniformidad de la densidad se mantiene a nivel numérico. Después de un tiempo largo ($t = 10$), la solución vuelve a recuperar su estado inicial. Eso es gracias al hecho de que el método numérico está bien balanceado. De lo contrario, la solución final podría exhibir errores numéricos significativos que no corresponden a un estado estacionario.

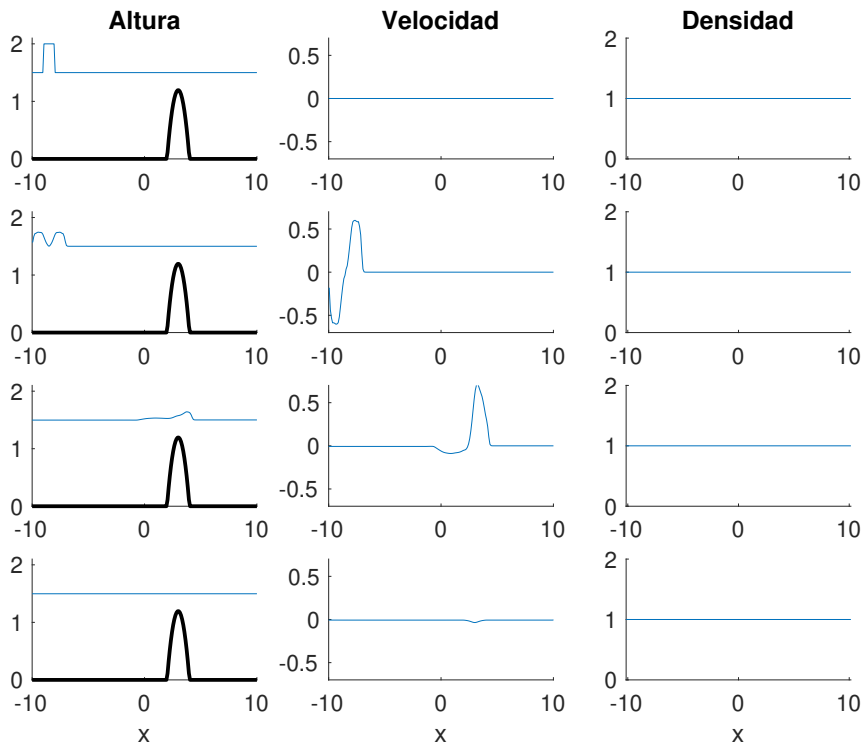


Figura 5.2: En cada terna horizontal de paneles se presenta la altura $h+B$, velocidad u y densidad ρ en los tiempos $t = 0, 0.2, 3, 10$ en dirección superior a inferior respectivamente.

5.3. Positividad

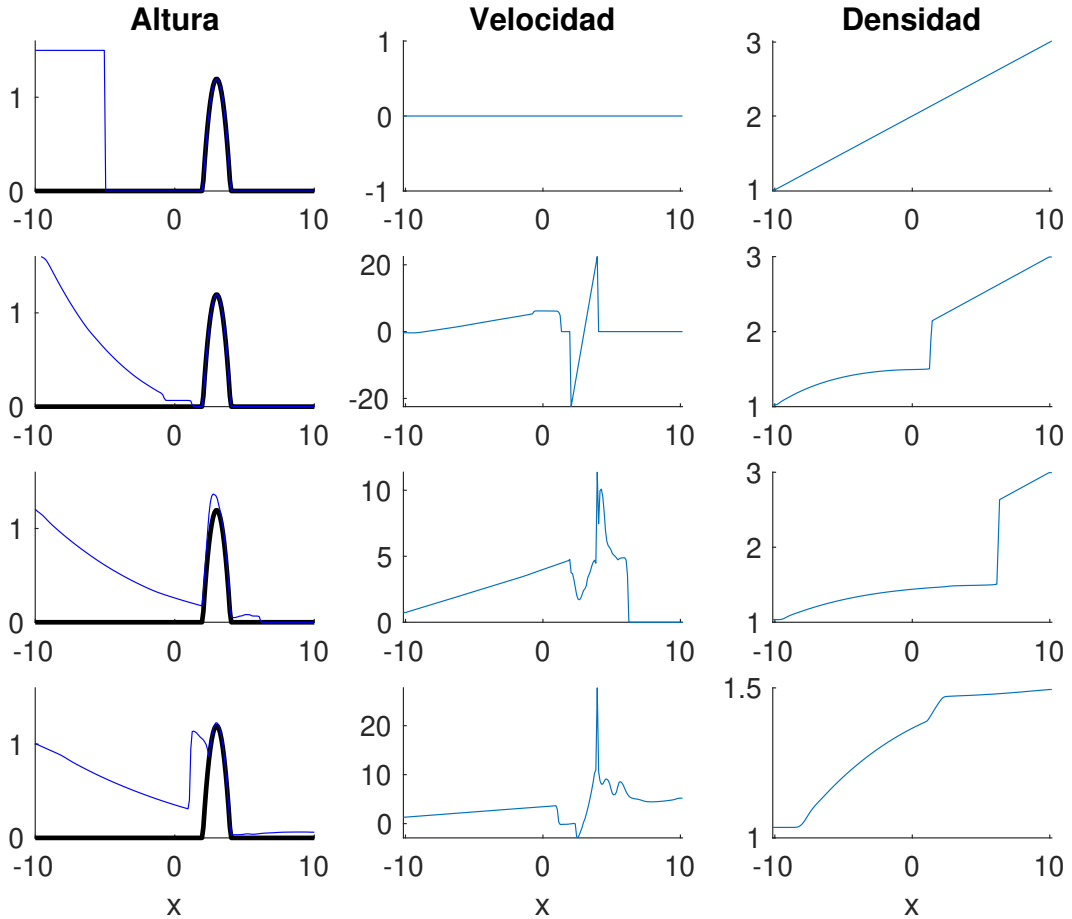


Figura 5.3: Solución al sistema de ecuaciones de aguas someras con gradientes de densidad asociado a las condiciones iniciales en la ecuación (5.1). En cada terna horizontal, se muestra la altura total en línea sólida azul (topografía con línea sólida negra y gruesa), velocidad y densidad. En orden descendiente, la solución se calcula a tiempos, $t = 0, 1, 2, 3$.

La última prueba corresponde a verificar que el esquema numérico preserva la propiedad de positividad. La condición inicial está dada por:

$$(\rho, h, u)(x) = \begin{cases} (1 + (x + 10)/10, 1.5, 0) & \text{si } -10 \leq x < -5 \\ (1 + (x + 10)/10, 10^{-5}, 0) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Es decir, la superficie total $h + B$ presenta un estado seco excepto en el intervalo $[-10, -5]$

donde hay un bloque de fluido de altura 1.5 unidades. En ese intervalo, la topografía se anula, por lo que la altura total sigue siendo 1.5. La otra sección representa un estado seco, para poder modelar la evolución de frentes seco-mojado. Sin embargo, el modelo pierde hiperbolicidad cuando la profundidad se anula. Por esta razón, elegimos una altura positiva pero muy chica $h = 10^{-5}$ para $-5 \leq x \leq 10$. La densidad inicial es función lineal de la posición del canal, siendo 1 en la frontera izquierda y aumentando hasta 3 en la frontera derecha. La topografía esta dada por

$$B(x) = 1.2 \text{máx}(1 - 1(x - 3)^2, 0),$$

la cual representa un bulto en el fondo del canal. Cabe mencionar que en este caso se consideran condiciones de frontera Neumann para mantenerla libre.

La solución numérica a distintos tiempos se puede visualizar en la figura 5.3. La altura total se muestra en la columna de la izquierda, donde la topografía se puede distinguir con la línea sólida gruesa. La velocidad se encuentra en la columna intermedia, mientras que la densidad se localiza a la derecha. De arriba a abajo, la solución se muestra en los tiempos $t = 0, 1, 2, 3, 4$. La masa de fluido inicial se propaga en ambas direcciones, como lo indica la velocidad. Por otro lado la densidad va disminuyendo a medida que la onda se propaga, indicando que hay un traslado de sedimentos. Como podemos observar, la condición inicial es consistente con un canal con compuerta en donde el agua permanece de un lado, y dicha compuerta se abre súbitamente. El frente seco-mojado se propaga hace la derecha. A tiempo $t = 1$, el frente se acerca a la topografía. A tiempo $t = 2$, podemos ver que el frente logró pasar a través del tope, inundando el otro lado. En el tiempo final $t = 3$, podemos observar que parte de la onda de propagación se transmite y parte se refleja debido al obstáculo que representa la topografía. Este es una prueba numérica particularmente difícil para muchos métodos numéricos. El reto se encuentra en que el frente seco-mojado debe manejar profundidades muy pequeñas (10^{-5} en nuestro caso), y los errores numéricos pueden generar profundidades negativas, las cuales no son físicas y a menudo hace que el método numérico falle drásticamente. Nuestro método numérico garantiza que la profundidad será siempre no negativa, lo cual agrega estabilidad y precisión en la evolución de la solución en dichas situaciones. La velocidad es inicialmente cero, mostrando una evolución con discontinuidades a tiempo positivo. Esto puede ocurrir por la presencia de estados casi secos, en donde no hay fluido que mover. La velocidad se mantiene estable mediante procesos de regularización, en donde la velocidad con la ecuación (4.24). Se puede observar por ejemplo en el panel inferior que la velocidad es negativa en las regiones en donde la onda se refleja al chocar contra la topografía, mostrando consistencia con las observaciones de arriba.

Capítulo 6

Conclusiones

El trabajo de esta tesis se enfocó en temas de modelación de fenómenos naturales dictados por las ecuaciones de aguas someras con fluctuaciones de densidad en la dirección horizontal. Para su análisis, comenzamos en el capítulo 2 con la descripción de procesos físicos que se pueden modelar mediante Ecuaciones Diferenciales Parciales. Revisamos la literatura presentando la clasificación clásica de EDPs que explican comportamiento cualitativos de sus soluciones. En el capítulo 3 pasamos al caso particular de leyes de conservación hiperbólicas. Se describe la gran variedad de problemas que se pueden expresar como una ley de conservación hiperbólica. En esta capítulo también se revisa la extensa literatura sobre las soluciones clásicas y las débiles, la existencia y unicidad de soluciones débiles entrópicas y la estructuras de las soluciones a sistemas hiperbólicos no-lineales entre otros aspectos fundamentales. El capítulo 4 se dedica a la discusión de los métodos numéricos para aproximar soluciones, así como la manera tradicional de evaluar la precisión de éstos. El capítulo 4 finalmente presenta el modelo de aguas someras con gradientes de densidad. Se detallan tanto la versión bi-dimensional como la uni-dimensional, las propiedades hiperbólicas y la estructura de soluciones a los problemas de Riemann. También se incluye la descripción del método numérico central-upwind, adaptado al modelo presente. Finalmente, el capítulo 6 presenta los resultados numéricos, resaltando las bondades que ofrece este método numérico en el presente contexto.

Bibliografía

- [Whi(1974)] Linear and Nonlinear Waves. Wiley-Interscience, 1974.
- [Ames(1977)] William F. Ames. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press, 2 edition, 1977.
- [Balbás and Hernandez-Duenas(2014)] Jorge Balbás and Gerardo Hernandez-Duenas. A positivity preserving central scheme for shallow water flows in channels with wet-dry states. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 48(3):665–696, 2014.
- [Balbás and Karni(2013)] Jorge Balbás and Smadar Karni. A non-oscillatory central scheme for one-dimensional two-layer shallow water flows along channels with varying width. Journal of Scientific Computing, 55(3):499–528, 2013.
- [Chern and Colella(1987)] I-Liang Chern and Phillip Colella. A conservative front tracking method for hyperbolic conservation laws. LLNL Rep. No. UCRL-97200, Lawrence Livermore National Laboratory, 1987.
- [Cockburn(2001)] Bernardo Cockburn. Devising discontinuous galerkin methods for non-linear hyperbolic conservation laws. Journal of Computational and Applied Mathematics, 128(1-2):187–204, 2001.
- [Godlewski(2021)] Pierre-Arnaud Godlewski, Edwige & Raviart. Numerical Approximation of Hyperbolic Systems. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, NY, 2 edition, 2021.
- [Gottlieb et al.(2001)Gottlieb, Shu, and Tadmor] S. Gottlieb, C.-W. Shu, and E. Tadmor. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. SIAM Rev., 43(1):89–112 (electronic), 2001. ISSN 0036-1445. doi: 10.1137/S003614450036757X. URL <http://dx.doi.org/10.1137/S003614450036757X>.
- [Hernandez-Duenas(2017)] Gerardo Hernandez-Duenas. A hybrid method to solve shallow water flows with horizontal density gradients. Journal of Scientific Computing, 73(2):753–782, 2017.

- [Kurganov and Levy(2002)] A. Kurganov and D. Levy. Central-upwind schemes for the Saint-Venant system. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 36(3):397–425, 2002. ISSN 0764-583X. doi: 10.1051/m2an:2002019. URL <http://dx.doi.org/10.1051/m2an:2002019>.
- [Kurganov and Petrova(2007)] A. Kurganov and G. Petrova. A second-order well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the Saint-Venant system. Commun. Math. Sci., 5(1):133–160, 2007. ISSN 1539-6746. URL <http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.cms/1175797625>.
- [Kurganov and Tadmor(2000)] A. Kurganov and E. Tadmor. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. J. Comput. Phys., 160(1):241–282, 2000. ISSN 0021-9991.
- [Kurganov and Petrova(2009)] Alexander Kurganov and Guergana Petrova. Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations. SIAM Journal on Scientific Computing, 31(3):1742–1773, 2009.
- [Kurganov et al.(2001)Kurganov, Noelle, and Petrova] Alexander Kurganov, Sebastian Noelle, and Guergana Petrova. Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and hamilton–jacobi equations. SIAM Journal on Scientific Computing, 23(3):707–740, 2001.
- [Kurganov et al.(2007)Kurganov, Petrova, et al.] Alexander Kurganov, Guergana Petrova, et al. A second-order well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the saint-venant system. Communications in Mathematical Sciences, 5(1):133–160, 2007.
- [Lax(1957)] P.D. Lax. Hiperbolic Systems of Conservation Laws, II. Comm. Pure Appl. Math., 10, pp. 537-566, 1957.
- [Lax(1972)] P.D. Lax. Hiperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. SIAM Regional Conference Series in applied Mathematics n.11, 1972.
- [LeVeque(1992)] Randall J LeVeque. Numerical methods for conservation laws, volume 214. Springer, 1992.
- [Oleinik(1957)] Olga Arsen’evna Oleinik. Discontinuous solutions of non-linear differential equations. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 12(3):3–73, 1957.
- [R. D. Richtmyer(1967)] K. W. Morton R. D. Richtmyer. Difference Methods for Initial-value Problems. Wiley-Interscience, 1967.

- [S. Gottlieb(1998)] C.-W. Shu S. Gottlieb. Total variation diminishing runge-kutta schemes. Math. Comp., 67(221):73–85, 1998.
- [Shu(1988)] C.-W. Shu. Total-variation-diminishing time discretizations. J. Sci. Statist. Comput., (9):1073–1084, 1988.
- [Smoller(1983)] J. Smoller. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer, 1983.
- [van Leer(1997)] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method [J. Comput. Phys. **32** (1979), no. 1, 101–136]. J. Comput. Phys., 135(2):227–248, 1997. ISSN 0021-9991.
- [Vázquez(2007)] Miguel S.; Meddahi Salim Vázquez. Leyes de Conservación. Universidad de Oviedo, 2007.